

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Vortici quantizzati e quantizzazione del flusso nei superconduttori

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureanda

Silvia Pigozzi

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

In questa tesi vengono inizialmente analizzate le caratteristiche fenomenologiche della superconduttività. Esse sono dovute alla formazione di coppie di Cooper, stati legati di due elettroni, che si comportano come bosoni e possono quindi occupare lo stesso stato di singola particella, formando un condensato di Bose-Einstein. Una delle caratteristiche più peculiari dei superconduttori, nota come "effetto Meissner", consiste nell'espellere dal loro interno il campo magnetico quando vengono immersi in una regione in cui esso è non nullo. Per i superconduttori di tipo II, tuttavia, non viene completamente espulso e si verifica il fenomeno della quantizzazione del flusso. Nella seconda parte della tesi vengono perciò trattati i vortici quantizzati e la quantizzazione del flusso per superconduttori di tipo II immersi in un campo magnetico, sulla base della teoria di Ginzburg-Landau. In particolare si analizza come questo fenomeno sia intrinsecamente legato al gradiente della fase della funzione d'onda che descrive le coppie bosoniche.

Indice

1	Introduzione	7
2	La conduttività dei metalli e il modello di Drude	8
3	Fenomenologia della superconduttività	12
3.1	La resistività nulla dei superconduttori	12
3.2	L'effetto Meissner-Ochsenfeld	13
4	La teoria dei London	14
4.1	La formulazione teorica dell'effetto Meissner e la lunghezza di penetrazione di London	16
4.2	La quantizzazione del flusso del campo magnetico	17
5	La teoria di Ginzburg-Landau	20
5.1	La teoria di Ginzburg-Landau in presenza di un campo magnetico	23
5.2	Classificazione dei superconduttori	25
5.3	Il quanto del flusso del campo magnetico	28
6	Conclusione: i vortici quantizzati	30
	Bibliografia	33

1 Introduzione

La superconduttività è stata scoperta nel 1911 dal fisico olandese Heike Kamerlingh-Onnes. Studiando la dipendenza della resistività elettrica del mercurio in funzione della temperatura, trova che attorno ai 4K, detta temperatura critica, la resistività del materiale si annullava improvvisamente. Ciò che stava avvenendo era una transizione di fase verso uno stato caratterizzato da una resistenza elettrica nulla, che viene perciò chiamato "superconduttivo". Successivamente il fenomeno della superconduttività è stato osservato in numerosi altri metalli come stagno, piombo, alluminio e altri. Oltre alla perdita totale della resistività (paragrafo 3.1), l'altro aspetto fenomenologico che caratterizza un materiale superconduttore è l'effetto Meissner-Ochsenfeld, osservato per la prima volta nel 1933 da Walther Meissner e Robert Ochsenfeld che consiste nell'espulsione del campo magnetico dall'interno dei superconduttori (paragrafo 3.2). In questa tesi si vogliono motivare i risultati sperimentali che caratterizzano la superconduttività utilizzando i metodi della fisica teorica. Inizialmente, nel capitolo 2, si studia il modello di Drude del 1900 per descrivere le equazioni che regolano il comportamento degli elettroni di conduzione quando i metalli vengono immersi in un campo elettrico esterno. Successivamente, nel capitolo 4, con la teoria dei fratelli London del 1935, a partire dal modello di Drude, si propone una teoria fenomenologica che descriva le proprietà elettrodinamiche di un superconduttore. Tra i maggiori risultati ottenuti dai fratelli London vi è la spiegazione teorica dell'effetto Meissner, mostrata nel paragrafo 4.1 attraverso la derivazione della cosiddetta "lunghezza di penetrazione di London", la scala di distanza dalla superficie del superconduttore oltre la quale il campo magnetico si annulla. La teoria dei London non risulta però pienamente soddisfacente perché si basa su ipotesi restrittive riguardo alla densità della componente di superfluido; in particolare essa è assunta costante, uniforme e indipendente da fattori esterni, quali, ad esempio, la temperatura. La teoria di Ginzburg e Landau del 1950, riportata nel capitolo 5, supera questi ostacoli. Essa studia la transizione di fase cui va incontro un sistema superconduttivo attraverso il metodo variazionale. Si scrive il funzionale che descrive il potenziale termodinamico del sistema in funzione del cosiddetto "parametro d'ordine", un qualche parametro fisico che assume valore nullo in uno dei due stati fisici che caratterizzano il sistema e non nullo nell'altro (nel caso in esame i due stati sono quello normale e quello superconduttivo, rispettivamente). Ponendo nulla la variazione dell'azione si ricavano le equazioni che permettono di descrivere il sistema. Nel caso della transizione tra lo stato normale e quello superconduttivo non si sapeva bene inizialmente cosa rappresentasse il parametro d'ordine, chiamato Ψ . Fu solo nel 1957, con la teoria di Bardeen, Cooper e Schrieffer che si è compreso che esso rappresentava la funzione d'onda dello stato superconduttivo, il cui modulo quadro è intrinsecamente legato alla densità delle coppie di elettroni che caratterizzano la parte superconduttiva. La teoria di Ginzburg-Landau permette di distinguere i superconduttori in base al loro comportamento in presenza di un campo magnetico: i superconduttori di tipo I e di tipo II (paragrafo 5.2). L'effetto Meissner viene osservato solo nei superconduttori di tipo I: essi espellono completamente il campo magnetico dal loro interno, che quindi risulta essere nullo. Per i superconduttori di tipo II, aumentando a mano a mano il campo magnetico esterno, inizialmente anch'essi mostrano l'effetto Meissner, poi si registra all'interno del superconduttore un valore del campo magnetico finito non nullo. Quando viene raggiunto all'interno del materiale lo stesso valore del campo esterno allora il sistema passa allo stato normale. Per i superconduttori di tipo II si calcola il flusso del campo magnetico che li attraversa, e si mostra che esso è discreto. In particolare si discute come il quanto del flusso del campo magnetico sia intrinsecamente legato al gradiente della fase della funzione d'onda che rappresenta lo stato superconduttivo del sistema (paragrafo 5.3).

2 La conduttività dei metalli e il modello di Drude

Si vuole studiare la risposta di un sistema conduttore, un cristallo periodico, soggetto ad una perturbazione esterna rappresentata da un campo elettrico. Le funzioni d'onda degli elettroni del solido cristallino hanno la forma¹

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1)$$

dove $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ è una funzione periodica tale per cui $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ con \mathbf{R} vettore traslazione del reticolo diretto, \mathbf{k} è il vettore d'onda appartenente al reticolo reciproco e n è il numero quantico che conta le bande elettroniche.

Dal momento che gli elettroni sono fermioni rispettano la statistica di Fermi-Dirac e la probabilità di occupazione di uno stato ad energia $\epsilon_{n\mathbf{k}}$ alla temperatura T è

$$f_0(\epsilon_{n\mathbf{k}}) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_{n\mathbf{k}} - \mu}{k_B T}} + 1} \quad (2)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e μ è il potenziale chimico determinato dalla condizione che il numero di elettroni deve essere pari a:

$$N = 2 \sum_n \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_{n\mathbf{k}} - \mu}{k_B T}} + 1} \quad (3)$$

dove il 2 è un fattore dovuto alla molteplicità di spin, ovvero al fatto che ciascun elettrone all'interno delle bande di conduzione può avere spin $s = \pm \frac{1}{2}$. La sommatoria viene eseguita sulle bande elettroniche n occupate e sui vettori d'onda \mathbf{k} appartenenti alla cella primitiva del reticolo reciproco che si suppone essere un quadrato di lato a . Il vettore d'onda è tale per cui $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a} \mathbf{i}$ con $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^3$. L'intervallo

$$\Delta k = k_{i+1} - k_i = \frac{2\pi}{a} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} dk \rightarrow 0 \quad (4)$$

diventa una variazione infinitesima se considero un conduttore perfetto, e quindi infinitamente esteso. Perciò, si estende la sommatoria su \mathbf{k} ad integrale:

$$\sum_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i}} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3 i = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \quad (5)$$

essendo $V = a^3$ il volume del cristallo. La densità di elettroni deve perciò essere pari a:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_{n\mathbf{k}} - \mu}{k_B T}} + 1} d^3 k \quad (6)$$

Si suppone di essere nella condizione tale per cui $k_B T \ll \mu$, dove la funzione di Fermi-Dirac (2) diventa

$$f_0(\epsilon_{n\mathbf{k}}) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \theta(\epsilon_{n\mathbf{k}} - \mu) = \begin{cases} 1 & \text{se } \epsilon_{n\mathbf{k}} < \epsilon_F = \mu(T \rightarrow 0) \\ 0 & \text{se } \epsilon_{n\mathbf{k}} > \epsilon_F = \mu(T \rightarrow 0) \end{cases} \quad (7)$$

dove con $\theta(\epsilon_{n\mathbf{k}} - \mu)$ si è indicata la funzione di Heaviside. Quando il sistema viene eccitato alla temperatura T , la conduzione metallica è dovuta alle bande con energia $\epsilon_F - k_B T < \epsilon_{n\mathbf{k}} < \epsilon_F + k_B T$; gli elettroni vengono promossi ai livelli energetici con energia $\epsilon_{n\mathbf{k}} > \epsilon_F$ lasciando lacune negli stati con energia $\epsilon_{n\mathbf{k}} < \epsilon_F$.

Si vuole calcolare la corrente dovuta agli elettroni promossi in banda di conduzione quando viene applicato al sistema un campo elettrico esterno.

¹Il teorema di Bloch afferma che, se l'hamiltoniana che descrive il sistema cristallino ha un termine potenziale periodico, cioè $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ con \mathbf{R} vettore di traslazione appartenente al reticolo diretto, allora esiste una funzione periodica $u(\mathbf{r})$ | $u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ in modo tale che la funzione d'onda che descrive gli elettroni abbia la forma $\Psi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, con \mathbf{k} vettore d'onda del singolo elettrone, appartenente al reticolo reciproco.

