Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA 'TULLIO LEVI-CIVITA'
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Titolo: Un'introduzione alla teoria degli schemi

Candidato:
Irene Pivari
Matricola 2013421

Relatore:
Prof.ssa Luisa Fiorot

Anno Accademico 2022-2023

La mathématique est l'art
de donner la même nom
à des choses différentes.
Henri Poincaré

Indice

Introduzione

All'interno del contesto matematico del ventesimo secolo, è attribuibile ad Alexander Grothendieck (1928-2014) l'impulso innovativo che diede avvio ad una rivoluzione della geometria algebrica.
Con il termine *geometria algebrica* si intende lo studio del luogo delle soluzioni di sistemi di equazioni polinomiali in uno spazio affine o proiettivo, servendosi delle proprietà algebriche dei polinomi e delle proprietà geometriche delle varietà.
Proprio partendo dal concetto di *varietà*, Grothendieck pensò di costruire una matematica, quella degli schemi, che gli permettesse di lavorare nel contesto più astratto possibile, per poter ottenere risultati di più vasta portata. Il grande vantaggio di questa nuova teoria, ormai divenuta il metodo moderno della geometria algebrica, è la sua estrema generalità, cui fa eco inevitabilmente la necessità di acquisire un ampio bagaglio matematico, che spazia dalla teoria delle categorie alla teoria dei fasci e degli schemi e alla coomologia.
Lo scopo di questa tesi vuole quindi essere quello di redigere un vocabolario di base, indubbiamente da arricchire e ampliare, per potersi avvicinare al linguaggio tecnico moderno della teoria degli schemi, per poterne vedere alcuni primi risultati e, allo stesso tempo, tramite esempi, mantenere il legame con la visione geometrica e le idee intuitive originarie da cui nacque la teoria.
La tesi si articola in tre capitoli. Nel primo, titolato 'Nozioni propedeutiche', si introduce il linguaggio delle *categorie* e, tramite i concetti di funtore, di aggiunzione e di equivalenza di categorie, si rivisitano, con uno sguardo più astratto, concetti noti come gli spazi vettoriali e la dualità. Negli ultimi due paragrafi del capitolo, si è ritenuto opportuno raccogliere concetti di algebra commutativa necessari nella trattazione successiva, quali le nozioni di limite diretto, di K-algebra e R-modulo e alcune proprietà degli ideali e degli anelli locali. Nel secondo capitolo, titolato 'Fasci', si è partiti da una definizione più debole di *prefascio* per poi, aiutandosi con l'intuizione sulle funzioni continue, aggiungere le proprietà che definiscono un *fascio* e, con uno sguardo più locale, giungere al concetto di *fibra*. Nell'ultima sezione del capitolo, con

l'introduzione dei morfismi di fasci ci si è equipaggiati di uno strumento con cui costruire nuovi fasci, quali il fascio associato, il nucleo, il conucleo e l'immagine. Nel terzo capitolo, titolato 'Schemi', si sono usati gli ideali primi per costruire un insieme che, una volta dotato della topologia di Zariski e di un fascio di anelli, divenisse uno *spettro* e potesse, tramite opportuni incollamenti, dare vita al concetto di *schema affine* e poi di *schema* e di *schema proiettivo*. Partendo da alcuni esempi classici di varietà (retta e piano affini), si è giunti a vedere un anello A tramite funzioni su $SpecA$, fino a giungere al risultato di equivalenza tra la categoria degli anelli commutativi e quella degli schemi affini.
Alternando le definizioni astratte con una serie di esempi, si è tentato quindi da un lato di mantenere il rigore e la limpidezza logica, e dall'altra, tramite l'intuizione geometrica, di ricordare l'approccio classico originario.

Capitolo 1

Nozioni propedeutiche

Lo scopo di questo capitolo è quello di redigere una sorta di vocabolario tecnico cui rimandare, nei due capitoli centrali della trattazione, quando si incontrino nozioni di teoria delle categorie o algebra commutativa.
Nelle prime tre sezioni si espongono i concetti base del linguaggio delle *categorie*, in modo da poter formulare definizioni e teoremi, nei capitoli seguenti, nel modo più generale possibile.
Nella prima si definisce una categoria tramite i sui oggetti, morfismi e assiomi che devono essere soddisfatti, e si definisce la categoria duale. Nella seconda sezione si introducono le mappe tra categorie, ossia i *funtori*. Nella terza si introducono i concetti di aggiunzione e di equivalenza di categorie. Nella quarta sezione si raccoglie qualche definizione slegata dal resto ma necessaria nei successivi capitoli. Nella quinta sezione, invece, si richiamano alcune nozioni sugli ideali e gli anelli locali.

1.1 Categorie: oggetti, morfismi e assiomi

Definizione 1.1. Una *categoria* $\mathscr{C}$ consiste di:

(d.1) una classe $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ di *oggetti*, i cui elementi sono denotati come $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, o più brevemente $\mathrm{X} \in \mathscr{C}$;

(d.2) per ogni coppia ordinata (X, Y) di oggetti di $\mathscr{C}$, un insieme di *morfismi* (o *frecce*) $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, i cui elementi sono denotati come $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, con $f \colon X \to Y$;

(d.3) per ogni terna ordinata (X, Y, Z) di oggetti di $\mathscr{C}$, una legge di composizione

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{C}}(X, Z) \\ (g, f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

con i seguenti assiomi:

(a.1) se $(X, Y), (X', Y')$ sono coppie ordinate e distinte di oggetti di $\mathscr{C}$, allora $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \cap Hom_{\mathscr{C}}(X', Y') = \emptyset$;

(a.2) (*associatività*) dati $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$, $h \colon Z \to W$ morfismi, allora $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

(a.3) (*identità*) per ogni $X \in \mathscr{C}$ esiste, ed è unico, un morfismo $id_X \in Hom_{\mathscr{C}}(X, X)$ tale che per ogni $f \colon X' \to X$, $g \colon X \to X''$ sia $id_X \circ f = f$, $g \circ id_X = g$.

Definizione 1.2. Data una categoria $\mathscr{C}$, si definisce la sua *categoria duale* o *opposta* $\mathscr{C}^{op}$ come la categoria definita da:

(d.1) Ob($\mathscr{C}^{op}$)=Ob($\mathscr{C}$);

(d.2) $Hom_{\mathscr{C}^{op}}(X, Y)$=$Hom_{\mathscr{C}}(Y, X)$.

Un morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ è detto *isomorfismo* se $\exists\, g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, X)$ tale che $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$, e quest'utimo è denotato come f^{-1}.

In generale, si indica con

$$Mor(\mathscr{C}) = \bigsqcup_{X,Y \in \mathscr{C}} Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$$

la classe dei morfismi di $\mathscr{C}$.

Esempio 1.3. Alcuni esempi di categorie:

- *Set*: gli oggetti sono gli insiemi, i morfismi sono le applicazioni tra insiemi;
- *Ab*: gli oggetti sono gruppi abeliani, i morfismi sono morfismi di gruppi;
- *Ring*: gli oggetti sono anelli, i morfismi sono morfismi di anelli;
- *Top*: gli oggetti sono gli spazi topologici, i morfismi sono le applicazioni continue;
- $Vect_K$: gli oggetti sono spazi vettoriali su un campo K, i morfismi sono applicazioni lineari tra tali spazi;
- $vect_K$: gli oggetti sono spazi vettoriali di dimensione finita su un campo K, i morfismi sono applicazioni lineari tra tali spazi.

Definizione 1.4. Data una categoria $\mathscr{C}$, una sua *sottocategoria* $\mathscr{B}$ è una categoria che ha per oggetti una sottoclasse degli oggetti di $\mathscr{C}$, e per morfismi un sottoinsieme dei morfismi di $\mathscr{C}$ che contenga il morfismo identità di ogni oggetto di $\mathscr{B}$ e sia chiuso per composizione.
Ossia: $Hom_{\mathscr{B}}(X,Y) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)\,\forall X,Y \in \mathscr{B}$, stessa legge di composizione di $\mathscr{C}$ e 1_X in $\mathscr{B}$ coincide con 1_X in $\mathscr{C}$.

1.2 Funtori

Definizione 1.5. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due categorie. Un *funtore covariante* tra esse è una mappa $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ che a $X \in \mathscr{C}$ associa $F(X) \in \mathscr{D}$ e ad ogni morfismo $f\colon X \to Y$ in $\mathscr{C}$ associa un morfismo $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ in $\mathscr{D}$, con le proprietà:

(d.1) (*rispetta la composizione*) se $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ in $\mathscr{C}$, in $\mathscr{D}$ si ha: $F(g \circ f){=}F(g) \circ F(f)$;

(d.2) (*identità*) $F(id_X) = id_{F(X)}$ per $\forall X \in \mathscr{C}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \ni X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"] & F(X) \in \mathscr{D} \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathscr{C} \ni Y \arrow[r, "F"] & F(Y) \in \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

In particolare, F manda isomorfismi di $\mathscr{C}$ in isomorfismi di $\mathscr{D}$.
Un funtore covariante $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{op}$ si dice *funtore contravariante* da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$: ad ogni morfismo $f\colon X \to Y$ in $\mathscr{C}$, esso associa un morfismo $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$ in $\mathscr{D}$, e vale che, se $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ in $\mathscr{C}$, allora $F(g\circ f){=}F(f)\circ F(g)$. In generale, quando non specificato, con il termine *funtore* si intende un funtore covariante.
In modo naturale, dati due funtori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{F}$, si definisce la loro *composizione* come il funtore $G \circ F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{F}$ (con associatività dell'operazione di composizione).

Esempio 1.6. (*dimenticanza*)
Si dice funtore *dimenticante* o *forgetful functor*, e si indica con For, un funtore che va da una categoria ad un'altra 'dimenticando' alcune proprietà strutturali della prima.
Si considerino ad esempio le categorie $Vect_K$ degli spazi vettoriali su un campo K, *Ab* dei gruppi abeliani e *Set* degli insiemi. Si ha il diagramma seguente, in cui uno spazio vettoriale è mandato nel gruppo abeliano ad esso soggiacente, e quest'ultimo a sua volta nell'insieme soggiacente (dimenticando il

prodotto di un vettore per uno scalare e poi la somma tra due elementi), e una mappa lineare è mandata nel corrispondente omomorfismo di gruppi ed esso nella rispettiva mappa tra insiemi:

$$\begin{tikzcd} & Ab \arrow[dr] & \\ Vect_K \arrow[ur] \arrow[rr] & & Set \end{tikzcd}$$

Esempio 1.7. (*dualità*)
Un esempio di funtore contravariante, da una categoria alla sua opposta, è la *dualità* (vedremo in seguito che con il concetto di *equivalenza di categorie* si potrà dedurre in modo naturale l'isomorfismo tra uno spazio vettoriale e il suo biduale).
Se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Vect_K{}^{op}}(W, V) = \mathrm{Hom}_{Vect_K}(V, W)$, con $\varphi\colon V \to W$ lineare e $\varphi^*\colon W^* \to V^* := \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(V, K)$, si ha:

$$Vect_K{}^{op} \xrightarrow{*} Vect_K$$

$$\begin{tikzcd} V & & V^* \\ W \arrow[u, "\varphi"] & & W^* \arrow[u, "\varphi^*"] \end{tikzcd}$$

E, riapplicando il funtore (più precisamente, si applica prima $*$ e poi $*^{op}$), si ha la *bidualità*:

$$Vect_K \xrightarrow{**} Vect_K$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\varphi"] & & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ W & & W^{**} \end{tikzcd}$$

Definizione 1.8. Un funtore (covariante) $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ si dice:

- *fedele:* se $Hom_{\mathscr{C}}(X, X') \to Hom_{\mathscr{D}}(F(X), F(X'))$, $f \mapsto F(f)$ è iniettiva $\forall X, X' \in \mathscr{C}$;
- *pieno:* se $Hom_{\mathscr{C}}(X, X') \to Hom_{\mathscr{D}}(F(X), F(X'))$, $f \mapsto F(f)$ è suriettiva $\forall X, X' \in \mathscr{C}$;
- *pienamente fedele:* se è fedele e pieno;

- *immersione:* se $f \to F(f)$ è iniettiva, come funzione $Mor(\mathscr{C}) \to Mor(\mathscr{D})$;
- *denso/essenzialmente suriettivo:* se per $\forall\, Y \in \mathscr{D}\, \exists\, X \in \mathscr{C} : F(X) \cong Y$.

Esempio 1.9. Una sottocategoria $\mathscr{B}$ di $\mathscr{C}$ può essere data tramite il funtore di inclusione $\iota\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, e si dice che $\mathscr{B}$ è una *sottocategoria piena* se ι è pieno (si ha in automatico la fedeltà) ossia se e solo se per $\forall X, X' \in \mathscr{B}$ si ha $Hom_{\mathscr{B}}(X, X') = Hom_{\mathscr{C}}(X, X')$.
Per esempio, il *funtore dimenticanza* $For\colon Vect_K \to Set$ è fedele (per iniettività dell'inclusione tra categorie) ma non pieno (non suriettività). Inoltre, esso non é immersione, perché più spazi vettoriali possono avere lo stesso insieme soggiacente (e quindi gli stessi morfismi).

Introduciamo ora i concetti di *monomorfismo* e *epimorfismo*, per poi poter parlare di *nucleo* e *conucleo*:

Definizione 1.10. Data una categoria qualsiasi $\mathscr{C}$, si dice:

- *monomorfismo* un morfismo $\gamma\colon X \to Y$ in $\mathscr{C}$ tale che per ogni $f, g\colon Z \to X$ per cui $\gamma \circ f = \gamma \circ g$ si ha $f = g$ (cancellazione a sinistra);
- *epimorfismo* un morfismo $\chi\colon X \to Y$ in $\mathscr{C}$ tale che per ogni $f, g\colon Y \to Z$ per cui $f \circ \chi = g \circ \chi$ si ha $f = g$ (cancellazione a destra).

