UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA DI SCIENZE STATISTICHE

Corso di laurea in Statistica, Economia e Finanza

TESI DI LAUREA

SELEZIONE DI UN PORTAFOGLIO EFFICIENTE DI ATTIVITÀ MOBILIARI E IMMOBILIARI

SELECTION OF AN EFFICIENT PORTFOLIO OF FINANCIAL ASSETS AND REAL ESTATE

Relatore:
Prof. Guglielmo Weber

Laureando:
Valerio Lippoli
Matricola 555144 SEF

Anno Accademico: 2008-2009

“L’investimento nella conoscenza
paga sempre il più alto interesse”

Benjamin Franklin

INDICE

INTRODUZIONE

L'obiettivo del nostro lavoro è trovare l'allocazione ottimale di un paniere di strumenti, composto da tre indici mobiliari: un indice azionario e due indici obbligazionari con scadenza rispettivamente a 3 e a 10 anni, e da un indice immobiliare ricavato dai prezzi di compra-vendita delle abitazioni in Italia. In particolare, ci interessa valutare se e con quale quota è ragionevole, in termini media-varianza, investire nel mattone. Il periodo di osservazione definito è di 28 anni precisamente dal 1980 al 2007.

Per allocazione ottimale del portafoglio intendiamo la composizione del portafoglio ottenuta secondo l'approccio media-varianza di Markowitz. In altre parole, dato il nostro paniere degli strumenti, troveremo l'insieme dei portafogli efficienti. In particolare vedremo come la composizione di questi portafogli cambia all'aumentare dei flussi d'entrata derivanti dai contratti di locazione per gli appartamenti.

Successivamente cercheremo di prevedere il comportamento dell'agente finanziario nella composizione del suo portafoglio ottimale, in base alla propria avversione al rischio. In dettaglio, ammettendo una determinata funzione di utilità, stimeremo come gli investitori distribuiranno la loro ricchezza tra attività liquide (azioni e obbligazioni), attività immobili e titolo privo di rischio.

In ultima analisi, calcoleremo la composizione del portafoglio ottimale stimando i rendimenti delle attività con il modello del CAPM per tenere in considerazione il rischio sistematico e le aspettative del mercato.

Sarà interessante osservare come si differenziano i portafogli ottimali ottenuti utilizzando i due metodi per la stima dei rendimenti attesi e, anche, come cambiano le scelte degli investitori.

CAPITOLO 1:
I DATI

Il paniere degli strumenti scelto è composto da quattro indici: tre indici finanziari e un indice immobiliare.

Gli indici utilizzati per la parte mobiliare sono total return, ovvero in essi si tiene già conto dell'eventuale stacco del dividendo e del reinvestimento dello stesso, e di altri "cash flow" provenienti dal possesso di titoli. Sono stati selezionati per le nostre analisi un indice azionario, il MSCI (Morgan Stanley Capital Index) e due indici obbligazionari (Rex Bond)[1], dei quali uno a lungo termine (10 anni) e uno a breve termine (3 anni); tutti e tre espressi in valuta Euro. Abbiamo scelto di considerare indici tedeschi, in quanto sono più stabili nel tempo considerato e non hanno subito grosse variazioni dall'introduzione dell'euro. Nel corso della relazione indicheremo con "Long Bond" le obbligazioni a 10 anni e con "Short Bond" le obbligazioni a 3 anni.

L'indice immobiliare preso in analisi è il "Nuovo Indice dei Prezzi delle Case in Italia" elaborato dai ricercatori della Banca d'Italia[2] pubblicato nella sezione "Questioni di economia e finanza" nel saggio intitolato "Prices of residential property in Italy: Constructing a new indicator" nell'agosto del 2008. Il nuovo indicatore, offre, rispetto a quelli esistenti, una maggiore copertura geografica, oltre al vantaggio di un aggiornamento temporale tempestivo dei dati. L'indice pubblicato presenta suddivisioni in aree geografiche e in regioni. Noi scegliamo di considerare l'indice di riferimento per il prezzo medio di un'abitazione sul territorio italiano.

La frequenza dei dati pubblicati sull'articolo è annuale, e il periodo va dal 1980 al 2007. Per questo motivo siamo vincolati anche per gli indici mobiliari a prendere i dati con frequenza annuale nello stesso periodo. In effetti il campione dei dati è

[1] I dati sono stati scaricati dal Datastream.
[2] Muzzicato S., Sabbatini R. e Zollino F.

abbastanza ristretto (28 osservazioni dalle quali si ricavano 27 rendimenti); pertanto verranno usati test statistici asintotici opportuni.

Come si può notare dalla precedente descrizione, c'è una difformità tra gli indici mobiliari e quello immobiliare; specificamente gli indici mobiliari sono tedeschi, mentre l'indice delle abitazioni è italiano. Prima dell'introduzione dell'Euro come moneta unica, la Lira era sottoposta a una continua svalutazione nei confronti del Marco, pertanto per evitare anomalie nei rendimenti, abbiamo deciso di correggere l'indice immobiliare tenendo conto del tasso di cambio Lira/Marco dal 1980 al 1999 (entrata in vigore della moneta unica come unità di conto virtuale).

Nel calcolo della frontiera efficiente, oltre alle attività rischiose precedentemente descritte, consideriamo un asset con varianza nulla, ossia non rischioso, che chiamiamo "risk-free". In questo modo l'investitore è a conoscenza, sin dalla data di acquisto, del rendimento dell'asset, che nel seguito indicheremo con r_0. Formalmente il rendimento di questo asset è una variabile casuale con rendimento atteso r_0 e varianza nulla. Nella pratica è difficile trovare asset che abbiano una varianza campionaria uguale a zero, comunque si scelgono asset con variabilità minima che con buona approssimazione può essere considerata nulla.

Nel caso in esame si è scelto di prendere l'indice obbligazionario tedesco Rex Bond a 1 anno, anche questo, per conformità con gli altri dati, con frequenza annuale dal 1980 al 2007.

A partire dagli indici mobiliari e dal risk-free sono stati calcolati i rendimenti, ricordando che gli indici sono total return, come:

$$r_t = \frac{p_t}{p_{t-1}} - 1$$

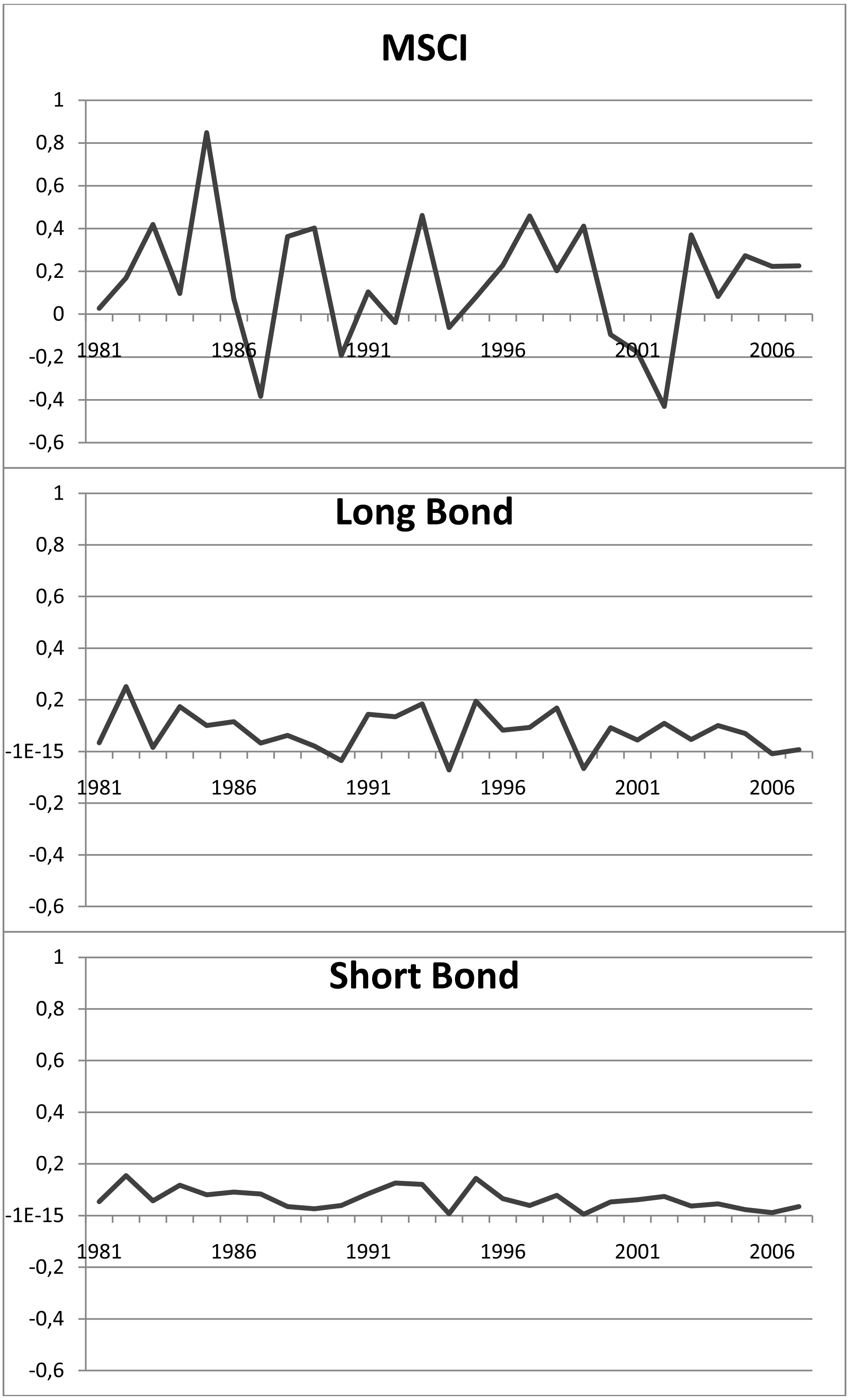

Figura 1: Rendimenti asset finanziari.

Dai precedenti grafici evidenziamo che le serie storiche dei rendimenti delle obbligazioni sono più stabili di quella dell'azionario. Quest'ultima presenta una variabilità molto elevata rispetto alle serie storiche dei rendimenti obbligazionari, infatti si hanno picchi positivi e negativi di oltre il 40%, addirittura, nel 1985, si rileva un rendimento positivo dell'84%. Gli indici obbligazionari registrano rendimenti più contenuti quasi sempre positivi; nel caso di quello a tre anni sono sempre positivi.

Per quanto riguarda l'indice dei prezzi delle case, i rendimenti sono stati calcolati nel seguente modo:

$$r_t = \frac{p_t + d}{p_{t-1}} - 1$$

dove p_t e p_{t-1} sono i prezzi dell'indice alle date *t* e *t-1,* d_t è il dividendo dell'anno *t.* Come dividendo è stato considerato il rendimento di un contratto di locazione annuale, al netto delle spese per la ristrutturazione, ritenendolo fisso nel variare degli anni. In particolare abbiamo deciso di considerare cinque livelli diversi di dividendi (d = 0%, 1%, 3%, 5% e 7%). In questo modo potremo valutare come cambia la composizione del portafoglio ottimale al variare dei flussi in entrata per l'indice delle abitazioni.

Specificamente la formula diviene:

$$r_t = \frac{p_t + d}{p_{t-1}} - 1 = \frac{p_t + d * p_t}{p_{t-1}} - 1 = \frac{p_t(1 + d)}{p_{t-1}} - 1$$

D'ora in avanti differenzieremo sempre le nostre analisi per ciascun livello di rendita.

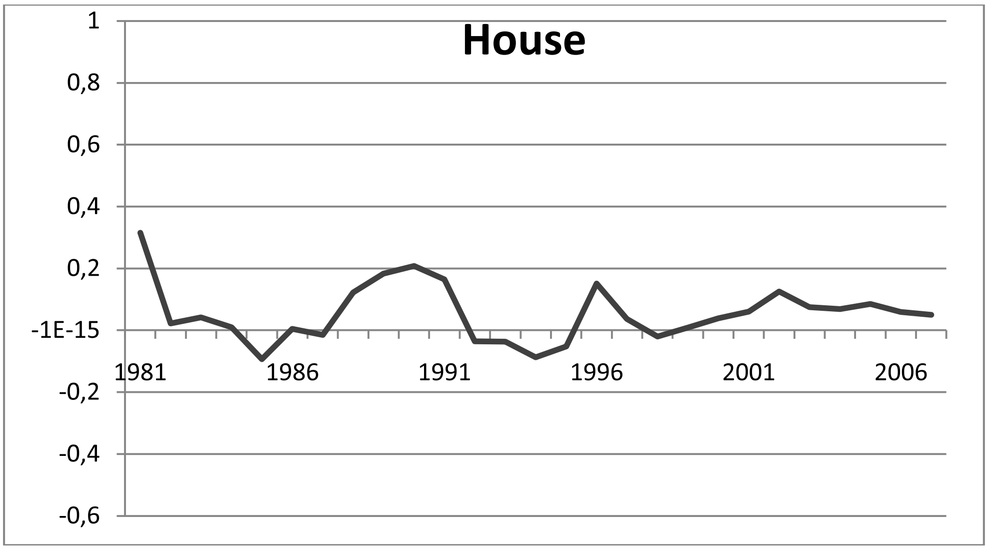

Figura 2: Rendimenti asset immobiliare.