Nello spazio delle fasi (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , con $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ momento del cristallo, si considera la funzione densità di stati $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$. Per il teorema di Liouville² la derivata temporale totale di tale densità deve essere nulla:

$$\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \dot{\mathbf{k}} = 0 \quad (8)$$

Per le equazioni di Hamilton, se l'hamiltoniana di singolo elettrone è $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$, si ha:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \\ \dot{\mathbf{k}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\hbar} \nabla V = \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \end{cases} \quad (9)$$

essendo $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ la forza elettrica sentita dall'elettrone.

Sostituendo le equazioni di Hamilton (9) in (8) si ottiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) f = 0 \quad (10)$$

una cui soluzione è $f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \phi\left(\mathbf{k} + \frac{e\mathbf{E}}{\hbar}t\right)$ con ϕ funzione differenziabile. Dal momento che questa soluzione non dipende dal vettore posizione \mathbf{r} ($\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0$) è uniforme nello spazio. Tuttavia, questo modello risulta essere incompatibile con la realtà: se, a partire dall'espressione della forza elettrica subita dal singolo elettrone si calcola l'evoluzione temporale del vettore d'onda \mathbf{k} si ottiene una legge lineare nel tempo:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} \rightarrow \mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(0) - e \frac{\mathbf{E}}{\hbar} t \quad (11)$$

Di conseguenza si ha una crescita indefinita nel tempo del momento $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ che descrive l'accelerazione libera degli elettroni che portano ad avere una conducibilità non finita. Chiaramente questa descrizione non è accettabile. Fisicamente accade che l'interazione degli elettroni di conduzione con altri elettroni, con i fononi e con le impurezze e i difetti del cristallo, limita la crescita indefinita nel tempo di $\mathbf{k}(t)$. Questo fenomeno viene descritto matematicamente aggiungendo all'equazione (10) il funzionale $S[f]$, che rappresenta il termine di scattering:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) f = -S[f] \quad (12)$$

Supponendo che, in assenza di forze esterne, la funzione densità $f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ raggiunga l'equilibrio $f_0(\mathbf{k})$ che, come dimostrato, è uniforme nello spazio, in un tempo τ , il funzionale $S[f]$ assume la forma:

$$S[f] = \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) - f_0(\mathbf{k})}{\tau} \quad (13)$$

Si vuole perciò trovare una soluzione $f = f(\mathbf{k})$ che sia uniforme nello spazio e stazionaria (cioè tale per cui $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$):

$$-\frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \frac{\partial f(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{f_0(\mathbf{k}) - f(\mathbf{k})}{\tau} \rightarrow f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k}) + \frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar} \frac{\partial f(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (14)$$

Inserendo nell'ultimo termine, al posto di $f(\mathbf{k})$, l'espressione (14) e troncadola al primo ordine, si ottiene:

$$f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k}) + \frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar} \frac{\partial f_0(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (15)$$

Ma il termine a destra non è altro che l'espansione di Taylor, per campi elettrici di piccola entità, di $f_0\left(\mathbf{k} + \frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar}\right)$ troncata al primo ordine in \mathbf{E} :

$$f(\mathbf{k}) = f_0\left(\mathbf{k} + \frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar}\right) \quad (16)$$

²Teorema di Liouville:

Si consideri un sistema meccanico e lo spazio delle fasi (\mathbf{r}, \mathbf{p}) ad esso associato, in modo tale che ogni punto di questo spazio 2-dimensionale corrisponda ad un definito stato del sistema. Allora l'elemento di volume $d\rho = d\mathbf{r}_1 \cdot \dots \cdot d\mathbf{r}_n \cdot d\mathbf{k}_1 \cdot \dots \cdot d\mathbf{k}_n$ in questo spazio con n gradi di libertà, risulta essere costante lungo ogni traiettoria nello spazio delle fasi.

La funzione densità $f(\mathbf{k})$ è dunque la funzione densità all'equilibrio

$$f_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu}{k_B T}} + 1} \quad (17)$$

con il vettore d'onda \mathbf{k} traslato della quantità $-\frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar}$.

Si può quindi procedere al calcolo della densità di corrente elettrica \mathbf{j} , supponendo di trovarsi nella condizione per cui $k_B T \ll \mu$ (si veda (7)) e, per semplicità, con una sola banda di conduzione (perciò si omette la sommatoria sull'indice n):

$$\mathbf{j} = -e \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{2}{(2\pi)^3} \underbrace{\frac{\hbar\mathbf{k}}{m}}_{\mathbf{v}_e} f_0\left(\mathbf{k} + \frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar}\right) \quad (18)$$

essendo \mathbf{v}_e la velocità dell'elettrone. Espandendo poi in serie di Taylor $f_0\left(\mathbf{k} + \frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar}\right)$ si ottiene:

$$\mathbf{j} = \underbrace{-e \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} f_0(\mathbf{k})}_{=0} - e \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} \frac{e\mathbf{E}\tau}{\hbar} \frac{\partial f_0(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (19)$$

dove il primo integrale si annulla perché si sta integrando una funzione dispari sullo spazio \mathbb{R}^3 . Questo è vero perché $f_0(\mathbf{k})$ dipende da \mathbf{k} solo attraverso $\epsilon_{\mathbf{k}}$ che, utilizzando l'espressione dell'energia per una particella libera, è

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2|\mathbf{k}|^2}{2m} \quad (20)$$

Integrando per parti, passando alla scrittura in componenti dei vettori si ha:

$$j_\alpha = \frac{e^2\tau E_\beta}{m} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{2}{(2\pi)^3} \underbrace{\frac{\partial k_\alpha}{\partial k_\beta}}_{=\delta_\alpha^\beta} f_0 \quad (21)$$

dove il primo termine dell'integrazione per parti è nullo perché, quando $k \rightarrow \infty$ si ha che $\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2|\mathbf{k}|^2}{2m} \rightarrow \infty$ e perciò $f_0(\mathbf{k}) \sim \theta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) = 0$. Ritornando alla scrittura vettoriale

$$\mathbf{j} = \frac{e^2\tau\mathbf{E}}{m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{2}{(2\pi)^3} f_0}_n = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \quad (22)$$

Da cui si ritrova la formula di Drude per la conduttività

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (23)$$

il cui inverso è la resistività totale

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau} \quad (24)$$

La formula generale per la conduttività, che verrà in seguito ricavata nel capitolo 4, è

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (25)$$

di cui (23) ne è l'espressione in presenza di campi elettrici costanti e correnti elettriche continue, cioè con frequenza $\omega = 0$.

L'intervallo temporale τ ha una dipendenza dalla temperatura che varia al variare del fenomeno di scattering cui vanno incontro gli elettroni. Lo scattering degli elettroni con le impurezze del cristallo di fatto non dipende dalla temperatura, l'interazione con i fononi dà un contributo $\tau_{el-ph}^{-1} \propto T^5$, quella tra elettroni $\tau_{el-el}^{-1} \propto T^2$.

La resistività totale (24) è data dalla somma dei singoli contributi:

$$\rho = \frac{m}{ne^2} \tau^{-1} = \frac{m}{ne^2} (\tau_{imp}^{-1} + \tau_{el-ph}^{-1} + \tau_{el-el}^{-1}) \quad (26)$$

Perciò a basse temperature si ha

$$\rho \sim \rho_0 + aT^2 \quad (27)$$

dove ρ_0 è la resistività residua del cristallo che dipende dalla concentrazione delle sue impurità.

Nel 1911 Kammerling Omnes, nel corso di esperimenti che miravano a validare la teoria di Drude misurando la resistività di diversi materiali a bassa temperatura, scopre lo stato superconduttivo. Mentre i campioni di oro o platino mostravano una resistività che ben rispettava la legge (27), alcune sostanze, come il mercurio, che essendo costituito da poche impurità ci si aspettava che seguisse ottimamente il modello teorico di Drude, mostrano invece una resistività nulla al di sotto di una certa temperatura critica T_c , che per il mercurio è di 4K. La linea verticale in rosso nella figura 1 mostra una vera e propria transizione di fase, in cui il campione passa dall'essere un conduttore all'essere un superconduttore.

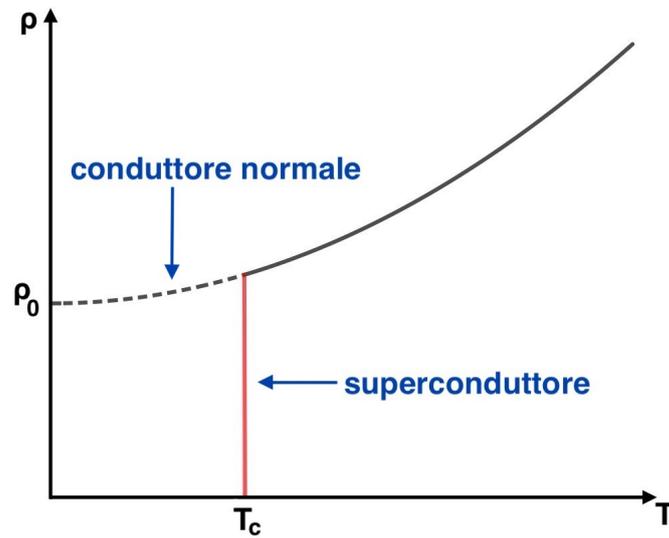


Figura 1. Resistività ρ in funzione della temperatura T

3 Fenomenologia della superconduttività

3.1 La resistività nulla dei superconduttori

Sperimentalmente si dimostra che la resistività dei superconduttori è esattamente pari a zero, e che quindi hanno una conducibilità infinitamente grande, mostrando la presenza di correnti persistenti al loro interno.

