

# Introduzione

Lo scopo di questa trattazione è quello di analizzare un sistema fisico e progettare per esso un adeguato sistema di controllo.

Il sistema consiste in un veicolo terrestre a quattro ruote a trazione posteriore e si vuole stabilizzarne la traiettoria su una particolare retta nello spazio, che indicheremo come “mezzeria della carreggiata di riferimento”, garantendo che entro un tempo massimo  $t_s$  il veicolo si mantenga tra due rette che fungono da margini superiore e inferiore della carreggiata.

Per poter analizzare il sistema e progettare un controllo adeguato abbiamo ricavato il modello matematico, non lineare, del moto del veicolo e per proseguire nella trattazione è stato linearizzato nell’intorno del punto di equilibrio scelto, ovvero la “mezzeria della carreggiata”. Una volta ottenuto il sistema lineare descrittivo della dinamica nel punto di equilibrio abbiamo potuto ricavarne la funzione di trasferimento.

Prima di procedere con la sintesi del controllore abbiamo studiato la stabilità del sistema ad anello aperto e di un possibile sistema ottenuto dalla retroazione del primo.

All’inizio della fase di progettazione del controllore abbiamo descritto le specifiche di progetto ricavandole dagli obiettivi esposti nel paragrafo *1.1 (Descrizione del progetto)*.

In seguito si è proceduto con la sintesi di un sistema di controllo del tipo a *doppio anello in cascata*, che stabilizza preliminarmente il sistema con un controllore e un anello di retroazione e successivamente regola le specifiche statiche e dinamiche con un secondo controllore e un secondo anello di retroazione.

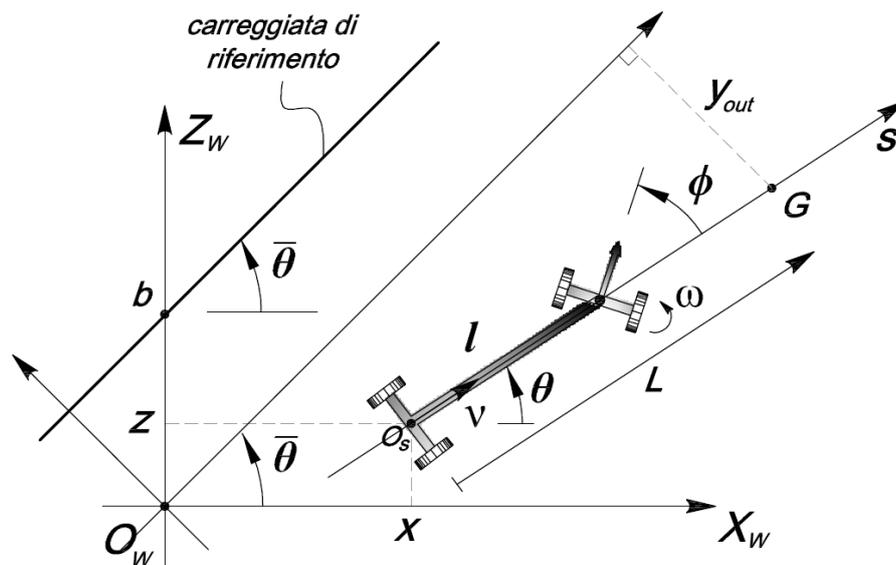


# Capitolo 1

## Modello fisico

### 1.1 Descrizione del sistema

Si riporta in figura sottostante una rappresentazione semplificata del modello cinematico del veicolo.



I parametri e riferimenti del sistema che useremo nel seguito della trattazione sono definiti come:

- $x$  - ascissa del punto mediano  $O_S$  dell'asse posteriore del veicolo nel sistema di riferimento  $\langle W \rangle$
- $z$  - ordinata del punto mediano  $O_S$  dell'asse posteriore del veicolo nel sistema di riferimento  $\langle W \rangle$
- $\theta$  - angolo tra l'asse longitudinale  $s$  del veicolo e l'asse delle ascisse  $X_W$
- $\phi$  - angolo di sterzata

- $v$  - vettore della velocità di avanzamento dell'asse posteriore
- $\omega$  - velocità di sterzata
- $X_W$  - asse delle ascisse del sistema di riferimento  $\langle W \rangle$
- $Z_W$  - asse delle ordinate del sistema di riferimento  $\langle W \rangle$
- $Y_{out}$  - asse delle ordinate del sistema di riferimento  $\langle J \rangle$  ruotato di un angolo pari a  $\bar{\theta}$  rispetto  $\langle W \rangle$
- $G$  - punto lungo l'asse  $s$  del veicolo distante  $L$  dal punto mediano dell'asse posteriore  $O_s$
- $\bar{\theta}$  - inclinazione della mezzeria della "carreggiata di riferimento" rispetto l'asse delle ascisse  $X_W$
- $L$  - distanza del punto  $G$  da  $O_s$  lungo l'asse  $s$
- $l$  - lunghezza del corpo vettura del veicolo
- $b$  - intercetta della retta che identifica la mezzeria della "carreggiata di riferimento"
- $v_0$  - velocità iniziale del veicolo

Attribuiamo i seguenti valori numerici alle costanti del sistema:

$$\bar{\theta} = 45^\circ \quad L = l = 1m \quad b = 10\sqrt{2}$$

E supponiamo come velocità iniziale  $v_0 = -12\text{m/s}$  e come coordinate iniziali del punto  $O_s$   $x = x_0 = 0$  e  $z = z_0 = 5\sqrt{2}$ .

Consideriamo inoltre come mezzeria della "carreggiata di riferimento", su cui stabilizzare la traiettoria del veicolo, la retta di equazione  $z = x + b = x + 10\sqrt{2}$ , e come margini, superiore e inferiore, della carreggiata le rette di equazione  $z = x + 14.5$  e  $z = x + 13.8$ . Infine è ragionevole supporre come tempo massimo desiderato  $t_s = 1.5\text{s}$  perché il sistema entri e si mantenga definitivamente tra queste due rette.

## 1.2 Modellizzazione

Il sistema meccanico preso in esame consiste in un veicolo a trazione posteriore costituito da due corpi rigidi: un corpo vettura, solidale con l'asse posteriore, e l'asse anteriore. Entrambe le ruote anteriori ruotano rispetto al corpo vettura di un angolo di sterzo  $\phi$  e con una velocità di sterzo  $\omega$ . Il vettore  $v$  rappresenta la velocità del punto mediano dell'asse posteriore.

Per la modellizzazione matematica del sistema consideriamo un veicolo fortemente semplificato, in particolare approssimiamo il corpo vettura con un'asta rigida di lunghezza  $l = 1m$  e spessore trascurabile. Oltre a questa approssimazione del veicolo ci poniamo sotto le ulteriori ipotesi semplificative elencate di seguito:

- Si trascureranno tutti gli effetti legati all'aerodinamica del veicolo, come l'attrito viscoso con l'aria.

- Le ruote compiranno moto di puro rotolamento senza scivolare e verranno trascurate le resistenze al rotolamento dovute all'attrito volvente.
- Il piano su cui si muoverà il veicolo sarà privo di irregolarità e avrà pendenza nulla in ogni punto.
- Si supponrà che non agiscano effetti esterni sul veicolo e sul suo moto.
- Sarà trascurata la massa del veicolo.
- La velocità del veicolo resterà costante al suo valore iniziale per tutto il moto.

Possiamo scomporre il vettore velocità  $v$  nelle sue due componenti nel piano  $\langle W \rangle$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v \sin \theta \\ \dot{x} &= v \cos \theta \end{aligned}$$

che descriveranno il moto del veicolo rispetto agli assi  $X_W$  e  $Z_W$ .

