Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica

Tesi di laurea triennale

La teoria della Realizzazione nei sistemi dinamici

Realization theory for dynamical systems

Candidato:
Andrea Borsati
Matricola 612634

Relatore:
Augusto Ferrante

Anno Accademico 2012–2013

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La presente tesi ha lo scopo di dare una descrizione di alcuni concetti e risultati relativi alla costruzione di modelli di stato, partendo dalla conoscenza della matrice di trasferimento. Le soluzioni di questo tipo di problema prendono il nome di *Teoria della Realizzazione*.
L'importanza di questa teoria è legata alle molteplici tecniche di controllo basate sulla rappresentazione interna. In particolare, i metodi basati sulla rappresentazione dello stato sono i più adatti a risolvere il problema del regolatore, per costruire leggi di controllo e di filtraggio ottimo e, in generale, per la sintesi di algoritmi per l'elaborazione dati real-time.

1.1 Come è strutturata la tesi

Dopo una breve introduzione, si inizierà il capitolo 2, dove verrà descritto in maniera precisa il problema della realizzazione e verrà risolto. Nel capitolo 3 si parlerà delle realizzazioni minime e di alcune metodologie di calcolo. Nel capitolo 4 si esporranno alcune proprietà che legano le realizzazioni alla stabilità di un sistema. Nel capitolo 5 infine sarà presente un'appendice dove verranno elencati e illustrati diversi termini presenti nell'elaborato.

1.2 Applicazione della teoria

Il problema della *realizzazione* viene affrontato di frequente, in quanto molti degli algoritmi di controllo sono stati pensati e proposti nell'ambito di rappresentazioni di stato. Per questa ragione si pone il problema di associare alla *rappresentazione esterna*[1] un modello di stato che la realizzi. Le conclusioni sulla *teoria della realizzazione* coinvolgono anche rami applicativi diversi dal solo controllo, quali ad esempio la teoria degli automi, la sintesi delle reti lineari e gli algoritmi ricorsivi.

[1]Vedi Appendice

Capitolo 2

Il problema della realizzazione

Dato un sistema discreto $\Sigma = (A, B, C, D)$, la mappa ingresso-uscita a partire dallo stato zero, è esprimibile attraverso la matrice di trasferimento[1]

$$W_\Sigma(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \tag{2.1}$$

Infatti, nel dominio delle trasformate, si ha la seguente relazione fra la trasformata $U(z)$ dell'ingresso e quella $Y(z)$ dell'uscita forzata.

$$Y(z) = W_\Sigma(z)U(z) \tag{2.2}$$

Il problema che ci si pone è il seguente.
Data una mappa lineare con legame ingresso-uscita

$$Y(z) = W(z)U(z) \tag{2.3}$$

con $W(z)$ matrice $p \times q$ cui elementi sono funzioni razionali, costruire un sistema dinamico lineare Σ tale che $W_\Sigma(z) = W(z)$. Ogni quaterna (A,B,C,D) che soddisfa la precedente equazione è detta *realizzazione di* $W(z)$.
Una condizione necessaria per la realizzabilità è che $W(z)$ sia una matrice i cui elementi sono funzioni razionali proprie. Infatti, utilizzando la formula

$$(zI - A)^{-1} = \frac{adj(zI - A)}{det(zI - A)} \tag{2.4}$$

si vede immediatamente che gli elementi della matrice razionale $W_\Sigma(z)$ in (2.1) sono funzioni razionali proprie.
La condizione è anche sufficiente come viene mostrato in seguito. La dimostrazione avverrà in maniera costruttiva, cioè si farà vedere come, partendo da

[1] vedi Appendice

una matrice di funzioni razionali proprie, si può costruire una sua realizzazione (passando per ispezione i coefficienti delle matrici che la descrivono). Data una funzione di trasferimento propria si può sempre decomporre in questo modo

$$\overline{W(z)} = W_0 + W(z)$$

quindi, una volta che si isola il coefficiente costante W_0 matrice $p \times q$, che sarà uguale alla D che si sta cercando, il problema si riduce a realizzare una matrice di trasferimento *strettamente propria*[2] $W(z)$ del tipo

$$W(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_{n-1} z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n} \tag{2.5}$$

con β_i matrici $p \times q$ di costanti.
Procediamo alla verifica con un semplice esempio:

$$\overline{W(z)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} \\ \frac{z+1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

il primo addendo rappresenta D, mentre il secondo $W(z)$.

Osservazione. Il problema, nel caso continuo e nel caso discreto è assolutamente equivalente, viene cambiata solo la variabile. Si scriverà in funzione di z nel caso discreto e in funzione di s nel caso continuo. Da ora in avanti si farà riferimento al caso discreto, sapendo che tutto quello che verrà esposto, sarà comunque valido (previa sostituzione della variabile complessa) per il caso continuo.

2.1 Realizzazione

Proposizione 2.1.1. *Data una matrice razionale strettamente propria $W(z)$ di dimensione $p \times q$, esiste sempre un sistema dinamico lineare che la realizza.*

Dimostrazione Caso scalare $q = p = 1$. Data una funzione razionale strettamente propria come nel caso (2.4) con $a(z)$ polinomio monico[3], due diverse realizzazioni possono essere ottenute direttamente per ispezione dei coefficienti della $W(z)$.

