UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea in Matematica

Estensione del modello di Lanchester per la competizione pubblicitaria

Candidato:

Riccardo Mazzon

Matr. n. 1201769

Relatore:

Ch. Prof. Bruno Viscolani

a.a. 2021/2022

INDICE

Premessa

Prima di esporre il contenuto urge fare una premessa in merito al materiale usato per il seguente lavoro. Affianco al titolo di ogni capitolo ho citato il rispettivo articolo da cui ho tratto le informazioni. Tutte le formule matematiche che incontrerete nei 3 capitoli, sono prese dagli articoli che ho citato all'inizio di ognuno di essi (uno per ogni rispettivo capitolo). Per quanto riguarda le interpretazioni dei risultati invece, sono di mia produzione soltanto quelle in cui la trattazione avviene in prima persona (singolare), mentre le altre sono state sviluppate dagli autori dei lavori citati.

Capitolo 1 : INTRODUZIONE AL MODELLO DI LANCHESTER***[1]***

Cominceremo questa trattazione con il descrivere il modello di Lanchester, il quale sta alla base dell'argomento che andremo a studiare.

Lanchester è stato un ingegnere britannico principalmente conosciuto per il suo lavoro che ha portato alla costruzione della prima macchina con motore a combustione interna e per i suoi contributi allo sviluppo della teoria del volo, i cui risultati esercitano una influenza persino ai giorni nostri. Le sue ricerche però non si limitarono all'ambito ingegneristico: Lanchester cercò di identificare i principi che regolavano le guerriglie e di descriverli attraverso semplici modelli matematici.

I modelli che presentiamo in questa sezione sono tre: il modello lineare, il modello quadratico e infine il modello ibrido (che si presenta come una via di mezzo tra i due*).*

A tal proposito immaginiamo di osservare la battaglia tra due fazioni opposte ,le quali composte da rispettivamente **x** e **y** unità al tempo **t.** Nel modello di Lanchester le quantità x e y sono supposte continue e differenziabili rispetto al tempo. La forma del modello lineare si compone di una coppia di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -bxy \\ \frac{dy}{dt} = -axy \end{cases} \qquad (1)$$

e date le condizioni iniziali x(0)=M e y(0)=N, avremo la relazione :

$$ax\text{-}by = aM\text{-}bN = K_l$$

Si ponga particolare attenzione alle due costanti **a** e **b** ,che sono chiamati coefficienti di attrito e che danno una misura dell'efficienza dei due schieramenti. Il fatto che *x* e y soddisfano una relazione lineare , conferisce al modello il nome di **Lanchester Linear Law.**

Nel modello quadratico invece, la coppia di equazioni presenta la seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by \\ \frac{dy}{dt} = -ax \end{cases} \qquad (2)$$

Assumendo vere le stesse condizioni iniziali di prima , stavolta x e y rispettano la relazione:

$$ax^2 - by^2 = aM^2 - bN^2 = K_s$$

Questa relazione da a questo modello il nome di **Lanchester's Quadratic Law.**

Il modello lineare sembra lasciar trasparire il concetto di '*dispersione*' o '*lack of concentration*'. Lanchester afferma che questo modello è utile per modellizzare quella che lui chiama '*ancient walfare*': in questa situazione ci dobbiamo immaginare due schieramenti opposti, consistenti di un certo numero di unità, che a turno prendono la mira e si sparano. Queste due forze opposte però, prendono la mira sapendo che le forze nemiche sono confinate dentro una certa area, ma senza poter mirare a uno specifico obbiettivo dentro l'area. Il modello quadratico invece mostra quanto sia più efficiente 'dividere' il nemico e concentrarsi a turno sulle frazioni. Il modello rappresenta quella che Lanchester chiama 'modern walfare'.

L'ultimo modello che viene presentato è quello ibrido, in un cui le forze x usano la strategia della modern walfare mentre le y quella della ancient walfare. Otteniamo allora la coppia :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -bxy \\ \frac{dy}{dt} = -ax \end{cases}$$

Sebbene anche gli ultimi due modelli possano offrire spunti molto interessanti, nel prosegue della trattazione faremo riferimento solamente al modello lineare, il quale sarà usato come base per lo sviluppo del modello che si promette di studiare le strategie pubblicitarie ottimali in un contesto duopolistico.

Capitolo 2: Il modello di Lanchester per le strategie pubblicitarie[2]

Quello che vogliamo fare ora è estendere il modello di Lanchester allo studio della concorrenza pubblicitaria tra due aziende in un contesto in cui la velocità con cui un'impresa attrae clienti dai suoi concorrenti dipende non solo dal proprio sforzo pubblicitario, ma anche dagli sforzi dei suoi rivali. A questo proposito definiremo le equazioni differenziali che regolano l'evoluzione della quota di mercato delle varie aziende e cercheremo di risolverle dopo aver specificato tre tipi differenti di quelli che sono chiamati **Attraction rate**, i quali rivestiranno un ruolo fondamentale nella nostra analisi.

2.1 Introduzione al modello

Per introdurre il modello partiamo da un esempio che si rifà alle riflessioni sviluppate da Lanchester e che allo stesso tempo ci permette di definire le basi per il nostro lavoro.