Dal grafico appare che, nel periodo considerato, i rendimenti si muovono in modo più regolare rispetto ai rendimenti degli indici mobiliari. Infatti non appaiono picchi positivi né negativi nel periodo osservato. Guardando il grafico con più attenzione sembra che i rendimenti seguano dei cicli caratterizzati da due fasi. Nella prima fase i rendimenti hanno trend positivo, cioè aumentano di anno in anno; al contrario nella seconda fase i rendimenti invertono il trend e quindi diminuiscono. Ad esempio considerando il periodo 1984-1994 osserviamo come i rendimenti crescono fino al 1990 per poi iniziare una discesa fino al 1994; seguono altri due cicli che iniziano rispettivamente nel 1994 e nel 1998. Quindi ciò ci induce a pensare che negli anni correnti, ci troviamo nella fase discendente dei rendimenti.

Ci preme sfatare il mito del guadagno facile e sicuro e sempre redditizio che ha l'opinione comune riguardo all'investimento nel mattone. In molti pensano che l'investimento nell'immobile porti sempre a rendimenti positivi, questo perché non sempre si tiene conto dell'inflazione e della svalutazione che subisce la moneta; contrariamente dall'esame dei dati, si evince che ci possono essere anche rendimenti negativi.

Aumentando il flusso dei dividendi, il grafico trasla verso l'alto, ottenendo, come era prevedibile, rendimenti maggiori.

CAPITOLO 2:
I RENDIMENTI

Il rendimento di un indice, o di un titolo in genere, è una variabile casuale caratterizzata da una distribuzione di probabilità. Le caratteristiche principali della distribuzione di un rendimento sono riassunte dai primi due momenti teorici: il rendimento atteso e la varianza.

Data una serie storica di T osservazioni, una stima attendibile del rendimento atteso $\mu_r = E(r)$, può essere calcolata con la media aritmetica dei rendimenti:

$$\overline{r_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{29} r_{it}$$

Nell'ambito della teoria moderna del portafoglio un'attività finanziaria si considera tanto più rischiosa quanto più elevata risulta essere la probabilità che ci siano valori lontani dal valore atteso. Una valida misura statistica di questo effetto è la varianza dei rendimenti:

$$\sigma_r^2 = E[(r - \mu_r)^2] = E(r^2) - \mu_r^2$$

La sua radice quadrata è definita deviazione standard.

Dato il basso numero di osservazioni, cioè 27, la varianza campionaria è stata stimata nel seguente modo per rendere lo stimatore consistente:

$$\mathrm{s}_\mathrm{i}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \overline{r_i})^{\,2}, \qquad con\ i = 1,..,4\ e\ T = 27$$

Si può dimostrare che per un portafoglio composto da *N* attività finanziarie le espressioni del rendimento e della varianza sono le seguenti:

il rendimento atteso del portafoglio: $E(r_p) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i = \mu_p$

la varianza del portafoglio: $Var(r_p) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \sigma_p^2$

indicando con *N* il numero di asset coinvolti, con ω_i la quantità di ricchezza investita nell'asset *i* e σ_{ij} la covarianza tra l'asset *i* e l'asset *j*.

È importante sottolineare che il rendimento atteso e la varianza di ogni singolo asset sono variabili casuali, governate da una distribuzione di probabilità condizionata che tiene conto del legame esistente tra il titolo e il mercato, per questo motivo è importante considerare anche le covarianze tra i rendimenti degli asset.

Una stima consistente per la covarianza è:

$$\mathrm{s}_{\mathrm{ij}}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \overline{r_i})\left(r_{jt} - \overline{r_j}\right), con\ i \neq j; i,j = 1,..,4\ e\ T = 27$$

Notiamo che un altro modo per calcolare la varianza del portafoglio è:

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Dove con σ_i è indicata la deviazione standard dell'i-esimo asset, con ρ_{ij} il coefficiente di correlazione tra l'i-esimo e il j-esimo asset.

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Da questo secondo modo di scrivere la varianza constatiamo che: il rischio del portafoglio dipende anche dalla correlazione tra gli asset, infatti se questo coefficiente è nullo la varianza del portafoglio è uguale alla media ponderata delle varianze dei singoli strumenti. Se la correlazione è positiva, ad un aumento del rendimento di un asset corrisponde l'aumento del rendimento dell'altro asset, in questo caso la variabilità del portafoglio è maggiore di quella che caratterizza ciascun titolo. Viceversa se la correlazione è negativa, all'aumentare del rendimento di un asset corrisponde una diminuzione del rendimento del secondo asset, in questo caso la varianza del portafoglio è minore di quella che caratterizza ciascun titolo. Quindi se i rendimenti degli asset hanno andamenti discordi si riduce il rischio specifico del portafoglio. Questo è il motivo principale per cui si consiglia di diversificare il portafoglio, in quanto scegliendo asset opportuni si riduce il suo rischio.

Riportiamo la matrice di varianza e covarianza, e la matrice di correlazione:

Tabella 1: Matrice di varianza e covarianza.

	MSCI	LongBond	ShortBond	House	House 1%	House 3%	House 5%	House 7%
MSCI	**0,07840**	**0,00107**	**-0,00147**	**-0,00486**	**-0,00491**	**-0,00500**	**-0,00510**	**-0,00520**
LongBond	**0,00107**	**0,00638**	**0,00283**	**-0,00178**	**-0,00180**	**-0,00183**	**-0,00187**	**-0,00190**
ShortBond	**-0,00147**	**0,00283**	**0,00168**	**-0,00122**	**-0,00124**	**-0,00126**	**-0,00129**	**-0,00131**
House	**-0,00486**	**-0,00178**	**-0,00122**	**0,00882**	**/**	**/**	**/**	**/**
House 1%	**-0,00491**	**-0,00180**	**-0,00124**	**/**	**0,00900**	**/**	**/**	**/**
House 3%	**-0,00500**	**-0,00183**	**-0,00126**	**/**	**/**	**0,00936**	**/**	**/**
House 5%	**-0,00510**	**-0,00187**	**-0,00129**	**/**	**/**	**/**	**0,00973**	**/**
House 7%	**-0,00520**	**-0,00190**	**-0,00131**	**/**	**/**	**/**	**/**	**0,01010**

Tabella 2: Matrice di correlazione.

	MSCI	LongBond	ShortBond	House
MSCI	**1**			
LongBond	**0,04781**	**1**		
ShortBond	**-0,12806**	**0,86619**	**1**	
House	**-0,18472**	**-0,23720**	**-0,31809**	**1**

Evidenziamo una forte correlazione tra le obbligazioni a lungo termine e a breve termine (0,87), derivante dalla natura comune degli indici; vi è invece correlazione negativa, sebbene non molto accentuata, tra l'indice di mercato e le obbligazioni a breve e l'indice immobiliare. Quindi una loro combinazione riduce il rischio specifico del portafoglio.

2.1 RAPPRESENTAZIONE RISCHIO-RENDIMENTO

Utilizzando le stime per il rendimento atteso e per il rischio calcolate rispettivamente con la media campionaria e la deviazione standard dei rendimenti, è possibile rappresentare in un diagramma rischio-rendimento i 4 indici presi in analisi.

Tabella 3: Rendimento medio e deviazione standard per ogni asset.

	Rend. medio	Dev. Stand
MSCI	**0,15345**	**0,28000**
LongBond	**0,07750**	**0,07985**
ShortBond	**0,06472**	**0,04098**
House 0%	**0,05518**	**0,09393**
House 1%	**0,06573**	**0,09487**
House 3%	**0,08683**	**0,09675**
House 5%	**0,10793**	**0,09863**
House 7%	**0,12904**	**0,10051**

Indicando sull'asse dell'ascisse la deviazione standard e su quella delle ordinate il rendimento medio.

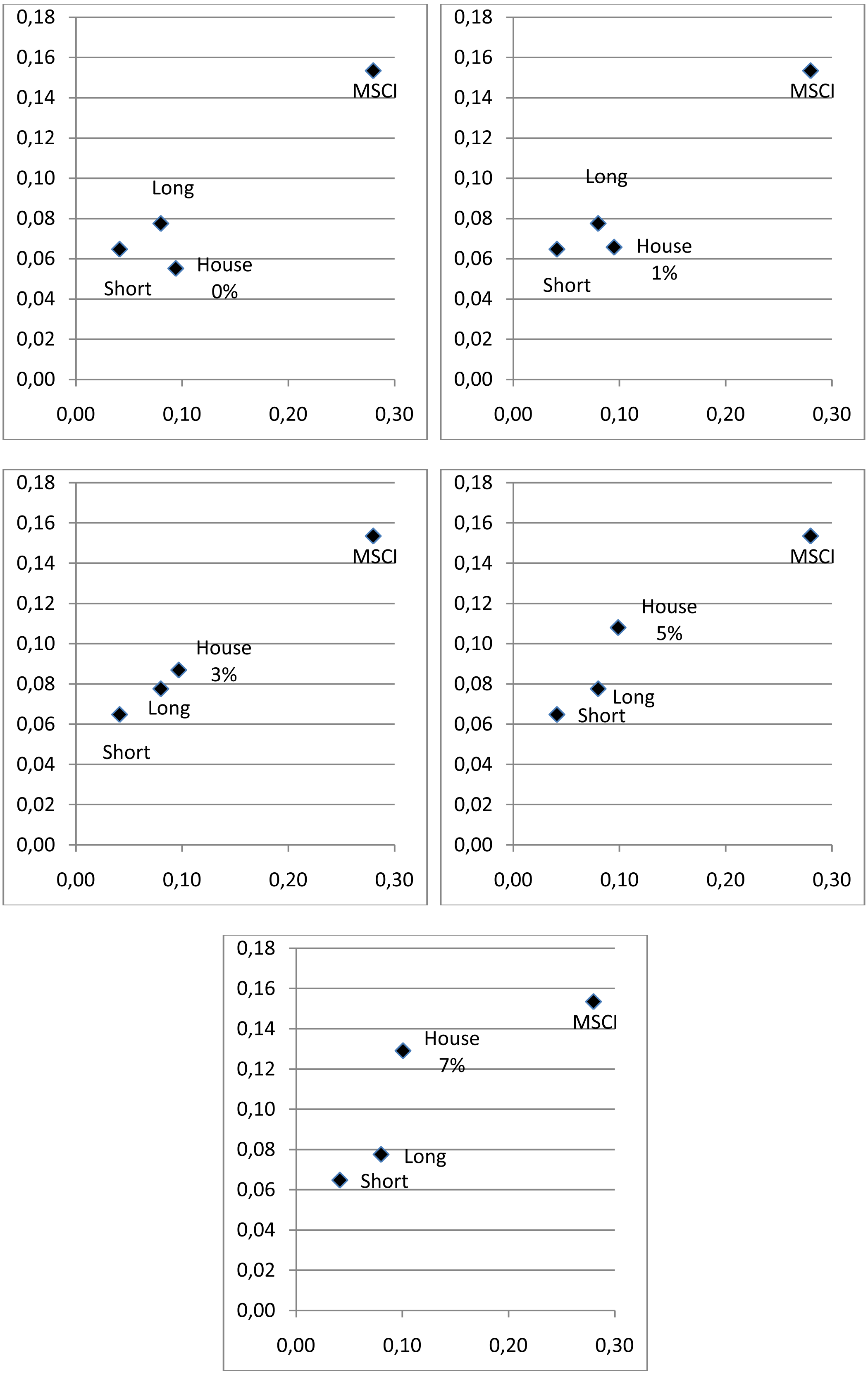

Figura 3: Rappresentazione nello spazio rischio-rendimento.

Le obbligazioni hanno un rendimento medio più contenuto ma in compenso hanno una variabilità minore; mentre l'indice azionario ha un rendimento medio piuttosto alto a scapito di un rischio notevolmente maggiore rispetto agli altri asset. Per quanto riguarda l'indice immobiliare sottolineiamo che: se il flusso degli affitti delle case è minore del 3%, considerato singolarmente, non è un buon investimento in quanto ci si attende un rendimento medio minore di quello atteso dalle obbligazioni a lungo e a breve termine, "pagando un prezzo" in termini di deviazione standard più alto. Mentre ammettendo, sempre per l'indice immobiliare, un dividendo del 5% o del 7% annuo l'asset si pone tra gli indici obbligazionari e quello azionario, anzi sembra avere un rapporto rischio rendimento migliore.

CAPITOLO 3:
IL MODELLO DI MARKOWITZ

3.1 IL MODELLO DI MARKOWITZ

Il modello di Markowitz (1952) si fonda sullo studio del processo generatore della domanda e dell’offerta delle attività finanziarie in funzione del rapporto rischio/rendimento da esso espresso.
L’approccio di Markowitz si articola in due fasi:

- Nella prima fase si individua l’insieme dei portafogli efficienti applicando il criterio della media-varianza agli asset scelti; i portafogli efficienti devono avere il rendimento medio massimo per un dato livello di rischio; o viceversa, il rischio più basso per un dato livello di rendimento medio;
- Nella seconda fase (soggettiva) il soggetto finanziario sceglierà il portafoglio ottimo in base alla propria funzione di utilità, che dipende dalla soggettiva avversione al rischio.

Gli assunti fondamentali di tale modello sono:

1. Gli investitori vogliono massimizzare la ricchezza finale e sono avversi al rischio.
2. Il periodo di investimento è unico.
3. I costi di transazione e le imposte sono nulle, le attività finanziarie sono divisibili.
4. La scelta è unicamente guidata dal valore atteso e dalla deviazione standard.
5. Il mercato è perfettamente concorrenziale.