Sia ora $\mathscr{C}$ una categoria *preadditiva*, ossia tale che per ogni coppia ordinata (X, X') di suoi oggetti l'insieme $Hom_{\mathscr{C}}(X, X')$ sia un gruppo abeliano e tale che la composizione di morfismi sia bilineare.
Si supponga inoltre che esista un *oggetto nullo*, ossia un $Y \in \mathscr{C}$ tale che $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) = \{0\} = Hom_{\mathscr{C}}(Y, X)\ \forall X \in \mathscr{C}$, e si indichi quest'ultimo come 0.
Allora si ha la seguente caratterizzazione dei monomorfismi e degli epimorfismi:

- $\gamma\colon X \to Y$ è un monomorfismo $\iff$ per ogni $f\colon Z \to X$ per cui $\gamma \circ f = 0$ si ha $f = 0$;
- $\chi\colon X \to Y$ è un epimorfismo $\iff$ per ogni $g\colon Y \to Z$ per cui $g \circ \chi = 0$ si ha $g = 0$.

Definizione 1.11. *(Nucleo)*
Dato un morfismo $f\colon X \to Y$ in $\mathscr{C}$, un suo *nucleo* è un morfismo $\gamma\colon K \to X$

tale che $f \circ \gamma = 0$ e tale che per ogni altro $\gamma' \colon K' \to X$ tale che $f \circ \gamma' = 0$ esista un unico morfismo $\alpha \colon K' \to K$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma'"] & \\ K \arrow[r, "\gamma"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Ogni nucleo è un monomorfismo, e fissato f i suoi nuclei appartengono alla stessa classe di equivalenza (tramite isomorfismo) e allora si può parlare, se esiste, di Ker(f). Inoltre un morfismo f in $\mathscr{C}$ è un monomorfismo $\iff$ Ker(f)=0.

Definizione 1.12. *(Conucleo)*
Dato un morfismo $f \colon X \to Y$ in $\mathscr{C}$, un suo *conucleo* è un morfismo $\chi \colon Y \to C$ tale che $\chi \circ f = 0$ e tale che per ogni altro $\chi' \colon Y \to C'$ tale che $\chi' \circ f = 0$ esista un unico morfismo $\alpha \colon C \to C'$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, "\chi'"] & C \arrow[d, "\alpha"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Ogni conucleo è un epimorfismo, e fissato f i suoi conuclei rappresentano lo stesso oggetto quoziente in Y e allora si può parlare, se esiste, di Coker(f). Inoltre un morfismo f in $\mathscr{C}$ è un epimorfismo $\iff$ Coker(f)=0.
Osservando che se $\mathscr{C}$ è una categoria preadditiva allora anche $\mathscr{C}^{op}$ lo è, si ha che i conuclei di $\mathscr{C}$ corrispondono ai nuclei di $\mathscr{C}^{op}$.

Richiamiamo infine il seguente risultato:

Proposizione 1.13. *Sia $f \colon X \to Y$ un morfismo in $\mathscr{C}$ tale che esistano $\gamma \colon K \to X$ nucleo di f che abbia conucleo e $\pi \colon Y \to C$ conucleo di f che abbia nucleo. Definite:*

- Im(f) := Ker(Coker(f)) immagine *di f;*
- Coim(f) := Coker(Ker(f)) coimmagine *di f*

vi è un morfismo naturale Coim(f) $\to$ Im(f).

1.3 Aggiunzione e equivalenza di categorie

Definizione 1.14. Date due categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, e dati $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G \colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ due funtori tra di esse, si dice che F è un *aggiunto a sinistra* di G (e G è un *aggiunto a destra* di F) se per $\forall X \in \mathscr{C}, \forall Y \in \mathscr{D}$ esiste una biiezione tra insiemi $\varphi_{X,Y}$, isomorfismo naturale in X e Y, tale che:

$$Hom_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \cong Hom_{\mathscr{C}}(X, G(Y)).$$

(F, G) costituisce una coppia di *funtori aggiunti* e la terna (F, G, φ) è detta *aggiunzione.*
Osservazione: $\varphi_{X,Y}$ è 'naturale' in X, Y, ossia per ogni coppia di morfismi $f\colon Y \to Y'$ (in $\mathscr{D}$) e $g\colon X \to X'$ (in $\mathscr{C}$), i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "\psi_1"] & Hom_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \arrow[d, "\psi_2"] \\
Hom_{\mathscr{D}}(F(X), Y') \arrow[r, "\varphi_{X,Y'}"] & Hom_{\mathscr{C}}(X, G(Y'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(F(X'), Y) \arrow[r, "\varphi_{X',Y}"] \arrow[d, "\tau_1"] & Hom_{\mathscr{C}}(X', G(Y)) \arrow[d, "\tau_2"] \\
Hom_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] & Hom_{\mathscr{C}}(X, G(Y))
\end{tikzcd}$$

Con: $\psi_1\colon F(X) \to Y \xrightarrow{f} Y'$ e $\psi_2\colon X \to G(Y) \to Y \xrightarrow{G(f)} G(Y')$ e $\tau_1\colon F(X) \xrightarrow{F(g)} F(X') \to Y$ e $\tau_2\colon X \xrightarrow{g} X' \to G(Y)$.

Esempio 1.15. Date le categorie *Ab* e *Set*, abbiamo visto nell'esempio 1.6 come agisce tra esse il funtore dimenticanza, e vediamo ora come esso si relaziona con il suo funtore aggiunto. Con la nozione di gruppo abeliano libero, si ha:

$$For\colon Ab \to Set,\ G \mapsto G$$
$$(\_)^a\colon Set \to Ab,\ X \mapsto \mathbb{Z}^{(X)} = \{\sum_{n_i \in \mathbb{Z}} n_i x_i, i \in I\, finito, x_i \in X\}$$

con l'isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{Ab}(\mathbb{Z}^{(X)}, G) & \cong & Hom_{Set}(X, G) \\
\beta & \longrightarrow & \beta \circ \gamma \\
\psi(\alpha) & \longleftarrow & \alpha
\end{array}$$

in cui le mappe sono:
$X \overset{\gamma}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}^{(X)} \xrightarrow{\beta} G,\ x \mapsto 1x \mapsto \beta(1x)$ e
$\alpha\colon X \to G, x \mapsto \alpha(x)$ e $\psi(\alpha)\colon \mathbb{Z}^{(X)} \to G, nx \mapsto n\alpha(x)$.

Definizione 1.16. Se, nella definizione 1.14 di aggiunzione, si prende $Y = F(X)$ e $X = G(Y)$, si ottiene $Hom_{\mathscr{D}}(F(X), F(X)) \cong Hom_{\mathscr{C}}(X, GF(X))$ e $Hom_{\mathscr{D}}(FG(Y), Y) \cong Hom_{\mathscr{C}}(G(Y), G(Y))$, e allora si hanno le due corrispondenze:

- $id_{F(X)} \leftrightarrow \eta_X \colon X \to GF(X)$, con $\eta_X = \varphi_{X,F(X)}(1_{F(X)})$ *unità dell'aggiunzione*;

- $id_{G(Y)} \leftrightarrow \sigma_Y \colon FG(Y) \to Y$, con $\sigma_Y = \varphi_{G(Y),Y}{}^{-1}(1_{G(Y)})$ *counità dell'aggiunzione.*

Definizione 1.17. Date due categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, un funtore $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è un'*equivalenza* tra $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ se esiste un funtore $G \colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tale che $G \circ F \cong id_{\mathscr{C}}$ e $F \circ G \cong id_{\mathscr{D}}$. G è detto *quasi-inverso* di F.
$\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ si dicono *categorie equivalenti* se esiste un'equivalenza tra esse, e tale relazione è una relazione di equivalenza.
Riformulando la definizione con il concetto di aggiunzione, si richiede che (G, F) e (F, G) siano 'aggiunti', con $FG(Y) \cong Y$ tramite σ_Y e $GF(X) \cong X$ tramite η_X, $\forall X \in \mathscr{C}$, $\forall Y \in \mathscr{D}$.

Esempio 1.18. Sia $vect_K$ la categoria degli spazi vettoriali finitamente generati e si considerino, come nell'esempio 1.7, i seguenti funtori (*duale* e *biduale*):

$$\begin{aligned} \mathbb{D} : vect_K{}^{op} &\longrightarrow vect_K \\ V &\longmapsto Hom_K(V, K) = V^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^o : vect_K &\longrightarrow vect_K{}^{op} \\ V^* &\longmapsto Hom_K(V^*, K) = V^{**} \end{aligned}$$

Allora si ha il morfismo canonico $\eta_V \colon V \to V^{**}$, dato dalla valutazione negli elementi di V. Esso è un isomorfismo per ogni spazio vettoriale finitamente generato.
Sia $\mathcal{V}$ la sottocategoria piena di $vect_K$ i cui elementi sono i K-spazi vettoriali *standard* $K^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Fissando per ogni spazio vettoriale standard la base canonica, allora il funtore di inclusione $\mathcal{V} \to vect_K$ è un'equivalenza di categorie, in quanto pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo.
Essendo $V \cong V^{**}$ per ogni $K-$spazio vettoriale standard, si ricava che $V \cong V^{**}$ per ogni $K-$spazio vettoriale di dimensione finita.

Ricordiamo, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema di teoria delle categorie:

Teorema 1.19. *Un funtore $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tra due categorie è un'equivalenza tra di esse se e solo se è denso e pienamente fedele.*

1.4 Altre nozioni

1.4.1 Limite diretto

Presa una famiglia di gruppi, vogliamo definire il più piccolo gruppo per cui esistano applicazioni, dai gruppi dati a quest'ultimo, che soddisfino una certa *proprietà universale*.

Definizione 1.20. Siano $\mathscr{C}$ una categoria e J un insieme con un ordinamento parziale $\leq$, tale che per $\forall i, j \in J \, \exists k \in J$ tale che $i \leq k, j \leq k$. Siano dati poi dei morfismi $\varphi_{ij} \colon G_i \to G_j$, per $i \leq j$, tali che $\varphi_{ii} = id_{G_i}$ e $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$, $\forall i \leq j \leq k$. Allora esiste un elemento G di $\mathscr{C}$ e esistono morfismi $f_i \colon G_i \to G$ tali che $f_j \circ \varphi_{ij} = f_i, \forall i \leq j$. Inoltre G è minimo con queste proprietà, ossia se esistono $h_i \colon G_i \to H$, con $h_j \circ \varphi_{ij} = h_i, \forall i \leq j$, allora $\exists! \, u \colon G \to H$ morfismo tale che $u \circ f_i = h_i$.
G viene detto *limite diretto/induttivo* dei gruppi G_i, e viene indicato con $\varinjlim_{i} G_i$.

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"] & G \\ & G_j \arrow[u, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

Esempio 1.21. Se consideriamo la nozione appena introdotta nel caso di $\mathscr{C} = Set$ e di una successione crescente di insiemi $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq ...$, si ha che il limite diretto è $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \varinjlim_{n} U_n$.

1.4.2 K-algebre e R-moduli

Introduciamo qui due oggetti algebrici che sarà utile conoscere nei capitoli successivi.

Definizione 1.22. Dato un campo K, una *K-algebra* è una coppia (R, φ), con R anello con unità e $\varphi \colon K \to R$ omomorfismo di anelli tale che $\varphi(1_K) = 1_R$ e $\varphi(K) \subseteq Z(R)$, con $Z(R)$ il centro dell'anello R.
La prima condizione e il fatto che K sia un campo, garantiscono l'iniettività di φ.

La K-algebra R, con l'omomorfismo di anelli φ, è un *K-spazio vettoriale*, con moltiplicazione per scalari data da: $a \cdot r = \varphi(a) \cdot r$, con $r \in R, a \in K$.

Esempio 1.23. Un esempio comune di K-algebra è dato dalle matrici quadrate $M_{n \times n}(K)$ ad entrate in un campo K.

Poiché le matrici scalari commutano con tutte le altre matrici (stanno nel centro), si consideri il morfismo di anelli:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & M_{n\times n}(K) \\ a & \longmapsto & a\mathbb{I}_n \end{array}$$

e allora $M_{n\times n}(K)$ può essere visto come K-spazio vettoriale, con il prodotto di una matrice per uno scalare dato dalla moltiplicazione, in ogni entrata, per tale scalare.

Si vuole ora da un lato generalizzare la nozione di spazio vettoriale, prendendo gli scalari in un anello al posto che in un campo, e dall'altro generalizzare la nozione di gruppi abeliani, vedendoli come moduli sull'anello $\mathbb{Z}$.

Definizione 1.24. Dato un anello commutativo R con identità 1_R, un *R-modulo sinistro M* è dato da un gruppo abeliano $(M,+)$ e da un'operazione di *moltiplicazione per scalare* $\cdot\colon R\times M \to M$, tale che per $\forall r,s \in R$ e $\forall x,y \in M$ valgano:

1. $r\cdot(x+y) = r\cdot x + r\cdot y$
2. $(r+s)\cdot x = r\cdot x + s\cdot x$
3. $(rs)\cdot x = r\cdot(s\cdot x)$ (per un *R-modulo destro M*: $x\cdot(sr) = (x\cdot s)\cdot r$)
4. $1\cdot x = x$.

Esempio 1.25. Ogni anello commutativo R può essere visto come un R-modulo, considerando solo la parte di gruppo. Un esempio è $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$. Altri esempi sono gli ideali oppure gli anelli quozienti.

1.5 Anelli e ideali

Dato un anello commutativo A, si riportano in seguito definizioni e risultati, che saranno utilizzati nel terzo capitolo, inerenti gli ideali e gli anelli locali.