Immaginiamo di osservare una battaglia tra due schieramenti che chiamiamo ***i*** e ***j*** **,** composti ad un certo tempo ***t*** di $\boldsymbol{X_i(t)}$ *e* $\boldsymbol{X_j(t)}$ forze. Ogni forza ha un numero iniziale fissato di truppe e non sono possibili rinforzi. L'obbiettivo, che nel modello di Lanchester era quello di eliminare le truppe nemiche, ora viene modificato: i due schieramenti sono interessati a catturare le truppe gli avversari, imponendo ai prigionieri di combattere per loro. Supponiamo poi che ogni soldato dell'armata ***i*** abbia un tasso di cattura costante (una misura dell'efficacia del combattimento) pari ad $\boldsymbol{a_i}$, proporzionale al numero di soldati rimasti nella controparte. Possiamo allora descrivere l'evoluzione di $\boldsymbol{X_i(t)}$ attraverso la relazione:

$$\frac{dX_i}{dt} = a_i X_j(t) \; - \; a_j(t) X_i(t)$$

dove la parte a sinistra tiene conto dei soldati nemici catturati mentre quella a destra delle perdite per colpa della cattura da parte degli avversari.

Chiaramente questo esempio non rappresenta ciò che normalmente accade in una battaglia. Tuttavia, il modello ha senso se facciamo il seguente parallelismo:

(i) le forze armate sono sostituite dalle aziende

(ii) un soldato è sostituito con un'unità di quota di mercato (o vendite)

(iii) catturare gli avversari trova il suo corrispondente nei tassi di sforzo pubblicitario (spesa).

Con questa interpretazione il modello afferma che l'evoluzione della quota di mercato (o delle vendite) di un'impresa è influenzata dalle due imprese attraverso i rispettivi sforzi pubblicitari. Un'azienda fa pubblicità con lo scopo di aumentare la sua quota di mercato che può essere ottenuta solo attirando clienti dai concorrenti. Il tasso con cui un'azienda è in grado di rubare clienti è chiamato tasso di attrazione e svolgerà un ruolo importante nell'analisi.

2.2 La formalizzazione del modello

Cominciamo con il definire il modello per N≥ 2 aziende .Fissiamo come istante iniziale della nostra osservazione t=0 e come istante finale t=T con **t** nei reali e **T** finito. Sia poi $X_i(t) \in [0,1]$ la quota di mercato dell'azienda **i** al tempo t$\in [0,T]$ con $i \in (1, \dots N)$. Definiamo inoltre con $a_i(t)$ la spesa pubblicitaria a carico dell'azienda **i.** Il modello assume allora che l'evoluzione della quota di mercato i-esima sia :

$$\frac{dX_i}{dt}=k_i a_i(t) \sum_{j=1, j\neq i}^{N} X_j \text{ (t) } -[\![\sum_{j=1, j\neq i}^{N} k_j a_j(t)]\!] X_i(t)= k_i a_i(t)(1-X_i(t))- [\![\sum_{j=1, j\neq i}^{N} k_j a_j(t)]\!] X_i(t)$$

dove in questa equazione i coefficienti $\boldsymbol{k_i}$ riflettono l'efficacia della spesa nel mercato, mentre $\mathbf{k_i a_i}(\mathbf{t})$ vengono chiamati **attraction rate** e misurano la capacità di una azienda di attrarre i consumatori degli N-1 rivali. Nel caso di duopolio possiamo semplificare scrivendo l'equazione:

$$\frac{dX_i}{dt}=k_i a_i(t)\big(1-X_i(t)\big)-k_j a_j(t) X_i(t)$$

Il primo termine sul lato destro rappresenta l'aumento della quota di mercato dell'impresa i, causato da un afflusso di clienti dell'impresa j. Il secondo termine rappresenta la diminuzione della quota di mercato causato da clienti di i che vengono catturati dall'azienda j. I clienti passano da un'azienda all'altra per un solo motivo: la spesa pubblicitaria dell'impresa rivale. Quindi, la pubblicità di un'azienda è mirata ad attaccare la base di clienti dei concorrenti. Per questo motivo, a_i è chiamato **"pubblicità offensiva".** Il modello presenta inoltre un 'altra semplificazione: non tiene conto del fatto che alcuni clienti potrebbero uscire dal mercato ed altri entrarci per interesse dei prodotti offerti. L'uso di un tasso di attrazione come βiai(t) quindi, riflette l'ipotesi che l'evoluzione del mercato è influenzato da una sola cosa: l'importo assoluto della spesa pubblicitaria dell'azienda i.

Uno degli obbiettivi di questa ricerca è proprio dare una formulazione più generale degli attraction rate. In particolare siamo interessati a costruire un modello in cui ad ogni istante nel tempo l'i-esimo attraction rate sia funzione di tutti gli altri N-1 delle altre aziende.

Questa analisi preliminare ci permette ora di fare un passo avanti nella descrizione del modello.

Sia X(t)=($X_1(t), \dots . X_N(t)$) il vettore delle variabili di stato, rappresentanti le quote di mercato al tempo t. Assumendo come prima che lo studio cominci in un tempo t=0 e si concluda in tempo T finito, imponiamo che le quote di mercato debbano soddisfare i vincoli : $\boldsymbol{X_i(t)} \in (\mathbf{0},\mathbf{1})$ ed $\sum_{i=0}^{N} \boldsymbol{X_i(t)}$**=1 .** Definiamo il vettore a(t)=($a_1(t), \dots . a_N(t)$) rappresentante le spese pubblicitarie e sia $\boldsymbol{g_i\big(a(t)\big)}$ l'attraction rate dell'i-esima azienda (da notare che dipende dalle spese pubblicitarie di tutte le aziende). La funzione $\boldsymbol{g_i}$ assume solo valori non negativi e inoltre soddisfa le condizioni: $\sum_{i=i}^{N} \boldsymbol{g_i\big(a(t)\big)} = \boldsymbol{b}$ per ogni a(t) $\in [0,\infty)$ ed $\frac{\partial g_i(a)}{\partial a_i}$**>0** per ogni i, dove b è una costante che può essere posta uguale a 1. Possiamo dare una interpretazione a queste ipotesi fatte: vedendo l'attraction rate la probabilità che una certa azienda i riesca ad attrarre nuovi consumatori, poniamo la somma delle probabilità proprio uguale a 1.

