



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Teoria efficace per il confinamento dinamico di cariche
elettriche e momenti magnetici

Relatore

Dr. Fael Matteo

Laureando

Vitaliani Marco

Anno Accademico 2025/2026

Introduzione

Lo studio dei sistemi composti da particelle cariche e dotate di momento magnetico intrinseco (spin) soggette a campi elettromagnetici caratterizzati da oscillazioni rapide è ampiamente utilizzato in diversi ambiti della fisica, come il caos dinamico, il quantum computing e il Floquet engineering per materiali quantistici. Un nuovo interesse è scaturito nell'ambito grazie allo sviluppo della tecnologia laser, della spettroscopia ultra-veloce e alla comprensione sempre più accurata dei materiali quantistici, ovvero materiali con caratteristiche quantistiche prevedibili e, almeno in parte, controllabili.

Questa tesi è basata sulle analisi degli articoli [1] e [2], i quali utilizzano questa tecnica per lo studio dei meccanismi di stabilizzazione dinamica che permettono il confinamento magnetico di particelle cariche e dotate di spin tramite l'utilizzo di campi elettromagnetici esterni caratterizzati da rapide oscillazioni. L'elevata velocità di oscillazione dei campi rispetto alla velocità caratteristica del sistema è cruciale per poter costruire una teoria efficace: l'espansione perturbativa ad alta frequenza della forza generata da essi, infatti, si calcola utilizzando la velocità caratteristica della particella nel sistema come parametro perturbativo. Un altro concetto fondamentale per l'analisi è quello della media temporale, ovvero il calcolo della media nel tempo dell'effetto della forza rapidamente oscillante sul moto della particella.

Nel primo capitolo si studia un sistema classico con campi generici per identificare la scala di riferimento, i parametri di espansione e le regole per il corretto conteggio dell'ordine perturbativo. Si elabora un metodo per calcolare l'azione efficace classica fino all'ordine perturbativo desiderato. La lagrangiana risultante è particolarmente significativa perché al suo interno compaiono termini perturbativi che modificano il termine cinetico: la loro presenza è causata da un effetto di gravità emergente della teoria efficace, di cui si calcola la curvatura e il simbolo di Christoffel corrispondenti. Nel secondo capitolo si sviluppa una teoria quantistica efficace ad alte frequenze con la quale si calcola la funzione di Green efficace dell'equazione di Schrödinger del sistema. Si trovano i “diagrammi di Feynman” per la funzione di Green espansa rispetto ai campi esterni e si calcolano i vertici efficaci dell'espansione nel regime “far off-shell”. Calcolando l'hamiltoniana efficace, si nota un effetto di gravità emergente simile a quello del primo capitolo e il potenziale efficace risultante è uguale al corrispondente classico, tranne per dei termini di origine puramente quantistica del sistema. Infine, nel terzo capitolo si studiano il potenziale efficace e la curvatura spazio-temporale nel caso specifico di campi elettromagnetici utili a costruire trappole di particelle: i primi due casi trattati riguardano trappole di particelle cariche, prima in 2 dimensioni e poi in 3, mentre l'ultimo concerne trappole per particelle neutre dotate di spin (basate sulle trappole di Ioffe-Pritchard).

Indice

1	Dinamica classica	1
1.1	Impostazione della teoria efficace	1
1.2	Applicazione del metodo asintotico	2
1.3	Calcolo di $\mathcal{F}_{eff}$ fino al sesto ordine	2
1.3.1	Lagrangiana efficace	4
1.4	Gravità emergente	4
1.5	Stabilità	6
1.5.1	Introduzione all'equazione di Mathieu	6
1.5.2	Applicazione della teoria di Mathieu	8
2	Dinamica quantistica	9
2.1	Introduzione	9
2.2	Espansione di $\mathcal{G}$	10
2.3	Calcolo del propagatore tra stati far off-shell	13
2.4	Interpretazione risultati	14
3	Applicazione della teoria per il confinamento di particelle	17
3.1	Introduzione	17
3.2	Applicazione teoria	18
3.2.1	Dinamica classica	18
3.2.2	Dinamica quantistica	19
3.3	Esempi di confinamento di particelle	20
3.3.1	Trappola per particelle cariche in $2d$	21
3.3.2	Trappola per particelle cariche in $3d$	21
3.3.3	Trappola per particelle neutre con spin in $3d$	22

Capitolo 1

Dinamica classica

Nel seguente capitolo studiamo l'equazione del moto per un sistema classico in cui è presente un campo oscillante nel tempo e un campo costante entrambi generici per ricavarne forza efficace e lagrangiana efficace. Si studiano anche effetti perturbativi di gravità emergente e si analizza la stabilità del sistema.

1.1 Impostazione della teoria efficace

Scriviamo l'equazione generale del moto classica per una particella di massa m soggetta ad una forza generica indipendente dal tempo $-G$ e una forza generica periodica $-F \cos(\omega t)$:

$$m\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{G}(\mathbf{R}) + \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cos(\omega t) = 0, \quad (1.1)$$

dove le lettere in grassetto si riferiscono a vettori tridimensionali e ogni puntino indica una derivata temporale d/dt . Ci si limita ad analizzare il caso con una sola frequenza temporale, ma l'estensione a più frequenze è semplice. Assumiamo il limite di oscillazione veloce: definiamo la velocità che acquista la particella sotto l'influenza solamente della forza indipendente dal tempo ad una distanza L dal punto di partenza, dove L identifica la lunghezza di scala del sistema. La velocità è:

$$m\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{G}(\mathbf{R}) = 0, \quad (1.2)$$

$$m\dot{\mathbf{R}} + \int \mathbf{G}(\mathbf{R}) d\mathbf{R} = 0, \quad (1.3)$$

$$v \sim \sqrt{\frac{GL}{m}}. \quad (1.4)$$

Definiamo una velocità di riferimento $c = L\omega$ e si considera l'oscillazione come veloce quando vale $v/c \ll 1$. Ciò pone le basi per la costruzione di una teoria efficace: essa consiste in una semplificazione della teoria originale adottando un limite ben definito rispetto a una grandezza fisica di riferimento. Nel nostro caso, la grandezza di riferimento è la velocità c , posta come molto maggiore in modulo rispetto alla velocità della particella v .

È utile ridefinire le seguenti variabili rendendole adimensionali:

$$\omega t \rightarrow t, \quad \mathbf{R}/L \rightarrow \mathbf{R},$$

che consiste nel definire t come unità di $1/\omega$ e $\mathbf{R}$ come unità di L . Dividendo l'equazione per m si ottiene

$$\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{g}(\mathbf{R}) + \mathbf{f}(\mathbf{R}) \cos(t) = 0, \quad (1.5)$$

con $\mathbf{g} = \mathbf{G}/(Lm\omega^2)$ e $\mathbf{f} = \mathbf{F}/(Lm\omega^2)$. Ponendo $c = 1$, il parametro di espansione della teoria efficace è v . La forza $\mathbf{g}$ è di $\mathcal{O}(v^2)$, dalla definizione di velocità tipica della particella dalla equazione (1.4). Inoltre, dall'espansione perturbativa dell'equazione del moto, il principale contributo della forza oscillante risulta essere proporzionale a $\mathbf{f}^2$; quindi, affinché essa contribuisca su larga scala al moto della particella, bisogna che sia dello stesso ordine di quello della forza statica e, perciò, $\mathbf{f}$ è di $\mathcal{O}(v^1)$.

1.2 Applicazione del metodo asintotico

Si applica l'idea del metodo asintotico come descritto in [3]. Cerchiamo una soluzione dell'equazione del moto della forma

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{c}_n(\mathbf{r}) \cos(nt) + \mathbf{s}_n(\mathbf{r}) \sin(nt)], \quad (1.6)$$

pertanto espandendo la posizione in serie di Fourier. Inoltre, si definiscono $\mathbf{c}_n(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{c}_{n,m}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{s}_n = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{s}_{n,m}(\mathbf{r})$, con $\mathbf{c}_{n,m}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(v^m)$ e $\mathbf{s}_{n,m}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(v^m)$, cosicché ogni termine dell'espansione sia scritto come una serie in v . Il vettore $\mathbf{r}(t)$ descrive il moto lento in larga scala della particella, mentre la restante espansione in serie contiene l'informazione riguardante il moto rapidamente oscillante. Inoltre, scriviamo in generalità che $\mathbf{r}(t)$ soddisfa $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{r})$ con $\mathbf{v}^{(m)} = \mathcal{O}(v^m)$, ovvero che $\dot{\mathbf{r}}(t)$ è composto da termini di ordine almeno uno e con infiniti altri termini di ordine superiore. Perciò, ci aspettiamo che $\ddot{\mathbf{r}}$ sia almeno di ordine pari a due (visto che $d/dt = \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + \partial_t$).

Si sostituisce la definizione (1.6) nell'equazione (1.5) e la si espande ordine per ordine in v ; pertanto, si risolve singolarmente ogni ordine dell'equazione e si trova la forza efficace, definita come $\ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{F}_{eff} = 0$. Questa operazione va eseguita nel rispetto del concetto della “media temporale”; ovvero, se si definisce generalmente l'espansione di $\mathbf{g}(\mathbf{R}) + \mathbf{f}(\mathbf{R}) \cos(t)$ come

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) + \mathbf{f}(\mathbf{R}) \cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cos(nt) + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}_m(\mathbf{r}) \sin(mt). \quad (1.7)$$

La sua media temporale è rappresentata da

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \mathbf{g}(\mathbf{R}) + \mathbf{f}(\mathbf{R}) \cos(t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

dove $T = 2\pi/\omega$. La media temporale è importante perché si vuole costruire una teoria che preservi solo le componenti delle forze che rimangono in un'evoluzione a tempi lunghi. L'equazione del moto finale è nella forma

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{g}(\mathbf{R}) + \mathbf{f}(\mathbf{R}) \cos(t) = \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{F}_{eff} = 0. \quad (1.9)$$

Per raggiungere questa situazione si utilizzano i termini dell'espansione di Fourier di (1.6) per cancellare ogni termine armonico all'interno di (1.7), sostanzialmente non facendo comparire nell'equazione alcun termine $\mathbf{A}_{n \neq 0}(\mathbf{r}) \cos(nt)$ e $\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) \sin(mt)$. I termini all'interno di (1.6) non utilizzati per questo scopo saranno nulli, perché altrimenti contribuirebbero all'equazione del moto con elementi contenenti armoniche temporali.

Con questo metodo si raggiunge una formula che tiene conto ordine per ordine dell'azione efficace delle forze, grazie alla scomposizione del moto della particella in quello “lento” $\mathbf{r}(t)$, caratterizzato dalla velocità v , e in quello rapidamente oscillante $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Tutto ciò nell'ottica di un'evoluzione temporalmente lunga del sistema e, di conseguenza, implementando un'espansione perturbativa ad alta frequenza $\omega \rightarrow +\infty$.