Sotto l'effetto dello sterzo e dell'avanzamento il corpo vettura compie uno spostamento angolare  $\theta$  rispetto l'asse delle ascisse del sistema  $\langle W \rangle$ , con una velocità angolare dunque data da  $\dot{\theta} = \frac{1}{l} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{l} v_{tg}$ , dove  $r$  è l'arco di traiettoria del moto di rotazione e  $v_{tg}$  è la velocità tangenziale di quest'ultimo, per cui:

$$\dot{\theta} = \frac{v}{l} \tan \phi$$

Infine la velocità di sterzata, ovvero la velocità con cui le ruote anteriori ruotano rispetto al corpo della vettura, corrisponderà alla derivata temporale della funzione che descrive l'andamento dell'angolo di tale rotazione:

$$\dot{\phi} = \omega$$

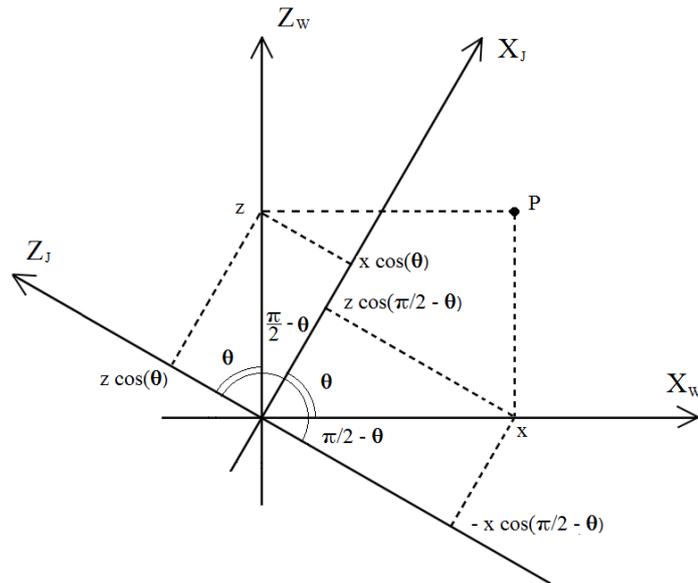
Possiamo a questo punto descrivere il moto del veicolo nel sistema di riferimento  $\langle W \rangle$  con il seguente modello di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{z} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{l} \tan \phi \\ \dot{\phi} = \omega \end{cases}$$

Osserviamo che l'ingresso del sistema, ossia il parametro su cui agiremo per la regolazione della traiettoria, sarà la grandezza  $\omega$ , cioè la velocità di rotazione dello sterzo. Per quanto riguarda invece l'uscita, essa sarà definita in seguito.

Per facilitare lo studio del sistema operiamo un cambiamento del sistema di coordinate. In particolare facciamo riferimento al sistema

$\langle J \rangle$  ruotato di un angolo pari a  $45^\circ$  rispetto  $\langle W \rangle$ , in modo da poter considerare la retta della carreggiata parallela al nuovo asse delle ascisse.



Possiamo esprimere le coordinate di un punto nel piano rispetto al sistema di riferimento  $\langle J \rangle$  in funzione delle coordinate di  $\langle W \rangle$ :

$$\begin{cases} x_J = x_W \cos 45^\circ + z_W \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} x_W + \frac{1}{\sqrt{2}} z_W \\ z_J = -x_W \sin 45^\circ + z_W \cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_W + \frac{1}{\sqrt{2}} z_W \end{cases}$$

Riscrivendo in forma matriciale, e pertanto mettendo in evidenza la matrice di cambiamento di base, risulta:

$$\begin{bmatrix} x_J \\ z_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_W \\ z_W \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo scegliere come uscita del sistema l'ordinata  $z_J$  del punto G del nuovo sistema di coordinate  $\langle J \rangle$ :

$$y = z_J = z_{J, O_s} + L \sin(\theta - \bar{\theta}) = z_{J, O_s} + \sin(\theta - 45^\circ)$$

Dove  $z_{J, O_s}$  è l'ordinata del punto  $O_s$  rispetto  $\langle J \rangle$ .

Avendo definito la matrice di cambiamento di base, riusciamo ad esprimere l'uscita anche nelle coordinate del sistema iniziale  $\langle W \rangle$ :

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_{W, O_s} + \frac{1}{\sqrt{2}} z_{W, O_s} + \sin(\theta - 45^\circ)$$

Con  $x_{W,0_s} = x$  e  $z_{W,0_s} = z$  coordinate del punto  $O_s$  rispetto  $\langle W \rangle$ .

Notiamo che per proseguire con lo studio occorre linearizzare il sistema attorno alla traiettoria normale di equilibrio identificata dalla “mezzeria della carreggiata di riferimento”, che con le attuali variabili di stato  $x, z, \phi, \theta$  corrisponde a:

$$(x_{eq}, z_{eq}, \theta_{eq}, \phi_{eq}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t, \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t + 10\sqrt{2}, 45^\circ, 0 \right)$$

Al fine quindi di ottenere il sistema linearizzato nell'intorno di tale retta, consideriamo le seguenti nuove variabili di stato che definiscono le variazioni rispetto all'equilibrio:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t \\ \tilde{x}_2 = z - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t - 10\sqrt{2} \\ \tilde{x}_3 = \theta - 45^\circ \\ \tilde{x}_4 = \phi \end{cases}$$

Rispetto tali variabili il punto di equilibrio risulta chiaramente:

$$(\tilde{x}_{1eq}, \tilde{x}_{2eq}, \tilde{x}_{3eq}, \tilde{x}_{4eq}) = (0, 0, 0, 0)$$

Ricavando le variabili vecchie in funzione delle nuove, possiamo riscrivere il modello di stato non lineare in termini di quest'ultime e dell'ingresso  $\tilde{u}$ :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = v_0 \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = v_0 \cos(\tilde{x}_3 + 45^\circ) - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \dot{z} - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = v_0 \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = v_0 \sin(\tilde{x}_3 + 45^\circ) - \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 = f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \dot{\theta} = \frac{v_0}{l} \tan \phi = v_0 \tan \tilde{x}_4 = f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \\ \dot{\tilde{x}}_4 = \dot{\phi} = \omega = \tilde{u} = f_4(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \end{cases}$$

Mentre l'uscita diventa:

$$\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t + 10\sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t\right) + \sin \tilde{x}_3$$

Il sistema nelle nuove variabili linearizzato nel punto di equilibrio  $(0, 0, 0, 0)$  ha espressione in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= C\tilde{\mathbf{x}} + D\tilde{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Dove  $A$  e  $C$  sono le matrici Jacobiane delle funzioni  $f(\tilde{x}) = (f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), f_3(\tilde{x}), f_4(\tilde{x}))$  e  $\tilde{y}(\tilde{x}) = \tilde{y}(\tilde{x})$ , rispettivamente, valutate nel punto di equilibrio  $\tilde{x}_{eq} = (0, 0, 0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{x}_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial f_4}{\partial \tilde{x}_4} \end{bmatrix}_{\tilde{x}_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_0/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & v_0/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_4} \end{bmatrix}_{\tilde{x}_{eq}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = 0;$$

La funzione di trasferimento  $G(s)$  tra ingresso  $\tilde{u}$  e uscita  $\tilde{y}$  può essere calcolata, dopo aver linearizzato il sistema, con la formula nota per sistemi lineari non autonomi:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Da cui si ricava:

$$G(s) = v_0 \frac{(s + v_0)}{s^3}$$

Ricordando che  $v_0 = -12m/s$  abbiamo come funzione di trasferimento del sistema:

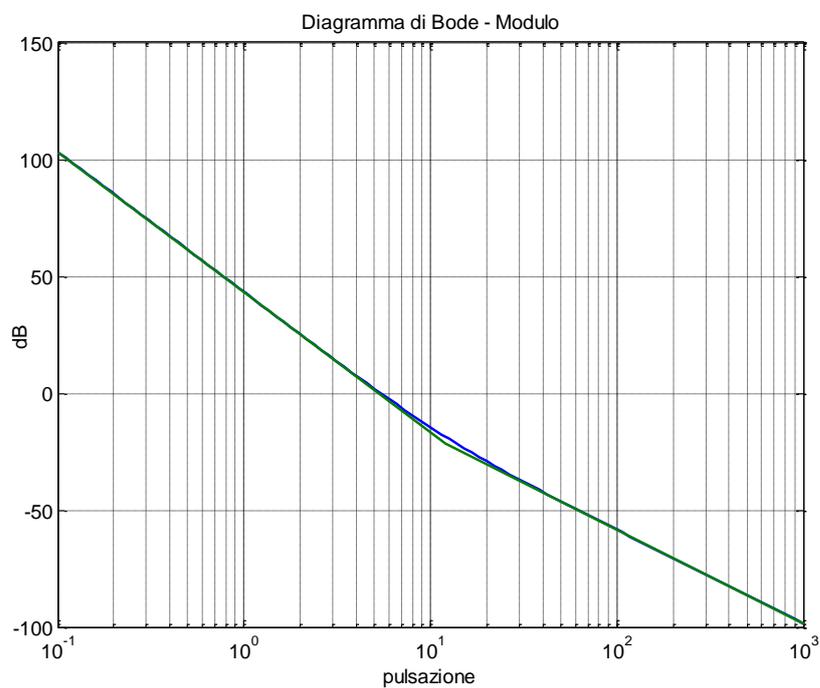
$$G(s) = -12 \frac{(s - 12)}{s^3} = 144 \frac{(1 - \frac{s}{12})}{s^3}$$