Ritornando ora al modello, avremo che esso diventa:

$$\frac{dX_i}{dt} = g_i\big(a(t)\big)(1 - X_i(t)\ ) \text{-} \left[\!\left[\sum_{j=1, j\neq i}^{N} g_i\big(a(t)\big)\right]\!\right] X_i(t)$$

$$X_i(0) = x_{io} \quad i \in (1, \dots N)\ t \in [0, T]$$

dove $\boldsymbol{x_{io}} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ sono dati e $\sum_{i=0}^{N} \boldsymbol{x_{io}}$**=1.** Usando le ipotesi fatte sugli attraction rate, possiamo ottenere una buona semplificazione attraverso una semplice manipolazione algebrica :

$$\frac{dX_i}{dt} = g_i\big(a(t)\big) - X_i(t) \qquad X_i(0) = x_{io} \quad i \in (1, \dots N)\ t \in [0, T]$$

in cui è interessante notare come le variabili di controllo a(t) e la variabile di stato X(t) appaiono separate nella parte destra della prima uguaglianza.

L'ultima cosa che rimane da definire il funzionale obbiettivo per le varie aziende. Non è limitante supporre che le aziende programmino il da farsi per un periodo breve di tempo, per cui il funzionale avrà la forma:

$$J_i(a_i) = \int_0^T [p_i X_i(t) - a_i(t)]\, dt$$

dove $p_i > 0$ indica il profitto per unità di quota di mercato.

Il problema descritto in questo modo presenta delle buone proprietà, infatti la funzione di stato appare linearmente nella funzione obbiettivo e la variabile di stato e quelle di controllo non sono moltiplicate tra loro. Questo ci aiuta nella ricerca dell'equilibrio. Supporremo che tutte le aziende usino una strategia che chiamiamo Markoviana e che indichiamo con $a_i(X, t)$. Questo tipo di strategia assume che in ogni instante nel tempo le aziende sappiamo con precisione le quote di mercato delle rivali e prendano decisioni sul come investire denaro in pubblicità in funzione di questo.

Definiamo ora la funzione valore:

$$V^i(X, t) = max_{a_i(s) \geq 0} \int_0^T [p_i X_i(s) - a_i(s)]\, ds$$

Che potrebbe essere interpretata come il valore della azienda i al tempo t con X vettore delle quote di mercato al tempo t. Risulta utile poi definire le N-1 spese pubblicitarie di tutte le aziende apparte i come un vettore

$$a_{-i}(t) \triangleq (a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots\ a_N)$$

E le derivate parziali della funzione valore

$$V_{X_k}^i \triangleq \frac{\partial V^i}{\partial X_k}(X, t) \qquad V_t^i \triangleq \frac{\partial V^i}{\partial t}(X, t)$$

Dopo aver fatto questo siamo pronti a dare la definizione di 'Markovian Nash Equilibrium': Una N-tupla costituisce un MNE se le funzioni valore sono continue e differenziabili e risolvono la equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\boldsymbol{-V_t^i = max_{a_i(t) \geq 0} \{p_i X_i - a_i + V_{X_i}^i [g_i\big(a_i, a_{-i}^*(X, t)\big) - X_i]\} + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} V_{X_j}^i\ [g_j\big(a_i, a_{-i}^*(X, t)\big) - X_j]\ \ ; i \in (1, \dots N)}$$

dove $a^*_{-i}(X,t)$ è un vettore N-1 dimensionale fissato delle strategie all'equilibrio.

Possiamo ora enunciare un risultato di grande rilevanza per la nostra indagine:

il differential game da noi rappresentato ammette un MNE, dove la funzione valore vale:

$$V^i(X_i,t)=\alpha_i(t)+X_i\gamma_i(t)$$

mentre $\alpha_i(t)$ ed $\gamma_i(t)$, risolvono le equazioni: $\dot{\gamma_i}(t)= -p_i+\gamma_i(t) \qquad \gamma_i(T)=0$

$$\dot{\alpha_i}= -\gamma_i g_i(a^*(t))+a_i^*(t) \quad a_i(T)=0$$

Cominciamo ad analizzare prima $\gamma_i(t)$. Per prima cosa posso notare che $\gamma_i(t)=\frac{\partial V^i}{\partial X_i}$, ragione per cui essi possono essere considerati dei prezzi ombra degli X_i: rappresentano la variazione di profitto ottimo della azienda i-esima causato dell'incremento della sua quota di mercato. Inoltre possiamo determinare esplicitamente gli $\gamma_i(t)=p_i[1-e^{-(T-t)}]$, i quali risultano essere positivi in tutto l'intervallo in cui sono definiti, in accordo con il fatto che l'aumento della quota di mercato causa un aumento del valore della azienda i-esima.

Per quanto riguarda gli altri termini invece ,abbiamo che le soluzione risultano essere:

$$a_i^*=argmax_{a_i\geq 0}\{\gamma_i(t)g_i(a_i,a^*_{-i})-a_i\}$$

$$X_i^*(t)=x_{io}e^{-t}+e^{-t}\int_0^t g_i(a^*(s))\,e^{-s}$$

Dove con l'asterisco indichiamo che ci riferiamo alle soluzione per l'equilibrio. Possiamo notare che la quota di mercato non può essere determinata esplicitamente se non si dichiarano gli attraction rate g_i. Tema della prossima sezione sarà allora specificare quest'ultimi , cercando poi di determinare in maniera completa X_i, dando un'interpretazione alla soluzione trovata inserendola nel contesto che stiamo studiando.