L'insieme di portafogli efficienti che costituiscono la **Frontiera Efficiente** (FE) è determinato dalla soluzione di uno dei due problemi di ottimo:

i) Massimizzare il valore atteso del rendimento del portafoglio sotto il vincolo di un dato livello di varianza $\bar{\sigma}^2$ (arbitrario).

$$\max_{\omega} \{E(r_p\} \ s.v \ Var(r_p) = \bar{\sigma}^2$$

ii) Minimizzare la varianza del rendimento del portafoglio sotto il vincolo di un dato livello di valore atteso $\bar{\mu}$ (arbitrario).

$$\min_{\omega} \{Var(r_p)\} \ s.v. \ E(r_p) = \bar{\mu}$$

Scegliamo di risolvere il problema di minimo per determinare l'insieme dei portafogli efficienti, sotto l'ipotesi che l'agente investa tutta la ricchezza disponibile in titoli rischiosi.
Quindi fissiamo un livello di rendimento medio per il portafoglio μ_{p*} e risolviamo il problema di ottimizzazione.
In notazione matriciale abbiamo:

$$\min_{\omega} \{\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega\}'$$
$$s.v. \begin{cases} \omega' \mu = \mu_{p*} \\ \omega' 1 = 1 \end{cases}$$

La cui soluzione è:

$$\omega_* = \lambda_* \Sigma^{-1} \mu + \gamma_* \Sigma^{-1} i$$

dove:

$$\lambda_* = \frac{c\mu_{p*} - b}{\delta} \qquad \gamma_* = \frac{a - b\mu_{p*}}{\delta}$$

$$a = \mu'^{\Sigma^{-1}}\mu \qquad b = \mu'\Sigma^{-1}i \qquad c = i'\Sigma^{-1}i \qquad \delta = ac - b^2$$

Indicando con $\boldsymbol{\omega}$ il vettore dei pesi, con $\boldsymbol{\mu}$ il vettore dei rendimenti medi degli asset e con $\boldsymbol{\Sigma}$ la matrice di varianze e covarianza.

La frontiera efficiente senza titolo non rischioso è un'iperbole di equazione:

$$\sigma_{p*} = \sqrt{\frac{c}{\delta}\ \mu_{p*}^2 - \frac{2b}{\delta}\ \mu_{p*} + \frac{a}{\delta}}$$

Con vertice in $\left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{b}{c}\right)$.

Per il *Teorema di separazione in due fondi*, tutti i portafogli sulla frontiera efficiente si possono scrivere come combinazione lineare convessa di due portafogli particolari entrambi situati sulla frontiera efficiente.

$$\begin{aligned} \omega_* &= \lambda_* b \frac{\Sigma^{-1}\mu}{b} + \gamma_* c \frac{\Sigma^{-1}i}{c} \\ &= \lambda_* b\omega_E + \gamma_* c\omega_V \end{aligned}$$

con $i'\omega_E = i'\omega_V = 1$

Il portafoglio ***E*** è il portafoglio, appartenente alla frontiera efficiente, che presenta il miglior trade-off rendimento atteso/rischio, cioè ha il rapporto seguente più alto:

$$\frac{\omega'\mu}{(\omega'\Sigma\omega)^{\frac{1}{2}}}$$

Il rendimento atteso del portafoglio ***E*** è: $\mu_E = \frac{a}{b}$

il rischio: $\sigma_E = \frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{b}}$

il portafoglio ***V*** è il portafoglio, appartenente alla frontiera efficiente, con la varianza più piccola, corrispondente al vertice della parabola.

3.2 FRONTIERA EFFICIENTE CON TITOLO NON RISCHIOSO

Consideriamo ora la possibilità di investire anche in un titolo privo di rischio, mantenendo la condizione che l'agente investa tutta la sua ricchezza disponibile. Indichiamo con:

r_0 = il rendimento atteso del titolo non rischioso, cioè con varianza nulla
ω_0 = la quota investita nel titolo non rischioso.

Il vincolo delle quote quindi è il seguente:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 - \omega' i$$

Il rendimento del portafoglio diviene:

$$r_p = \sum_{i=0}^{N} \omega_i r_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \omega_i\right) r_0 + \sum_{i=1}^{N} \omega_i\, r_i = r_0 + \sum_{i=1}^{N} \omega_i\, (r_i - r_0)$$

Il rendimento atteso:

$$\mu_p = E\left(\sum_{i=0}^{N} \omega_i r_i\right) = r_0 + \sum_{i=1}^{N} \omega_i \underbrace{(\mu_i - r_0)}_{\substack{rendimenti \\ netti\ medi\ tit.rischiosi}}$$

La varianza:

$$Var\left(\sum_{i=0}^{N} \omega_i r_i\right) = \boldsymbol{\omega}'\Sigma\boldsymbol{\omega}$$

Quindi il nuovo problema di ottimizzazione risulta essere:

$$\begin{aligned} &\min_{\omega} \{\sigma_p^2 \ = \omega' \Sigma \omega\}' \\ s.v. \qquad &\omega' (\mu - r_0 i) = (\mu_{p*} - r_0) \end{aligned}$$

Il vincolo pone l'uguaglianza tra i rendimenti medi netti dei titoli rischiosi e il rendimento medio netto del portafoglio.

Risolvendo si ottiene che la funzione della frontiera efficiente con il titolo privo di rischio è la seguente:

$$\sigma_{p*} = \frac{\mu_{p*} - r_0}{\sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2}}$$

Con $\begin{cases} \mu_{p*} : rendimento\ del\ portafoglio\ efficiente \\ \sigma_{p*} : \quad rischio\ del\ portafoglio\ efficiente \end{cases}$

Introducendo il titolo non rischioso, un qualunque portafoglio efficiente ha il rendimento medio ed il rischio collegati da una relazione lineare denominata **Capital Market Line (CML)**:

$$\mu_{p*} = r_0 + \left(\sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2}\right) \sigma_{p*}$$

La sua pendenza, chiamata anche **Performance di Sharpe,** è la massima raggiungibile con i titoli presi in analisi**.** Tratteremo della Performance di Sharpe nel paragrafo 4.

$$p_{s*} = \sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2} = \frac{\mu_{p*} - r_0}{\sigma_{p*}}$$

La Performance di Sharpe è largamente utilizzata come misura della performance di un portafoglio o di un titolo. Essa esprime il rendimento di un portafoglio al netto del risk-free in rapporto al rischio.

Sulla CML ci sono due portafogli importanti:

i) Il portafoglio in cui si investe tutta la ricchezza disponibile solo nel titolo privo di rischio, nel quale quindi avremo rendimento medio uguale al rendimento del titolo privo di rischio e varianza nulla.

$$\omega_{0*} = 1 \qquad \mu_{p*} = r_0 \qquad \sigma_{p*} = 0$$

ii) Il portafoglio in cui si investe solo negli asset rischiosi, questo portafoglio si trova anche sulla frontiera efficiente senza titolo non rischioso e più precisamente è il punto di tangenza tra le due frontiere.
Il vettore delle quote per questo portafoglio che chiameremo ***M*** è dato dalla seguente espressione:

$$\omega_M = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_0 i)}{b - cr_0}$$

Il rendimento medio e la deviazione standard possono essere calcolate nel seguente modo:

$$\mu_M = \frac{a - br_0}{b - cr_0} \qquad \sigma_M = \frac{\sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2}}{b - cr_0}$$

È importante sottolineare che tutti i portafogli sulla CML hanno due proprietà importanti:

a) Le quote dei titoli rischiosi possono essere scritte come proporzionali alle quote di ***M***

$$\omega_* = \frac{\mu_{p*} - r_0}{p_{s*}}(b - cr_0)\omega_M = k\omega_M$$

$$\omega_{0*} = (1 - k)$$

$$\Rightarrow \omega_* = (1 - \omega_{0*})\omega_M$$

b) I rendimenti dei portafogli hanno correlazione pari a 1 con il portafoglio ***M***.

Da queste due proprietà deduciamo che l'investitore allocherà la propria ricchezza scegliendo un portafoglio situato sulla CML. Più precisamente può investire tutta la ricchezza nel titolo privo di rischio, poi muovendosi verso destra investirà sempre meno nel titolo non rischioso aumentando la quota nel portafoglio ***M***, fino a raggiungere il punto in cui investirà tutto nel portafoglio M. L'investitore può anche scegliere di posizionarsi in un punto a destra del portafoglio M, in questo caso investirà più del 100% in titoli rischiosi prendendo a prestito al tasso del titolo privo di rischio la quota necessaria.
In termini di avversione al rischio possiamo dire che un agente che si colloca a sinistra di un altro è più avverso al rischio.

3.3 FRONTIERA EFFICIENTE EMPIRICA CON GLI ASSET IN ANALISI

Calcoliamo ora la frontiera efficiente empirica per il nostro paniere di attività, come detto precedentemente differenzieremo i portafogli considerando diversi flussi, cioè gli introiti derivanti dai contratti di locazione, per l'asset immobiliare.

Nella tabella seguente sono riportate le stime dei coefficienti **a**, **b**, **c** e **δ** che ci permettono di calcolare la frontiera efficiente, con DIV indichiamo il dividendo assunto per l'attività immobiliare:

Tabella 4: Coefficienti per la stima della FE.

DIV	0%	1%	3%	5%	7%
a	6,768129	7,14943	7,967002	8,84957	9,788199
b	106,4881	109,2612	114,5689	119,5782	124,3112
c	1713,158	1707,231	1695,798	1684,897	1674,492
δ	255,1704	267,7059	384,3914	611,661	936,9842

L'iperbole ottenuta (in azzurro) rappresenta lo spazio contenente tutti i portafogli efficienti ottenibili dai titoli prescelti senza considerare il titolo privo di rischio. Sulla FE senza risk-free sono marcati il portafoglio con varianza minima ***V*** e il portafoglio con il miglior trade-off rendimento medio/rischio ***E***. La retta con intercetta pari al rendimento del risk-free e tangente all'iperbole è la CML (in rosso). Il portafoglio ***M*** è il portafoglio di tangenza tra la frontiera efficiente senza risk-free e la CML.

Di seguito riportiamo i grafici e la tabella che mostra in dettaglio le quote di ricchezza da investire in ogni singolo asset, il rendimento medio e la deviazione standard per i portafogli ***V,E*** e ***M*** al variare dei dividendi per House.

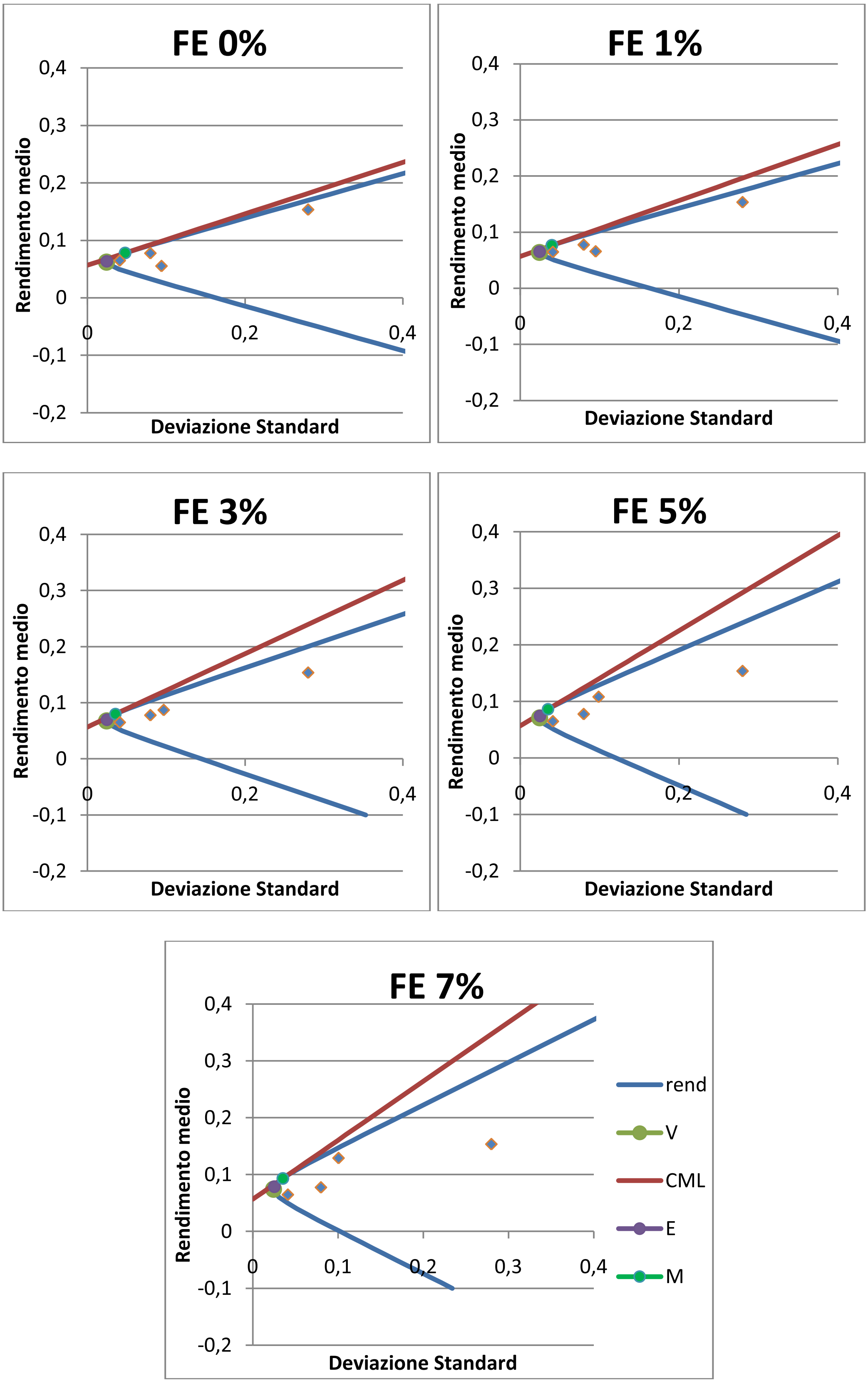

Figura 4: Frontiere efficienti.