1.3 Calcolo di $\mathcal{F}_{eff}$ fino al sesto ordine

Ridefiniamo $\mathbf{v} \rightarrow \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{f} \rightarrow \lambda \mathbf{f}$, $\mathbf{g} \rightarrow \lambda^2 \mathbf{g}$, dove λ è un parametro adimensionale che identifica l'ordine dell'espansione in maniera manifesta: così, ogni termine $\mathcal{O}(\mathbf{v}^k)$ è proporzionale a λ^k . Ricordando che vale $\ddot{\mathbf{r}} = \sum_{m=2}^{\infty} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{r})$, l'ordine k -esimo di $\ddot{\mathbf{R}}$ con $k > 2$ è:

$$\begin{aligned} \lambda^k \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{r}) + \lambda^k \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 (- \mathbf{c}_{n,k}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,k}(\mathbf{r}) \sin(nt)) + 2v_i n (- \partial_i \mathbf{c}_{n,k-1}(\mathbf{r}) \sin(nt) \right. \\ \left. + \partial_i \mathbf{s}_{n,k-1}(\mathbf{r}) \cos(nt)) + v_i v_j (\partial_i \partial_j \mathbf{c}_{n,k-2}(\mathbf{r}) \cos(nt) + \partial_i \partial_j \mathbf{s}_{n,k-2}(\mathbf{r}) \sin(nt)) \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Abbiamo utilizzato la notazione di Einstein a pedice, ovvero sottintendendo le sommatorie $\sum_{i=1}^3$ e $\sum_{j=1}^3$. Si pone che per $n \rightarrow \infty$ valga $\mathbf{c}_{n,k}(\mathbf{r}), \mathbf{s}_{n,k}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \forall k$, per evitare di ottenere valori infiniti. Si sviluppano in serie di Taylor $\mathbf{f}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{R})$: definendo per semplicità $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{A}(\mathbf{r})$ dalla formula precedente (1.6), si espande in serie $\mathbf{f}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{R})$ per $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0}$ fino all'ordine al quale si vuole trovare $\mathcal{F}_{eff}$, ricordando che $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(\lambda^1)$. Perciò, otteniamo le equazioni

$$\mathbf{f}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\partial_i)^n \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot A_i(\mathbf{r})^n, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\partial_i)^n \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot A_i(\mathbf{r})^n. \quad (1.12)$$

Per calcolare la forza efficace, eliminiamo il termine $\ddot{\mathbf{r}}$ da (1.5), dopo aver sostituito $\mathbf{R}$ con la sua espansione, e da quello che resta si calcola $\mathcal{F}_{eff}$. Si risolve il primo ordine, dove $\mathbf{f}(\mathbf{R})$ è espanso in $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ e dove $\mathbf{g}$ non è presente; pertanto si risolvono tutti i termini $\mathbf{c}_{n,1}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{s}_{n,1}(\mathbf{r})$, in modo tale da cancellare ogni termine con armoniche temporali. Per gli ordini successivi, il procedimento è il medesimo: i valori di $\partial_i \mathbf{c}_{n,m}(\mathbf{r}), \partial_i \mathbf{s}_{n,m}(\mathbf{r}), \partial_i \partial_j \mathbf{c}_{n,m}(\mathbf{r})$ e $\partial_i \partial_j \mathbf{s}_{n,m}(\mathbf{r})$ si calcolano derivando i termini trovati precedentemente. Un appunto importante riguarda quando le derivate di $\mathbf{c}_{n,m}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{s}_{n,m}(\mathbf{r})$ producono termini contenenti $\ddot{\mathbf{r}}$ o $\mathbf{r}^{(k)}$ con $k \geq 3$: nonostante si sappia che $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathcal{F}_{eff}$, si potrebbe pensare che appena si trovino termini del genere essi si possano sostituire con $-\mathcal{F}_{eff}$ fino all'ordine appena trovato; tuttavia, questo è sbagliato, perché andando ad approfondire ulteriormente lo sviluppo di $\mathcal{F}_{eff}$ si otterrebbero nuovi termini di ordine superiore che avremmo sostituito al posto di $\ddot{\mathbf{r}}$, facendo comparire nuovi termini che prima sarebbero stati ignorati. Alla fine del calcolo di $\mathcal{F}_{eff}$ fino all'ordine desiderato si sostituisce ricorsivamente $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathcal{F}_{eff}$ proprio dentro la formula di $\mathcal{F}_{eff}$, eliminando i termini di ordine superiore a quello scelto come massimo che si formano passo dopo passo, fino a che non ci sono più dipendenze da $\ddot{\mathbf{r}}$ o $\mathbf{r}^{(k)}$ con $k \geq 3$.

Per risolvere fino al sesto ordine nel caso unidimensionale è stato utilizzato il programma Wolfram Mathematica, il cui codice è in appendice, dove basta modificare il parametro `$targetexp` inserendo l'ordine massimo di cui si vuole tener conto e il programma mostrerà la soluzione di $\mathcal{F}_{eff}$ fino a quell'ordine.

Per dare una dimostrazione pratica del calcolo, qui si descrive in maniera estesa la risoluzione dell'equazione fino al secondo ordine. Si scrive l'espansione di $\mathcal{F}_{eff}$ come $\mathcal{F}_{eff} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{F}_{eff,n}$. Quindi si ottiene:

$$\mathcal{F}_{eff,1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,1}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,1}(\mathbf{r}) \sin(nt)] + \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cos(t). \quad (1.13)$$

Per eliminare ogni dipendenza diretta dal tempo, è necessario che valga $\mathbf{c}_{1,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ e che tutti gli altri termini siano nulli. Perciò si ricava $\mathcal{F}_{eff,1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Il calcolo del secondo ordine è simile a prima, ma bisogna includere il termine proporzionale a $\partial_i \mathbf{c}_{1,1}(\mathbf{r}) = \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r})$, tenere conto dell'espansione di $\mathbf{f}(\mathbf{R})$ al primo grado e inserire $\mathbf{g}(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{eff,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,2}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,2}(\mathbf{r}) \sin(nt)] + \\ &\quad - 2v_i \partial_i \mathbf{c}_{1,1}(\mathbf{r}) \sin(t) + \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cos(t) \cdot A_i(\mathbf{r}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,2}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,2}(\mathbf{r}) \sin(nt)] + \\ &\quad - 2v_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \sin(t) + f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \cos(t)^2 + \mathbf{g}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Sostituendo $\cos^2(t) = (1 + \cos(2t))/2$, troviamo:

$$\mathbf{c}_{2,2}(\mathbf{r}) = \frac{f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r})}{8}, \quad \mathbf{s}_{1,2}(\mathbf{r}) = -2v_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (1.15)$$

e tutti gli altri coefficienti al secondo ordine sono nulli. Si ottiene $\mathcal{F}_{eff,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_i(\mathbf{r})\partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r})/2 + \mathbf{g}(\mathbf{r})$.

Riportiamo l'espressione della forza efficace fino al sesto ordine nel caso unidimensionale calcolata usando Mathematica (omettendo i vari (r) davanti alle funzioni per abbreviare la scrittura):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{eff} = & \lambda^2 \left(g + \frac{1}{2} f f' \right) \\ & + \lambda^4 \left(\frac{3}{2} g (f')^2 + \frac{25}{32} f (f')^3 + \frac{1}{2} f f' g' + \frac{7}{32} f^2 f' f'' - \frac{3}{2} f' v^2 f'' + \frac{1}{4} f^2 g'' + \frac{1}{16} f^3 f^{(3)} \right) \\ & + \lambda^6 \left(\frac{507}{128} g (f')^4 + \frac{1169}{576} f (f')^5 + \frac{15}{2} g (f')^2 g' + \frac{585}{128} f (f')^3 g' + \frac{1}{2} f f' (g')^2 + \frac{15}{2} g^2 f' f'' \right. \\ & + \frac{771}{64} f g (f')^2 f'' + \frac{20843}{4608} f^2 (f')^3 f'' + \frac{81}{128} f^2 f' g' f'' - \frac{1737}{128} (f')^3 v^2 f'' - 15 f' g' v^2 f'' \\ & + \frac{3}{128} f^2 g (f'')^2 + \frac{35}{192} f^3 f' (f'')^2 - \frac{1065}{128} f f' v^2 (f'')^2 + 3 f g f' g'' + \frac{501}{256} f^2 (f')^2 g'' + \frac{1}{2} f^2 g' g'' \\ & - \frac{13}{2} (f')^2 v^2 g'' + \frac{13}{64} f^3 f'' g'' - \frac{3}{2} f v^2 f'' g'' + \frac{9}{8} f^2 g f' f^{(3)} + \frac{3185}{4608} f^3 (f')^2 f^{(3)} + \frac{3}{16} f^3 g' f^{(3)} \\ & - 15 g f' v^2 f^{(3)} - \frac{1475}{128} f (f')^2 v^2 f^{(3)} + \frac{11}{144} f^4 f'' f^{(3)} - \frac{75}{128} f^2 v^2 f'' f^{(3)} + \frac{5}{64} f^3 f' g^{(3)} \\ & \left. - \frac{3}{2} f f' v^2 g^{(3)} + \frac{7}{384} f^4 f' f^{(4)} - \frac{9}{16} f^2 f' v^2 f^{(4)} + \frac{5}{2} f' v^4 f^{(4)} + \frac{1}{64} f^4 g^{(4)} + \frac{1}{384} f^5 f^{(5)} \right), \quad (1.16) \end{aligned}$$

dove $f' = df/dr$ e $f'' = d^2f/dr^2$. Si verifica che ogni termine sia del corretto ordine in λ , ricordando che $\mathbf{f} = \mathcal{O}(\lambda^1)$, $\mathbf{g} = \mathcal{O}(\lambda^2)$, $\mathbf{v} = \mathcal{O}(\lambda^1)$.

1.3.1 Lagrangiana efficace

Riscriviamo il suddetto risultato tramite una lagrangiana. Essa è un'espressione $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ che, per il principio di azione stazionaria, deve soddisfare l'equazione di Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v^i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.17)$$

Si cerca una lagrangiana che, tramite l'equazione di Lagrange, restituisca esattamente l'equazione del moto $\ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{F}_{eff}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$ fino all'ordine di $\mathcal{F}_{eff}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ desiderato. Ponendo arbitrariamente $\lambda = 1$, fino al quarto grado la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}_{eff}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{v_i v_j}{2} \delta_{ij} - v_i v_j \frac{3}{4} \partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f} - V_{eff}(\mathbf{r}), \quad (1.18)$$

dove δ_{ij} indica il tensore unità tridimensionale ($\delta_{ii} = 1; i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$). Si nota il termine proporzionale a $\partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f}$, che modifica il tipico termine cinetico della lagrangiana. Il potenziale efficace fino al quarto ordine è

$$V_{eff} = V_g + \frac{1}{4} f^2 + \frac{1}{4} f^2 g' + \frac{1}{64} f^2 (f')^2 + \frac{1}{16} f^3 f''. \quad (1.19)$$

1.4 Gravità emergente

In questa sezione si analizza il significato della modifica efficace del termine cinetico nella lagrangiana $(v^i v^j / 2) \delta_{ij}$. Infatti, modificare questo termine significa cambiare la struttura spaziale del sistema, con profonde conseguenze riguardanti il confinamento delle particelle. Si interpretano gli altri termini della lagrangiana efficace di $\mathcal{O}(v^2)$ come generati dal moto della particella in un campo gravitazionale, il quale modifica la metrica quadridimensionale del sistema.