2.3 Specifica degli attraction rates

Il primo attraction rate che andiamo a studiare sarà quello di Tullock. Quest'ultimo presenta la forma:

$$g_i(a)=\frac{a_i}{a_i-a_j}$$

e le sue derivate parziali risultano essere :

$$\frac{\partial g_i}{\partial a_i}=\frac{a_j}{(a_i+a_j)^2} \qquad \frac{\partial^2 g_i}{\partial {a_i}^2}=-\frac{-2a_j}{(a_i+a_j)^3}$$

che mi dice che la funzione risulta essere concava in a_i. Studiamo ora le condizioni di ottimalità:

$$\gamma_i\frac{a_j^*}{(a_i+a_j^*)^2} \quad \binom{<1}{=1} \qquad \text{se } a_i^*\binom{=0}{>0}$$

$$\gamma_j \frac{a_i^*}{(a_j+a_i^*)^2} \quad \binom{<1}{=1} \quad \textit{se } a_j^* \binom{=0}{>0}$$

assumendo che entrambe le aziende facciano pubblicità durante il l'intervallo di tempo, i tassi di spesa pubblicitaria saranno determinati da:

$$\gamma_j \frac{a_i^*(t)}{\left(a_j(t)+a_i^*(t)\right)^2} = 1$$

$$\gamma_i \frac{a_j^*(t)}{(a_i(t)+a_j^*(t))^2} = 1$$

queste equazioni mi restituiscono le seguenti soluzioni:

$$a_i^*(t) = \frac{p_i^2 p_j}{(p_j+p_j)^2}(1\text{-}e^{-(T-t)}]) \qquad a_j^*(t) = \frac{p_j^2 p_i}{(p_j+p_j)^2}(1\text{-}e^{-(T-t)}])$$

da cui deriva che, gli attraction rate hanno la forma:

$$g_i(a^*(t)) = \frac{p_i}{p_i + p_j}$$

e che la soluzione per la funzione quota di mercato sarà:

$$X_i^*(t) = x_{io}e^{-t} + \frac{p_i}{(p_i+p_j)}(1-e^{-t})$$

Per dare una interpretazione ai risultati cominciamo dal notare che $a_i^*(t) > a_j^*(t)$ se $p_j < p_j$: infatti l'azienda che ha il maggiore profitto per unità di quota di mercato sarà disposta a spendere di più in pubblicità e quindi otterrà un vantaggio sulla rivale. Possiamo inoltre notare che a causa della struttura del modello gli attraction rate risultano essere costanti nel tempo. Infine è utile osservare l'andamento della derivata della funzione quota di mercato:

$$\dot{X}_i^*(t) \binom{>}{<} 0 \quad \textit{se} \quad \frac{p_i}{(p_i+p_j)} \binom{>}{<} X_i^*(t)$$

ovvero, la quota di mercato di una azienda cresce se gli l'attraction rate risultano essere maggiore della quota di mercato corrente.

Per quanto riguarda le aziende invece , l'ultima soluzione ci dice che tutte e due le aziende saranno presenti durante l'intervallo di tempo, ed è chiaro che se $p_j < p_j$ ed $x_{io} > x_{jo}$ allora la quota di mercato di i sarà maggiore di quella di j per ogni t.

Biased trasform Tullock

In questa sezione invece, l'attraction rate prende una forma diversa:

$$g_i(a;\varphi) = \frac{a_i+\varphi}{(a_i+a_j)} \qquad g_j(a;\varphi) = \frac{a_j-\varphi}{(a_i+a_j)}$$

dove è presente il parametro di bias $\boldsymbol{\varphi}$ positivo. Questo può essere visto come un vantaggio che l'azienda i ha sulla rivale che le permetterà di diminuire lo sforzo pubblicitario. Vediamo le condizioni necessarie per l'ottimalità:

$$\frac{\partial g_i}{\partial a_i}\gamma_i = \gamma_i \frac{a_j-\varphi}{(a_i+a_j)^2} \quad \binom{<1}{=1} \qquad \textbf{se} \qquad a_i\binom{=0}{>0}$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial a_j}\gamma_j = \gamma_j \frac{a_i+\varphi}{(a_i+a_j)^2} \ \boldsymbol{=1}$$

nelle quali supponiamo $a_j > \varphi$**.** Se assumiamo poi che il tasso di spesa pubblicitaria dell'azienda i sia positivo in tutto l'intervallo ,allora troviamo che le condizioni diventano:

$$\gamma_j \frac{a_i+\varphi}{(a_i+a_j)^2} \ \boldsymbol{=1} \qquad\qquad \gamma_i \frac{a_j-\varphi}{(a_i+a_j)^2} = 1$$

che implicano:

$$a_i = \frac{{\gamma_i}^2\gamma_j}{(\gamma_i+\gamma_j)^2} \boldsymbol{-} \varphi \qquad\qquad a_j = \frac{{\gamma_j}^2\gamma_i}{(\gamma_i+\gamma_j)^2} \boldsymbol{+} \varphi \ \boldsymbol{>0}$$

e ora ci resta solo da inserire gli $\gamma_i(t)$=$p_i\left[1 - e^{-(T-t)}\right]$, ricavati nella sezione precedente e arriviamo alla forma finale dei tassi di spesa:

$$a_i(t) = \frac{p_i^2 p_j}{(p_j+p_j)^2}(\boldsymbol{1}\text{-}e^{-(T-t)}) \ \ \boldsymbol{-} \varphi \qquad\qquad a_j^*(t) = \frac{p_j^2 p_i}{(p_j+p_j)^2}(\boldsymbol{1}\text{-}e^{-(T-t)}]) \boldsymbol{+} \varphi$$