Per mostrare come queste correnti persistenti possono essere indotte, si consideri un anello superconduttore e lo si faccia attraversare da una corrente I . Essa dà origine ad un campo magnetico \mathbf{B} , il cui flusso ϕ attraverso il centro dell'anello è

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (28)$$

dove $d\mathbf{S}$ è l'elemento d'area infinitesimo ortogonale al piano dell'anello. Derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (29)$$

Inserendo l'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (30)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema di Stokes, passando all'integrale circolare sul bordo ∂S della superficie.

Dal momento che per un superconduttore la conducibilità σ è infinita, affinché l'espressione (22) abbia senso fisico, ovvero affinché la corrente che scorra sia finita, è necessario che il campo elettrico sia nullo in ogni punto all'interno dell'anello. Di conseguenza

$$\mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (31)$$

cioè il flusso del campo magnetico è una funzione costante del tempo.

Sperimentalmente si utilizza questo risultato per ottenere le correnti persistenti: si parte con un anello superconduttore nel suo stato normale, cioè ad una temperatura $T > T_c$, si applica un campo magnetico esterno \mathbf{B}_{est} e poi si raffredda il sistema fino ad avere $T < T_c$, cioè l'anello passa allo stato superconduttivo. È necessario partire dal superconduttore nel suo stato normale in modo tale che il campo magnetico possa attraversarlo senza venire da esso espulso (si veda il paragrafo 3.2). Il flusso attraverso l'anello è

$$\Phi_{est} = \int_S \mathbf{B}_{est} \cdot d\mathbf{S} \quad (32)$$

ed è una funzione costante del tempo, in particolare lo è anche se il campo esterno viene spento, cioè se $\mathbf{B}_{est}=0$. L'unico modo che ha l'anello superconduttore per mantenere costante il flusso nel tempo è quello di generare un campo magnetico \mathbf{B} all'interno dell'anello attraverso una corrente elettrica I che vi circoli attorno. Questa corrente deve essere tale da dare un flusso $\Phi = \Phi_{est}$. Dal momento che questo è costante nel tempo, anche la corrente lo è e per questo viene detta "persistente". Esperimenti della durata di anni, hanno mostrato la costanza delle correnti persistenti, che hanno portato alla conclusione che, non essendoci dissipazione, nello stato superconduttivo la resistività di questi materiali è esattamente nulla.

3.2 L'effetto Meissner-Ochsenfeld

La presenza di queste correnti persistenti spiega l'effetto Meissner-Ochsenfeld, che consiste nell'espulsione, da parte di un materiale superconduttore, di un debole campo magnetico esterno dal proprio interno. Questo fenomeno viene utilizzato sperimentalmente per provare che un materiale è nel suo stato superconduttivo perché è molto più facile verificare che espella un campo magnetico esterno rispetto al mostrare che ha resistività nulla: non è infatti necessario collegare apparati elettrici al campione per misurare le correnti che scorrono al suo interno.

Si consideri quindi un campione superconduttore, che si trova ad una temperatura superiore a quella critica ($T > T_c$) immerso in un campo magnetico esterno \mathbf{B}_{est} , il quale penetra all'interno del materiale che si trova nel suo stato conduttivo normale. Se si raffredda il sistema portandolo ad una temperatura $T < T_c$ il campo magnetico viene espulso dall'interno del campione, mostrando quindi l'effetto Meissner. Il campo magnetico si mantiene nullo all'interno del superconduttore a causa delle correnti persistenti che producono un campo uguale e opposto a quello applicato esternamente.

L'effetto Meissner-Ochsenfeld trova un riscontro teorico nella teoria dei fratelli London (capitolo 4).

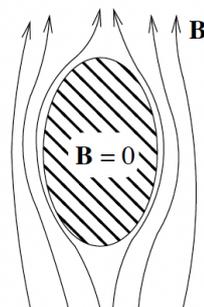


Figura 2. Effetto Meissner; immagine da [1]

4 La teoria dei London

Nel 1935 Fritz e Heinz London propongono una teoria che spieghi gli effetti fenomenologici della superconduttività, quali la resistività nulla e l'effetto Meissner-Ochsenfeld. Essi assumono che la concentrazione totale n degli elettroni di conduzione all'interno del materiale superconduttivo sia data da

$$n = n_s + n_n \quad (33)$$

dove n_s rappresenta la densità della frazione di elettroni che diventano superfluidi, mentre n_n la densità degli elettroni che restano nello stato normale.

Questi ultimi generano una corrente

$$\mathbf{j}_n = \sigma_n \mathbf{E} \quad (34)$$

con la conducibilità data dalla legge di Drude

$$\sigma_n = \frac{n_n e^2 \tau}{m} \quad (35)$$

dove τ è il tempo di smorzamento che intercorre tra due eventi di scattering. Gli elettroni della fase superconduttiva si muovono invece senza dissipazione, cioè con $\tau = \infty$.

L'ipotesi della teoria dei London trova un riscontro analitico a partire dal modello di Drude:

$$\mathbf{j}_n(\omega) e^{-i\omega t} = \sigma_n(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (36)$$

La legge di Drude è stata scritta in notazione complessa usando una corrente elettrica alternata $\mathbf{j}_n(t) = \text{Re}[\mathbf{j}_n(\omega) e^{-i\omega t}]$ con ω che rappresenta la sua frequenza finita, indotta nel metallo a causa dal campo elettronico dipendente dal tempo $\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t}]$, con

$$\mathbf{j}_n(\omega) = -n_n e \mathbf{v}(\omega) = -n_n e \frac{\mathbf{p}(\omega)}{m} \quad (37)$$

essendo $\mathbf{p}(t) = \text{Re}[\mathbf{p}(\omega) e^{-i\omega t}]$ il momento dell'elettrone.

Se all'istante t il momento medio del singolo elettrone è $\mathbf{p}(t)$, l'espressione del momento ad un istante infinitesimo successivo $\mathbf{p}(t + dt)$ avrà un'espressione diversa a seconda del fatto che esso sia o meno andato incontro ad una collisione. Se τ è il tempo medio che intercorre tra due eventi di scattering, allora, considerato un elettrone all'istante t , esso colliderà prima dell'istante $t + dt$ con una probabilità

$$P_{coll} = \frac{dt}{\tau} \quad (38)$$

mentre non colliderà con una probabilità

$$P_{no\ coll} = 1 - \frac{dt}{\tau} \quad (39)$$

Gli elettroni che non subiscono collisioni nel tempo dt acquisiscono un momento aggiuntivo dovuto unicamente alla forza elettrica $\mathbf{F}(t) = (-e)\mathbf{E}(t)$, pari a $\mathbf{F}(t)dt$. Dal punto di vista degli elettroni che collidono nel tempo dt , invece, la loro velocità, e quindi il loro momento, subito dopo la collisione ha una direzione casuale, e quindi il loro contributo a $\mathbf{p}(t + dt)$ è dovuto solamente alla forza elettrica. Perciò, sapendo che la frazione di elettroni che vanno incontro ad una collisione tra l'istante t e l'istante $t + dt$ è data da (38), il momento medio del singolo elettrone all'istante $t + dt$ è:

$$\mathbf{p}(t + dt) = P_{no\ coll} [\mathbf{p}(t) + \mathbf{F}(t)dt] + P_{coll} [\mathbf{F}(t)dt] = \quad (40)$$

$$= \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) [\mathbf{p}(t) + \mathbf{F}(t)dt] + \left(\frac{dt}{\tau}\right) [\mathbf{F}(t)dt] = \quad (41)$$

$$= \mathbf{p}(t) - \frac{dt}{\tau} \mathbf{p}(t) + \mathbf{F}(t)dt + \mathcal{O}(dt)^2 \quad (42)$$

Da cui

$$\mathbf{p}(t+dt) - \mathbf{p}(t) = -\frac{dt}{\tau}\mathbf{p}(t) + \mathbf{F}(t)dt \quad (43)$$

dove sono state trascurate le correzioni di ordine maggiore a dt , tra cui quella dovuta agli elettroni che collidono, che portano un contributo pari a $\frac{\mathbf{F}(t)}{\tau}(dt)^2$. Dividendo (43) per dt e prendendone il limite $dt \rightarrow 0$:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(t+dt) - \mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} + \mathbf{F}(t) = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} - e\mathbf{E}(t) \quad (44)$$

Inserendo in (44) le espressioni complesse del momento e del campo elettrico si ha

$$-i\omega\mathbf{p}(\omega)e^{-i\omega t} = -\frac{\mathbf{p}(\omega)}{\tau}e^{-i\omega t} - e\mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t} \quad (45)$$

$$\mathbf{p}(\omega)\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) = e\mathbf{E}(\omega) \quad (46)$$

Da cui l'espressione del momento

$$\mathbf{p}(\omega) = \frac{e\mathbf{E}(\omega)}{i\omega - \frac{1}{\tau}} \quad (47)$$

e quella della corrente, usando (37):

$$\mathbf{j}_n(\omega) = \frac{n_n e^2}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \mathbf{E}(\omega) \equiv \sigma_n(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (48)$$

Per un sistema conduttore la conduttività è quindi il numero complesso

$$\sigma_n(\omega) = \frac{n_n e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (49)$$

Supponendo che lo scattering degli elettroni non avvenga ($\tau \rightarrow \infty$), si ottiene l'espressione

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_n(\omega) = \lim_{\tau^{-1} \rightarrow 0} \frac{n_n e^2}{m} \frac{1}{\tau^{-1} - i\omega} = -\frac{n_n e^2}{i\omega m} = \frac{in_n e^2}{\omega m} \quad (50)$$

Cioè per $\tau \rightarrow \infty$ la conduttività è un numero puramente immaginario e cioè la sua parte reale è nulla:

$$Re[\sigma_n(\omega)] = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (51)$$