Fino al quarto ordine, il termine che ci interessa è quello proporzionale a $\partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f}$; infatti, grazie ad esso il termine cinetico si riscrive come:

$$\frac{v^i v^j}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{3}{2} \partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f} \right). \quad (1.20)$$

L'effetto di questo fattore è quello di modificare la metrica tridimensionale del sistema $g_{ij} = \delta_{ij} - 3\partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f}/2$; si verifica che essa resta, come da principio della relatività generale, simmetrica in i e j . Questa modifica rende lo spazio non più piatto come prima, perciò si possono calcolare i parametri caratteristici della sua curvatura. In particolare, troviamo il simbolo di Christoffel in tre dimensioni Γ_{ij}^k :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{ka} (\partial_i g_{ja} + \partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta^{ka} - \frac{3}{2} \partial^k \mathbf{f} \partial^a \mathbf{f} \right) \left(\partial_i \left(-\frac{3}{2} \partial_j \mathbf{f} \partial_a \mathbf{f} \right) + \partial_j \left(-\frac{3}{2} \partial_i \mathbf{f} \partial_a \mathbf{f} \right) - \partial_a \left(-\frac{3}{2} \partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f} \right) \right) \\ &\simeq -\frac{3}{4} \delta^{ka} (\partial_i (\partial_j \mathbf{f} \partial_a \mathbf{f}) + \partial_j (\partial_i \mathbf{f} \partial_a \mathbf{f}) - \partial_a (\partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f})) \\ &= -\frac{3}{4} (\partial_i (\partial_j \mathbf{f} \partial^k \mathbf{f}) + \partial_j (\partial_i \mathbf{f} \partial^k \mathbf{f}) - \partial^k (\partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f})) \\ &= -\frac{3}{4} (\partial_{ij} \mathbf{f} \partial^k \mathbf{f} + \partial_j \mathbf{f} \partial_i^k \mathbf{f} + \partial_{ji} \mathbf{f} \partial^k \mathbf{f} + \partial_i \mathbf{f} \partial_j^k \mathbf{f} - \partial_i^k \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f} - \partial_i \mathbf{f} \partial_j^k \mathbf{f}) \\ &= -\frac{3}{2} \partial_{ij} \mathbf{f} \partial^k \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

dove è utilizzata la notazione $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$. Assumendo che il campo $\mathbf{f}$ sia tale che $\partial_{ii} \mathbf{f} = \nabla^2 \mathbf{f} = \mathbf{0}$ e definendo $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, ovvero ponendo h_{ij} come variazione piccola della metrica tridimensionale rispetto a quella di Minkowski, la curvatura scalare è

$$\begin{aligned} R^{(3)} &\simeq \partial_i \partial_j h^{ij} - \square h^{ij} \delta_{ij} \\ &\simeq \partial_i \partial_j h^{ij} + \nabla^2 h_i^i \\ &= -\frac{3}{2} \partial_i \partial_j (\partial^i \mathbf{f} \partial^j \mathbf{f}) - \frac{3}{2} \nabla^2 (\partial_i \mathbf{f} \partial^i \mathbf{f}) \\ &= 3 \nabla^2 \partial_j \mathbf{f} \partial^j \mathbf{f} - \frac{3}{2} (\nabla^2 \mathbf{f})^2 - \frac{3}{2} (\partial_i \partial_j \mathbf{f})^2 + 3 \partial_i \nabla^2 \mathbf{f} \partial^i \mathbf{f} + 3 (\partial_i \partial_j \mathbf{f})^2 \\ &= \frac{3}{2} (\partial_i \partial_j \mathbf{f})^2, \end{aligned} \quad (1.22)$$

la quale si nota sia non negativa. Nel calcolo si è sfruttato il fatto che i campi non hanno cambiamenti apprezzabili nel tempo ($\partial h^{ij}/\partial t = 0$), solo le armoniche danno oscillazione temporale. Inoltre, la lagrangiana (1.18) con V_{eff} (1.19) fino al secondo ordine si ottiene come espansione post-Newtoniana (ovvero ponendo $v \ll c$) della lagrangiana relativistica per una particella che si muove in un campo gravitazionale $\mathcal{L} = -(g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)^{1/2}$. Si definisce $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ e si utilizza la notazione tale che un indice in lettera romana implica vettore tridimensionale, indice in lettera greca implica vettore quadridimensionale. In tale campo gravitazionale, la metrica, stavolta in quattro dimensioni, è:

$$g_{00} = 1 + \frac{\mathbf{f}^2}{2}, \quad g_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{3}{2} \partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f}, \quad g_{i0} = g_{0i} = 0, \quad (1.23)$$

allora si calcola

$$\begin{aligned} ds &= -\sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = -dt \sqrt{g_{00} \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2 + g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \\ &= -dt \sqrt{1 + \frac{\mathbf{f}^2}{2} + g_{ij} v^i v^j}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Quindi, definendo una variabile ausiliaria $k = \frac{\mathbf{f}^2}{2} + g_{ij}v^iv^j$, si usa l'espansione di Taylor al primo ordine per $k \rightarrow 0$ $\sqrt{1+k} \simeq 1 + k/2$:

$$ds = -dt\sqrt{1 + \frac{\mathbf{f}^2}{2} + g_{ij}v^iv^j} \simeq -dt\left(1 + \frac{\mathbf{f}^2}{4} + \frac{v^iv^j}{2}g_{ij}\right). \quad (1.25)$$

Considerando l'azione relativistica (sempre ponendo $m = 1$ e $c = 1$):

$$S = \int ds \simeq \int dt \left(-1 - \frac{\mathbf{f}^2}{4} - \frac{v^iv^j}{2}g_{ij}\right), \quad (1.26)$$

si trova la formula per la lagrangiana approssimata che coincide, per alcuni termini, con quella efficace trovata precedentemente:

$$\mathcal{L} = -1 - \frac{\mathbf{f}^2}{4} - \frac{v^iv^j}{2}g_{ij} = \frac{v^iv^j}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{3}{2}\partial_i\mathbf{f}\partial_j\mathbf{f}\right) - 1 - \frac{\mathbf{f}^2}{4}, \quad (1.27)$$

dove il termine -1 si associa all'energia a riposo della particella in esame. Con la metrica appena definita, rifacciamo il calcolo per la curvatura, stavolta in quattro dimensioni, considerando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (dove $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$):

$$\begin{aligned} R^{(4)} &\simeq \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} \simeq \partial_i\partial_j h^{ij} + \nabla^2 h^\mu_\mu \simeq \partial_i\partial_j h^{ij} + \nabla^2 h_{00} + \nabla^2 h^i_i \\ &= \frac{3}{2}\partial_i\partial_j (\partial^i\mathbf{f}\partial^j\mathbf{f}) + \mathbf{f}\nabla^2\mathbf{f} + (\partial_i\mathbf{f})^2 + \frac{3}{2}\nabla^2 (\partial_i\mathbf{f}\partial^i\mathbf{f}) \\ &= -3\nabla^2\partial_j\mathbf{f}\partial^j\mathbf{f} + \frac{3}{2}(\nabla^2\mathbf{f})^2 + \frac{3}{2}(\partial_i\partial_j\mathbf{f})^2 + \mathbf{f}\nabla^2\mathbf{f} + (\partial_i\mathbf{f})^2 + 3\partial_i\nabla^2\mathbf{f}\partial^i\mathbf{f} - 3(\partial_i\partial_j\mathbf{f})^2 \\ &= (\partial_i\mathbf{f}^2) - \frac{3}{2}(\partial_i\partial_j\mathbf{f})^2, \end{aligned} \quad (1.28)$$

e ponendo, inoltre, la condizione $\nabla^2\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

1.5 Stabilità

Analizziamo la stabilità del sistema dinamico, ovvero verifichiamo che il sistema non porti la particella, con determinate condizioni iniziali, ad avere un moto divergente, il quale non è accettabile per gli scopi di questo lavoro. Si utilizza un'approssimazione dell'equazione del moto riconducendosi all'equazione di Mathieu.

1.5.1 Introduzione all'equazione di Mathieu

L'equazione di Mathieu nacque come strumento per lo studio del moto oscillatorio della superficie di un tamburo ellittico. L'equazione in una dimensione ha questa forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\delta + \epsilon \cos(t))x = 0, \quad (1.29)$$

dove δ e ϵ sono costanti; ϵ è interpretabile come la variazione del sistema dal regime di oscillazione semplice. Per raggiungere questa forma per l'equazione del moto, poniamo $g(x) = \delta x + \mathcal{O}(x^2)$ e $f(x) = \epsilon x + \mathcal{O}(x^2)$. Per risolvere l'equazione di Mathieu in maniera perturbativa è necessario porre $\xi = t$ e $\eta = \epsilon t$ e riscriverla come:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 x}{\partial \epsilon \partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + (\delta + \epsilon \cos(\xi))x = 0. \quad (1.30)$$

Si espande in serie di potenze $x(\xi, \eta)$,

$$x(\xi, \eta) = x_0(\xi, \eta) + \epsilon x_1(\xi, \eta) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.31)$$

si inserisce l'espansione all'interno di (1.30) e la si risolve ordine per ordine in ϵ . Per il primo ordine $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ si ha

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + \delta x_0 = 0. \quad (1.32)$$

Può essere risolta ponendo x_0 come un semplice oscillatore armonico,

$$x_0(\xi, \eta) = A(\eta) \cos(\sqrt{\delta} \xi) + B(\eta) \sin(\sqrt{\delta} \xi), \quad (1.33)$$

notando che l'ampiezza varia rispetto al parametro lento η . Per il secondo ordine si trova:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \delta x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} - x_0 \cos(\xi). \quad (1.34)$$

Si inserisce (1.33) all'interno della formula, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \delta x_1 = & 2\sqrt{\delta} \frac{dA}{d\eta} \sin(\sqrt{\delta} \xi) - 2\sqrt{\delta} \frac{dB}{d\eta} \cos(\sqrt{\delta} \xi) + \\ & - A \cos(\sqrt{\delta} \xi) \cos(\xi) - B \sin(\sqrt{\delta} \xi) \cos(\xi), \end{aligned} \quad (1.35)$$

e, utilizzando le identità trigonometriche di Werner, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \delta x_1 = & 2\sqrt{\delta} \frac{dA}{d\eta} \sin(\sqrt{\delta} \xi) - 2\sqrt{\delta} \frac{dB}{d\eta} \cos(\sqrt{\delta} \xi) + \\ & - \frac{A}{2} \left(\cos((\sqrt{\delta} + 1) \xi) + \cos((\sqrt{\delta} - 1) \xi) \right) + \\ & - \frac{B}{2} \left(\sin((\sqrt{\delta} + 1) \xi) + \sin((\sqrt{\delta} - 1) \xi) \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Si pone l'accento sul fatto che se si ponesse $dA/d\eta = dB/d\eta = 0$, allora si andrebbe nella condizione in cui la forza oscillante, per δ generico, non avrebbe alcun effetto in x_0 quindi sarebbe trascurabile per bassi ordini. Tuttavia, se si sceglie $\delta = 1/4$, ovvero l'unico valore tale che $\sqrt{\delta} = -(\sqrt{\delta} - 1)$, si ottiene

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} x_1 = \frac{dA}{d\eta} \sin \frac{\xi}{2} - \frac{dB}{d\eta} \cos \frac{\xi}{2} - \frac{A}{2} \left(\cos \frac{3\xi}{2} + \cos \frac{\xi}{2} \right) - \frac{B}{2} \left(\sin \frac{3\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2} \right), \quad (1.37)$$

in cui, per eliminare i termini contenenti $dA/d\eta$ e $dB/d\eta$, è necessario porre la condizione

$$\frac{dA}{d\eta} = -\frac{B}{2}, \quad \frac{dB}{d\eta} = -\frac{A}{2} \implies \frac{d^2 A}{d\eta^2} - \frac{1}{4} A = 0. \quad (1.38)$$

Quindi, porre $\delta = 1/4$ implica che A e B crescono esponenzialmente, causando instabilità. Tuttavia, si può studiare l'andamento di δ espandendolo in serie

$$\delta = \frac{1}{4} + \delta_1 \epsilon + \delta_2 \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (1.39)$$

Pertanto l'equazione (1.34) diventa:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} - x_0 \cos \xi - \delta_1 x_0, \quad (1.40)$$

perciò consegue

$$\frac{dA}{d\eta} = \left(\delta_1 - \frac{1}{2} \right) B, \quad \frac{dB}{d\eta} = - \left(\delta_1 + \frac{1}{2} \right) A \implies \frac{d^2 A}{d\eta^2} + \left(\delta_1^2 - \frac{1}{4} \right) A = 0. \quad (1.41)$$

A e B hanno andamento armonico nel caso in cui $\delta_1^2 > 1/4$, ovvero per $\delta_1 > 1/2 \quad \vee \quad \delta_1 < -1/2$. Si tracciano le curve $\delta = 1/4 \pm \epsilon/2$ nel piano cartesiano $\delta - \epsilon$ le quali rappresentano i confini tra la transizione da sistema stabile a instabile (per questo chiamate "rette di transizione"). Nel caso di $1/4 - \epsilon/2 < \delta < 1/4 + \epsilon/2$ il sistema è instabile, se $\delta = 1/4 + \epsilon/2 \quad \vee \quad \delta = 1/4 - \epsilon/2$ la forza oscillante non influisce nell'equazione del moto fino al primo ordine in ϵ , mentre nei casi restanti il sistema è stabile.