[2] il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore

[3] Polinomio in una sola variabile di grado massimo uguale ad 1

La prima realizzazione, la quale è *raggiungibile*[4], deriva dall'utilizzo del sistema $\Sigma_c = (A_c, B_c, C_c)$ in *forma canonica di controllo*,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

La seconda realizzazione, la quale è *osservabile*[5]deriva dall'utilizzo del sistema $\Sigma_o = (A_o, B_o, C_o)$ in *forma canonica di osservazione*,

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_0 \\ 1 & & & & -\alpha_1 \\ & 1 & & & -\alpha_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \ B_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

sono tutte e due realizzazioni di $W(z)$, infatti vale la equazione:

$$C(zI - A)^{-1}B = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_{n-1} z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n} \tag{2.8}$$

Si conclude che i sistemi a un ingresso e un' uscita Σ_c e Σ_o hanno la stessa funzione di trasferimento (e sono duali). □

Un' osservazione che riguarda il problema della realizzazione in caso generale, riguarda l'unicità della soluzione e le dimensioni delle rispettive realizzazioni. Il problema ammette infatti molte soluzioni, anche di dimensioni diverse.
Rappresentazioni diverse, ma equivalenti (es. $(A, B, C) \neq (TAT^{-1}, TB, CT^{-1})$) hanno la stessa funzione di trasferimento

$$CT^{-1}(zI - TAT^{-1})^{-1}TB = C(zI - A)^{-1}B$$

In generale i poli della funzione di trasferimento sono solo una parte degli autovalori. Quindi si possono verificare casi in cui si hanno diverse rappresentazioni dello stato, di diverse dimensioni, seppure con funzione di trasferimento uguale.

[4]vedi Appendice
[5]vedi Appendice

Caso matriciale. A partire dalla matrice $W(z)$, $p \times q$

$$W(z) = \frac{B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots + B_{n-1} z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + z^n} \tag{2.9}$$

si ottiene una prima realizzazione cosiddetta *forma canonica raggiungingibile*, di dimensione nq, ove q indica il numero di colonne di $W(z)$ e n il grado del minimo comune multiplo dei polinomi del denominatore.

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & I & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \\ -\alpha_0 I & -\alpha_1 I & -\alpha_2 I & \dots & -\alpha_{n-1} I \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix},$$

$$C_r = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Dove le matrici I sono matrici identità di dimensione $q \times q$. Conseguentemente le matrici A_r, B_r, C_r sono di dimensione $(nq \times nq)$,$(nq \times q)$,
$(p \times nq)$.
La prova della correttezza del procedimento per il calcolo della realizzazione consiste nella verifica che la funzione di trasferimento associata alla rappresentazione coincida con $W(z)$.
Bisogna calcolare

$$C_r (zI - A_r)^{-1} B_r = C_r \frac{adj(zI - A_r)}{\det(zI - A_r)} B_r$$

$$= \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI & -I & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -I \\ \alpha_0 I & \alpha_1 I & \alpha_2 I & \dots & zI + \alpha_{n-1} I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Il calcolo del determinante $zI - A_r$ restituisce il seguente risultato:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + z^n)$$

gli elementi dell'ultima riga di A_r sono proprio i coefficienti del polinomio caratteristico. Procedendo con il calcolo della funzione di trasferimento:

$$\frac{\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{n-1} \end{bmatrix}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + z^n} \begin{bmatrix} \times & \times & I \\ \times & \times & zI \\ \times & \times & \vdots \\ \times & \times & \vdots \\ \times & \times & z^{n-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \times & \times & \frac{B_0 + B_1 z + \dots + B_{n-1} z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + z^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

quindi alla fine

$$W(z) = \frac{B_0 + B_1 z + \dots + B_{n-1} z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + z^n}$$

$\square$

Esempio.

$$W(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z+1} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \frac{\binom{z}{z+1}}{z^2 + z} = \frac{\binom{0}{1} + \binom{1}{1} z}{z^2 + z}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si verifica che

$$C_r(zI - A_r)^{-1} B_r = W(z).$$

C'è una seconda possibilità (duale rispetto al caso precedente) di realizzare una $W(z)$. In tal caso la dimensione della realizzazione è np, dove p è il numero di righe di $W(z)$ e n il grado del minimo comune multiplo dei polinomi del denominatore, è detta in *forma canonica osservabile*, A_0, B_0, C_0.

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & & & & -\alpha_0 I \\ I & & & & -\alpha_1 I \\ & I & & & -\alpha_2 I \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & I & -\alpha_{n-1} I \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Le matrici A_o, B_o, C_o sono di dimensione $(np \times np)$,$(np \times q)$,$(p \times np)$.

Dimostrazione:

$$C_o(zI - A_o)^{-1} B_o = W(z)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 I \\ -I & zI & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -I & zI + \alpha_{n-1} I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Il determinante vale

$$|zI - A_0| = (\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + z^n)$$

quindi

$$\frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & I \end{bmatrix}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + z^n} adj \begin{bmatrix} zI & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 I \\ -I & zI & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -I & zI + \alpha_{n-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & \dots & I\end{bmatrix}}{\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+z^n}\begin{bmatrix}\times & \times & \times & \times & \times\\ \times & \times & \times & \times & \times\\ \times & \times & \times & \times & \times\\ \times & \times & \times & \times & \times\\ I & \dots & \dots & \dots & z^{n-1}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ B_{n-1}\end{bmatrix}$$

Il prodotto finale risulta essere proprio $W(z)$.

Esempio.

$$W(z)=\frac{\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}z}{3+2z+z^2}$$

$$A_o=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix},B_o=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},C_o=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

si verifica che

$$C_o(zI-A_o)^{-1}B_o=W(z).$$

Anche in questo caso, considerando che le funzioni razionali in $W(z)$ sono rappresentabili in infiniti modi, esistono realizzazioni del tipo raggiungibile e osservabile con dimensione elevata. Il caso $p=q=1$ dei due tipi di realizzazione dimostra che ogni matrice razionale strettamente propria è realizzabile mediante un sistema dinamico lineare invariante.

Capitolo 3

Realizzazioni minime

Come si è visto precedentemente, da una matrice razionale $W(z)$ si possono ottenere infinite realizzazioni tramite trasformazioni di coordinate. Inoltre si possono anche avere realizzazioni non equivalenti dalla stessa matrice di trasferimento e tali realizzazioni, possono avere dimensioni diverse dello spazio di stato. Si vuole quindi studiare le proprietà delle realizzazioni di $W(z)$ con dimensione più piccola possibile, ovvero nell'uso di un numero minimo di variabili di stato.