Tuttavia, l'integrale su tutto il dominio delle frequenze della parte reale restituisce un valore finito non nullo, indipendente dal tempo di smorzamento τ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Re[\sigma_n(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_n e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} d\omega = \frac{n_n e^2 \tau}{m} \frac{[\arctan(\omega\tau)]_{-\infty}^{+\infty}}{\tau} = \frac{n_n e^2}{m} 2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi n_n e^2}{m} \quad (52)$$

I fratelli London assumono che la conducibilità della componente di superfluido si comporti come una delta di Dirac centrata in $\omega = 0$, mentre al di fuori di essa sia caratterizzata solamente da una parte immaginaria, ovvero con resistività nulla:

$$\sigma_s(\omega) = \frac{\pi n_s e^2}{m} \delta(\omega) + \frac{in_s e^2}{\omega m} \quad (53)$$

Una scelta per $Re[\sigma_s(\omega)]$ che ben rappresenta la parte resistiva di un superconduttore è cioè la funzione nulla quasi ovunque data dalla delta di Dirac

$$Re[\sigma_s(\omega)] = \frac{\pi n_s e^2}{m} \delta(\omega) \quad (54)$$

che al contempo rispetta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Re[\sigma_s(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi n_s e^2}{m} \delta(\omega) d\omega = \frac{\pi n_s e^2}{m} \quad (55)$$

In questo modo è rispettata la regola di somma secondo cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}[\sigma(\omega)]d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{Re}[\sigma_n(\omega)] + \text{Re}[\sigma_s(\omega)])d\omega = \frac{\pi(n_n + n_s)e^2}{m} = \frac{\pi n e^2}{m} \quad (56)$$

e si giustifica quindi l'ipotesi teorica dei fratelli London sull'espressione della conduttività della componente di superfluido.

4.1 La formulazione teorica dell'effetto Meissner e la lunghezza di penetrazione di London

Si consideri l'equazione (36) e si applichi il rotore ad ambo i membri:

$$(\nabla \times \mathbf{j})e^{-i\omega t} = \sigma(\omega)(\nabla \times \mathbf{E})e^{-i\omega t} \quad (57)$$

Inserendo l'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ si ha

$$\begin{aligned} -\sigma(\omega) \frac{d(\mathbf{B}e^{-i\omega t})}{dt} &= i\omega\sigma(\omega)\mathbf{B}e^{-i\omega t} = \\ &= i\omega \left(-\frac{n_s e^2}{i\omega m} \right) \mathbf{B}e^{-i\omega t} = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B}e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (58)$$

dove è stata utilizzata l'espressione per la conduttività nel caso di un conduttore perfetto (50). Prendendo il limite per la frequenza ω che tende a zero l'espressione precedente, per una corrente \mathbf{j} continua e un campo magnetico esterno \mathbf{B} statico, diventa:

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B} \quad (59)$$

Utilizzando l'equazione di Maxwell per campi statici (cioè con $\frac{d\mathbf{E}}{dt}=0$) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, da cui

$\nabla \times \mathbf{j} = \frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0}$, l'equazione (59) diventa

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (60)$$

essendo

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \quad (61)$$

la lunghezza di penetrazione di London caratteristica del superconduttore che dipende dalla densità n_s degli elettroni nello stato di superfluido. Ha le dimensioni di una lunghezza e fisicamente rappresenta la scala di distanza all'interno della superficie del campione al di là della quale il campo magnetico è nullo perchè è stato completamente schermato dal superconduttore per effetto Meissner.

Riprendendo l'espressione (60), utilizzando l'uguaglianza

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

insieme all'equazione di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

si ottiene l'equazione differenziale

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (62)$$

una cui soluzione è data da

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_{apl} e^{-\frac{x}{\lambda_L}}, \quad x \geq 0 \quad (63)$$

dove si è supposto che ad un sistema superconduttore che occupi il piano delle ascisse positive sia applicato un campo magnetico esterno nella direzione delle ordinate ($\mathbf{B}_{apl} = B_{apl} \hat{y}$).

Si rappresenta graficamente l'andamento esponenziale in funzione della distanza x dalla superficie del superconduttore del campo magnetico per questo sistema superconduttivo. La decrescita esponenziale dipende dalla lunghezza di penetrazione caratteristica del superconduttore e spiega perché nell'effetto Meissner, al di là di una certa distanza dalla superficie superconduttiva, il campo magnetico si annulla.

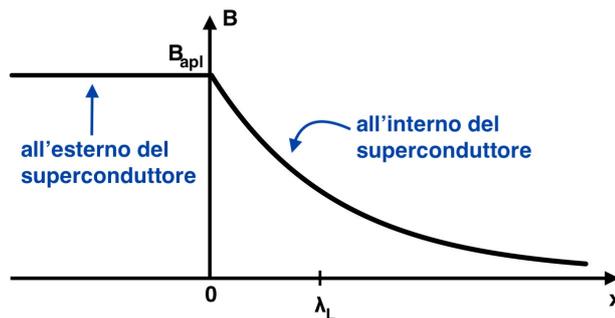


Figura 3. Andamento del campo magnetico in funzione della distanza x dalla superficie del superconduttore

4.2 La quantizzazione del flusso del campo magnetico

Si vuole calcolare il flusso del campo magnetico esterno che penetra all'interno di un cilindro cavo superconduttore. A tal proposito si considerino due cilindri superconduttori concentrici che siano spessi in confronto alla lunghezza di penetrazione di London λ_L , il più interno dei quali funge da schermo, per fare in modo che nessuna linea del campo passi attraverso quello esterno. Lo scopo è quindi calcolare i possibili valori del flusso

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (64)$$

essendo il campo magnetico diretto nella direzione ortogonale al piano x - y : $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

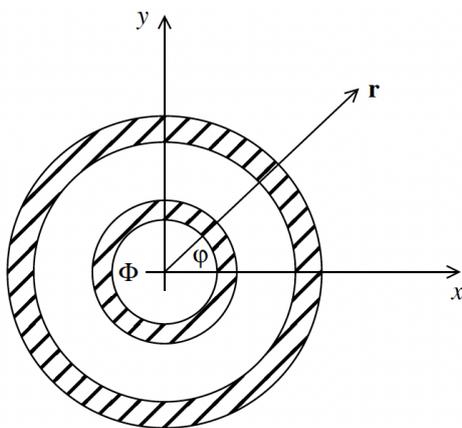


Figura 4. Vista dall'alto dei due cilindri concentrici superconduttori; immagine da [1]

Il flusso penetra nel buco centrale al cilindro interno e all'interno del cilindro stesso per una profondità dell'ordine di λ_L . Per il teorema del rotore si ha

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \Phi \quad (65)$$

essendo $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ e dove la superficie S è ortogonale all'asse del cilindro.

Per cui, risolvendo il primo integrale, si ottiene l'espressione del potenziale vettore:

$$A_\varphi 2\pi r = \Phi \quad \rightarrow \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r} \quad (66)$$

La corrente di schermo \mathbf{j}_s che annulla il campo magnetico al di là di una profondità $\sim \lambda_L$ nel cilindro interno è legata al potenziale vettore, a partire da (59), dall'espressione

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{A} \quad (67)$$

Utilizzando l'equazione di continuità della corrente nel caso statico (cioè con $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, dove ρ è la densità di carica elettrica volumetrica)

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = 0 \quad (68)$$

si ottiene

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (69)$$

da cui troviamo una condizione per il potenziale vettore

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (70)$$

detta gauge di London.

Per la simmetria del sistema si sceglie il potenziale vettore $\mathbf{A} = (A_r, A_\varphi, A_z) = (0, A_\varphi(r), 0)$, che quindi rispetta, per (66), la gauge di London

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (71)$$

Mentre il campo magnetico al di fuori del cilindro interno è nullo, dato che è stato da esso schermato grazie alle correnti superconduttive che scorrono al suo interno, il potenziale vettore è non nullo e, scritto in coordinate cilindriche, è dato da

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\varphi} = \nabla \left(\frac{\Phi \varphi}{2\pi} \right) \quad (72)$$

dato che il gradiente di una funzione f in coordinate cilindriche si scrive come

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (73)$$

È quindi possibile passare da un potenziale vettore nullo al potenziale (72) attraverso una trasformazione di gauge

$$\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} + \nabla \chi \quad \text{con} \quad \chi = \frac{\Phi \varphi}{2\pi} \quad (74)$$

che, in meccanica quantistica, induce una trasformazione anche sulla funzione d'onda che descrive il sistema superconduttivo:

$$\begin{aligned} \psi_s^0 &\quad \rightarrow \quad \psi_s^\Phi = \prod_j e^{\frac{i}{\hbar} q \chi(\varphi_j)} \psi_s^0 \stackrel{(a)}{=} \\ &\stackrel{(a)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} 2e \frac{\Phi(\sum_j \varphi_j)}{2\pi}} \psi_s^0 = e^{-\frac{i}{\hbar} 2e \Phi(\sum_j \varphi_j)} \psi_s^0 \end{aligned} \quad (75)$$

dove in (a) la carica q è stata sostituita con il doppio della carica dell'elettrone ($q=-2e$) consistentemente con la teoria BCS, presentata nel 1957. Essa lega le caratteristiche fenomenologiche della superconduttività alla formazione delle cosiddette "coppie di Cooper", stati legati di due elettroni che si comportano come bosoni e, di conseguenza, non dovendo più sottostare al principio di esclusione di Pauli, possono occupare lo stesso stato quantico di particella singola, formando un condensato di Bose-Einstein, ovvero lo stato superconduttivo.