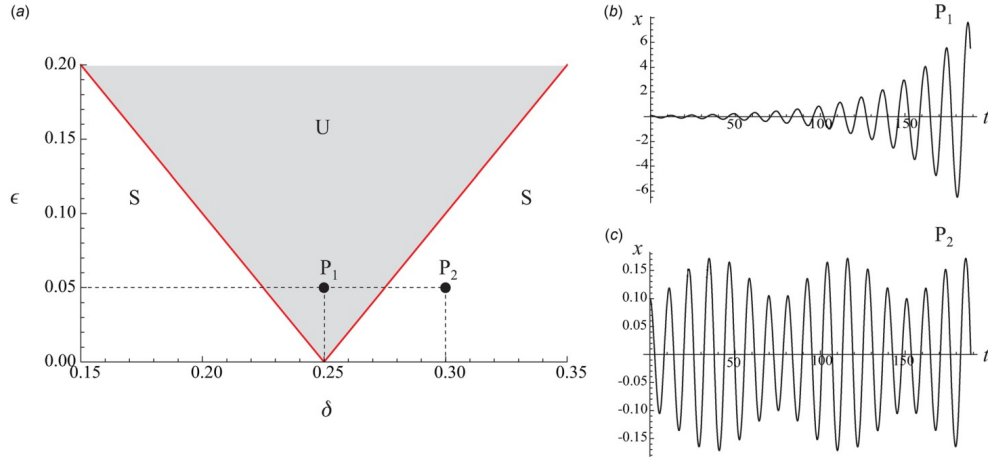


Figura 1.1: (a) Il grafico con le rette di transizione $\delta = 1/4 \pm \epsilon/2$ riferito al calcolo appena trattato. Con “U” è rappresentata la regione di instabilità, con “S” quella di stabilità. (b) riporta un esempio di un moto instabile; (c) un esempio di un moto stabile. Immagini tratte da Ref [4].

1.5.2 Applicazione della teoria di Mathieu

Effettuando le sostituzioni $g(x) = \delta x + \mathcal{O}(x^2)$ e $f(x) = \epsilon x + \mathcal{O}(x^2)$ si arriva all’equazione classica di Mathieu (1.29). Si nota che, in questo caso, il sistema ha un punto di equilibrio a $\mathcal{F} = (\delta + \epsilon \cos(t))x = 0$, ovvero a $x = 0$, e $\dot{x} = 0$. Si utilizza la formula efficace di $\mathcal{F}$ trovata precedentemente (1.16), dove è già stato applicato il metodo asintotico, e si fanno le sostituzioni $g(x) = \delta x + \mathcal{O}(x^2)$ e $f(x) = \epsilon x + \mathcal{O}(x^2)$. La variazione dalla stabilità si studia tramite l’equazione $\partial \mathcal{F}_{\{ \}}(x, \dot{x}) / \partial x|_{x=\dot{x}=0} = 0$ e, espandendo in serie di Taylor il risultato, si ottiene

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \frac{384 + 192\epsilon^2 - 933\epsilon^4 - \sqrt{147456 + 147456\epsilon^2 - 89856\epsilon^4 - 321408\epsilon^6 + 135769\epsilon^8}}{1536\epsilon^2} \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{7}{32}\epsilon^4 - \frac{29}{144}\epsilon^6 + \mathcal{O}(\epsilon^7), \end{aligned} \quad (1.42)$$

dal quale si ottiene $g \sim f^2$. Si nota che δ è negativo per $\epsilon \ll 1$ ma non nullo, perciò dall’analisi di Mathieu precedentemente eseguita il sistema è stabile. Inoltre, visto che δ è negativo, l’equazione del moto è nella forma di una correzione perturbativa all’equazione del pendolo inverso di frequenza $\sqrt{-\delta}$.

Capitolo 2

Dinamica quantistica

Nel seguente capitolo si tratta la controparte quantistica dell'analisi classica discussa nel capitolo precedente. Si ritrovano alcuni termini del potenziale efficace classico assieme ad altri nuovi, di origine puramente quantistica, i quali modificano la struttura dell'hamiltoniana efficace anche all'ordine $\mathcal{O}(v^2)$ e cambiano il modo in cui emerge la metrica curva (la quale, però, è la stessa trovata nel capitolo precedente fino a $\mathcal{O}(v^2)$).

2.1 Introduzione

L'equazione di Schrödinger del sistema è

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) |\psi(\mathbf{x}, t)\rangle = i\hbar \partial_t |\psi(\mathbf{x}, t)\rangle, \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2} + V_g(\mathbf{x}) + V_f(\mathbf{x}) \cos(t), \quad (2.1)$$

dove $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \partial$. Si mantiene $\hbar \neq 1$ per distinguere gli effetti classici da quelli puramente quantistici. Studiamo il sistema tramite l'analisi della funzione di Green dell'equazione di Schrödinger per ricavarne i diagrammi di Feynman fino a $\mathcal{O}(v^3)$. Quindi, la funzione di Green per l'equazione (2.1) è tale che

$$(i\hbar \partial_t - \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)) \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.2)$$

Dalla relazione

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \langle \mathbf{x}, t | \hat{\mathcal{G}} | \mathbf{x}', t' \rangle, \quad (2.3)$$

vale

$$\langle \mathbf{x}, t | (i\hbar \partial_t - \mathcal{H}) \hat{\mathcal{G}} | \mathbf{x}', t' \rangle = \langle \mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t' \rangle. \quad (2.4)$$

Perciò si scrive formalmente, utilizzando la prescrizione $i\epsilon$,

$$\hat{\mathcal{G}} = (i\hbar \partial_t - \mathcal{H} + i\epsilon)^{-1}. \quad (2.5)$$

Inoltre, sfruttando l'invarianza per traslazione temporale della funzione di Green, essa è, cambiando notazione, $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t')$ e la sua trasformata di Fourier rispetto al tempo è

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) = \int \frac{dE}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar} E(t-t')} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t'). \quad (2.6)$$

L'equazione (2.2) diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{dE}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} E(t-t')} (E - \mathcal{H}) \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{dE}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{-\frac{i}{\hbar} E(t-t')} \\ \Rightarrow (E - \mathcal{H}) \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definiamo la trasformata di Fourier di $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E)$ rispetto alle coordinate tramite la relazione (2.3) e quella di completezza $\mathbf{1} = \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) &= \langle \mathbf{x} | \mathcal{G}(E) | \mathbf{x}' \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \langle \mathbf{p} | e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x}} \mathcal{G}(E) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\mathbf{x}'} | \mathbf{p}' \rangle \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\mathbf{x}'} \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizzando l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\mathbf{x}'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (2.9)$$

l'equazione (2.7) diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\mathbf{x}'} (E - \mathcal{H}) \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\mathbf{x}'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \Rightarrow (E - \mathcal{H}) \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Visto che $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) = \langle \mathbf{p} | \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}' \rangle$ e $\langle \mathbf{p} | \mathcal{H} = \langle \mathbf{p} | \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}, E)$, dove

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}, E) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \tilde{V}_g(\mathbf{p}) + \tilde{V}_f(\mathbf{p}, E), \quad (2.11)$$

$$\tilde{V}_g(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}\mathbf{p}} V_g(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

$$\tilde{V}_f(\mathbf{p}, E) = \int \frac{dt}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{x}\mathbf{p} + Et)} V_f(\mathbf{x}) \cos(t), \quad (2.13)$$

allora l'equazione (2.10) diventa

$$\langle \mathbf{p} | (E - \mathcal{H}) \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{p} | (E - \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}, E)) \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle. \quad (2.14)$$

Perciò, $\tilde{\mathcal{G}}(E)$ è

$$\tilde{\mathcal{G}}(E) = \frac{1}{E - \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}, E) + i\epsilon}. \quad (2.15)$$

La trasformata di Fourier dell'hamiltoniana di particella libera e, di conseguenza, la funzione di Green per l'hamiltoniana libera sono

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) = \frac{1}{E - \frac{\mathbf{p}^2}{2} + i\epsilon}. \quad (2.16)$$

2.2 Espansione di $\mathcal{G}$

Per determinare una hamiltoniana efficace per il sistema quantistico è necessario espandere $\mathcal{G}$ rispetto ai potenziali, applicando ancora il principio della media temporale. A tal fine, è fondamentale ricavare l'equazione di Lippmann-Schwinger di $\mathcal{G}$. Definendo $\tilde{V} = \tilde{V}_g + \tilde{V}_f$, si scrivono le uguaglianze

$$E - \tilde{\mathcal{H}}_0 = E - \tilde{\mathcal{H}} + \tilde{V} = \left(1 + \tilde{V} \frac{1}{E - \tilde{\mathcal{H}}}\right) (E - \tilde{\mathcal{H}}) = (1 + \tilde{V} \tilde{\mathcal{G}}) (E - \tilde{\mathcal{H}}) \quad (2.17)$$

$$= (E - \tilde{\mathcal{H}}) \left(1 + \frac{1}{E - \tilde{\mathcal{H}}} \tilde{V}\right) = (E - \tilde{\mathcal{H}}) (1 + \tilde{\mathcal{G}} \tilde{V}) \quad (2.18)$$

Moltiplicando entrambi i lati per $\tilde{\mathcal{G}}$, per la prima equazione a destra mentre per la seconda a sinistra, si ottiene

$$(E - \tilde{\mathcal{H}}_0) \tilde{\mathcal{G}} = 1 + \tilde{V} \tilde{\mathcal{G}}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathcal{G}} (E - \tilde{\mathcal{H}}_0) = 1 + \tilde{\mathcal{G}} \tilde{V}. \quad (2.20)$$

Si moltiplica per $\tilde{\mathcal{G}}_0$ nella prima equazione a sinistra e nella seconda equazione a destra:

$$\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V} \tilde{\mathcal{G}}, \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\mathcal{G}} \tilde{V} \tilde{\mathcal{G}}_0. \quad (2.22)$$

Queste due equazioni, usate ricorsivamente, portano alla stessa formula finale e vengono chiamate equazioni di Lippmann-Schwinger per la funzione di Green. Scriviamo anche la loro forma in termini di funzioni di Green invece di operatori. Si utilizza

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, E) = \langle \mathbf{p}_f | \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}_i \rangle \quad (2.23)$$

e si inserisce la relazione di completezza

$$\int d\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'| = \mathbf{1}. \quad (2.24)$$

Quindi si raggiunge la formula:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, E) &= \langle \mathbf{p}_f | \tilde{\mathcal{G}}_0(E) + \tilde{\mathcal{G}}_0(E) \tilde{V} \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}_i \rangle = \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, E) + \langle \mathbf{p}_f | \tilde{\mathcal{G}}_0(E) \mathbf{1} \tilde{V} \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}_i \rangle \\ &= \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, E) + \int d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}_f | \tilde{\mathcal{G}}_0(E) | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \tilde{V} \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}_i \rangle \\ &= \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, E) + \int d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}_f | \tilde{\mathcal{G}}_0(E) | \mathbf{p}' \rangle \tilde{V}(\mathbf{p}') \langle \mathbf{p}' | \tilde{\mathcal{G}}(E) | \mathbf{p}_i \rangle \\ &= \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, E) + \int d\mathbf{p}' \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}', \mathbf{p}_f, E) \tilde{V}(\mathbf{p}') \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}', E). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tornando al caso in esame, l'espansione che si trova ricorsivamente fino al secondo ordine in v (ricordando che $\tilde{V}_g \sim \mathcal{O}(v^2)$ e $\tilde{V}_f \sim \mathcal{O}(v)$) è

$$\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_g \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0 + \mathcal{O}(v^3). \quad (2.26)$$

Tuttavia, visto che $V_f \sim \cos(t)$, considerando il moto come mediato rispetto a lunghi intervalli temporali, il termine $\tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0$ si azzera. La funzione di Green dell'equazione di Schrödinger è rappresentabile in termini di diagrammi di Feynman, come raffigurato in Fig. 2.1. Ogni diagramma è considerato come un termine che compone $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, E)$, mediato tra stati $|\mathbf{p}_f, E\rangle$ e $|\mathbf{p}_i, E\rangle$, assumendo la conservazione dell'energia. Per ogni diagramma ogni linea continua orizzontale è rappresentata da una funzione di Green. Nel caso di una linea esterna al diagramma, essa si riferisce ad una funzione di Green esterna a sua volta nel termine di $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, E)$ associato; la funzione di Green esterna, visto che agisce sugli stati ket o bra, acquisisce il valore di $\tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}_{i,f}, E) = (E - \frac{\mathbf{p}_{i,f}^2}{2} + i\epsilon)^{-1}$. Nel diagramma si forma un vertice quando un potenziale è in mezzo a due funzioni di Green: ogni vertice è rappresentato da due linee orizzontali (ovvero due funzioni di Green) divise da un potenziale, raffigurato tramite linee verticali (tratteggiate per $\tilde{V}_g$, ondulate per $\tilde{V}_f$). Il vertice fisicamente rappresenta la trasmissione di energia da parte del potenziale, nel nostro caso dell'ordine di $\hbar\omega$. Ogni funzione di Green interna, ovvero che collega due vertici, si chiama "propagatore".