Definizione 1.26.
- Un ideale $\mathtt{p} \trianglelefteq A, \mathtt{p} \neq (1)$, si dice *primo* se: $xy \in \mathtt{p} \implies x \in \mathtt{p} \vee y \in \mathtt{p}$;
- Un ideale $\mathtt{m} \trianglelefteq A, \mathtt{m} \neq (1)$, si dice *massimale* se: $\nexists \mathtt{q} \trianglelefteq A : \mathtt{m} \subsetneq \mathtt{q} \subsetneq (1) = A$.

Proposizione 1.27. *Valgono i seguenti risultati:*

- *$\mathfrak{p}$ primo $\iff$ $A/\mathfrak{p}$ dominio d'integrità (in particolare: (0) primo $\iff$ $A/(0) = A$ dominio d'integrità);*
- *$\mathfrak{m}$ massimale $\iff$ $A/\mathfrak{m}$ campo;*
- *$\mathfrak{p}$ massimale $\implies$ $\mathfrak{p}$ primo (non viceversa);*
- *$f : A \to B$ omomorfismo di anelli e $\mathfrak{q} \trianglelefteq B$ primo. Allora $f^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq A$ primo (con gli ideali massimali non è valido un risultato analogo: si veda $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{m} = (0)$, con f inclusione);*
- *ogni anello $A \neq 0$ possiede almeno un ideale massimale. Se $\mathfrak{q} \neq (1)$ ideale di A, allora esiste un ideale massimale di A che contiene $\mathfrak{q}$. Ogni elemento non invertibile dell'anello è contenuto in un ideale massimale;*
- *gli unici ideali di un campo K sono (0) e (1).*

Definizione 1.28.
- un anello A si dice *anello locale* se ha un unico ideale massimale $\mathfrak{m}$ (che contiene tutti e soli gli elementi non invertibili). Il campo $A/\mathfrak{m}$ si dice *campo residuo.*
- dato un dominio d'integrità B e il suo campo delle frazioni K, B si dice *anello di valutazione di K* se $\forall x \in K \setminus \{0\}$ si verifica $x \in B$ oppure $1/x \in B$ (o entrambe).

Definizione 1.29. Dato un anello A, un suo *sottoinsieme moltiplicativamente chiuso*, o sua *parte moltiplicativa*, è un sottoinsieme $S \subseteq A$ tale che:

1. $1 \in S$;
2. $s_1, s_2 \in S \implies s_1 s_2 \in S$.

Trattiamo ora la formazione degli *anelli di frazioni* e il relativo processo di localizzazione: in modo analogo a come si ottiene $\mathbb{Q}$ tramite estensione di $\mathbb{Z}$, con un'opportuna relazione di eqivalenza tra coppie si può estendere un generico dominio d'integrità al suo campo delle frazioni e, in modo ancor più generale, un procedimento simile si può seguire per un anello A qualsiasi:

1. *(caso di A dominio d'integrità)*
   Sulle coppie ordinate (a, s) tali che $a, s \in A, s \neq 0$, si definisca la seguente relazione di equivalenza: $(a, s) \sim (b, t) \iff at - bs = 0$.

   Si osservi che questa definizione usa, nella transitività della relazione di equivalenza, il fatto che in un dominio d'integrità non vi siano divisori di zero non nulli: se $(a,s) \sim (b,t), (b,t) \sim (c,r)$ allora $at - bs = 0 = br - ct$ e allora $0 = (bs)r - (br)s = (at)r - (ct)s = t(ar - cs)$ ed essendo $t \neq 0$ allora non è divisore di zero, e allora si deduce $ar - cs = 0$.

2. *(caso di A anello commutativo generico)*
   Sulle coppie ordinate $(a,s), a \in A, s \in S$, con S sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A, si definisca la relazione di equivalenza $(a,s) \sim (b,t) \iff (at - bs)u = 0 \,\exists u \in S$. Con questa definizione, risulta valida anche la proprietà transitiva (senza dover ricorrere ai domini d'integrità).

   Si indica con a/s la classe di equivalenza di (a,s) e con $S^{-1}A$ l'insieme delle classi di equivalenza. Si attribuisce a $S^{-1}A$ una struttura di anello definendo le seguenti operazioni:

$$a/s + b/t = (at + bs)/(st),\ (a/s)(b/t) = (ab)/(st)$$

   e si ha l'omeormorfismo di anelli $f\colon A \to S^{-1}A,\ x \longmapsto x/1$.

   Inoltre si noti che il primo caso (dominio d'integrità) rientra nel secondo: si prenda A dominio d'integrità e allora $S = A \setminus \{0\}$.

Esempio 1.30. Sia A un anello e $f \in A, f \neq 0$. Sia $S = \{f^n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Esso verifica:

1. $f^0 = 1 \in S$;

2. $f^{n_1}, f^{n_2} \in S \implies f^{n_1} f^{n_2} = f^{n_1+n_2} \in S$.

Quindi S è parte moltiplicativa di A, e il suo anello $S^{-1}A$ si indica come A_f. Gli ideali primi di quest'ultimo sono quelli che non contengono f.

Esempio 1.31. Sia $\mathtt{p} \trianglelefteq A$ ideale primo di un anello A e $S = \{g \in A \colon g \notin \mathtt{p}\}$. Esso verifica:

1. $1 \in S$, perché se fosse $1 \in \mathtt{p}$ allora sarebbe $\mathtt{p} = A$;

2. $s_1, s_2 \in S \implies s_1 s_2 \in S$, perché se fosse $s_1 s_2 \notin S$, allora $s_1 s_2 \in \mathtt{p}$ e allora, essendo $\mathtt{p}$ primo, sarebbe $s_1 \in \mathtt{p}$ oppure $s_2 \in \mathtt{p}$, ma allora $s_1 \notin S$ oppure $s_2 \notin S$.

Quindi S è parte moltiplicativa di A, e il suo anello $S^{-1}A$ si indica come $A_{\mathtt{p}}$. Quest'ultimo è un anello locale, perché:
gli elementi $a/s, a \in \mathtt{p}$, formano un ideale $\mathtt{m} \subseteq A_{\mathtt{p}}$. Se $b/t \in A_{\mathtt{p}} \setminus \mathtt{m}$, allora $b \notin \mathtt{p} \implies b \in S \implies b/t$ invertibile in $A_{\mathtt{p}}$. Quindi se $\mathtt{a} \triangleleft A_{\mathtt{p}}, \mathtt{a} \nsubseteq \mathtt{m}$, allora $\mathtt{a}$

contiene un elemento invertibile e allora genera tutto $A_\mathtt{p}$. Quindi $\mathtt{m}$ è l'unico ideale massimale di $A_\mathtt{p}$.
Si dice *localizzazione in* $\mathtt{p}$ il passaggio da A ad $A_\mathtt{p}$.
Ad esempio, se $A = \mathbb{C}[x, y]$ e $f = y - x^2$, (f) è un ideale primo (polinomio irriducibile in A) e allora, considerando la localizzazione di A a f, si ottengono le funzioni dall'aperto di Zariski complementare della parabola ad $\mathbb{A}^2_\mathbb{C}$ (vedremo il significato dei punti $(y - x^2)$ e $(x - a, y - a^2)$).
Se invece si prende $A = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$ (unione dell'asse x e dell'asse y) e $f = x$, localizzando con A_f si rimuove l'asse y, ottenendo l'asse x privato dell'origine.
Gli ideali primi di $A_\mathtt{p}$ sono i $\mathtt{q}A_\mathtt{p}$ con $\mathtt{q}$ ideale primo di A contenuto in $\mathtt{p}$.
Ad esempio, se $A = \mathbb{C}[x, y]$ e $\mathtt{p} = (x, y)$, gli ideali primi contenuti in $\mathtt{p}$ sono, come vedremo con gli schemi affini, i punti $(x, y), (0)$ e $(f(x, y))$, con f polinomio irriducibile tale che $f(0, 0) = 0$ (curva passante per l'origine).

Osservazione: torna utile, per i capitoli successivi, notare la differenza tra i due oggetti seguenti (esempio 1.30 e esempio 1.31):

$$K[x]_x = \{p(x)/x^n : n \in \mathbb{N},\, p(x) \in K[x]\} = K[x]_f$$

$$K[x]_{(x)} = \{p(x)/q(x) : q(0) \neq 0,\, p(x), q(x) \in K[x]\} = K[x]_\mathtt{p}$$

con $(x) = \mathtt{p} \trianglelefteq K[x]$ primo e $f = x$.

Definizione 1.32. Un *anello graduato* è un anello S con una decomposizione $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ in somma diretta di gruppi abeliani S_d, tali che per ogni $d, e \geq 0$ sia $S_d S_e \subseteq S_{d+e}$.

Gli elementi di S_d sono detti *elementi omogenei di grado d* e un elemento di S può essere scritto in modo unico come somma finita di elementi omogenei.
Un ideale $\mathtt{a} \subseteq S$ è detto *ideale omogeneo* se $\mathtt{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathtt{a} \cap S_d)$, ossia se e solo se può essere generato da elementi omogenei.

Esempio 1.33. Un esempio che vedremo nel terzo capitolo è quello dei polinomi:
$S = K[x_0, \ldots, x_n]$ è anello graduato, prendendo $S_d = \{$combinazioni lineari di monomi di peso totale d in $x_0, \ldots, x_n\}$.

Capitolo 2

Fasci

Sulle orme di Alexander Grothendieck (1928-2014), in questo secondo capitolo si raccolgono le definizioni e i teoremi portanti della *teoria dei fasci*, messa a punto originariamente da Leray negli anni '40, e poi estesa da Serre al mondo della geometria algebrica.
Traendo spunto dalle funzioni differenziabili su una varietà, lo scopo è quello di tenere traccia di informazioni, locali e globali, di uno spazio e di particolari morfismi su di esso.
Partendo dal concetto generale di *prefascio*, aggiungendo alcune proprietà di incollamento si ottiene la nozione di *fascio*. Con uno sguardo ancor più locale, si definisce la *fibra* in un punto, e, tramite opportuni morfismi, i *fasci associati* e i *sottofasci*.

2.1 Prefasci, fasci e fibre

Definizione 2.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio* $\mathcal{F}$ su X è il dato di:

a. per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$, un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$;

b. per ogni $V \subseteq U$ aperto in X, un morfismo di gruppi abeliani $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ che soddisfa:

   0. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
   1. $\forall U \subseteq X$ aperto, $\rho_{UU} = id_{\mathcal{F}(U)}$;
   2. $\forall W \subseteq V \subseteq U$ sottoinsiemi aperti di $X, \rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Il prefascio appena definito è un *prefascio di gruppi abeliani*, e in modo analogo si definiscono prefasci di anelli oppure di insiemi.

Dato un prefascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X, per ogni $V \subseteq U$ aperti in X, un elemento $\mathcal{F}(U)$, anche indicato con $\Gamma(U, \mathcal{F})$, è detto *sezione* di U (*sezione globale* se $U = X$), e ρ_{UV} è detta *mappa di restrizione* tra $\mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(V)$, ed è anche denotata con $s|_V$, per s $\in \mathcal{F}(U)$.

Osservazione 2.2. Con il linguaggio delle categorie, dare un prefascio su uno spazio topologico X è equivalente a dare un funtore contravariante tra la categoria degli aperti di X (con le inclusioni come morfismi) e quella dei gruppi abeliani (contravariante: a $V \subseteq U$ si associa $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, con $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$).

Si vuole ora costruire una struttura più complessa, che oltre alle proprietà di prefascio soddisfi anche proprietà che riguardano l'incollamento delle sezioni.

Definizione 2.3. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su uno spazio topologico X. Esso è detto *fascio* se soddisfa le due ulteriori proprietà:

3. *separatezza:* preso $\{V_i\}$ ricoprimento di $U \subseteq X$ aperto, se s$\in \mathcal{F}$(U) è tale che $s|_{V_i} = 0 \, \forall i$, allora s=0 (analogamente: se $s|_{V_i} = t|_{V_i} \, \forall i$, allora $s = t$ su tutto U);

4. *incollamento:* preso $\{V_i\}$ ricoprimento di $U \subseteq X$ aperto, se esistono $\forall i, s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tali che $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j} \forall i, j$, allora esiste, ed è unico, s$\in \mathcal{F}$(U) tale che $s|_{V_i} = s_i \, \forall i$.

La proprietà di incollamento stabilisce che c'è almeno un modo per incollare le sezioni, quella di separatezza stabilisce che c'è al più un modo, da cui l'unicità. Un prefascio che soddisfa la condizione di separatezza è detto *prefascio separato.*

Analizziamo ora alcuni esempi di prefasci e fasci, evidenziandone le differenze.

Esempio 2.4. (*funzioni reali continue su uno spazio topologico*)
Preso uno spazio topologico X, si consideri, per ogni aperto $U \subseteq X$, l'anello $\mathcal{O}(U)$ delle funzioni continue : $U \to \mathbb{R}$, e per ogni $V \subseteq U$ la mappa di restrizione sia $\rho_{UV} \colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$. $\mathcal{O}$ così definito è un fascio. Sono verificate infatti le quattro proprietà (sia $\mathcal{O}(\emptyset) = 0$ per definizione):

1. e 2. discendono naturalmente dalle proprietà della restrizione di funzioni. Allora sono verificati gli assiomi di prefascio.

3. verificata, perché una funzione localmente nulla è nulla.

4. verificata, perché, preso $\{V_i\}$ ricoprimento di $U \subseteq X$ aperto, se esistono, $\forall i, f_i \in \mathcal{O}(V_i)$ tali che $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j} \forall i,j$, posso definire f come $f|_{V_i} := f_i \ \forall i$, e ottengo una funzione (ben definita) reale continua .