Tabella 5: Composizione portafogli V, E ed M al variare della rendita degli immobili.

DIV	0%			1%			3%		
	V	E	M	V	E	M	V	E	M
MSCI	**0,04537**	**0,05467**	**0,15065**	**0,04545**	**0,05446**	**0,12415**	**0,04561**	**0,05414**	**0,09851**
LongBond	**-0,38484**	**-0,34045**	**0,11803**	**-0,38586**	**-0,33671**	**0,04348**	**-0,38785**	**-0,33018**	**-0,03002**
ShortBond	**1,16434**	**1,11137**	**0,56429**	**1,16720**	**1,10157**	**0,59396**	**1,17277**	**1,08463**	**0,62591**
House	**0,17513**	**0,17442**	**0,16703**	**0,17321**	**0,18067**	**0,23841**	**0,16947**	**0,19141**	**0,30560**
Rend medio	**0,06216**	**0,06356**	**0,07800**	**0,06400**	**0,06543**	**0,07653**	**0,06756**	**0,06954**	**0,07984**
Dev stand	**0,02416**	**0,02443**	**0,04764**	**0,02420**	**0,02447**	**0,03985**	**0,02428**	**0,02464**	**0,03542**

DIV	5%			7%		
	V	E	M	V	E	M
MSCI	**0,04576**	**0,05389**	**0,08611**	**0,04591**	**0,05371**	**0,07890**
LongBond	**-0,38977**	**-0,32471**	**-0,06685**	**-0,39162**	**-0,32009**	**-0,08933**
ShortBond	**1,17812**	**1,07061**	**0,64450**	**1,18329**	**1,05895**	**0,65780**
House	**0,16588**	**0,20020**	**0,33624**	**0,16242**	**0,20743**	**0,35262**
Rend medio	**0,07097**	**0,07401**	**0,08604**	**0,07424**	**0,07874**	**0,09326**
Dev stand	**0,02436**	**0,02488**	**0,03491**	**0,02444**	**0,02517**	**0,03527**

Per ogni livello di dividendo la quota di ricchezza da investire nell'asset azionario aumenta passando dal portafoglio ***V*** al portafoglio ***E*** e al portafoglio ***M***. Questo perché l'indice MSCI è l'asset più rischioso, quindi è normale che nel portafoglio a varianza minima la quota sia minore. In quasi tutti i portafogli, anche al variare del dividendo per l'asset House, la quota da investire nelle obbligazioni a lungo periodo è negativa (ad eccezione dei portafogli ***M*** con dividendo per House nullo e dell'1%). Un'altro aspetto importante è che all'aumentare del dividendo per l'asset immobiliare, la quota nel portafoglio ***M*** dello stesso aumenta. Questo perché all'incremento del rendimento medio prodotto dall'aumento del dividendo per l'asset House, viene corrisposto solo un leggero aumento della varianza e quindi del rischio[3]; questo implica che è più conveniente, in termini media-varianza, investirci.

Il portafoglio di importanza maggiore è il portafoglio ***M,*** in quanto gli agenti nel comporre il loro portafoglio ottimale, in base alla loro avversione al rischio,

[3] Guardare Tabella 3 Cap. 2.1 per le variazioni di rendimento medio e di deviazione standard al variare delle rendite.

investiranno una quota nel portafoglio ***M*** e una quota nel risk-free. Come detto prima, per comporre il portafoglio ***M***, quando il dividendo dell'asset House è maggiore o uguale al 3%, si dovrebbe assumere una posizione corta nelle obbligazioni a lungo termine. Nella realtà non è facile riuscire a vendere allo scoperto, di conseguenza decidiamo di vincolare i pesi del portafoglio affinché siano tutti positivi.

Il nuovo problema di ottimo da risolvere diventa: minimizzare la varianza sotto i vincoli di somma a 1 delle quote con tutte le quote maggiori o uguali a zero.

In formule:

$$\min_{\omega} \left\{ \sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega \right\}$$

$$s.v. \begin{cases} \omega' \mu = \mu_{p*} \\ \omega' i = 1 \\ \omega \geq 0 \end{cases}$$

Per comporre la frontiera empirica vincolata risolviamo il problema in modo iterativo fissando diversi livelli di rendimento medio richiesto (μ_{p*}). [4]

Possiamo costruire la nuova frontiera efficiente con i vincoli di positività nelle quote degli asset e calcolarci il nuovo portafoglio di tangenza ***M'.***

Di seguito sono riportati i grafici che rappresentano la FE, la FE vincolata, il portafoglio ***M*** e il portafoglio ***M'***, considerando l'asset House con dividendi al 3%, 5% e 7%.

[4] Per il problema di ottimo vincolato è stato utilizzato il componente aggiuntivo "Risolutore" del software "Microsoft Excel 2007".

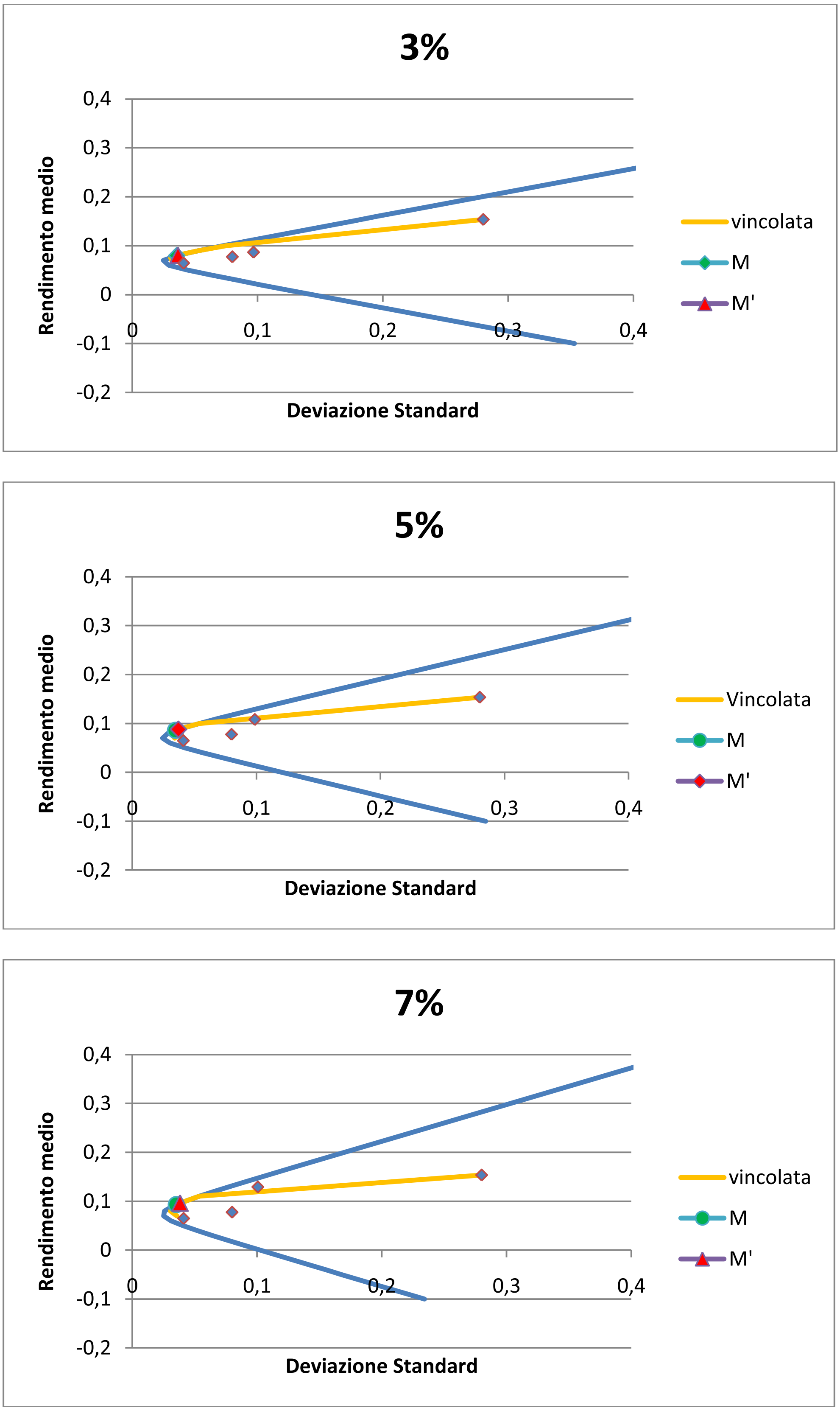

Figura 5: Frontiere efficienti vincolate.

Come ci aspettavamo di trovare, la FE vincolata è spostata verso destra rispetto a quella non vincolata e non raggiunge portafogli con rendimenti medi superiori al rendimento medio che si otterrebbe investendo tutto nell'indice MSCI; questo perché, non potendo vendere allo scoperto, il massimo rendimento medio raggiungibile si ottiene investendo tutta la ricchezza nell'asset con rendimento medio maggiore. I nuovi portafogli ***M'*** vincolati si trovano alla destra dei portafogli ***M***, denotando un rendimento medio maggiore a scapito di una varianza maggiore.

A livello di composizione la quota di ricchezza da investire nelle obbligazioni a lungo termine, che nei portafogli ***M*** era negativa ora è nulla.

Riportiamo le quote nei 4 asset, il rendimento medio e la deviazione standard dei nuovi portafogli di tangenza ***M'***, mantenendo la suddivisione in base ai dividendi per l'asset House.

Tabella 6: Composizione portafoglio di tangenza M.

DIV	0%	1%	3%	5%	7%
MSCI	0,15065	0,12415	0,09968	0,08801	0,08084
LongBond	0,11803	0,04348	0,00000	0,00000	0,00000
ShortBond	0,56429	0,59396	0,58836	0,55904	0,54217
House	0,16703	0,23841	0,31196	0,35295	0,37699
Rend medio	0,07800	0,07653	0,08046	0,08778	0,09614
Dev stand	0,04764	0,03985	0,03640	0,03708	0,03822

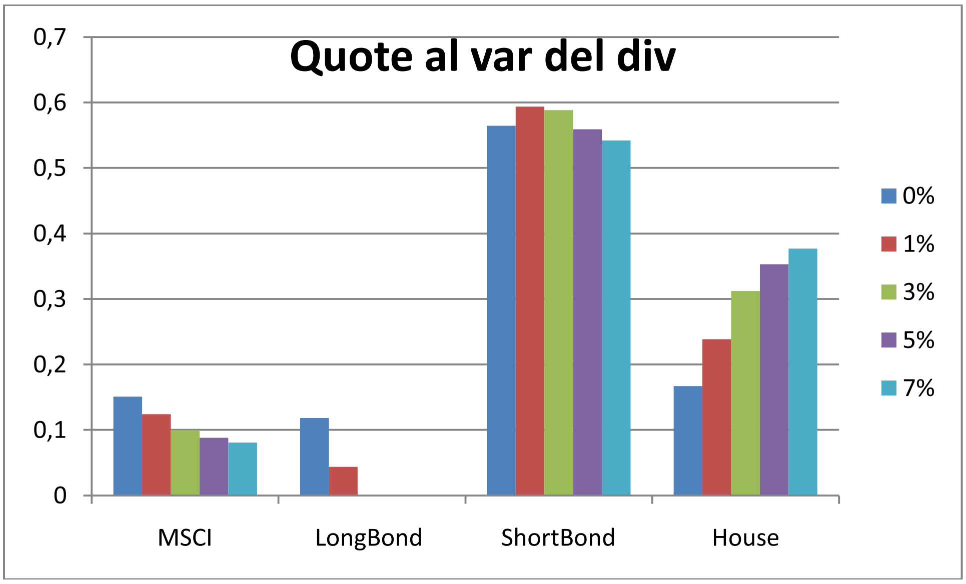

Figura 6: Quote in ogni asset per il portafoglio M.

Osserviamo che: con l'aumentare della rendita per gli immobili, la quota nello stesso aumenta in modo notevole (passa dal 16,7% al 37,7%), a danno della porzione negli altri strumenti, in particolare dell'asset azionario e di quello obbligazionario a lungo periodo, mentre resta una quota rilevante (superiore al 50%) nelle obbligazioni a breve. La causa dell'aumento della fetta di ricchezza da investire negli appartamenti è sicuramente, come detto prima, dovuta al fatto che l'aumento del dividendo genera un rendimento atteso in misura maggiore rispetto all'incremento del rischio. Tuttavia considerando il portafoglio di tangenza comprendente House 0%, si darebbe più peso allo stesso rispetto a quello azionario (anche se solo dell'1,7%) e a quello obbligazionario a lungo. Per quanto riguarda i rendimenti medi dei portafogli ottimi ottenuti, sono maggiori mano a mano che aumenta il dividendo: si passa dal 7,8% senza ammettere ulteriore flussi, al 9,6% del portafoglio di tangenza considerando l'asset House con dividendi al 7% annuo.