Definizione 3.0.1. *Una realizzazione $\Sigma = (A, B, C)$ di $W(z)$ si dice minima se per ogni altra realizzazione $\Sigma' = (A', B', C')$ di $W(z)$ si ottiene*

$$dim\Sigma \leq dim\Sigma' \tag{3.1}$$

Proposizione 3.0.2. *Una realizzazione $\Sigma = (A, B, C)$ di $W(z)$ è minima se e solo se essa è raggiungibile e osservabile.*

Dimostrazione. Avendo Σ realizzazione minima di $W(z)$ si suppone, per assurdo che non sia raggiungibile. Tramite un cambiamento di base si porta il sistema in *forma standard di raggiungibilità*[1].

$$\underline{\Sigma} = (T{-}1AT, T^{-1}B.CT) = (\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) = \left(\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ 0 & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{C}_2 \end{bmatrix} \right)$$

e si considera il sottoinsieme raggiungibile di $\underline{\Sigma}$

$$\underline{\Sigma}^R = (\underline{A}_{11}, \underline{B}_1, \underline{C}_1).$$

La matrice di trasferimento $W(z)$ di Σ è la stessa del sistema equivalente $\underline{\Sigma}$ e

[1] vedi Appendice

di conseguenza del suo sottoinsieme raggiungibile $\underline{\Sigma}^R$; la dimensione di $\underline{\Sigma}^R$ però, è minore di quella di Σ e questo va contro l'ipotesi di minimalità di Σ. In modo duale si dimostra che la minimalità implica l'osservabilità. Da ciò si conclude che l'insieme delle realizzazioni minime di $W(z)$ è contenuto nell'insieme dato dalle realizzazioni raggiungibili ed osservabili di $W(z)$. Per una completa dimostrazione si dovrà sfruttare la proposizione seguente. □

Proposizione 3.0.3. *Tutte le realizzazioni raggiungibili e osservabili di $W(z)$ hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. La matrice razionale strettamente propria $W(z)$ si può sviluppare secondo serie formali di potenze in z^{-1}

$$W(z) = M_0 z^{-1} + M_1 z^{-2} + \cdots + M_k z^{-k-1} + \ldots \tag{3.2}$$

dove le matrici $M_k \in \mathbb{R}$ sono detti *coefficienti di Markov* di $W(z)$.
Sia (A, B, C) una qualunque realizzazione di $W(z)$, questa la si può esprimere nella forma

$$\begin{aligned} W(z) &= C(zI - A)^{-1}B \\ &= Cz^{-1}(I - Az^{-1})^{-1}B \\ &= CGz^{-1} + CABz^{-2} + \cdots + CA^k Bz^{-k} + \ldots. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Confrontando (3.2) e (3.3) si vede che le matrici di $W(z)$ sono vincolate ai coefficienti di Markov dalle seguenti relazioni

$$M_0 = CB, M_1 = CAB, \ldots, M_k = CA^k B. \tag{3.4}$$

Detto ciò si procede con la dimostrazione; si consideri due realizzazioni raggiungibili e osservabili di $W(z)$, $\Sigma = (A, B, C)$ e $\underline{\Sigma} = (\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$, la prima con dimensione n e la seconda con dimensione $\overline{n}$ e si suppone che $n > \overline{n}$. Vengono indicate con $\mathcal{R}$ e $\mathcal{O}$ le *matrici di raggiungibilità e osservabilità*[2] di Σ entrambe di rango n, Rispettivamente $\underline{\mathcal{R}}$ e $\underline{\mathcal{O}}$ quelle di $\underline{\Sigma}$ di rango $\overline{n}$. Si considerino i prodotti

$$\mathcal{O}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \ldots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \ldots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \ldots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

[2] vedi Appendice

e

$$\underline{\mathcal{O}\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA} \\ \vdots \\ \underline{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{AB} & \dots & \underline{A}^{n-1}\underline{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{CB} & \underline{CAB} & \dots & \underline{CA}^{n-1}\underline{B} \\ \underline{CAB} & \underline{CA}^2\underline{B} & \dots & \underline{CA}^{n}\underline{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{CA}^{n-1}\underline{B} & \underline{CA}^{n}\underline{B} & \dots & \underline{CA}^{2n-2}\underline{B} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

per (3.4) si ha

$$M_k = \underline{CA}^k\underline{B} = CA^kB, \forall k \geq 0 \tag{3.7}$$

e da (3.5), (3.6) segue che

$$\mathcal{O}\mathcal{R} = \underline{\mathcal{O}\mathcal{R}} \tag{3.8}$$

Il risultato del prodotto di matrici con lo stesso rango, ha un rango che non supera quello dei due componenti, quindi $\mathcal{O}\mathcal{R}$ ha rango $\leq n$.
Per dimostrarlo si cercherà di provare che la sua immagine conterrà n vettori indipendenti. Avendo $\rho(\mathcal{R})$ (rango di $\mathcal{R}$) $= n$ esistono n vettori canonici

$$\mathbf{j_{i_1}}, \mathbf{j_{i_2}}, \dots, \mathbf{j_{i_n}} \in \mathbb{R}^{nm}$$

le cui immagini per $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}\mathbf{j_{i_1}}, \mathcal{R}\mathbf{j_{i_2}}, \dots, \mathcal{R}\mathbf{j_{i_n}} \tag{3.9}$$

sono colonne indipendenti(quindi stati indipendenti raggiunti dal sistema) in $\mathbb{R}^n$.
Dall'espressione

$$\sum_{\tau=1}^{n} \alpha_\tau(\mathcal{O}\mathcal{R}\mathbf{j_{i_\tau}}) = \mathcal{O}\sum_{\tau=1}^{n} \alpha_\tau(\mathcal{R}\mathbf{j_{i_\tau}}) = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

Si ricava che $\mathcal{O}\mathcal{R}\mathbf{j_{i_1}}, \mathcal{O}\mathcal{R}\mathbf{j_{i_2}}, \dots, \mathcal{O}\mathcal{R}\mathbf{j_{i_n}}$ sono indipendenti.
Dall'osservabilità di Σ segue $\sum_{\tau=1}^{n} \alpha_\tau \mathcal{R}\mathbf{j_{i\tau}} = \mathbf{0}$ e dall'indipendenza da (3.9) si conclude che $\alpha_\tau = 0\ \forall\tau$. Sfruttando (3.8)

$$\rho(\mathcal{O}\mathcal{R}) = \rho(\underline{\mathcal{O}\mathcal{R}}) = n \tag{3.11}$$

ci si trova nell'assurdo! (il rango di $(\underline{\mathcal{O}\mathcal{R}})$ non può superare $\overline{n}$).