In modo analogo si costruiscono i fasci delle *funzioni differenziabili su una varietà differenziabile* e delle *funzioni olomorfe su una varietà complessa.*

Esempio 2.5. (*prefascio costante*)
Sia X uno spazio topologico e A un gruppo abeliano (si pensi a $\mathbb{Z}$ con l'addizione), dotato della topologia discreta. Per ogni aperto $U \subseteq X$ definiamo $\mathcal{A}(U)$ come il gruppo delle funzioni continue : $U \to A$, e le mappe di restrizione siano le normali restrizioni tra insiemi. Definito $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$, e supposto U connesso, sono verificati i restanti assiomi di prefascio e fascio:

1. e 2. analogamente all'esempio precedente, si usa la continuità dei morfismi.

3. sia $\{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di U, con $V_i \neq \emptyset \, \forall i$ e sia $s \in \mathcal{A}(U) = A$ tale che $s|_{V_i} = 0 \, \forall i$. Essendo $s|_{V_i} = \rho_{UV_i}(S) = id(s) = s \, \forall i$, si deduce s=0.

4. sia $\{V_i\}$ un ricoprimento aperto di U e si supponga esistano ,$\forall i, s_i \in \mathcal{A}(V_i)$ tali che $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j} \, \forall i,j$. Se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, allora le restrizioni sono $\rho_{V_i, V_i \cap V_j} = id = \rho_{V_j, V_i \cap V_j}$. Avendo supposto U connesso, basta definire s$\in$ $\mathcal{A}(V_i \cap V_j)$ come s:=$s_i = s_j$. In questo caso è $\mathcal{A}(U) \cong A$. Mentre se U è costituito da k componenti connesse aperte, allora $\mathcal{A}(U)$ è isomorfo al prodotto diretto di k copie di A.

L'ultimo esempio mette in luce le difficoltà che sorgono quando lo spazio non è connesso. Si prenda ad esempio $X = U \sqcup V$ con $\{U, V\}$ ricoprimento aperto di X e $U \cap V = \emptyset$. Allora se $s \in \mathcal{A}(U) = A$ e $t \in \mathcal{A}(V) = A$ con $s \neq t$, si ha $s|_{U \cap V} = 0 = t|_{U \cap V}$ ma non si può eseguire l'incollamento.
Questo discorso stimola uno studio più locale, e quindi l'introduzione del concetto di *fibra.*

Definizione 2.6. Dato un prefascio $\mathcal{F}$ e un punto $P \in X$, si definisce la *fibra di $\mathcal{F}$ in P* (*stalk*), indicata con $\mathcal{F}_P$, in due modi equivalenti:

- come l'insieme dei *germi* di $\mathcal{F}$ in P, con i germi che sono sezioni su un aperto contenente P. Per definizione, due sezioni definiscono lo stesso germe se coincidono su un aperto più piccolo, contenente P. Precisamente:

$$\mathcal{F}_P = \{\langle U, s \rangle \colon P \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim$$

  con $\langle U, s \rangle = \langle V, t \rangle$ in $\mathcal{F}_P \iff \exists P \in W \subseteq U \cap V \colon s|_W = t|_W$

- come limite diretto degli $\mathcal{F}(U)$ con $U \subseteq X$ aperto contenente P. Precisamente:
$$\mathcal{F}_P := \varinjlim_{P \in U} \mathcal{F}(U)$$

(Si tratta della stessa definizione: la categoria degli indici è un insieme filtrante: dati due aperti, ce n'è un terzo contenuto in entrambi).

2.2 Morfismi, fasci associati e sottofasci

Definizione 2.7. Dati due fasci $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ su X, un *morfismo di prefasci*, in gruppi abeliani, tra essi è $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definito tramite i morfismi di gruppi abeliani $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, per ogni $U \subseteq X$ aperto, con la proprietà che per ogni inclusione $V \subseteq U$, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{\rho'}_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

ossia si abbia ${\rho'}_{UV} \circ \varphi(U) = \varphi(V) \circ \rho_{UV}$, ossia $\varphi(U)(s)|_V = \varphi(V)(s|_V)$ per ogni $s \in \mathcal{F}(U)$.
Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci, tale morfismo è detto *morfismo di fasci*.
Un morfismo con un'inversa è un *isomorfismo di (pre)fasci*. Tale inversa ψ si costruisce aperto per aperto come $\psi(U)\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ tale che $\psi(U) \circ \varphi(U) = id_{\mathcal{F}(U)}$, $\forall U \subseteq X$ aperto.
Un *morfismo di prefasci* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ su X induce un morfismo tra le fibre. Ossia, per ogni $P \in X$ si ha $\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$, $\langle U, s\rangle \mapsto \langle U, \varphi(U)(s)\rangle$.
Tramite le proprietà di φ_P è possibile dedurre importanti proprietà di φ, come risulta evidente dal seguente teorema, falso per prefasci.

Proposizione 2.8. *Sia $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su X. Allora esso è un isomorfismo se e solo se lo è in fibra, ossia:*
φ isomorfismo $\iff$ φ_P è un isomorfismo per ogni $P \in X$.

Dimostrazione. $\Rightarrow$ si ha $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ isomorfismo per ogni $U \subseteq X$ aperto, e allora si ha il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(U) \arrow[r, "\psi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "{\rho'}_{UV}"] \\
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "\psi(V)"] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

Dall'unicità dell'inversa, il diagramma, nel caso dell'inversa, è commutativo. Questo permette di definire il morfismo tra le fibre ψ tramite $\psi(U) := \varphi(U)^{-1}$, e localizzarlo come ψ_P.

$\Leftarrow$ sia φ_P biiettiva per $\forall P \in X$. É sufficiente mostrare che $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è isomorfismo per $\forall U \subseteq X$ (poi localmente si definisce l'inversa come $\psi(U) := \varphi(U)^{-1}$):

- *(iniettività)* Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\varphi(s) = 0$.
  Per ogni $P \in X$, la sezione s induce un elemento $s_P = \langle U, s\rangle$ in $\mathcal{F}_P$ con $\varphi_P(s_P) = \langle U, \varphi(s)\rangle = \langle U, 0\rangle$. Essendo per ipotesi φ_P iniettivo $\forall P \in U$, si ha $s_P = 0 = \langle W, 0\rangle$. Esplicitando l'uguaglianza in fibra, esiste W_P intorno aperto di P contenuto in $U \cap W$ e tale che $s|_{W_P} = 0$. Poichè ciò vale $\forall P$ e poichè l'insieme $\{W_P \colon P \in U\}$ è un ricoprimento aperto di U, per la proprietà di separatezza si ha $s = 0$ su U.
- *(suriettività)* Sia $t \in \mathcal{G}(U)$ e si guardi il suo germe $t_P = \langle U, t\rangle \in \mathcal{G}_P$ in $P \in U$. Essendo per ipotesi φ_P suriettiva, $\exists s_P \in \mathcal{F}_P$ tale che $\varphi_P(s_P) = t_P$. Allora $\exists V_P$ aperto di X contenente P e $\exists s(P) \in V_P$, tali che $s_P = \langle V_P, s(P)\rangle$. Quindi $\varphi_P(s_P) = \langle V_P, \varphi(V_P)(s(P))\rangle = \langle U, t\rangle = t_P$ e allora, per uguaglianza in fibra, $\exists P \in W_P \subseteq V_P \cap U$ tale che $\varphi(V_P)(s(P))|_{W_P} = t|_{W_P}$. Quindi ci si può restringere a W_P. Allora, senza perdere di generalità possiamo supporre $t|_{V_P} = \varphi(V_P)(s(P))$, e dall'iniettività provata sappiamo che tale $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)$ è unica, con $P \in V_P \subseteq U$. L'insieme $\{V_P \colon P \in U\}$ è un ricoprimento aperto di U, con $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)\,\forall P$. Inoltre, dall'iniettività provata si ha che per ogni $P, Q \in U$ si ha $s(P)|_{V_P \cap V_Q} = s(Q)|_{V_P \cap V_Q}$ e i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V_P) \arrow[r, "\varphi(V_P)"] \arrow[d, "\rho_{V_P, V_P \cap V_Q}"] & \mathcal{G}(V_P) \arrow[d, "\rho'_{V_P, V_P \cap V_Q}"] \\
\mathcal{F}(V_P \cap V_Q) \arrow[r, "\varphi(V_P \cap V_Q)"] & \mathcal{G}(V_P \cap V_Q)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V_Q) \arrow[r, "\varphi(V_Q)"] \arrow[d, "\rho_{V_Q, V_P \cap V_Q}"] & \mathcal{G}(V_Q) \arrow[d, "\rho'_{V_Q, V_P \cap V_Q}"] \\
\mathcal{F}(V_P \cap V_Q) \arrow[r, "\varphi(V_P \cap V_Q)"] & \mathcal{G}(V_P \cap V_Q)
\end{tikzcd}$$

  In conclusione, per la proprietà di incollamento $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{V_P} = s(P)$, per ogni P.

$\square$

Proposizione 2.9. *Dato un prefascio $\mathcal{F}$, esiste ed è unica, a meno di isomorfismo, la coppia $(\mathcal{F}^+, \vartheta)$, con $\mathcal{F}^+$ fascio, detto* fascio associato al prefascio $\mathcal{F}$, *e $\vartheta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ morfismo di prefasci, tali che per ogni fascio $\mathcal{G}$ e ogni* *morfismo* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *esista un morfismo* $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ *tale che il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\exists\vartheta"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per ogni aperto $U \subseteq X$ costruiamo il fascio $\mathcal{F}^+$ come:

$$\mathcal{F}^+(U) = \{s\colon U \to \bigsqcup_{P\in U} \mathcal{F}_P,\ P \mapsto s(P)\}$$

funzioni per cui $s(P) \in \mathcal{F}_P\ \forall P \in U$, e per cui $\exists V_P \subseteq U$ aperto contenente P e $\exists t \in \mathcal{F}(V_P)$ tali che per $\forall Q \in V_P$ si abbia $t_Q = s(Q)$.
Considerando le mappe di restrizione si ottiene un fascio. Verifichiamo infatti le condizioni:

- se $W \subseteq U$ allora $\mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(W)$, $W \hookrightarrow U \xrightarrow{s} \bigsqcup_{P\in U} \mathcal{F}_P \longmapsto s|_W$ (prendendo $V'_P := V_P \cap W$).

3. se $\{U_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di U, con $s|_{U_i} = 0\,\forall i$, allora per $\forall P \in U\, \exists i \in I$ tale che $P \in U_i$. Allora $s|_{U_i}(P) = s(P) = 0$ da cui $s = 0$.

4. siano $s_i\colon U_i \to \bigsqcup_{P\in U_i} \mathcal{F}_P$ e $s_j\colon U_j \to \bigsqcup_{P\in U_i} \mathcal{F}_P$ tali che $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Allora si definisce naturalmente $s_{ij}\colon U_i \cup U_j \to \bigsqcup_{P\in U_i\cup U_j} \mathcal{F}_P$ con $P \mapsto s_i(P)$ se $P \in U_i \setminus U_j$, $Q \mapsto s_j(Q)$ se $Q \in U_j \setminus U_i$, $R \mapsto s_i(R) = s_j(R)$ se $R \in U_i \cap U_j$.

$\square$

Con il linguaggio delle categorie, si può vedere il legame tra un fascio e il suo fascio associato tramite il funtore dimenticanza (dimenticando separatezza e incollamento) e l'aggiunzione:

$$Sh(K_X) \to Psh(K_X),\ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

$$Psh(K_X) \to Sh(K_X),\ \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^+$$

con $Hom_{Psh}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong Hom_{Sh}(\mathcal{G}^+, \mathcal{F})$. Quindi il funtore fascio associato $(\_)^+$ è l'aggiunto sinistro del funtore dimenticanza.
E se $\mathcal{F} = \mathcal{G}^+$ si ha: $Hom_{Psh}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^+) \cong Hom_{Sh}(\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^+)$, e allora a $id_{\mathcal{G}^+}$ corrisponde $\vartheta\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$.

Definizione 2.10. Dato un fascio $\mathcal{F}$, un suo *sottofascio* $\mathcal{F}'$ è un fascio le cui sezioni $\mathcal{F}'(U)$ sono sottogruppi delle sezioni $\mathcal{F}(U)$, per ogni $U \subseteq X$ aperto, e le cui mappe di restrizione sono indotte da quelle di $\mathcal{F}$.

OSSERVAZIONE 2.11. Se un morfismo di prefasci $\alpha \colon \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ è iniettivo e $\mathcal{F}$ è un fascio, allora $\mathcal{F}'$ è un prefascio separato. Infatti si ha la separatezza: se $s \in \mathcal{F}'(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ con $s_i := s|_{U_i} = 0\ \forall i$ allora lo è anche in $\mathcal{F}(U)$ e allora, essendo $\mathcal{F}$ fascio, si ha $s = 0$

Definizione 2.12. Dato un morfismo di prefasci $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, si definiscono i prefasci, per $U \subseteq X$ aperto, *nucleo* $(\mathrm{Ker}\varphi)(U) := \mathrm{Ker}(\varphi(U))$, *conucleo* $\mathrm{Coker}(\varphi(U)) := \mathcal{G}(U)/\mathrm{Im}(\varphi(U))$, *immagine* $(\mathrm{Im}\varphi)(\mathrm{U}) := \mathrm{Im}(\varphi(\mathrm{U}))$, con:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ker}\varphi)(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[dr] & \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\varphi(U)) \\
 & & (\mathrm{Im}\varphi)(U) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Proposizione 2.13. *Se $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è morfismo di fasci, allora* $(\mathrm{Ker}\varphi)(U)$ *è fascio (è sottofascio di $\mathcal{F}$).*

Dimostrazione. Per $V \subseteq U$ si ha il diagramma seguente (restrizioni indotte dall'inclusione):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\varphi(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\
\mathrm{Ker}\varphi(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

e sono verificate anche le due proprietà aggiuntive dei fasci:

3. se $\{V_i\}$ è un ricoprimento aperto di U e $s \in (\mathrm{Ker}\varphi)(U) = \mathrm{Ker}(\varphi(U)) \subseteq \mathcal{F}(U)$ con $s|_{V_i} = 0\,\forall i$, allora $s \in \mathcal{F}$, ed essendo quest'ultimo un fascio, si ha $s = 0$.

