UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA E TECNOLOGIE INFORMATICHE

STUDIO DI CAPACITÀ IN PROCESSI SHORT-RUNS

Relatore:
Prof. Giovanna Capizzi

Laureando:
Eleonora Carrozzo

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

INDICE

INTRODUZIONE……..…5

CAPITOLO 1

Stimatori basati su sottocampioni e loro proprietà distribuzionali……..**7**

1.1: Stimatori di C_{pm}……...**11**

1.1.1: Stimatore di C_{pm} basato sullo stimatore congiunto della varianza**…….……...11**

1.1.2: Stimatore di C_{pm} basato sullo stimatore non congiunto della varianza…….……...…**12**

CAPITOLO 2

Test di Verifica d'Ipotesi ……14

2.1: Caso in cui si utilizza uno stimatore congiunto della varianza……..**15**

2.1.1: Potenza**……...…….…… 16**

2.2: Caso in cui si utilizza uno stimatore non congiunto della varianza**……...…..…18**

2.2.1: Potenza**……...…….……18**

CAPITOLO 3

Studio di Capacità in processi Short-Runs ……...……29

Conclusioni……...……35

Bibliografia……...……37

Introduzione

Per far fronte al sempre più rapido cambiamento della domanda dei consumatori, molte industrie moderne sono costrette ad adottare nuove strategie di produzione dirette a soddisfare in maniera efficiente le richieste dei clienti cercando di mantenere relativamente bassi i costi di produzione. In molti settori si è assistito ad un drastico cambiamento nella filosofia aziendale caratterizzata sempre più spesso da bassi volumi di produzione eseguiti in tempi sempre più rapidi. Di conseguenza ci si trova a dover affrontare problemi di rilevante importanza nel momento in cui ci si appresta a valutare la capacità di un processo produttivo.

La capacità di un processo in generale si riferisce all'uniformità di comportamento del processo stesso. L'analisi della capacità è parte vitale di un qualsiasi programma atto al miglioramento della qualità e prevede l'utilizzo degli output del processo per valutare se esso sta producendo entro specifiche tolleranze. Il metodo più frequentemente usato per misurare la capacità di un processo produttivo, è il calcolo di una qualche forma di indice di capacità. Tali indici sono stati progettati per quantificare la relazione esistente tra l'attuale performance del processo e le sue specifiche ingegneristiche. Nella grande maggioranza delle ricerche sugli indici di capacità si assume che i dati compongano un unico grande campione, nella pratica tuttavia i dati sono spesso raccolti in diversi campioni ognuno dei quali suddiviso in sottocampioni. Nel momento in cui si decide di calcolare un indice per la valutazione della capacità del processo, l'analisi deve essere condotta su di un processo stabile. Solitamente la stabilità di un processo viene valutata raccogliendo sottocampioni ad intervalli regolari e rappresentando poi i sottocampioni statistici su carte di controllo. Una volta che le carte mostrano un ragionevole grado di stabilità, può essere valutata la capacità del processo.

In uno studio condotto da *Norma Faris Hubele* e *Kerstin Vännman* (2004) viene esaminato il comportamento di due diversi stimatori di un dato indice di capacità basati su questa struttura dei dati. In questo elaborato saranno esaminati questi due stimatori che si differenziano in base a come viene stimata la varianza. Nel primo caso la varianza sarà esaminata considerando le varianze dei campioni (varianza congiunta) e lo chiameremo stimatore congiunto; nel secondo caso la varianza verrà stimata tenendo in considerazione i singoli sottocampioni, ossia considerando i dati come un unico campione (varianza non congiunta) e lo chiameremo stimatore non congiunto. Successivamente gli autori hanno utilizzato le distribuzioni dei campioni per dimostrare la procedura di test di verifica

d'ipotesi e per calcolare la potenza dei test. Tuttavia la stima degli indici di capacità di un processo, risulta corretta qualora venga rispettata l'ipotesi di distribuzione normale del processo sotto osservazione. È evidente che nelle situazioni in cui il volume ridotto di produzione, le produzioni temporanee o le rapide innovazioni, producano un numero di osservazioni insufficiente per la valutazione della normalità e la stima accurata dei parametri del processo, il calcolo degli indici di capacità non può avvenire nell'usuale semplice maniera. Lo studio condotto da *Hubele* e *Vännman* (2004) indica infatti che rimanendo costante il numero di osservazioni, la potenza del test decresce con il decrescere della dimensione dei sottocampioni. Lo studio della capacità nei brevi cicli di produzione, qui generalmente denominati processi short-runs non ha però ricevuto l'adeguata attenzione in letteratura. Un contributo è stato fornito da *Balamurali (2003)* il quale ha appropriatamente modificato alcuni indici di capacità come C_p, C_{pk} e C_{pm} per creare indici utili nelle situazioni in cui la numerosità delle osservazioni è piccola e utilizzando tecniche bootstrap proposte da *Efron et al. (1986*) ha costruito intervalli di confidenza per tali indici. Un altro approccio interessante, è stato fornito da Deleryd e Vännman (1998) . Essi hanno proposto l'utilizzo di una trasformazione dei dati e mostrato tramite una simulazione che la trasformazione proposta consentiva di condurre studi di capacità nella maniera tradizionale.

In questa tesi ci si propone di presentare alcune tecniche per lo studio della capacità tramite il calcolo di indici di capacità. In particolare il Capitolo 1 descrive le proprietà distribuzionali degli stimatori di alcuni particolari indici di capacità quando i parametri del processo sono stimati utilizzando sottocampioni. Dunque si utilizzano i risultati teorici salienti per studiare l'utilizzo di test di verifica d'ipotesi nello studio della capacità di processo nel Capitolo 2. Si mostrerà come la dimensione e il numero dei sottocampioni influisca sull'efficienza del test di verifica di ipotesi. In particolare si mostra come fissata una soglia minima per la potenza pari a 0.80, si raccomandi un minor numero di sottocampioni ed una maggiore numerosità dei sottocampioni quando si studia la capacità. In fine, nel capitolo 3 saranno discussi i problemi riguardanti lo studio di capacità quando ci si trova di fronte ad un breve ciclo di produzione, e le tecniche proposte per cercare di affrontare questo problema.

Capitolo 1

Stimatori basati su sottocampioni e loro proprietà distribuzionali

Gli indici più comunemente usati in industria sono C_p e C_{pk} (*Kane* 1986) e sono definiti nel seguente modo:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \tag{1}$$

$$C_{pk} = \frac{\min\,(USL - LSL)}{3\sigma} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma} \tag{2}$$

LSL e USL sono i limiti di specifica, ossia i limiti inferiore e superiore rispettivamente dell'intervallo entro il quale la caratteristica qualitativa in esame è considerata accettabile, $d = (USL - LSL)/2$ è la metà dell'intervallo di specifica, ed $M = (USL + LSL)/2$ è il punto centrale dell'intervallo, μ rappresenta la media del processo e σ la deviazione standard del processo.

Al fine di ottenere una corretta immagine della capacità del processo è di particolare importanza tenere la media del processo su un target T prefissato. Poiché gli indici in (1) e (2) non tengono conto del fatto che la media μ possa differire dal valore target, *Chan* (1988) ha sviluppato un altro indice che tiene conto di ciò, definito come

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{3}$$

Successivamente, al fine di enfatizzare la differenza esistente tra il valore della media e il valore target ed allo stesso tempo per generalizzare gli indici suddetti, *Vännman(1995)* ha definito una famiglia di indici dipendenti da due parametri non negativi u e v :

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \tag{4}$$

Gli indici in (1), (2), (3) si ottengono ponendo $u = 0$ o 1 e $v = 0$ o 1 nella (4). Vale a dire

$$C_p(0,0) = C_p \qquad C_p(1,0) = C_{pk} \qquad C_p(0,1) = C_{pm}$$

La famiglia in (4) include inoltre l'indice C_{pmk} introdotto da *Pearn et al.*(1992). In particolare $C_p(1,1) = C_{pmk}$.

I parametri del processo μ e σ sono usualmente ignoti e vengono stimati con appropriati campioni. La maggior parte dei risultati in letteratura assume che i parametri siano stimati da un unico grande campione rappresentativo del processo in controllo (*Kotz e Johnson 2002*). Alcune eccezioni sono il lavoro di *Kirmani et al.(1991)*, in cui viene studiata la distribuzione di uno stimatore di C_p basato sulla deviazione standard campionaria dei sottocampioni, e il lavoro di *Li et al.*(1990) in cui vengono studiate le distribuzioni degli stimatori di C_p *e* C_{pk}, basati sui range campionari. *Vännmane e Hubele (2003)* hanno studiato la distribuzione degli stimatori di una generale classe di indici di capacità, quando la media del processo è stimata usando la media complessiva e la varianza del processo è stimata usando la varianza congiunta, che equivale alla tradizionale stima della varianza "entro i gruppi"o a "breve termine". Il metodo assume che la stima venga effettuata dopo che numerosi sottocampioni siano stati raccolti, rappresentati su carte di controllo, e il processo sia stato ritenuto in controllo.

Vännman e *Hubele (2003)* hanno ricavato la distribuzione della famiglia di stimatori descritta nella (4) basandosi su due diversi stimatori per la varianza, lo stimatore congiunto e lo stimatore non congiunto. In questo capitolo saranno riportati i passaggi principali di tali derivazioni ed in particolare soffermeremo l'attenzione sulla distribuzione dello stimatore di C_{pm} descritto nella (3) dal momento che, essendo un indice sensibile alla posizione del processo rispetto al valore target, esso è sempre più frequentemente utilizzato in industria.

Si assuma che il processo in studio sia descritto da una caratteristica X avente distribuzione normale con media μ e varianza σ^2. Sia in particolare X_{ij} la j-esima osservazione dell'i-esimo sottocampione, con j=1,…,n_i e i=1,…,m. Assumiamo che il processo sia stato considerato in controllo statistico durante il periodo di campionamento. Quindi per ogni sottocampione *i*, la media e la varianza campionaria sono definite come

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i} \tag{5}$$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)}{n_i - 1} \tag{6}$$

e $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Notare che quando i sottocampioni hanno tutti la medesima numerosità campionaria $N = mn$.