ψ_s^0 è la funzione d'onda che descrive il sistema quando il flusso del campo magnetico è nullo e φ_j è l'angolo polare della coppia di Cooper j -esima. Si è supposto inoltre che la funzione d'onda che descrive il sistema superconduttivo si possa fattorizzare nel prodotto delle funzioni d'onda che descrivono le singole coppie di elettroni che vanno a costituire la corrente elettrica superconduttiva.

Ora, il termine esponenziale non deve cambiare valore se si sostituisce φ_j con $\varphi_j + 2\pi$, ma ciò è vero solo se il termine che lo moltiplica è un numero intero, cioè

$$e^{-\frac{i}{\hbar}2e\Phi\varphi_j} = e^{-\frac{i}{\hbar}2e\Phi(\varphi_j+2\pi)} \iff \frac{2e}{\hbar}\Phi \in \mathbb{Z} \iff \Phi = n\frac{h}{2e}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (76)$$

Da ciò si deduce che il flusso del campo magnetico attraverso un cilindro cavo superconduttivo risulta essere quantizzato in unità di $\frac{h}{2e} \equiv \Phi_0$.

5 La teoria di Ginzburg-Landau

La teoria di Ginzburg-Landau è stata introdotta nel 1950 come una generalizzazione della teoria dei London che non tiene conto del fatto che:

- la densità di superfluido n_s possa dipendere da fattori esterni, quali la temperatura o l'applicazione di un campo magnetico
- in prossimità della superficie del superconduttore non è più possibile assumere che la densità di superfluido n_s sia costante e uniforme nello spazio.

La teoria di Ginzburg-Landau pone le sue basi sulla teoria delle transizioni di fase di Landau, risalente agli anni 30 del '900. Per descrivere le transizioni di fase, Landau introduce il cosiddetto "parametro d'ordine", che è una qualche quantità fisica che assume il valore zero da una parte della transizione e un valore non nullo dall'altra. Chiamato Δ il parametro d'ordine, il potenziale che descrive il sistema è una funzione differenziabile $F = F(\Delta, T)$ il cui minimo, ad una data temperatura T , rappresenta lo stato d'equilibrio del sistema. A partire dall'analogia con il condensato di Bose-Einstein, Ginzburg e Landau assumono che la parte di superfluido sia descritta da una funzione d'onda di singola particella $\Psi_s(\mathbf{r})$, la quale deve rispettare

$$\int d^3r |\Psi_s(\mathbf{r})|^2 = N_s = n_s V \quad (77)$$

dove N_s rappresenta il numero di particelle che si trovano nello stato superconduttivo. Come parametro d'ordine scelgono la sua ampiezza complessa, che chiamano Ψ e, essendo $|\Psi|^2 \propto n_s$, si ottiene

$$\Delta = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \Psi(T) \neq 0 & T < T_c \end{cases} \quad (78)$$

Nello stato superconduttivo il parametro d'ordine diventa cioè non nullo. Quando la teoria di Ginzburg-Landau è stata formulata, inizialmente non era del tutto chiaro cosa rappresentasse fisicamente l'ampiezza complessa della funzione d'onda di superfluido, ma fu chiaro solo con l'introduzione della teoria microscopica di Bardeen, Cooper e Schrieffer (teoria BCS) del 1957. Il fisico sovietico Lev P. Gor'kov deriva la teoria di Ginzburg-Landau a partire dalla teoria BCS, mostrando che il modulo quadro dell'ampiezza della funzione d'onda superconduttiva rappresenta fisicamente la densità delle coppie di Cooper presenti nel campione. Dal momento che non si conosce l'espressione esplicita del potenziale $F(\Delta = \Psi, T)$, Landau la scrive come un'espansione di Taylor in termini del parametro d'ordine. Essendo l'ampiezza della funzione d'onda un numero complesso e l'energia libera un numero reale, essa può dipendere solamente da $|\Psi|$. Inoltre, affinché sia differenziabile in $\Psi = 0$ può dipendere solo da sue potenze pari:

$$F(\Psi) = \int d^3r f(\Psi) \quad (79)$$

con

$$f(\Psi) = a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \mathcal{O}(|\Psi|^6) \quad (80)$$

detta densità di energia libera. a e b sono parametri fenomenologici che, in generale, dipendono dalla temperatura. Espandendoli attorno a $T = T_c$ si ottiene:

$$\begin{cases} a \simeq \alpha(T - T_c) & \alpha > 0 \\ b \simeq \text{cost} \end{cases} \quad (81)$$

dove si suppone che α e b siano costanti attorno a $T = T_c$. E' necessario che $b > 0$, altrimenti l'energia libera, avendo la forma di una parabola rovesciata, non avrebbe un minimo e quindi non sarebbe definito lo stato d'equilibrio del sistema. Per a invece possiamo avere due casi:

- $a \geq 0$; allora $f(\Psi)$ ha un solo minimo in $\Psi = 0$ e perciò lo stato d'equilibrio è quello in cui $n_s = 0$ e cioè il sistema si comporta come un metallo normale, per il quale $n = n_n$.

- $a < 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial |\Psi|} = 2a|\Psi| + 2b|\Psi|^3 = 0 \quad (82)$$

dà due soluzioni: $|\Psi|=0$ che corrisponde ad un massimo relativo dell'energia libera e

$$|\Psi| = \sqrt{-\frac{a}{b}} \quad (83)$$

che corrisponde ad una serie di minimi.

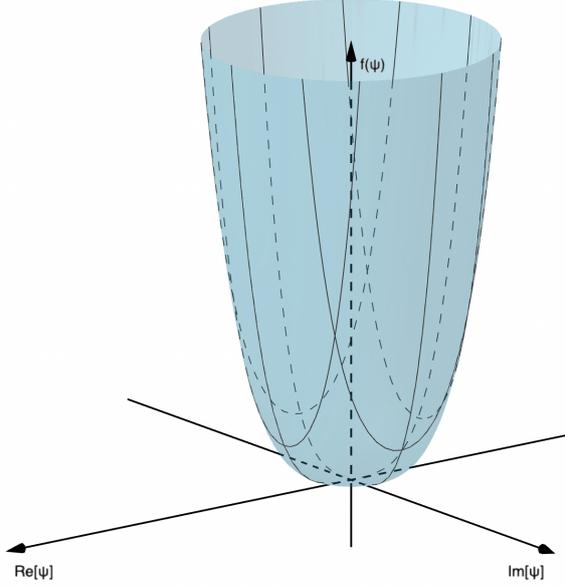


Figura 5. $f(\Psi)$ con $a > 0$

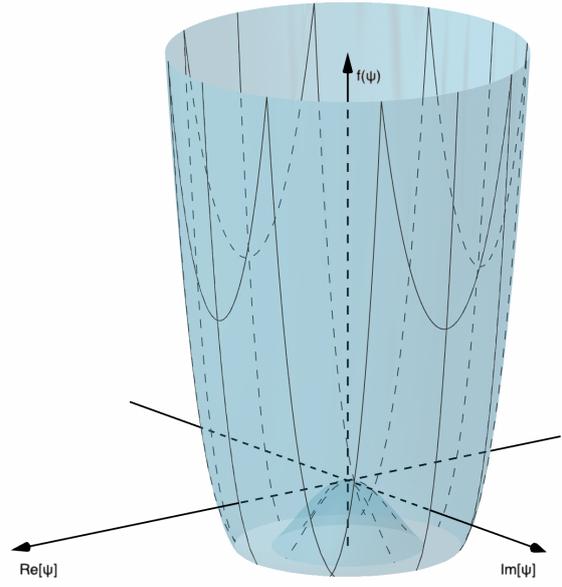


Figura 6. $f(\Psi)$ con $a < 0$

Ginzburg e Landau assumono che alla temperatura $T > T_c$ $a(T)$ sia positivo e che quindi si abbia un unico minimo dell'energia libera in $|\Psi|=0$ corrispondente allo stato normale. Viceversa, mano a mano che la temperatura viene ridotta diminuisce anche $a(T)$ fino a quando $a(T = T_c) = 0$. A $T = T_c$ avviene la transizione di fase e il sistema passa allo stato superconduttivo.

Al di sotto della temperatura critica T_c il modulo del parametro d'ordine assume la forma

$$|\Psi| = \sqrt{\frac{-\alpha(T - T_c)}{b}} = \sqrt{\frac{\alpha}{b}} \sqrt{T_c - T} \quad (84)$$

Per poter andare oltre la teoria dei London, e quindi descrive anche sistemi non necessariamente uniformi nello spazio, Ginzburg e Landau introducono nell'espressione dell'energia libera anche un termine che dipende dal gradiente del parametro d'ordine, e che quindi ne considera anche le variazioni spaziali:

$$F[\Psi] = \int d^3r [a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + c|\nabla\Psi|^2] \quad (85)$$

dove $c > 0$, in modo tale che quando il sistema evolve verso uno stato non uniforme (cioè con $\nabla\Psi \neq 0$) l'energia del sistema aumenti.

Il termine tra parentesi quadre in (85) rappresenta la densità di energia libera; a, b e c sono parametri fenomenologici.