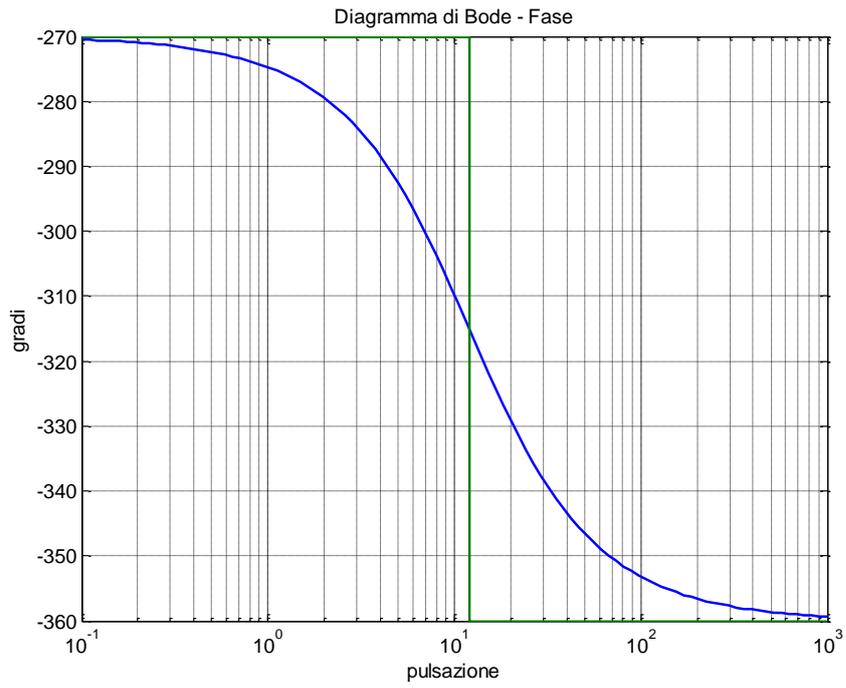
# Capitolo 2

## Analisi di stabilità

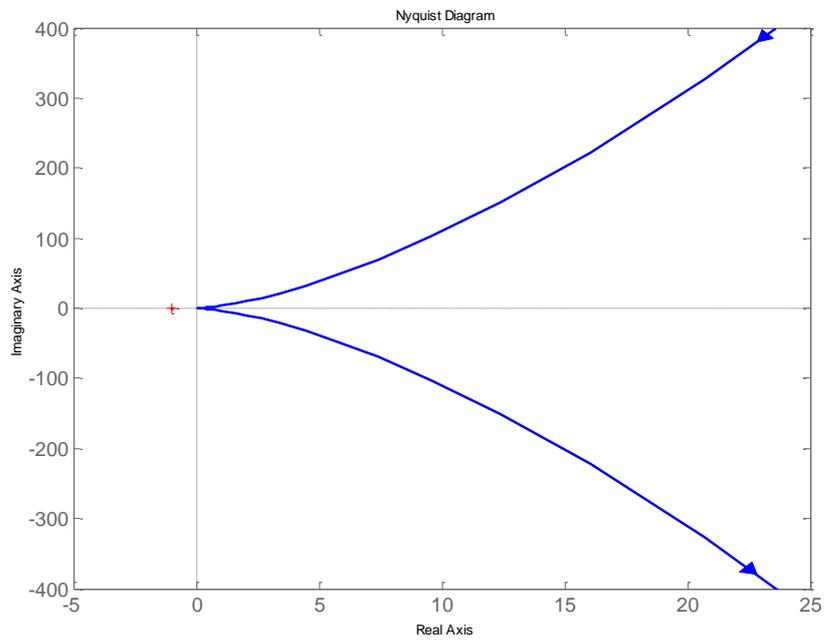
### 2.1 Diagramma di Bode e di Nyquist

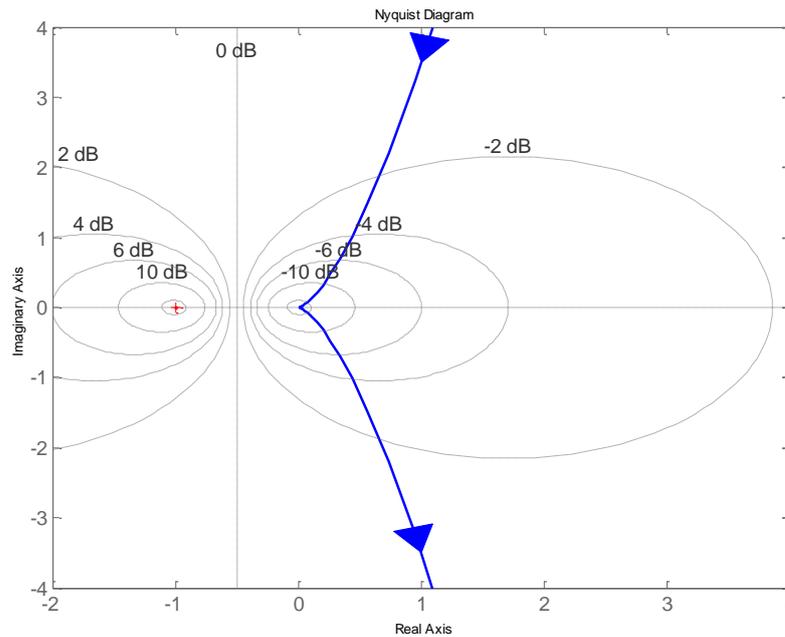
Si riporta di seguito il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione  $G(s)$  ricavata in precedenza:





Il diagramma di Nyquist invece risulta come nelle seguenti figure:





Osserviamo innanzitutto che  $G(s)$  non è BIBO stabile, avendo un polo triplo nell'origine, a cui sono associati modi divergenti, ma non possiede comunque poli a parte reale positiva ( $n_{G+} = 0$ ).

Dal diagramma di Nyquist modificato (cioè con chiusura della curva al finito che parte da un ramo del diagramma, per pulsazioni  $\omega > 0$ , e compie un giro e mezzo in senso orario prima di richiudersi nell'altro ramo, per  $\omega < 0$ ) possiamo notare che c'è instabilità anche per il sistema retroazionato  $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ . Infatti, applicando il criterio esteso di Nyquist si deduce che il diagramma circonda il punto critico  $-1 + j0$  e che compie  $N_G = -2$  giri in senso antiorario attorno a questo. Dunque il numero di poli a parte reale positiva di  $W(s)$  sono:  $n_{W+} = n_{G+} - N_G = 2$

Notiamo inoltre che dal criterio di Nyquist possiamo rilevare che l'instabilità persiste anche variando il guadagno di Bode del sistema ad anello aperto, sia per valori positivi che per valori negativi (a parte il caso banale di guadagno nullo). Infatti per guadagno  $K > 0$  e per guadagno  $K < 0$ , il diagramma di  $KG(s)$  compie rispettivamente  $N_G = -2$  e  $N_G = -1$  giri in senso antiorario attorno al punto critico, quindi  $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$  avrà sempre due poli instabili nel primo caso e un polo instabile nel secondo.

Per questo motivo nella progettazione del controllore saremo costretti ad escludere a priori un controllo di tipo proporzionale per soddisfare le specifiche richieste, poiché in tal caso non avremo nemmeno la BIBO stabilità.



# Capitolo 3

## Progetto del controllore

### 3.1 Specifiche di progetto

Poiché vogliamo che il veicolo si porti esattamente sulla mezzeria della carreggiata, cioè sulla retta di equazione  $z = x + 10\sqrt{2}$ , è necessario che il sistema abbia un errore a regime nullo al gradino quindi sia almeno di tipo 1.