Come stimatore non distorto della media del processo μ si utilizza la media campionaria complessiva (la media delle medie):

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{X}_i}{N} \tag{7}$$

Per calcolare la stima della varianza, sono stati utilizzati due diversi approcci, che danno origine a due diversi stimatori per l'indice $C_p(u,v)$ dato nella (4).

Un primo stimatore di σ^2 è lo stimatore congiunto della varianza definito come

$$s_p^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)S_i^2 \tag{8}$$

da cui si ottiene il seguente stimatore per $C_p(u,v)$:

$$\hat{C}_p(u,v) = \frac{d - u|\hat{\mu} - T|}{3\sqrt{s_p^2 + v(\hat{\mu} - T)^2}} \tag{9}$$

È noto come sia possibile ottenere $\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2$ da S_i^2 e $\bar{X}_i$ attraverso la relazione

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2 = \sum_{j=1}^{n_i} {X_{ij}}^2 - n_i\bar{X}_i^2 \tag{10}$$

senza che sia richiesta ogni singola osservazione X_{ij} .

Quindi dati $\bar{X}_i$ e S_i^2 , $i = 1,2,\dots,m$, possiamo costruire uno stimatore non congiunto per σ^2:

$$s_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - N\,\bar{\bar{X}}^2\right) \tag{11}$$

ed ottenere così un secondo stimatore di $C_p(u,v)$ definito come

$$\hat{\hat{C}}_p(u,v) = \frac{d - u|\hat{\mu} - T|}{3\sqrt{s_u^2 + v(\hat{\mu} - T)^2}} \tag{12}$$

Lo stimatore $\hat{\hat{C}}_p(u,v)$ nella (12) corrisponde allo stimatore di $C_p(u,v)$ basato su un singolo campione di numerosità N (*Vännman, 1995*).

Ora per ottenere la distribuzione di $\hat{C}_p(u,v)$ descritto nella (9), bisogna introdurre le seguenti notazioni

$$\xi = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)S_i^2, \quad \eta = \frac{(\bar{\bar{X}} - \mu)\sqrt{N}}{\sigma}, \quad g = \frac{(\mu - T)\sqrt{N}}{\sigma} \quad e \quad D = \frac{d\sqrt{N}}{\sigma} \tag{13}$$

Con tali notazioni lo stimatore $\hat{C}_p(u,v)$ in (9) diventa

$$\hat{C}_p(u,v) = \frac{D - u|\eta + g|}{3\sqrt{\xi + v(\eta + g)^2}} \tag{14}$$

Sotto assunzioni di normalità della caratteristica del processo, e nell'ipotesi che T = M, le variabili casuali ξ e η sono indipendenti; ξ è distribuita secondo una distribuzione χ^2centrale

con N_1 gradi di libertà, dove $N_1 = \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)$ e η secondo una normale standard. Siano F_ξ e Φ , f_ξ e f_η le funzioni di ripartizione e di densità di ξ ed η rispettivamente.

Posto $$h(t) = f_\eta(-t-g) + f_\eta(t-g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{(t+g)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(t-g)^2}{2}\right)\right) \qquad (15)$$

si ha il seguente risultato (*Vännman 1997*)

Teorema A. Se la caratteristica del processo è normalmente distribuita la funzione di ripartizione di $\hat{C}_p(u,v)$ è la seguente.

(a) Quando $u > 0$, $v > 0$

$$F_{\hat{C}_p(u,v)}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -\dfrac{u}{3\sqrt{v}} \\ \displaystyle\int_{D/(u+3x\sqrt{v})}^{\infty} F_\xi\left(\frac{(D-ut)^2}{9x^2} - vt^2\right)h(t)\,dt & -\dfrac{u}{3\sqrt{v}} < x < 0 \\ 1 - \Phi\left(\dfrac{D}{u} - g\right) - \Phi\left(-\dfrac{D}{u} - g\right) & x = 0 \\ \displaystyle 1 - \int_0^{D/(u+3x\sqrt{v})} F_\xi\left(\frac{(D-ut)^2}{9x^2} - vt^2\right)h(t)dt & x > 0 \end{cases} \qquad (16)$$

(b) Quando $u > 0$, $v = 0$

$$F_{\hat{C}_p(u,0)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{D/u}^{\infty} F_\xi\left(\frac{(D-ut)^2}{9x^2}\right)h(t)dt & x < 0 \\ 1 - \Phi\left(\dfrac{D}{u} - g\right) - \Phi\left(-\dfrac{D}{u} - g\right) & x = 0 \\ \displaystyle 1 - \int_0^{D/u} F_\xi\left(\frac{(D-ut)^2}{9x^2}\right)h(t)dt & x > 0 \end{cases} \qquad (17)$$

(c) Quando $u = 0, v > 0$

$$F_{\hat{C}_p(0,v)}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \displaystyle 1 - \int_0^{D/(3x\sqrt{v})} F_\xi\left(\frac{D^2}{9x^2} - vt^2\right)h(t)dt & x > 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Dove $\hat{C}_p(u,v), D, g$ e h(t) sono definiti nella (9),(13) e (15) rispettivamente.

Il caso $m = 1$ corrisponde al caso di un singolo campione di dimensione n_1. Quindi la funzione di ripartizione per $\hat{\hat{C}}_p(u,v)$ descritto nella (12), può essere ottenuta da (16)-(18) ponendo $m = 1$ e $n_1 = N$.

Di seguito è riportata la funzione di densità di $\hat{C}_p(u,v)$ descritto nella (9) quando $u = 0$ (*Vännman, Hubele* 2003). Per gli altri casi vedere *Vännman(1997).*

Teorema B. Quando $u = 0, v > 0$ e la caratteristica del processo è normalmente distribuita, la funzione di densità di $\hat{C}_p(u,v)$ derivando la (18) rispetto ad x diventa

$$f_{\hat{C}_p(0,v)}(x) = \int_{-D/(3x\sqrt{v})}^{D/(3x\sqrt{v})} f_\xi\left(\frac{D^2}{9x^2} - vt^2\right)\frac{2D^2}{9x^3} f_\eta(t-g)dt\,, \qquad x > 0 \tag{19}$$

dove D e g sono definite nella (13).

I risultati in Teorema A e Teorema B sono importanti perché risultano utili nel momento in cui si devono derivare regole decisionali e si vuole calcolare la potenza di tests per la capacità.

1.1 Stimatori di C_{pm}

Focalizziamo ora l'attenzione sullo stimatore dell'indice C_{pm} definito nella (3). È il caso particolare di $C_p(u,v)$ nella (4) quando $u = 0$ e $v = 1$. Di seguito è riportata la distribuzione campionaria di $\hat{C}_{pm}$ quando si utilizzano m sottocampioni di numerosità costante pari ad n e quando si utilizzano le due diverse stime di σ^2 (*Vännman, Hubele 2004*).

1.1.1 Stimatore di C_{pm} basato sullo stimatore congiunto della varianza

Sia ζ una variabile casuale avente distribuzione χ^2non centrale con $m(n-1)+1$ gradi di libertà e parametro di non centralità

$$\lambda = \frac{mn(\mu - T)^2}{\sigma^2} \tag{22}$$

e sia F_ζ la funzione di ripartizione di ζ.

Allora la funzione di ripartizione dello stimatore $\hat{C}_{pm} = C_p(0,1)$ definito nella (9) e basato sullo stimatore congiunto della varianza, può essere espressa come

$$F_p(x; m, n, \mu, \sigma) = 1 - F_\zeta\left(\frac{d^2mn}{9x^2\sigma^2}\right), \quad x > 0 \tag{23}$$

o alternativamente

$$\left(\hat{C}_{pm}\right)^2 \sim \frac{d^2mn}{9\sigma^2\zeta}$$

È possibile anche derivare un'espressione approssimata per la funzione di ripartizione basata su una distribuzione χ^2 centrale utilizzando l'approssimazione di *Patnaik*. La variabile

casuale ζ con distribuzione χ^2 non centrale, può essere infatti approssimata da una variabile casuale distribuita come un χ^2 centrale con f_p gradi di libertà, ovvero

$$\zeta \dot{\sim} g_p \chi^2_{f_p}$$

con

$$f_p = \frac{\left(mn + \lambda^2 - (m-1)\right)^2}{mn + 2\lambda - (m-1)} \tag{24}$$

e

$$g_p = \frac{mn + 2\lambda - (m-1)}{mn + \lambda - (m-1)} \tag{25}$$

Da tale approssimazione si ottiene

$$F_p(x; m, n, \mu, \sigma) \approx 1 - F_{\chi^2_{f_p}}\left(\frac{d^2 mn}{g_p 9x^2\sigma^2}\right), \quad x > 0 \tag{26}$$

1.1.2 Stimatore di C_{pm} basato sullo stimatore non congiunto della varianza

Mentre è uso comune utilizzare uno stimatore congiunto per la varianza quando siamo in presenza di sottocampioni indipendenti, è anche possibile calcolare uno stimatore per C_{pm} basato su uno stimatore non congiunto della varianza. Lo stimatore corrispondente di C_{pm} è $\hat{\hat{C}}_{pm} = \hat{\hat{C}}_p(0,1)$ come definito nella (12). Per ottenere la distribuzione dello stimatore $\hat{\hat{C}}_{pm}$ consideriamo la variabile casuale ξ con distribuzione χ^2 non centrale con mn gradi di libertà e parametro di non centralità λ definita nella (22), e funzione di ripartizione F_ξ. La funzione di ripartizione di $\hat{\hat{C}}_{pm}$ può essere espressa nel seguente modo

$$F_u(x; m, n, \mu, \sigma) = 1 - F_\xi\left(\frac{d^2 mn}{9x^2\sigma^2}\right), \quad x > 0 \tag{27}$$

Come per il caso congiunto, la variabile casuale ξ con distribuzione χ^2 non centrale può essere approssimata da una variabile casuale $\chi^2_{f_u}$ con distribuzione χ^2 centrale con f_u gradi di libertà, ovvero

$$\xi \dot{\sim} g_u \chi^2_{f_u}$$

con

$$f_u = \frac{(mn + \lambda^2)^2}{mn + 2\lambda} \tag{28}$$

$$g_u = \frac{mn + 2\lambda}{mn + \lambda} \tag{29}$$

Basata su questa approssimazione, si ha

$$F_u(x; m, n, \mu, \sigma) \approx 1 - F_{\chi^2_{f_u}}\left(\frac{d^2 mn}{g_u 9x^2\sigma^2}\right), \quad x > 0 \tag{30}$$

La funzione di ripartizione descritta nella (27) equivale all'usuale funzione di ripartizione ottenuta, quando per stimare C_{pm} si utilizza un singolo campione di dimensione mn (*Kotz, Johnson 1993*).