Nel caso dei superconduttori, in cui Ψ rappresenta l'ampiezza complessa della funzione d'onda dello stato superconduttivo, il termine che dipende dal modulo quadro del gradiente di Ψ è legato all'energia cinetica delle particelle che formano lo stato superconduttivo:

$$c|\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{2m_*} |\hbar\nabla\Psi|^2 \quad (86)$$

dove m^* è la massa effettiva delle particelle che formano il condensato superconduttivo. A partire dal funzionale (85), vogliamo applicare il principio di minima azione per trovare quale equazione differenziale deve rispettare il parametro d'ordine Ψ . A tal proposito si considera una variazione infinitesima del parametro d'ordine:

$$\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \Psi(\mathbf{r}) + \delta\Psi(\mathbf{r}) \quad (87)$$

e si calcola la variazione dell'azione (85) rispetto ad esso:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta\Psi} &= \int \left[\frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla\delta\Psi^*)(\nabla\Psi) + \frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla\Psi^*)(\nabla\delta\Psi) + \delta\Psi^*(a\Psi + b\Psi|\Psi|^2) + (a\Psi^* + b\Psi^*|\Psi|^2)\delta\Psi \right] d^3r \stackrel{(a)}{=} \\ &\stackrel{(a)}{=} \int \delta\Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi + a\Psi + b\Psi|\Psi|^2 \right) d^3r + \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi^* + a\Psi^* + b\Psi^*|\Psi|^2 \right) \delta\Psi d^3r = \\ &= \int \delta\Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi + a\Psi + b\Psi|\Psi|^2 \right) d^3r + \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi + a\Psi + b\Psi|\Psi|^2 \right)^* \delta\Psi d^3r \quad (88) \end{aligned}$$

dove in (a) sono stati integrati per parti i primi due termini. La variazione dell'azione si annulla ($\frac{\delta F}{\delta\Psi} = 0$) $\forall \delta\Psi, \delta\Psi^*$ se e solo se

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\Psi + a\Psi + b\Psi|\Psi|^2 = 0 \quad (89)$$

che è l'equazione di Schrodinger con un termine non lineare.

Si consideri un sistema superconduttivo che occupa lo spazio tridimensionale caratterizzato da $x > 0$ separato tramite un'interfaccia in $x=0$ da un metallo normale nello spazio delle x negative. Assumendo che il parametro d'ordine debba essere una funzione continua dipendente solo da x ($\Psi = \Psi(x)$), si vuole risolvere

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Psi''(x) + a\Psi(x) + b\Psi(x)|\Psi(x)|^2 = 0 \\ \Psi(x=0) = 0 \end{cases} \quad (90)$$

Si richiede inoltre che, lontano dall'interfaccia, la soluzione abbia la forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = \sqrt{-\frac{a}{b}} \quad (91)$$

supponendo quindi di trovarsi ad un minimo dell'energia libera per il sistema superconduttivo, caratterizzato da $a < 0$. Come visto in (83) il minimo dell'energia si trova in corrispondenza di $|\Psi| = \sqrt{-\frac{a}{b}}$ e, scegliendo una soluzione reale, si trova (91).

Scrivendo quindi il parametro d'ordine come

$$\Psi(x) = \sqrt{-\frac{a}{b}} f(x) \quad (92)$$

con $f(x)$ funzione reale e continua, il sistema (90) diventa

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(x) + a f(x) + b \left(-\frac{a}{b} \right) f^3(x) = 0 \\ f(x=0) = 0 \end{cases} \quad (93)$$

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m^* a} f''(x) + f(x) - f^3(x) = 0 \\ f(x=0) = 0 \end{cases} \quad (94)$$

Una soluzione che soddisfa (94) è

$$f(x) = \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)} \quad (95)$$

con

$$\xi(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2}{2m^* a(T)}} \quad (96)$$

$\xi(T)$ è un parametro fisico che caratterizza i superconduttori, detto lunghezza di coerenza.

Ha le dimensioni di una lunghezza e indica la scala di distanza dalla superficie del superconduttore, rappresentata dall'interfaccia $x=0$, al di là della quale il parametro d'ordine torna ad assumere il valore costante $\Psi = \sqrt{-\frac{a}{b}}$. La lunghezza di coerenza entra in gioco ogni volta che si ha a che fare con superconduttori non omogenei, ad esempio se si è in presenza di interfacce che dividono materiali diversi o di vortici (si veda paragrafo 5.2).

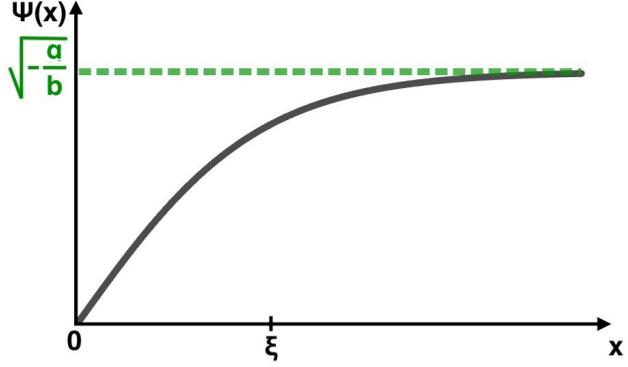


Figura 7. andamento del parametro d'ordine in funzione della distanza x dalla superficie del superconduttore

5.1 La teoria di Ginzburg-Landau in presenza di un campo magnetico

Nel caso di un sistema superconduttivo la trattazione del problema deve tenere conto del fatto che le particelle cariche che costituiscono le correnti superconduttive interagiscono con il campo magnetico. Interpretando, come dimostrato da Gor'kov, il parametro d'ordine Ψ come la funzione d'onda che descrive il moto del centro di massa delle coppie di Cooper di elettroni, si applica la trasformazione minimale della meccanica quantistica

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A} = \frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A} \quad (97)$$

dove si è posto $q = -2e$ che è la carica trasportata da una coppia di Cooper. Nell'espressione della densità di energia libera è poi necessario includere un termine che tenga conto dell'energia immagazzinata nel campo magnetico in ogni punto dello spazio: $\frac{(\mathbf{B}(\mathbf{r}))^2}{2\mu_0}$. L'energia libera totale dovuta al superconduttore e al campo magnetico è dunque:

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left[\frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{(\mathbf{B}(\mathbf{r}))^2}{2\mu_0} \right] d^3r \quad (98)$$

dove $F_n(T)$ rappresenta l'energia libera della fase normale. Calcolando la variazione di (98) rispetto al parametro d'ordine Ψ si ottiene la corrispondente equazione di Schrodinger non lineare, analoga a (89), cui è associata una nuova lunghezza di coerenza:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{i}{\hbar} 2e\mathbf{A} \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) + (a + b|\Psi|^2)\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (99)$$

Per calcolare la supercorrente che scorre all'interno del superconduttore in presenza del campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ si calcola la variazione del funzionale di energia libera (98) rispetto al potenziale vettore:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} &= \int d^3r \left(\frac{2e}{2m^*} \left(\left[\frac{\hbar}{i}\nabla \Psi \right]^* \Psi + \Psi^* \left[\frac{\hbar}{i}\nabla \Psi \right] \right) \delta \mathbf{A} + 2 \frac{(2e)^2}{2m^*} \Psi^* \Psi \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) \right) \stackrel{(a)}{=} \quad (100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(a)}{=} \int d^3r \left(\frac{e}{m^*} \left(\left[\frac{\hbar}{i}\nabla \Psi \right]^* \Psi + \Psi^* \left[\frac{\hbar}{i}\nabla \Psi \right] \right) \delta \mathbf{A} + \frac{(2e)^2}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} [\delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot ((\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A})] \right) \stackrel{(b)}{=} \quad (101) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(b)}{=} \int d^3r \left(\frac{ie\hbar}{m^*} ((\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\nabla \Psi)) \delta \mathbf{A} + \frac{(2e)^2}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \delta \mathbf{A} \right) \quad (102)$$

essendo $\mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A})$. In (a) si è usata l'espressione della divergenza di un rotore:

$$\mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) - \nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

e in (b) il fatto che, per il teorema di Stokes,

$$\int_V d^3r \nabla \cdot ((\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A}) = \int_{\partial V = \Sigma} d\Sigma \cdot ((\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A}) = 0 \quad (103)$$

perchè si impone la condizione al contorno per cui i campi, all'infinito, si annullano:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{A}(r) = 0 \quad (104)$$

La variazione dell'azione si annulla $\left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} = 0 \right) \forall \delta \mathbf{A}$ se e solo se

$$\frac{ie\hbar}{m^*} ((\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\nabla \Psi)) + \frac{(2e)^2}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (105)$$

Dalla legge di Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (106)$$

si ottiene l'espressione della supercorrente che scorre nel superconduttore:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) = \quad (107)$$

$$= -\frac{ie\hbar}{m^*} ((\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\nabla \Psi)) - \frac{(2e)^2}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} \quad (108)$$

Se il parametro d'ordine è uniforme nello spazio, cioè se $\nabla \Psi = \nabla \Psi^* = 0$, l'espressione della densità di supercorrente deve coincidere con quella ricavata con la teoria dei London (67):

$$-\frac{(2e)^2}{m^*} |\Psi|^2 = -\frac{n_s e^2}{m} \quad (109)$$

La massa m^* è la massa di una coppia di Cooper, perciò corrisponde al doppio della massa effettiva dell'elettrone: $m^* = 2m$. Infine, la densità di superfluido è

$$n_s = \frac{m}{e^2} \frac{(2e)^2}{2m} |\Psi|^2 = 2|\Psi|^2 \quad (110)$$

ed è intrinsecamente legata al modulo quadro del parametro d'ordine, ovvero al modulo quadro della funzione d'onda che descrive lo stato superconduttivo, e perciò le proprietà specifiche di quel particolare sistema fisico dipendono da essa.

A partire dall'espressione della lunghezza di penetrazione di London (61) si ricava la lunghezza di penetrazione del campo magnetico

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 2 |\Psi|^2 e^2}} \stackrel{(a)}{=} \sqrt{\frac{m}{\mu_0 2 \left(-\frac{a}{b} \right) e^2}} \quad (111)$$

dove in (a) si è supposto di trovarsi all'interno del campione superconduttivo, a grande distanza dalle sue pareti, dove $|\Psi|^2 = -\frac{a}{b}$.

Il sistema di equazioni dato da (99) e (105) permette di descrivere completamente il comportamento del sistema superconduttivo quando immerso in un campo magnetico esterno. Esso non ha una soluzione analitica, ma è possibile ottenerla solo a livello computazionale. Perciò, di seguito, si usa come approssimazione della lunghezza di coerenza che caratterizza il sistema quella ricavata in assenza di campo magnetico in (96).