Si deve poi garantire che l'uscita  $\tilde{y}$  del sistema passi dal valore iniziale  $\tilde{y}(0) = 5$  (ottenuto sostituendo i valori opportuni all'istante  $t = 0$  nelle variabili di stato che compaiono in  $\tilde{y}$ ) ad un valore finale  $\tilde{y}(\infty) = 10$  (ottenuto sostituendo i valori all'equilibrio delle variabili di stato che compaiono in  $\tilde{y}$ ), senza mai superare la mezzeria della carreggiata con tempo di assestamento al 5% non superiore a  $t_s = 1.5s$ . Tale percentuale di scostamento dal valore finale è ricavata tenendo conto del fatto che la mezzeria della carreggiata  $z = x + 10\sqrt{2}$  dista dal limite superiore individuato dalla retta  $z = x + 14.5$  di una quantità pari a  $14.5 - 10\sqrt{2}$  e dal punto di partenza  $z = 5\sqrt{2}$  di una quantità pari a  $10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ , quindi  $\frac{14.5 - 10\sqrt{2}}{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}} \cong 0.05$ .

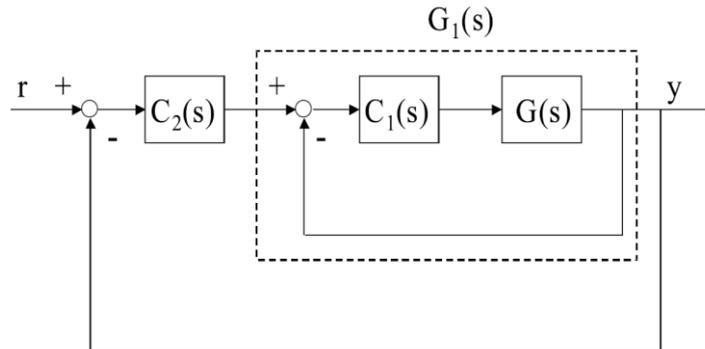
Quanto detto si traduce nella necessità di una pulsazione di attraversamento di  $C(s)G(s)$  pari a  $\omega_a = \frac{3}{t_s} = 2 \text{ rad/s}$

### 3.1 Controllo con doppio anello in cascata

Il controllore dev'essere progettato in modo che il sistema retroazionato sia BIBO stabile e soddisfi alle specifiche statiche e dinamiche che ci siamo imposti. Per far ciò si può procedere direttamente analizzando i diagrammi di Bode e inserendo poli e zeri nella funzione  $C(s)G(s)$ , per alzare o abbassare modulo e fase in corrispondenza della

pulsazione di attraversamento. Inoltre, sintetizzando un controllore privo di poli instabili e tale che il guadagno di Bode e il margine di fase di  $C(s)G(s)$  siano entrambi positivi, risulta assicurata anche la stabilità BIBO del sistema retroazionato, essendo soddisfatte le ipotesi del criterio di Bode.

Tuttavia, per facilitare la progettazione, si preferisce ricorrere alla tecnica del controllo in *doppio anello di retroazione in cascata* rappresentata schematicamente nelle figura sottostante:



In tal caso progetteremo un primo controllore  $C_1(s)$  che viene impiegato per stabilizzare il sistema e un secondo controllore  $C_2(s)$  impiegato invece per soddisfare le specifiche di progetto.

Definiamo come funzione di trasferimento del primo anello di retroazione:

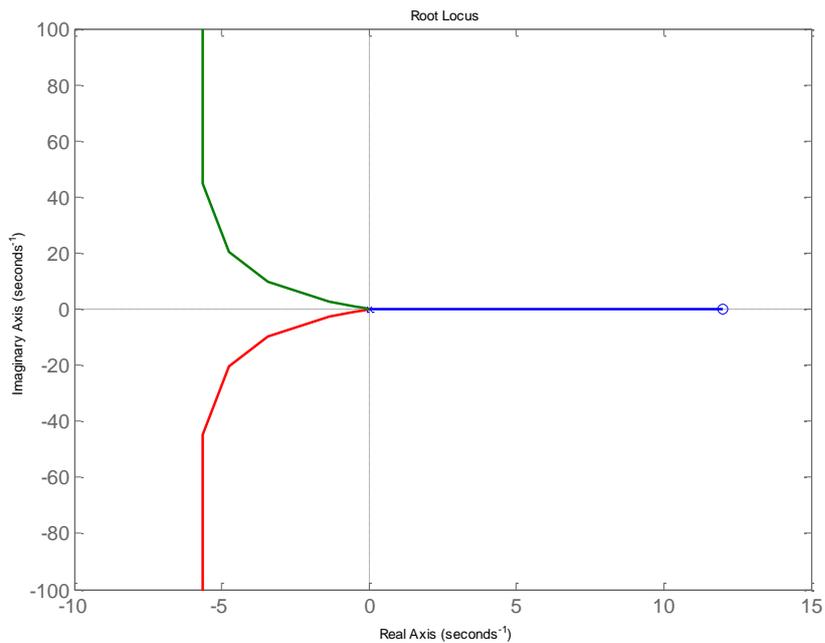
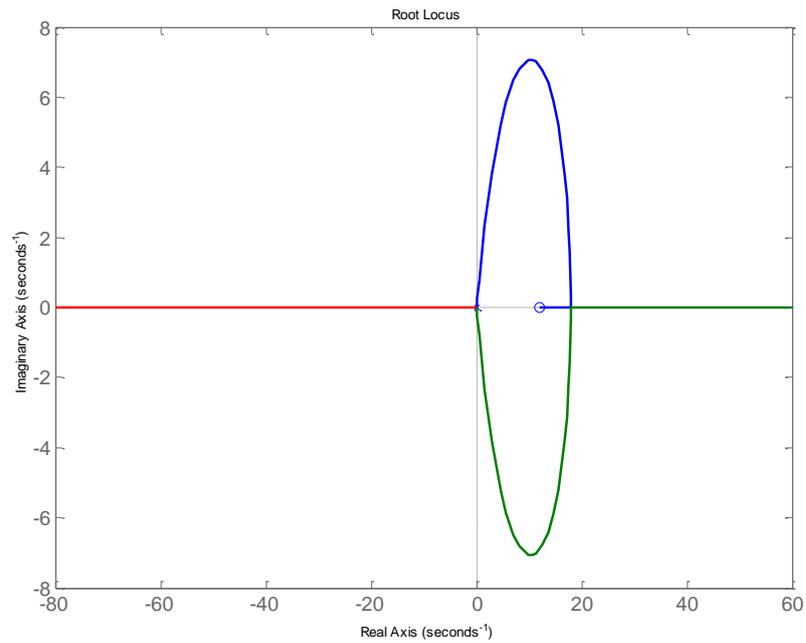
$$G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)}$$

Questa dovrà essere BIBO stabile e rispettare le ipotesi del criterio di Bode e sarà retroazionata tramite il secondo anello dando luogo al sistema finale che definiamo come:

$$W(s) = \frac{C_2(s)G_1(s)}{1 + C_2(s)G_1(s)}$$

### 3.2 Progetto di $C_1(s)$

Come già detto  $C_1(s)$  deve far in modo che il sistema retroazionato  $G_1(s)$  risulti BIBO stabile. A tal proposito riportiamo di seguito, rispettivamente, il luogo negativo e il luogo positivo delle radici di  $G(s)$ , tenendo in considerazione che la funzione ad anello aperto presenta guadagno di Evans negativo (pari a -12) quindi un guadagno positivo del compensatore corrisponde al luogo negativo e viceversa.



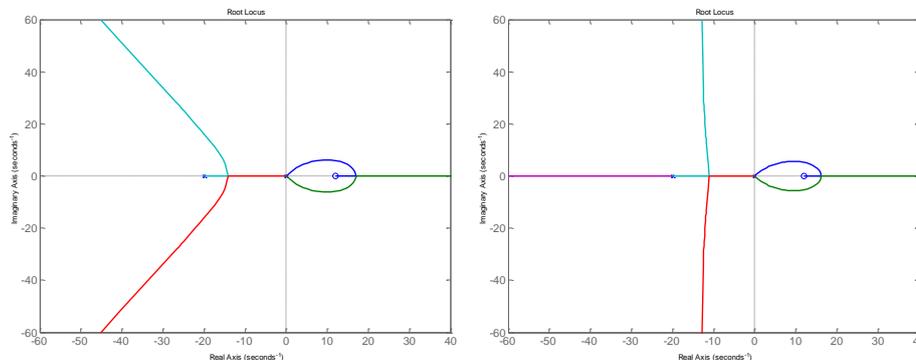
Osserviamo che il luogo negativo ha due rami interamente contenuti nel semipiano destro, perciò il sistema retroazionato risulta instabile con 2 poli a parte reale positiva per ogni valore del guadagno d'anello negativo. D'altra parte, anche il luogo positivo ha un ramo interamente contenuto nel semipiano destro che va dall'origine allo zero positivo, quindi anche per ogni valore del guadagno d'anello positivo il sistema  $G_1(s)$  avrà instabilità, con un polo a parte reale positiva.