La funzione di densità dello stimatore di C_{pm} è facilmente ottenibile derivando rispetto a x la (23) o la (27) a seconda dello stimatore utilizzato.

In questo elaborato consideriamo la situazione in cui il processo è monitorato e sotto tali condizioni si assume che il processo sia caratterizzato da una distribuzione normale con media e varianza costanti.

Capitolo 2
Test di Verifica d'Ipotesi

In questo capitolo si riportano i risultati ottenuti da *Vännman* e *Hubele* (2003,2004) riguardo ai di test di verifica d'ipotesi per studi di capacità e al calcolo della potenza del test, partendo dai risultati teorici riportati nel capitolo precedente. Sarà in particolare ristretta l'attenzione allo stimatore $C_{pm} = C_p(0,1)$.

Quando utilizziamo un indice di capacità, un processo è definito capace se l'indice supera un certo valore $k > 0$. Comunemente i valori utilizzati per k sono $k = \frac{4}{3}, 1.5, 1.6$. Consideriamo un test di verifica d'ipotesi che pone

$$H_0: C_p(u,v) \leq k \text{ contro } H_1: C_p(u,v) > k.$$

Al fine di determinare se il processo è capace oppure no, abbiamo bisogno di una regola decisionale basata su di uno stimatore. Utilizziamo la notazione $\hat{C}_p(u,v)$ per indicare lo stimatore di $C_p(u,v)$ senza distinguere per il momento i due stimatori (congiunto e non congiunto). L'ipotesi nulla sarà rifiutata se $\hat{C}_p(u,v) > c_\alpha$ dove la costante c_α è determinata in modo che il livello di significatività del test sia α. Quindi per dati valori di α, m ed $n_i, i = 1,2,\dots,m$, la regola decisionale risulterà tale che il processo sarà considerato capace se $\hat{C}_p(u,v) > c_\alpha$ e non capace se $\hat{C}_p(u,v) \leq c_\alpha$. Al fine di trovare il valore critico c_α dobbiamo calcolare

$$P\left(\hat{C}_p(u,v) > c_\alpha\right) \tag{31}$$

quando $C_p(u,v) = k$. Dal momento che la distribuzione di $\hat{C}_p(u,v)$ dipende da μ e σ, per un dato valore di $C_p(u,v)$ non c'è un'unica $P(\hat{C}_p(u,v) > c_\alpha)$. Per calcolare la probabilità (31) abbiamo bisogno di conoscere i valori di μ e σ.

Consideriamo la notazione

$$\delta = \frac{\mu - T}{d} \quad e \quad \gamma = \frac{\sigma}{d} \tag{32}$$

con $|\delta| \leq 1$. Quando $C_p(u,v) = k$ abbiamo la seguente relazione tra γ e δ :

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{1}{3k} & ,|\delta| \leq 1 \qquad , \; u = v = 0, \\ \sqrt{\dfrac{(1-u|\delta|)^2}{9k^2} - v\delta^2} & ,|\delta| \leq (u + 3k\sqrt{v})^{-1}, (u,v) \neq (0,0) \end{cases} \tag{33}$$

Quando rappresentiamo γ definito nella (33), come funzione di δ otteniamo una curva, detta curva di capacità. Valori dei parametri μ e σ , che danno valori (γ, δ) all'interno della

regione delimitata dalla curva di capacità $C_p(u,v) = k$ e l'asse δ, daranno luogo ad un valore di $C_p(u,v)$ più grande di k e quindi ad un processo capace. Questa regione è chiamata regione di capacità. Valori di μ e σ che danno invece valori (δ,γ) fuori da tale regione daranno luogo a un processo non capace. Al variare di (δ,γ) lungo la curva di capacità che corrisponde a $C_p(u,v) = k$, la distribuzione di $\hat{C}_p(u,v)$ varierà, così come varierà la (31) dato $C_p(u,v) = k$. Dal momento che l'ipotesi nulla $H_0: C_p(u,v) \leq k$ è composta, abbiamo bisogno di studiare la (31) per tutti i valori (μ,σ) per cui $C_p(u,v) \leq k$ al fine di ottenere il valore critico c_α. Questa ipotesi nulla può essere ridotta a $H_0: C_p(u,v) = k$. Tuttavia siamo ancora in presenza di un'ipotesi composta. Quindi è necessario calcolare la (31) dato $C_p(u,v) = k$, lungo la curva di capacità definita in (33) per trovare il valore di δ che massimizzi questa probabilità. Sarà poi utilizzato questo valore di δ per derivare il valore critico per i due stimatori.

2.1 Caso in cui si utilizza uno stimatore congiunto della varianza

Combinando i risultati ottenuti in (23), (32) e (33) per lo stimatore $\hat{C}_{pm} = \hat{C}_p(0,1)$, troviamo che dato $C_{pm} = k$, è possibile esprimere $P(\hat{C}_{pm} > x)$ come

$$P\left(\hat{C}_{pm} > x \mid C_{pm} = k\right) = F_\zeta\left(\frac{k^2mn}{x^2(1-9k^2\delta^2)}\right), x > 0 \tag{34}$$

dove ζ ha distribuzione χ^2 non centrale con $m(n-1)+1$ gradi di libertà e parametro di non centralità

$$\lambda = \frac{9k^2\delta^2mn}{1-9k^2\delta^2} \tag{35}$$

Utilizzando l'approssimazione di Patnaik per ottenere un espressione approssimata basata su una distribuzione χ^2 centrale per il risultato (34) otteniamo

$$\zeta \dot{\sim} g_p\chi^2_{f_p}$$

dove i gradi di libertà f_p e la costante g_p sono definiti nella (24) e (25) rispettivamente utilizzando per λ l'espressione descritta nella (35). Combinando ora i risultati ottenuti in (26), (32) e (33) troviamo che dato $C_{pm} = k$, è possibile esprimere $P(\hat{C}_{pm} > x)$ approssimativamente come

$$P\left(\hat{C}_{pm} > x \mid C_{pm} = k\right) \approx F_{\chi^2_{f_p}}\left(\frac{k^2mn}{g_px^2(1-9k^2\delta^2)}\right), \qquad x > 0 \tag{36}$$

Si noti che la probabilità espressa nella (36) è una funzione di δ, dal momento che f_p e g_p e l'argomento della funzione di distribuzione dipendono da δ. Questa probabilità è simmetrica

intorno a $\delta = 0$. Quindi è sufficiente esplorare questa probabilità solo per valori di $\delta \geq 0$ lungo la curva di capacità, come illustrato da *Vännman e Hubele* (2001, 2003), che nel caso di C_{pm} è un semicerchio. *Arizono et al.* (1997) ha mostrato che la (36), come funzione di δ, ha il suo massimo per $\delta = 0$. Dalla (35) notiamo che quando $\delta = 0$, il parametro di non centralità $\lambda = 0$, quindi il valore critico può essere determinato usando una distribuzione χ^2 centrale. Dalla (34) si ottiene

$$c_{\alpha,p} = k_0 \sqrt{\frac{mn}{\chi^2_{\alpha,m(n-1)+1}}} \tag{37}$$

dove $\chi^2_{\alpha,m(n-1)+1}$ è il quantile α di una distribuzione χ^2 con $m(n-1)+1$ gradi di libertà. Si noti che quando $\delta = 0$, l'approssimazione di Patnaik in (36) eguaglia l'espressione in (34) e generano lo stesso valore critico.

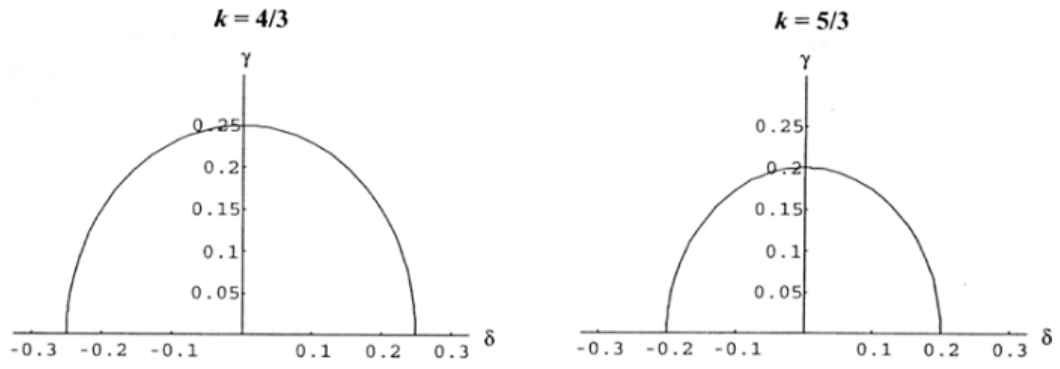

Figura 1. Il semicerchio ottenuto dall'equazione (33) per $u = 0$ e $v = 1$, per k = 4/3 e k = 5/3. La regione delimitata dal semicerchio e l'asse δ è la regione di capacità.

2.1.1 Potenza

La probabilità di un errore di I tipo, vale a dire la probabilità di dichiarare un processo capace quando non lo è, è controllata impostando il livello di significatività del test α. La probabilità di errore di II tipo, β, vale a dire la probabilità di dichiarare il processo non capace quando lo è, può essere indagata considerando veri valori di C_{pm} maggiori di k_0. Di rilevante importanza è anche la potenza del test, $1 - \beta$, cioè la probabilità di considerare il processo capace quando $C_{pm} = k_1 > k_0$. La notazione per la potenza nel caso congiunto è :

$$Pow_p(\delta; m, n, \alpha, k_0, k_1)$$

$$= P\left(\hat{C}_{pm} > c_{\alpha,p} \mid C_{pm} = k_1\right)$$

$$= F_{\zeta}\left(\frac{k_1^2 \chi^2_{\propto,m(n-1)+1}}{k_0^2(1 - 9k_1^2\delta^2)}\right) \tag{38}$$

$$\approx F_{\chi^2_{f_p}}\left(\frac{k_1^2 \chi^2_{\propto,m(n-1)+1}}{g_p k_0^2(1 - 9k_1^2\delta^2)}\right), \quad x > 0$$

Questa probabilità varia al variare di (μ,σ), ossia al variare di (δ,γ) lungo la curva di capacità definita da $C_{pm} = k_1$. Quindi per dati valori di $C_{pm} = k_1$, la potenza dipende da δ. Si noti inoltre che l'argomento della funzione di distribuzione e i gradi di libertà nella (38) dipendono da *m* ed *n* attraverso la relazione descritta nella (24) e (25).