$\square$

3.1 Metodi di calcolo

Come già visto di realizzazioni di $W(z)$, ne esistono anche di dimensioni diverse, ovviamente il minor utilizzo di variabili di stato è da preferirsi. Consideriamo un esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La sua funzione di trasferimento è:

$$W(z) = \frac{1}{z-1}$$

ma questa funzione di trasferimento è la stessa del caso

$$\overline{A} = 1, \overline{B} = 1, \overline{C} = 1.$$

Come si nota le due realizzazioni hanno dimensione diversa, la prima di dimensione 2, la seconda di dimensione 1.
A questo punto si pone la necessità di utilizzare tecniche di calcolo che forniscano realizzazioni in cui lo spazio di stato ha dimensione più piccola possibile. Questo si traduce in una minore complessità delle procedure di calcolo e un risparmio economico in termine di realizzazione fisica.

Esempio (sistema a due ingressi e due uscite).

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & 0 \\ \frac{2}{z(z+2)} & \frac{1}{z+2} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} z^2+2z & 0 \\ 2z+2 & z^2+1 \end{bmatrix}}{z^3+3z^2+2z} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z^2}{z^3+3z^2+2z}$$

con $p = q = 2$ e $n = 3$ (n grado del denominatore); si ottiene una realizzazione di dimensione 6. In seguito viene mostrato che è possibile ottenere due realizzazioni di dimensione minore tramite semplici calcoli.
La matrice data definisce due legami ingresso-uscita mediante vettori riga a due elementi:

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & 0 \\ \frac{2}{z(z+2)} & \frac{1}{z+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(z) \\ W_2(z) \end{bmatrix}$$

Si ha quindi la presenza di due legami. Il primo

$$W_1(z) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}{z+1}$$

con $n_1 = 1$ realizzabile tramite le matrici

$$A_1 = [-1], B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = [1]$$

mentre il secondo

$$W_2(z) = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z}{z^2 + 2z}$$

con $n_2 = 2$ realizzabile tramite le matrici

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partire da W_1 e da W_2 si calcola una realizzazione di dimensione $n_1 + n_2 = N = 3$ mediante le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Una metodologia alternativa si basa sulla realizzazione delle colonne. Sempre riferendosi all'esempio precedente

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & 0 \\ \frac{2}{z(z+2)} & \frac{1}{z+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ W_1(z) & \vdots & W_2(z) \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

Si ha quindi la presenza di due legami. Il primo con dimensione $n_1 = 3$

$$W_1(z) = \frac{\begin{bmatrix} z(z+2) \\ 2(z+1) \end{bmatrix}}{z(z+1)(z+2)}$$

mentre il secondo con dimensione $n_2 = 1$

$$W_2(z) = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{z+2}$$

La realizzazione totale avrà dimensione $N = n_1 + n_2 = 4$ rappresentata dalle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Si è dimostrato che partendo dalla stessa matrice di trasferimento si possono ottenere realizzazioni di dimensione diversa.

In conclusione, data una matrice di trasferimento ed una sua realizzazione Σ, per ottenere una realizzazione raggiungibile ed osservabile basta spostarsi da Σ ad un suo sottosistema osservabile $\Sigma_{\mathcal{O}}$ e poi al sottosistema raggiungibile $\Sigma_{\mathcal{OR}}$ (il quale è anche osservabile). Con i metodi precedentemente osservati e questo appena descritto si può sempre ottenere una realizzazione minima.
Quello che lega due arbitrarie realizzazioni minime di $W(\cdot)$ è l'*equivalenza algebrica* tra le due, ovvero la riconducibilità ad un unico sistema dinamico (raggiungibile ed osservabile) riferito a basi diverse nello spazio di stato. (di seguito la proposizione sull'equivalenza algebrica)

Proposizione 3.1.1. *Date due realizzazioni minime di $W(\cdot)$, $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$ e $\Sigma_2 = (A_2, C_2, B_2)$ e sia n la loro dimensione. Esiste allora una matrice non singolare*[3] *$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ per cui*

$$A_1 = T^{-1}A_2T, \quad B_1 = T^{-1}B_2, \quad C_1 = C_2T \tag{3.12}$$

Dimostrazione. prendendo $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ come le matrici di raggiungibilità ed osservabilità di Σ_1 e Σ_2, per la proposizione (3.0.3) si può affermare che

$$\mathcal{O}_1\mathcal{R}_1 = \mathcal{O}_2\mathcal{R}_2 \tag{3.13}$$

e quindi

$$\mathcal{O}_2^T\mathcal{O}_1\mathcal{R}_1 = \mathcal{O}_2^T\mathcal{O}_2\mathcal{R}_2 \tag{3.14}$$

Siccome $\mathcal{O}_2^T\mathcal{O}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ha lo stesso rango di $\mathcal{O}_2$, essa è invertibile e da (3.13) si ottiene

$$TR_1 = \mathcal{R}_2 \qquad \textit{con} \qquad T = (\mathcal{O}_2^T\mathcal{O}_2)^{-1}\mathcal{O}_2^T\mathcal{O}_1 \tag{3.15}$$

perciò T ha rango non inferiore rispetto a quello di $\mathcal{R}_2$ ($\rho(\mathcal{R}_2) = n$) e quindi risulta invertibile. Segue direttamente da (3.15)

$$TB_1 = B_2 \tag{3.16}$$

da (3.13) e da (3.15)

$$\mathcal{O}_2\mathcal{R}_2 = \mathcal{O}_1T^{-1}\mathcal{R}_2 \tag{3.17}$$

quindi

$$(\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_1T^{-1})(\mathcal{R}_2\mathcal{R}_2^T) = 0 \tag{3.18}$$

dall'invertibilità di $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_2^T$ si ottiene