Che ci mostrano che i tassi di spesa assomigliano molto a quelli ricavati nella sezione precedente, ma si nota che a causa dello svantaggio l'azienda j sarà costretta a spendere di più in spesa pubblicitaria. Notiamo inoltre che se $\frac{p_i^2 p_j}{(p_j+p_j)^2}(\boldsymbol{1}\text{-}e^{-(T-t)}) \ \boldsymbol{>}\varphi$ allora $a_i(t)$ >0 altrimenti sarà proprio uguale a zero per le supposizione che abbiamo fatto. Anche questo in effetti trova un significato: se il bias è piccolo allora l'azienda sarà costretta a spendere in pubblicità, altrimenti ciò non sarà necessario.

Per concludere questa analisi ci resta solo da riportare le derivate parziali rispetto al tempo delle funzioni quota di mercato nel caso in cui $a_j(t) > 0 \ e \ a_i(t) = 0$ per ogni t:

$$\dot{X}_\imath\,(t) = \frac{\varphi}{a_j(t)} - X_i$$

$$\dot{X}_\jmath\,(t) = 1 - \frac{\varphi}{a_j(t)} - X_j$$

in cui vediamo $\dot{X}_\imath\,(t) > 0 \ \textit{solo se} \ \frac{\varphi}{a_j(t)} > X_i$: la quota di mercato dell'azienda i cresce solo se il rapporto tra il suo bias e la spesa pubblicitaria della concorrente è maggiore della quota di mercato corrente di i. Per cui l'azienda j riuscirà a recuperare sulla rivale se il suo tasso di spesa è abbastanza grande da rendere piccolo il rapporto e di conseguenza annullare il vantaggio.

Ripetiamo che i risultati che abbiamo ottenuto in queste sezioni nascono da due assunzioni principali: ci siamo messi nelle condizioni in cui l'unico tipo di pubblicità è offensiva, ovvero mirata ad attrarre consumatori di altre aziende, e abbiamo imposto che dal nessun consumatore possa uscire o entrare nel mercato.

2.4 Riflessioni sul primo capitolo

Il percorso e la logica dell'analisi è piuttosto chiara e lineare. Tuttavia ci si può chiedere perché nell'analisi non compaia ciò che di solito viene definito l'obbiettivo principale nell'analisi economica: la massimizzazione del profitto. Nell' articolo che ho citato e di cui ho riportato gli studi l'analisi del profitto è trattata. Tuttavia il mio intento è quello di porre particolare attenzione alle strategie pubblicitarie e sulla quota di mercato dell'azienda. Questi due componenti sono spesso messi in secondo piano ma rivestono un ruolo fondamentale .Un esempio può essere un'azienda da poco nel mercato: nel breve termine il suo interesse non sarà soltanto quello di creare utile, ma di farsi un nome e di conseguenza appropriarsi di una fetta di mercato prima appartenente alle rivali. Chiaramente uno dei mezzi più importanti per ottenere questo fine sono le strategie pubblicitarie efficaci. Questo spiega il mio interesse nel dare grande risalto a quest'ultime e di sviluppare il prossimo capitolo cercando di analizzarne i diversi tipi, anche se nell'ambito di un mercato più complesso.

Capitolo 3: Un modello più raffinato[3]

Le aziende che competono in mercati in crescita hanno la possibilità di scegliere come target del loro marketing in tre diversi segmenti: clienti delle imprese rivali, clienti propri e potenziali clienti. I potenziali clienti includono ex acquirenti che hanno smesso di acquistare categoria di prodotto/servizio ma potrebbero ricominciare ad acquistare così come i clienti che non hanno ancora acquistato la categoria. Strumenti di marketing utilizzati per influenzare i tre segmenti includono pubblicità, prezzi, vendita personale e servizio clienti. Chiaramente noi ci concentreremo sulla pubblicità e indagheremo su come tre tipi di pubblicità potrebbero essere utilizzati in un mercato dinamico e competitivo .La pubblicità mirata principalmente ai clienti di un'azienda è chiamata pubblicità difensiva e il suo obiettivo è evitare che i clienti attuali passino a marchi concorrenti. Negli ultimi anni c'è stato un aumento interesse per tali strategie come un modo efficace per ridurre le spese di marketing di un'azienda, basato sull'osservazione che in molti settori potrebbe essere notevolmente più economico mantenere un cliente corrente piuttosto che attirarne uno nuovo. La pubblicità che mira ad attirare i clienti delle aziende rivali è nota come offensiva e il suo scopo è stimolare il cambio di marca. Campagne offensive potrebbero, tuttavia, trasformarsi in battaglie per quote di mercato che potrebbero non portare a grandi variazioni di quest'ultime. L'obiettivo principale della pubblicità generica invece, è espandere la domanda per la categoria, principalmente di indurre i potenziali clienti a iniziare ad acquistare. La pubblicità generica dovrebbe andare a vantaggio di tutte le aziende nel settore in quanto non promuove un particolare marchio. Questo tipo di pubblicità è stata utilizzata ad esempio per i prodotti agricoli, nelle prime fasi del ciclo di vita di un nuovo prodotto per creare consapevolezza, o nei mercati maturi per promuovere nuovi usi. L'uso simultaneo di tutti e tre i tipi di pubblicità offre a un'azienda una gamma più ampia di strategie di marketing. La scelta di una strategia complessiva che raggiunga un equilibrio adeguato tra diversi tipi di pubblicità è un problema che dovrebbe essere di grande interesse per le aziende di un settore competitivo

Quello che vuole analizzare questa ricerca è un modello di gioco pubblicitario dinamico che fornisce raccomandazioni su come le aziende dovrebbero progettare strategie offensive, difensive e generiche in un mercato in crescita.