Ci concentriamo sul diagramma con doppio inserimento del campo oscillante: quando il primo campo entra nel primo vertice porta all'interno del sistema energia dell'ordine di $\hbar\omega$; viceversa, il secondo campo estrae dal sistema la stessa energia, perché gli stati iniziali e finali, per la conservazione dell'energia, devono possedere la stessa energia E . Si tiene conto anche del contrario, ovvero che il primo campo estrae energia, la quale viene trasmessa dal secondo. Il propagatore è relativo a stati "far off-shell" con

$$\begin{aligned}
& \text{Double line} = \text{Single line} + \text{Single line with vertical dashed line} \\
& + \frac{1}{2!} \left(\text{Horizontal line with two wavy lines} + \text{Horizontal line with wavy line and dashed line} \right) + \dots
\end{aligned}$$

Figura 2.1: L'espansione della funzione di Green totale (doppia riga a sinistra) negli ordini perturbativi calcolati in equazione (2.26). Ogni linea orizzontale indica la presenza di una funzione di Green dell'hamiltoniana libera nell'espansione. Il tratteggio indica interazione col potenziale $\tilde{V}_g$; tratto ondulato con potenziale $\tilde{V}_f$. Figura tratta da Ref [1].

eguale momento $\mathbf{p}$, ovvero trasporta energia pari a $E \pm \hbar\omega$, dove $\hbar\omega \gg E$. Calcoliamo il propagatore espandendo per $E - \frac{\mathbf{p}^2}{2} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E \pm \hbar\omega) &= \frac{1}{E \pm \hbar\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2} + i\epsilon} \simeq \pm \frac{1}{\hbar\omega} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E \pm \hbar\omega)}{\partial \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)} \Bigg|_{E - \frac{\mathbf{p}^2}{2} = 0} \cdot \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E \pm \hbar\omega)}{\partial \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^2} \Bigg|_{E - \frac{\mathbf{p}^2}{2} = 0} \cdot \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^2 + \\
&+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E \pm \hbar\omega)}{\partial \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^3} \Bigg|_{E - \frac{\mathbf{p}^2}{2} = 0} \cdot \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^3 + \mathcal{O}(\omega^{-4}) \\
&= \pm \frac{1}{\hbar\omega} - \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)}{(\hbar\omega)^2} \pm \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^2}{(\hbar\omega)^3} - \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^3}{(\hbar\omega)^4} + \mathcal{O}(\omega^{-5}). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Utilizzando quest'espansione per il termine $\tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0$, l'interazione è mediata da un vertice efficace, il quale si chiama vertice "a gabbiano" ed è rappresentato in Fig. 2.2.

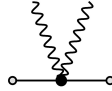


Figura 2.2: Vertice efficace rispetto al termine con doppia inserzione di potenziale oscillante nel propagatore. Figura tratta da Ref [1].

Sommando i contributi per entrambe le possibilità di energia $E \pm \hbar\omega$ per il propagatore, nel termine $\tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0 \tilde{V}_f \tilde{\mathcal{G}}_0$ le componenti contenenti ω di ordine dispari si cancellano. La funzione di Green completa è

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, E) &= \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) + \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) \tilde{V}_g(\mathbf{p}) \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) \\
&+ \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) \tilde{V}_f(\mathbf{p}, E) \left(-\frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)}{(\hbar\omega)^2} - \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^3}{(\hbar\omega)^4} \right) \tilde{V}_f(\mathbf{p}, E) \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) + \mathcal{O}(v^3). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Esplicitando $\tilde{V}_f(\mathbf{p}, E) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{dt}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{x} + Et)} V_f(\mathbf{x}) \cos(t)$ e applicando la media temporale, $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, E)$ è

$$\tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) + \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) \left(\tilde{V}_g(\mathbf{p}) - \tilde{V}_f(\mathbf{p}) \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)}{2(\hbar\omega)^2} \tilde{V}_f(\mathbf{p}) - \tilde{V}_f(\mathbf{p}) \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^3}{2(\hbar\omega)^4} \tilde{V}_f(\mathbf{p}) \right) \tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, E) + \mathcal{O}(v^3), \quad (2.29)$$

dove $\tilde{V}_f(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x}} V_f(\mathbf{x})$. La parte tra parentesi nel secondo termine rappresenta il potenziale efficace quantistico $\tilde{V}_{eff}$.

2.3 Calcolo del propagatore tra stati far off-shell

Per calcolare il potenziale efficace quantistico, si effettua la trasformata di Fourier inversa dei termini in parentesi di (2.29). Il primo termine è

$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}_g \rangle &= \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' dE \langle \mathbf{p}, E | \tilde{V}_g(\mathbf{p} - \mathbf{p}') | \mathbf{p}', E \rangle \\ &= \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' dE d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' dt dt' \langle \mathbf{x}, t | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{x} - Et)} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}''(\mathbf{p} - \mathbf{p}')} V_g(\mathbf{x}'') e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}'\mathbf{x}' - Et')} | \mathbf{x}', t' \rangle \\ &= \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' dt dt' \langle \mathbf{x}, t | \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') V_g(\mathbf{x}'') \delta(t - t') | \mathbf{x}', t' \rangle \\ &= \int d\mathbf{x} dt \langle \mathbf{x}, t | V_g(\mathbf{x}) | \mathbf{x}, t \rangle = \langle V_g \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

Utilizzando la relazione di completezza $\int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = \mathbf{1}$, la media di V_{eff} è

$$\langle \tilde{V}_{eff} \rangle = \left\langle V_g - V_f \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)}{2(\hbar\omega)^2} V_f - V_f \frac{\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right)^3}{2(\hbar\omega)^4} V_f \right\rangle \quad (2.31)$$

Si procede a calcolare i termini secondo e terzo dell'espressione. Ricordando che

$$\hat{\mathbf{p}}^2 |\mathbf{x}\rangle = 2E |\mathbf{x}\rangle, \quad (2.32)$$

si trova che

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | [V_f, [\hat{\mathbf{p}}^2, V_f]] | \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{x} | (V_f \hat{\mathbf{p}}^2 V_f - V_f^2 \hat{\mathbf{p}}^2 - \hat{\mathbf{p}}^2 V_f^2 + V_f \hat{\mathbf{p}}^2 V_f) | \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} | 2(V_f(\hat{\mathbf{p}}^2 - 2E)V_f) | \mathbf{x} \rangle. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Inoltre, dalla relazione

$$[\hat{\mathbf{p}}, V_f] = -i\hbar \nabla V_f = -i\hbar \mathbf{f} \quad (2.34)$$

si ha, definendo $A = [\hat{\mathbf{p}}^2, V_f]$, che

$$A = \hat{\mathbf{p}}[\hat{\mathbf{p}}, V_f] - [\hat{\mathbf{p}}, V_f]\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{f} - \mathbf{f}\hat{\mathbf{p}}). \quad (2.35)$$

Quindi, otteniamo

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{2(\hbar\omega)^2} V_f \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\right) V_f \right\rangle &= \left\langle -\frac{1}{8(\hbar\omega)^2} [V_f, A] \right\rangle = \left\langle \frac{1}{8(\hbar\omega)^2} [V_f, i\hbar(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{f} - \mathbf{f}\hat{\mathbf{p}})] \right\rangle \\ &= \frac{i}{8\omega^2\hbar} \langle [V_f, \hat{\mathbf{p}}] \mathbf{f} - \mathbf{f} [V_f, \hat{\mathbf{p}}] \rangle = \frac{\mathbf{f}^2}{4\omega^2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

e, ponendo $\omega = 1$, si ritrovano due termini del potenziale efficace nel caso classico (quelli di ordine $\mathcal{O}(v^2)$)

$$V_{eff} = V_g + \frac{\mathbf{f}^2}{4} + \dots \quad (2.37)$$

Eseguiamo lo stesso calcolo per l'ultimo termine in equazione (2.31). Usiamo l'identità

$$\langle \mathbf{x} | A = \langle \mathbf{x} | [\hat{\mathbf{p}}^2, V_f] = \langle \mathbf{x} | V_f(2E - \hat{\mathbf{p}}^2), \quad (2.38)$$

allora, con calcoli analoghi a quelli per trovare (2.36), si trova:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | [A, [\hat{\mathbf{p}}^2, A]] | \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{x} | (A\hat{\mathbf{p}}^2 A - A^2\hat{\mathbf{p}}^2 - \hat{\mathbf{p}}^2 A^2 + A\hat{\mathbf{p}}^2 A) | \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} | 2(A(\hat{\mathbf{p}}^2 - 2E)A) | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | 2V_f(\hat{\mathbf{p}}^2 - 2E)^3 V_f | \mathbf{x} \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Calcoliamo la seguente espressione, definendo con $f_{ij} = \partial_i f_j = \partial_i \partial_j V_f = f_{ji}$:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{p}}^2, A] &= [\hat{p}_i \hat{p}_i, A] = -i\hbar(\hat{p}_j [\hat{\mathbf{p}}^2, f_j] + [\hat{\mathbf{p}}^2, f_j] \hat{p}_j) \\ &= -\hbar^2(\hat{p}_j \hat{p}_i f_{ij} + \hat{p}_j f_{ij} \hat{p}_i + \hat{p}_i f_{ij} \hat{p}_j + f_{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j) \\ &= -\hbar^2(\hat{p}_i \hat{p}_j f_{ij} + 2\hat{p}_i f_{ij} \hat{p}_j + f_{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si riportano i passaggi essenziali, tenendo conto che sono stati ottenuti utilizzando più volte le proprietà $f_{ij} = f_{ji}$ e, per esempio, $\hat{p}_i \hat{p}_j \partial_k (f_{ij} f_k) = \partial_k (\hat{p}_i \hat{p}_j f_{ij} f_k) \rightarrow 0$ perché stiamo calcolando il potenziale efficace:

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{2(\hbar\omega)^4} V_f \left(E - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2} \right)^3 V_f \right\rangle &= -\frac{1}{2^5(\hbar\omega)^4} \langle [A, [\hat{\mathbf{p}}^2, A]] \rangle \\ &= \frac{1}{2^5(\hbar\omega)^4} \langle [A, \hbar^2(\hat{p}_i \hat{p}_j f_{ij} + 2\hat{p}_i f_{ij} \hat{p}_j + f_{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j)] \rangle \\ &= \frac{\hbar^4}{2^5(\hbar\omega)^4} \langle 4\hat{p}_i \hat{p}_j f_{ik} f_{jk} + 4\hat{p}_i f_{ik} \hat{p}_j f_{jk} + 6\hat{p}_i f_{ik} f_{jk} \hat{p}_j \\ &\quad 2f_{ik} \hat{p}_i \hat{p}_j f_{jk} + 4f_{ik} \hat{p}_i f_{jk} \hat{p}_j + 4f_{ik} f_{jk} \hat{p}_i \hat{p}_j \rangle \\ &= \frac{1}{2^4\omega^4} \langle 3\hat{p}_i \hat{p}_j f_{ik} f_{jk} + 6\hat{p}_i f_{ik} f_{jk} \hat{p}_j + 3f_{ik} f_{jk} \hat{p}_i \hat{p}_j \\ &\quad + [f_{ik}, \hat{p}_i] \hat{p}_j f_{jk} + \hat{p}_i f_{ik} [f_{jk}, \hat{p}_j] \rangle \\ &= \frac{1}{2^4\omega^4} (3(\{\hat{p}_i \hat{p}_j, \partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f}\} + 2\hat{p}_i \partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f} \hat{p}_j) + \hbar^2(\partial_i \partial_j \mathbf{f})^2). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Completando il calcolo fino all'ordine $\mathcal{O}(v^3)$.