Deduciamo da ciò che non è possibile un controllo di tipo proporzionale per stabilizzare  $G_1(s)$ , come avevamo già osservato in

precedenza grazie ai diagrammi di Nyquist.

Consideriamo ora il luogo negativo (prima figura): dovremo trovare il modo di attrarre nel semipiano sinistro, almeno per qualche valore positivo del guadagno del controllore, i due rami del luogo che si sviluppano interamente nel semipiano destro. Per far ciò non esiste un metodo standard ed occorre quindi procedere per tentativi ragionando sul luogo e su come questo può modificarsi in seguito all'aggiunta di poli o zeri.

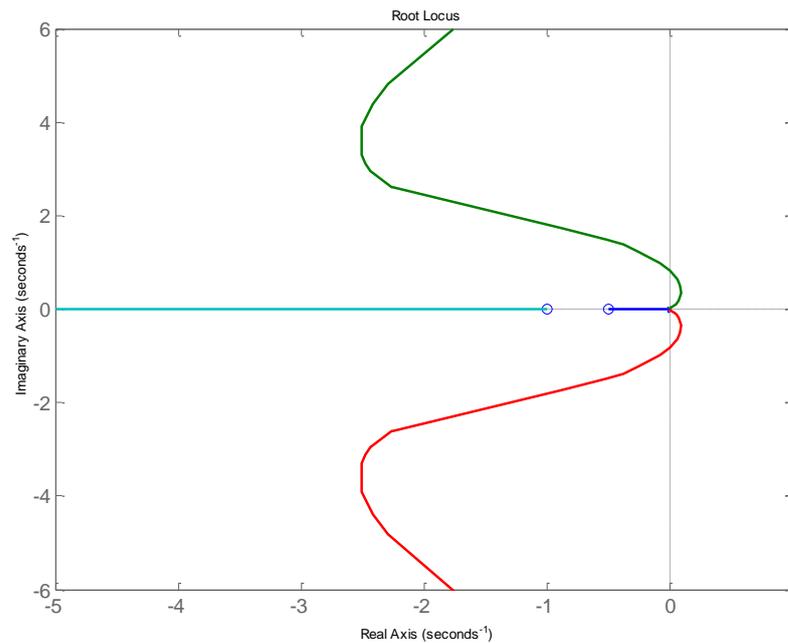
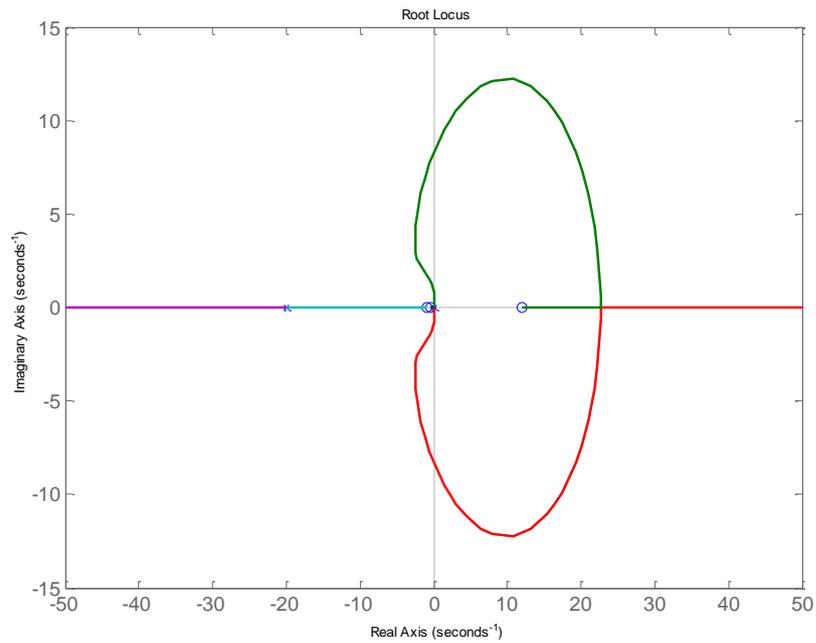
Escludiamo subito l'inserimento di poli nel semipiano sinistro poiché il loro unico effetto nel luogo delle radici è l'aggiunta di un ramo (per ogni polo che aggiungiamo) che si sviluppa nel semipiano sinistro senza intaccare i rami nel semipiano destro. Riportiamo come esempio il luogo negativo nel caso dell'aggiunta di 1 e di 2 poli stabili:



Dobbiamo escludere anche l'introduzione di zeri nell'origine che porterebbero ad un'eliminazione "proibita" con i poli nell'origine della  $G(s)$ , il che renderebbe solo apparentemente il sistema stabile.

Una scelta efficiente è porre due zeri stabili in prossimità dell'origine, il che, come visibile nelle figure sottostanti, rende possibile il passaggio dei due rami del luogo nel semipiano sinistro prima di tornare in quello destro, fornendoci l'opportunità di individuare un valore del guadagno d'anello per cui  $G_1(s)$  risulti BIBO stabile. In particolare possiamo prendere come zeri i valori in  $s = -0.5$  e  $s = -1$ .

Volendo realizzare fisicamente un tale controllore occorre aggiungere anche due poli in modo da renderlo proprio. Tali poli dovranno essere presi sufficientemente lontani dagli zeri in modo che influiscano il meno possibile sull'effetto introdotto da questi ultimi. Possiamo considerare quindi due poli coincidenti in  $s = -20$ .



Con l'ausilio dello strumento *Sisotool* di Matlab possiamo facilmente stabilire un valore del guadagno di  $C_1(s)$  per cui le radici si trovino tutte nel semipiano sinistro.

In conclusione, un possibile controllore in grado di rendere BIBO stabile il sistema d'anello chiuso di funzione di trasferimento  $G_1(s)$  è il seguente:

$$C_1(s) = 8 \frac{(s + 0.5)(s + 1)}{(s + 20)^2} = 0.01 \frac{(1 + 2s)(1 + s)}{(1 + 0.05s)^2}$$

Ne deriva che:

$$C_1(s)G(s) = -96 \frac{(s + 0.5)(s + 1)(s - 12)}{(s + 20)^2 s^3}$$

Per cui, la funzione di trasferimento del primo anello di retroazione risulta quindi essere:

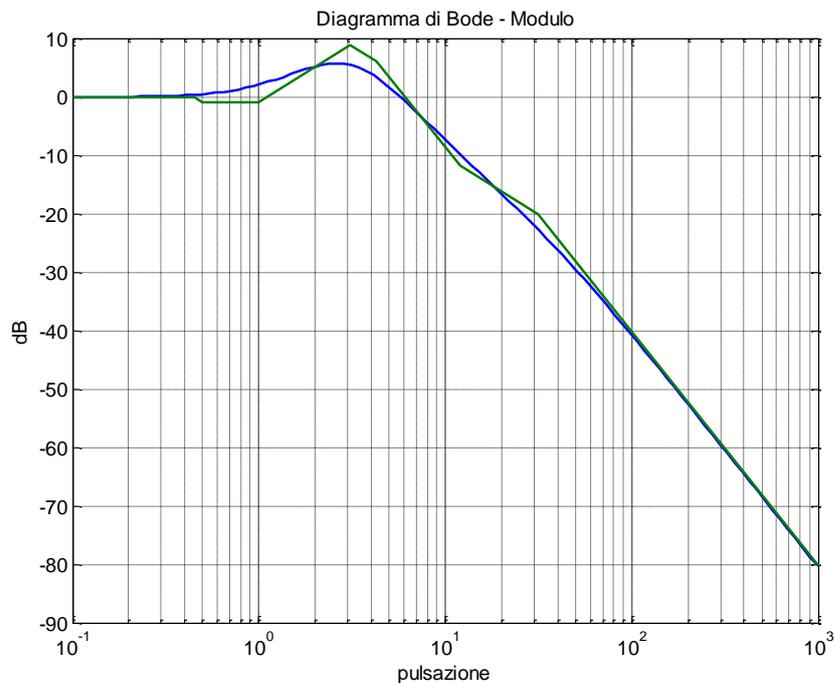
$$G_1(s) = -96 \frac{(s + 0.5)(s + 1)(s - 12)}{(s + 31.25)(s + 4.28)(s + 0.45)(s^2 + 4.025s + 9.62)}$$