3.1 Presentazione del modello

In questa nuova generalizzazione del mercato (che assumeremo di nuovo duopolistico) all'azienda sarà permesso di controllare 3 tipi di sforzi pubblicitari relativi ai differenti tipi di pubblicità. Supporremo inoltre che le due aziende siano simmetriche, ovvero che ogni parametro del modello avrà lo stesso valore (non specificato) per entrambe le aziende.

Siano a questo punto $\boldsymbol{a_i(t)}$, $\boldsymbol{d_i(t)}$, $\boldsymbol{g_i(t)}$ rispettivamente il tasso di sforzo di pubblicità offensiva, difensiva e generica, **i=1,2 e t** ∈ **[0,T]** con T finito e fissato.

Denotiamo poi con S_i(t) il tasso di vendita dell'azienda i al tempo t, il cui sviluppo è determinato da due equazioni differenziali:

$$\dot{S}_i(t) = f_i\,(a_i(t),\, d_j(t))\,\sqrt{S_j} - f_j\,(a_j(t),\, d_i(t))\,\sqrt{S_i} + h_i\,(g_1(t),\, g_2(t))$$

con i diverso da j e i,j∈ $\{1,2\}$.

In queste equazione, $\boldsymbol{f_i}$ è chiamato attraction rate , e questa volta dipende sia dallo sforzo pubblicitario offensivo dell'azienda i, sia da quello difensivo dell'azienda j. Questo è del tutto ragionevole , infatti la capacità di attrarre nuovi consumatori per un'azienda adesso è influenzata anche dalla capacità di conservali dell'azienda rivale. Gli attraction rate prendono valori non negativi e soddisfano i vincoli: $\frac{\partial f_i}{\partial a_i}$>0 e : $\frac{\partial f_i}{\partial d_j}$<0 .La funzione $\boldsymbol{h_i}$ invece prende valori non negativi, rispetta il vincolo h(0,0)=0 e dipende da entrambi gli sforzi pubblicitari generici. Questa funzione misura infatti la crescita del mercato derivante dagli sforzi pubblicitari svolti dalle aziende per far crescere il settore in cui competono: se gli sforzi sono nulli il mercato non si espanderà.

Specifichiamo ora chi sono queste due funzioni :

$$f_i\,(a_i(t),\, d_j(t)) = \beta a_i - \lambda d_j \qquad\qquad h_i\,(g_1(t),\, g_2(t)) = \frac{k(g_1 + g_2)}{2}$$

in cui β e λ sono costanti positive che riflettono l'efficienza dalla pubblicità offensiva e difensiva rispettivamente. Il parametro k > 0 misura l'efficienza degli sforzi pubblicitari generici. Lasciamo la funzione di espansione del mercato dipendente da $(g_1 + g_2)$ perché è il totale delle iniziative pubblicitarie che generano crescita del mercato. Il margine di profitto unitario di ciascuna impresa è pari a m > 0 ed è costante. Definiamo poi quelli che sono detti **Costi di pubblicità**, che sono funzioni definite in questo modo:

$$C_a\,(a_i) = \frac{c_a}{2}a_i^2 \qquad C_d\,(d_i) = \frac{c_d}{2}d_i^2 \qquad C_g\,(g_i) = \frac{c_g}{2}g_i^2, \qquad i = 1,\, 2$$

dove c_a, c_d, c_g sono costanti positive.

Arriviamo dunque a definire la funzione obbiettivo del nostro problema:

$$J_i(a_i, d_i, g_i) = \int_0^T [mS_i(t) - C_g\left(g_i(t)\right) - C_a\left(a_i(t)\right) - C_d\,(d_i(t))]\,dt$$

Dove imponiamo i seguenti vincoli: $\boldsymbol{S_i(t), g_i(t), a_i(t), d_i(t), f_i}$**(t)** devono essere tutte maggiori o uguali a zero per ogni **t** e per ogni **i.**

3.2 Equilibrio Markoviano

Anche in questa seconda parte siamo interessati a identificare l'equilibrio Markoviano. Per fare questo dobbiamo verificare che esistano due funzioni continue e differenziabili $V^i(t, S_1, S_2)$, tali che, per ogni t , $\boldsymbol{S_i(t)}$ ∈ **[0,T],i=1,2,** risolvano l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$- \frac{\partial V^i}{\partial t} = max_{a_i(t)\geq 0, d_i(t)\geq 0, g_i(t)\geq 0}\Big\{mS_i - \frac{c_a}{2}a_i^2 - \frac{c_d}{2}d_i^2 - \frac{c_g}{2}g_i^2 + \frac{\partial V^i}{\partial S_i}\Big[(\beta a_i - \lambda d_j)\sqrt{S_j} - (\beta a_j - \lambda d_i)\sqrt{S_i} + \frac{k(g_1+g_2)}{2}\Big] + \frac{\partial V^i}{\partial S_j}\Big[(\beta a_j - \lambda d_i)\sqrt{S_i} - (\beta a_i - \lambda d_j)\sqrt{S_j} + \frac{k(g_1+g_2)}{2}\Big]\Big\}$$

dove $\boldsymbol{d_j(t, S_1, S_2), a_j(t, S_1, S_2), g_j(t, S_1, S_2)}$ sono le strategie markoviane dell'azienda j e $V^i(t, S_1, S_2)$ sono le funzioni valore che rappresentano il profitto ottimo da guadagnare da un'azienda nell'intervallo [t,T] e che rispettano il vincolo : $V^i(T, S_1, S_2) = 0$ per ogni coppia (S_1, S_2) ammissibile.