$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1T^{-1} \tag{3.19}$$

[3]Una matrice singolare è una matrice quadrata con determinante uguale a 0, quindi *non* invertibile

e quindi $C_2 = C_1 T^{-1}$.
Svolgendo i passaggi della dimostrazione della proposizione (3.0.3) si verifica che

$$\mathcal{O}_1 A_1 \mathcal{R}_1 = \mathcal{O}_2 A_2 \mathcal{R}_2 \tag{3.20}$$

e grazie a (3.15) e (3.19) si ricava

$$\mathcal{O}_1 A_1 \mathcal{R}_1 = \mathcal{O}_2 A_2 \mathcal{R}_2 = \mathcal{O}_1 T^{-1} A_2 T \mathcal{R}_1 \tag{3.21}$$

che corrisponde a scrivere

$$\mathcal{O}_1(A_1 - T^{-1}A_2T)\mathcal{R}1 = (\mathcal{O}_1^T\mathcal{O}_1)(A_1 - T^{-1}A_2T)(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_1^T) = 0 \tag{3.22}$$

dato che $\mathcal{O}_1^T\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_1^T$ sono invertibili segue infine

$$A_1 = T^{-1}A_2T \tag{3.23}$$

□

Un'ulteriore tecnica di calcolo è la costruzione diretta di realizzazioni minime a partire da una matrice di trasferimento $W(\cdot)$, senza passare da un sottoinsieme raggiungibile e/o osservabile (come spiegato nel metodo precedente) di una realizzazione non minima. Analizzando il caso *scalare* continuo ($q = p = 1$) segue la seguente proposizione.

Proposizione 3.1.2. *Siano $\overline{x}(z)/\overline{y}(z)$ una rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento propria $w(z)$, sia $\overline{n}$ il grado di $\overline{y}(z)$ e $\Sigma = (A, \mathbf{b}, C)$ una realizzazione di $w(z)$.*
Si hanno le seguenti equivalenze:

1. *$\Sigma = (A, \mathbf{b}, C)$ è una realizzazione minima di $w(z)$*
2. *$dim(\Sigma) = \overline{n}$*
3. *i polinomi $Cadj(zI - A)\mathbf{b}$ e $det(zI - A)$ sono coprimi*[4]

Dimostrazione. $1 \iff 2$)Considerando quanto visto precedentemente, esiste una realizzazione di $w(z)$ la cui dimensione è la stessa di $\overline{y}(z)$. Quindi se Σ è realizzazione minima la sua dimensione non può eccedere $\overline{n}$, ma non può esserne inferiore, in quanto

$$W(z) = \frac{Cadj(zI - A)}{det(zI - A)} \tag{3.24}$$

[4]polinomi di questo tipo non ammettono nessun polinomio (di grado almeno 1) come divisore comune

darebbe una rappresentazione di $w(z)$ con denominatore di grado inferiore a $\overline{y}(z)$ di una sua rappresentazione irriducibile.
$3 \iff 1$) se $Cadj(zI-A)\mathbf{b}$ e $det(zI-A)$ sono coprimi, il loro quoziente restituisce una rappresentazione irriducibile di $w(z)$, per la dimostrazione $1 \iff 2$ si è visto che la dimensione minima realizzabile è uguale al grado del determinante, perciò Σ è realizzazione minima. Se i due polinomi non sono coprimi, l'eliminazione dei fattori comuni di (3.24) conduce ad una rappresentazione di $w(z)$ con denominatore di grado $\overline{n}$ minore del grado di $det(zI-A) = dim\Sigma$. Se si avverasse ciò esisterebbe una realizzazione di dimensione $\overline{n}$ con Σ che non è una realizzazione minima $\square$

3.2 Il metodo Gilbert

Questa tecnica di realizzazione, consente di costruire nel caso di sistemi a più ingressi ed uscite una terna minima. Il seguente metodo risulta semplice nei casi in cui la molteplicità degli zeri del minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore nella matrice di trasferimento è pari ad uno. In tal caso si ha la costruzione di una realizzazione di dimensione $(\sum_{k=1}^{m} r_k)$, dove m è il numero dei poli mentre r_k il rango del k-mo residuo nella espansione in frazioni parziali.
La minimalità risulta di facile intuizione, in quanto il rango del residuo che corrisponde ad un autovalore di ordine uno coincide con la dimensione del relativo autospazio, che a sua volta coincide con la molteplicità algebrica.

$$W(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{z-\lambda_k} \tag{3.25}$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j \quad per \quad i \neq j$

$$\rho(R_k) = r_k$$

$$A = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_m \end{bmatrix}, \Delta_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

con Δ_k di dimensione $r_k \times r_k$

$$R_k = C_k B_k \qquad k = 1, \dots, m$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_m \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

con R_k di dimensione $(p \times r_k) \times (r_k \times q)$.

Esempio.

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{3z+4}{z+1} & \frac{2}{z+1} \\ \frac{-1}{(z+1)(z+2)} & \frac{-2z-3}{z+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & \frac{2}{z+1} \\ \frac{-1}{(z+1)(z+2)} & \frac{1}{z+2} \end{bmatrix}$$

dove $W(z)$ è stata scomposta nella matrice D di termini costanti e il restante. Sviluppando $W(z)$ in fratti semplici

$$W(z) = D + \frac{R_1}{z+1} + \frac{R_2}{z+2}$$

questo implica i seguenti valori di R_1 e R_2

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il loro rango è

$$r_1 = \rho(R_1) = 2 \qquad r_2 = \rho(R_2) = 1$$

quindi la dimensione della realizzazione è $\sum_{n=1}^{2} r_n = 2 + 1 = 3$. Fattorizzando i residui

$$R_1 = C_1 B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = C_2 B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si conclude dando le matrici della realizzazione.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Si nota che A è una matrice diagonale (sulla quale ci sono gli autovalori di $W(z)$ ripetuti per il rango del residuo associato ad ogni autovalore), la matrice B si calcola mettendo in colonna le matrici B_k e la matrice C si ottiene mettendo in riga le C_k.