5.2 Classificazione dei superconduttori

Le due scale di lunghezza caratteristiche dei superconduttori sono perciò:

- la lunghezza di coerenza

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha(T - T_c)}} \Big|_{m^*=2m} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m\alpha(T_c - T)}} \quad (112)$$

- la lunghezza di penetrazione del campo magnetico

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{mb}{2\mu_0\alpha(T_c - T)e^2}} \quad (113)$$

Entrambe perciò divergono quando $T \rightarrow T_c^-$. La divergenza della lunghezza di coerenza indica che il parametro d'ordine non raggiunge mai il valore costante $\Psi = \sqrt{-\frac{a}{b}}$, mentre la divergenza della lunghezza di penetrazione indica che il campo magnetico penetra completamente e non si annulla mai. Si sta cioè descrivendo il caso in cui il metallo si trova nel suo stato normale.

Il parametro adimensionale

$$\mathcal{K} \equiv \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} = \frac{m}{\hbar e} \sqrt{\frac{2b}{\mu_0}} \quad (114)$$

è indipendente dalla temperatura ed è utilizzato per classificare i superconduttori, sulla base del loro comportamento quando immersi in un campo magnetico esterno, in due grandi categorie: i superconduttori di tipo I e quelli di tipo II.

Per descrivere il potenziale di un superconduttore immerso in un campo magnetico si utilizza l'energia libera di Gibbs:

$$G = F - \int d^3r \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (115)$$

dove \mathbf{H} indica il campo magnetico in assenza di materia mentre \mathbf{B} è il campo magnetico in presenza di materia. I due sono legati dalla relazione

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (116)$$

essendo \mathbf{M} il momento di dipolo magnetico per unità di volume posseduto dal materiale.

Per la legge di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ si ha che

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{est}, \quad \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{int} \quad (117)$$

dove \mathbf{j}_{est} è la corrente indotta dal campo magnetico applicato esternamente \mathbf{H} , mentre \mathbf{j}_{int} è la corrente interna di schermo presente per mantenere il campo \mathbf{B} nullo all'interno del campione superconduttivo, come richiesto dall'effetto Meissner (si veda il paragrafo 3.2). La corrente interna produce cioè un campo magnetico uguale ed opposto a quello prodotto esternamente ($\mathbf{H} = -\mathbf{M}$).

Si consideri un sistema fisico costituito da un muro di dominio in $x=0$ che separa uno stato conduttivo normale nello spazio $x<0$ da uno superconduttivo nello spazio $x>0$. Nello stato normale il parametro d'ordine è tale per cui $|\Psi|=0$ e il campo magnetico è libero di penetrare nel campione, ovvero $B \equiv \mu_0 H$; la densità di energia libera di Gibbs risulta perciò:

$$g_n = f_n - \mu_0 H^2 \Big|_{|\Psi|=0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 - \mu_0 H^2 = -\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (118)$$

Nello stato superconduttivo, invece, il parametro d'ordine è tale per cui $|\Psi| = \sqrt{-\frac{a}{b}}$ e il campo magnetico è nullo per effetto Meissner (si veda il paragrafo 3.2); la corrispondente densità di energia libera di Gibbs è:

$$g_s \Big|_{B=0} = f_s = a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 = a\left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{b}{2}\frac{a^2}{b^2} = -\frac{a^2}{2b} \quad (119)$$

Il sistema diventa superconduttivo se, passando dallo stato normale a quello superconduttivo la sua energia diminuisce, e cioè se

$$g_s - g_n = -\frac{a^2}{2b} + \frac{\mu_0 H^2}{2} < 0 \rightarrow H^2 < \frac{a^2}{\mu_0 b} \quad (120)$$

Se $H \geq H_c$ campo critico

$$H_c(T) = \sqrt{\frac{(a(T))^2}{\mu_0 b}} \quad (121)$$

allora non avviene la transizione di fase allo stato superconduttivo.

Si analizza la differenza tra i superconduttori di tipo I e II a partire dal calcolo dell'energia per unità d'area del muro di dominio. Si impone che il parametro d'ordine dipenda solo da x e che siano rispettate le condizioni al contorno

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{-\frac{a}{b}} & x \rightarrow +\infty \\ 0 & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (122)$$

Per il campo magnetico si ha invece

$$B(x) = \begin{cases} 0 & x \rightarrow +\infty \\ H_c & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (123)$$

Si nota che la densità di energia libera all'interno del superconduttore, lontano dal muro di dominio, eguaglia quella all'interno del conduttore:

$$g_s(x \rightarrow +\infty) = -\frac{a^2}{2b} = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2} = g_n(x \rightarrow -\infty) \quad (124)$$

La densità di energia libera dovuta alla presenza del muro si ottiene perciò togliendo questo contributo:

$$g(x) = g_s(x) - \left(-\frac{\mu_0 H_c^2}{2}\right) \quad (125)$$

Integrando quest'espressione lungo x si ottiene l'energia per unità d'area del muro di dominio γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[g_s(x) + \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[f_s(x) - B(x)H_c + \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \right] \stackrel{(a)}{=} \\ &\stackrel{(a)}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + 2eA(x) \right) \Psi \right|^2 \right]}_{\stackrel{(b)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{2} |\Psi|^4} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\left[\frac{B(x)^2}{2\mu_0} - B(x)H_c + \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \right]}_{= \frac{(\mu_0 H_c - B(x))^2}{2\mu_0}} \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata per f_s l'espressione riportata in (98) operando le sostituzioni

$$\mathbf{A} \rightarrow A(x), \quad \nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

Inoltre moltiplicando l'espressione (99) per Ψ^* e integrandola lungo x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + 2eA(x) \right) \Psi \right|^2 + a|\Psi|^2 + b|\Psi|^4 \right] = 0 \quad (126)$$

si spiega l'uguaglianza (b).

Perciò, l'energia libera per unità d'area è :

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[-\frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{(\mu_0 H_c - B(x))^2}{2\mu_0} \right] = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\underbrace{\frac{2}{\mu_0 H_c^2}}_{=\frac{2b}{a^2}} \left(-\frac{b}{2} \right) |\Psi|^4 + \left(1 - \frac{B(x)}{\mu_0 H_c} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[-\frac{b^2}{a^2} |\Psi|^4 + \left(1 - \frac{B(x)}{\mu_0 H_c} \right)^2 \right] = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(1 - \frac{B(x)}{\mu_0 H_c} \right)^2 - \frac{|\Psi|^4}{(\Psi(x \rightarrow +\infty))^4} \right] \end{aligned}$$

Superconduttori di tipo I

I superconduttori di tipo I sono caratterizzati da $\mathcal{K} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, si ha cioè che $\xi \gg \lambda$. In prossimità del muro di dominio c'è una regione larga $\xi - \lambda$ in cui $B(x) \sim 0$ e $\Psi(x) \neq \Psi(x \rightarrow +\infty)$. L'integrale nell'espressione dell'energia libera per unità d'area risulta perciò positivo ($\gamma > 0$): in presenza di muri di dominio il sistema aumenta cioè la sua energia. Di conseguenza, per mantenersi in una situazione di equilibrio, ovvero in una situazione di minima energia, il sistema tende a minimizzare l'area dei muri di dominio.

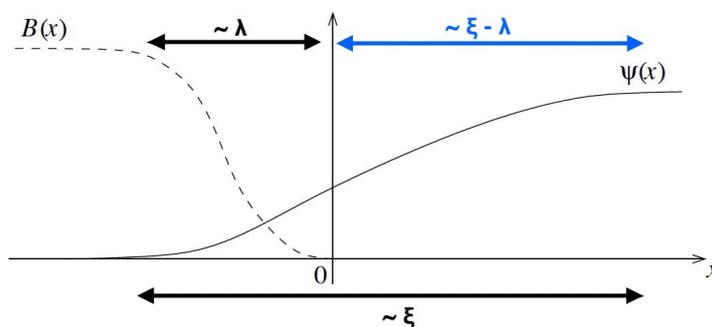


Figura 8. Andamento del campo magnetico e del parametro d'ordine in funzione della distanza x dal muro di dominio per un superconduttore di tipo I; figura modificata da [1]

Superconduttori di tipo II

I superconduttori di tipo II sono viceversa caratterizzati da $\mathcal{K} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, ovvero $\lambda \gg \xi$. In prossimità del muro di dominio c'è una regione di larghezza $\lambda - \xi$ in cui $\Psi(x) \sim \Psi(x \rightarrow +\infty)$ e in cui il campo magnetico non è stato completamente espulso ($B(x) \neq 0$). L'integrale nell'espressione dell'energia libera per unità d'area è negativo ($\gamma < 0$): in presenza di muri di dominio il sistema diminuisce la sua energia. Di conseguenza il sistema tende a massimizzare l'area dei muri di dominio e questo effetto viene controbilanciato da un secondo, la quantizzazione del flusso del campo magnetico.

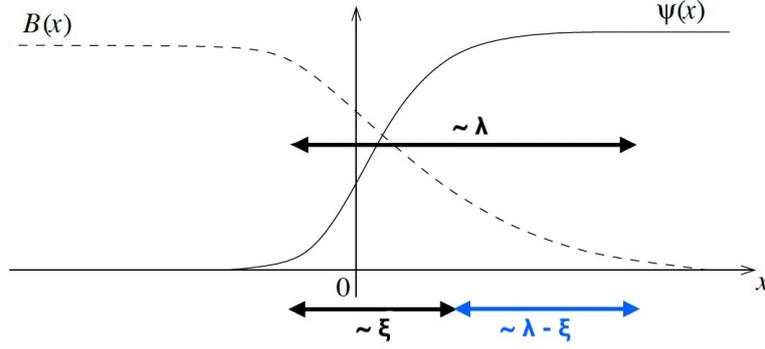


Figura 9. Andamento del campo magnetico e del parametro d'ordine in funzione della distanza x dal muro di dominio per un superconduttore di tipo II; figura modificata da [1]

5.3 Il quanto del flusso del campo magnetico

Il flusso del campo magnetico attraverso un anello di area S e bordo ∂S all'interno di un superconduttore è

$$\Phi = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \stackrel{(a)}{=} \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \quad (127)$$

dove in (a) si è usato il teorema di Stokes.