Vännman e *Hubele* (2004) riportano anche un semplice esempio esplicativo, in cui $k_0 = 4/3$ e $k_1 = 1.9$ ed illustrato il comportamento della potenza quando *n* = 4 per le due differenti situazioni: (a) *m* = 10 e α = 0.10; e (b) quando m = 14 e α = 0.05. Questi valori di *m* sono i numeri minimi necessari per avere una potenza minima di 0.80 per tutti i valori di δ lungo il semicerchio definito da $C_{pm} = 1.9$. I corrispondenti valori critici ottenuti dalla (37) per queste due situazioni sono $c_{0.10,p} = 1.8215$ e $c_{0.05,p} = 1.8540$ rispettivamente. Nelle figure 2 (a) e (b) sono tracciati i corrispondenti grafici di potenza in funzione di δ, dove $C_{pm} = k_1 = 1.9$. I grafici mostrano che la potenza diminuisce quando δ si allontana da 0 e poi aumenta. In particolare la potenza minima si registra quando δ è vicino a 0.17, cioè quando μ è distante dal valore target ed allo stesso tempo σ è molto piccolo.

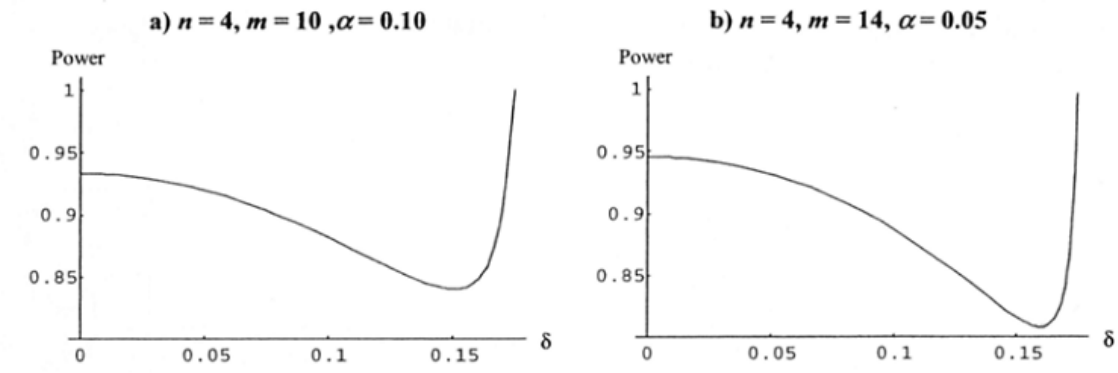

Figura 2. Potenza per $C_{pm} = k = 1.9$ come funzione di δ = (μ-T)/d quando utilizziamo lo stimatore congiunto e $k_0 = 4/3$.

2.2 Caso in cui si utilizza uno stimatore non congiunto della varianza

In maniera analoga, usando lo stimatore $\hat{\hat{C}}_{pm} = \hat{\hat{C}}_p(0,1)$ in (12), insieme ai risultati in (27),(32) e (33) troviamo che

$$P\left(\hat{\hat{C}}_{pm} > x \mid C_{pm} = k\right) = F_\xi\left(\frac{k^2 mn}{x^2(1-9k^2\delta^2)}\right), x > 0 \tag{39}$$

dove ξ è distribuita secondo una distribuzione χ^2 non centrale con mn gradi di libertà e parametro di non centralità λ come definito in (35) . La corrispondente approssimazione di Patnaik è ottenuta tramite la relazione

$$\xi \dot{\sim} g_u \chi^2_{f_u}$$

con f_u e g_u definiti nella (28) e (29) rispettivamente. Quindi, si ottiene

$$P\left(\hat{\hat{C}}_{pm} > x \mid C_{pm} = k\right) \approx F_{\chi^2_{f_u}}\left(\frac{k^2 mn}{g_u x^2(1-9k^2\delta^2)}\right), \qquad x > 0 \tag{40}$$

Il valore critico associato allo stimatore $\hat{\hat{C}}_{pm}$, e all'ipotesi nulla $H_0: C_{pm} = k_0$ può essere determinato usando una distribuzione χ^2 centrale, come nel caso congiunto. Dall'equazione (39) si ottiene

$$c_{\alpha,u} = k_0\sqrt{\frac{mn}{\chi^2_{\alpha,mn}}} \tag{41}$$

dove $\chi^2_{\alpha,mn}$ è il quantile α di una distribuzione χ^2 con mn gradi di libertà.

2.2.1 Potenza

Nel caso congiunto, quando $C_{pm} = k_1 > k_0$, la notazione per la potenza diventa

$$\begin{aligned} & Pow_u(\delta; m, n, \propto, k_0, k_1) \\ &= P\left(\hat{\hat{C}}_{pm} > c_{\propto,u} \mid C_{pm} = k_1\right) \\ &= F_\xi\left(\frac{k_1^2 \chi^2_{\propto,mn}}{k_0^2(1-9k_1^2\delta^2)}\right) \\ &\approx F_{\chi^2_{f_u}}\left(\frac{k_1^2 \chi^2_{\propto,mn}}{g_u k_0^2(1-9k_1^2\delta^2)}\right), \quad x > 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Anche questa probabilità varia al muoversi di (δ,γ) lungo la curva definita da $C_{pm} = k_1$, e l'argomento della funzione di distribuzione e i gradi di libertà dipendo da *m* ed *n* tramite la relazione descritta nella (28) e (29).

Quindi l'effetto di m ed n sul calcolo della potenza nella (42) è differente dall'effetto che hanno sul calcolo della potenza nel caso congiunto nell'equazione (38).

Anche in questo caso, come nel caso congiunto, *Vännman* e *Hubele* (2004) hanno proposto un esempio. Siano ancora $k_0 = 4/3$ e $k_1 = 1.9$. Viene illustrato ancora il comportamento della potenza quando $n = 4$ per due situazioni differenti : (a) $m = 5$ e $\alpha = 0.10$; (b) $m = 7$ e $\alpha = 0.05$. Questi valori di m sono ancora i numeri minimi necessari per avere una potenza minima di 0.80 per tutti i valori di δ lungo il semicerchio definito da $C_{pm} = 1.9$. I corrispondenti valori critici ottenuti dalla (41) per queste due situazioni sono $c_{0.10,u} = 1.6904$ e $c_{0.05,u} = 1.7148$ rispettivamente. Nelle figure 3 (a) e (b) sono tracciati i corrispondenti grafici di potenza in funzione di δ, dove $C_{pm} = k_1 = 1.9$.

Diversamente dal caso congiunto entrambi i grafici mostrano che la potenza aumenta all'aumentare di δ. Inoltre la potenza minima si registra per δ = 0, cioè quando μ = T.

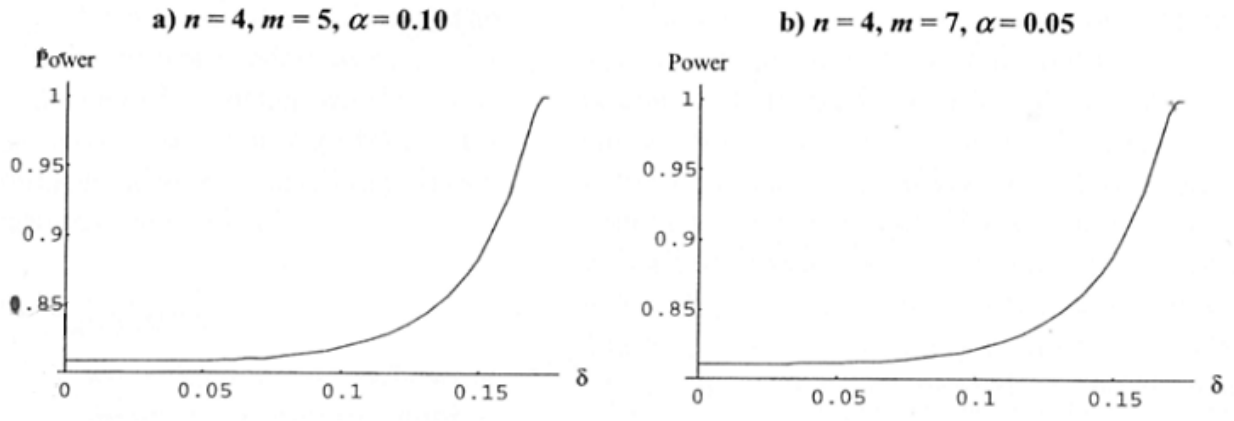

Figura 3. Potenza per $C_{pm} = k = 1.9$ come funzione di δ = (μ-T)/d quando utilizziamo lo stimatore non congiunto e $k_0 = 4/3$.

In definitiva la forma delle curve è differente a seconda dello stimatore utilizzato. Abbiamo visto che nel caso di stimatore non congiunto la potenza registra il suo minimo per δ = 0, a differenza che nel caso congiunto in cui il minimo si verifica per valori lontani da 0,ossia quando la media μ è lontana dal target e σ è molto piccolo, in particolare nell'intervallo $[0,k_1/3]$, in relazione ai valori m,n,α,k_0 e k_1.