2.4 Interpretazione risultati

Si interpreta il risultato tra parentesi in (2.31) sommato al termine cinetico tipico $\hat{\mathbf{p}}^2/2$ come l'hamiltoniana del sistema; quindi, definendo $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \frac{3}{2}\partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f}$ e ponendo $\omega = 1$, si riscrive l'hamiltoniana efficace come

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{1}{8}(\{\hat{p}_i \hat{p}_j, \gamma_{ij} + 2\hat{p}_i \gamma_{ij} \hat{p}_j\}) + \frac{\hbar^2}{16}(\partial_i \partial_j \mathbf{f})^2 + V_{eff} + \mathcal{O}(v^3) \quad (2.42)$$

con $V_{eff} = V_g + \mathbf{f}^2/4$.

Si nota che γ_{ij}^{-1} è esattamente la stessa metrica tridimensionale calcolata nel caso classico; inoltre, sostituendo δ_{ij} al posto di γ_{ij} , si ritrova il termine cinetico di corpo libero $\hat{p}_i \hat{p}_i/2$. La differenza rispetto al caso classico è che tale termine che modifica la metrica del sistema è stato trovato già all'ordine $\mathcal{O}(v^2)$, invece che a $\mathcal{O}(v^4)$. Assumendo $\partial \mathbf{f} = 0$ (come nel caso di campi elettromagnetici in assenza di sorgenti nella regione di spazio considerata, visto che valgono $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), la formula dell'hamiltoniana efficace si riscrive

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{1}{2}\hat{p}_i \gamma_{ij} \hat{p}_j - \frac{\hbar^2}{12}R^{(3)} + V_{eff} + \mathcal{O}(v^3). \quad (2.43)$$

Andando avanti coi calcoli, si verifica che anche V_{eff} è uguale al potenziale efficace classico. La netta differenza la fanno i termini contenenti $\hbar$, come nel caso esaminato lo è $\frac{\hbar^2}{16}(\partial_i\partial_j\mathbf{f})^2$, i quali sono derivabili solo quantisticamente e, infatti, sono nuovi rispetto al caso classico. Il calcolo in esame può essere ampliato a tutte le possibili armoniche della forza oscillante oltre a $\cos(t)$; con ulteriori estensioni di questa teoria efficace è possibile effettuarne anche la quantizzazione.

Capitolo 3

Applicazione della teoria per il confinamento di particelle

In quest'ultimo capitolo si applicano i calcoli eseguiti nei capitoli precedenti per lo sviluppo teorico di trappole di particelle cariche o neutre ma dotate di spin. In particolare, tramite l'utilizzo di campi elettromagnetici dinamici, si trovano potenziali con minimo assoluto nell'origine, cosa che non è possibile fare coi campi elettromagnetici statici, confinando la particella. I casi di trappola studiati sono in $2d$ e $3d$ per particelle cariche e in $3d$ per particelle neutre. Per ognuno di questi casi si calcola lo scalare di curvatura relativo agli effetti gravitazionali emersi.

3.1 Introduzione

Le trappole per particelle o ioni sono ampiamente utilizzate in diversi ambiti della fisica, come la spettrometria, il quantum computing e misure specifiche come quella della vita media del neutrone. Ne esistono di diversi tipi a seconda del principio fisico che le contraddistingue; le più comuni sono:

- Trappola di Penning: basata sull'utilizzo di un campo magnetico omogeneo statico assiale, che impedisce il movimento radiale della particella, e un campo elettrico statico disomogeneo sempre assiale, che confina i movimenti assiali della particella;
- Trappola di Paul: sfrutta campi elettrici oscillanti per confinare le particelle cariche ed è basata sulla teoria descritta nel capitolo due. Prima dell'analisi di [1] e [2], infatti, la teoria di queste trappole era molto meno accurata rispetto a quella delle altre trappole (che sono generalmente statiche);
- Trappola di Ioffe-Pritchard: l'unica trappola per particelle neutre con spin tra le tre; necessita di un campo magnetico disomogeneo di secondo grado nelle coordinate. Quando venne inventata, si pensò di utilizzare un campo statico; tuttavia, in questo capitolo si vede che funziona anche con un campo magnetico oscillante, il quale presenta i vantaggi che riesce nel confinamento indipendentemente dall'orientamento dello spin della particella e intrappola la particella nel minimo assoluto del sistema, evitando la perdita della particella a causa dello "spin-flip".

L'utilizzo di campi elettromagnetici dinamici ha il primo vantaggio di non dover sottostare al teorema di Earnshaw: esso dice che una particella carica non può essere mantenuta (staticamente) in equilibrio stabile dalle sole forze elettrostatiche. Il primo e il terzo caso di trappole elencate funzionano ugualmente perché il campo magnetico non serve strettamente a generare un potenziale con minimo al centro del sistema, ma forza il moto radiale delle particelle in modo tale che sia finito e che resti dentro l'apparato sperimentale. Quindi, la particella è in moto rotatorio e non in quiete, generando errori sistematici difficilmente attenuabili nelle misure.

I casi analizzati hanno tutti in comune l'utilizzo di una forza di Lorentz oscillante, la quale è

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\omega t)) = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (3.1)$$

Nel caso di un campo elettrico generato da un campo magnetico oscillante, si utilizza la legge di Faraday-Lenz $\boldsymbol{\partial} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t) = -\partial_t(\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\omega t)) = \omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \sin(\omega t)$, con $\boldsymbol{\partial} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = O(1/c^2)$ e c la velocità della luce.

3.2 Applicazione teoria

3.2.1 Dinamica classica

Come fatto nel primo capitolo, si imposta la teoria efficace dove si pone $v \ll c$. Si espande la posizione in serie di Fourier

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{c}_n(\mathbf{r}) \cos(nt) + \mathbf{s}_n(\mathbf{r}) \sin(nt)], \quad (3.2)$$

ricordando che vale $d/dt = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial}_r + \partial_t$. Rispetto a quanto visto nel primo capitolo, nell'equazione (3.1) è presente sia una forza oscillante con l'armonica $\cos(\omega t)$ sia un'altra con $\sin(\omega t)$. Calcoliamo il potenziale efficace fino a $O(v^2)$, quindi ricalcoliamo $\mathcal{F}_{eff,1}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ non tenendo conto del termine proporzionale a $\mathbf{B}$ perché contenente $\mathbf{v}$:

$$\mathcal{F}_{eff,1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,1}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,1}(\mathbf{r}) \sin(nt)] + \mathbf{f}(\mathbf{r}) \sin(t). \quad (3.3)$$

Ne consegue $\mathbf{s}_{1,1} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$, da cui il secondo ordine è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{eff,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,2}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,2}(\mathbf{r}) \sin(nt)] \\ &\quad + 2v_i \partial_i \mathbf{s}_{1,1}(\mathbf{r}) \cos(t) + \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \sin(t) \cdot A_i(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,2}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,2}(\mathbf{r}) \sin(nt)] \\ &\quad + 2v_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cos(t) + f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \sin(t)^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dal quale, sostituendo $\sin(t)^2 = (1 - \cos(2t))/2$, si trovano

$$\mathbf{c}_{2,2}(\mathbf{r}) = -\frac{f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r})}{8}, \quad \mathbf{c}_{1,2}(\mathbf{r}) = 2v_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (3.5)$$

e tutti i restanti coefficienti sono nulli. Per cui si ottiene $\mathcal{F}_{eff,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r})/2$ e il potenziale efficace è, con le dovute sostituzioni,

$$V_{eff} = \frac{e^2}{4m\omega^2} \mathbf{E}^2 + O(1/\omega^3). \quad (3.6)$$

Ponendo il campo magnetico come interamente generato dal campo elettrico secondo $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \times \mathbf{E}/\omega$, si trova che la lagrangiana efficace è

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{m}{2} v_i v_j g_{ij}(\mathbf{r}) - V_{eff}(\mathbf{r}) + O(1/\omega^6), \quad (3.7)$$

dove

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{e^2}{2m^2\omega^4} (\boldsymbol{\partial} E_i \boldsymbol{\partial} E_j + \partial_i \mathbf{E} \boldsymbol{\partial} E_j + \partial_j \mathbf{E} \boldsymbol{\partial} E_i) + O(1/\omega^6). \quad (3.8)$$

Si nota che la metrica è rimasta simmetrica negli indici. Si raggiunge la stessa forma trovata nella dinamica classica solo ponendo $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, ovvero $\boldsymbol{\partial} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$; infatti, di conseguenza si ha $\partial_i E_j = \partial_j E_i$, quindi $\partial_i \mathbf{E} \boldsymbol{\partial} E_j = \boldsymbol{\partial} E_i \boldsymbol{\partial} E_j$.

Nonostante il potenziale efficace abbia la stessa forma del caso in cui non si considerasse il campo magnetico, le sue proprietà sono diverse essendo che il campo elettrico magneticamente indotto non è potenziale: dalla formula $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\partial} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})/\omega$ si capisce che, a parità di $\mathbf{B}$, il campo elettrico scala come ω , quindi il potenziale efficace resta non nullo anche per $\omega \rightarrow \infty$.

Gravità emergente

Visto che la nuova metrica (3.8) è diversa da quella ottenuta nel primo capitolo, bisogna ricalcolare lo scalare di curvatura. A partire dai calcoli effettuati nel primo capitolo (1.23), la metrica quadridimensionale è

$$g_{00} = 1 + \frac{e^2 \mathbf{E}^2 + (\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \mathbf{B})^2}{2m^2 \omega^4}, \quad g_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{e^2}{2m^2 \omega^4} (\partial E_i \partial E_j + \partial_i \mathbf{E} \partial E_j + \partial_j \mathbf{E} \partial E_i), \quad g_{i0} = g_{0i} = 0. \quad (3.9)$$

Di conseguenza, ponendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$ è

$$h_{00} = \frac{e^2 \mathbf{E}^2 + (\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \mathbf{B})^2}{2m^2 \omega^4}, \quad h_{ij} = \frac{e^2}{2m^2 \omega^4} (\partial E_i \partial E_j + \partial_i \mathbf{E} \partial E_j + \partial_j \mathbf{E} \partial E_i), \quad h_{i0} = h_{0i} = 0. \quad (3.10)$$