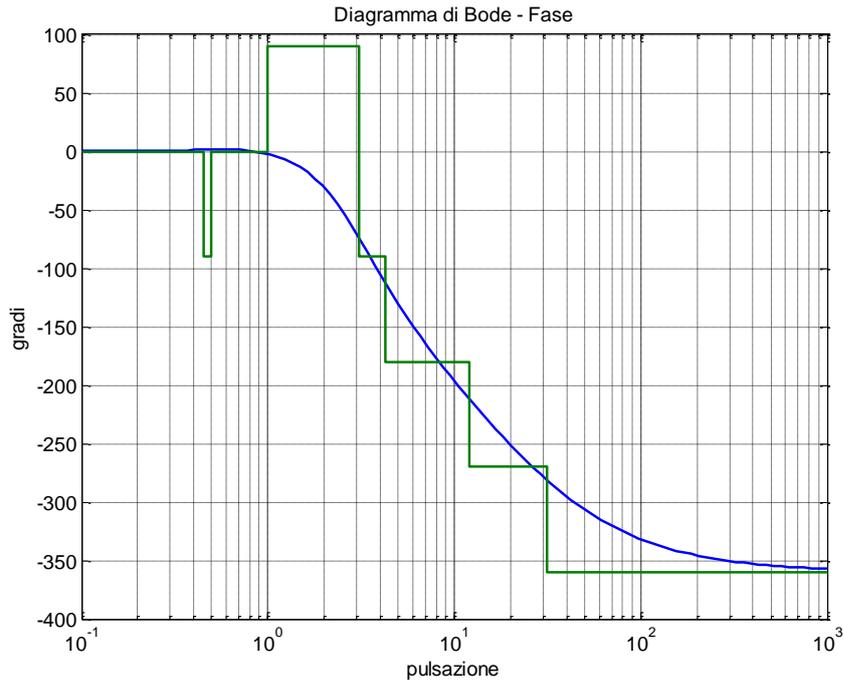
In forma di Bode:

$$G_1(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{0.5}\right)(1 + s)\left(1 - \frac{s}{12}\right)}{\left(1 + \frac{s}{31.25}\right)\left(1 + \frac{s}{4.28}\right)\left(1 + \frac{s}{0.45}\right)\left(1 + 0.4184s + \frac{s^2}{3.1^2}\right)}$$

Possiamo notare che presenta solo poli a parte reale negativa quindi come previsto è BIBO stabile.

Riportiamo inoltre, per completezza, i diagrammi di Bode (modulo e fase) della funzione appena ottenuta:





### 3.3 Progetto di $C_2(s)$

Avendo ora a disposizione una funzione di trasferimento BIBO stabile possiamo procedere con la sintesi del controllore  $C_2(s)$ , il cui progetto può essere affrontato sui diagrammi di Bode, in modo da soddisfare le specifiche statiche e dinamiche del sistema.

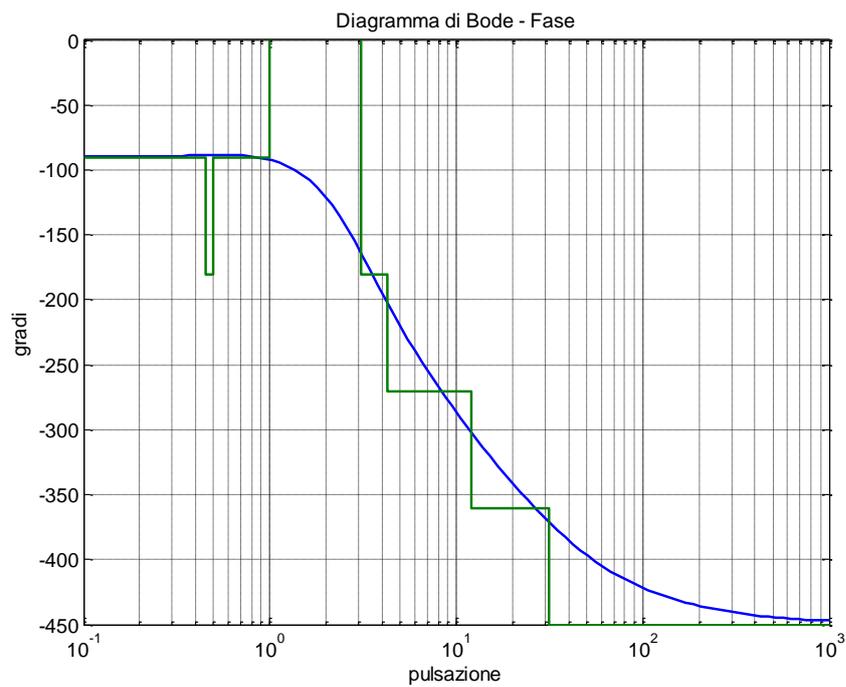
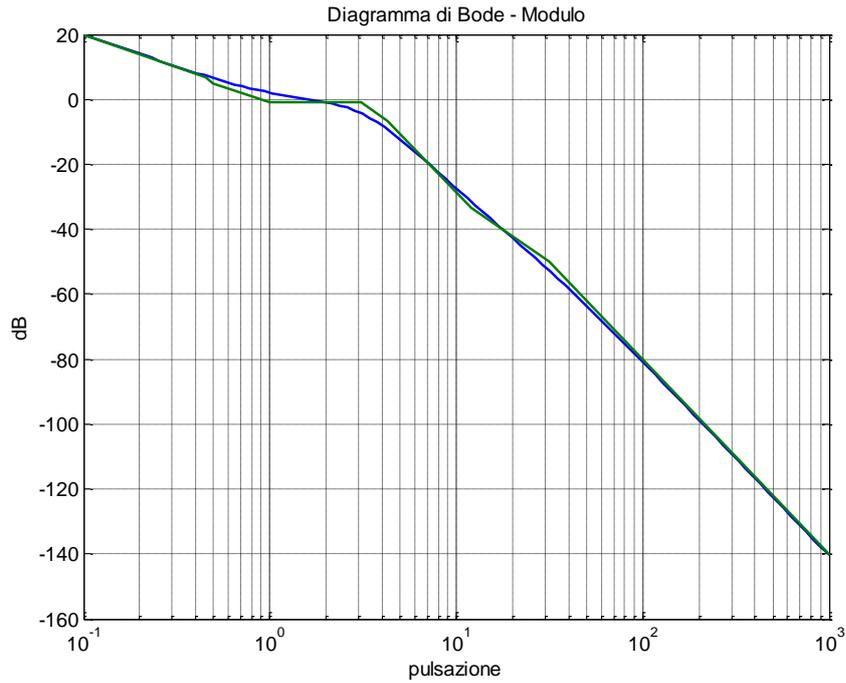
Volendo un sistema di tipo 1, basta introdurre con il controllore un polo nell'origine, visto che  $G_1(s)$  ne è priva.

Possiamo quindi scrivere:

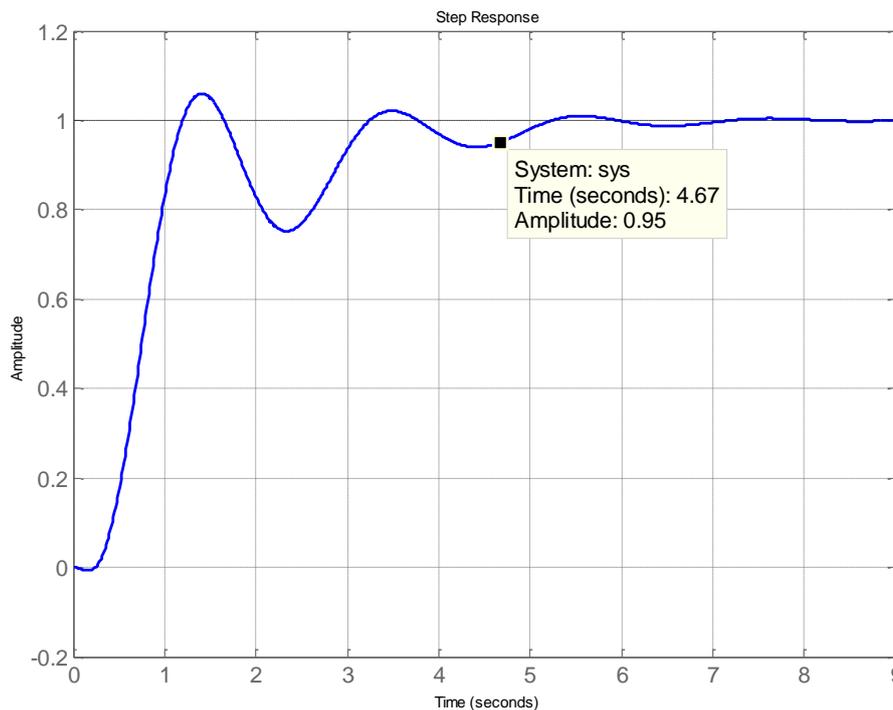
$$C_2(s) = \frac{K_B}{s} \tilde{C}_2(s)$$

Con  $\tilde{C}_2(s)$  priva di ulteriori poli nell'origine e avente guadagno di Bode unitario.