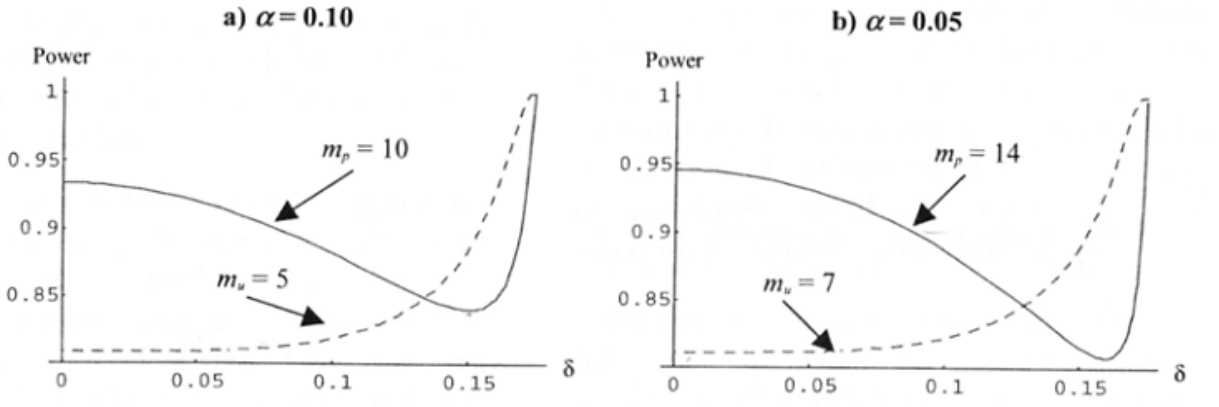

Figura 4. Potenza per $C_{pm} = k = 1.9$ come funzione di δ = (μ-T)/d per i casi congiunto e non congiunto e $k_0 = 4/3$, $n = 4$. a) La linea continua corrisponde al caso congiunto con $m = 10$. La linea tratteggiata corrisponde al caso non congiunto con $m = 5$. b) La linea continua corrisponde al caso congiunto con $m = 14$. La linea tratteggiata corrisponde al caso non congiunto con $m = 7$.

Vännman e *Hubele* (2004) hanno anche mostrato che quando n decresce ed N è fissato il margine d'errore dello stimatore $\hat{C}_{pm}$aumenta quando δ = 0. Questo si può evincere dalla Figura 5 in cui è riportata la funzione di densità di $\hat{C}_{pm}$, ottenuta a partire dal Teorema B, dato $C_{pm} = 4/3$ e δ = 0, per alcune particolari situazioni riportate in Tabella A. Si noti che il Caso (a) corrisponde al caso in cui si utilizzi lo stimatore $\hat{\hat{C}}_p(0,1)$ descritto nella (12).

Caso	*m*	*N*	*m(n-1) +1*	$c_{0.05}$
(a)	1	80	80	1,5346
(b)	8	10	73	1.6180
(c)	10	8	71	1,6443
(d)	16	5	65	1,7313
(e)	20	4	61	1.7971

Tabella 2.1. Differenti combinazioni di numero di sottocampioni m e dimensione dei sottocampioni n, con corrispondenti gradi di libertà $m(n - 1) + 1$ e valore critico $c_{0.05}$

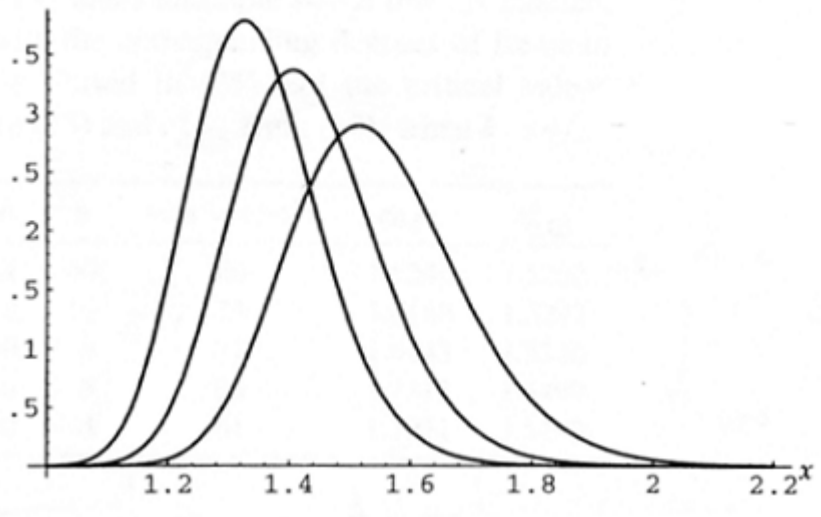

Figura 5. Funzione di densità di $\hat{C}_{pm}$, dato $C_{pm} = 4/3$ e $\delta = 0$, per i casi (a), (c), (e), partendo da sinistra.

È importante notare che se l'indice di capacità è stimato usando sottocampioni con un totale di N osservazioni, ma il livello critico è derivato da un singolo campione di grandezza N, un processo non capace può essere considerato capace.

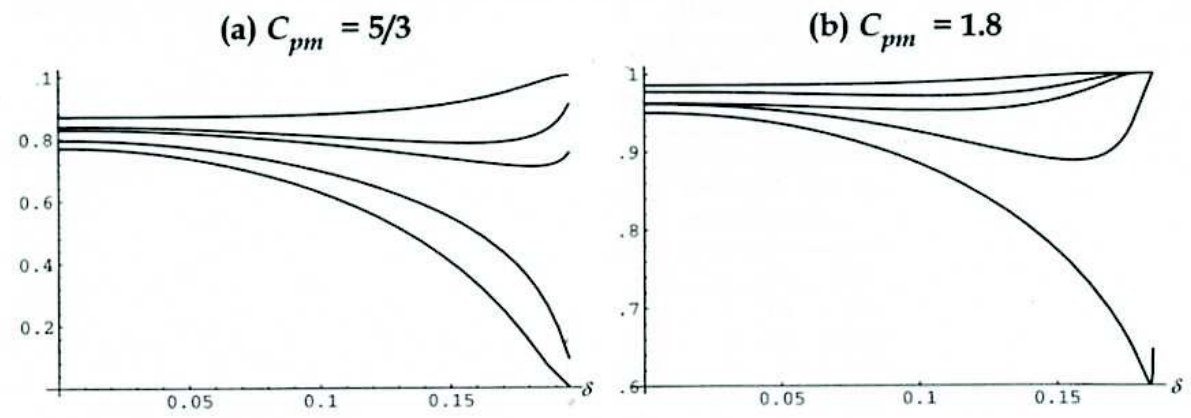

Figura 6. (a) Probabilità che il processo sia considerato capace, cioè $P(\hat{C}_{pm}>c_{0.05} \mid C_{pm}=5/3)$. Le curve corrispondono ai casi (a)-(e) nella Tabella I, conteggiati a partire dall'alto. (b) La probabilità che il processo sia considerato capace, cioè $P(\hat{C}_{pm}>c_{0.05} \mid C_{pm}=1.8)$. Le curve corrispondono ai casi (a)-(e) nella Tabella I conteggiati a partire dall'alto

Possiamo vedere dalla Figura 6 (a) che quando *n* è piccolo (caso (d) ed (e)) la probabilità che il processo sia considerato capace decresce quando δ aumenta ed è molto piccola quando δ è vicina a 0.2. Questo corrisponde alla situazione in cui la media del processo è distante dal valore target e allo stesso tempo σ è molto piccolo. In questa situazione sarà molto difficile mostrare che un processo è capace quando lo è veramente. È per questo sconsigliato

utilizzare sottocampioni di piccole dimensioni. Tuttavia si può osservare che utilizzando un singolo campione di misura N, si registra una potenza più grande rispetto all'utilizzo di sottocampioni con grandezza congiunta pari ad N.

Per aiutare a spiegare il comportamento della potenza in funzione di delta, si osservi la Figura 7 in cui è rappresentata la distribuzione di $\hat{C}_{pm} = 5/4$ per i casi (c) ed (e) quando δ = 0, 0.10, 0.15 e 0.19.

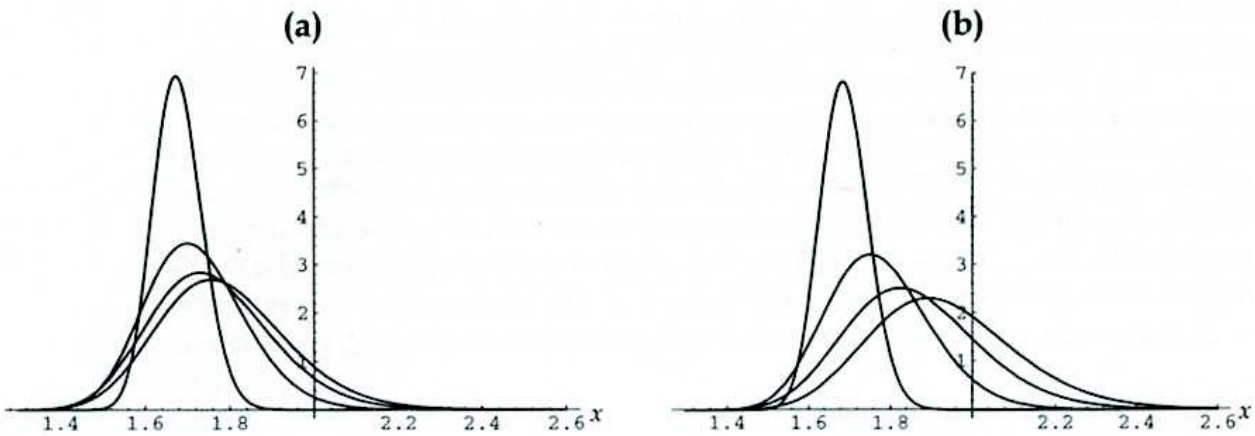

Figura 7. La funzione di densità di probabilità di $\hat{C}_{pm}$ dato che C_{pm} =5/3, quando δ=0,0.10,0.15 e 0.19 contati da destra. Nella figura (a) è illustrato il caso (c) (m=10, n=8, c0.05 =1.6443) e nella figura (b) è illustrato il caso (e) (m=20, n=4, c0.05 =1.7971)

Possiamo vedere che quando *n* è piccolo (caso (e)) la posizione della distribuzione dipende molto da δ e quando δ aumenta, l'errore dello stimatore diminuisce. Lo spostamento a sinistra quando δ aumenta spiega la diminuzione della potenza vista nella Figura 6(a).