4. siano $s_i \in \mathrm{Ker}\varphi(V_i) \subseteq \mathcal{F}(V_i)$ con $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ (in $\mathcal{F}(V_i \cap V_j)$). Definendo $s \in \mathcal{F}(U)$ come $s|_{V_i} := s_i$, si ha $\varphi(U)(s) = 0$ (ossia $s \in \mathrm{Ker}\varphi(U)$), essendo $0 = \varphi(V_i)(s|_{V_i}) = (\varphi(U)(s))|_{V_i}$ ed essendo $\mathcal{F}$ un fascio si ricava che $s \in \mathrm{Ker}(\varphi)(\mathrm{U})$.

□

Dato φ morfismo di fasci, si osserva che $\mathrm{Coker}(\varphi(U))$ e $\mathrm{Im}(\varphi(U))$ non sono in generale dei fasci, ma sono prefasci. Si usa quindi la nozione di fascio associato ad un prefascio:

- Per Coker(φ) non è rispettata in generale la proprietà di incollamento. Quindi si definisce il *fascio conucleo* Coker($\varphi(U)$) come il fascio associato al prefascio conucleo;

- Im(φ) in generale non soddisfa la proprietà di incollamento. Allora si definisce il *fascio immagine* Imφ come il fascio associato al prefascio immagine. Per la proposizione seguente, esso può essere visto come un sottofascio di $\mathcal{G}$.

Dalla teoria delle aggiunzioni, richiamiamo che un funtore aggiunto a sinistra come $(\_)^+$ è esatto a destra. Mostriamo che esso rispetta anche i monomorfismi, ed è quindi un funtore esatto.

Proposizione 2.14. *(fasci associati e sottofasci)*

a. Sia $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *un morfismo di prefasci tale che* $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ *sia iniettivo per* $\forall U \subseteq X$ *aperto. Allora la mappa indotta* $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ *tra i fasci associati è iniettiva.*

b. Se $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *è un morfismo di fasci, allora* Im(φ) *può essere identificata in modo naturale con un sottofascio di* $\mathcal{G}$

Dimostrazione. a. Richiamando le notazioni, sia $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tale che $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(U)$, $\forall U \subseteq X$ aperto.
Mostriamo che il morfismo $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ è iniettivo, dove ricordiamo che $\mathcal{F}^+$ è definito come:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^+(U) \ni s : U & \longrightarrow & \bigsqcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \\ P & \longmapsto & s(P) \in \mathcal{F}_P \end{array}$$

tale che per $\forall P \in U\ \exists P \in W_P \subseteq U$ e $\exists t \in \mathcal{F}(W_P)$ tale che $s(P) = t_P$.
Dimostriamo l'iniettività di φ^+ in due passi:

1. Mostriamo l'iniettività in fibra, ossia che

$$\begin{array}{rcl} \varphi_P : \mathcal{F}_P & \longrightarrow & \mathcal{G}_P \\ \langle U_P, s \rangle & \longmapsto & \langle U_P, \varphi(U_P)(s) \rangle \end{array}$$

è iniettiva $\forall P \in X$.
Usiamo la caratterizzazione dell'iniettività tramite nucleo banale, essendo nel contesto di prefasci di gruppi abeliani.
Si ha $\varphi_P(\langle U_P, s \rangle) = 0_{\mathcal{G}_P} \iff \langle U_P, \varphi(U_P)(s) \rangle = 0_{\mathcal{G}_P} \iff \exists P \in V_P \subseteq U_P$ aperto tale che (definizione di uguaglianza in fibra: esiste un aperto su cui le mappe di restrizione coincidono)

$\varphi(U_P)(s)|_{V_P} = 0$.
Ma, per le proprietà dei morfismi di prefasci, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U_P) \arrow[r, "\varphi(U_P)"] \arrow[d, "\rho_{u_P V_P}"] & \mathscr{G}(U_P) \arrow[d, "\rho_{U_P V_P}"] \\
\mathscr{F}(V_P) \arrow[r, "\varphi(V_P)"] & \mathscr{G}(V_P)
\end{tikzcd}$$

e allora $0 = \varphi(U_P)(s)|_{V_P} = \varphi(V_P)(s|_{V_P})$. Essendo ora $\varphi(V_P)$ iniettivo per ipotesi, si ha $s|_{V_P} = 0$. Quindi $\langle U_P, s\rangle = \langle V_P, s|_{V_P}\rangle = \langle V_P, 0\rangle$, da cui l'iniettività.

2. Con la definizione di fascio associato e il suo legame con le fibre, usiamo lo step precedente per dedurre l'iniettività di φ^+.
Si ha la commutatività dei seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{F}^+(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}^+(U) \\
s : U \to \coprod\limits_{P \in U} \mathcal{F}_P & \longmapsto & \varphi^+(s) : U \to \coprod\limits_{P \in U} \mathcal{G}_P
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod\limits_{P\in U} \mathcal{F}_P \arrow[dr, "(\varphi_P)_{P\in U}"] & \\
U \arrow[ur, "s"] \arrow[rr] & & \coprod\limits_{P\in U} \mathcal{G}_P
\end{tikzcd}$$

in cui la mappa $\coprod\limits_{P\in U} \mathcal{F}_P \hookrightarrow \coprod\limits_{P\in U} \mathcal{G}_P$ è iniettiva perchè, per il passo precedente, ognuna delle φ_P lo è. Allora si deduce l'iniettività di $U \to \coprod\limits_{P\in U} \mathcal{G}_P$ e quindi di φ^+.

b. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono fasci, allora $\mathcal{F}^+ \simeq \mathcal{F}$, $\mathcal{G}^+ \simeq \mathcal{G}$ e φ è morfismo di fasci.
Per $\forall U \subseteq X$ aperto, sia $\mathrm{Im}\varphi(U) =: I(U)$.
Per definizione di prefascio immagine, si ha (diagramma indotto dall'analogo sui fasci associati):

$$\begin{tikzcd}
 & I(U) \arrow[dr] & \\
\mathcal{F}(U) \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi(U)"] & & \mathcal{G}(\mathcal{U})
\end{tikzcd}$$

ossia si ha l'immersione $I(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U})$ per $\forall U$. Allora per a. è $I^+ \hookrightarrow \mathcal{G}^+$.

$\square$

Dalle proprietà di fascio associato, si può verificare che $\mathrm{Im}(\varphi)$ è l'immagine di φ in senso categorico (nucleo del conucleo, come accennato alla fine della sezione 1.2).

Concludiamo il capitolo con la costruzione, tramite applicazione continua, di due tipologie di fascio che torneranno utili nel capitolo successivo.

Definizione 2.15. Siano X, Y due spazi topologici e $f\colon X \to Y$ una mappa continua tra essi. Siano poi $\mathcal{F}$ un fascio su X e $\mathcal{G}$ un fascio su Y. Allora si ottengono due ulteriori fasci come segue:

- *fascio immagine diretta* $f_*\mathcal{F}$ su Y, con $(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$, per $V \subseteq Y$ aperto;
- *fascio immagine inversa* $f^{-1}\mathcal{G}$ su X, come fascio associato al prefascio $\lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$, per $U \subseteq X$ aperto.

Ricordiamo infine, senza dare la dimostrazione, la seguente proposizione:

Proposizione 2.16. *Sia $f\colon X \to Y$ mappa continua tra spazi topologici, e siano $\mathcal{F}$ un fascio su X e $\mathcal{G}$ un fascio su Y. Con le notazioni precedenti, si ha la formula di aggiunzione:*

$$Hom_{Sh(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong Hom_{Sh(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

ossia f^{-1} è aggiunto sinistro di f_*.

Capitolo 3

Schemi

Lo scopo di questo capitolo è quello di presentare il prototipo di *spazio geometrico* studiato in geometria algebrica: lo *schema*.
Si tratta di una generalizzazione, come oggetto aritmetico, delle varietà differenziabili, e la motivazione della sua introduzione risiede nella quantità di informazioni, su tale spazio, che si possono ottenere studiando il fascio delle funzioni su di esso.
Uno schema viene definito tramite: l'insieme dei suoi punti, una topologia su di esso e il suo fascio di funzioni algebriche (questo darà, nello specifico, lo *spettro*).

3.1 Spettro

Definiamo uno *schema affine* partendo da un anello commutativo A e associandogli uno spazio topologico e un fascio di anelli su esso, in modo da ottenere lo *spettro* dell'anello, $SpecA$.

Cominciamo definendo l'insieme soggiacente a quello che poi diventerà uno schema affine: partiamo da un insieme e poi gli attribuiamo una topologia. Sia quindi $SpecA$ l'insieme i cui *punti* sono tutti gli ideali primi $\mathtt{p}$ dell'anello A: prendere tutti gli ideali primi al posto dei soli ideali massimali ci porterà ad avere dei punti aggiuntivi rispetto a quelli di una varietà, e si rivelerà fondamentale nella definizione di un funtore di particolare importanza ($Spec$).
Gli elementi $a \in A$ sono detti *funzioni* su $SpecA$, e la classe di a modulo $\mathtt{p}$ è detto il *valore* della funzione a in $\mathtt{p}$.
Preso $\mathtt{a}$ un ideale di A, definiamo il sottoinsieme di $SpecA$:

$$V(\mathtt{a}) := \{\mathtt{p} \trianglelefteq A : \mathtt{p}\ \textit{primo}, \mathtt{a} \subseteq \mathtt{p}\}.$$

Esso è detto *Vanishing set* di $\mathfrak{a}$, ossia l'insieme dei punti $\mathfrak{p}$ su cui gli elementi di $\mathfrak{a}$ si annullano. Infatti se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ allora la classe di $\mathfrak{a}$ modulo $\mathfrak{p}$ è zero e quindi il valore di $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$ è nullo.
Esso gode delle seguenti proprietà:

Lemma 3.1. *1.* $V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$*;*

2. $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$*;*

3. $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$*.*

Dimostrazione. 1. ($\supseteq$) sia $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$. Se $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ oppure $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ allora $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{ab}$ (proprietà di assorbimento),

($\subseteq$) se $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{ab}$, suppongo $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{b}$, ossia che esista $b \in \mathfrak{b}$ tale che $b \notin \mathfrak{p}$. Essendo, per ogni $a \in \mathfrak{a}$, $ab \in \mathfrak{p}$, ed essendo $\mathfrak{p}$ un ideale primo, segue $a \in \mathfrak{p}$, e allora $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.

2. $V(\sum \mathfrak{a}_i) = V(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ...)$ e allora $\mathfrak{p} \supseteq \sum \mathfrak{a}_i \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i \, \forall i$ (perché $\sum \mathfrak{a}_i$ è il più piccolo ideale contenente tutti gli $\mathfrak{a}_i$).

3. il radicale di $\mathfrak{a}$ è l'ideale formato da tutti gli elementi $x \in A$ tali che esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $x^n \in \mathfrak{a}$. In un anello commutativo con unità, il radicale risulta essere l'intersezione di tutti gli ideali primi che contengono $\mathfrak{a}$. Allora si rovesciano le inclusioni e si ottiene quanto voluto.

$\square$

Si definisce ora una topologia sull'insieme *SpecA*, detta *topologia di Zariski*, dichiarando che i *chiusi* siano i sottoinsiemi del tipo V($\mathfrak{a}$), con $\mathfrak{a}$ ideale di A. Si tratta effettivamente di una topologia:
$V(A) = \emptyset$ e $V((0)) = SpecA$, dato che $V(\cdot)$ rovescia le inclusioni, e sia ha che unioni finite e intersezioni arbitrarie di insiemi del tipo V($\mathfrak{a}$) sono ancora insiemi di tale forma, per 1) e 2) del lemma 3.1.
Se $f \in A$, si definisce l'aperto *Distinguished open set*:

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in SpecA \colon f \notin \mathfrak{p}\} = SpecA \setminus V((f)).$$

Tali aperti definiscono una base di aperti per la topologia.

Infine, si definisce su *SpecA* un *fascio di anelli* $\mathcal{O}$ (fascio localmente anellato), procedendo in modo analogo a quanto fatto nella costruzione del fascio associato ad un prefascio:
sia A_p la localizzazione di A ad un generico ideale primo $\mathfrak{p} \subseteq A$. Allora per ogni aperto $U \subseteq SpecA$ (complementare di un chiuso, nella topologia appena definita), si definisce $\mathcal{O}(U)$ come l'insieme delle funzioni $s \colon U \to \sqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ tali

che $s(\mathtt{p}) \in A_{\mathtt{p}}, \forall \mathtt{p}$, e tale che s sia localmente quoziente di elementi di A, ossia: $\forall \mathtt{p} \in U$, $\exists \mathtt{p} \in V \subseteq U$, $\exists a, f \in A$ tali che $\forall \mathtt{q} \in V, f \notin \mathtt{q}$, sia $s(\mathtt{q}) = a/f$ in $A_{\mathtt{q}}$. Con la definizione appena data, si ottiene un fascio. Infatti:
$\mathcal{O}(U)$ è un anello commutativo con identità: l'identità è l'elemento 1 che dà 1 in ogni $A_{\mathtt{p}}$. Se poi $V \subseteq U$ sono due aperti, la mappa di restrizione $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ è un omomorfismo di anelli, avendo definito le operazioni in modo puntuale. Si ha allora un prefascio e, usando la costruzione analoga al fascio associato, si verifica che esso è un fascio.