Riteniamo opportuno fare una digressione: se consideriamo i possessori di un'abitazione usata come residenza e non come mero investimento, potremmo pensare che ci troviamo nel caso senza flussi entranti da locazione. Esaminando la tabella precedente osserviamo che, nel caso suddetto, l'agente dovrebbe allocare nell'abitazione il 16,7% della sua ricchezza. Quindi ad esempio per comprare una casa dal valore di 150000€ l'agente dovrebbe avere una liquidità di quasi 890000€, il che sembra esagerato, in quanto, da indagini svolte, risulta che il 72% degli italiani vive in una casa di proprietà[5], da questo dovremmo dedurre che il reddito medio degli italiani è molto alto. Questa è una conclusione errata, infatti, si evince che la maggior parte delle famiglie ha come primo obiettivo comprare una casa, la maggior parte delle volte indebitandosi accendendo un mutuo, per bisogno, per necessità, per poter costruire una famiglia e dare loro un tetto stabile sotto cui vivere. Questo va in disaccordo con

[5] Fonte Prometeia

una delle ipotesi del modello di Markowitz, in quanto la scelta non sarebbe dettata unicamente dalla massimizzazione del profitto, bensì da fattori sociali.

In conclusione, i risultati ottenuti dalle nostre analisi non possono rispecchiare le scelte di un agente che non abbia come unico obiettivo la massimizzazione del profitto.

D'ora in avanti per i portafogli che contengono l'asset House con rendimenti superiori o uguali al 3% considereremo il portafoglio ***M'*** vincolato.

3.4 PERFORMANCE DI SHARPE

La Performance di Sharpe (PS) è un indice molto utilizzato che rappresenta la misura del premio al rischio determinata sulla singola unità di rischio assunta.

$$p_{s*} = \sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2} = \frac{\mu_{p*} - r_0}{\sigma_{p*}}$$

Dato che stiamo utilizzando i portafogli di tangenza, la PS è la maggiore che si possa raggiungere con i panieri presi in analisi. Sfruttando la distribuzione asintotica della Performance di Sharpe è possibile ottenere degli intervalli di confidenza per le PS stimate e verificare se esse sono significativamente diverse da zero. Ovviamente dato che la PS non è altro che il coefficiente angolare della CML, dall'intervallo di confidenza della Performance si può ricavare l'intervallo di confidenza per la CML.

$$\widehat{ps} \sim_a N\left(ps, \frac{1}{T}\left(1 + \frac{ps^2}{2}\right)\right)$$

Tabella 7: Performance di Sharpe per i portafogli M.

DIV		Ps	Dev.stand	Int. di conf. 5%		H0:ps=0	p-value
0%		0,44780	0,20187	0,05215	0,84345	2,21829	0,02654
1%		0,49846	0,20405	0,09852	0,89840	2,44278	0,01457
3%		0,65401	0,21203	0,23843	1,06958	3,08446	0,00204
	Vincolato	0,65368	0,21201	0,23814	1,06922	3,08320	0,00205
5%		0,84113	0,22392	0,40226	1,28000	3,75645	0,00017
	Vincolato	0,83899	0,22377	0,40041	1,27757	3,74938	0,00018
7%		1,03743	0,23868	0,56963	1,50523	4,34655	0,00001
	Vincolato	1,03281	0,23831	0,56573	1,49988	4,33392	0,00001

La Performance di Sharpe aumenta con l'aumentare dei dividendi per House, sostanzialmente perché: all'aumentare delle rendite per lo stesso, il rendimento atteso dall'attività immobiliare cresce senza che a ciò corrisponda un aumento rilevante in termini di deviazione standard; per questo motivo, come evidenziato nella *Tabella 6*[6], la quota di ricchezza da investire nell'asset House aumenta, e di conseguenza anche il rendimento atteso del portafoglio, mantenendo la deviazione standard quasi allo stesso livello.

Come era prevedile le Performance dei portafogli di tangenza vincolati sono, anche se dell'ordine dei millesimi, minori rispetto a quelle dei rispettivi portafogli di tangenza non vincolati. Questo perché i portafogli di tangenza non vincolati hanno, come detto primo, la massima PS ottenibile con gli asset presi in analisi, ponendo dei vincoli è comprensibile che la stessa dovrà essere minore.

Ricaviamo anche le Performance di Sharpe per ogni singolo asset.

Tabella 8: PS per ogni singolo asset.

	ps	**Ded.stand**	**Int. di conf. 5%**		**H0:ps=0**	**p-value**
MSCI	**0,34565**	**0,03925**	**0,26873**	**0,42258**	**8,80659**	**0,00000**
LongBond	**0,26088**	**0,03830**	**0,18582**	**0,33594**	**6,81196**	**0,00000**
ShortBond	**0,19645**	**0,03775**	**0,12246**	**0,27044**	**5,20372**	**0,00000**
House 0%	**-0,01593**	**0,03704**	**-0,08853**	**0,05667**	**-0,42996**	**0,66723**
House 1%	**0,09545**	**0,03721**	**0,02253**	**0,16837**	**2,56548**	**0,01030**
House 3%	**0,31172**	**0,03884**	**0,23560**	**0,38784**	**8,02641**	**0,00000**
House 5%	**0,51974**	**0,04204**	**0,43735**	**0,60214**	**12,36324**	**0,00000**
House 7%	**0,72000**	**0,04664**	**0,62859**	**0,81140**	**15,43832**	**0,00000**

Le PS possono essere considerate tutte diverse da zero ad eccezione di quella per l'immobiliare senza rendita.

Per confrontare se le differenze tra le PS delle attività sono statisticamente significative, utilizziamo la seguente distribuzione:

$$\widehat{ps}_1 - \widehat{ps}_2 \sim_a N(0, \frac{1}{T}(2(1-\rho_{12}) + \frac{ps_1^2}{2} + \frac{ps_2^2}{2} - ps_1 ps_2 \rho_{12}^2)$$

sotto l'ipotesi nulla.

[6] Cap. 4.3

Il sistema d'ipotesi è:

$$\begin{cases} H0: ps_i = ps_j \quad con\ i \neq j \\ H1: \overline{H0} \end{cases}$$

Nelle tabelle successive vengono riportati i valori delle statistica test e i relativi p-value. Il test compara le Performance per una coppia di strumenti, quindi nella tabella il valore corrisponde all'ipotesi di uguaglianza tra l'asset sulla riga e quello sulla colonna.

Tabella 9: Test uguaglianza indice di Sharpe tra due asset.

$H0: ps_i = ps_j$			
	MSCI	**LongBond**	**ShortBond**
LongBond	**0,31196**		
ShortBond	**0,50641**	**0,63663**	
House 0%	**1,20570**	**0,67731**	**0,71128**
House 1%	**0,83233**	**0,32142**	**0,71075**
House 3%	**0,11158**	**-0,36293**	**0,70555**
House 5%	**-0,56129**	**-0,99983**	**0,69532**
House 7%	**-1,17631**	**-1,58131**	**0,68063**

p-value			
	MSCI	**LongBond**	**ShortBond**
LongBond	**0,75507**		
ShortBond	**0,61257**	**0,52436**	
House 0%	**0,22793**	**0,49821**	**0,47691**
House 1%	**0,40522**	**0,74790**	**0,47724**
House 3%	**0,91115**	**0,71666**	**0,48047**
House 5%	**0,57460**	**0,31739**	**0,48686**
House 7%	**0,23947**	**0,11381**	**0,49610**

Il test ci induce a non rifiutare l'ipotesi nulla di uguaglianza per nessuna coppia di attività. Quindi possiamo affermare che non ci sono differenze significative tra le PS. L'unica uguaglianza che ci potrebbe far sorgere qualche dubbio è quella tra House 7% e le Long Bond (p-value=11,4%), ma anche in questo caso non rifiutiamo l'ipotesi di uguaglianza.

3.5 TEST DI ESCLUSIONE DAL PANIERE DELL'ASSET IMMOBILIARE

È interessante andare a studiare se la frontiera efficiente cambia in modo significativo condizionatamente all'esclusione dal paniere degli strumenti dell'asset immobiliare. Per far ciò usiamo un test statistico che confronta le Performance di Sharpe dei portafogli ***M*** trovati in precedenza e dei portafogli di tangenza che si ottengono escludendo House. Come fatto fin ora conduciamo i test distinguendo i portafogli contenenti diversi dividendi per l'attività immobiliare.

Il sistema d' ipotesi è:

$$\begin{cases} HO: ps_N = ps_{N1} \\ H1: \overline{H0} \end{cases}$$

Il valore della statistica test è il seguente:

$$T \frac{\widehat{ps}_N^2 - \widehat{ps}_{N1}^2}{1 + \widehat{ps}_{N1}^2} \sim_a \chi_{N_2}^2$$

Indicando con ps_N la performance di Sharpe del portafoglio ***M*** "completo" e con ps_{N1} la performance del portafoglio ridotto, cioè il portafoglio di tangenza ottenuto senza considerare l'indice immobiliare, *T* il numero di osservazioni. Sotto H0 la statistica test si distribuisce come una χ^2 con gradi di libertà uguali al numero di asset esclusi, nel nostro caso 1 (N_2=N-N_1).

Nella seguente tabella riportiamo le Performance di Sharpe del portafoglio ***M*** completo, le Performance di Sharpe del portafoglio di tangenza ridotto, il valore della statistica test e il relativo p-value.

Tabella 10: Test di esclusione.

DIV	0%	1%	3%	5%	7%
ps_N	0,44780	0,49846	0,65401	0,84113	1,03743
ps_{N1}	0,43551	0,43551	0,43551	0,43551	0,43551
Statistica test	0,24423	1,27160	4,50200	8,18838	11,52943
p-value	0,62117	0,25947	0,03386	0,00422	0,00069

A livello di stime notiamo che all'aumentare del dividendo aumenta la differenza tra la PS del portafoglio completo e di quello ridotto. In particolare, ammettendo una rendita del 7% per gli appartamenti, la PS del portafoglio completo è 1,04 mentre quella del portafoglio ridotto è 0,44.

Osservando i p-value, nel caso in cui i flussi dei dividendi per l'asset House sono nulli o dell'1%, possiamo concludere che non vi è una significativa differenza tra le PS del portafoglio completo e di quello ridotto, quindi in questi due casi si potrebbe anche fare a meno di considerare l'asset House. Invece, se i dividendi sono superiori o uguali al 3%, vi è un significativo peggioramento della Performance e quindi è sensato includere nel paniere degli strumenti l'indice degli appartamenti. Decidiamo, comunque, di continuare a trattare anche i portafogli completi per i casi dello 0% e dell'1%, in quanto le PS, anche se statisticamente possono essere considerate uguali, in stima sono maggiori nel portafoglio completo; in secondo luogo il modello di Markowitz indica di dare un peso importante agli immobili anche in questi due casi: rispettivamente 16,7% e 23,8%.

3.6 SCELTE DEGLI INVESTITORI

Una volta stabilite le composizioni dei portafogli di tangenza, è importante cercare di valutare come i soggetti finanziari collocheranno la loro ricchezza in base alla propria avversione al rischio. L'avversione al rischio (R_A) è l'atteggiamento soggettivo da parte dell'agente finanziario che preferisce un rendimento atteso certo più basso ad un rendimento aleatorio più alto; più un agente è avverso al rischio meno investirà nell'attività rischiosa.

Assumiamo che l'utilità degli agenti sia una funzione definita su media e varianza:

$$f(u) = E(r_p) - \frac{\mathrm{R_A}}{2} Var(r_p)$$

Dove $\mathrm{R_A}$ è il coefficiente che misura l'avversione al rischio dell'agente.

Il problema di ottimo dell'agente da risolvere è:

$$\max_{\omega_p} \left\{ \mu_\mathrm{p} - \frac{\mathrm{R_A}}{2} \sigma_p^2 \right\}$$
$$s.v.\ \mu_p = \omega' \mu + (1 - \omega' 1) r_0$$

Sostituiamo il vincolo di rendimento del portafoglio nella funzione da massimizzare, il problema diviene:

$$\max_{\omega_p} \left\{ r_0 + \omega^{'}(\mu - r_0) - \frac{R_A}{2}\omega^{'}\Sigma\omega \right\}$$

Imponiamo le condizioni di primo ordine e risolviamo rispetto al vettore dei pesi:

$$\omega = \frac{1}{R_A}\Sigma^{-1}(\mu - r_0)$$

Moltiplicando e dividendo l'espressione per la quantità: $1'\Sigma^{-1}(\mu - r_0)$ e sfruttando l'equazione del vettore dei pesi del portafoglio ***M***,
$\omega_M = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_0)}{1'\Sigma^{-1}(\mu - r_0)}$ otteniamo:

$$\omega = \frac{1}{R_A}\Sigma^{-1}(\mu - r_0)\frac{1'\Sigma^{-1}(\mu - r_0)}{1'\Sigma^{-1}(\mu - r_0)} = \frac{1}{R_A}1'\Sigma^{-1}(\mu - r_0)\frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_0)}{1'\Sigma^{-1}(\mu - r_0)}$$
$$= \frac{1}{R_A}\Sigma^{-1}(\mu - r_0)\omega_M$$

Quindi il vettore dei pesi cercato è proporzionale al vettore dei pesi del portafoglio di tangenza ***M***. In altre parole, l'agente sceglierà il portafoglio situato sulla CML tangente alla propria funzione di utilità che, come visto in precedenza, dipende dall'avversione al rischio.
All'aumentare dell'avversione al rischio, la quota nel portafoglio ***M*** diminuisce mentre aumenta la quota di ricchezza da investire nel risk-free.
Con i nostri dati osserviamo che, affinché la quota da investire nel portafoglio ***M*** sia inferiore al 100%, il coefficiente R_A deve assumere valori abbastanza alti, soprattutto nei casi in cui i flussi di entrata dell'asset House siano maggiori di zero. Il motivo sta nel fatto che i portafogli ***M*** che abbiamo trovato hanno una variabilità, e quindi un rischio, relativamente basso in rapporto al rendimento atteso, e questo fa si che per coefficienti di avversione al rischio bassi l'agente è disposto a prendere a prestito al tasso r_0 e investire più del 100% nel portafoglio di tangenza; in modo particolare se i dividendi per l'asset immobiliari sono alti,

perché, come visto, all'aumentare della rendita ipotizzata per gli appartamenti la varianza non aumenta in modo notevole.