Si considerino ora le seguenti notazioni per un k_1 specificato. Si assuma che m_u rappresenti il minimo numero di sottocampioni necessario per ottenere una potenza di almeno 0.80 nel caso di stimatore non congiunto e m_p rappresenti la stessa quantità nel caso di uno stimatore congiunto. *Vännman* e *Hubele* (2004) hanno fornito alcune tabelle nelle quali vengono presentati valori di m_u e m_p per $k_0 = \frac{4}{3}, 1.5, 1.6$. Per ciascuno di questi valori dell'ipotesi nulla, si considerano diverse numerosità dei sottocampioni *n* = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e diversi livelli di significatività α = 0.10, 0.05 e 0.01. A seconda dei valori di k_0 si considerano quattro valori k_1 maggiori di k_0. La prima cosa che si evince dalle tabelle è che $m_u \leq m_p$. È ancora possibile osservare che con il decrescere di α aumentano entrambe le quantità m_u e m_p. Mentre per qualunque k_0 e α fissati si può osservare che il numero di sottocampioni richiesto diminuisce con l'aumentare di *n* per ciascuno dei due stimatori, e diminuisce anche la differenza tra le due quantità m_u e m_p.

Quindi per ottenere uno specifico livello di potenza uno stimatore non congiunto richiede un minor numero di sottocampioni rispetto ad uno stimatore congiunto. Questo rispecchia una maggiore efficienza dello stimatore non congiunto rispetto allo stimatore congiunto specialmente quando *n* è piccolo. Per una migliore comprensione le tabelle citate sono riportate di seguito.

TABELLA I. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 4/3 e α=0.10

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 1.7							
m_u	11	9	7	6	6	5	5
m_p	35	17	11	9	7	6	5
k_1 = 1.8							
m_u	7	6	5	4	4	3	3
m_p	16	9	7	5	5	4	3
k_1 = 1.9							
m_u	5	4	4	3	3	3	2
m_p	10	6	5	4	3	3	3
k_1 = 2.0							
m_u	4	4	3	3	2	2	2
m_p	7	5	4	3	3	2	2

TABELLA II. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 4/3 e α=0.05.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 1.7							
m_u	14	12	10	8	7	7	6
m_p	55	26	17	12	10	8	7
k_1 = 1.8							
m_u	10	8	7	6	5	5	4
m_p	24	14	10	8	6	5	5
k_1 = 1.9							
m_u	7	6	5	4	4	4	3
m_p	14	9	7	5	4	4	4
k_1 = 2.0							
m_u	6	5	4	4	3	3	3
m_p	10	7	5	4	3	3	3

TABELLA III. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 4/3 e α=0.01.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 1.7							
m_u	24	19	16	14	12	11	10
m_p	>100	47	30	22	17	14	12
k_1 = 1.8							
m_u	16	13	11	9	8	7	7
m_p	44	25	17	13	11	9	8
k_1 = 1.9							
m_u	12	10	8	7	6	6	5
m_p	26	16	11	9	8	7	6
k_1 = 2.0							
m_u	9	8	6	6	5	4	4
m_p	17	11	8	7	6	5	4

TABELLA IV. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 1.5 e α=0.10.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 1.9							
m_u	11	9	7	6	6	5	5
m_p	40	19	12	9	8	6	6
k_1 = 2.0							
m_u	8	6	5	5	4	3	3
m_p	18	10	7	6	5	4	4
k_1 = 2.1							
m_u	6	5	4	4	3	3	3
m_p	11	7	5	4	4	3	3
k_1 = 2.2							
m_u	5	4	3	3	3	2	2
m_p	8	5	4	3	3	3	2

TABELLA V. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 1.5 e α=0.05.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 1.9							
m_u	15	12	10	9	8	7	6
m_p	51	27	18	13	11	9	8
k_1 = 2.0							
m_u	11	9	7	6	6	5	5
m_p	28	15	11	8	7	6	5
k_1 = 2.1							
m_u	8	7	6	5	4	4	4
m_p	17	10	7	6	5	4	4
k_1 = 2.2							
m_u	6	5	4	4	3	3	3
m_p	11	7	6	5	4	3	3

TABELLA VI. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 1.5 e α=0.01.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 1.9							
m_u	25	20	17	14	13	11	10
m_p	>100	52	32	23	18	15	12
k_1 = 2.0							
m_u	17	14	12	10	9	8	7
m_p	52	28	19	14	12	10	9
k_1 = 2.1							
m_u	13	10	9	8	7	6	5
m_p	31	18	13	10	8	7	6
k_1 = 2.2							
m_u	10	8	7	6	5	5	4
m_p	21	13	10	8	6	6	5

TABELLA VII. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 1.6 e α=0.10.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 2.0							
m_u	12	10	8	7	6	6	5
m_p	53	23	14	11	8	7	6
k_1 = 2.1							
m_u	9	7	6	5	5	4	4
m_p	22	12	8	7	6	5	4
k_1 = 2.2							
m_u	6	5	4	4	3	3	3
m_p	13	8	6	5	4	3	3
k_1 = 2.3							
m_u	5	4	4	3	3	3	2
m_p	9	6	4	4	3	3	3

TABELLA VIII. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 1.6 e α=0.05.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 2.0							
m_u	17	14	11	10	9	8	7
m_p	83	35	21	16	12	10	9
k_1 = 2.1							
m_u	12	9	8	7	6	5	5
m_p	34	18	12	9	8	7	6
k_1 = 2.2							
m_u	9	7	6	5	5	4	4
m_p	20	12	8	7	6	5	4
k_1 = 2.3							
m_u	7	6	5	4	4	3	3
m_p	13	8	6	5	4	4	3

TABELLA IX. Minimo numero di sottocampioni, m, per potenza ≥ 0.80, k_0 = 1.6 e α=0.01.

	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
k_1 = 2.0							
m_u	28	22	19	16	14	13	11
m_p	>100	64	39	27	21	17	15
k_1 = 2.1							
m_u	19	15	13	11	10	9	8
m_p	64	33	22	17	13	11	10
k_1 = 2.2							
m_u	14	12	10	8	7	7	5
m_p	36	21	15	11	9	8	7
k_1 = 2.3							
m_u	11	9	8	7	5	5	4
m_p	24	15	11	9	7	6	5

In conclusione quando testiamo l'ipotesi nulla $H_0: C_{pm} \leq k$ si evidenziano tre questioni.

1. La distribuzione del test statistico dipende dal valore *k*, dalla media del processo μ, dalla varianza σ^2, dal numero e dalla dimensione dei sottocampioni. Per C_{pm} e k fissati, la funzione di densità di probabilità del test statistico diventa più alta con l'aumento della distanza della media del processo dal valore target, la quale porta la varianza a decrescere. Per di più la distribuzione diventa più dispersa quando la misura dei sottocampioni diminuisce, anche se il numero delle osservazioni campionate rimane costante.
2. Quando il numero e la dimensione dei sottocampioni sono fissati e conosciuti, l'incertezza legata alla media e alla varianza del processo richiede che il valore critico sia scelto sulla basa del valore α. Per C_{pm} il limite può essere trovato selezionando il valore critico associato alla distribuzione quando δ = 0. Il valore critico non è unicamente legato a δ e può essere differente in base alla dimensione e numero dei sottocampioni.
3. Per dati valori di C_{pm} la potenza del test dipende, non solo dalla dimensione e numero dei sottocampioni, ma anche dalla deviazione della media dal valore target. È quindi importante, quando si studia la potenza per dati valori di C_{pm}, analizzare il suo comportamento lungo l'intera curva di capacità, cioè per tutti i valori di δ.

È stato mostrato che esistono sostanziali cambiamenti nella distribuzione degli indici stimati in funzione del numero e della dimensione dei sottocampioni.

Abbiamo fornito la distribuzione di due differenti stimatori di C_{pm} basati sulla stima congiunta e non congiunta della varianza. Alla fine la potenza dei due stimatori è usata per generare il numero minimo di sottocampioni necessario per varie dimensioni dei sottocampioni. Il numero necessario di sottocampioni è sempre minore quando si utilizza lo stimatore con varianza non congiunta. Conseguentemente è raccomandabile, quando possibile, l'utilizzo di uno stimatore non congiunto per stabilire la capacità di un processo.
In conclusione l'investigazione stabilisce che sottocampioni più grandi assicurano più potenza nei test di verifica d'ipotesi riguardanti gli indici di capacità.

Capitolo 3

Studio di Capacità in processi Short-Runs

Nei precedenti capitoli abbiamo visto come svolgere uno studio sulla capacità di un processo tramite indici di capacità. Sono state considerate le due situazioni in cui lo stimatore dell'indice di capacità è basato sui due differenti stimatori per la varianza e si è concluso che lo stimatore basato sulla varianza non congiunta risulta più efficiente dello stimatore basato sulla varianza congiunta in modo particolare al diminuire della numerosità dei sottocampioni.

Spesso il termine "short-run" viene utilizzato per indicare un processo caratterizzato da un basso volume di produzione. Tuttavia questo termine indica semplicemente che è la dimensione del lotto ad essere piccola. A causa delle proprietà statistiche degli indici di capacità, una comune raccomandazione è che almeno 50 osservazioni siano disponibili per calcolare la stima di un dato indice (*Deleryd* 1996). Nei moderni processi industriali stanno diventando sempre più frequenti le situazioni in cui in un processo produttivo non si riesce a raccogliere un numero di osservazioni sufficiente per valutare la distribuzione della caratteristica d'interesse e per la stima accurata dei parametri del processo. Usare le tecniche convenzionali per lo studio di capacità in questi casi, potrebbe condurre a conclusioni ingegneristiche errate.