Ora guardiamo quali sono le condizioni per la massimizzazione dell'Hamiltoniana:

$$- c_a a_i + \beta\sqrt{S_j}\Big(\frac{\partial V^i}{\partial S_i} - \frac{\partial V^i}{\partial S_j}\Big)\binom{\leq 0}{=0} \leftarrow a_i \binom{=0}{>0}$$

$$- c_d d_i + \lambda\sqrt{S_i}\Big(\frac{\partial V^i}{\partial S_i} - \frac{\partial V^i}{\partial S_j}\Big)\binom{\leq 0}{=0} \leftarrow d_i \binom{=0}{>0}$$

$$- c_d g_i + \frac{k}{2}\Big(\frac{\partial V^i}{\partial S_i} + \frac{\partial V^i}{\partial S_j}\Big)\binom{\leq 0}{=0} \leftarrow g_i \binom{=0}{>0}$$

dove le derivate parziali $\frac{\partial V^i}{\partial S_i}, \frac{\partial V^i}{\partial S_j}$ possono essere interpretate come prezzo ombra dei tassi di vendita $\boldsymbol{S_{i,}S_j}$rispettivamente. In condizioni di regolarità appropriate, un prezzo ombra è un'adeguata approssimazione del tasso di incremento della funzione valore, per unità di incremento della variabile di stato associata (qui: tasso di vendita). Se si considera la pubblicità offensiva e difensiva, quando $\boldsymbol{a_{i\,,}d_i}$sono positivi, i prezzi d'ombra soddisfano la disuguaglianza $\frac{\partial V^i}{\partial S_i} > \frac{\partial V^i}{\partial S_j}$ Ciò significa che un'azienda utilizzerà questi due tipi di pubblicità se produce un profitto marginale maggiore per avere un aumento marginale nelle proprie vendite piuttosto che nelle vendite del rivale. Questo è intuitivo. La prima espressione quindi mostra che la pubblicità offensiva di un'impresa aumenta quando aumenta il tasso di vendita della rivale. L'intuizione è che un'azienda sfrutta il fatto che il suo rivale ha un tasso di vendita maggiore che può essere attaccato. La pubblicità difensiva di un'azienda aumenta all'aumentare del proprio tasso di vendita, riflettendo che il l'azienda ha quindi altro da proteggere. Se il tasso di pubblicità generico $\boldsymbol{g_i}$ è positivo, la disuguaglianza $\frac{\partial V^i}{\partial S_i} + \frac{\partial V^i}{\partial S_j}$**>0** vale. L'interpretazione è che se l'effetto aggregato di un aumento marginale dei tassi di vendita è positivo, allora le aziende dovrebbero impegnarsi nella pubblicità generica. Se invece, ad esempio,$\boldsymbol{g_i}$ è zero, la disuguaglianza $\frac{\partial V^i}{\partial S_i} + \frac{\partial V^i}{\partial S_j} \leq 0$ vale. Ciò significa che un aumento di almeno uno dei tassi di vendita diminuirà il valore di un'impresa. In tal caso, e poiché le imprese sono simmetriche, nessuna azienda userebbe pubblicità generica.

Date le condizioni di massimalità, allora posso riscrivere le funzioni di attraction rate:

$$\boldsymbol{f_i\ (a_i(t),\ d_j(t)) = \beta a_i - \lambda d_j} = \left(\frac{\beta}{c_a}^2 - \frac{\lambda}{c_d}^2\right)\sqrt{S_j}\left(\frac{\partial V^i}{\partial S_i} - \frac{\partial V^i}{\partial S_j}\right)$$

dove se i tassi di sforzo pubblicitario offensivo e difensivo sono positivi ,ho che :

$$\boldsymbol{f_i > 0 \quad se \quad \frac{\beta}{c_a}^2 > \frac{\lambda}{c_d}^2}$$

cosa che assumiamo essere vera per il proseguo del discorso.

Ora possiamo supporre ,data anche la struttura del modello , che la forma della funzione valore possa essere:

$$\boldsymbol{V^i(t, S_1, S_2) = \alpha(t) + \varphi(t)S_i + \gamma(t)S_j}$$

Sarà quindi nostro obbiettivo trovare un'espressione per le tre funzioni che appaiono al membro di destra. Prima di tutto proviamo a dare un significato a questi termini notando che :

$$\frac{\partial V^i}{\partial S_i} = \boldsymbol{\varphi(t)} \qquad \frac{\partial V^i}{\partial S_j} = \boldsymbol{\gamma(t)}$$

ovvero $\boldsymbol{\varphi(t)\ e\ \gamma(t)}$ rappresentano i prezzi ombra dei tassi di vendita.