Definizione 3.2. Lo *spettro* di un anello A è la coppia $(SpecA, \mathcal{O})$ costituita dallo spazio topologico $SpecA$ e dal suo fascio di anelli $\mathcal{O}$, definiti come sopra.

Esempio 3.3. (*retta affine* $\mathbb{A}^1_K$)
Vediamo come si traducono i concetti di ideali primi e massimali, V($\mathtt{a}$), $A_{\mathtt{p}}$ e $\mathcal{O}$ nel caso di un comune esempio di schema affine: la *retta affine* $\mathbb{A}^1_K$ *su un campo* K.
Sia $K[X]$ l'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti nel campo algebricamente chiuso $K = \bar{K}$(anello A della definizione, si pensi $K = \mathbb{C}$). Insiemisticamente, il suo spettro è $SpecK[X]$ = ideali primi di $K[X]$.
Essendo quindi $K[X]$ un PID (dominio a ideali principali), i suoi ideali primi (non impropri nè banali) sono del tipo $I = (p(x))$ con $p(x) \in K[X]$ irriducibile (e non costante), $p(x) = (x - a)$, con $a \in K$; mentre se $p(x) = c$ costante non nulla, allora $(c) = K[X]$ (un invertibile genera l'ideale improprio $K[X]$) e se $p(x) = 0$ allora $(0) = \{0\}$ (ideale nullo).
Poiché gli unici polinomi irriducibili di grado >0 in K sono lineari della forma $x - a$ (campo algebricamente chiuso), si hanno due tipi di punti:

- *punti chiusi* $\leftrightarrow$ ideali massimali, e quindi primi, $\mathtt{m}$. Nel caso in analisi, $(x - a)$ con $a \in K$. Questi punti sono chiusi, dato che per massimalità sono uguali alla loro chiusura: $V(\mathtt{m}) = \{\mathtt{m}\}$.
- *punti generici* $\leftrightarrow$ ideali primi ma non massimali. Nel caso in analisi, solo $\{0\}$ ($K[X]$ dominio d'integrità). Esso non è chiuso, ma è denso, dato che: $V(\{0\}) = SpecA$.

Si ha quindi:

$$SpecK[X] = \mathbb{A}^1_K = \{(x - a) \colon a \in K\} \cup \{(0)\}.$$

Indaghiamo ora la struttura delle localizzazioni. Detto $A := K[X]$ e $\mathtt{p} = (x - \alpha)$, essendo, per $f \in K[X]$, $f \notin (\mathtt{p}) \iff x - \alpha \nmid f \iff f(\alpha) \neq 0$, si ha: $A \subseteq A_{\mathtt{p}} = \{[p(x)/q(x)] : q(x) \notin \mathtt{p}\}$, ossia la localizzazione è data dalle classi di equivalenza di funzioni razionali il cui denominatore è ben definito

in un intorno di α (si ha $[p(x)p_1(x)/q(x)p_1(x)] = [p(x)/q(x)]$, con $p_1(x) \notin \mathtt{p}$). L'inclusione $A \subseteq A_{\mathtt{p}}$ è data dal fatto che posso vedere gli elementi $p(x)$ del primo come $p(x)/1$.
Costruiamo infine $\mathcal{O}$. Lo costuiamo in modo tale che gli anelli locali diventino le fibre, ossia in modo da avere la corrispondenza:

- sezioni locali $\langle U, s\rangle \leftrightarrow A_{\mathtt{p}}$
- sezioni globali $\langle X, s\rangle \leftrightarrow A$

Procedendo come nella costruzione del fascio associato ad un prefascio, sia $D(f) = SpecA - Z(f)$, con $Z(f) = \{zeri\,di\,f\}$) e $t = a/f \in \mathcal{O}(V)$. Imponiamo che per ogni $\mathtt{q} \in V$ sia $t_{\mathtt{q}} = s(\mathtt{q}) \in A_{\mathtt{q}}$, ed è $f \notin \mathtt{q} \iff V = SpecA - Z(f)$. Con questa costruzione, sono verificate le proprietà aggiuntive di un fascio (analogo alla costruzione di $\mathcal{F}^+$).

Esempio 3.4. (*piano affine* $\mathbb{A}^2_K$)
In modo similare si analizza lo schema affine $\mathbb{A}^2_K$.
Si consideri $K[X, Y]$ l'anello dei polinomi in due variabili sul campo $K = \bar{K}$ (non è un PID essendo (X, Y) ideale non principale), e insiemisticamente sia $SpecK[X, Y] =$ ideali primi di $K[X, Y]$.
In aggiunta ai punti chiusi (x_0, y_0), definiti dalle due equazioni $x = x_0, y = y_0$, si annoverano, come punti generici, quelli delle curve irriducibili.
Ad esempio $(x - x_0, y - y_0)$ è un ideale massimale (essendo $K[X, Y]/(x - x_0, y - y_0) \cong K$), mentre $(y - x^2)$ (corrispondente all'equazione della parabola) è primo ma non massimale: si ha ad esempio $(y - x^2) \subseteq (x - 1, y - 1)$ scrivendo $y - x^2 = (y - 1) - (x - 1)^2 - 2(x - 1)$. Quozientando si ottiene $K[X, Y]/(y - x^2)$ dominio ma non campo, in cui si identificano tra loro i punti della parabola.
Si ha quindi:

$$SpecK[X, Y] = \mathbb{A}^2_K = \{(x - a, y - b) \colon a, b \in K\} \cup \{(0)\} \cup \{(f(x, y)) \colon f\, irriduc.\}$$

Esempio 3.5. Generalizzando ai polinomi in n variabili:
Sia $X = \mathbb{A}^n_K$ e si prenda l'anello $K[x_1, \dots, x_n]$. I chiusi sono della forma $Z(f_1, \dots, f_n) = \{zeri\,dei\,polinomi\,f_1, \dots, f_n \in K[x_1, \dots, x_n]\}$ e gli aperti sono i $D(f) = X \setminus Z(f)$. Nella definizione di fascio localmente anellato, si hanno:

- sezioni *globali* $K[x_1, \dots, x_n] = \mathcal{O}_X(X)$
- sezioni *locali* $\{p(x_1, \dots, x_n)/f(x_1, \dots, x_n)^m : p \in K[x_1, \dots, x_n], m \in \mathbb{N}\} = \mathcal{O}_X(D(f))$

Esempio 3.6. *altri esempi notevoli:*

- *Spec* $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ è un dominio euclideo, con ideali primi (0) e (p), con p primo;
- *Spec* $0 = \emptyset$, poichè l'anello 0 non ha ideali primi (propri);
- *retta affine reale* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = Spec\,\mathbb{R}[X]$: ideale primo (0) e ideali massimali del tipo $(x-a)$, con $\mathbb{R}[X]/(x-a) \cong \mathbb{R}$, oppure (x^2+ax+b) polinomio irriducibile, con $\mathbb{R}[X]/(x^2+ax+b) \cong \mathbb{C}$ (coppie coniugate di soluzioni del polinomio danno lo stesso punto, che è chiuso in quanto l'ideale associato è massimale). Vi sono quindi due tipi di punti, a seconda del campo residuo: punti $\mathbb{R}-$razionali (campo residuo $\mathbb{R}$) e punti $\mathbb{C}-$razionali (campo residuo $\mathbb{C}$);
- $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p} = Spec\mathbb{F}_p[X]$: si ha $\mathbb{F}_p[X]$ dominio euclideo e gli ideali primi sono (0) oppure $f(x)$, con $f(x) \in \mathbb{F}_p[X]$ irriducibile (di qualsiasi grado: con grado 0 si hanno gli elementi del campo);
- *piccoli schemi*: l'anello $K[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ è detto *anello dei numeri duali*, e dà un esempio di schema affine il cui spazio topologico è un singolo punto (nonostante l'anello non sia un campo). Infatti:

  $$R := K[\varepsilon]/(\varepsilon^2) = \{a_0\varepsilon + a_1\varepsilon \colon a_0, a_1 \in K\} = K \oplus K\varepsilon \cong K^2$$

  $K-$spazio vettoriale di dimensione 2 e base $\{1, \varepsilon\}$. Gli invertibili di R sono tutti e soli gli $a_0 \neq 0$, e allora $SpecR = (\varepsilon)$ è l'unico ideale primo e massimale, essendo (0) non primo (dato che $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon^2 = 0$ con $\varepsilon \neq 0$). Questa è una una conseguenza dell'esistenza di elementi *nilpotenti* (elementi che elevati ad una certa potenza intera danno zero).

Formalizziamo e generalizziamo quanto intuito negli esempi riguardo alla relazione tra anelli locali e fibre, tramite il seguente teorema.

Teorema 3.7. *Dato $(SpecA, \mathcal{O})$ lo spettro associato ad un anello A:*

1. *per ogni $\mathfrak{p} \in SpecA$, si ha $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$ (ossia: le fibre del fascio sono isomorfe agli anelli locali);*
2. *per ogni $f \in A$, si ha $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$, e in particolare $\Gamma(SpecA, \mathcal{O}) \cong A$ (le sezioni globali sono isomorfe all'anello).*

Dimostrazione. 1. Definiamo il seguente omomorfismo e verifichiamo che è l'isomorfismo cercato:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} \\ \langle U, s \rangle & \longmapsto & s(\mathfrak{p}) \end{array}$$

questo omomorfismo manda una sezione s definita in un intorno di $\mathfrak{p}$ nel suo valore, con $s \colon U \to \sqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \mapsto s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$. Si ha:

- *φ ben definita:*

  presi due elementi della fibra $\langle U_1, s_1\rangle = \langle U_2, s_2\rangle$, per definizione di uguaglianza in fibra esiste $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ tale che $s_1|_{U_3} = s_2|_{U_3}$, con $\mathtt{p} \in U_3$, e allora $s_1(\mathtt{p}) = s_2(\mathtt{p})$, ossia l'immagine è la stessa;

- *φ suriettiva:*

  sia $x \in A_{\mathtt{p}}$. Allora $x = a/f, \exists a, f \in A, f \notin \mathtt{p}$. Definito $D(f) := SpecA - V((f))$, esso è aperto (complementare di chiuso) e $\mathtt{p} \in D(f)$, essendo $\mathtt{p} \notin V((f))$. Si consideri quindi l'applicazione costante:

  $$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(D(f)) \ni x : D(f) & \longrightarrow & \sqcup_{\mathtt{p} \in D(f)} A_{\mathtt{p}} \\ \mathtt{q} & \longmapsto & x(\mathtt{q}) = a/f \in A_{\mathtt{q}} \end{array}$$

  con $f \notin \mathtt{q}$ per $\forall \mathtt{q} \in D(f)$. Allora si ha $\varphi(\langle D(f), a/f\rangle) = a/f$, da cui la suriettività;

- *φ iniettiva:*

  supponiamo $\varphi(\langle U_1, s_1\rangle) = \varphi(\langle U_2, s_2\rangle)$ e mostriamo $\langle U_1, s_1\rangle = \langle U_2, s_2\rangle$ in $\mathcal{O}_{\mathtt{p}}$.
  Definendo $U := U_1 \cap U_2$ e $s := s_1|_U, t = s_2|_U$, essendo $\mathtt{p} \in U_1 \cap U_2$, si ha $\langle U_1, s_1\rangle = \langle U, s\rangle, \langle U_2, s_2\rangle = \langle U, t\rangle$ in $\mathcal{O}_{\mathtt{p}}$, con $s, t \in \mathcal{O}(U)$. Allora $\varphi(\langle U, s\rangle) = \varphi(\langle U, t\rangle)$ implica $s(\mathtt{p}) = t(\mathtt{p})$.
  Per definizione di $\mathcal{O}$, esistono intorni V_1 per s e V_2 per t tali che $s = a/f$ su V_1 e $t = b/g$ su V_2, con $a, b, f, g \in A$, $f, g \notin \mathtt{q} \forall \mathtt{q} \in V := V_1 \cap V_2 \subseteq U$.
  Usando ora V al posto di U, si ha: $\varphi(\langle V, a/f\rangle) = \varphi(\langle V, b/g\rangle) \iff a/f = b/g$ in $A_{\mathtt{p}} \iff h(ga - fb) = 0 \, \exists h \in A, h \notin \mathtt{p}$ (usando la relazione di equivalenza dell'esempio 1.31).
  Sia ora $\mathtt{q} \trianglelefteq A$ primo tale che $f, g, h \notin \mathtt{q}$ e sia $V' := V - V((h))$ intorno aperto di $\mathtt{p}$. Allora $a/f = b/g$ in $A_{\mathtt{q}}, \forall \mathtt{q} \in V'$ e allora $s|_{V'} = t|_{V'}$, e allora $\langle U, s\rangle = \langle V', s|_{V'}\rangle = \langle V', t|_{V'}\rangle = \langle U, t\rangle$, da cui l'iniettività.

2. Notiamo che, nel caso particolare in cui $f = 1$, essendo $V((1)) = \emptyset$, da 2. segue: $D(1) = SpecA \implies \mathcal{O}(D(1)) = \mathcal{O}(SpecA) = \Gamma(SpecA, \mathcal{O}) = A_{(1)} = A$. Dimostriamo quindi il punto 2 della proposizione:

   definiamo il seguente omomorfismo e verifichiamo che è un isomorfismo:

   $$\begin{array}{rcccl} \psi : A_f & \longrightarrow & \mathcal{O}(D(f)) & & \\ a/f^n & \longmapsto & s : D(f) & \longrightarrow & \sqcup_{\mathtt{p} \in D(f)} A_{\mathtt{p}} \\ & & \mathtt{p} & \mapsto & [a/f^n] \end{array}$$

- ψ *iniettivo:*

  suppongo $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$ e mostro $[a/f^n] = [b/f^m]$ in A_f.
  Per ogni $\mathtt{p} \in D(f)$ si ha $h(f^m a - f^n b) = 0$ in $A, \exists h \notin \mathtt{p}$.
  Definiamo $\mathtt{a} := \{c \in A \colon c(f^m a - f^n b) = 0\} \trianglelefteq A$.
  Allora $\mathtt{a} \nsubseteq \mathtt{p} \implies V(\mathtt{a}) \cap D(f) = \emptyset \implies V(\mathtt{a}) \subseteq V((f)) \implies (f) \subseteq \sqrt{\mathtt{a}} \implies f^l \in \mathtt{a} \implies f^l(f^m a - f^n b) = 0 \implies [a/f^n] = [b/f^m]$ in A_f da cui l'iniettività.