Lo studio di capacità in tali contesti applicativi non ha ricevuto l'attenzione dovuta. Solo pochi contributi sono stati dati per cercare di colmare questa lacuna. Uno di questi è quello fornito da *Balamurali* (2003), il quale ha modificato gli usuali indici di capacità C_p, C_{pm} e C_{pk} per ottenere appropriati indici per processi short-runs. Gli indici ottenuti sono stati così definiti :

$$C_{sp} = \frac{USL - LSL}{2ts},$$

$$C_{spk} = \frac{\min\left[(USL - \bar{x})(\bar{x} - LSL)\right]}{ts},$$

$$C_{spm} = \frac{USL - LSL}{2ts'}$$

dove s è la deviazione standard, 2s'= $\sum(x_i - T)^2/(n-1)$, t = costante che può essere scelta da una tabella t di Student per una data dimensione campionaria,assumendo un livello di confidenza di 99.73%. *Balamurali* (2003) ha poi studiato il comportamento di tre diversi intervalli di confidenza bootstrap (intervalli di confidenza bootstrap standard (SB), basati sui percentili (PB), e basati sui percentili distrorti-corretti(BCPB)) proposti da *Efron et al.*

(1986), per ciascuno di tali indici. Tramite uno studio di simulazione ha determinato la percentuale di volte in cui ciascun intervallo di confidenza bootstrap conteneva il vero valore dell'indice. Tale studio è stato svolto per due diverse distribuzioni (una normale e una non normale) al fine di mostrare il comportamento dei tre intervalli di confidenza. Lo studio ha portato alla conclusione che nel caso di distribuzione normale del processo, il metodo SB è risultato consistentemente più vicino al valore 0.95 per tutti gli indici utilizzati. Ancora quando si utilizza una distribuzione non normale (in particolare si è utilizzato un Chi-quadrato) il confronto mostra che i limiti basati sul metodo SB si comportano ancora significativamente meglio degli altri limiti, avendo una proporzione di copertura più alta per tutti gli indici.

Un altro approccio interessante, è la trasformazione dei dati proposta da *Deleryd* e *Vännman* (1998) la quale, una volta applicata consente di svolgere lo studio della capacità nella maniera classica.

Si consideri un processo in cui siano prodotti elementi simili ma con c differenti caratteristiche richieste. Il problema viene affrontato utilizzando la seguente tecnica di trasformazione:

$$Y_{ij} = \frac{X_{ij} - LSL_i}{USL_i - LSL_i} \tag{43}$$

dove X_{ij}, con $j = 1,2,\ldots,n_i$ e $i = 1,\ldots,c$ sono le osservazioni originali, USL_i e LSL_i rappresentano il limite superiore e inferiore rispettivamente per ciascuna caratteristica i. Tramite tale trasformazione i limiti di specifica inferiore e superiore per le osservazioni trasformate diventano 0 e 1 rispettivamente. È quindi possibile trasformare le osservazioni relative a differenti caratteristiche e una volta ottenute le osservazioni trasformate, utilizzarle per studiare la capacità del processo nella maniera tradizionale.

Per stimare un indice di capacità si considerino quindi le Y_{ij} definite nella (43). Come stima dei parametri del processo μ e σ^2si utilizza la media campionaria delle osservazioni e lo stimatore non congiunto della varianza come definito nella (11). Utilizzando la trasformazione proposta nella (43) è quindi possibile ottenere un campione grande abbastanza per poter valutare la capacità del processo con un basso rischio di prendere decisioni sbagliate. Tuttavia esiste un rischio ovvio che si corre quando viene utilizzata una trasformazione di questo tipo. Cosa succede ad esempio se il processo non è capace per alcune caratteristiche e invece lo è per altre? Non c'è il rischio che essendo il processo particolarmente capace di produrre alcune caratteristiche porti a dichiarare il processo capace, evitando di indagare su eventuali non capacità relative alle altre caratteristiche?

Sostanzialmente le cose che potrebbero diminuire la capacità del processo sono due: l'allontanarsi della media del processo dal valore target T oppure l'aumento della variabilità del processo. In particolare può verificarsi che il processo sia capace di produrre tutti i prodotti tranne uno. Questo caso è l'ipotesi peggiore che possa verificarsi e rappresenta tuttavia una situazione abbastanza inverosimile in pratica. Quello che *Deleryd* e *Vännman* (1998) hanno fatto è stato proprio utilizzare in una tale situazione complicata la trasformazione proposta al fine di dimostrarne la sensibilità. Infatti riuscendo a mostrare che la trasformazione proposta nella (43) riesce ad individuare la non capacità del processo in tale circostanza, la trasformazione potrà essere utilizzata anche in quelle situazioni in cui il processo non è capace per due o più prodotti. Hanno simulato le due diverse situazioni, quella in cui il processo è capace di produrre tutti i prodotti tranne uno e quella opposta in cui il processo è capace di produrre uno solo dei prodotti in produzione e per ciascuna delle due situazioni hanno considerato il caso in cui la non capacità del processo fosse dovuta allo scostamento della media dal valore target e quella in cui fosse causata dall'aumento della variabilità del processo. A titolo esemplificativo sono riportate le Tabelle 3.1 e 3.2. Esse mostrano una situazione in cui un processo produce cinque differenti prodotti e non è capace di produrne uno.

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
Prodotto	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i
1	T_1	$0.2d_1$	$T_1+0.1d_1$	$0.2d_1$	$T_1+0.2d_1$	$0.2d_1$	$T_1+0.3d_1$	$0.2d_1$
i=2,3,4,5	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$
	Caso 5		Caso 6		Caso 7		Caso 8	
Prodotto	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i
1	$T_1+0.4d_1$	$0.2d_1$	$T_1+0.5d_1$	$0.2d_1$	$T_1+0.6d_1$	$0.2d_1$	$T_1+0.7d_1$	$0.2d_1$
i=2,3,4,5	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$

Tabella 3.1 La tabella mostra, in una situazione in cui si producono 5 differenti prodotti, che la media del prodotto 1 si allontana dal valore target.

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
Prodotto	μi	σi	μi	σi	μi	σi	μi	σi
1	T_1	$0.2d_1$	T_1	$0.222d_1$	T_1	$0.25d_1$	T_1	$0.286d_1$
i=2,3,4,5	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$
	Caso 5		Caso 6		Caso 7		Caso 8	
Prodotto	μi	σi	μi	σi	μi	σi	μi	σi
1	T_1	$0.333d_1$	T_1	$0.4d_1$	T_1	$0.5d_1$	T_1	$0.667d_1$
i=2,3,4,5	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$	T_i	$0.2d_i$

Tabella 3.2 La tabella mostra, in una situazione in cui si producono 5 differenti prodotti, il progressivo aumento della variabilità per il prodotto 1.

Per tale studio sono stati utilizzati gli indici $C_p(1,0) = C_{pk}, C_p(0,1) = C_{pm}, C_p(1,1) = C_{pmk}$ e $C_p(0,4)$ descritti nella (4). Utilizzando i risultati riportati nel Capitolo 2, *Deleryd* e *Vännman* hanno condotto uno studio di simulazione tramite il quale hanno trovato che con la trasformazione proposta la probabilità di dichiarare il processo capace quando lo è, è di circa il 70% per tutti gli indici considerati. Hanno ancora constatato che nella situazione in cui il processo sia capace di produrre un solo prodotto e nel caso in cui la non capacità del processo è dovuta allo spostamento della media dal valore target, la trasformazione è molto sensibile anche per lievi spostamenti, mentre risulta meno sensibile nel rilevare la non capacità causata dall'aumento della variabilità. Tuttavia nella situazione più realistica, in cui il processo è capace di produrre un solo prodotto, hanno potuto osservare che la tecnica risulta essere molto accurata.

Confrontando i risultati ottenuti tramite simulazione con quelli che si otterrebbero se non venisse applicata la trasformazione, hanno concluso che quando la numerosità campionaria è piccola condurre uno studio di capacità nella maniera tradizionale per ciascun prodotto non è un metodo adeguato perché è molto difficile rilevare la capacità del processo.

Deleryd e *Vännman* (1998) nel loro studio hanno fornito un ulteriore strumento, che procura informazioni aggiuntive riguardo alla capacità, quando si utilizza la tecnica di trasformazione da loro proposta. Una volta eseguita l'analisi della capacità il processo può risultare capace oppure no. Se il processo è risultato capace, gli operatori potrebbero chiedersi se tale capacità è dovuta al fatto che il processo è molto capace di produrre alcuni prodotti e meno altri, oppure se il processo è risultato non capace ci si potrebbe chiedere come modificare il processo al fine di migliorarlo. Lo strumento fornito dagli autori in soccorso agli operatori che si trovano davanti a tali situazioni, è un grafico ottenuto rappresentando la deviazione standard s_i calcolata con le osservazioni trasformate per ciascun prodotto, verso la media $\bar{y}_i$ anch'essa calcolata con le osservazioni trasformate per

ciascun prodotto. Il grafico risultante è chiamato $(\bar{y}, s)$-plot. Anche in questo caso per mostrare l'utilità di questo strumento gli autori hanno svolto un piccola simulazione concludendo che effettivamente tramite l'utilizzo del $(\bar{y}, s)$-plot è possibile rilevare se alcuni prodotti sembrano avere una variabilità maggiore o se essi si allontano dal valore target, rispetto agli altri prodotti. Osservando ad esempio la Figura 8, che presenta un esempio di $(\bar{y}, s)$-plot riferito alla Tabella 3.1, si può osservare come nel Caso 5 e nel Caso 7 si noti lo spostamento della nuvola di punti relativi al prodotto 1, ad indicare che il processo non è in target per quanto riguarda tale prodotto. Nel Caso 1 si nota invece una nuvola di punti piuttosto concentrata e nel Caso 3 si comincia a percepire un lieve scostamento. Dalla Figura 9, rappresentante un $(\bar{y}_i, s_i)$-plot per i casi 1,3,5, e 7 descritti nella Tabella 3.2,si può invece notare come il grafico evidenzi l'aumento progressivo della variabilità relativamente al prodotto 1.