Introducendo tale polo nell'origine l'andamento del diagramma di bode si modifica come in figura:



Retroazionando tale sistema con  $C_2(s) = 1/s$  otterremmo un tempo di assestamento al 5% evidentemente superiore a  $1.5s$  per la risposta al gradino unitario, come visibile in figura. È necessario quindi aumentare la banda passante, ovvero la pulsazione di attraversamento, di  $C_2(s)G_1(s)$  e migliorare il margine di fase per ridurre l'oscillazione.



Per ridurre le oscillazioni e alzare modulo e fase del diagramma introduciamo con il compensatore due zeri complessi coniugati che permettano una quasi cancellazione con i due poli complessi di  $G_1(s)$ . Per rendere proprio il controllore è necessario aggiungere un solo polo, considerando che ne ha già uno nell'origine. Il nuovo polo dovrà essere sufficientemente lontano dai due zeri complessi in modo da non attenuarne l'effetto. Servendoci dello strumento *Sisotool* di Matlab osserviamo che prendendo un polo con valore troppo minore degli zeri diminuisce la sovraelongazione fino ad estinguersi ma, d'altra parte, aumenta il tempo di salita poiché riduciamo la banda passante, spostando la pulsazione di attraversamento a valori più bassi. Tuttavia prendendo un valore per il polo troppo maggiore di quello degli zeri aumenta la sottoelongazione della risposta al gradino ed è quindi necessario trovare un compromesso.

Per quanto riguarda il guadagno del compensatore notiamo che aumentandolo, incrementiamo la sovraelongazione, a causa della riduzione del margine di fase (infatti la pulsazione  $\omega_a$  si sposta a valori della fase minori più aumenta il guadagno) ma diminuisce il tempo di salita a causa dell'aumento di banda passante dovuto allo spostamento a valori maggiori della pulsazione di attraversamento. Mentre, diminuendo il guadagno abbiamo un comportamento esattamente contrario, ovvero un aumento del tempo di salita e una riduzione della sovraelongazione.

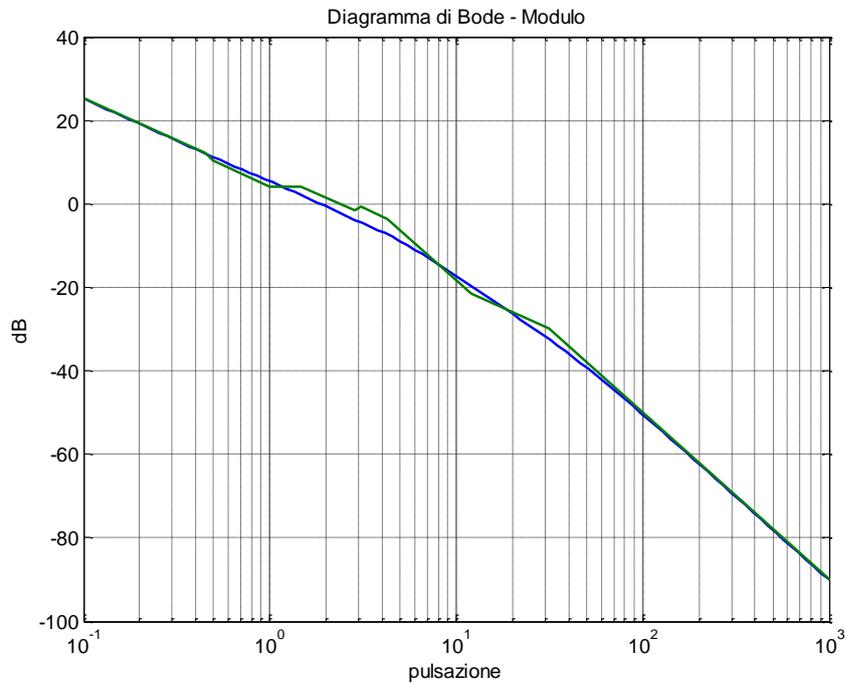
Sfruttando sempre lo strumento *Sisotool* possiamo cercare un trade-off tra i valori del polo reale negativo e del guadagno in modo da soddisfare al meglio le specifiche richieste. Otteniamo quindi come funzione del controllore:

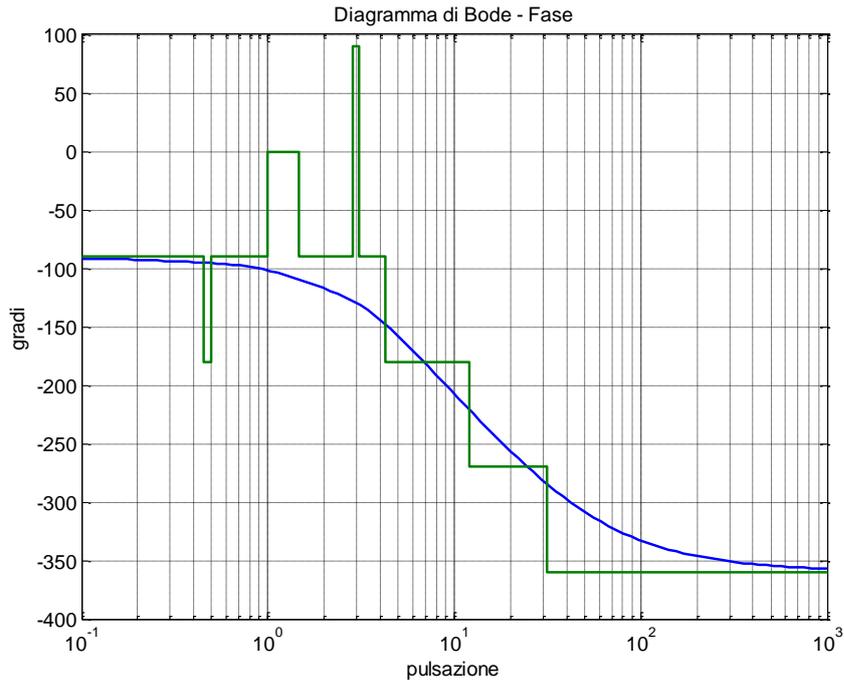
$$C_2(s) = 1.82 \frac{1 + 0.4s + 0.35^2 s^2}{s(1 + 0.68s)} = 0.328 \frac{s^2 + 3.265s + 8.163}{s(s + 1.47)}$$

Per cui risulta:

$$C_2(s)G_1(s) = -31.5 \frac{(s + 0.5)(s + 1)(s - 12)(s^2 + 3.265s + 8.163)}{s(s + 1.47)(s + 31.25)(s + 4.28)(s + 0.45)(s^2 + 4.025s + 9.62)}$$

Riportiamo i diagrammi di Bode di quest'ultima funzione appena ricavata:

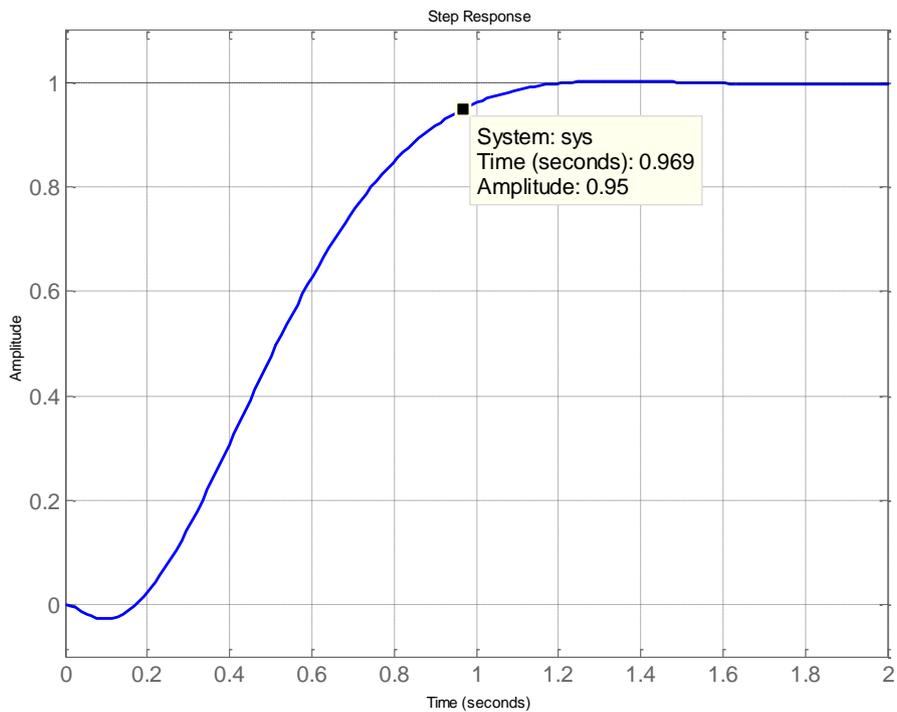




Retroazionando tale sistema ricaviamo la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{-31.5 (s + 0.5)(s + 1)(s - 12)(s^2 + 3.265s + 8.163)}{(s + 32.8154)(s + 0.8169)(s + 0.5276)(s^2 + 2.8s + 5.88)(s^2 + 4.525s + 18.54)}$$

La cui risposta a gradino è riportata nella seguente figura:



La figura mostra chiaramente che le condizioni di progetto sono rispettate, infatti arriva al 95% del valore a regime in un tempo sufficientemente inferiore al limite di 1.5s e che la lievissima sovraelongazione non supera il 105%, in fine l'errore a regime è nullo come desiderato.

La sottoelongazione iniziale, dovuta alla presenza dello zero instabile, comporta un effettivo rallentamento della risposta rispetto al caso in cui essa ne è priva. Infatti, in tale situazione l'uscita del sistema deve compiere una maggiore escursione per arrivare a regime. Purtroppo l'unico modo per eliminare questo undershoot sarebbe cancellare lo zero instabile ma per far ciò occorrerebbe introdurre un polo instabile e quindi una cancellazione proibita. Notiamo che nemmeno retroazionando il sistema lo zero sparisce, dal momento che gli zeri sono invarianti rispetto la retroazione.

# Capitolo 4

## Conclusioni

### 4.1 Interpretazione dei risultati

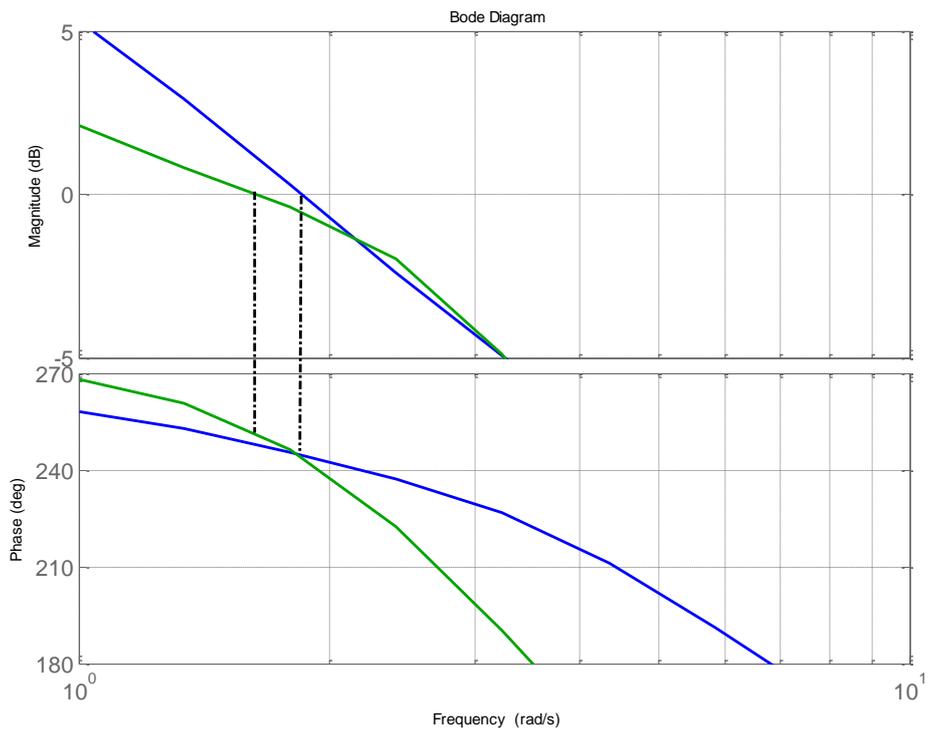
Grazie all'azione di controllo messa in atto, agendo sulla velocità angolare dello sterzo del veicolo, siamo riusciti a raggiungere lo scopo che ci eravamo prefissati. Infatti, impostando la traiettoria che definisce la mezzeria della carreggiata e le rette che ne individuano i margini, il veicolo è in grado di portarsi sopra il margine inferiore in un tempo minore a 1.5s e raggiungere la mezzeria a regime con un errore nullo, senza mai uscire nuovamente dalla carreggiata, né oltrepassando il margine superiore né oltrepassando nuovamente quello inferiore.

Osserviamo che nel sistema risultante dalla retroazione di  $C_2(s)G_1(s)$  per quanto riguarda il tempo di assestamento c'è un notevole miglioramento dal caso in cui  $C_2(s) = \frac{1}{s}$  a quello in cui  $C_2(s) = 1.82 \frac{1+0.4s+0.35^2s^2}{s(1+0.68s)}$ , ma analizzando i diagrammi di Bode di modulo e fase della f.d.t.  $C_2(s)G_1(s)$  notiamo che le pulsazioni di attraversamento e i margini di fase non evidenziano significativi miglioramenti tra le due versioni del compensatore  $C_2(s)$  come invece ci saremmo aspettati.

Dalla teoria, infatti, sappiamo che per ridurre il tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema  $W(s)$  dovremmo aumentare la pulsazione di attraversamento e il margine di fase del sistema ad anello aperto. Tali considerazioni provengono però da un'approssimazione fatta per sistemi di ordine basso e con l'aumentare dell'ordine del sistema c'è la possibilità che non risultino più valide. Questo è infatti ciò che avviene nel caso in esame per il quale, essendo di ordine elevato, non vi è la possibilità di prevedere il comportamento temporale della risposta del

sistema ad anello chiuso dal comportamento in frequenza del sistema ad anello aperto. Per tale motivo si è dovuto ricorrere allo strumento *Sisotool* per la progettazione di  $C_2(s)$ .

Si riportano in figura sottostante uno zoom del diagramma (in blu) di  $C_2(s)G_1(s)$  per  $C_2(s) = 1.82 \frac{1+0.4s+0.35^2s^2}{s(1+0.68s)}$  e del diagramma (in verde) quello per  $C_2(s) = \frac{1}{s}$  nell'intorno della pulsazione di attraversamento circa pari a  $2\text{rad/s}$ .



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1. Modello fisico</b>	<b>5</b>
1.1. Descrizione del sistema .....	5
1.2. Modellizzazione.....	6
<b>2. Analisi di stabilità</b>	<b>11</b>
2.1. Diagramma di Bode e di Nyquist .....	11
<b>3. Progetto del controllore</b>	<b>15</b>
3.1. Specifiche di progetto.....	15
3.2. Controllo con doppio anello in cascata .....	15
3.3. Progetto di $C_1(s)$ .....	16
3.4. Progetto di $C_2(s)$ .....	21
<b>4. Conclusioni</b>	<b>27</b>



# Riferimenti Bibliografici

- Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher *Controlli automatici* Libreria Progetto Padova 2008.
- Mauro Bisiacco, Simonetta Braghetto *Teoria dei sistemi dinamici* collana Progetto Leonardo Società Editrice Esculapio Bologna 2011