Capitolo 4

Realizzazioni e stabilità

Dato un sistema lineare $\Sigma = (A, B, C)$, questo si dice *esternamente stabile* se ad ogni ingresso limitato corrisponde un'uscita *forzata* limitata.
Questo tipo di stabilità quindi è un'informazione relativa al legame ingresso - uscita con condizioni iniziali nulle e dipende solo da struttura della matrice di trasferimento di Σ. Le proposizioni che si discuteranno in seguito sono relative alla stabilità esterna e alla stabilità interna, ovvero la dinamica delle variabili di stato in evoluzione libera.

Proposizione 4.0.1. *Sia $\Sigma = (A, B, C)$ una qualsiasi realizzazione della matrice razionale strettamente propria $W(z)$, tutti i poli[1] di $W(z)$ sono autovalori di A. Se Σ è minima l'insieme dei poli e l'insieme degli autovalori di A coincidono.*

Dimostrazione. Dato il sistema $\Sigma = (A, B, C)$ che realizza

$$W(z) = \frac{Cadj(zI - A)B}{det(zI - A)}$$

si nota immediatamente che i poli di $W(z)$ sono inclusi negli zeri di $det(zI-A)$ e quindi fra gli autovalori di A.
Supponendo che Σ sia realizzazione minima procediamo a verificare viceversa, che ogni autovalore di A è polo di $W(z)$. Con un eventuale cambio di base, consideriamo A in forma canonica di Jordan. Si indica con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A e con P_i la matrice diagonale a blocchi costruita tramite i miniblocchi relativi all'autovalore λ_i di A.

[1] un $p \in \mathbb{C}$ si dice polo di una matrice razionale se è polo di almeno uno dei suoi elementi

$W(z)$ assume la forma

$$W(z) = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & zI - P_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} C_i (zI - P_i)^{-1} B_i$$

Ogni addendo della forma $W_i = C_1(zI - P_i)^{-1} B_i$ ha un polo in λ_i oppure non ne ha (in questo caso W_i è una matrice nulla essendo strettamente propria). I poli nella somma non si cancellano in quanto somma di addendi distinti e quindi con poli distinti. Da ciò si arriva a concludere che i poli di $W(z)$ sono tutti e soli i poli degli addendi $W_i(z)$.
Se così non fosse,ovvero che qualche (anche uno solo) autovalore λ_e di A non comparisse come polo di $W(z)$, l'addendo $W_e(z)$ sarebbe nullo non dando quindi contributo alla somma per costuire $W(z)$, che quindi diventerebbe realizzabile con dimensione minore alla minima, eliminando il blocco e nelle matrici A, B, C. □

Proposizione 4.0.2. *Dato un sistema $\Sigma = (A, B, C)$ che è realizzazione di $W(z)$, e sia $\Sigma_{or} = (A_{or}, B_{or}, C_{or})$ il sottosistema osservabile e raggiungibile di Σ (quindi la sua realizzazione minima). Sono equivalenti le proprietà:*

1. *Σ è esternamente stabile*
2. *Σ_{or} è esternamente stabile*
3. *Σ_{or} è internamente stabile*
4. *tutti i poli di $W(z)$ hanno modulo minore di 1.*

Dimostrazione. 1 $\iff$ 2 è di facile intuizione, in quanto Σ e Σ_{or} hanno la stessa matrice di trasferimento $W(z)$, quindi ad ogni ingresso le corrispettive uscite forzate di Σ e di Σ_{or} corrispondono perfettamente.
3 $\iff$ 4 Σ_{or} è internamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A_{or} hanno modulo minore di 1 e di conseguenza questo vale, grazie alla proposizione (4.0.1), se e solo se i poli di $W(z)$ hanno modulo minore di 1.
3 $\Rightarrow$ 2 In presenza di un ingresso limitato, che quindi soddisfa

$$\|\mathbf{u}(t)\| < \Gamma, \forall t \geq 0$$

L'uscita forzata si comporta

$$\|\mathbf{y}_f(t)\| = \|\sum_{k=0}^{t-1} C_{or} A_{or}^{t-1-k} B_{or} \mathbf{u}(k)\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{t-q} \|C_{or}\| \|A_{or}^{t-1-k}\| \|B_{or}\| \|\mathbf{u}(k)\| \leq$$

$$\leq \|C_{or}\| \|B_{or}\| \Gamma \sum_{k=0}^{t-1} \|A_{or}^{t-1-k}\| =$$

$$= \|C_{or}\| \|B_{or}\| \Gamma \sum_{k=0}^{t-1} \|A_{or}^{k}\| \leq$$

$$\leq \|C_{or}\| \|B_{or}\| \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \|A_{or}^{k}\| \tag{4.1}$$

Poiché gli autovalori di A_{or} hanno modulo minore di 1 (da 3 $\iff$ 4), la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_{or}^k\|$ converge ad un numero non negativo φ, quindi da (4.1)

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|C_{or}\| \|B_{or}\| \varphi \Gamma \qquad \forall t \geq 0$$

2 $\Rightarrow$ 3 Si procede provando che se A_{or} ha un autovalore λ con modulo ≥ 1, allora esiste un ingresso limitato di $\Sigma_o r$ a cui corrisponde un'uscita forzata non limitata. Sia $\mathbf{v}$ una autovettore di A_{or} relativo all'autovalore λ. Ipotizzando che Σ_{or} abbia dimensione $\overline{n}$, esiste un ingresso

$$\overline{\mathbf{u}}(0), \overline{\mathbf{u}}(1), \ldots, \overline{\mathbf{u}}(\overline{n} - 1)$$

che porta il sistema (ricordando che è raggiungibile) dallo stato $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ allo stato $\mathbf{x}(\overline{n}) = \mathbf{v}$.
Se il modulo di λ è maggiore di 1, applicando al sistema un ingresso nullo dallo stato $\mathbf{x}(\overline{n}) = \mathbf{v}$, l'evoluzione del sistema per $t \geq \overline{n}$ è data da

$$\mathbf{x}(t) = A_{or}^{t-\overline{n}} \mathbf{v} = \lambda^{t-\overline{n}} \mathbf{v} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{y}(t) = C_{or} \mathbf{x}(t) = \lambda^{t-\overline{n}} C_{or} \mathbf{v}, \qquad t \geq \overline{n} \tag{4.3}$$