- ψ *suriettivo:*

  sia $s \in \mathcal{O}(D(f))$ e mostriamo che $s = \psi(a/f^n)$.
  Per definizione di $\mathcal{O}(D(f))$ e per ogni punto $p \in D(f)$, esiste un aperto V_p tale che $s|_{V_i} = a_i/g_i$, $g_i \notin \mathtt{p}, \forall \mathtt{p} \in V_i$ per $V_i \subseteq D(g_i)$.
  Quindi i V_p formano un ricoprimento aperto di $D(f)$, che chiameremo V_i, $i \in I$. Quindi $D(f) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$.
  Possiamo ora supporre $V_i = D(h_i) \subseteq D(g_i)$ e allora $V(h_i) \supseteq V(g_i) \iff h_i \in \sqrt{(h_i)} \subseteq \sqrt{(g_i)} \iff \exists n \colon {h_i}^n \in (g_i)$, ossia ${h_i}^n = c g_i$, tale che $a_i/g_i = c a_i/{h_i}^n$.
  Possiamo allora ridefinire $s|_{V(h_i)} = c a_i/{h_i}^n =: \bar{a}_i/\bar{h}_i$. Rinominiamo $h_i := \bar{h}_i, a_i := \bar{a}_i$.
  Vediamo ora che il ricoprimento è finito, ossia che $D(f) = \bigcup_{i=1}^{l} D({h_i}^n)$, con $s|_{D(h_i)} = a_i/h_i$. Infatti:
  $D(f) \subseteq \bigcup_{i \in I} D(h_i) \iff V(f) \supseteq \bigcap_{i \in I} V(h_i) = V(\sum_{i \in I}(h_i)) \iff f \in \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\sum_{i \in I}(h_i)} \iff f^n \in \sum_{i \in I}(h_i), \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
  Essendo $\sum_{i \in I}(h_i) = \{\sum_{i \in F} b_i h_i \colon b_i \in A, F \subseteq I, |F| < \aleph_0\}$, si ha $f^n = \sum_{i \in F} b_i h_i, \exists F = \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq I, b_i \in A$ e allora $f^n \in (h_1, \ldots, h_r) \implies D(f) \subseteq D(h_1) \cup \cdots \cup D(h_r)$.
  Osserviamo ora che $D(h_i h_j) = D(h_i) \cap D(h_j) = SpecA \setminus (V(h_i) \cup V(h_j)) = SpecA \setminus V(h_i h_j)$.
  Localizzando ψ si ha $A_{h_k} \to \mathcal{O}(D(h_k)), s_k = a_k/h_k \mapsto s|_{D(h_k)}, k = i, j$. Essendo $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$, si ha $s_i|_{D(h_i h_j)} = s_j|_{D(h_i h_j)}$ e allora $[a_i/h_i] = [a_j/h_j]$ su $A_{h_i h_j}$. Allora $\exists n_{ij} \colon (h_i h_j)^{n_{ij}}(h_j a_i - h_i a_j) = 0 \implies (h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0, \forall n \geq n_{ij}$, e allora $\exists \bar{n} \geq n_{ij}$ tale che per $\forall i, j \in \{1, \ldots, r\}$ sia $[a_i/h_i] = [a_j/h_j]$ in $A_{h_i h_j}$.
  Allora ${h_j}^{n+1}({h_i}^n a_i) - {h_i}^{n+1}({h_j}^n a_j) = 0 \iff {h_j}^{n+1}({h_i}^n a_i) = {h_i}^{n+1}({h_j}^n a_j) \iff \bar{a}_i/\bar{h}_i := ({h_i}^n a_i)/{h_i}^{n+1} = ({h_j}^n a_j)/{h_j}^{n+1} =: \bar{a}_j/\bar{h}_j$.
  Allora in $D(\bar{h}_i)$ si ha $\bar{a}_i/\bar{h}_i = \bar{a}_j/\bar{h}_j$ ossia $\bar{a}_i \bar{h}_j = \bar{a}_j \bar{h}_i$. Rinominando nuovamente $a_i := \bar{a}_i, h_j := \bar{h}_j$, si ha: $f \in \sqrt{\sum_{i=1}^{r}(h_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sqrt{(h_i)}}$ e allora $f^n = \sum_{i=1}^{r} b_i h_i$ e, posto $a := \sum_{i=1}^{r} b_i a_i$, si ottiene:

$h_j a = \sum_{i=1}^r b_i a_i h_j = \sum_{i=1}^r b_i a_j h_i = a_j f^n$ e allora, posto $a/f^n = [a_j/h_j]$, si deduce $\psi(a/f^n) = s$, ossia la suriettività cercata.

□

3.2 Spazi localmente anellati e schemi affini

Definizione 3.8.

- uno *spazio anellato* è una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ con X spazio topologico e $\mathcal{O}_X$ un fascio di anelli su di esso. Un *morfismo di spazi anellati* $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è una coppia $(f, f^\sharp)$ con $f\colon X \to Y$ mappa continua tra spazi topologici e $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ morfismo di fasci di anelli su Y (mappa *pullback*).
  In particolare, ciò significa che per ogni aperto V di Y si ha un morfismo di anelli $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

- uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno *spazio localmente anellato* se la fibra $\mathcal{O}_{X,P}$ è un anello locale per $\forall P \in X$, e un morfismo di spazi anellati $(f, f^\sharp)$ è un *morfismo di spazi localmente anellati* se $f_P^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to f_*\mathcal{O}_{X,P}$ è un omomorfismo locale di anelli locali per $\forall P \in X$ (ossia manda l'ideale massimale del primo in quello del secondo). Un *isomorfismo* di spazi localmente anellati è un morfismo con inverso, ossia tale che f sia omeomorfismo e $f^\sharp$ isomorfismo.

Come osservato in precedenza, preso $V \subseteq Y$, $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induce un morfismo di anelli $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.
Passando ora alle fibre, quest'ultimo morfismo induce:

$$\mathcal{O}_{Y,f(P)} = \varinjlim_{V \ni f(P)} \mathcal{O}_Y(V) \to \varinjlim_{V \ni f(P)} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \ni f(P)} \mathcal{O}_X(W)$$

con $P \in W := f^{-1}(V)$. Passando quindi dal limite diretto fatto solo su alcuni intorni W di P al limite diretto su tutti gli intorni aperti di P, si ha $f_P^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to f_*\mathcal{O}_{X,P}$, che deve essere omomorfismo locale.

Si vuole ora definire un funtore pienamente fedele *Spec* tra anelli commutativi e spazi localmente anellati. Sia quindi :

$$\begin{array}{rcl} Spec : \{anelli\, commutativi\}^{op} & \longrightarrow & \{spazi\, localmente\, anellati\} \\ A & \longmapsto & (SpecA, \mathcal{O}) \end{array}$$

con morfismi:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : Hom(A, B) & \longrightarrow & Hom(SpecB, SpecA) \\ \varphi & \longmapsto & (f, f^\sharp) \end{array}$$

Si vuole verificare il comportamento di questa mappa. Ossia:

- sia ben definita: ossia $(SpecA, \mathcal{O})$ sia spazio localmente anellato;
- se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di anelli, allora esso induca un morfismo naturale di spazi localmente anellati $(f, f^\sharp)\colon (SpecB, \mathcal{O}_{SpecB}) \to (SpecA, \mathcal{O}_{SpecA})$;
- sia un funtore pienamente fedele, ossia se A, B sono anelli, ogni morfismo di spazi localmente anellati $SpecB \to SpecA$ sia indotto da un unico omeomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$.

Verifichiamo quindi le proprietà del funtore appena definito tramite la seguente:

Proposizione 3.9. *1. se A è un anello, allora $(SpecA, \mathcal{O})$ è spazio localmente anellato;*

2. se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di anelli, allora esso induce un omomorfsimo naturale di spazi localmente anellati $(f, f^\sharp)\colon (SpecB, \mathcal{O}_{SpecB}) \to (SpecA, \mathcal{O}_{SpecA})$;

3. se A e B sono anelli, allora ogni morfismo di spazi localmente anellati $SpecB \to SpecA$ è indotto da un unico omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$.

Dimostrazione. 1. Abbiamo visto nella sezione precedente che $SpecA$ è uno spazio topologico dotato di un fascio di anelli $\mathcal{O}$. Per il teorema 3.7, $\mathcal{O}_p \cong A_p$ è anello locale, quindi $(SpecA, \mathcal{O})$ è uno spazio localmente anellato.

2. Dato il morfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$, si definisca la candidata $f\colon SpecB \to SpecA$ tramite $f(\mathtt{p}) = \varphi^{-1}(\mathtt{p})$, per $\mathtt{p} \in SpecB$.
f è ben definita, essendo l'antiimmagine di un ideale primo ancora un ideale primo (si veda proposizione 1.27. Qui emerge l'importanza di aver scelto gli ideali primi, e non solo i massimali).
f è continua, dato che l'antiimmagine di un chiuso è chiusa: $f^{-1}(V(\mathtt{a})) = V(\varphi(\mathtt{a}))$.
Localizzando φ in $\mathtt{p}$ si ottiene $\varphi_{\mathtt{p}}\colon A_{\varphi^{-1}(\mathtt{p})} \to B_{\mathtt{p}}$, omomorfismo di anelli locali (per il punto precedente).
Per ogni $V \subseteq SpecA$ aperto e usando la definizione di $\mathcal{O}$, si ha

$$f^\sharp\colon \mathcal{O}_{SpecA}(V) \to \mathcal{O}_{SpecB}(f^{-1}(V))$$

e allora si ottiene il morfismo di fasci $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{SpecA} \to f_*(\mathcal{O}_{SpecB})$, da cui la coppia $(f, f^\sharp)$ cercata.

3. sia dato $(f, f^\sharp)\colon (SpecB, \mathcal{O}_{SpecB}) \to (SpecA, \mathcal{O}_{SpecA})$, con $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{SpecA} \to f_*\mathcal{O}_{SpecB}$ e $f\colon SpecB \to SpecA$.
Guardando le sezioni globali, si ha l'omomorfismo di anelli

$$\varphi\colon \mathcal{O}_{SpecA}(SpecA) = A \to f_*\mathcal{O}_{SpecB}(SpecA) = \mathcal{O}_{SpecB}(SpecB) = B$$

(dove si è usato il teorema 3.7).
Mostriamo quindi che φ induce $(f, f^\sharp)$, ossia che, con le notazioni precedenti, $\alpha(\varphi) = (f, f^\sharp)$. Con la costruzione fatta, questo equivale a mostrare che $f\colon SpecB \to SpecA$, $\mathtt{p} \longmapsto f(\mathtt{p}) = \varphi^{-1}(\mathtt{p})$. Passando dagli anelli agli anelli locali, si ha il seguente diagramma commutativo (con $\mathtt{p} \in B$):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_A"] & B \arrow[d, "\gamma_B"] \\ A_{f(\mathtt{p})} \arrow[r, "\varphi_{\mathtt{p}}"] & B_{\mathtt{p}} \end{tikzcd}$$

Allora $\varphi^{-1}(\mathtt{p}) = {\gamma_A}^{-1}{\varphi_{\mathtt{p}}}^{-1}(\mathtt{p}B_{\mathtt{p}}) = f(\mathtt{p})$, essendo ${\varphi_{\mathtt{p}}}^{-1}(\mathtt{p}B_{\mathtt{p}}) = f(\mathtt{p})A_{f(\mathtt{p})}$.
Allora $f^\sharp_{\mathtt{p}} = \varphi_{\mathtt{p}}$, ossia $f^\sharp$ è indotto da φ.

$\square$

Corollario 3.10. *Spec è un funtore.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 3.9, si è chiarito dove *Spec* manda gli oggetti e le mappe, e che esso è pienamente fedele. Mancano le seguenti due proprietà:

- *(identità)* $(f, f^\sharp) = (id, id^\sharp)$, essendo $f = \varphi^{-1} = id$;
- *(composizione)* sia $\psi \circ \varphi\colon A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ e $Spec\,\psi =: g$, $Spec\,\varphi =: f$.
  Allora si ha: $f \circ g\colon Spec\,C \xrightarrow{g} Spec\,B \xrightarrow{f} Spec\,A$.
  Si deve mostrare $Spec(\psi \circ \varphi) = (Spec\,\varphi) \circ (Spec\,\psi)$, e questo è vero essendo:
  $Spec(\psi \circ \varphi) = (\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} = f \circ g = (Spec\varphi) \circ (Spec\psi)$.

$\square$

Introduciamo ora una nuova nozione, quella di schema affine, di cui studieremo i morfismi e che verrà usata per costruire gli schemi proiettivi.

Definizione 3.11. Dato uno spazio topologico X e un fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ su di esso, uno *schema affine* $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anellato isomorfo allo spettro $(SpecA, \mathcal{O}_{SpecA})$ di un qualche anello A.
Si dice *schema* uno spazio localmente anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ tale che ogni suo

punto possegga un intorno aperto U tale che $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ sia uno schema affine. Un *morfismo di schemi* è un morfismo di spazi localmente anellati (tra due schemi visti come spazi localmente anellati).