E' possibile ricavare l'espressione per il potenziale vettore \mathbf{A} da (108):

$$\mathbf{A} = -\frac{m^*}{(2e)^2 |\Psi|^2} \mathbf{j}_s - \frac{\hbar}{(2e)^2 |\Psi|^2} \frac{ie\hbar}{m^*} [(\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\nabla \Psi)] \quad (128)$$

e inserendola in (127) si ha

$$\Phi = \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \left(-\frac{m^*}{(2e)^2 |\Psi|^2} \mathbf{j}_s - \frac{i\hbar}{4e |\Psi|^2} [(\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\nabla \Psi)] \right) \quad (129)$$

Ponendo $m^* = 2m$, $|\Psi|^2 = \frac{n_s}{2}$ (da (110)) e scrivendo esplicitamente la funzione d'onda come

$\Psi = |\Psi| e^{i\phi}$ e $\Psi^* = |\Psi| e^{-i\phi}$ si ottiene

$$\Phi = \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \left(-\frac{2m}{(2e)^2 \frac{n_s}{2}} \mathbf{j}_s - \frac{i\hbar}{4e} \left(\underbrace{\frac{\nabla \Psi^*}{\Psi^*}}_{-i\nabla\phi} - \underbrace{\frac{\nabla \Psi}{\Psi}}_{i\nabla\phi} \right) \right) = \quad (130)$$

$$= \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \left(-\frac{m}{e^2 n_s} \mathbf{j}_s - \frac{i\hbar}{4e} (-2i\nabla\phi) \right) \stackrel{(a)}{=} \quad (131)$$

$$\stackrel{(a)}{=} \frac{m}{e} \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_s - \frac{\hbar}{2e} \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \nabla\phi \quad (132)$$

dove in (a) si è utilizzata la definizione di velocità di superfluido

$$\mathbf{v}_s \equiv -\frac{\mathbf{j}_s}{en_s} \quad (133)$$

Integrando lungo un percorso chiuso il gradiente della fase della funzione d'onda, affinché essa sia una funzione continua, deve restituirmi un multiplo intero di 2π :

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \nabla\phi = -2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (134)$$

dove il segno meno è una mera convenzione.

Si definisce il flussoide

$$\Phi' \equiv \Phi - \frac{m}{e} \oint_{\partial S} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{2e} 2\pi n = \frac{h}{2e} n = n\Phi_0 \quad (135)$$

che risulta essere quantizzato. All'interno di un superconduttore, per effetto Meissner, il campo magnetico si annulla, così come la corrente superconduttiva (essendo $\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B})$ per la legge di Ampere-Maxwell); il flussoide va quindi a coincidere con il flusso Φ del campo magnetico, che risulta essere un multiplo intero di Φ_0 , come ricavato con la teoria London (4.2).

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (136)$$

è il quanto del flusso del campo magnetico, cioè la più piccola quantità di flussoide che può penetrare all'interno di un campione superconduttivo.

6 Conclusione: i vortici quantizzati

In 5.3 è stato dimostrato che la più piccola quantità di flussoide che può attraversare un superconduttore di tipo II è $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ e ciò avviene sotto forma di un vortice. Un vortice quantizzato rappresenta una regione del materiale superconduttivo in cui il flusso del campo magnetico che attraversa la superficie di un percorso circolare chiuso attorno al core, attraverso il quale il campo magnetico riesce a penetrare completamente, è quantizzato.

Si supponga di avere un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{z}$ diretto lungo l'asse z. Nelle coordinate cilindriche (ρ, Φ, z) , imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} \Psi(\rho \rightarrow 0) = 0 \\ |\Psi(\rho \rightarrow \infty)| = \sqrt{-\frac{a}{b}} \\ B(\rho \rightarrow \infty) = 0 \end{cases} \quad (137)$$

si vuole risolvere il sistema dato dall'equazione di Schrodinger non lineare (99) e dalla legge di Ampere-Maxwell (108):

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{i}{\hbar} 2e\mathbf{A} \right)^2 \Psi + (a + b|\Psi|^2)\Psi = 0 \\ \mathbf{j}_s = -\frac{ie\hbar}{m^*} ((\nabla\Psi^*)\Psi - \Psi^*(\nabla\Psi)) - \frac{(2e)^2}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} \end{cases} \quad (138)$$

con $m^* = 2m$. Al centro del vortice, detto core, la fase della funzione d'onda superconduttiva è indefinita: affinché Ψ sia una funzione continua, essa deve assumere valore nullo, come imposto dalla prima condizione al contorno.

Il sistema (138) non può essere risolto analiticamente a causa del termine non lineare $b|\Psi|^2\Psi$.

Si rappresenta la soluzione sotto forma grafica riportata in [1]:

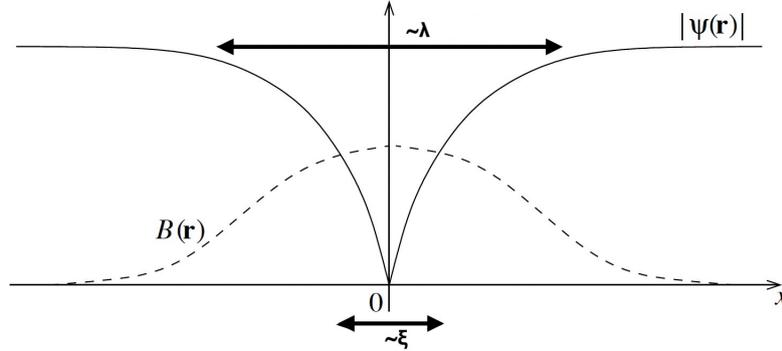


Figura 10. Andamento del modulo del parametro d'ordine e del campo magnetico al variare della distanza x dal core del vortice; figura modificata da [1]

Come si può notare in Figura 10, nel core del vortice, in $x=0$, il campo magnetico riesce a penetrare il superconduttore ed infatti il parametro d'ordine si annulla: il core rappresenta lo stato normale del sistema.

I vortici quantizzati rappresentano dei difetti nella materia ordinaria; sono infatti osservati solamente nei superconduttori di tipo II, i quali tendono ad aumentare le aree dei muri di dominio tra lo stato normale e quello superconduttivo, e quindi a formare difetti nel materiale. Si ha quindi una coesistenza, all'interno dello stesso materiale, delle sue fasi normale e superconduttiva. I vortici quantizzati sono stati osservati sperimentalmente nei superconduttori di tipo II immersi in un campo magnetico esterno. Il primo vortice riesce ad entrare nel campione quando l'energia libera del superconduttore senza vortici eguaglia quella in presenza di un singolo vortice ed avviene al cosiddetto "campo critico inferiore". All'aumentare dell'intensità del campo aumenta anche la densità dei vortici quantizzati, fino a quando la fase superconduttiva svanisce e il materiale si comporta come un normale conduttore. Ciò avviene al cosiddetto "campo critico superiore".

Si riporta in figura 11 la struttura a vortici riscontrata in un cristallo di diboruro di magnesio MgB_2 grazie alla "Bitter decoration", una tecnica che permette di osservare i singoli vortici quantizzati. Essa richiede che il cristallo sia puro e consiste nello spargere della polvere di ferro sulla superficie del superconduttore che, essendo un materiale ferromagnetico, si deposita nei punti dove il flusso del campo magnetico è maggiore, cioè dove si trovano i vortici. Come riportato in [8], per questo esperimento, il diametro di un singolo vortice è risultato essere pari a $d = (0.77 \pm 0.2)\mu m$.

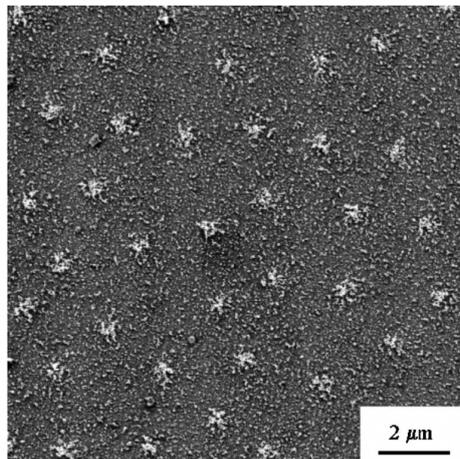


Figura 11. Struttura a vortici in un cristallo di MgB_2 ; immagine da [8]

Bibliografia

- [1] Timm, Carsten. "Theory of superconductivity." Institute of theoretical Physics Dresden (2012).
- [2] Annett, James F. Superconductivity, superfluids and condensates. Vol. 5. Oxford University Press, 2004.
- [3] Landau, Lev Davidovich, and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, Volume 6. Vol. 6. Elsevier, 2013.
- [4] Ashcroft, Neil W., and N. David Mermin. Solid state physics. Cengage Learning, 2022.
- [5] Callen, Herbert B. "Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics." (1998): 164-167.
- [6] Heine, V. "The thermodynamics of bodies in static electromagnetic fields." Vol. 52. No. 3. Cambridge University Press, 1956.
- [7] Shmidt, Vadim Vasil'evich, and Paul Müller. The physics of superconductors: Introduction to fundamentals and applications. Springer Science & Business Media, 1997.
- [8] Vinnikov, L. Ya, et al. "Vortex structure in MgB_2 single crystals observed by the Bitter decoration technique." Physical Review B 67.9 (2003): 092512.