Quindi al crescere del dividendo l'investitore è molto più motivato a "rischiare" di investire più del 100%, perché "paga un prezzo" in termini di varianza che ritiene sostenibile.

Affinché la quota di ricchezza investita nel portafoglio di tangenza sia minore del 100% i coefficienti di avversione al rischio devono essere: 10, 13, 19, 25 e 30 con rendimento atteso del portafoglio corrispondente del 7,7%, 7,6%, 8%, 8,7% e 9,5% rispettivamente con dividendi per l'asset House dello 0%, 1%, 3%, 5% e 7%.

Nella tabella successiva sono riportate, per alcuni coefficienti di avversione al rischio, la quota da investire nel portafoglio di tangenza ***M***, quella nel titolo risk-free, il rendimento atteso e la deviazione standard stimati.

Tabella 11: Allocazione ottimale per l'investitore al variare del R_A.

Div House	RA	1	5	10	12	13	16	19	22	25	28	30	35
0%	quota in M	9,39998	1,88000	0,94000	0,78333	0,72308	0,58750	0,49474	0,42727	0,37600	0,33571	0,31333	0,26857
	quota in rf	-8,39998	-0,88000	0,06000	0,21667	0,27692	0,41250	0,50526	0,57273	0,62400	0,66429	0,68667	0,73143
	Rend medio port	0,25720	0,09678	0,07672	0,07338	0,07210	0,06920	0,06723	0,06579	0,06469	0,06383	0,06336	0,06240
	Dev.stand port	0,44780	0,08956	0,04478	0,03732	0,03445	0,02799	0,02357	0,02035	0,01791	0,01599	0,01493	0,01279
1%	quota in M	12,50910	2,50182	1,25091	1,04243	0,96224	0,78182	0,65837	0,56860	0,50036	0,44675	0,41697	0,35740
	quota in rf	-11,50910	-1,50182	-0,25091	-0,04243	0,03776	0,21818	0,34163	0,43140	0,49964	0,55325	0,58303	0,64260
	Rend medio port	0,30513	0,10636	0,08152	0,07738	0,07578	0,07220	0,06975	0,06797	0,06661	0,06555	0,06495	0,06377
	Dev.stand port	0,49846	0,09969	0,04985	0,04154	0,03834	0,03115	0,02623	0,02266	0,01994	0,01780	0,01662	0,01424
3%	quota in M	18,46468	3,69294	1,84647	1,53872	1,42036	1,15404	0,97183	0,83930	0,73859	0,65945	0,61549	0,52756
	quota in rf	-17,46468	-2,69294	-0,84647	-0,53872	-0,42036	-0,15404	0,02817	0,16070	0,26141	0,34055	0,38451	0,47244
	Rend medio port	0,49600	0,14454	0,10060	0,09328	0,09047	0,08413	0,07979	0,07664	0,07425	0,07236	0,07132	0,06922
	Dev.stand port	0,67208	0,13442	0,06721	0,05601	0,05170	0,04201	0,03537	0,03055	0,02688	0,02400	0,02240	0,01920
5%	quota in M	24,09178	4,81836	2,40918	2,00765	1,85321	1,50574	1,26799	1,09508	0,96367	0,86042	0,80306	0,68834
	quota in rf	0,84113	0,16823	0,08411	0,07009	0,06470	0,05257	0,04427	0,03823	0,03365	0,03004	0,02804	0,02403
	Rend medio port	0,80622	0,20658	0,13163	0,11913	0,11433	0,10352	0,09612	0,09074	0,08665	0,08344	0,08166	0,07809
	Dev.stand port	0,89339	0,17868	0,08934	0,07445	0,06872	0,05584	0,04702	0,04061	0,03574	0,03191	0,02978	0,02553
7%	quota in M	29,41443	5,88289	2,94144	2,45120	2,26265	1,83840	1,54813	1,33702	1,17658	1,05052	0,98048	0,84041
	quota in rf	-28,41443	-4,88289	-1,94144	-1,45120	-1,26265	-0,83840	-0,54813	-0,33702	-0,17658	-0,05052	0,01952	0,15959
	Rend medio port	1,21768	0,28887	0,17277	0,15342	0,14598	0,12923	0,11778	0,10944	0,10311	0,09814	0,09537	0,08984
	Dev.stand port	1,12413	0,22483	0,11241	0,09368	0,08647	0,07026	0,05916	0,05110	0,04497	0,04015	0,03747	0,03212

CAPITOLO 4: ALLOCAZIONE OTTIMALE DEL PORTAFOGLIO CON RENDIMENTI ATTESI STIMATI CON IL CAPM

4.1 CAPITAL ASSET PRICING MODEL

Il Capital Asset Pricing Model (in breve ***CAPM***) proposto da William Sharpe nel 1964, è un modello di equilibrio dei mercati finanziari. In finanza, è molto usato per determinare il rendimento atteso da un'attività finanziaria, i cosiddetti rendimenti di "equilibrio".

Date le seguenti ipotesi:

1. Alla data 0 i risparmiatori decidono come investire la loro ricchezza sino alla data 1;
2. Si ha a disposizione un titolo non rischioso con rendimento r_0 e N titoli rischiosi con rendimenti aleatori con distribuzione caratterizzata solo dal vettore delle medie e dalla matrice di varianza e covarianza;
3. Tutti gli investitori hanno un'utilità attesa media-varianza e sono avversi al rischio, con diversi gradi di avversione;
4. Tutti gli investitori sono price taker e tutti hanno le stesse informazioni;

$\Rightarrow$ la CML nel senso media-varianza è uguale per tutti gli investitori.

Il modello mette in relazione la redditività e la rischiosità degli asset sotto l'ipotesi di equilibrio di domanda ed offerta aggregata, misurando l'esposizione al rischio sistematico (non diversificabile) di un asset attraverso un coefficiente nominato *beta*. Il *beta*, di fatto, è il rapporto tra la covarianza dei rendimenti dell' attività e dei rendimenti di mercato, e la varianza di quest'ultimi.

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{Var(r_M)}$$

Il modello ipotizza che il mercato compensi gli investitori per il rischio sistematico ma non per il rischio specifico, perché quest'ultimo può essere ridotto diversificando il portafoglio.

La condizione di equilibrio dalla quale è ottenuto il CAPM è la seguente:

$$\frac{(\mu_i - r_0)}{\beta_i} = (\mu_M - r_0)$$

con *i=1,…,n* che rappresenta il titolo.

Cioè il rapporto tra gli extra-rendimenti di ciascun asset e il proprio *beta* è uguale all'extra-rendimento del mercato.

Le analisi fin qui svolte, sono state eseguite partendo dai rendimenti medi degli asset scelti. Un modo alternativo sarebbe quello di prendere come punto di partenza i rendimenti di "equilibrio", calcolati tramite il CAPM.

Il ritorno previsto che gli investitori richiederanno è uguale al tasso del risk-free più un premio al rischio.

In formula:

$$\mu_i = r_0 + \beta_i(r_M - r_0)$$

Tale relazione definisce la Security Market Line. Essa è una retta rappresentata in un grafico avente sull'asse delle ascisse il *beta* e sulle ordinate il rendimento atteso dal titolo. L'intercetta è data dal tasso risk-free. La sua funzione principale è di individuare le attività finanziarie il cui valore non è disposto in linea con le attese di rendimento corrette per il loro rischio sistematico. In pratica potrebbe servire come indice di sopravvalutazione o sottovalutazione dell'attività

finanziaria da parte del mercato, e quindi portare l'investitore a scegliere, di conseguenza, di vendere o di acquistare.
Per la stima del parametro *beta* si utilizza la regressione ai minimi quadrati ordinari (OLS); più precisamente si regrediscono, in serie storica, gli extra-rendimenti dell'asset sugli extra-rendimenti del mercato, e questo viene fatto per ogni asset.

$$\left(r_{i,t} - r_{0,t}\right) = \alpha_i + \beta_i\left(r_{M,t} - r_{0,t}\right) + \varepsilon_{i,t}$$

Un assunto fondamentale per la bontà delle stime del modello della regressione lineare è che gli extra-rendimenti siano realizzazioni indipendenti e identicamente distribuiti. L'eventuale violazione di questo assunto può essere testata attraverso l'analisi dei residui e test di stabilità nel periodo campionario considerato.
L'intercetta α è anche chiamata *Alpha di Jensen*. È un indice usato per misurare la differenza tra il rendimento dell'asset e il rendimento che teoricamente lo stesso avrebbe dovuto ottenere in base al suo livello di rischio sistematico; quindi rappresenta una stima della remunerazione attesa dall'attività non giustificata dall'esposizione al rischio di mercato.
Un $\hat{\alpha}$ significativamente diverso da zero segnala un eccesso di rendimento medio netto rispetto al benchmark scelto.
Per quanto riguarda il *beta*, lo possiamo interpretare come un coefficiente di proporzionalità del rendimento dell'asset rispetto al rendimento del mercato; in particolare si distinguono tre casi:
$\hat{\beta} = 1$ l'asset si muove proporzionalmente al mercato (asset neutrale)
$\hat{\beta} < 1$ l'asset si muove più prudentemente rispetto al mercato (asset difensivo)
$\hat{\beta} > 1$ l'asset si muove in modo più che proporzionale rispetto al mercato (asset aggressivo).

4.2 APPLICAZIONE DEL CAPM AL PANIERE DEGLI STRUMENTI

Il modello presuppone di regredire gli extra-rendimenti di ogni asset sugli extra-rendimenti del portafoglio di mercato teorico. Il problema rilevante, consegue dal fatto che non è possibile osservare il portafoglio di mercato, in quanto dovrebbe comprendere tutte le attività rischiose che possono essere oggetto di scambio sul mercato: perciò non solo titoli azionari e obbligazionari ma anche immobili, opere d'arte e altre entità non facilmente quantificabili come il capitale umano (ad esempio investimento negli studi). Quindi, sperimentalmente, siamo costretti ad utilizzare una proxy dello stesso. La maggior parte delle volte è usato un indice composto da società quotate, in quanto si ha a disposizione una vasta banca dati facile da reperire. Nel nostro caso servirebbe una proxy che tenga conto anche dell'andamento del valore delle abitazioni, ma non sono stati trovati indici con queste caratteristiche. Abbiamo scelto di utilizzare, come proxy di mercato, l'indice MSCI Euro. Prendiamo quello europeo perché il MSCI tedesco è già presente nel nostro paniere degli strumenti.

Riportiamo le stime delle costanti e dei beta ottenute con gli OLS[7] considerando, come fatto fin ora, i risultati al variare del dividendo atteso per l'asset immobiliare. Vengono riportati per ogni parametro la stima, lo standard error e il livello di significatività, indicando con:

- * stima significativa al 10%
- ** stima significativa al 5%
- *** stima significativa all'1%

[7] Per le regressioni ai minimi quadrati abbiamo usato il software "Gretl 1.8.0".

Tabella 12: Stime alfa e beta.

	parametri	coefficienti	std.error	t-statistic	p-value
ex_MSCI	alpha	-0,03545	0,02294	-1,546	0,1347
	beta	1,38781	0,10950	12,67	2,21e-012 ***
ex_LongBond	alpha	0,01345	0,01503	0,8949	0,3794
	beta	0,07747	0,07175	1,08	0,2905
ex_ShortBond	alpha	0,00811	0,00555	1,46	0,1568
	beta	-0,00061	0,02652	-0,02301	0,9818
ex_House	alpha	0,00534	0,02223	0,2401	0,8122
	beta	-0,07172	0,10615	-0,6757	0,5055
ex_House 1%	alpha	0,01597	0,02243	0,7118	0,4832
	beta	-0,07255	0,10710	-0,6774	0,5044
ex_House 3%	alpha	0,03723	0,02283	1,631	0,1155
	beta	-0,07421	0,10899	-0,6809	0,5022
ex_House 5%	alpha	0,05849	0,02323	2,518	0,0186 **
	beta	-0,07587	0,11089	-0,6842	0,5001
ex_House 7%	alpha	0,07975	0,02363	3,376	0,0024 ***
	beta	-0,07754	0,11279	-0,6874	0,4981

I risultati evidenziano che i *beta* sono tutti non significativi ad eccezione di quello del MSCI, il quale può essere definito un asset aggressivo, infatti ci attendiamo un rendimento pari a 1,39 volte quello del benchmark. Per quanto riguarda le costanti si rilevano significative al 5% e all'1% per l'extra rendimento dell'asset immobiliare rispettivamente con dividendi del 5% e del 7%. In altre parole, ci aspettiamo che, se il flusso di entrata netto dell'indice immobiliare è del 5%, lo stesso sia "più performante" della proxy del portafoglio di mercato, cioè l'indice azionario europeo, del 5,85%; mentre ammesso un dividendo del 7% ci attendiamo un accesso di rendimento medio del 7,80% sempre rispetto al benchmark da noi scelto. I motivi principali della non significatività dei *beta* sono da ricercarsi nell'impossibilità di osservare il portafoglio di mercato, ma potrebbero anche essere attribuibili al particolare periodo in cui versa la situazione dei mercati finanziari.