Se l'uscita (4.3) fosse nulla, ovvero l'uscita in evoluzione libera indotta dallo stato $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ fosse nulla, si andrebbe in contraddizione con l'ipotesi di osservabilità del sistema. Quindi l'uscita (4.3) diverge in norma quando $t \to \infty$, e la successione limitata in ingresso

$$\overline{\mathbf{u}}(0), \overline{\mathbf{u}}(1), \ldots, \overline{\mathbf{u}}(\overline{n}-1), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots \tag{4.4}$$

porta ad un uscita forzata non limitata.
Se il modulo di λ è uguale a 1 bisogna applicare:

- nell'intervallo $[\mathbf{0}, \overline{n}-1]$ l'ingresso che porta da stato $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ nello stato $\mathbf{x}(\overline{n}) = \mathbf{v}$

- nell'intervallo $[\overline{n}, 2\overline{n}-1]$ l'ingresso

  $$\mathbf{u}(\overline{n}) = \lambda^{\overline{n}}\overline{\mathbf{u}}(0), \quad \mathbf{u}(\overline{n}+1) = \lambda^{\overline{n}}\overline{\mathbf{u}}(1), \quad \ldots, \quad \mathbf{u}(2\overline{n}-1) = \lambda^{\overline{n}}\overline{\mathbf{u}}(\overline{n}-1)$$

  che porta il sistema dallo stato $\mathbf{x}(\overline{n}) = \mathbf{v}$ nello stato $\mathbf{x}(2\overline{n}) = 2\lambda^{\overline{n}}\mathbf{v}$

- nell'intervallo $[2\overline{n}, 3\overline{n}-1]$ l'ingresso

  $$\mathbf{u}(2\overline{n}) = \lambda^{2\overline{n}}\overline{\mathbf{u}}(0), \quad \mathbf{u}(2\overline{n}+1) = \lambda^{2\overline{n}}\overline{\mathbf{u}}(1), \quad \ldots, \quad \mathbf{u}(3\overline{n}-1) = \lambda^{2\overline{n}}\overline{\mathbf{u}}(\overline{n}-1)$$

  che porta il sistema dallo stato $\mathbf{x}(2\overline{n}) = 2\lambda^{\overline{n}}\mathbf{v}$ nello stato $\mathbf{x}(3\overline{n}) = 3\lambda^{2\overline{n}}\mathbf{v}$ e via così.

Negli istanti $\psi\overline{n}$, con $\psi \in \mathbb{N}$, il sistema raggiunge lo stato
$\mathbf{x}(\psi\overline{n}) = \psi\lambda^{(\psi-1)\overline{n}}\mathbf{v}$ e l'uscita

$$\mathbf{y}(\psi\overline{n}) = \psi\lambda^{(\psi-1)\overline{n}}C_{or}\mathbf{v}$$

diverge in norma. Quindi l'ingresso limitato

$$\overline{\mathbf{u}}(0), \overline{\mathbf{u}}(1), \ldots, \overline{\mathbf{u}}(\overline{n}-1), \lambda^{\overline{n}}\mathbf{u}(0), \lambda^{\overline{n}}\mathbf{u}(1), \ldots, \lambda^{\overline{n}}\mathbf{u}(\overline{n}-1), \lambda^{2\overline{n}}\mathbf{u}(0), \lambda^{2\overline{n}}\mathbf{u}(1), \ldots \tag{4.5}$$

porta ad avere un'uscita forzata non limitata. Se l'autovalore λ e l'autospazio $\mathbf{v}$ presi in considerazione, assumessero valori complessi, l'ingresso (4.4) o (4.5) e la corrispondente uscita forzata ammetterebbero valori complessi ma, dal momento che le matrici del sistema sono reali, la parte reale e la parte immaginaria dell'ingresso forzano la costruzione di una parte reale e una parte immaginaria dell'uscita.
Se un'uscita non è limitata, può essere illimitata solo la sua parte reale, in tal

caso l'ingresso limitato con parte reale di (4.4) o (4.5) produce un'uscita reale non limitata. Altrimenti può essere illimitata solo la sua parte immaginaria, e in questo caso, se si moltiplica per l'unità immaginaria la parte immaginaria di (4.4) o (4.5) si ottiene nuovamente un ingresso reale limitato che induce un'uscita reale non limitata. □

La proposizione appena vista vale anche nel caso di sistemi continui; l'unica differenza rispetto il caso discreto sta nella posizione dei poli e autovalori, che nel caso continuo, si limitano al semipiano sinistro $\mathbf{Re}(s) < 0$, mentre nel caso discreto ci si riferisce al disco unitario $|z| < 1$.

Esempio. Dato il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Ax(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) = Cx(t)$$

che è la realizzazione minima della funzione di trasferimento:

$$W(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-\frac{1}{8}}$$

Il sistema non è esternamente stabile (non tutti i poli hanno modulo minore di 1) ma nessun ingresso di *durata limitata* [2]induce un'uscita forzata illimitata. Se l'ingresso è nullo per $t \geq \tau \geq 0$, partendo dallo stato

$$x(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

si ottiene un'uscita che è data da

$$y(t) = CA^{t-\tau} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{8}\right)^{t-\tau} + \beta, \qquad t \geq \tau$$

ed è limitata per qualsiasi valore di α e β.
Per ottenere un'uscita non limitata a partire da un ingresso di norma limitata, bisogna scendere al compromesso che esso abbia durata limitata. Considerando un autovettore $\mathbf{v}$ come visto nella proposizione precedente

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[2]come ad esempio l'impulso rettangolare, e segnali che tendono asintoticamente a zero quando t tende a infinito

relativo all'autovalore $\lambda = 1$ e l'ingresso $\overline{\mathbf{u}}(0) = 1, \overline{\mathbf{u}}(1) = 2$ che porta il sistema dallo stato $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ allo stato $\mathbf{x}(2) = \mathbf{v}$.
E' intuitiva la verifica che l'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 1, 3, 5, \ldots; \\ 2, & \text{se } t = 0, 2, 4, \ldots. \end{cases}$$

va a indurre un'uscita forzata <u>*non*</u> limitata, ad esempio con $y(4\psi) = \psi, \forall \psi \geq 0$, ricordando che la formula utilizzata è $\mathbf{y}(\psi\overline{n}) = \psi\lambda^{(\psi-1)\overline{n}} C_{or}\mathbf{v}$.