Quindi, lo scalare di curvatura quadridimensionale è

$$R^{(4)} \simeq \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \simeq \partial_i \partial_j h^{ij} + \nabla^2 h^\mu_\mu \simeq \partial_i \partial_j h_{ij} + \nabla^2 h_{00} - \nabla^2 h_{ii}, \quad (3.11)$$

visto che $\partial_t \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{B} = 0$. Calcoliamo separatamente ogni componente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_{00} &= \frac{1}{2m^2 \omega^4} (2e^2 ((\partial_i \mathbf{E})^2 + E_i \nabla^2 E_i) + 2((\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \partial_j \mathbf{B})^2 + \partial_i \mathbf{B} \partial_i \nabla^2 \mathbf{B})) \\ &= \frac{1}{2m^2 \omega^4} (2e^2 (\partial_i \mathbf{E})^2 + 2(\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \partial_j \mathbf{B})^2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_{ii} &= \frac{e^2}{2m^2 \omega^4} (2\partial E_i \partial \nabla^2 E_i + 2(\partial_i \partial_j \mathbf{E})^2 + 4\partial_i \partial_j \mathbf{E} \cdot \partial \partial_j E_i + 4\partial_i \nabla^2 \mathbf{E} \cdot \partial E_i) \\ &= \frac{e^2}{2m^2 \omega^4} (2(\partial_i \partial_j \mathbf{E})^2 + 4\partial_i \partial_j \mathbf{E} \cdot \partial \partial_j E_i), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j h_{ij} &= \frac{1}{2m^2 \omega^4} (2\partial \partial_j \partial_i E_i \partial E_j + \partial \partial_i E_i \partial \partial_j E_j + (\partial_i \partial_j \mathbf{E})^2 + \\ &\quad + 2\nabla^2 \partial_j \mathbf{E} \cdot \partial E_i + \partial_j \mathbf{E} \cdot \partial \partial_j \partial_i E_i + 2\nabla^2 \mathbf{E} \cdot \partial \partial_i E_i + 2\partial_i \partial_j \mathbf{E} \cdot \partial \partial_j E_i) \\ &= \frac{1}{2m^2 \omega^4} ((\partial_i \partial_j \mathbf{E})^2 + 2\partial_i \partial_j \mathbf{E} \cdot \partial \partial_j E_i), \end{aligned} \quad (3.14)$$

in cui sono state utilizzate le relazioni $\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{B} = 0$ (dall'equazione delle onde) e $\partial \mathbf{E} = 0$. Allora, $R^{(4)}$ è

$$R^{(4)} = \frac{1}{2m^2 \omega^4} (2e^2 (\partial_i \mathbf{E})^2 + 2(\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \partial_j \mathbf{B})^2 - e^2 (\partial_i \partial_j \mathbf{E})^2 - 2e^2 \partial_i \partial_j \mathbf{E} \cdot \partial \partial_j E_i). \quad (3.15)$$

In particolare, se si pone $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e, quindi, $\boldsymbol{\partial} \times \mathbf{E} = 0$, si ha che $\partial_i E_j = \partial_j E_i$ e si ritrova il risultato calcolato nel primo capitolo (1.28).

3.2.2 Dinamica quantistica

Si considera il corrispondente sistema quantistico, in cui si introduce il potenziale di interazione tra campo magnetico esterno e il momento magnetico di spin della particella. Questo potenziale è cruciale per il confinamento delle particelle neutre. L'hamiltoniana del sistema è

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cos(\omega t))^2 + eV(\mathbf{r}) \sin(\omega t) - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\omega t), \quad (3.16)$$

dove $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{g\mu}{\hbar} \hat{\mathbf{S}}$ è il momento magnetico di spin, g il fattore giromagnetico, μ è l'unità di momento magnetico di spin e $\hat{\mathbf{S}}$ è l'operatore di spin. Il campo elettrico è

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial(\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cos(\omega t))}{\partial t} - \boldsymbol{\partial} V(\mathbf{r}) \sin(\omega t) = (\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\partial} V(\mathbf{r})) \sin(\omega t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t). \quad (3.17)$$

La funzione di Green per l'equazione di Schrödinger dell'hamiltoniana (3.16) è $\mathcal{G} = (i\hbar\partial_t - \mathcal{H}(t) + i\epsilon)^{-1}$; l'espansione della sua trasformata di Fourier $\tilde{\mathcal{G}}$ rispetto al momento magnetico è

$$\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_0 + \tilde{\mathcal{G}}_0 \hat{\boldsymbol{\mu}} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathcal{G}}_0 \hat{\boldsymbol{\mu}} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathcal{G}}_0 + \mathcal{O}(v^3), \quad (3.18)$$

dove $\tilde{\mathcal{G}}_0$ è la trasformata di Fourier della funzione di Green per l'hamiltoniana del sistema libero e

$$\tilde{\mathbf{B}}(t, \mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\omega t). \quad (3.19)$$

In equazione (3.18), la $\tilde{\mathcal{G}}_0$ intermedia nel secondo termine consiste in un propagatore che trasporta momento $\mathbf{p}$ e energia $\mathcal{E} \pm \hbar\omega$. Vale $\mathcal{E} \ll \hbar\omega$, quindi lo approssimiamo nel regime far off-shell

$$\tilde{\mathcal{G}}_0(\mathbf{p}, \mathcal{E} \pm \hbar\omega) = \pm \frac{1}{\hbar\omega} - \frac{\left(\mathcal{E} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)}{(\hbar\omega)^2} \pm \frac{\left(\mathcal{E} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2}{(\hbar\omega)^3} - \frac{\left(\mathcal{E} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^3}{(\hbar\omega)^4} + \mathcal{O}(\omega^{-5}). \quad (3.20)$$

Il suo calcolo è simile a quanto fatto per arrivare all'equazione (2.36): i termini di potenze dispari di ω si cancellano sommando i contributi delle possibili energie $\mathcal{E} \pm \hbar\omega$. Il termine proporzionale a ω^{-2} è

$$\frac{1}{2(\hbar\omega)^2} \langle \mathcal{E}, \mathbf{p}_f | (\hat{\boldsymbol{\mu}} \tilde{\mathbf{B}}) (\hat{\mathbf{p}}^2/(2m) - \mathcal{E}) (\hat{\boldsymbol{\mu}} \tilde{\mathbf{B}}) | \mathcal{E}, \mathbf{p}_i \rangle = \frac{(\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \mathbf{B})^2}{4m\omega^2}, \quad (3.21)$$

dove si è usata la relazione on-shell $\mathbf{p}_{f,i}^2 = 2m\mathcal{E}$. Per il calcolo del termine contenente ω^{-4} si sfrutta la formula (2.41); in particolare, il termine puramente quantistico contenente $\hbar^2$ è

$$-\frac{\hbar^2 e^2}{8m^3 \omega^4} (\partial \partial_j E_i) (\partial \partial_i E_j), \quad (3.22)$$

il quale, ponendo $\mathbf{B} = 0$ e quindi $\partial_i E_j = \partial_j E_i$, risulta uguale a

$$-\frac{\hbar^2 e^2}{8m^3 \omega^4} (\partial_i \partial_j \mathbf{E})^2, \quad (3.23)$$

corrispondente al termine del potenziale efficace proporzionale a $\hbar^2$ calcolato in (2.41) nel capitolo precedente. Visto che all'interno del sistema non è presente carica, l'hamiltoniana efficace è data dalla formula (2.43) e, quindi, è

$$\frac{1}{2m} \hat{p}_i g_{ij}^{-1}(\mathbf{r}) \hat{p}_j + V_{eff}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\omega^{-6}), \quad (3.24)$$

dove

$$V_{eff} = \frac{1}{4m\omega^2} (e^2 \mathbf{E}^2 + (\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \mathbf{B})^2) - \frac{\hbar^2 e^2}{8m^3 \omega^4} (\partial \partial_j E_i) (\partial \partial_i E_j) + \mathcal{O}(\omega^{-6}), \quad (3.25)$$

in cui g_{ij} è la metrica trovata precedentemente (3.8). Nel caso di particelle a spin 1/2, si ha $\hat{\boldsymbol{\mu}} \partial_i \mathbf{B} = g\mu \partial_i \mathbf{B} / (2\hbar)$.

3.3 Esempi di confinamento di particelle

Ci sono diversi tipi di configurazioni di campi elettrici e magnetici per ogni tipo di trappola che si vuole costruire; in questa sezione se ne vede un esempio nei casi di $2d$ e $3d$ per particella carica, $3d$ per particelle neutre dotate di spin.

3.3.1 Trappola per particelle cariche in 2d

Si considera il sistema confinato in una regione di spazio bidimensionale all'interno della quale è presente, in direzione ortogonale al piano, un campo magnetico omogeneo $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Esso induce un campo elettrico interno alla regione pari a $\mathbf{E} = \frac{\omega_B}{2}(-y, x, 0)$, per il quale si verifica $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \times \mathbf{E}/\omega$. Il potenziale efficace che ne risulta si calcola tramite la formula (3.25) ed è

$$V_{eff} = \frac{m\omega_B^2}{16}(x^2 + y^2), \quad (3.26)$$

dove $\omega_B = eB/m$ è la frequenza di ciclotrone associata al campo magnetico oscillante. Si nota che il potenziale è di tipo armonico con centro nell'origine e con frequenza $\omega_B/(2^{3/2})$; teoricamente non c'è alcuna dipendenza da ω , però è necessario controllare che sia verificato $\omega \gg \omega_B$ per garantire la convergenza dell'espansione ad alta frequenza del potenziale.

La metrica è

$$g_{ij} \simeq \delta_{ij} - \frac{e^2}{2m^2\omega^4}(\partial E_i \partial E_j + \partial_i \mathbf{E} \partial E_j + \partial_j \mathbf{E} \partial E_i) = \delta_{ij} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\omega_B^2}{\omega^2}\right) \quad (3.27)$$

e la curvatura si calcola tramite formula (3.15) ed è

$$R^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{\omega_B^2}{\omega^2}, \quad (3.28)$$

la quale è strettamente positiva; questo è un risultato atteso, infatti avere curvatura positiva è comune per i sistemi in cui sono presenti corpi massivi. L'effetto fisico della curvatura dello spazio-tempo nel presente caso, quindi, è quello di avere una massa centrata nell'origine che attira la nostra particella verso l'origine, supportando il confinamento.

3.3.2 Trappola per particelle cariche in 3d

Il caso tridimensionale che discutiamo qui è diverso da quello usato nelle trappole di Paul, brevemente spiegato nell'introduzione del capitolo: invece di un campo magnetico omogeneo assiale e un campo elettrico disomogeneo assiale, si utilizza un campo magnetico che ruota attorno all'asse z :

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = B(\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0). \quad (3.29)$$

Per calcolare il campo elettrico indotto si tiene conto della legge di Faraday-Lenz e della legge di Gauss per il campo elettrico in assenza di carica:

$$\begin{cases} \omega B \sin(\omega t) = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \omega B \cos(\omega t) = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Queste condizioni, assieme alle condizioni al contorno $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}$ e $\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}$ portano, a meno di costanti, alla seguente formula del campo elettrico

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\omega B}{2}(z \cos(\omega t), -z \sin(\omega t), y \sin(\omega t) - x \cos(\omega t)). \quad (3.31)$$

Questo sistema è diverso da quello preso in esame nei primi due capitoli, perché le oscillazioni del campo magnetico nelle componenti x e y sono sfasate di $\pi/2$; tuttavia, fino al secondo ordine i modi oscillatori non interferiscono tra loro. L'aggiunta di un campo generico $\mathbf{k}(\mathbf{R}) \sin(\omega t)$ nell'equazione del moto iniziale (1.5) porta, ripercorrendo i calcoli precedentemente fatti, a scrivere in questo modo il primo ordine della forza efficace:

$$\mathcal{F}_{eff,1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,1}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,1}(\mathbf{r}) \sin(nt)] + \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cos(t) + \mathbf{k}(\mathbf{r}) \sin(t). \quad (3.32)$$

Di conseguenza $\mathbf{s}_{1,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})$ e gli altri termini sono invariati; perciò $\mathcal{F}_{eff,2}$ è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{eff,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [-\mathbf{c}_{n,2}(\mathbf{r}) \cos(nt) - \mathbf{s}_{n,2}(\mathbf{r}) \sin(nt)] - 2v_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \sin(t) + \\ & + f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \cos(t)^2 + \mathbf{g}(\mathbf{r}) + 2v_i \partial_i \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cos(t) + k_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cos(t) \sin(t) + \\ & + f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cos(t) \sin(t) + k_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \sin(t)^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sfruttando $\sin(t) \cos(t) = \sin(2t)/2$ e $\sin(t)^2 = (1 - \cos(2t))/2$, la formula della forza efficace fino al secondo ordine è

$$\mathcal{F}_{eff} = \frac{1}{2} f_i(\mathbf{r}) \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} k_i \partial_i \mathbf{k}(\mathbf{r}) \quad (3.34)$$

e, di conseguenza, il potenziale efficace è

$$V_{eff} = V_g + \frac{\mathbf{f}^2}{4} + \frac{\mathbf{k}^2}{4}. \quad (3.35)$$

Quindi, per risolvere il calcolo del potenziale efficace, basta suddividere il campo elettrico nelle componenti generate dai due moti oscillatori di $\mathbf{B}$ e sommarne i rispettivi quadrati. Definiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) \cos(t) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \sin(t) \\ &= \frac{\omega B}{2} (z, 0, -x) \cos(t) + \frac{\omega B}{2} (0, -z, y) \sin(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Allora, tornando alla trappola in esame, il potenziale efficace è

$$V_{eff} = \frac{e^2}{4m\omega^2} (\mathbf{E}_c^2 + \mathbf{E}_s^2) = \frac{m\omega_B^2}{16} (x^2 + y^2 + 2z^2), \quad (3.37)$$

dove $\omega_B = eB/m$.