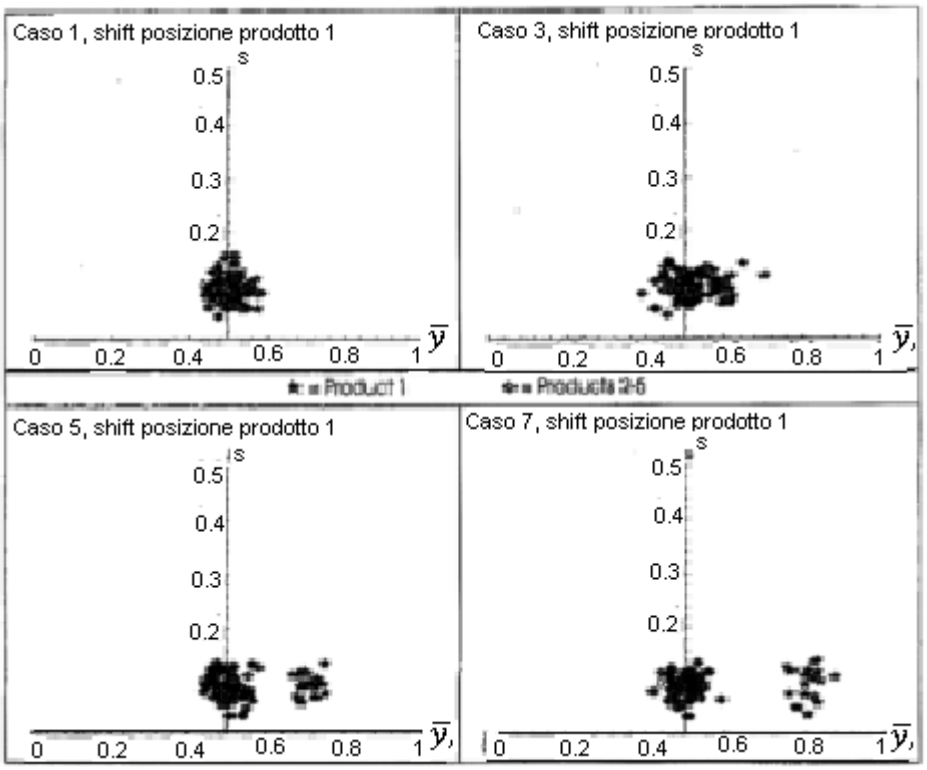

Figura 8. La figura presenta $(\bar{y}_i, s_i)$-plot per i casi 1,3,5, e 7 descritti nella Tabella 3.1. Il grafico è basato su 20 simulazioni, ciascuna da 50 osservazioni

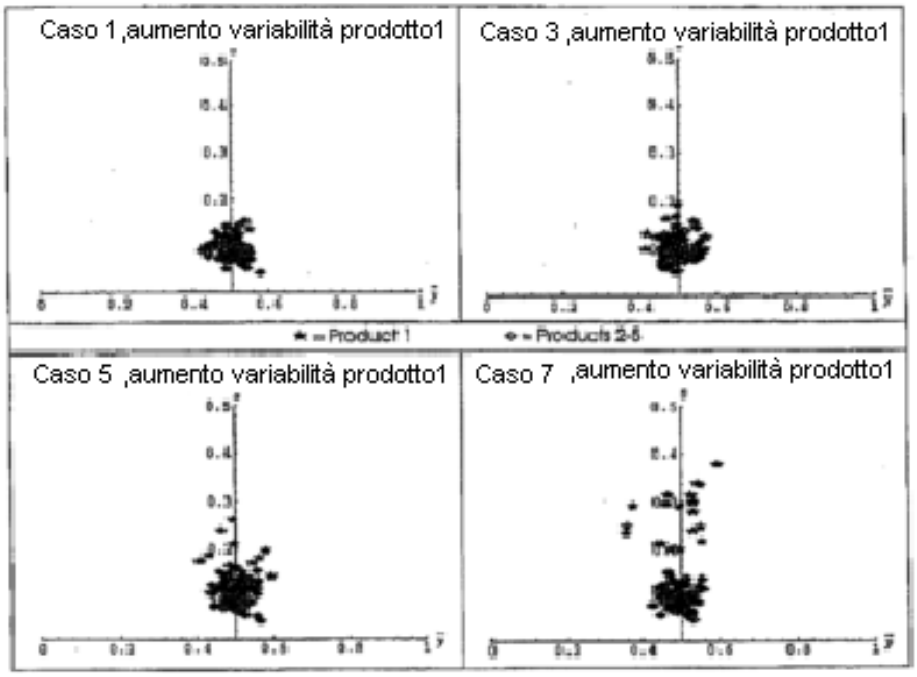

Figura 9. La figura presenta $(\bar{y}_i, s_i)$-plot per i casi 1,3,5, e 7 descritti nella Tabella 3.2. Il grafico è basato su 20 simulazioni, ciascuna da 50 osservazioni

Conclusioni

Gli indici di capacità sono stati progettati per sintetizzare il comportamento del processo con rispetto ai requisiti ingegneristici.

Nella pratica comune la performance del processo è controllata con raccolte periodiche di sottocampioni di dati. In questa tesi sono stati presentati i risultati ottenuti da *Vännman, Hubele* (2003,2004) riguardo al comportamento statistico di alcuni stimatori di indici di capacità definiti nella (4) quando sono basati su numerosi sottocampioni di dati.

Abbiamo fornito la distribuzione di due differenti stimatori di C_{pm} basati sulla stima congiunta e non congiunta della varianza. È stato mostrato che esistono sostanziali cambiamenti nella distribuzione degli indici stimati in funzione del numero e della dimensione dei sottocampioni. In particolare abbiamo notato che quando n decresce ed N è fissato il margine d'errore dello stimatore $\hat{C}_{pm}$ aumenta quando $\delta = 0$.

Alla fine la potenza dei due stimatori è usata per generare il numero minimo di sottocampioni necessario per varie dimensioni dei sottocampioni. Il numero necessario di sottocampioni è sempre minore quando si utilizza lo stimatore con varianza non congiunta. Conseguentemente è raccomandabile, quando possibile, l'utilizzo di uno stimatore non congiunto per stabilire la capacità di un processo.

In conclusione si è decretato che sottocampioni più grandi assicurano più potenza nei test di verifica d'ipotesi riguardanti gli indici di capacità.

Tuttavia nelle industrie moderne stanno diventando sempre più frequenti le situazioni in cui, a causa del sempre più rapido cambiamento della domanda dei consumatori e allo sviluppo di nuove tecniche di produzione, non si è in grado di raccogliere un numero di osservazioni sufficiente per poter valutare la distribuzione della caratteristica di interesse e per poter calcolare i parametri del processo. Lo studio della capacità in questi contesti non può quindi avvenire nella maniera tradizionale in quanto porterebbe a conclusioni errate. In letteratura lo studio della capacità nei processi short-runs non ha ricevuto l'attenzione dovuta, e in questa tesi sono state riportate alcune proposte utili per la conduzione di studi di capacità in tali processi. Sono stati presentati gli indici proposti da *Balamurali* (2003) ottenuti modificando appropriatamente gli usuali indici C_p, C_{pk} e C_{pm}.

Abbiamo poi focalizzato l'attenzione sulla trasformazione dei dati proposta da *Deleryd* e *Vännman* (1998) tramite la quale è possibile condurre uno studio di capacità in processi short-runs nella tradizionale maniera. Gli autori hanno mostrato tramite una simulazione che la trasformazione proposta risulta particolarmente utile nelle situazioni reali. È stato anche

descritto un grafico (*Deleryd* e *Vännman*, 1998), che fornisce agli operatori che vogliono condurre uno studio di capacità in processi short-runs, informazioni aggiuntive rispetto a quelle ottenute utilizzando il solo calcolo degli indici di capacità. La trasformazione da loro proposta, insieme all'utilizzo del grafico, rappresenta un importante risultato, riguardo alla conduzione di studi di capacità, in quei processi caratterizzati da volume ridotto di produzione, produzioni temporanee o rapide innovazioni.

Bibliografia

Norma Faris Hubele and Kerstin Vännman, *The Effect of Pooled and Un-Pooled Estimators on C_{pm} When Using Subsample,* JOURNAL OF QYALITY TECHNOLOGY. Vol. 36, No.2, April 2004

Norma Faris Hubele and Kerstin Vännman, *Distributional Properties of Estimate Capability Indices Based on Subsamples,* QUALITY AND RELIABILITY ENGINEERING INTERNETIONAL 2003

Norma Faris Hubele and Kerstin Vännman, *The Distribution of C_{pm} When Using a Pooled Variance Estimator with Some Results.* AMERICAN STATISTICAL ASSOSATION 2001

PROCEEDINGS OF THE SECTION ON QUALITY AND PRODUCTIVITY ON CD-ROM, 2001

S.Balamurali, *Bootstrap Confidence Limits for Short-Run Capability Indices,* QUALITY ENGINEERING. Vol. 15, No. 4, 2003

Mats Deleryd and Kerstin Vännman, *Process Capability Studies for Short Production Runs,* INTERNATIONAL JOURNAL OF RELIABILITY, QUALITY AND SAFETY ENGINEERING. Vol. 5, No.4, 1998

Efron and Tibshirani, *Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and other Measures of Statistical Accuracy.* STATISTICAL SCIENCE, 1986

Kane, *Process capability indices.* JOURNAL OF QYALITY TECHNOLOGY , Vol. 18, 1986

Chan and Cheng, *A New Mesaure of Process Capability: C_{pk}.* JOURNAL OF QYALITY TECHNOLOGY. Vol. 20, 1986

Vännman, *AUnified Approach to Capability Indices.* STATISTICA SINCA. Vol. 5, 1995

Vännman, *Distribution and Moments in Simplified Form for a General Class of Capability Indices.* COMMUNICATIONS IN STATISTICS-TEORY AND METHODS. Vol.26, 1997

Kotz S. and Johnson, "*Process Capability Indices".* CHAPMAN AND HALL, LONDON,UK, 1993

Kotz S. and Johnson, "*Process Capability Indices – A Review,1992-2000 (with discussion)".* JOURNAL OF QYALITY TECHNOLOGY. Vol. 34, 2002

Kirmani , Kocherlakota K. and Kocherlakota S. "*Estimation of σ and the Process Capability Index Based on Subsamples".* COMMUNICATIONS IN STATISTICS-TEORY AND METHODS. Vol.20, 1991

Li, Owen and Borrego, "*Lower Confidence Limits on Process Capability Indices Based on the Range".* COMMUNICATIONS IN STATISTICS-TEORY AND METHODS-SIMULATION. Vol.19, 1990
Arizono, Kanagawa, Ohta, Watakabe and Tateishi. *Variable Sampling Plans for Normal Distribution Indexed by Taguchi's Loss Function.* NOVAL RESEARCH LOGISTICS. Vol.44, 1997

M. Deleryd, *Why is it Sometimes so Hard to Implement Process Capability Studies? TOTAL QUALITY MANAGEMENT IN ACTION (CHAPMAN & HALL, LONDON, 1996)*