Segnaliamo, inoltre, che è stata eseguita la diagnostica sui residui, in particolare si è provata la normalità, la non correlazione e l'indipendenza rispettivamente con i test Jarque-Brera, il test Ljung-Box e di Breusch-Godfre; per l'omoschedasticità si è fatto ricorso all'Arch Test e al Test di White; la corretta forma funzionale è stata verificata con il Test Reset; mentre la stabilità dei parametri è stata verificata con il Chow Breakpoint Test e il Chow Forecast Test.

4.3 TEST CONGIUNTO SUGLI ALFA

Un test per provare l'evidenza empirica del modello teorico del CAPM può essere costruito verificando congiuntamente che le intercette delle regressioni degli extra-rendimenti dei titoli siano nulle.
Il sistema di ipotesi è il seguente:

$H0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$
$H1 : \ almeno\ un\ alfa$ è $diverso\ da\ zero$

Dato il numero non elevato di osservazioni il valore della statistica test è calcolato come:

$$\frac{T-N-1}{N}\left(1+\frac{\bar{y}_m^2}{\tilde{\sigma}_m^2}\right)\tilde{\alpha}'\tilde{\Omega}^{-1}\tilde{\alpha} \sim_{\mathbf{a}} \mathrm{F}_{\mathrm{N,T-N-1}}$$

sotto l'ipotesi nulla.
Con $\bar{y}_m$ e $\tilde{\sigma}_m^2$ indichiamo rispettivamente media e varianza degli extra-rendimenti della proxy di mercato e $\tilde{\Omega}$ matrice di covarianza dei residui;

$\tilde{\Omega} = \frac{1}{T}\ U'U$
$U = [u_1, u_2, u_3]$ $\quad con\ u_i$ residui della regressione OLS dell'i-esimo asset.

Il limite di questo test, come sostenuto dall'autore nel "La critica di Rolle", nasce dalla consapevolezza che una verifica empirica del CAPM richiede necessariamente l'osservazione del portafoglio di mercato teorico. Il portafoglio teorico non è osservabile e al suo posto viene utilizzata una proxy più limitata, per questo motivo il risultato del test può essere interpretato in una duplice maniera:

- Il rifiuto dell'ipotesi nulla può essere dovuto a due cause: la prima è che ci sia una bassa correlazione della proxy di mercato ***m***, nel nostro caso dell'indice MSCI Euro, con il vero portafoglio di mercato ***M***: il test congiunto sulle costanti si tradurrebbe di fatto in un indice di non efficienza (cioè sulla base della frontiera efficiente stimata) della particolare proxy scelta come portafoglio di mercato. La seconda causa sarebbe la non validità del CAPM.
- Il non rifiuto della nullità congiunta delle costanti può essere letta sia come un sostegno empirico al modello del CAPM, ma potrebbe essere dovuto anche a un'elevata correlazione della proxy con un portafoglio efficiente sulla FE empirica; quindi potrebbe essere letto come indice di efficienza ex post del portafoglio utilizzato come proxy.

Riportiamo il valore della statistica test e il p-value associato.

Tabella 13: Test congiunto sugli alfa.

	0%	**1%**	**3%**	**5%**	**7%**
test congiunto alfa	**0,19471**	**0,24530**	**0,39837**	**0,61450**	**0,88695**
p-value	**0,93854**	**0,90942**	**0,80764**	**0,65671**	**0,48805**

I test ci inducono a non rifiutare l'ipotesi congiunta di uguaglianza a zero delle costanti in tutti i casi presi in analisi. Anzi i p-value sono molto alti, soprattutto considerando dividendi per l'asset immobiliare bassi, indicando che possiamo accettare l'ipotesi nulla senza molte esitazioni. Potremmo interpretare il precedente risultato come un'evidenza empirica a sostegno del CAPM, anche se come visto dalla non significatività dei coefficienti sembrerebbe che la proxy usata non sia un'ottima approssimazione del portafoglio di mercato. Questo, soprattutto, perché nella proxy non è tenuto conto dell'andamento del mercato immobiliare.

4.4 NUOVO VETTORE DEI RENDIMENTI

I rendimenti attesi di equilibrio calcolati nel modo convenzionale:

$$\mu_i = r_0 + \beta_i (r_M - r_0)$$

tenendo conto della significatività dei *beta*, risulterebbero uguali al tasso privo di rischio per tutti gli asset ad eccezione di quello azionario, in quanto, come osservato in precedenza, i *beta* degli altri asset possono essere considerati nulli.
Per cercare di correggere il limite della non conoscenze del portafoglio teorico, decidiamo di stimare i rendimenti in un modo leggermente diverso da quello convenzionale: non tenendo conto della significatività dei parametri e considerando anche l'intercetta:

$$\mu_i = \widehat{\alpha}_i + r_0 + \widehat{\beta}_i \ (r_M - r_0)$$

Assumiamo come rendimento medio di mercato l'ultima osservazione, nel nostro caso il rendimento dell'indice MSCI Euro nel 2007, e come rendimento per il tasso privo di rischio l'osservazione dello stesso anno. In questo modo troveremo rendimenti che tengono conto degli effetti dell'andamento del mercato nell'ultimo periodo osservato. Il premio al rischio $(r_M - r_0)$ risulta essere 2,67%.

I rendimenti trovati sono i seguenti:

Tabella 14: rendimenti attesi stimati con il CAPM.

MSCI	Long	Short	House 0%	House 1%	House 3%	House 5%	House 7%
0,04025	0,05415	0,04672	0,04205	0,05266	0,07388	0,09509	0,11631

4.5 CONFRONTO RENDIMENTI E PESI STIMATI CON I DUE METODI

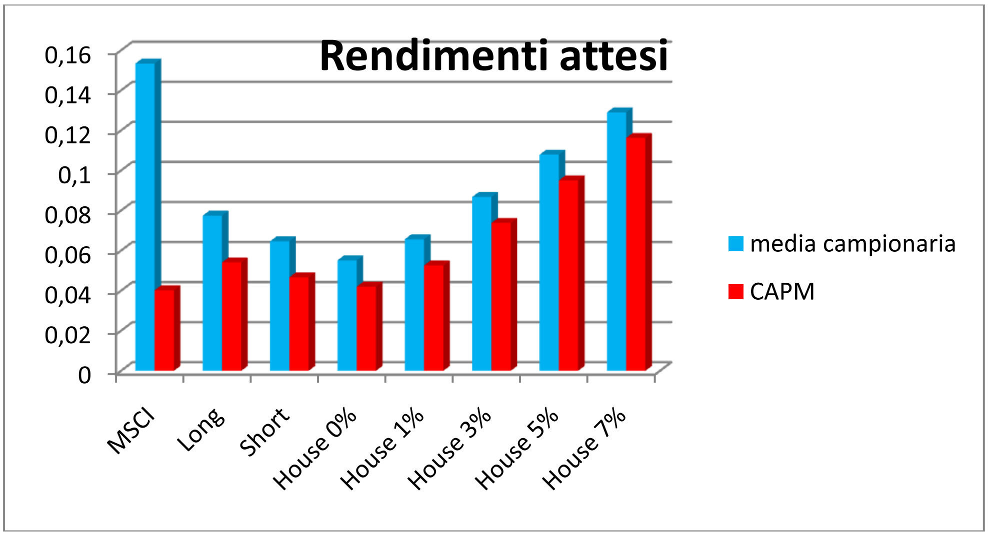

Figura 7: Confronto rendimenti attesi.

I rendimenti di equilibrio stimati con il CAPM sono molto differenti da quelli stimati con la media campionaria. In particolare sono tutti più bassi, principalmente il rendimento dell'indice azionario che precipita dal 15,3% al 4,0%. La riduzione dei rendimenti è dovuta per lo più ai primi effetti che la crisi ha portato nel campo finanziario.

In dettaglio vediamo le differenze tra i nuovi portafogli di tangenza (indicati con π) e quelli calcolati precedentemente (indicati con ω).

Tabella 15: Confronto portafoglio di tangenza stimati con i due metodi.

	0%		1%		3%		5%		7%	
Pesi	**ω**	**π**	**ω**	**π**	**ω**	**π**	**ω**	**π**	**ω**	**π**
MSCI	0,1506	0,0268	0,1242	0,0319	0,0997	0,0353	0,0880	0,0371	0,0808	0,0384
Long	0,1180	0,0726	0,0435	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Short	0,5643	0,7169	0,5940	0,7005	0,5884	0,6137	0,5590	0,5739	0,5422	0,5522
House	0,1670	0,1838	0,2384	0,2675	0,3120	0,3510	0,3530	0,3890	0,3770	0,4094
Rend port	0,0780	0,0462	0,0765	0,0481	0,0805	0,0560	0,0878	0,0653	0,0961	0,0750
Dev stand	0,0476	0,0328	0,0398	0,0306	0,0364	0,0340	0,0371	0,0367	0,0382	0,0388

Anche per i nuovi portafogli di tangenza sono stati riportati i portafogli vincolati.

Le quote investite nell'indice azionario si riducono notevolmente a vantaggio delle obbligazioni a breve e dell'immobiliare (in quest'ultimo soprattutto considerando dividendi alti). Ad esempio, esaminando il portafoglio contenente l'asset immobiliare senza flussi aggiuntivi, la quota da investire nell'azionario passa dal 15,1% al 2,3%; mentre la quota nelle obbligazioni a breve balza da 56,4% e 71,7%; nel caso supponessimo dividendi del 7%, sempre per l'asset immobiliare, le quote si ripartirebbero per il 3,8% nell'azionario, il 55,2% nelle obbligazioni a breve e il 41,0% nell'immobiliare. Ovvero, sfruttando le informazioni a disposizione, il modello consiglia di restare cauti, non investire tanto nell'asset azionario visto l'andamento del mercato nell'ultimo periodo osservato; piuttosto investire la maggior parte della ricchezza in attività meno rischiose anche se con rendimento atteso più basso. Per quanto riguarda le obbligazioni a lungo, in tutti e due i casi, con dividendi per l'indice immobiliare maggiori o uguali a 3 si dovrebbero assumere posizioni corte che, vincolando i pesi, diventano nulle. Ovviamente, visto che i rendimenti calcolati con il CAPM sono sottostimati rispetto alle medie campionarie, anche il rendimento atteso per il portafoglio è minore.

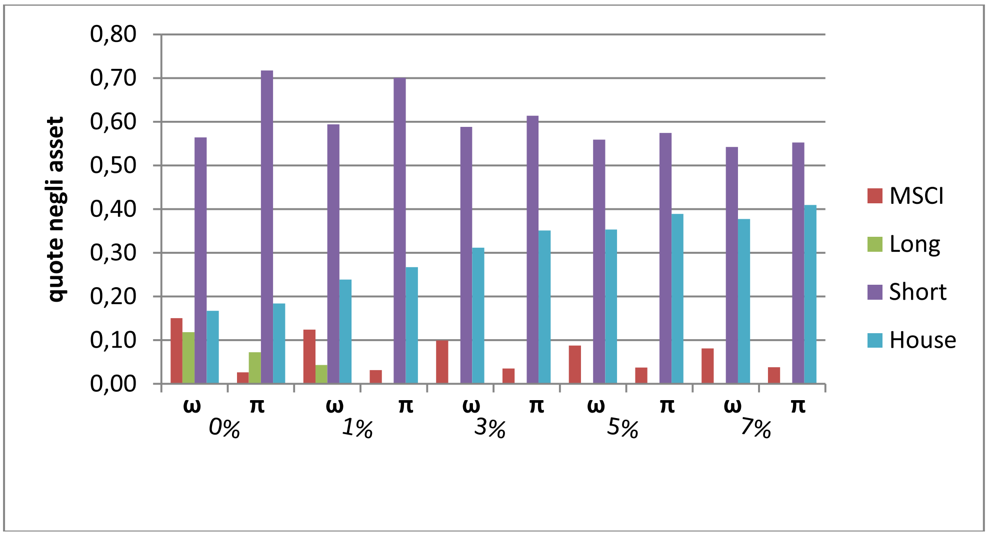

Figura 8: Composizione portafogli di tangenza con i due metodi al variare dei dividendi per l'asset immobiliare.

4.6 SCELTE DEGLI INVESTITORI CON I NUOVI PORTAFOGLI DI TANGENZA

Come fatto in precedenza, cerchiamo di valutare le scelte che l'investitore farà a seconda del proprio grado di avversione al rischio. Assumiamo, anche in questo caso, che l'utilità dell'agente sia una funzione definita in media e varianza. Come visto nel capitolo 3 paragrafo 6 l'agente comporrà il suo portafoglio in base alla proprio avversione al rischio allocando una quota nel portafoglio di tangenza e una quota nel titolo privo di rischio. Nella *Tabella 16* riportiamo le composizioni del portafoglio al variare del grado di avversione, utilizzando come portafoglio di tangenza quelli trovati a partire dai rendimenti attesi stimati con il CAPM (indicati nella *Tabella 15* con π).

Possiamo confrontare le scelte dell'investitore considerando i portafogli di tangenza ottenuti assumendo i rendimenti attesi come la media campionaria degli stessi[8] e le scelte considerando il portafoglio ottimale ottenuto dai rendimenti attesi stimati con il CAPM.