Per il calcolo della curvatura è necessario ritrovare i termini della lagrangiana proporzionali a v^2 con la nuova condizione che siano presenti sia un campo proporzionale a $\cos(t)$ sia un campo proporzionale a $\sin(t)$. Chiamando quest'ultimo $\mathbf{k}(\mathbf{r})$, si modifica opportunamente il programma in appendice e si trova che tali termini ricercati sono $-\frac{3}{2}v_i v_j (\partial_i \partial_j f_a) \partial_a \mathbf{f}$ e $-\frac{3}{2}v_i v_j (\partial_i \partial_j k_a) \partial_a \mathbf{k}$, i quali sono ricavabili dall'equazione di Lagrange per una lagrangiana di termine cinetico pari a:

$$\mathcal{L}_{eff,cin} = \frac{v_i v_j}{2} \delta_{ij} - \frac{3}{2} v_i v_j \partial_i \mathbf{f} \partial_j \mathbf{f} - \frac{3}{2} v_i v_j \partial_i \mathbf{k} \partial_j \mathbf{k}. \quad (3.38)$$

La metrica è lineare nei due termini e, di conseguenza, anche la curvatura scalare quadridimensionale. Perciò, per calcolare quest'ultima basta sommare i contributi separati di $\mathbf{E}_c$ ed $\mathbf{E}_s$. La curvatura quadridimensionale, allora, è

$$R^{(4)} = \frac{1}{2m^2\omega^4} (2e^2 (\partial_i \mathbf{E}_c)^2 + 2e^2 (\partial_i \mathbf{E}_s)^2) = \frac{1}{2m^2\omega^4} (e^2 \omega^2 B^2 + e^2 \omega^2 B^2) = \frac{e^2 B^2}{m^2 \omega^2} = \frac{\omega_B^2}{\omega^2}, \quad (3.39)$$

ovvero il doppio rispetto al caso in $2d$, quindi anche in questo caso strettamente positiva.

3.3.3 Trappola per particelle neutre con spin in $3d$

Per le particelle neutre, l'unica maniera di confinarle è sfruttare il loro momento magnetico di spin facendolo interagire con un campo magnetico esterno. In questo caso, si usa un campo magnetico spazialmente disomogeneo comunemente utilizzato nelle trappole di Ioffe-Pritchard:

$$\mathbf{B} = B \left(\frac{xz}{\Delta^2}, \frac{yz}{\Delta^2}, 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2\Delta^2} \right), \quad (3.40)$$

dove B è costante e Δ è un parametro costante che definisce la scala della variazione del campo rispetto alla forma della trappola. Per cui, utilizzando la formula (3.25), il potenziale efficace è

$$V_{eff} = \frac{m\tilde{\omega}^2}{2}(x^2 + y^2 + 3z^2), \quad (3.41)$$

dove

$$\tilde{\omega} = \frac{g\mu B}{2m\Delta^2\omega}. \quad (3.42)$$

Si nota come V_{eff} non dipenda, almeno per delle costanti, da eventuali componenti omogenee o di primo grado spaziale del campo magnetico. Se si applica un campo magnetico omogeneo statico nel sistema bisogna considerare nei calcoli solamente la componente di $\mathbf{B}$ parallela al campo magnetico omogeneo; inoltre, nel moto della particella si dovrebbe considerare anche la precessione di Larmor della particella dovuta all'interazione tra spin e campo magnetico omogeneo.

La curvatura scalare si calcola tramite la formula (3.15) ed è

$$R^{(4)} = \frac{\hat{\mu}(\partial_i\partial_j\mathbf{B})^2}{m^2\omega^4} = \frac{g\mu}{2m^2\omega^4} \frac{7B^2}{2\Delta^2} = \frac{7B^2g\mu}{4m^2\omega^4\Delta^4}, \quad (3.43)$$

che è strettamente positiva, rivelando di nuovo che gli effetti gravitazionali emergenti agiscono come un corpo massivo al centro del potenziale il quale attrae la particella.

Conclusioni

La creazione di trappole per particelle sfruttando campi elettromagnetici rapidamente oscillanti è possibile con le tecnologie attuali e presenta il vantaggio, rispetto alle trappole statiche, di non dover sottostare al teorema di Earnshaw. Ne risulta che le particelle possano essere confinate nel minimo assoluto del potenziale, senza doverle mantenere in rotazione per evitare che escano dalla trappola.

Delle forze elettromagnetiche prese in esame si è studiata l'equazione del moto classica corrispondente, espandendola nel regime di alta frequenza delle oscillazioni delle forze, ed è stato trovato il potenziale efficace fino a $\mathcal{O}(v^6)$. È stata calcolata la lagrangiana efficace e si è notato che il termine cinetico è diverso da quello di corpo libero: ciò è dato da effetti di gravità emergente della teoria, della quale sono stati calcolati il simbolo di Christoffel tridimensionale e la curvatura quadridimensionale corrispondenti. È stata verificata la stabilità del sistema tramite il paragone con l'analisi dell'equazione di Mathieu.

Si è studiato il corrispondente sistema quantistico tramite lo sviluppo di Taylor nei potenziali della trasformata di Fourier dell'equazione di Green dell'equazione di Schrödinger del sistema, trovando le formule dei diagrammi di Feynman efficaci associati. È stato calcolato il potenziale efficace della teoria, riscontrando che è pari al potenziale efficace classico sommato ad ulteriori termini di carattere puramente quantistico, contenenti $\hbar$. Inoltre, studiando l'hamiltoniana efficace ricavata, è risultato un effetto di gravità emergente compatibile con quello osservato nel caso classico.

Infine, si sono studiati degli esempi di campi elettromagnetici per la creazione di trappole in $2d$ e $3d$ per particelle cariche e in $3d$ per particelle neutre dotate di spin. In tutti i casi sono stati ottenuti potenziali efficaci con minimo assoluto nell'origine, ideali per il confinamento, e si è calcolata la curvatura scalare quadridimensionale perturbativa. Quest'ultima è risultata in ogni caso strettamente positiva, indicando che l'effetto gravitazionale emerso agisce come forza attrattiva della particella verso l'origine, rafforzando il confinamento.

Appendice

Il seguente codice permette di calcolare la forza efficace classica con il metodo utilizzato nel capitolo uno nel caso ad una dimensione fino all'ordine di v desiderato, nel codice chiamato `$targetexp`. Si definisce la formula della forza efficace e , tramite i coefficienti c ed s , si cancellano tutti i termini proporzionali ad armoniche temporali. L'espansione in armoniche è limitata fino alla frequenza massima `$harmonicexp`, che è necessario aumentare per calcolare ordini di v elevati. Infine, si calcola ogni ordine della forza efficace tramite un ciclo `for`.

```
1 $harmonicexp=10;
2 $targetexp=6;
3 SolveOrder[n_,expr_,previous_] :=Block[{tmp,eqs,triglist,tosolve,eqsind,eqstosolve},
4 tmp=Coefficient[expr,lam,n]//TrigToExp//Expand//ExpToTrig//Collect[#, {lam,_Cos,_Sin},
5 Expand]&;
6 triglist=Join[Cases[tmp,_Cos,Infinity],Cases[tmp,_Sin,Infinity]]//DeleteDuplicates;
7 (*triglist=triglist/.{Cos[a_ t]:>Nothing/a>$harmonicexp,Sin[a_ t]:>Nothing/a>$harmonicexp};*)
8 eqs=Coefficient[tmp,#]&/@triglist;
9 eqs=Join[{tmp/._Cos->0/._Sin->0},eqs];
10 tosolve=Join[Cases[eqs,_c,Infinity],Cases[eqs,_s,Infinity]]//DeleteDuplicates;
11 eqsind=If[FreeQ[#,_c]&&FreeQ[#,_s],#,Nothing]&/@eqs;
12 eqstosolve=Complement[eqs,eqsind];
13 {eqsind,Solve[Thread[eqstosolve==0],tosolve][[1]]}
14 ]
15 rulesR=Table[D[r[t],{t,n}]->lam^n D[r[t],{t,n}],{n,1,3}];
16 Rexp[t_]=r[t]+A[t];
17
18 force=Normal@Series[lam^2g[Rexp[t]]+lam f[Rexp[t]]
19 Cos[t],{A[t],0,$targetexp-1}]/TrigToExp//Expand//ExpToTrig//
20 Collect[#, {lam,_Cos,_Sin},Expand]&;
21
22 A[t_]=Sum[lam^m(c[n,m,lam t]Cos[n t]+s[n,m,lam t] Sin[n
23 t]),{n,1,$harmonicexp},{m,1,$targetexp}];
24 d2Rdt2= D[Rexp[t],{t,2}]/.rulesR//Collect[#, {lam,_Cos,_Sin},Expand]&;
25 d2Rdt2=d2Rdt2/.lam t->t;force=force/.lam t->t;
26 Array[sol,$targetexp];sol[0]=0;
27 Array[eqmeff,$targetexp];eqmeffTOT=0;
28 ruleEq2={r'[t]->-eqmeff[2],D[r'[t]->-eqmeff[2],t]}; Array[ruleElim,$targetexp-1];
29
30 (*Calcolo Feff per ogni ordine*)
31 For[i=1,i<=$targetexp,i++,
32 {eqmeff[i],sol[i]}=SolveOrder[i,d2Rdt2+force-r'[t]lam^2,sol[i-1]];
33 eqmeffTOT=eqmeffTOT+eqmeff[i] lam^i;
34 aux=Flatten[{sol[i],D[sol[i],t],D[sol[i],{t,2}]}];
35 d2Rdt2=d2Rdt2/.aux;
36 force=force/.aux;
37 ]
```

```

36 eqmeffTOTFinal=eqmeffTOT;
37 ruleElim[0]={r'[t]->-eqmeffTOT/lam^2};ruleELIM=ruleElim[0];
38 For[j=1,j<=$targetexp-2,j++,ruleELIM=Flatten[{ruleELIM,D[ruleElim[0],{t,j}]}]];
39
40 Do[eqmeffTOTFinal=Normal[Series[eqmeffTOTFinal/. ruleELIM,{lam,0,$targetexp}]]//Expand,{3}];
41
42 eqmeffTOTFinal//Collect[#,lam]&

```

Bibliografia

- [1] Alexander A. Penin e Aneca Su. «Effective Theory of Classical and Quantum Particle Dynamics in Rapidly Oscillating Fields». In: *Physical Review Letters* 132.5 (gen. 2024). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.132.051601. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.132.051601>.
- [2] Afshin Besharat e Alexander A. Penin. «Dynamical confinement and magnetic traps for charges and spins». In: *Physical Review A* 113.2 (feb. 2026). ISSN: 2469-9934. DOI: 10.1103/qs8c-qc6v. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/qs8c-qc6v>.
- [3] Nikolai Nikolaevich Bogoliubov e Yuri Alekseevich Mitropolsky. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. Vol. 10. CRC Press, 1961.
- [4] Ivana Kovacic, Richard H. Rand e Si Mohamed Sah. «Mathieu's equation and its generalizations: Overview of stability charts and their features». In: *Applied Mechanics Reviews* 70.2 (2018), p. 020802. DOI: 10.1115/1.4039144. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4039144>.