Inoltre se inseriamo le derivate parziali della funzione valore all'interno dell'equazione di HJB, trovo che le funzioni da cercare devono rispettare le condizioni al tempo T: $\boldsymbol{\varphi(T) = 0\ \gamma(T) = 0\ \alpha(T) = 0,}$ e inoltre risolvere le equazioni differenziali:

$$\boldsymbol{\dot{\varphi}\ (t) = -(m - [\frac{\beta}{c_a}^2 - \frac{\lambda}{2c_d}^2](\varphi(t) + \gamma(t))^2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\boldsymbol{\dot{\alpha}(t) = -(\varphi(t) + \gamma(t))^2 \frac{3k}{8c_g}^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\left(\left[\frac{\beta^2}{2c_a} - \frac{\lambda^2}{c_d}\right](\varphi(t) + \gamma(t))^2\right) \qquad \textbf{(3)}$$

ora, usando le condizioni appena mostrate, noto subito che $\alpha(t)$ è positiva per ogni t nell'intervallo(escluso T) .Per alleggerire la notazione che useremo in seguito, definisco le due costanti:

$$C_1 = -\left[\frac{\beta^2}{c_a} - \frac{\lambda^2}{2c_d}\right]$$

$$C_2 = \frac{\beta^2}{2c_a} - \frac{\lambda^2}{c_d}$$

Siamo allora pronti per dare una soluzione due equazioni differenziali 1 e 3 :

$$\gamma(t) = \frac{mC_2(T-t)}{C_2 - C_1} - \frac{C_2\sqrt{m(C_2-C_1)}}{(C_1-C_2)^2} \tanh \sqrt{m(C_2 - C_1)}\,(T-t) \qquad \textit{(5)}$$

$$\varphi(t) = \frac{mC_2(T-t)}{C_2 - C_1} - \frac{C_1\sqrt{m(C_2-C_1)}}{(C_1-C_2)^2} \tanh \sqrt{m(C_2 - C_1)}\,(T-t) \qquad \textit{(6)}$$

E usando queste, ottengo:

$$\varphi(t) - \gamma(t) = -\frac{\sqrt{m(C_2-C_1)}}{(C_1-C_2)} \tanh \sqrt{m(C_2 - C_1)}\,(T-t)$$

che è positivo per t ∈ [0, T), cioè il prezzo ombra delle vendite di un'impresa è maggiore rispetto a quello delle vendite della rivale. Usando le condizioni di massimizzazione, concludiamo che all'equilibrio i tassi di pubblicità offensiva e difensiva sono positivi.

Siamo ora pronti per determinare le strategie pubblicitarie all'equilibrio:

$$a_i(t, S_j) = \frac{\beta}{c_a}\sqrt{S_j}\,(\varphi(t) - \gamma(t))$$

$$d_i(t, S_i) = \frac{\lambda}{c_d}\sqrt{S_i}(\varphi(t) - \gamma(t))$$

$$\textbf{se } T < \hat{T}: \qquad g(t) = \frac{k(\varphi(t) - \gamma(t))}{2c_g} > 0 \text{ per } t \in [0,T) \text{ con } g(T) = 0$$

$$\textbf{se } T > \hat{T}: \qquad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \text{ per } t \in [0, \hat{t}] \\ \frac{k(\varphi(t) - \gamma(t))}{2c_g} \text{ per } t \in [\hat{t}, T] \end{pmatrix}, g(T) = 0$$

e così i tassi di pubblicità offensiva e difensiva sono positivi, tranne che a t = T dove sono uguali a zero. Quanto alla pubblicità generica, il caso T <$\hat{T}$ rappresenta una situazione in cui l'orizzonte temporale è relativamente breve. Quindi vale la pena utilizzare la pubblicità generica per tutto il tempo. Se l'orizzonte temporale è relativamente lungo, T >$\hat{T}$, le imprese rimandano l'uso della pubblicità generica fino all'istante $\hat{t}$. Prendendo le espressioni in (5) e (6) si mostra che su intervalli di tempo in cui il tasso di pubblicità generica è positivo, prima aumenta e poi diminuisce, ed è zero durante l'intervallo di tempo iniziale. Il nostro risultato riflette una strategia che mira a stimolare le vendite del settore nelle fasi successive del gioco, dove è spesso visto che le vendite del settore crescono a un ritmo più lento a causa di fattori esterni.

3.3 Riflessioni sul secondo capitolo

Come detto in precedenza l'attenzione è posta sulle strategie pubblicitarie che in questo caso sono di 3 tipi: offensiva difensiva e generica. Chiaramente questo secondo modello ,anche se più generale e complicato del primo rappresenta ancora una notevole semplificazione della realtà dove di solito intervengono fattori di tipo economico, statistico e anche psicologico. Tuttavia risulta molto interessante notare come da un modello lineare molto basilare come quello di Lanchester, si sia arrivati a fare considerazione rigorose su un argomento che ha nulla a cui vedere con quello studiato dall'ingegnere molti anni prima.

BIBLIOGRAFIA

1. Lanchester F.W. (1916) Aircraft in warfare: the dawn of the fourth arm. Constable, London
2. Jørgensen S.,Dockner E.J. (2018) Strategic Rivalry for Market Share: A Contest Theory Approach to Dynamic Advertising Competition. Dynamic Games and Application
3. Jørgensen S., Sigué S.P. (2015) Defensive, offensive, and generic advertising in a Lanchester model with market growth. Dynamic Games and Application

RINGRAZIAMENTI

Durante questi anni difficili ho compreso il vero significato e il valore della famiglia, ragion per cui i miei primi ringraziamenti non possono che andare a loro. Il mio pensiero va anche a tutti coloro che hanno creduto in me e stimolato a raggiungere quello che per me non è un traguardo, ma soltanto un punto di partenza.

Grazie a tutti.