Confrontando la *Tabella 11* e la *Tabella 16* si evidenzia che nel secondo caso, con i rendimenti attesi stimati dal CAPM, a parità di grado di avversione al rischio, l'agente è disposto a investire meno nel portafoglio rischioso. Ad esempio, prendendo il caso dei dividendi nulli per l'asset immobiliare e un R_A uguale a 10, nel primo caso l'agente investirebbe il 94,0% nel portafoglio rischioso mentre nel secondo caso il 70,6%.

Di conseguenza per ottenere una quota nel portafoglio rischioso inferiore al 100%, i coefficienti di avversione al rischio sono più bassi di quelli trovati considerando il portafoglio di tangenza ottenuti prendendo come rendimenti attesi la media campionaria degli stessi. In particolare gli R_A devono essere 7, 11, 17, 22 e 28 nel secondo caso mentre quelli ottenuti nel capitolo 3 paragrafo 6 erano 10, 13, 19, 25 e 30[9].

Anche i rendimenti attesi dall'agente, a parità di avversione al rischio, sono più bassi nel secondo caso, del tutto normale visto che i portafoglio trovati con il

[8] Cap. 3.6

[9] I cinque valori sono considerati al variare dei dividendi per l'asset House.

metodo del CAPM avevano rendimenti più bassi di quelli trovati precedentemente.

Tabella 16: Allocazione ottimale dell'investitore al variare del R_A considerando i rendimenti attesi dal CAPM.

Div House	RA	1	7	10	11	13	17	19	22	25	28	30	35
0%	quota in M	7,06443	1,00920	0,70644	0,64222	0,54342	0,41555	0,37181	0,32111	0,28258	0,25230	0,23548	0,20184
	quota in rf	-6,06443	-0,00920	0,29356	0,35778	0,45658	0,58445	0,62819	0,67889	0,71742	0,74770	0,76452	0,79816
	rend medio port	-0,07081	0,03846	0,04392	0,04508	0,04687	0,04917	0,04996	0,05088	0,05157	0,05212	0,05242	0,05303
	dev stand port	0,55035	0,07862	0,05503	0,05003	0,04233	0,03237	0,02897	0,02502	0,02201	0,01966	0,01834	0,01572
1%	quota in M	10,17855	1,45408	1,01786	0,92532	0,78297	0,59874	0,53571	0,46266	0,40714	0,36352	0,33929	0,29082
	quota in rf	-9,17855	-0,45408	-0,01786	0,07468	0,21703	0,40126	0,46429	0,53734	0,59286	0,63648	0,66071	0,70918
	rend medio port	0,13461	0,05234	0,04823	0,04735	0,04601	0,04427	0,04368	0,04299	0,04247	0,04205	0,04183	0,04137
	dev stand port	0,58610	0,08373	0,05861	0,05328	0,04508	0,03448	0,03085	0,02664	0,02344	0,02093	0,01954	0,01675
3%	quota in M	16,14375	2,30625	1,61438	1,46761	1,24183	0,94963	0,84967	0,73381	0,64575	0,57656	0,53813	0,46125
	quota in rf	-15,14375	-1,30625	-0,61438	-0,46761	-0,24183	0,05037	0,15033	0,26619	0,35425	0,42344	0,46187	0,53875
	rend medio port	0,30304	0,07640	0,06507	0,06266	0,05897	0,05418	0,05254	0,05065	0,04920	0,04807	0,04744	0,04618
	dev stand port	0,78246	0,11178	0,07825	0,07113	0,06019	0,04603	0,04118	0,03557	0,03130	0,02794	0,02608	0,02236
5%	quota in M	21,78007	3,11144	2,17801	1,98001	1,67539	1,28118	1,14632	0,99000	0,87120	0,77786	0,72600	0,62229
	quota in rf	-20,78007	-2,11144	-1,17801	-0,98001	-0,67539	-0,28118	-0,14632	0,01000	0,12880	0,22214	0,27400	0,37771
	rend medio port	0,57256	0,11490	0,09202	0,08717	0,07970	0,07003	0,06673	0,06290	0,05998	0,05770	0,05642	0,05388
	dev stand port	1,08270	0,15467	0,10827	0,09843	0,08328	0,06369	0,05698	0,04921	0,04331	0,03867	0,03609	0,03093
7%	quota in M	27,11151	3,87307	2,71115	2,46468	2,08550	1,59479	1,42692	1,23234	1,08446	0,96827	0,90372	0,77461
	quota in rf	-26,11151	-2,87307	-1,71115	-1,46468	-1,08550	-0,59479	-0,42692	-0,23234	-0,08446	0,03173	0,09628	0,22539
	rend medio port	0,93158	0,16619	0,12792	0,11980	0,10732	0,09115	0,08562	0,07922	0,07434	0,07052	0,06839	0,06414
	dev stand port	1,38770	0,19824	0,13877	0,12615	0,10675	0,08163	0,07304	0,06308	0,05551	0,04956	0,04626	0,03965

CONCLUSIONI

Nella relazione abbiamo illustrato una serie di portafogli ottimali, ottenuti a partire da un paniere composto da tre attività finanziarie caratterizzate da un indice azionario e da due indici obbligazionari con scadenza rispettivamente a 3 e a 10 anni. Tra l'altro Ci interessava valutare se fosse ragionevole e in che quantità inserire nel portafoglio un indice immobiliare costruito con i prezzi di compra-vendita degli appartamenti in Italia. Più precisamente abbiamo differenziato 5 casi per l'indice immobiliare ammettendo flussi di entrata provenienti da contratti di locazione dell' 0%, 1%, 3%, 5% e 7%.

Basandoci sul portafoglio di tangenza tra la frontiera efficiente con e senza titolo privo di rischio, stimate con il modello di Markowitz, abbiamo osservato come variano le composizioni dei portafogli al variare della rendita degli immobili. Più precisamente con rendita nulla la quota nell'immobiliare è del 16,7% e mano a mano che aumenta la rendita ipotizzata aumenta anche la quota dello stesso nel portafoglio; fissata una rendita del 7% la quota di ricchezza da investire diventa 37,7%. Inoltre abbiamo appurato, con il test di esclusione, che ammettendo rendita nulla o dell'1%, l'esclusione dell'asset immobiliare dal portafoglio non comporta un significativo peggioramento della Performance di Sharpe per il portafoglio. Quindi in questi due casi si potrebbe anche fare a meno di investire negli appartamenti.

Successivamente abbiamo valutato l'allocazione ottimale prendendo il punto di vista dell'agente finanziario. Dopo essere giunti alla conclusione che l'agente investirà tutta la sua ricchezza nel portafoglio di tangenza e nel titolo privo di rischio, ammettendo una funzione di utilità definita su media e varianza, è stato possibile stimare la composizione del portafoglio ottimale al variare della soggettiva avversione al rischio. I nostri risultati dimostrano che l'investitore è molto propenso a investire nel portafoglio rischioso a scapito del titolo privo di rischio, infatti affinché la quota da investire nel portafoglio rischioso sia minore del 100% il coefficiente di avversione al rischio deve essere abbastanza alto (R_A=7 considerando il portafoglio contenente l'indice immobiliare senza rendita aggiuntiva).

In seconda analisi, con il fine di trovare dei nuovi portafogli ottimali che tengano conto delle aspettative del mercato, abbiamo utilizzato il modello del CAPM per stimare il nuovo vettore dei rendimenti attesi e di conseguenza le composizioni dei nuovi portafogli ottimali.

Per cercare di correggere le inesattezze derivanti dalla proxy di mercato utilizzata, la quale non tiene conto dell'andamento del mercato immobiliare, le stime dei rendimenti sono state calcolate considerando anche l'intercetta e i coefficienti non significativi.

I rendimenti stimati con il CAPM sono molto più bassi di quelli ricavati tramite le medie campionarie, in quanto risentono dell'ultimo periodo osservato, nel quale la crisi finanziaria mondiale iniziava a farsi sentire. Partendo dal nuovo vettore dei rendimenti, abbiamo calcolato i nuovi portafogli di tangenza. Confrontando i portafogli ottimali ottenuti con i due metodi descritti, constatiamo che usando il CAPM dovremmo dare molto meno peso alla componente azionaria (ad esempio considerando il portafoglio con l'asset immobiliare con rendita nulla, con il primo metodo la quota è 15,1%, con il CAPM è il 2,7%) a vantaggio di quella obbligazionaria a breve (che toccano quote oltre il 70% della quota di portafoglio) e di quella immobiliare. Possiamo dedurre che viste le condizioni finanziarie è più sensato investire in attività meno redditizie ma molto meno rischiose.

Dal punto di vista dell'agente finanziario, sebbene predisposti anche in questo caso più della norma ad esporsi nel portafoglio rischioso piuttosto che nel titolo privo di rischio, a parità di avversione al rischio investe meno nel portafoglio rischioso rispetto al primo caso.

In conclusione, avendo osservato che i portafogli di tangenza trovati con i due metodi contengono in tutti i casi presi in analisi una quota rilevante dell'asset immobiliare, in particolar modo, la porzione della ricchezza da investire aumenta in modo considerevole all’aumentare della rendita, riteniamo opportuno che l’agente finanziario inserisca nel proprio paniere degli strumenti anche beni immobili come gli appartamenti, in questo modo si ottengono portafogli con efficienza maggiore di quelli che si troverebbero omettendoli.

SOFTWARE UTILIZZATI

- Datastream Advance 4.0:
    - Download delle serie storiche degli indici finanziari utilizzati.
- Microsoft Excel 2007:
    - Matrice di varianza e covarianza, matrice di correlazione;
    - Determinazione delle Frontiere Efficienti, della Capital Market Line, dei portafogli di minima varianza, dei portafogli di miglior trade-off rendimento/rischio, dei portafogli di tangenza e delle Performance di Sharpe;
    - Test statistici di significatività, test di esclusione, test di uguaglianza delle Performance di Sharpe e test congiunto sugli alfa con relativi p-value;
    - Grafici e tabelle riportati nella relazione.
- Gretl 1.8.0
    - Analisi dei rendimenti: normalità, incorrelazione e indipendenza;
    - Regressioni ai minimi quadrati per il CAPM;
    - Analisi dei residui, test di corretta forma funzionale, assenza di autocorrelazione e omoschedasticità, test di stabilità dei parametri.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Pastorello S., “*Rischio e rendimento. Teoria finanziaria e applicazioni econometriche*”, Il Mulino, 2001.
- Beltratti A., “*I mercati finanziari*”, Carocci, 2000.
- Shiller R.J, “*Finanza shock*”, Egea, 2008.
- Muzzicato S, Sabbatini R., Zollino F., “*Prices of residential property in Italy: constructing a new indicator*” in Questioni di Economia e Finanza (Occasional papers), Banca d’Italia, 2008.
- Bodie,Kane e Marcus, “*Investments*”, McGraw-Hill.
- Brealey R. A., Myers S. C., Sandri S., “*Principi di finanza aziendale*”, McGraw-Hill, 1998.
- Gallo G.P., Pacini B., “*Metodi quantitativi per i mercati finanziari*”, Carocci, 2002.
- Brealey R. A., Myers S. C., “ *Principi di finanza aziendale*”, McGraw-Hill, 1999.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio in primo luogo chi mi ha seguito con professionalità, disponibilità e anche simpatia nella preparazione di questa tesi: il Prof. Weber.
Un ringraziamento al Dott. Caporin per le consulenze che mi ha fornito.
I ringraziamenti più sentiti vanno alla mia famiglia: a mio padre e a mia madre che da sempre hanno creduto e investito nella mia vita senza garanzie e continuano a farlo; a mio fratello Giuseppe e mia cognata Consiglia, in particolare per avermi reso molto più facile la vita da fuori sede i primi due anni di università e anche l'adattamento a Padova; a mio fratello Alessandro, ci abbiamo messo molti anni ma alla fine abbiamo capito di non essere poi così diversi; a Selena e ai miei nipotini Federico e Mathias; a chi non c'è più, ma oltre al cognome mi ha lasciato molto altro.
Un grazie speciale a tutti quelli che c'erano ai tempo del liceo e che ancora oggi a 1000 km di distanza continuano a esserci; a chi negli anni si è guadagnato la mia profonda stima e fiducia; a chi quando ho chiesto una mano o un consiglio non si è mai tirato indietro; a chi con me ha passato notti insonni imparanoiati da qualche problema; a chi con me ha condiviso notti felici, cene, bevute, falò e "cavolate" varie in quel di San Vito e non solo.
A tutti i compagni universitari e non, ai gruppi di studio, a tutti i giorni trascorsi in facoltà tra lezioni e biblioteca, ma anche a tutti i mercoledì sera in piazza e a tutte le feste varie. Un grazie a tutti quelli che mi passano a prendere in macchina per andare alle feste e soprattutto a chi al ritorno fa guidare me per impossibilità psico-fisica ☺.
Grazie ai miei coinquilini, soprattutto per sopportarmi, per non dirmi su perché non faccio mai le pulizie, per l'inquinamento acustico che gli provoco mettendo Ax a palla; in particolare a chi riflette con me sui "problemi irrisolvibili dell'essere" e a chi è il mio bersaglio preferito di offese ed insulti ma infondo ho trovato un buon compagno e amico.

Un grazie a chi in questi anni mi ha sopportato per le mie teorie e discorsi "contorti e pesanti".
Un grazie alle ragazze che mi hanno portato alla conclusione che è più facile studiare statistica che tentare di capirle.
Infine un grazie a tutti quelli/e che in questi tre anni mi hanno deluso, grazie a loro è stato sempre alimentato il mio sentimento di rivalsa che mi ha motivato a fare sempre meglio.