Capitolo 5

Appendice

Rappresentazione esterna: Dato un sistema lineare a tempo continuo con un solo ingresso ed una sola uscita, la sua rappresentazione esterna è data da una equazione differenziale del tipo:

$$y^{(n)}(t)+h_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+h_ny(t) = k_0u^{(n)}(t)+k_1u^{(n-1)}(t)+\cdots+k_nu(t)$$

con $y^i(t)$ indica la derivata i-esima dell'uscita y(t) rispetto al tempo, ed $u^i(t)$ la derivata i-esima dell'ingresso rispetto a t, con $k_i, h_i \in \mathbb{R}$.
Nel caso in cui il sistema è a tempo discreto, la sua descrizione esterna è data da una equazione del tipo:

$$y(t)+h_1y(t-1)+\cdots+h_ny(t-n) = k_0u(t)+k_1u(t-1)+\cdots+k_nu(t-n)$$

Quando si parla di rappresentazione interna si parla di una rappresentazione ingresso-uscita, a differenza della*rappresentazione esterna* che è una rappresentazione di stato

matrice di trasferimento: *(CASO DISCRETO)*
Supponendo il sistema lineare al tempo $t = 0$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

sia nello stato x_0. La rispettiva risposta libera e forzata dell'uscita sono $Y_l(z) = C(zI - A)^{-1}zx_0$ e $Y_f(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z)$.
La matrice $p \times q$

$$W(z) := C(zI - A)^{-1}B + D$$

è detta matrice di trasferimento del sistema iniziale.

matrice di trasferimento: *(CASO CONTINUO)*
Considerando il sistema lineare, invariate e continuo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

con $x(0) = x_0$.
La rispettiva risposta libera e forzata dell'uscita sono:
$Y_l(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$ e $Y_f(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$.
La matrice $p \times q$

$$W(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta matrice di trasferimento del sistema iniziale.

Raggiungibilità: I problemi di raggiungibilità sono relativi a situazioni in cui è fissato uno stato iniziale e si vuole determinare l'insieme degli stati nei quali il sistema può esser portato tramite l'applicazione dei vari ingressi ammessi.
Sia $\Sigma = (A, B, C)$ un sistema lineare discreto con stato iniziale nullo $x(0) = 0$ a cui viene applicato l'ingresso:

$$\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k-1)$$

lo stato raggiunto all'istante k è

$$x(k) = \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau}B\mathbf{u}(\tau) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix}$$

è detta matrice di raggiungibilità in k passi.
Il sistema Σ è detto raggiungibile se (condizione necessaria e sufficiente):

$$\rho^1(\mathcal{R}) = k$$

Osservabilità: i problemi di osservabilità sono relativi a situazioni in cui si vuole determinare lo stato in certo istante t a partire dai dati di ingresso

[1] Rango

e uscita.
Sia $\Sigma = (A, B, C)$ un sistema lineare discreto, lo stato $\mathbf{x}$ è *non osservabile* in k-passi se per ogni successione in ingresso

$$\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(k-2)$$

le successioni di uscita $y(\cdot)$ e $y'(\cdot)$ che corrispondono allo stato iniziale $\mathbf{x}$ e allo stato $\mathbf{0}$ coincidono negli istanti $0, 1, \ldots, k-1$, ovvero se

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-1-\tau}\mathbf{u}(\tau) + CA^t x = y'(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-1-\tau}\mathbf{u}(\tau)$$

Quindi, $\mathbf{x}$ non è osservabile in k-passi se non ho delle prove effettuate nell'intervallo $[0, k-1]$ che consentano di stabilire se lo stato iniziale è $\mathbf{0}$ o $\mathbf{x}$.
L'equazione precedente equivale a dire

$$CA^t x = y(t) - y'(t) = 0$$

che implica

$$x \in ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} = ker\mathcal{O}_k$$

$\mathcal{O}_k$ viene detta matrice di osservabilità in k-passi.
Se ho un sistema Σ di dimensione n questo si dice osservabile solo se la matrice di osservabilità ha rango n.

Forma standard di raggiungibilità: Si prenda un sistema lineare (discreto o continuo) $\Sigma = (A, B, C)$ con dimensione n e non raggiungibile che quindi presenta

$$dim X^R = dim(Im(\mathcal{R})) = d < n$$

Si assume come base dello spazio di stato X una n-upla di vettori (i primi d andranno a creare una base per X^R), e sia T la matrice di cambio base. X^R è A-invariante e $ImB \subseteq X^R$ quindi si ottiene un sistema $\overline{\Sigma} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ algebricamente equivalente a Σ

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ 0 & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} \overline{B} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \overline{C} = \begin{bmatrix} \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \end{bmatrix}$$

con $\overline{A}_{11} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ e $\overline{B}_1 \in \mathbb{R}^{d\times q}$ costituiscono una coppia raggiungibile $(\overline{A}_{11}, \overline{B}_1)$ mentre $\overline{C}_1 \in \mathbb{R}^{p\times d}$.
Il sistema $\overline{\Sigma}$ è anche detto *forma standard di raggiungibilità di* Σ.

Capitolo 6

Bibliografia

1. E. Fornasini, G. Marchesini Appunti di teoria dei sistemi *edizioni libreria progetto*

2. S. Monaco, Teoria dei sistemi - Appunti delle lezioni a.s: 2000-2001