Nella definizione appena data di schema $(X, \mathcal{O}_X)$, ci si riferisce a X come *spazio topologico soggiacente* e a $\mathcal{O}_X$ come *fascio strutturale*.
Osserviamo che uno schema affine è un particolare schema (prendendo $U = X$), e che uno spettro di un anello è un particolare schema affine.
Vediamo ora alcuni esempi, rimandando alla retta e al piano affine per ulteriori esempi di schemi affini.

Esempio 3.12. *(SpecK)*
Preso un campo K, allora $Spec\,K$ è uno schema affine, con spazio topologico soggiacente (0) (l'unico ideale primo proprio, essendo K campo) e fascio strutturale dato da K stesso.

Esempio 3.13. *(anello di valutazione discreta)*
Dato un anello di valutazione discreta R, esso ha un unico ideale massimale $\mathtt{m}$, e un unico ideale primo non massimale $\{0\}$. Allora si ha $T := SpecR = \{\mathtt{m}, \{0\}\} = \{t_0, t_1\}$, dove si è posto $t_0 = \mathtt{m}$ (chiuso: $V(\mathtt{m}) = \{\mathtt{m}\}$) e $t_1 = \{0\}$ (aperto e denso: $V(\{0\}) = SpecR$).
Localizzando nei due punti, si ottengono gli anelli locali $R_0 := K = Frac(R)$ (campo delle frazioni di R) e $R_{\mathtt{m}} := \{a/f : a \in R,\ f \notin \mathtt{m}\} = R$.
Dall'esempio 3.12 sappiamo che lo spettro di K è costituito da un solo punto. Sia quindi $SpecK = \{t\}$.
Studiamo ora i morfismi di spazi localmente anellati. Si consideri:

$$\begin{array}{rcl}(f, f^\sharp) : SpecK = \{t\} & \longrightarrow & SpecR = T = \{t_0, t_1\} \\ t & \longmapsto & t_1\end{array}$$

Essa è indotta dal morfismo di anelli $\varphi\colon R \hookrightarrow K$, inclusione di R nel suo campo delle frazioni. Guardando ai fasci di anelli:
$f^\sharp\colon \mathcal{O}_{SpecR} \to f_*\mathcal{O}_{SpecK}$, e calcolando sulle sezioni globali si ha $f^\sharp(SpecR)\colon R \to K$ (essendo $\mathcal{O}_{SpecR}(SpecR) = R$ e $\mathcal{O}_{SpecK}(f^{-1}SpecR) = \mathcal{O}_{SpecK}(SpecK) = K$).
L'unico altro morfismo possibile sarebbe:

$$\begin{array}{rcl}(f, f^\sharp) : SpecK = \{t\} & \longrightarrow & SpecR = T = \{t_0, t_1\} \\ t & \longmapsto & t_0\end{array}$$

ma esso non è indotto da alcun morfismo di anelli $\varphi\colon R \to K$, quindi non può essere un morfismo di spazi localmente anellati.
Infatti, per quanto visto nella dimostrazione della proposizione 3.9, se esistesse una tale φ allora si dovrebbe avere $\varphi^{-1}(\mathtt{p}) = f(\mathtt{p})$ e dovrebbe commutare

il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ R_{\varphi^{-1}(0)} \arrow[r, "f_0^\sharp"] & K_0 = K \end{tikzcd}$$

e allora necessariamente $f(\{t\}) = \varphi^{-1}(t) = \{0\} = t_1$ e allora l'unico morfismo accettabile è il primo preso in analisi.

Con la nozione di schema affine, possiamo ora ottenere un importante risultato di equivalenza tra categorie:
restringendo il funtore *Spec* all'immagine, e considerando il funtore Γ che ad uno schema associa le sezioni globali del suo fascio strutturale, si hanno due funtori aggiunti che inducono un'equivalenza di categorie quando li restringiamo agli schemi affini, ossia Γ è il quasi-inverso di *Spec*. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 3.14. *Il funtore*

$$Spec : \{anelli\, commutativi\}^{op} \rightarrow \{schemi\, affini\}$$

è un'equivalenza di categorie, con quasi-inverso il funtore

$$\Gamma : \{schemi\, affini\} \rightarrow \{anelli\, commutativi\}^{op},\ (X, \mathcal{O}_X) \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

Dimostrazione. Posto $F := Spec$ e $G := \Gamma$, si ha:
$G \circ F \cong id$ per 3.9, poichè $A \mapsto (SpecA, \mathcal{O}) \mapsto \Gamma(SpecA, \mathcal{O}) = A$, dove l'ultima uguaglianza discende dalla proposizione 3.7.
$F \circ G \cong id$ poichè $X \cong (SpecA, \mathcal{O}_{specA}) \mapsto \mathcal{O}_X(X) \cong A \mapsto (SpecA, \mathcal{O}_{specA})$ □

Estendendo i funtori *Spec* e Γ a tutta la categoria degli schemi, si ottiene quanto segue:

Proposizione 3.15. *Siano A un anello, $(X, \mathcal{O}_X)$ uno schema, $f\colon X \rightarrow SpecA$ un morfismo con associata una mappa di fasci $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{SpecA} \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. Guardando le sezioni globali si ha un omomorfismo di anelli $A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Allora la mappa naturale*

$$\alpha\colon Hom_{Sch}(X, SpecA) \rightarrow Hom_{Ring}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

è una biiezione.

Dimostrazione. Per mostrare che α è biiezione si costruisce esplicitamente l'inversa, passando dagli schemi agli schemi affini, per i quali è nota la proposizione 3.9, grazie al buon incollamento dei morfismi.
Essendo X uno schema, sia $U_i = Spec\, B_i$, $i \in I$, un suo ricoprimento aperto affine. Sia poi $g\colon A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ e si componga con le restrizioni $g_i'\colon \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{O}_X(Spec\, B_i) = B_i$ in modo da ottenere i morfismi di anelli $g_i := g_i' \circ g\colon A \to B_i$. Questi inducono, per il secondo punto della proposizione 3.9, dei morfismi di schemi affini $f_i\colon U_i \to SpecA$, e si può verificare che, $\forall i, j$, le restrizioni di f_i e f_j a $U_i \cap U_j$ coincidono. Quindi i morfismi f_i si incollano e definiscono un morfismo $f\colon X \to SpecA$.
Con le notazioni in uso, si ha:

$$\alpha^{-1}\colon Hom_{Ring}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \to Hom_{Sch}(X, SpecA),\ g \mapsto f$$

ed essa è l'inversa cercata. □

3.3 Schemi proiettivi

Per motivare l'introduzione della nozione di *schema proiettivo*, vediamo un modo di ottenere, a partire da due schemi affini, un nuovo schema affine.

Esempio 3.16. *(incollamento)*
Si considerino due schemi X_1, X_2 e due loro aperti isomorfi $U_1 \subseteq X_1$ e $U_2 \subseteq X_2$, con isomorfismo $\varphi\colon (U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1}) \to (U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$.
Presa l'unione disgiunta $X_1 \sqcup X_2$, si consideri su di essa la relazione di equivalenza $x_1 \sim \varphi(x_1)$, ossia si identifichino i punti dei due aperti. Detto $X = X_1 \sqcup X_{2/\sim}$ l'incollamento (o *somma amalgamata*) dei due schemi, anch'esso è uno schema.
Dette infatti $\iota_1\colon X_1 \hookrightarrow X$ e $\iota_2\colon X_2 \hookrightarrow X$ le due inclusioni, si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & X_1 \arrow[d, "\iota_1"] \\ U_2 \subseteq X_2 \arrow[r, "\iota_2"] & X = X_1 \sqcup X_{2/\sim} \end{tikzcd}$$

e sui fasci di anelli, si hanno i seguenti morfismi:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \longrightarrow & \iota_{1*}\mathcal{O}_{X_1}(V) \\ \langle s_1, s_2 \rangle & \longmapsto & s_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \longrightarrow & \iota_{2*}\mathcal{O}_{X_2}(V) \\ \langle s_1, s_2 \rangle & \longmapsto & s_2 \end{array}$$

con $V \subseteq X$. Definendo quindi:
$\mathcal{O}_X(V) = \{\langle s_1, s_2 \rangle\colon s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}({\iota_1}^{-1}V),\ s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}({\iota_2}^{-1}V),\ \varphi(s_1|_{{\iota_1}^{-1}(V) \cap U_1}) = s_2|_{{\iota_2}^{-1}(V) \cap U_2}\}$ si ottiene uno schema X.

Esempio 3.17. *(esempi di incollamento)*

- *(schema che non è schema affine: retta affine con origine raddoppiata)*: siano $X_1 = \mathbb{A}^1_K = X_2$ e $U_1 = \mathbb{A}^1_K - \{0\} = U_2$ i due aperti. Incollandoli tramite la mappa identità $\varphi\colon U_1 \to U_2$, si ottiene una retta affine con il punto 0 raddoppiato.
  Questo è un esempio di uno schema che *non è separato*, ossia tale per cui il morfismo diagonale $\delta\colon X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ non sia chiuso.

- *(schema proiettivo: retta proiettiva)*: siano $X_1 = \mathbb{A}^1_K = \mathbb{P}^1_K - \{0\}$ (coordinate $[t:1]$, con $t = x_0/x_1$) e $X_2 = \mathbb{A}^1_K = \mathbb{P}^1_K - \{\infty\}$ (coordinate $[1:x]$, con $x = x_1/x_0$) , con passaggo di coordinate $t = 1/x$ e con $0 = [1:0], \infty = [0:1]$.
  Sia quindi $U = (\mathbb{P}^1_K - \{0\}) \cap (\mathbb{P}^1_K - \{\infty\}) = \mathbb{P}^1_K - \{0, \infty\}$ e $U_1 = U = U_2$. Allora incollando si ottiene $\mathbb{P}^1_K$. Non si tratta di uno schema affine, infatti:
  le sezioni globali corrispondono alle sezioni di X_1 e X_2 che coincidono sull'intersezione. Una sezione su X_1 è un polinomio $f(t)$, mentre su X_2 è un polinomio $g(1/t)$. Poichè si vuole l'incollamento sull'intersezione, imponendo $f(t) = g(1/t)$ si ottengono come unici polinomi le costanti k. Allora le sezioni globali sono k, ma se $\mathbb{P}^1_K$ fosse affine si dovrebbe ottenere un solo punto, come visto per lo spettro di un generico campo (esempio 3.12).

Gli esempi precedenti conducono alla definizione di una particolare classe si schemi: gli schemi proiettivi.
Analogamente a quanto fatto con la costruzione degli schemi affini, definiamo in sequenza l'insieme, la sua topologia e il suo il fascio di anelli.

Sia quindi S un anello graduato (si veda 1.32) e sia $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$. Allora si definisce $ProjS$ come l'insieme di tutti gli ideali primi omogenei $\mathtt{p}$ che non contengono tutto S_+ (l'accortezza rispetto al caso affine risiede nell'omogeneità).

Esempio 3.18. Nel caso dell'anello graduato $S = K[x_0, x_1]$, si ha $S_d = \{p(x_0, x_1) \in K[x_0, x_1]\colon p \text{ omogeneo di grado d}\}$ e $ProjK[x_0, x_1] = \mathbb{P}^1_K$.

Su $ProjS$ definiamo una topologia prendendo come chiusi i sottoinsiemi della forma $V(\mathtt{a}) = \{\mathtt{p} \in ProjS\colon \mathtt{p} \supseteq \mathtt{a}\}$, poiché vale l'analogo del lemma 3.1.
In particolare, se $f \in S_+$ si definisce $D_+(f) = \{\mathtt{p} \in ProjS\colon f \notin \mathtt{p}\}$ (aperto).

Infine si definisce il fascio di anelli $\mathcal{O}$ su $ProjS$: per ogni $\mathtt{p} \in ProjS$, sia $S_{\mathtt{p}}$ l'anello degli elementi di grado zero nel localizzato $T^{-1}S$, con T il sistema moltiplicativo dato dagli elementi omogenei di S non in $\mathtt{p}$. Per ogni aperto

$U \subseteq ProjS$ si definisce $\mathcal{O}(U)$ come l'insieme delle funzioni $s\colon U \to \sqcup_{\mathfrak{p}\in U} S_{\mathfrak{p}}$ tali che $s(\mathfrak{p}) \in S_{\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p}$, e tale che s sia localmente quoziente di elementi di S, ossia: $\forall \mathfrak{p} \in U, \exists \mathfrak{p} \in V \subseteq U, \exists a, f \in S$ (omogenei) tali che $\forall \mathfrak{q} \in V, f \notin \mathfrak{q}$, sia $s(\mathfrak{q}) = a/f$ in $S_{(\mathfrak{q})}$.

Proposizione 3.19. *Sia S un anello graduato. Allora valgono le seguenti:*

1. *per ogni $\mathfrak{p} \in ProjS$, la fibra è isomorfa all'anello locale, ossia: $\mathcal{O}_p \cong S_{\mathfrak{p}}$;*

2. *per ogni $f \in S_+$, si ha che $D_+(f)$ è aperto in $ProjS$, che questi aperti, al variare di f, ricoprono $ProjS$ e che $(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \cong SpecS_{(f)}$ come isomorfismo di spazi locamente anellati;*

3. *$ProjS$ è uno schema.*

Bibliografia

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford, Addison-Wesley Publishing Company(1969), ix+128 pp.

[2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York (1977), pp. 8–11, 60–80.

[3] D. Mumford, *Can one explain schemes to biologists*, reperibile al link: https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html.

[4] A. Orsatti, *Una introduzione alla teoria dei moduli*, Aracne Editrice, (1995), pp. 211–226.

[5] R. Vakil, *The Rising Sea-Foundations of Algebraic Geometry*, (2010), pp. 211–226, note reperibili al link: https://math.stanford.edu/ vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf.