Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Strutture implicative

Candidato:
Amir Al Naber
Matricola 1211421

Relatore:
prof.ssa Maria Emilia Maietti

Correlatore:
dott. Samuele Maschio

Anno Accademico 2021–2022
23/09/2022

Indice

Introduzione

L'interpretazione BHK è un paradigma informale che spiega il significato dei connettivi e dei quantificatori nella matematica costruttiva (e, in particolare, nella logica intuizionista), contrapponendosi alla teoria semantica della verità di Tarski (il 'T-schema'), usata in logica classica (si veda [25]). L'interpretazione BHK si articola nei seguenti punti (esposti in maniera molto informale):

- La dimostrazione di una proposizione $P \wedge Q$ è una coppia ordinata (p, q) dove p è una dimostrazione di P e q è una dimostrazione di Q.

- La dimostrazione di una proposizione $P \vee Q$ è una coppia ordinata (a, t) dove a è un'etichetta che indica la formula P o la formula Q e t è una dimostrazione della formula indicata da a

- La dimostrazione di una formula $P \to Q$ è una procedura che converte ogni dimostrazione di P in una dimostrazione di Q

- La dimostrazione di una formula $\exists y P(y)$ è una coppia (n, p) dove n è un elemento (di un certo 'dominio' della variabile y) e p è una dimostrazione di '$P(n)$'

- La dimostrazione di una formula $\forall y P(y)$ è una procedura che converte ogni elemento n in una dimostrazione di '$P(n)$'

Chiaramente la formulazione data è informale in quanto non specifica cosa si intenda per '$P(n)$'; per una formulazione più rigorosa si può vedere [26].
Lo studio del paradigma BHK porta alla definizione di strutture astratte che fungono da *strutture delle dimostrazioni*, i cui elementi possono codificare coppie ordinate, 'etichette' e procedure che convertono dimostrazioni in dimostrazioni; si usa il termine generico di *realizzatori* per indicare gli elementi di strutture siffatte; informalmente diciamo che uno di questi elementi *realizza* una certa formula P se esso è una dimostrazione di P, secondo il paradigma BHK; se, per una certa teoria $\mathcal{T}$ su un linguaggio $\mathcal{L}$ è possibile

assegnare a ciascuna assioma della teoria un insieme di realizzatori, in modo tale che i principi del BHK siano rispettati, diciamo di aver ottenuto un *modello* (di realizzabilità) della teoria $\mathcal{T}$. L'esempio cardine è quello della *prima algebra di Kleene*, o *realizzabilità dei numeri*, che si fonda sul fatto che i numeri naturali, oltre a codificare - come noto - coppie di numeri naturali, possono codificare funzioni *computabili* tra numeri naturali, potendo così fungere da *procedure* che convertono dimostrazioni in dimostrazioni; La realizzabilità dei numeri trova una naturale generalizzazione nelle *strutture combinatorie parziali*, che incontreremo nel seguito.
Per lungo tempo il metodo della realizzabilità rimase relegato all'ambito della logica intuizionista, ma le cose cambiarono a metà degli anni '90, quando, il matematico francese Jean Louis Krivine riformulò i principi della realizzabilità estendendoli in ambito classico, dando così origine alla cosidetta 'realizzabilità classica' [10]; l'opera di Krivine è assai complessa, ma l'idea centrale sta nel non interpretare più le formule come insiemi di realizzatori (sottoinsiemi di algebre combinatorie parziali) ma come insiemi di *controrealizzatori* - intuitivamente, dimostrazioni della falsità della formula; l'insieme dei realizzatori di una formula ϕ viene invece definito in modo indiretto, come 'ortogonale' all'insieme dei controrealizzatori, rispetto a una certa relazione binaria $\triangle$, detta *polo* (tutti questi concetti verranno chiariti nel paragrafo 6.8).
Le algebre di Heyting complete sono un tipo di strutture assai diverso dalle algebre combinatorie parziali, però anch'esse vengono usate per fornire modelli a teorie della logica intuizionista; l'interpretazione di un linguaggio $\mathcal{L}$ in queste strutture si discosta dalla nozione classica, tarskiana, di interpretazione, in questo senso:

- Non abbiamo due soli valori di verità (0 e 1), ma molteplici valori di verità - presi tra gli elementi di un'algebra di Heyting completa H; ogni costante proposizionale del linguaggio viene interpretata come uno di questi elementi.

- Per la semantica di Tarski una formula di tipo $\forall y P(y)$ va interpretata come 1 se - informalmente - $P(n)$ è interpretato come 1 per tutti gli elementi n di un certo dominio M, ed è interpretato come 0 altrimenti; in un'algebra di Heyting, invece, $\forall y P(y)$ va interpretato come estremo inferiore dell'insieme delle interpretazioni di $P(n)$, al variare di n tra gli elementi del dominio M.

- Secondo la semantica di Tarski, ogni formula del tipo $\exists y P(y)$ va interpretata come 1 se l'interpretazione di $P(n)$ è uguale ad 1 per qualche elemento n del dominio M, altrimenti è 0; in un'algebra di Heyting completa, invece, la formula $\exists y P(y)$ è interpretata come l'estremo superiore dell'insieme delle interpretazioni di $P(n)$ al variare di n tra gli elementi del dominio M.

Secondo la semantica di Tarski, un'interpretazione di $\mathcal{L}$ che assegna valore 1 a tutti gli assiomi di una teoria $\mathcal{T}$ espressa nel linguaggio $\mathcal{L}$ è un modello di $\mathcal{T}$; un'interpretazione di $\mathcal{L}$ in un'algebra di Heyting completa, invece, è detta essere un modello di $\mathcal{T}$ se ogni assioma di $\mathcal{T}$ è interpretato come l'elemento massimo dell'algebra di Heyting. Questo tipo di modelli è noto col nome di 'forcing' e trae origine da una celebre tecnica sviluppata da Paul Cohen per dimostrare l'indipendenza dell'ipotesi del continuo dagli assiomi di ZF [1].
Il fatto di avere molteplici valori di verità è assai stupefacente, e può essere in parte compreso facendo appello al forte legame che c'è tra forcing e la semantica di Kripke, adoperata in logica modale; intuitivamente, secondo tale semantica, possiamo intendere un valore di verità w relativo a una formula ϕ come il fatto che ϕ è 'conosciuta come vera' allo 'stadio' w; in stadi successivi (rispetto alla relazione $\leq$ di algebra di Heyting) il nostro livello di conoscenza cresce, e dunque, se w è un valore di verità di ϕ e $w \leq w'$, allora w' è *a fortiori* un valore di verità di ϕ; questo interessante legame tra i due tipi di semantica non verrà però trattato in queste pagine. Il lettore interessato può consultare, ad esempio, [27] e [3].

Riassumendo, abbiamo due tipi di strutture apparentemente assai differenti per fornire modelli alle teorie implementate nella logica intuizionista: da una parte le algebre combinatorie parziali - o 'strutture di realizzabilità intuizionista' - apparentemente più 'vicine' al paradigma BHK; dall'altra le algebre di Heyting complete (strutture di forcing), più vicine all'idea di 'semantica a valori di verità' introdotta da Tarski in ambiente classico; entrambe hanno una loro versione classica, rispettivamente le strutture astratte di Krivine e le algebre di Boole complete, ovvero la sottoclasse delle algebre di Heyting complete per cui vale il principio del terzo escluso.
In questo contesto si inseriscono le ricerche di Alexandre Miquel, che in una serie di articoli ha delineato una nuova struttura - detta *struttura implicativa* - in grado di generalizzare sia le strutture di realizzabilità che quelle di forcing, in ambiente intuizionista e classico. La tesi si propone di illustrare questo tipo di strutture, con un riferimento costante all'ampio articolo di A. Miquel intitolato '*Implicative algebras*: *a new foundation for realizability and forcing*' [19].
L'esistenza di strutture i cui elementi siano considerabili al contempo come realizzatori - ovvero dimostrazioni nel senso del paradigma BHK - e valori di verità di proposizioni può risultare piuttosto strana, perché parrebbe im-

plicare che ad ogni proposizione sia associata una dimostrazione, qualunque sia il suo valore di verità; questo problema viene eluso associando ad ogni struttura implicativa un *separatore*, ovvero una particolare sottostruttura che serve a munire la struttura implicativa di un peculiare *criterio di consistenza*; si rinuncia cioè a un criterio *assoluto* di consistenza.

Nell'ultima parte di questo lavoro verrà trattata la semantica associata alle strutture implicative, nel contesto più generale della semantica categoriale basata sulle iperdottrine, relativa ai linguaggi tipati del primo ordine [13], [6]. Più specificamente, alle strutture implicative saranno associati i *tripos implicativi*, particolari iperdottrine che servono a interpretare linguaggi di ordine superiore (si veda [6], [14]) e consentono la costruzione di universi matematici generalizzati, chiamati *topos elementari* [17], [8].

Parte I

Strutture per la logica intuizionista e classica

Capitolo 1

λ-Calcolo

1.1 λ-termini con parametri

Definizione 1.1.1. *Sia A un insieme i cui elementi chiamiamo **parametri**.*
Sia V un insieme di variabili $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$
*Definiamo induttivamente l'insieme Λ_A dei **λ-termini** a parametri in A:*

- $a \in \Lambda_A$
- $x \in \Lambda_A$
- $(tu) \in \Lambda_A$
- $(\lambda x.t) \in \Lambda_A$

per ogni $a \in A, x \in V,\ t, u \in \Lambda_A$.

Le parentesi appesantiscono la notazione, quindi verranno tendenzialmente omesse, quando questo non creerà ambiguità.
Per semplificare la lettura, adottiamo le seguenti abbreviazioni:

$$t_1 \dots t_{n+2} := (t_1 \dots t_{n+1})t_{n+2}$$
$$\lambda x.t_1 \dots t_n := \lambda x.(t_1 \dots t_n)$$
$$\lambda x_{n+1} \dots x_1.t := \lambda x_{n+1}.(\lambda x_n \dots x_1.t)$$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in V$, $t, t_1, \dots, t_{n+2} \in \Lambda_A$.

Definizione 1.1.2. *Definiamo la **lunghezza** (o complessità) $l(t)$ di un λ-termine t, per induzione strutturale:*

- $l(a) = 1$
- $l(x) = 1$

· $l(tu) = l(t) + l(u)$

· $l(\lambda x.t) = l(t) + 1$

per ogni $a \in A$, $x \in V$, $t, u \in \Lambda_A$.

Definizione 1.1.3. *Definiamo l'insieme dei parametri* $Par(t)$ *associati a* $t \in \Lambda_A$, *per induzione:*

· $Par(a) := \{a\}$.

· $Par(tu) := Par(t) \cup Par(u)$

· $Par(\lambda x.t) := Par(t)$

per ogni $a \in A$, $x \in V$, t, $u \in \Lambda_A$.

Definizione 1.1.4. *Definiamo induttivamente l'insieme delle variabili* $Var(t)$ *di* $t \in \Lambda_A$*:*

· $Var(a) = \varnothing$.

· $Var(x) = \{x\}$.

· $Var(tu) = Var(t) \cup Var(u)$.

· $Var(\lambda x.t) = Var(t) \cup \{x\}$.

per ogni $a \in A$, $x \in V$, $t, u \in \Lambda_A$.

Definizione 1.1.5. *Un* λ*-termine* t *tale che* $Par(t) = \varnothing$ *è detto* ***puro****; in altre parole, i* λ*-termini puri sono gli elementi di* $\Lambda_\varnothing$.

Definizione 1.1.6. *Definiamo induttivamente l'insieme delle variabili libere* $VL(t)$ *di* $t \in \Lambda_A$*:*

· $VL(a) = \varnothing$.

· $VL(x) = \{x\}$.

· $VL(tu) = VL(t) \cup VL(u)$.

· $VL(\lambda x.t) = VL(t) \setminus \{x\}$.

per ogni $a \in A$, $x \in V$, $t, u \in \Lambda_A$.

Definizione 1.1.7. *Se $x_1, \dots, x_n \in V$ con $x_i \neq x_j$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tali che $i \neq j$, indichiamo con $\Lambda_A^{[x_1,\dots,x_n]}$ l'insieme dei λ-termini t tali che $VL(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Estendiamo questa definizione anche al caso di una lista vuota di variabili, adoperando il simbolo $\Lambda_A^{[-]}$. Più precisamente, $\Lambda_A^{[-]}$ è l'insieme dei λ-termini t tali che $VL(t) = \varnothing$. Gli elementi di $\Lambda_A^{[-]}$ vengono detti λ-termini* ***chiusi*** *a parametri in A.*

Si osservi che $\Lambda_A^{[-]}$ può essere definito induttivamente nel seguente modo:

- $a \in \Lambda_A^{[-]}$
- $\lambda x.t \in \Lambda_A^{[-]}$
- $su \in \Lambda_A^{[-]}$

per ogni $a \in A$, $x \in V$, $t \in \Lambda_A^{[x]}$, $s, u \in \Lambda_A^{[-]}$.
Con una semplice induzione si vede subito che $VL(\lambda x_1 \dots \lambda x_n.t) = VL(t) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ e dunque, in particolare, se $VL(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, allora $\lambda x_1 \dots \lambda x_n.t$ è chiuso, per ogni $t \in \Lambda_A$, $x_1, \dots, x_n \in V$.

Definizione 1.1.8. *Se $x_1, \dots, x_n \in V$, $x_i \neq x_j$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$ e D un insieme, definiamo l'insieme $D[x_1, \dots, x_n]$ nel seguente modo:*

- $d \in D[x_1, \dots, x_n]$
- $x_i \in D[x_1, \dots, x_n]$
- $q, u \in D[x_1, \dots, x_n]$ *implica* $qu \in D[x_1, \dots, x_n]$

per ogni $d \in D$, $i \in \{1, \dots, n\}$.
Estendiamo questa definizione al caso di una lista vuota di variabili e della lista comprendente tutte le variabili, adoperando rispettivamente i simboli $D[-]$ e $D[\dots \xi_n \dots]$. Più precisamente, con $D[\dots \xi_n \dots]$ indichiamo l'insieme $\cup_{n \in \mathbb{N}}(D[\xi_0, \dots, \xi_n])$, mentre con $D[-]$ indichiamo l'insieme così definito:

- $d \in D[-]$
- $q, u \in D[-]$ *implica* $qu \in D[-]$

per ogni $d \in D$.

Definizione 1.1.9. *Definiamo induttivamente il* ***cambio di variabile*** *nei λ-termini:*

- $a[y_1//x_1, \dots, y_n//x_n] := a$

- $z[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n] := z$
- $x_j[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n] := y_j$
- $(tu)[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n] := t[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n]u[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n]$
- $(\lambda x_j.t)[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n] := \lambda y_j.(t[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n])$
- $(\lambda z.t)[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n] := \lambda z.(t[y_1//x_1, \ldots, y_n//x_n])$

per ogni $t, u \in \Lambda_A$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $z \in V$, *con* $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$, $z \neq x_i$ *per ogni* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *con* $j \neq i$.

Definizione 1.1.10. *Definiamo la relazione di* ***α-equivalenza*** $=_\alpha$ *come la più piccola relazione di equivalenza su* Λ_A *tale che*

- $\lambda x.t =_\alpha \lambda y.(t[y//x])$ *per ogni* $t \in \Lambda_A$, $x, y \in V$, $y \notin Var(t)$
- *Se* $t =_\alpha q$ *e* $r =_\alpha u$ *allora* $tr =_\alpha qu$ *per ogni* $t, r, q, u \in \Lambda_A$
- *Se* $t =_\alpha q$ *allora* $\lambda x.t =_\alpha \lambda x.q$

Definizione 1.1.11. *Definiamo induttivamente la sostituzione di variabili con λ-termini:*

- $a[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] := a$
- $x_j[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] := s_j$
- $y[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] := y$
- $(tu)[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] := t[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]u[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]$
- $(\lambda x_j.t)[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] := \lambda x_j.(t[s_1/x_1, \ldots, \cancel{s_j/x_j}, \ldots, s_n/x_n])$
- $(\lambda y.t)[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] := \lambda z.(t[z/y][s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n])$

per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $s_1, \ldots, s_n, t, u \in \Lambda_A$, $x_1, \ldots, x_n, y \in V$, $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, $a \in A$*; nell'ultimo punto della definizione,* z *indica la prima variabile successiva (o uguale) a* y *non presente in* $\cup_{i\in\{1,\ldots,n\}} VL(s_i)$.

Osservazione 1.1.1. *In riferimento alla precedente definizione (1.1.11), si vede facilmente che* $t[x_1/x_1, \ldots, x_n/x_n] = t$ *e che, di conseguenza, se* $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ *e* $y \notin \cup_{i\in\{1,\ldots,n\}} VL(s_i)$*, allora l'ultimo punto può essere sostituito con* $(\lambda y.t)[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] = \lambda y.(t[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n])$*. Spesso, per semplicità, si supporrà tacitamente che* $y \notin \cup_{i\in\{1,\ldots,n\}} VL(s_i)$*, in modo da evitare appesantimenti notazionali.*

Definizione 1.1.12. *Definiamo la relazione di* ***β-riduzione*** $\to_\beta$ *come la più piccola relazione binaria tra λ-termini tale che:*

- $(\lambda x.t)u \to_\beta t[u/x]$
- $t \to_\beta t'$ *implica* $ut \to_\beta ut'$
- $t \to_\beta t'$ *implica* $tu \to_\beta t'u$
- $t \to_\beta t'$ *implica* $\lambda x.t \to_\beta \lambda x.t'$

per ogni $t, u, t', u' \in \Lambda_A$, $x \in V$.

Definizione 1.1.13. *Definiamo la relazione di* ***η-riduzione*** $\to_\eta$ *come la più piccola relazione binaria tra λ-termini tale che:*

- $\lambda x.tx \to_\eta t$
- $q \to_\eta q'$ *implica* $qu \to_\eta q'u$
- $q \to_\eta q'$ *implica* $uq \to_\eta uq'$
- $q \to_\eta q'$ *implica* $\lambda y.q \to_\eta \lambda y.q'$

per ogni $t, q, q', u, u' \in \Lambda_A$, $x, y \in V$, $x \notin VL(t)$.

Definizione 1.1.14. *Diciamo che $t \in \Lambda_A$ è β-riducibile (o* ***β-redex****) se esiste $q \in \Lambda_A$ tale che $t \to_\beta q$; diciamo che t è in forma* ***β-normale*** *se non è β-riducibile. Analoghe definizioni per η.*

Osservazione 1.1.2. *Si osservi che ci sono λ-termini che si β-riducono all'infinito: $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$.*

Proposizione 1.1.1 (Lemma di struttura dei λ-termini β-normali)**.** *Sia $t \in \Lambda_A$ un λ-termine β-normale; allora esistono dei λ-termini β-normali $u_1, \dots, u_n \in \Lambda_A$, delle variabili $x_1, \dots, x_m \in V$ e un λ-termine q di lunghezza 1 tali che $t = \lambda x_1 \dots x_m.qu_1 \dots u_n$, con $m \geq 0$, $n \geq 0$; i numeri m e n, i λ-termini u_1, $\dots$, u_n e q, le variabili x_1, $\dots$, x_m sono tutti univocamente determinati. Inoltre, se t è chiuso, allora $VL(q) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$*

Dimostrazione.

Induzione sulla lunghezza di t.

- Se t ha lunghezza 1, allora basta porre $n, m = 0$, $q := t$ e il teorema è immediatamente verificato. L'univocità in questo caso è ovvia.

- Se $t = \lambda x_1.r$, allora chiaramente r deve essere β-normale, dunque applicando l'ipotesi induttiva, abbiamo che $t = \lambda x_1 \dots x_m.qu_1 \dots u_n$, per opportune variabili $x_1, \dots x_m \in V$, un opportuno λ-termine q di lunghezza 1 e opportuni λ-termini $u_1, \dots, u_n \in \Lambda_A$.
  Univocità: se ci sono delle variabili $y_1, \dots, y_k \in V$, un λ-termine q' di lunghezza 1 e dei λ-termini β-normali $u'_1, \dots, u'_l$ tali che $t = \lambda y_1 \dots y_k.q'$ $u'_1 \dots u'_l$, allora $y_1 = x_1$, perché per ipotesi $t = \lambda x_1.r$; ma allora si deve anche avere che $m = k$, $y_2 = x_2$, $\dots$, $y_m = x_m$ e $q' = q$, perché altrimenti verrebbe contraddetta l'univocità relativa a r, che è valida per ipotesi induttiva.

- Se $t = rp$ allora r e p devono essere β-normali e r non può essere un λ-termine del tipo $\lambda x.t'$, altrimenti si avrebbe $t \to_\beta t'[p/x]$. Ma allora, per ipotesi induttiva, si deve avere $r = qu'_1 \dots u'_l$, per un opportuno λ-termine $q \in \Lambda_A$ di lunghezza 1 e opportuni λ-termini $u'_1, \dots, u'_l \in \Lambda_A$. Abbiamo così l'identità $t = qu'_1 \dots u'_l p$, il che ci permette di concludere, ponendo $m := 0$, $n := l + 1$, $u_1 := u'_1$, $\dots$, $u_{n-1} := u'_l$, $u_n := p$.
  Univocità: supponiamo che $t = \lambda y_1 \dots y_k.q't_1 \dots t_h$ per opportune variabili $y_1, \dots, y_k$, per un opportuno λ-termine q' di lunghezza 1 e per opportuni λ-termini β-normali $t_1, \dots, t_h$; allora si deve avere necessariamente che $k = 0$, perché altrimenti non sarebbe più vero che t è del tipo $t = rp$; ma allora si ha che $t = q't_1 \dots t_h = qu_1 \dots u_n$, da cui segue che $u_n = t_h$ e $q't_1 \dots t_{h-1} = qu_1 \dots u_{n-1}$; dato che q e q' hanno lunghezza 1 e che t_1, $\dots$, t_h, u_1, $\dots$ u_n sono β-normali, segue - come è facilmente verificabile - che $q't_1 \dots t_{h-1} = qu_1 \dots u_n$ è β-normale; dunque, per ipotesi induttiva sulla lunghezza dei λ-termini β-normali, abbiamo che $q = q'$, $h = n$ e $u_i = t_i$ per ogni i.

Il fatto che, se $t = \lambda x_1 \dots x_m.qu_1 \dots u_n$ è chiuso, allora $VL(q) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, è una semplice conseguenza dell'uguaglianza $VL(t) = (VL(q) \cup VL(u_1) \cup \dots \cup VL(u_n)) \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ $\square$

Osservazione 1.1.3. *Come si deduce dalla dimostrazione appena svolta, il lemma di struttura implica che, se $t = rp \in \Lambda_A$ è β-normale, allora t è del tipo $qu_1 \dots u_n$, con $l(q) = 1$ e $u_1, \dots, u_n$ β-normali.*

Definizione 1.1.15. *Indichiamo con $\twoheadrightarrow_\beta$ la più piccola relazione binaria su Λ_A tale che:*

- *$t \to_\beta u$ implica $t \twoheadrightarrow_\beta u$.*
- *$t =_\alpha u$ implica $t \twoheadrightarrow_\beta u$.*
- *$t \twoheadrightarrow_\beta u$, $u \twoheadrightarrow_\beta q$ implica $t \twoheadrightarrow_\beta q$.*

per ogni $t, u, q \in \Lambda_A$.
Si tratta chiaramente di una relazione transitiva e riflessiva.
Se $t, u \in \Lambda_A$, *scriviamo* $t =_\beta u$ *se e solo se vale* $t \twoheadrightarrow_\beta u$ *o* $u \twoheadrightarrow_\beta t$. *Si verifica facilmente che* $=_\beta$ *è una relazione di equivalenza su* Λ_A, *ovvero è riflessiva, simmetrica e transitiva.*
Analogamente si definiscono $\twoheadrightarrow_\eta$ *e* $=_\eta$ *e si verificano le stesse proprietà*

Definizione 1.1.16. *Fissiamo due variabili distinte* $x, y \in V$. *Poniamo* $\upsilon := \lambda xy.y(xxy)$, $Y := \upsilon\upsilon$. Y *è detto* ***combinatore di punto fisso di Turing***. *Per ogni* $t \in \Lambda_A$, *definiamo* $\sigma_t := Yt$; σ_t *è detto* ***punto fisso*** *di* t.

Proposizione 1.1.2. *Sia* $t \in \Lambda_A$. *Allora* $\sigma_t \twoheadrightarrow_\beta t\sigma_t$.

Dimostrazione. $\sigma_t = Yt = \upsilon\upsilon t = (\lambda xy.y(xxy))\upsilon t \twoheadrightarrow_\beta t(\upsilon\upsilon t) = t(Yt) = t\sigma_t$ □

Osservazione 1.1.4. *Si osservi che la definizione di* υ *e di* Y, *e di conseguenza quella di* σ_t, *dipendono dalla scelta delle due variabili distinte* $x, y \in V$. *Tuttavia scelte diverse portano a* λ*-termini* α*-equivalenti tra loro. Quello di porre definizioni a meno di* α*-equivalenza è un aspetto tipico del* λ*-calcolo.*

Teorema 1.1.1 (Church-Rosser, 1936)**.** *Siano* $t, u, q \in \Lambda_A$. *Se* $u \;{}_\beta\!\twoheadleftarrow t \twoheadrightarrow_\beta q$ *allora esiste* $r \in \Lambda_A$ *tale che* $u \twoheadrightarrow_\beta r \;{}_\beta\!\twoheadleftarrow q$.

Dimostrazione. Si veda, ad esempio, [23], pag. 26. □

Corollario 1.1.1. *Siano* $t, u \in \Lambda_A$ *tali che* $t =_\beta u$; *allora esiste* $r \in \Lambda_A$ *tale che* $t \twoheadrightarrow_\beta r \;{}_\beta\!\twoheadleftarrow u$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi abbiamo che $t =: t_0 \to_1 t_1 \to_2 t_2 \to \cdots \to_{n-1} t_{n-1} \to_n t_n := u$ per qualche $n \geq 0$ e $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \Lambda_A$, dove $\to_i \equiv \twoheadrightarrow_\beta$ o $\to_i \equiv {}_\beta\!\twoheadleftarrow$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$ allora $t = u$ e abbiamo concluso. Sia $n \neq 0$. Per ipotesi induttiva su n, abbiamo che esiste q tale che $t \twoheadrightarrow_\beta q \;{}_\beta\!\twoheadleftarrow t_{n-1}$. Ora, se $\to_n \equiv {}_\beta\!\twoheadleftarrow$, per transitività di $\twoheadrightarrow_\beta$ abbiamo concluso, basta porre $r := q$. Supponiamo che $\to_n \equiv \twoheadrightarrow_\beta$. Grazie al teorema di Church-Rosser, abbiamo che esiste $r \in \Lambda_A$ tale che $q \twoheadrightarrow_\beta r \;{}_\beta\!\twoheadleftarrow u$, e si conclude per transitività di $\twoheadrightarrow_\beta$. □

Corollario 1.1.2. *Siano* $t, u \in \Lambda_A$, t β*-normale e* $t =_\beta u$; *allora* $u \twoheadrightarrow_\beta t$.

Dimostrazione. $t =_\beta u$ implica $u \twoheadrightarrow_\beta t$ o $t \twoheadrightarrow_\beta u$. Nel primo caso abbiamo concluso. Nel secondo caso, per il teorema precedente, abbiamo $t \twoheadrightarrow_\beta r \;{}_\beta\!\twoheadleftarrow u$ per qualche $r \in \Lambda_A$. Ma t è β-normale, quindi $t =_\alpha r$, da cui $u \twoheadrightarrow_\beta t$. □

1.2 λ-termini e combinatori

Definizione 1.2.1. *Fissiamo tre variabili distinte x, y, $z \in V$. Definiamo i seguenti elementi in $\Lambda_{\varnothing}^{[-]}$ (l'insieme dei λ-termini chiusi e puri), detti **combinatori**:*

- $\boldsymbol{I} := \lambda x.x$
- $\boldsymbol{K} := \lambda xy.x$
- $\boldsymbol{S} := \lambda xyz.xz(yz)$
- $\boldsymbol{B} := \lambda xyz.x(yz)$
- $\boldsymbol{W} := \lambda xy.xyy$
- $\boldsymbol{C} := \lambda xyz.xzy$

Lemma 1.2.1. *I combinatori $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{C} \in \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$ sono il β-ridotto di un λ-termine $t \in \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\}[-] \subseteq \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$; più precisamente:*

$\boldsymbol{SKK} \twoheadrightarrow_{\beta} \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{KS})\boldsymbol{K} \twoheadrightarrow_{\beta} \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{SS}(\boldsymbol{SK}) \twoheadrightarrow_{\beta} \boldsymbol{W}$

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{BBS})(\boldsymbol{KK}) \twoheadrightarrow_{\beta} \boldsymbol{C}$
(e dunque $\boldsymbol{S}((\boldsymbol{S}(\boldsymbol{KS})\boldsymbol{K})(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{KS})\boldsymbol{K})\boldsymbol{S})(\boldsymbol{KK}) \twoheadrightarrow_{\beta} \boldsymbol{C}$).

Dimostrazione.

$\mathbf{SKK} \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z.\mathbf{K}z(\mathbf{K}z) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z.z =_{\alpha} \mathbf{I}$

$\mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K} \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z.\mathbf{KS}z(\mathbf{K}z) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z.\mathbf{S}(\mathbf{K}z) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zyv.\mathbf{K}zv(yv) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zyv.z(yv) =_{\alpha} \mathbf{B}$

$\mathbf{SS}(\mathbf{SK}) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z.\mathbf{S}z(\mathbf{SK}z) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zv.zv(\mathbf{SK}zv) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zv.zv(\mathbf{K}v(zv)) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zv.zvv =_{\alpha} \mathbf{W}$

$\mathbf{S}(\mathbf{BBS})(\mathbf{KK}) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z.\mathbf{BBS}z(\mathbf{KK}z) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda z.\mathbf{B}(\mathbf{S}z)\mathbf{K} \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zv.\mathbf{S}z(\mathbf{K}v) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zvw.zw(Kvw) \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda zvw.zwv =_{\alpha} \mathbf{C}$

(dove x, y, z, v, w sono variabili distinte)

□

Definizione 1.2.2. *Chiamiamo **termini combinatorî** su A gli elementi di $(\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup A)[\dots\xi_n\dots] \subseteq \Lambda_A$.*

Definizione 1.2.3. *Sia A un insieme. Per ogni $x \in V$, $t \in (A \cup \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\})[\dots \xi_n \dots] \subseteq \Lambda_A$, definiamo $Lx.t \in (A \cup \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\})[\dots \xi_n \dots]$ nel seguente modo:*

- $Lx.a := \boldsymbol{K}a$
- $Lx.x := \boldsymbol{SKK}$
- $Lx.y := \boldsymbol{K}y$
- $Lx.qu := \boldsymbol{S}(Lx.q)(Lx.u)$

per ogni $a \in A \cup \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\}$, $y \in V$, $q, u \in (A \cup \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\})[\dots \xi_n \dots]$, $x \neq y$.

Definizione 1.2.4. *Per ogni $t \in \Lambda_A$ definiamo $t^c \in (A \cup \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\})[\dots \xi_n \dots]$:*

- $a^c := a$
- $x^c := x$
- $(ru)^c := r^c u^c$
- $(\lambda x.q)^c := Lx.q^c$

per ogni $a \in A$, $x \in V$, $r, u, q \in \Lambda_A$

Proposizione 1.2.1. *$VL(Lx.t) = VL(t) \setminus \{x\}$ per ogni $x \in V$, $t \in (A \cup \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\})[\dots \xi_n \dots]$.*

Dimostrazione. Induzione sulla complessità di t.
Fisso $x \in V$. I casi $t = a, x$, con $a \in A$, sono immediati.

$VL(Lx.y) = VL(\mathbf{K}y) = \{y\} = VL(y) \setminus \{x\}$ se $y \neq x$

$VL(Lx.qu) = VL(\mathbf{S}(Lx.q)(Lx.u)) = VL(Lx.q) \cup VL(Lx.u) = (VL(q) \setminus \{x\}) \cup (VL(u) \setminus \{x\}) = VL(qu) \setminus \{x\}$

□

Proposizione 1.2.2. *$VL(t^c) = VL(t)$ per ogni $t \in \Lambda_A$.*

Dimostrazione. Induzione sulla complessità di t. L'unico caso non immediato è $(\lambda x.q)^c$: $VL((\lambda x.q)^c) = VL(Lx.q^c) = VL(q^c) \setminus \{x\} = VL(q) \setminus \{x\} = VL(\lambda x.q)$ □

Osservazione 1.2.1. *Grazie al precedente risultato, abbiamo che, se $t \in \Lambda_A^{[\underline{x}]}$, allora $t^c \in (\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup A)[\underline{x}]$*

Proposizione 1.2.3. *$Lx.t \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.t$ per ogni $x \in V$, $t \in (A \cup \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\})[\dots \xi_n \dots]$.*

Dimostrazione.

$Lx.a = \mathbf{K}a =_\alpha (\lambda yx.y)a \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.a$

$Lx.x = \mathbf{SKK} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I} =_\alpha \lambda x.x$

$Lx.y = \mathbf{K}y =_\alpha (\lambda zx.z)y \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.y$

$Lx.qu = \mathbf{S}(Lx.q)(Lx.u) =_\alpha (\lambda wyz.wz(yz))(Lx.q)(Lx.u) \twoheadrightarrow_\beta \lambda z.(Lx.q)z((Lx.u)z)$
$\twoheadrightarrow_\beta \lambda z.(\lambda x.q)z((\lambda x.u)z) \twoheadrightarrow_\beta \lambda z.q[z/x]u[z/x] =_\alpha \lambda x.qu$

per ogni $a \in A \cup \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}$, $x, y \in V$, $x \neq y$, $q, u \in (A \cup \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\})[\dots \xi_n \dots]$. $\square$

Proposizione 1.2.4. *Sia $t \in \Lambda_A$. Allora $t^c \twoheadrightarrow_\beta t$.*

Dimostrazione. Induzione sulla complessità di t:

$a^c = a \twoheadrightarrow_\beta a$

$x^c = x \twoheadrightarrow_\beta x$

$(ru)^c = r^c u^c \twoheadrightarrow_\beta ru$

$(\lambda x.q)^c = Lx.q^c \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.q^c \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.q.$ $\square$

Corollario 1.2.1. *Se $t \in \Lambda_A^{[\underline{x}]}$, allora esiste $t_0 \in (\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup A)[\underline{x}]$ tale che $t_0 \twoheadrightarrow_\beta t$.*

Dimostrazione. Basta usare il precedente risultato, ponendo $t_0 := t^c$, ricordando che, se $t \in \Lambda_A^{[\underline{x}]}$, allora $t^c \in (\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\} \cup A)[\underline{x}]$. $\square$

1.3 λ-termini con tipi semplici

Fissiamo un insieme $\boldsymbol{P}$, i cui elementi chiamiamo **tipi atomici** (o, più semplicemente, **atomi**).
Definiamo l'insieme $\mathbf{Type}_{\boldsymbol{P}}$ dei **tipi** (su $\boldsymbol{P}$) come il più piccolo insieme che rispetta le seguenti clausole:

- Ogni atomo è un tipo
- Se α e β sono tipi, allora $(\alpha \to \beta)$ è un tipo, detto **tipo composto**

Notazione: le parentesi più esterne dei tipi verranno omesse. Inoltre poniamo

$$\alpha_{n+1} \to \cdots \to \alpha_1 \equiv \alpha_{n+1} \to (\alpha_n \to \cdots \to \alpha_1)$$

per ogni tipo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
Definiamo la lunghezza $l(\alpha)$ di un tipo α:

- $l(a) = 1$ per ogni atomo a
- $l(\alpha \to \beta) = l(\alpha) + l(\beta)$

Sia a un atomo e β un tipo; definiamo l'espressione 'a *occorre* in β' - o 'a è un atomo di β' - per induzione sulla lunghezza di β, nel seguente modo:

- Se β ha lunghezza 1, a occorre in β se e solo se β è uguale ad a
- Se β ha lunghezza $n+1$, allora β si scrive in modo unico come $\gamma \to \delta$, con γ e δ tipi di lunghezza minore o uguale a n; allora, in questo caso, diciamo che a occorre in β se e solo se a occorre in γ o a occorre in δ

Indichiamo con $\|\alpha\|$ il numero di atomi che occorrono in un tipo. Ad esempio, se a, b e c sono atomi, allora

$$(a \to b \to c) \to a$$

è un tipo con lunghezza 4 ma in cui occorrono solo 3 atomi: a, b e c.
A differenza di quanto fatto nei paragrafi precedenti, invece di prendere un solo insieme di variabili V, prendiamo un insieme di variabili V_α per ogni tipo $\alpha \in \mathbf{Type}_{\boldsymbol{P}}$, e poniamo $V := \cup_{\alpha \in \mathbf{Type}_{\boldsymbol{P}}}(V_\alpha)$ (gli insiemi V_α devono essere a due a due disgiunti)
Possiamo così ripetere le definizioni già viste nei precedenti paragrafi, imponendo però che il cambio di variabile valga solo tra variabili dello stesso tipo e che la sostituzione valga solo tra termini e variabili dello stesso tipo (il tipo dei termini verrà determinato dalle regole di deduzione che daremo a breve). I dettagli sono lasciati al lettore.
Un'**assegnazione tipale** è una scrittura del tipo

$$t : \alpha$$

dove $t \in \Lambda_\varnothing$. Il λ-termine t è detto **soggetto** mentre α è detto **predicato** dell'assegnazione.
Un TA_λ-**contesto** (dove TA sta per 'Type Assignment') è un insieme finito, anche vuoto, del tipo

$$\{x_1 : \alpha_1, \ldots, x_n : \alpha_n\}$$

dove

- $\alpha_i \in \mathbf{Type}_\mathbf{P}$ per ogni i
- $x_i \in V_{\alpha_i}$ per ogni i

Si osservi che, dato che abbiamo imposto $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ per ogni $\alpha \neq \beta$, si deve avere $x_i \neq x_j$ se $a_i \neq a_j$.
Per semplicità di notazioni rimuoviamo le parentesi esterne, scrivendo semplicemente

$$x_1 : \alpha_1, \ldots, x_n : \alpha_n$$

Coerentemente con questa notazione, se Γ_1 e Γ_2 sono due TA_λ-contesti, si scriverà Γ_1, Γ_2 per indicare il contesto $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
Si osservi che i predicati di un contesto sono ridondanti, perché ogni variabile determina univocamente il proprio predicato; tuttavia questo modo di definire un contesto rende più esplicita l'esposizione. D'ora in poi, scrivendo $x : \alpha$ in un contesto, si intenderà implicitamente che $x \in V_a$.
Se Γ è un TA_λ-contesto, il simbolo $dom(\Gamma)$ denoterà l'insieme dei soggetti di Γ (chiamando 'soggetti' di Γ i soggetti delle assegnazioni che appartengono a Γ); indichiamo con $\Gamma \setminus x$ il TA_λ-contesto ottenuto da Γ rimuovendo da Γ l'assegnazione avente soggetto x, se presente (altrimenti $\Gamma \setminus x = \Gamma$). Se $t \in \Lambda_\varnothing$, indichiamo con $\Gamma \restriction t$ il TA_λ-contesto ottenuto rimuovendo da Γ tutte le assegnazioni $x_i : \alpha_i$ con $x_i \notin VL(t)$; $\Gamma \restriction t$ è detto TA_λ-**contesto** Γ **ristretto** a t. Un t-TA_λ-contesto è, per definizione, un contesto Γ che ha per variabili esattamente le variabili libere di t: $VL(t) = dom(\Gamma)$.
Una TA_λ-**formula** è una scrittura del tipo

$$\Gamma \vdash t : \alpha$$

in cui Γ è un TA_λ-contesto, t è un λ-termine puro e α è un tipo; t è detto soggetto della TA_λ-formula, mentre α è il suo predicato.
Nel caso Γ sia la lista vuota, scriveremo semplicemente

$$\vdash t : \alpha$$

Introduciamo le seguenti scritture, dette TA_λ-**regole**:

· Regola $\to E$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash t : \alpha \to \beta \qquad \Gamma_2 \vdash u : \alpha}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash tu : \beta} \to E$$

· Regola $\to I$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \beta}{\Gamma \setminus x \vdash \lambda x.t : \alpha \to \beta} \to I$$

L'**istanza** (o **applicazione**) di una TA_λ-regola $\mathcal{R}$ è ottenuta applicando in $\mathcal{R}$ le seguenti sostituzioni:

· Γ, Γ_1 e Γ_2 vanno sostituiti con TA_λ-contesti

· t e u vanno sostituiti con λ-termini puri

· α e β vanno sostituiti con tipi

Tale sostituzione porta a identificare, in modo ovvio, gli oggetti posti sopra e sotto la barra orizzontale con particolari TA_λ-formule.
Andiamo a definire ora il concetto di TA_λ-deduzione; premettiamo che una TA_λ-deduzione è un particolare tipo di diagramma ad albero, nei cui 'nodi' compaio TA_λ-formule. Dato che queste formule possono comparire più volte, sarà bene tenere ben distinto il concetto di TA_λ-formula dal concetto di 'occorrenza' di una TA_λ-formula in un nodo dell'albero.
Precisiamo inoltre che, insieme alla definizione di TA_λ-deduzione, verranno simultaneamente definiti i concetti di **altezza** ($h(\mathcal{D})$), insieme delle **foglie** ($F(\mathcal{D})$) e di **conclusione** ($Concl(\mathcal{D})$) di una TA_λ-deduzione $\mathcal{D}$.
Fatte queste premesse, diamo la definizione:

· Se $\Gamma \vdash t : \alpha$ è una TA_λ-formula, allora il diagramma ad albero

$$\Gamma \vdash t : \alpha$$

è una TA_λ-deduzione, di altezza 1; l'unica foglia è l'etichetta $\Gamma \vdash t : \alpha$; la conclusione è la TA_λ-formula $\Gamma \vdash t : \alpha$.

· Se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono deduzioni aventi conclusioni $\Gamma_1 \vdash t : \alpha \to \beta$ e $\Gamma_2 \vdash u : \alpha$, allora

$$\frac{\mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{D}_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash tu : \beta} \to E$$

è una TA_λ-deduzione, di altezza $max(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) + 1$; l'insieme delle foglie è dato da $F(\mathcal{D}_1) \cup F(\mathcal{D}_2)$; la conclusione è la formula $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash tu : \beta$.

· Se $\mathcal{D}$ è una TA_λ-deduzione di conclusione $\Gamma \vdash t : \alpha$, allora

$$\frac{\mathcal{D}}{\Gamma \setminus x \vdash \lambda x.t : \alpha \to \beta} \to I$$

è una TA_λ-deduzione, di altezza $h(\mathcal{D})+1$; l'insieme delle foglie coincide con $F(\mathcal{D})$; la conclusione è la formula $\Gamma \setminus x \vdash \lambda x.t : \alpha \to \beta$.

Notazione: se $\mathcal{D}$ è una TA_λ-deduzione, si scriverà

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma \vdash t : \alpha\end{array}$$

per dire che $\mathcal{D}$ ha per conclusione $\Gamma \vdash t : \alpha$.
Una **premessa** di una TA_λ-deduzione $\mathcal{D}$ è una TA_λ-formula che compare in almeno una foglia di $\mathcal{D}$.
Una TA_λ-**dimostrazione** è una TA_λ-deduzione che ha per premesse solo TA_λ-formule del tipo $x : \alpha \vdash x : \alpha$. Se $\Gamma \vdash t : \alpha$ è una TA_λ-formula, chiamiamo TA_λ-dimostrazione di $\Gamma \vdash t : \alpha$ ogni dimostrazione che ha per conclusione $\Gamma' \vdash t : \alpha$, con $\Gamma' \subseteq \Gamma$.
Scriviamo $\Gamma \vdash_{TA_\lambda} t : \alpha$ per dire che esiste una TA_λ-dimostrazione di $\Gamma \vdash t : \alpha$.

Osservazione 1.3.1. *Notare che, con le definizioni date, i seguenti due fatti non sono equivalenti*

· *(i)* $\Gamma \vdash_{TA_\lambda} t : \alpha$ *(cioè: esiste una* TA_λ*-dimostrazione di* $\Gamma \vdash t : \alpha$*)*

· *(ii) Esiste una* TA_λ*-dimostrazione con conclusione* $\Gamma \vdash t : \alpha$

La (ii) implica la (i), ma non vale necessariamente il viceversa.
Naturalmente (i) e (ii) sono equivalenti nel caso Γ *sia la lista vuota.*

Proposizione 1.3.1. *Se* $\Gamma \vdash t : \alpha$ *è la conclusione di qualche* TA_λ*-dimostrazione, allora* $dom(\Gamma) = VL(t)$

Dimostrazione. Semplice induzione sull'altezza delle dimostrazioni. □

Osservazione 1.3.2. *Si dimostrano facilmente i seguenti fatti:*

· *Una dimostrazione con conclusione di* $\Gamma \vdash tu : \beta$ *deve terminare con l'applicazione della regola* $\rightarrow E$*, ovvero deve essere del seguente tipo*

$$\frac{\begin{array}{c}\dots\\ \Gamma_1 \vdash t : \alpha \rightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dots\\ \Gamma_2 \vdash u : \alpha\end{array}}{\Gamma \vdash tu : \beta} \rightarrow E$$

con $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$

· *Una dimostrazione con conclusione* $\Gamma \vdash \lambda x.t : \alpha$ *deve terminare con l'applicazione della regola* $\rightarrow I$.

· *Se* $\mathcal{D}$ *è una dimostrazione con conclusione* $\Gamma \vdash x : \alpha$*, allora* $\Gamma = x : \alpha$ *e* $\mathcal{D}$ *è la dimostrazione costituita dal solo nodo* $x : \alpha \vdash x : \alpha$

· $\vdash_{TA_\lambda} t : \alpha$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{TA_\lambda} t$ *per ogni* TA_λ*-contesto* Γ.

- *Se* $x : \alpha \vdash_{TA_\lambda} x : \beta$*, allora* $\alpha = \beta$*.*

- *Se* $\Gamma \vdash_{TA_\lambda} t : \alpha$ *e* $\Gamma \subseteq \Delta$*, allora* $\Delta \vdash_{TA_\lambda} t : \alpha$*.*

- $\Gamma \vdash_{TA_\lambda} t : \alpha$ *se e solo se* $VL(t) \subseteq dom(\Gamma)$ *e* $\Gamma \restriction t \vdash_{TA_\lambda} t : \alpha$

- *Se* $\Gamma \vdash_{TA_\lambda} \lambda x.t : \alpha$*, allora* $\alpha = \beta \to \delta$ *per opportuni tipi* β *e* δ

- *Se* $t =_\alpha u$ *e* β *è un tipo, allora* $\vdash t : \beta$ *se e solo se* $\vdash: u : \beta$

Vediamo qualche esempio di TA_λ-dimostrazione (usiamo i combinatori, Def. 1.2.1).

Esempio 1.3.1. $\vdash_{TA_\lambda}$ ***I*** *:* $\alpha \to \alpha$*, dove* $\boldsymbol{I} = \lambda x.x$ *e* x *è di tipo* α*. Infatti:*

$$\frac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha} \to I$$

Esempio 1.3.2. $\vdash_{TA_\lambda}$ ***K*** *:* $\alpha \to \beta \to \alpha$*, dove* $\boldsymbol{K} = \lambda xy.x$*, la variabile* x *è di tipo* α *e* y *è di tipo* β*. Infatti:*

$$\cfrac{\cfrac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda y.x : \beta \to \alpha} \to I}{\vdash \lambda xy.x : \alpha \to \beta \to \alpha} \to I$$

Esempio 1.3.3. $\vdash_{TA_\lambda}$ ***B*** *:* $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \beta$*, dove* $\boldsymbol{B} = \lambda xyz.xyz$*, la variabile* x *è di tipo* $\alpha \to \beta$*,* y *è di tipo* $\gamma \to \alpha$ *e* z *è di tipo* γ

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x : \alpha \to \beta \vdash x : \alpha \to \beta \qquad \cfrac{y : \gamma \to a \vdash y : \gamma \to \alpha \qquad z : \gamma \vdash z : \gamma}{y : \gamma \to \alpha, z : \gamma \vdash yz : \alpha} \to E}{x : \alpha \to \beta, y : \gamma \to \alpha, z : \gamma \vdash x(yz) : \beta} \to E}{x : \alpha \to \beta, y : \gamma \to \alpha \vdash \lambda z.x(yz) : \gamma \to \beta} \to I}{x : \alpha \to \beta \vdash \lambda yz.x(yz) : (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \beta} \to I}{\vdash \lambda xyz.x(yz) : (\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \beta} \to I$$

Osservazione 1.3.3. *Non esiste un tipo* α *tale che* $\vdash_{TA_\lambda} \lambda x.xx : \alpha$*. Infatti, supponiamo che* $\vdash_{TA_\lambda} \lambda x.xx : \alpha$*. Allora esiste una* TA_λ*-dimostrazione con conclusione* $\vdash \lambda x.xx : \alpha$ *che termina con un'istanza di* $\to I$*.*

$$\cfrac{\begin{array}{c}\dots\\ \Gamma \vdash xx : \beta\end{array}}{\vdash \lambda x.xx : \delta \to \beta} \to I$$

Allora è chiaro che $\alpha = \delta \to \beta$ *e che* $\Gamma = x : \delta$ *oppure* Γ *è il contesto vuoto. La* TA_λ*-dimostrazione di* $\vdash \lambda x.xx : \alpha$ *dovrà quindi terminare nel seguente modo*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma_1 \vdash x : \epsilon \to \beta} \qquad \dfrac{\dots}{\Gamma_2 \vdash x : \epsilon}}{\Gamma \vdash xx : \beta} \to E}{\vdash \lambda x.xx : \delta \to \beta} \to I$$

con Γ_i *uguale alla lista vuota oppure* $\Gamma_i = x : \delta$*, per* $i = 1, 2$*. D'altra parte, per le osservazioni precedenti,* $\Gamma_1 = x : \epsilon \to \beta$ *mentre* $\Gamma_2 = x : \epsilon$*; segue necessariamente che* $\delta = \epsilon \to \beta$ *e* $\delta = \epsilon$*, da cui abbiamo* $\epsilon = \epsilon \to \beta$*, assurdo!.*

Definizione 1.3.1. *Introduciamo ora la definizione di* ***diagramma di costruzione*** *di un* λ*-termine puro* t*, che ci permetterà di formulare una proprietà importante delle* TA_λ*-deduzioni.*
Procediamo per induzione sulla complessità di t*:*

· *Il diagramma di una variabile* x *è*

$$x$$

· *Se* q *e* u *sono* λ*-termini puri con diagramma di costruzione* $\mathcal{D}_q$ *e* $\mathcal{D}_u$*, allora* qu *ha il seguente diagramma di costruzione*

$$\dfrac{\mathcal{D}_q \qquad \mathcal{D}_u}{qu}$$

· *Se* t *è un termine di tipo* $\lambda x.t$ *e* $\mathcal{D}$ *è il diagramma di costruzione di* t*, allora il diagramma di costruzione di* t *è dato da*

$$\dfrac{D}{\lambda x.t}$$

Esempio 1.3.4. *Il diagramma di costruzione di* $(\lambda x.xy)(x\lambda y.z)\lambda wx.y$ *è*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \quad y}{xy}}{\lambda x.xy} \qquad \dfrac{x \qquad \dfrac{z}{\lambda y.z}}{x\lambda y.z}}{(\lambda x.xy)(x\lambda y.z)} \qquad \dfrac{\dfrac{y}{\lambda x.y}}{\lambda wx.y}}{(\lambda x.xy)(x\lambda y.z)\lambda wx.y}$$

Proposizione 1.3.2. *Sia* $\mathcal{D}$ *una* TA_λ*-dimostrazione con conclusione* $\Gamma \vdash t : \alpha$*; allora, se dal diagramma* $\mathcal{D}$ *rimuoviamo ogni cosa, tranne le barre orizzontali e i soggetti delle formule (ricordiamo che il soggetto di una formula* $\Delta \vdash u : \beta$ *è* u*), ciò che otteniamo è il diagramma di costruzione di* t*.*

Dimostrazione. Una semplice induzione sull'altezza delle dimostrazioni. □

Proposizione 1.3.3 (Unicità delle TA_λ-dimostrazioni in forma normale)**.** *Sia t un λ-termine puro in forma β-normale; sia $\mathcal{D}$ una TA_λ-dimostrazione con conclusione $\Gamma \vdash t : \alpha$. Allora*

- *Ogni tipo che compare in $\mathcal{D}$ ha un atomo in comune con α o con qualche tipo che compare in Γ.*
- *$\mathcal{D}$ è l'unica TA_λ-dimostrazione con conclusione $\Gamma \vdash t : \alpha$.*

sketch. Induzione sulla complessità di t. I casi $t = y$ e $t = \lambda x.q$, per opportuni $x \in V$ e $q \in \Lambda_\varnothing$ sono semplici.
Supponiamo che $t = pq$, per opportuni $p, q \in \Lambda_\varnothing$; allora, per il lemma di struttura dei λ-termini β-normali, si deve avere $t = yu_1 \dots u_n$, per opportuni $y \in V$ e $u_1, \dots, u_n \in \Lambda_\varnothing$ β-normali.
Segue facilmente che $\mathcal{D}$ deve essere fatta così:

- $\gamma_1 := \beta_1 \to \dots \to \beta_n \to \alpha$
- $\gamma_2 := \beta_2 \to \dots \to \beta_n \to \alpha$
- $\dots$
- $\gamma_n := \beta_n \to \alpha$
- $\star \equiv \to E$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{y : \gamma_1 \vdash y : \gamma_1 \qquad \overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma_1 \vdash u_1 : \beta_1}}{y : \gamma_1, \Gamma_1 \vdash yu_1 : \gamma_2}\,\star \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma_2 \vdash u_2 : \beta_2}}{\dots}\,\star \qquad \dots}{y : \gamma_1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1} \vdash yu_1 \dots u_{n-1} : \gamma_n}\,\star \qquad \overset{\mathcal{D}_n}{\Gamma_n \vdash u_n : \beta_n}}{y : \gamma_1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash t : \alpha}\,\star$$

- $\Gamma = y : \gamma_1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash t : \alpha$

per opportuni tipi β_1, ..., β_n

Ora:
(1) Usando l'ipotesi induttiva applicata al primo punto da dimostrare, abbiamo che ogni tipo che compare in $\mathcal{D}_i$ ha un atomo in comune con β_i (e quindi con γ_1) o con qualche tipo che compare in Γ_i; ciò implica che ogni tipo che compare in Γ_i ha un atomo in comune con qualche tipo che compare in Γ.

È inoltre è chiaro che i tipi delle formule $y : \gamma_1,\, \Gamma_1,\, \dots,\, \Gamma_i \vdash yu_1 \dots u_i : \gamma_{i+1}$ hanno un atomo in comune con α o con qualche tipo che compare in Γ; ciò conclude il primo punto.
(2) Sia $\mathcal{C}$ un'altra dimostrazione di conclusione $\Gamma \vdash t : \alpha$; allora deve avere la stessa forma di $\mathcal{D}$, cioè:

- $\delta_1 := \eta_1 \to \cdots \to \eta_n \to \alpha$
- $\delta_2 := \eta_2 \to \cdots \to \eta_n \to \alpha$
- $\dots$
- $\delta_n := \eta_n \to \alpha$
- $\star \equiv \to E$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : \delta_1 \vdash y : \delta_1 \qquad \overset{\mathcal{C}_1}{\Delta_1 \vdash u_1 : \eta_1}}{y : \delta_1, \Delta_1 \vdash yu_1 : \delta_2}\,\star \qquad \overset{\mathcal{C}_2}{\Delta_2 \vdash u_2 : \eta_2}}{\cdots}\,\star \qquad \cdots}{y : \delta_1, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} \vdash yu_1 \dots u_{n-1} : \delta_n}\,\star \qquad \overset{\mathcal{C}_n}{\Delta_n \vdash u_n : \eta_n}}{y : \delta_1, \Delta_1, \dots, \Delta_n \vdash t : \alpha}\,\star$$

- $\Gamma = \Delta = y : \delta_1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$

per opportuni $\eta_1, \dots, \eta_n$

Il tipo assegnato a y è determinato da Γ, dunque $\gamma_1 = \delta_1$, da cui segue che $\beta_i = \eta_i$ per ogni i. Inoltre, dato che $dom(\Delta_i) = VL(u_i) = dom(\Gamma_i)$ e che $y : \delta_1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n = \Gamma = \Delta = y : \delta_1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$, si ha $\Delta_i = \Gamma_i$ per ogni i. Fatte queste considerazioni, per ipotesi induttiva abbiamo che $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i$ per ogni i, il che ci permette di concludere.

$\square$

Capitolo 2

Ordini, reticoli e filtri

2.1 Ordini parziali

Definizione 2.1.1. *Un* ***ordine parziale*** *è una coppia* $H = (A, \leq)$ *dove* A *è un insieme e* $\leq$ *è una relazione binaria su* A *che soddisfa le seguenti proprietà:*

- $a \leq a$ *per ogni* $a \in A$ *(riflessività)*
- *Se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *allora* $a \leq c$*, per ogni* $a, b, c \in A$ *(transitività)*
- *Se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$ *allora* $a = b$*, per ogni* $a, b \in A$ *(antisimmetria)*

Si osservi che se $D \subseteq A$, allora $(D, \leq)$ è anch'esso un ordine parziale, detto "restrizione" di H a D.
Diamo le seguenti definizioni:

- Un **massimo** di H è un elemento $c \in A$ tale che $a \leq c$ per ogni $a \in A$.
- Un **minimo** di H è un elemento $c \in A$ tale che $c \leq a$ per ogni $a \in A$.
- Un **elemento massimale** di H è un elemento c tale che, se $c \leq a$, allora $c = a$, per ogni $a \in A$.
- Un **elemento minimale** di H è un elemento $c \in A$ tale che, se $a \leq c$, allora $c = a$, per ogni $a \in A$.
- Se $D \subseteq A$, un **maggiorante** di D in H è un elemento $c \in A$ tale che $d \leq c$ per ogni $d \in D$.
- Se $D \subseteq A$, un **minorante** di D in H è un elemento $c \in A$ tale che $c \leq d$ per ogni $d \in A$.

Se $D \subseteq A$, indichiamo con $Mag(D)_H$ l'ordine parziale ottenuto per restrizione di H all'insieme dei maggioranti di D in H; analogamente indichiamo con $Min(D)_H$ l'ordine parziale ottenuto per restrizione di H all'insieme dei minoranti di D in H. Diamo le seguenti ulteriori definizioni:

· Se $D \subseteq A$, un **estremo superiore** (sup) di D in H è un minimo di $Mag(D)_H$.

· Se $D \subseteq A$, un **estremo inferiore** (inf) di D in H è un massimo di $Min(D)_H$.

Proposizione 2.1.1. *In un ordine parziale $H = (A, \leq)$, massimi, minimi, estremi superiori e estremi inferiori, se esistono, sono unici.*

Dimostrazione.

Siano $c, d \in A$ due massimi di H. Allora $c \leq d$ e $d \leq c$, da cui -per antisimmetria- si ha $c = d$. Analogamente si procede con i minimi.

Sia $D \subseteq A$ e siano $c, d \in A$ due estremi superiori di D in H. Allora c, d sono entrambi minimi di $Mag(D)_H$ e dunque, per il punto precedente, $c = d$. Si procede analogamente con gli estremi inferiori. $\square$

Se $H = (A, \leq)$ è un ordine parziale, chiamo **catena** di H ogni sottoinsieme D di A tale che, per ogni $a, b \in D$, si ha $a \leq b$ o $b \leq a$.
Presentiamo ora l'enunciato del **lemma di Zorn**, un teorema equivalente (in ZF) all'assioma della scelta e quindi, come quest'ultimo, indipendente dagli assiomi di ZF.

Teorema 2.1.1 (Lemma di Zorn)**.** *Se un ordine parziale H è tale che ogni sua catena D ha un maggiorante in H, allora H ha almeno un elemento massimale.*

Definizione 2.1.2. *Se $H_1 = (A_1, \leq_1)$ e $H_2 = (A_2, \leq_2)$ sono due ordini parziali, un* ***omomorfismo d'ordine*** *di H_1 in H_2 è una funzione ϕ di A_1 in A_2 tale che $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$, per ogni $a \leq_1 b$ (in altri termini: ϕ è una funzione monotona di H_1 in H_2).*

Definizione 2.1.3. *Siano $H_1 = (A_1, \leq_1)$ e $H_2 = (A_2, \leq_2)$ due ordini parziali. Un* ***isomorfismo d'ordine*** *di H_1 in H_2 è un omomorfismo d'ordine ϕ di H_1 in H_2 per cui esiste un omomorfismo d'ordine ψ di H_2 in H_1 tale che $\psi \circ \phi = id_{A_1}$ $\phi \circ \psi = id_{A_2}$.*

Osservazione 2.1.1. *Dalla definizione segue immediatamente che un tale isomorfismo ϕ, se esiste, deve essere una funzione biiettiva di inversa proprio ψ e che, di conseguenza, ψ deve essere unica ($\psi = \phi^{-1}$) e biiettiva.*

Definizione 2.1.4. *Siano $H_1 = (A_1, \leq_1)$ e $H_2 = (A_2, \leq_2)$ due ordini parziali. Una* ***immersione d'ordine*** *di H_1 in H_2 è una funzione ϕ da A_1 in A_2 tale che $a \leq_1 b$ se e solo se $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$, per ogni $a, b \in A_1$.*

Le immersioni d'ordine sono particolari omomorfismi d'ordine, come segue chiaramente dalla definizione.

Proposizione 2.1.2. *Le immersioni d'ordine sono funzioni iniettive*

Dimostrazione. Siano $H_1 = (A_1, \leq_1)$ e $H_2 = (A_2, \leq_2)$ due ordini parziali e ϕ un'immersione d'ordine di H_1 in H_2; siano $a, b \in A_1$; allora $\phi(a) = \phi(b)$ implica $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$ (per riflessività), implica $a \leq_1 b$; d'altra parte $\phi(a) = \phi(b)$ implica $\phi(b) \leq_2 \phi(a)$, implica $b \leq_1 a$; dunque, grazie alla proprietà antisimmetrica di $\leq_1$, concludiamo che $\phi(a) = \phi(b)$ implica $a = b$ □

Proposizione 2.1.3. *Siano $H_1 = (A_1, \leq_1)$ e $H_2 = (A_2, \leq_2)$ due ordini parziali e ϕ una funzione da A_1 in A_2; allora ϕ è un isomorfismo d'ordine da H_1 in H_2 se e solo se valgono entrambe le seguenti proprietà*

- *ϕ è un'immersione d'ordine di H_1 in H_2*
- *ϕ è una funzione suriettiva da A_1 in A_2*

Dimostrazione. Supponiamo che ϕ sia un isomorfismo d'ordine. Allora sappiamo che ϕ è una funzione monotona (per definizione), biiettiva (Oss. 2.1.1) e che la sua funzione inversa ϕ^{-1} è anch'essa monotona (dato che essa è proprio l'omomorfismo d'ordine inverso di ϕ, per l'Oss. 2.1.1). Dunque $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$ implica $\phi^{-1}(\phi(a)) \leq_1 \phi^{-1}(\phi(b))$, implica $a \leq_1 b$. Ciò conclude il primo verso della dimostrazione.
Viceversa, supponiamo che valgano le due proprietà. Dato che ϕ è un'immersione, ϕ è iniettiva; ma, per ipotesi, ϕ è pure suriettiva. Dunque ϕ è biiettiva e pertanto ha un'inversa ϕ^{-1}; per concludere ci basta dimostrare che ϕ^{-1} è monotona. Siano $a, b \in A_2$ e $a \leq_2 b$; allora, chiaramente, $\phi(\phi^{-1}(a)) \leq_2 \phi(\phi^{-1}(b))$, dato che $\phi(\phi^{-1}(a)) = a$ e $\phi(\phi^{-1}(b)) = b$. Ma, grazie alla proprietà di immersione di ϕ, da quest'ultima segue che $\phi^{-1}(a) \leq_2 \phi^{-1}(b)$, quanto si voleva dimostrare. □

Definizione 2.1.5. *Una coppia $H = (A, \leq)$ che soddisfa tutti gli assiomi della definizione di ordine parziale tranne l'antisimmetria di $\leq$ è detta* ***pre-ordine****. Gli omomorfismi tra pre-ordini sono definiti in modo del tutto analogo agli omomorfismi tra ordini.*

Definizione 2.1.6. *Si osservi che, dato un pre-ordine $H = (A, \leq)$, si può definire su A la seguente relazione $\sim_H$:*

$$a \sim_H b \textit{ se e solo se } a \leq b \textit{ e } b \leq a$$

Si verifica facilmente che $\sim_H$ è una relazione di equivalenza (cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva)

Definizione 2.1.7. *Sia $H = (A, \leq)$ un pre-ordine. Indichiamo con $[A]_{\sim_H}$ l'insieme delle classi di equivalenza di A rispetto alla relazione $\sim_H$; indichiamo con $[\leq]_{\sim_H}$ la relazione su $[A]_{\sim_H}$ definita ponendo*

$$[a]_{\sim_H} \ [\leq]_{\sim_H} \ [b]_{\sim_H} \textit{ se e solo se } a \leq b, \textit{ per ogni } a, b \in A$$

È facile verificare che tale relazione è ben definita; inoltre essa è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Definizione 2.1.8. *Se $H = (A, \leq)$ è un ordine parziale, indichiamo con $[H]$ la coppia $([A]_{\sim_H}, [\leq]_{\sim_H})$.*

Per quanto appena osservato, $[H]$ risulta essere un ben definito ordine parziale.
Si noti che, se $H = (A, \leq)$ è un ordine parziale, allora l'assegnazione $a \mapsto [a]_{\sim_H} = \{a\}$ determina un isomorfismo di ordini da H in $[H]$.

Osservazione 2.1.2. *Si osservi che, se f è un omomorfismo di pre-ordini, da $H = (A, \leq_1)$ in $K = (B, \leq_2)$, e se poniamo $\overline{f}([a]_{\sim_H}) := [f(a)]_{\sim_K}$ per ogni $[a]_{\sim_H} \in [A]_{\sim_H}$, allora $\overline{f}$ è un ben definito omomorfismo di ordini, da $[H]$ in $[K]$, detto* ***quoziente*** *(o* ***riflessione a ordine parziale****) di f.*

2.2 Reticoli

Definizione 2.2.1. *Un* ***reticolo*** *è una quadrupla $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$, dove:*

- *$(A, \leq)$ è un ordine parziale (detto 'ordine parziale soggiacente ad H')*
- *$\wedge$ è una funzione da $A \times A$ in A che associa a ogni coppia ordinata (a, b) un inf $a \wedge b$ di $\{a, b\}$ in $(A, \leq)$; ovvero, valgono le seguenti proprietà:*
  - *$a \wedge b \leq a$*
  - *$a \wedge b \leq b$*
  - *Se $c \leq a$ e $c \leq b$ allora $c \leq a \wedge b$*

  per ogni $a, b, c \in A$
- *$\vee$ è una funzione da $A \times A$ in A che associa a ogni coppia ordinata (a, b) un sup $a \vee b$ di $\{a, b\}$ in $(A, \leq)$; ovvero, valgono le seguenti proprietà:*

- $a \leq a \vee b$
- $b \leq a \vee b$
- *Se* $a \leq c$ *e* $b \leq c$ *allora* $a \vee b \leq c$

Definiamo l'inf e il sup di una coppia ordinata (a, b) rispettivamente come l'inf e il sup dell'insieme $\{a, b\}$, così che possiamo più brevemente dire che le funzioni $\wedge$ e $\vee$ sono funzioni da $A \times A$ in A che forniscono, rispettivamente, gli inf e i sup delle coppie ordinate.
Da quanto visto a proposito degli ordini parziali, risulta chiaro che $\wedge$ e $\vee$ sono *unici* (se $\wedge_1$ rispetta le proprietà di $\wedge$ nella definizione, allora $\wedge_1 = \wedge$, etc.)
Dalla definizione si deducono immediatamente le seguenti proprietà:

· *Leggi commutative*

- $a \wedge b = b \wedge a$
- $a \vee b = b \vee a$

per ogni $a, b \in A$.
Si osservi che $a \wedge b = a$ se e solo se $a \leq b$; infatti se $a \wedge b = a$ allora $a \leq b$, per le proprietà degli inf; viceversa: se $a \leq b$, dato che per riflessività si ha pure $a \leq a$, allora $a \leq a \wedge b$; ma, essendo d'altra parte $a \wedge b \leq a$, per antisimmetria segue $a \wedge b = a$.
Analogamente si dimostra che $a \vee b = a$ se e solo se $b \leq a$.
Da quanto detto discende, in particolare, che $a \wedge a = a$ e $a \vee a = a$.
Altro facile esercizio: se $a \leq a'$ e $b \leq b'$, allora $a \vee b \leq a' \vee b'$ e $a \wedge b \leq a' \wedge b'$.
Si noti inoltre che valgono le seguenti proprietà:

· *Leggi associative*

- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

· *Leggi distributive*

- $(a \wedge b) \wedge c = (a \wedge c) \wedge (b \wedge c)$
- $(a \vee b) \vee c = (a \vee c) \vee (b \vee c)$

per ogni $a, b, c \in A$. La verifica di tali leggi è una semplice applicazione delle definizioni di $\wedge$ e $\vee$.
Poniamo

· $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n+1} := (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \wedge a_{n+1}$

· $a_1 \vee \cdots \vee a_{n+1} := (a_1 \vee \cdots \vee a_n) \vee a_{n+1}$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$.
Facendo induzione a partire dalle leggi commutative, associative e distributive, si dimostra facilmente che:

· $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = a_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge a_{\sigma(n)}$

· $a_1 \vee \ldots \vee a_n = a_{\sigma(1)} \vee \ldots \vee a_{\sigma(n)}$

· $(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \wedge a_{n+1} = a_1 \wedge (a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n+1})$

· $(a_1 \vee \cdots \vee a_n) \vee a_{n+1} = a_1 \vee (a_2 \vee \cdots \vee a_{n+1})$

· $(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \wedge b = (a_1 \wedge b) \wedge \ldots \wedge (a_n \wedge b)$

· $(a_1 \vee \cdots \vee a_n) \vee b = (a_1 \vee b) \vee \ldots \vee (a_n \vee b)$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a_1, \ldots, a_{n+1}, b \in A$, e per ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, n\}$.
Anche le altre proprietà incontrate si estendo facilmente per mezzo di una semplice induzione; ad esempio:

· $a \wedge \cdots \wedge a = a$

· $a \vee \cdots \vee a = a$

· $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = a_i$ se e solo se $a_i \leq a_j$ per ogni $j \in I$.

· $a_1 \vee \cdots \vee a_n = a_i$ se e solo se $a_j \leq a_i$ per ogni $j \in I$.

· Se $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$, allora $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq b_1 \wedge \cdots \wedge b_n$

· Se $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$, allora $a_1 \vee \cdots \vee a_n \leq b_1 \vee \cdots \vee b_n$

Osservazione 2.2.1.

Si osservi che $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ *è l'estremo inferiore di* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *in* $(A, \leq)$, *per ogni* n*-upla di elementi* $a_1, \ldots, a_n \in A$, *con* $n \geq 2$. *Infatti*

· *Il caso* $n = 2$ *è immediato*

· *Per ipotesi induttiva* $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq a_1, \ldots, a_n$; *dunque* $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n+1} = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \wedge a_{n+1} \leq a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$

- *Se* $b \leq a_1, \dots, b \leq a_{n+1}$ *allora, per ipotesi induttiva,* $b \leq a_1 \wedge \dots \wedge a_n$*; ma da* $b \leq a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ *e* $b \leq a_{n+1}$ *segue che* $b \leq (a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \wedge a_{n+1} = a \wedge \dots \wedge a_{n+1}$

In modo analogo si dimostra che $a_1 \vee \dots \vee a_n$ *è l'estremo superiore di* $\{a_1, \dots, a_n\}$ *in* H*.*

Queste osservazioni ci permettono di dimostrare molte delle proprietà appena viste (e le altre che vedremo) tramite le proprietà degli estremi inferiori e superiori; ad esempio, l'uguaglianza $a \wedge \dots \wedge a = a$ *può essere vista come una semplice conseguenza del fatto che l'estremo inferiore di un singoletto* $\{a\}$ *è* a*.*

Osservazione 2.2.2 (subdistributività di $\wedge$ con $\vee$)**.** *È semplice constatare che in ogni reticolo* $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$ *valgono le seguenti disuguaglianze:*

- $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ *per ogni* $a, b, c \in A$
- $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *per ogni* $a, b, c \in A$

Proposizione 2.2.1 (dualità della distributività di $\wedge$ con $\vee$)**.** *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$ *un reticolo. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *per ogni* $a, b, c \in A$
- (2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *per ogni* $a, b, c \in A$

Dimostrazione.

- (2) implica (1): Applicando due volte la (2), l'elemento $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ risulta uguale a $(a \vee a) \wedge (b \vee a) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$; ciò permette di concludere, perché $a = (a \wedge a) \wedge (b \vee a) \wedge (a \vee c)$
- (1) implica (2): si procede in modo analogo alla precedente implicazione.

□

Definizione 2.2.2. *Se* $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$ *è un reticolo, definiamo* ***sottoreticolo*** *di* H *ogni quadrupla* $H' = (A', \leq, \wedge, \vee)$ *che rispetti le seguenti proprietà*

- $A' \subseteq A$
- $a \wedge b \in A'$ *per ogni* $a, b \in A'$
- $a \vee b \in A'$ *per ogni* $a, b \in A'$

Si verifica immediatamente che ogni sottoreticolo è un reticolo.

2.3 Filtri

Definizione 2.3.1. *Un **filtro** di un reticolo $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$ è un sottoinsieme Σ di A con le seguenti proprietà:*

- $\cdot$ (0) $\Sigma \neq \varnothing$
- $\cdot$ (1) *Se $a \in \Sigma$ e $a \leq b$, allora $b \in \Sigma$*
- $\cdot$ (2) *$a, b \in \Sigma$ implica $a \wedge b \in \Sigma$*

per ogni $a, b \in A$.

Osservazione 2.3.1. *Si osservi che se restringiamo il reticolo H al filtro Σ otteniamo un sottoreticolo di H. Infatti, se $a, b \in \Sigma$, allora $a \vee b \in \Sigma$, dato che $a \leq a \vee b$.*

Osservazione 2.3.2. *Se $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$ è un reticolo, a un massimo di H (ovvero: un massimo di $(A, \leq)$) e Σ un filtro di H, allora $a \in \Sigma$; infatti $\Sigma \neq \varnothing$ - per la proprietà (0) della Def. 2.3.1 - dunque esiste $b \in A$ tale che $b \in \Sigma$; ma $b \leq a$ e pertanto $a \in \Sigma$ - per la proprietà (1) della Def. 2.3.1.*

Definizione 2.3.2. *Dato un reticolo $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$ e un sottoinsieme $D \neq \varnothing$ di A, poniamo*

$$\langle D \rangle_H^{filter} := \{a \in A : d_1 \wedge \cdots \wedge d_n \leq a \text{ per qualche } d_1, \ldots, d_n \in D\}.$$

Ometteremo generalmente il pedice H, quando ciò non darà ambiguità.

Proposizione 2.3.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee)$ un reticolo e $\varnothing \neq D \subseteq A$. Allora $\langle D \rangle^{filter}$ è il più piccolo filtro di H contenente D come sottoinsieme.*

Dimostrazione.

- $\langle D \rangle^{filter} \neq \varnothing$ perché $\varnothing \neq D \subseteq \langle D \rangle^{filter}$.

- Se $a \in \langle D \rangle^{filter}$, $b \in A$ e $a \leq b$, allora $d_1 \wedge \cdots \wedge d_n \leq a \leq b$ per qualche $d_1, \ldots, d_n \in D$; essendo $\leq$ transitiva, da ciò segue $d_1 \wedge \cdots \wedge d_n \leq b$, e dunque $b \in \langle D \rangle^{filter}$.

- Se $a, b \in \langle D \rangle^{filter}$, allora $d_1 \wedge \cdots \wedge d_n \leq a$ e $d_{n+1} \wedge \cdots \wedge d_m \leq b$ - per qualche $d_1, \ldots, d_m \in \langle D \rangle^{filter}$ - e dunque $d_1 \wedge \cdots \wedge d_m \leq a \wedge b$, da cui $a \wedge b \in \langle D \rangle^{filter}$.

- Sia $D \subseteq \Sigma \subseteq A$ e supponiamo che Σ sia un filtro di H. Sia $a \in \langle D \rangle^{filter}$; allora $d_1 \wedge \cdots \wedge d_n \leq a$ per qualche $d_1, \ldots, d_n \in D$; ma $d_1 \wedge \cdots \wedge d_n \in \Sigma$ (perché Σ è chiuso rispetto agli inf finiti) e dunque $a \in \Sigma$. □

Il filtro $\Sigma := \langle D \rangle^{filter}$ è detto filtro **generato** da D, e D è detto insieme (o base) di **generatori** di Σ. Diciamo **filtro principale** ogni filtro generato da un singoletto. Ovviamente ogni filtro ammette una base di generatori: il filtro stesso!

2.4 Reticoli limitati

Definizione 2.4.1. *Un* ***reticolo limitato*** *è una sestupla* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$*, dove*

- $(A, \leq, \wedge, \vee)$ *è un reticolo*
- $\perp$ *è un minimo di* $(A, \leq)$
- $\top$ *è un massimo di* $(A, \leq)$

$(A, \leq)$ *è detto ordine soggiacente a* H*.*
$(A, \leq, \wedge, \vee)$ *è detto reticolo soggiacente a* H*.*

Per quanto visto a proposito degli ordini parziali, $\perp$ e $\top$ sono *unici.*
Di facile verifica sono le seguenti proprietà:

- $a \wedge \perp = \perp \wedge a = \perp$
- $a \vee \top = \top \vee a = \top$
- $a \wedge b = \top$ se e solo se $a, b = \top$
- $a \vee b = \perp$ se e solo se $a, b = \perp$
- $a \wedge \top = \top \wedge a = a$
- $a \vee \perp = \perp \vee a = a$

per ogni $a, b \in A$.
Queste proprietà hanno una naturale generalizzazione induttiva:

- $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = \perp$ se e solo se $a_i = \perp$ per qualche $i \in \{1, \ldots, n\}$
- $a_1 \vee \cdots \vee a_n = \top$ se e solo se $a_i = \top$ per qualche $i \in \{1, \ldots, n\}$
- $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = \top$ se e solo se $a_1, \ldots, a_n = \top$
- $a_1 \vee \cdots \vee a_n = \perp$ se e solo se $a_1, \ldots, a_n = \perp$
- Se $a_i = \top$, allora $a_1 \wedge \ldots \wedge a_i \wedge \ldots \wedge a_n = a_1 \wedge \ldots \wedge \cancel{a_i} \wedge \ldots \wedge a_n$
- Se $a_i = \perp$, allora $a_1 \vee \ldots \vee a_i \vee \ldots \vee a_n = a_1 \vee \ldots \vee \cancel{a_i} \vee \ldots \vee a_n$

Com'è naturale, se H è un reticolo limitato, chiamiamo *filtri* di H i filtri del reticolo soggiacente ad H (Def. 2.3.1).

Osservazione 2.4.1. *Banalmente, se* $H = (A, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è un reticolo limitato,* A *è il più grande dei filtri di* H*.*

Osservazione 2.4.2. *Si osservi che i filtri di un reticolo limitato* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *contengono sempre il massimo* $\top$ *(per l'Oss. 2.3.2). Da ciò segue facilmente che* $\{\top\}$ *è il più piccolo filtro di* H*, contenuto in ogni altro filtro di* H*.*

Proposizione 2.4.1. *In un reticolo limitato l'intersezione arbitraria di filtri è un filtro*

Dimostrazione. Sia I un insieme e $(\Sigma_i)_{i\in I}$ una famiglia di filtri di un reticolo limitato $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$.

- $\cap_{i\in I}(\Sigma_i) \neq \varnothing$ perché $\top \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$.
- Se $a \in \cap_{i\in I}(\Sigma_i)$ e $a \leq b$, allora $a \in \Sigma_i$ e $a \leq b$, per ogni $i \in I$, da cui $b \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$, e quindi $b \in \cap_{i\in I}(\Sigma_i)$
- Se $a, b \in \cap_{i\in I}(\Sigma_i)$, allora $a, b \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$; dunque $a \wedge b \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$, da cui $a \wedge b \in \cap_{i\in I}(\Sigma_i)$.

□

Osservazione 2.4.3. *Abbiamo visto che* $\{\top\}$ *è il più piccolo filtro di* $H = (A, \wedge, \vee, \perp, \top)$*, nel senso dell'inclusione (Oss. 2.4.2); dato che, grazie alla Prop. 2.4.1, tale proprietà è posseduta anche dall'insieme formato dall'intersezione di tutti i filtri di* H*, allora, per l'antisimmetria di* $\subseteq$*, abbiamo che* $\{\top\}$ *è l'intersezione di tutti i filtri di* H*.*

Definizione 2.4.2. *Se* $H = (A, \leq, \wedge, \perp, \top)$ *è un reticolo limitato, poniamo* $\langle\varnothing\rangle_H^{filter} := \{\top\}$*, estendendo così la Def. 2.3.2.*

Osservazione 2.4.4. *Grazie alla Prop. 2.4.1, se* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è un reticolo limitato, allora* $\cap(\{\Sigma : \Sigma$ *è un filtro* H *e* $D \subseteq \Sigma\})$ *è il più piccolo filtro di* H *contenente* D*, e dunque coincide con* $\langle D\rangle^{filter}$ *(Def. 2.3.2).*

Definizione 2.4.3. *Siano* $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1)$ *e* $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2)$ *due reticoli limitati; chiamiamo* ***omomorfismo di reticoli limitati*** *da* H_1 *in* H_2 *ogni funzione* ϕ *da* A_1 *in* A_2 *con le seguenti proprietà:*

- $a \leq_1 b$ *implica* $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$
- $\phi(a \wedge_1 b) = \phi(a) \wedge_2 \phi(b)$
- $\phi(a \vee_1 b) = \phi(a) \vee_2 \phi(b)$

· $\phi(\bot_1) = \bot_2$

· $\phi(\top_1) = \top_2$

per ogni $a, b \in A_1$.

Definizione 2.4.4. *Chiamiamo* ***kernel*** *di* ϕ *(in simboli:* $Ker(\phi)$*) l'insieme degli elementi* $a \in A_1$ *tali che* $\phi(a) = \top_2$.

Proposizione 2.4.2. *I kernel di omomorfismi di reticoli limitati sono filtri.*

Dimostrazione. Siano $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \bot_1, \top_1)$ e $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \bot_2, \top_2)$ due reticoli limitati e ϕ un omomorfismo di reticoli limitati da H_1 in H_2. Allora

· $Ker(\phi) \neq \varnothing$, perché $\top_1 \in Ker(\phi)$, in quanto $\phi(\top_1) = \top_2$ per definizione di omomorfismo di reticoli limitati.

· Se $a, b \in Ker(\phi)$, allora $\phi(a \wedge_1 b) = \phi(a) \wedge_2 \phi(b) = \top_2 \wedge_2 \top_2 = \top_2$, e dunque $a \wedge_1 b \in Ker(\phi)$

· Se $a \in Ker(\phi)$ e $a \leq_1 b$, allora $\top_2 = \phi(a) \leq_2 \phi(b)$ (per la monotonia di ϕ), da cui $\phi(b) = \top_2$, e quindi $b \in Ker(\phi)$

□

2.5 Reticoli completi

Definizione 2.5.1. *Un* ***reticolo completo*** *è un reticolo limitato* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top)$ *tale che, per ogni* $D \subseteq A$*, esistono un estremo inferiore* $\wedge(D)$ *e un estremo superiore* $\vee(D)$ *di* D *in* $(A, \leq)$*; ovvero* $\wedge(D)$ *e* $\vee(D)$ *sono due elementi di* A *con le seguenti proprietà:*

· $\wedge(D) \leq d$ *per ogni* $d \in D$

· $c \leq d$ *per ogni* $d \in D$ *implica* $c \leq \wedge(D)$

· $d \leq \vee(D)$ *per ogni* $d \in D$

· $d \leq c$ *per ogni* $d \in D$ *implica* $\vee(D) \leq c$

Per quanto visto nel paragrafo relativo agli ordini parziali, l'estremo inferiore e l'estremo superiore sono unici.
Si osservi che $\top = \vee(A) = \wedge(\varnothing)$ e $\bot = \wedge(A) = \vee(\varnothing)$.
Useremo l'espressione 'inf arbitrari' e 'sup arbitrari' per riferirci agli estremi inferiori e superiori dei sottoinsiemi di un reticolo completo; con '$\wedge$ arbitrario' e '$\vee$ arbitrario' indicheremo, rispettivamente, le funzioni che forniscono gli inf arbitrari e i sup arbitrari dei sottoinsiemi di un reticolo completo.

Osservazione 2.5.1. *Sia $D \subseteq A$ e poniamo $D' := \{a \in A : d \leq a$ per ogni $d \in D\}$; allora $\vee(D) = \wedge(D')$; infatti:*

- *$d \in D$ implica $d \leq a$ per ogni $a \in D'$, implica $d \leq \wedge(D')$*
- *$a \in D'$ implica $d \leq a$ per ogni $d \in D$, implica $\vee(D) \leq a$*

Ovviamente, utilizzando le notazioni già introdotte nel paragrafo relativo ai reticoli limitati, se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $a_1, \ldots\ a_n \in A$, allora $\wedge(\{a_1, \ldots, a_n\}) = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ e $\vee(\{a_1, \ldots, a_n\}) = a_1 \vee \cdots \vee a_n$.
È immediato verificare la seguente

Proposizione 2.5.1. *Sia $(A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ un reticolo completo. Sia $\Delta \subseteq \mathcal{P}(A)$. Allora*

- $\wedge(\cup(\Delta)) = \wedge(\{\wedge(D) : D \in \Delta\})$
- $\vee(\cup(\Delta)) = \vee(\{\vee(D) : D \in \Delta\})$

Osservazione 2.5.2 (distributività di $\vee/\wedge$ arbitrario con $\vee/\wedge$)**.**
Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ un reticolo completo, D un sottoinsieme di A e a un elemento di A; le seguenti uguaglianze sono di facile verifica:

- $\vee(\{d \vee a : d \in D\}) = \vee(D) \vee a$
- $\wedge(\{d \wedge a : d \in D\}) = \wedge(D) \wedge a$

Osservazione 2.5.3 (subdistributività di $\vee/\wedge$ arbitrario con $\wedge/\vee$)**.**
Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ un reticolo completo, D un sottoinsieme di A e a un elemento di A; allora, come semplice conseguenza delle definizioni, valgono la seguenti disuguaglianze

- $\vee(\{d \wedge a : d \in D\}) \leq \vee(D) \wedge a$
- $\wedge(D) \vee a \leq \wedge(\{d \vee a : d \in D\})$

Definizione 2.5.2. *Se $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ è un reticolo completo, I un insieme e $(a_i)_{i \in I}$ una famiglia di elementi a indici in I, poniamo $\wedge_{i \in I}(a_i) := \wedge(\{a_i : i \in I\})$ e $\vee_{i \in I}(a_i) := \vee(\{a_i : i \in I\})$.*
Con questa definizione (e un certo abuso di notazioni), ad esempio, le disuguaglianze dell'Osservazione 2.5.3 diventano:

- $\vee_{d \in D}(d \wedge a) \leq \vee_{d \in D}(d) \wedge a$
- $\wedge_{d \in D}(d) \vee a \leq \wedge_{d \in D}(d \vee a)$

Capitolo 3

Algebre di Heyting e di Boole

3.1 Algebre di Heyting

Definizione 3.1.1. *Un'**algebra di Heyting** è una settupla* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ *tale che*

- $(A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è un reticolo limitato.*
- $\to$ *è un'implicazione di Heyting di* A*, ovvero una funzione da* $A \times A$ *in* A *tale che* $a \leq b \to c$ *se e solo se* $a \wedge b \leq c$*, per ogni* $a, b, c \in A$

Definizione 3.1.2. $(A, \leq)$ *è detto ordine soggiacente a* H*;* $(A, \leq, \wedge, \vee)$ *è detto reticolo soggiacente a* H*. Chiamiamo filtri di* H *i filtri del reticolo soggiacente a* H*.*

Si noti che le implicazioni di Heyting sono uniche; infatti, se $\to'$ è un'altra implicazione di Heyting, allora $a \to b \leq a \to b$ implica $(a \to b) \wedge a \leq b$, implica $a \to b \leq a \to' b$; del tutto analogamente si dimostra che $a \to' b \leq a \to b$ e dunque, per antisimmetria, $a \to b = a \to' b$.
Poniamo $\neg_H a := (a \to \perp)$ per ogni $a \in A$; quasi sempre scriveremo semplicemente $\neg a$ invece di $\neg_H a$, quando ciò non creerà ambiguità.
Per alleggerire le notazioni, adottiamo inoltre le seguenti convenzioni:

- $a \to b \sqcap c := a \to (b \sqcap c)$
- $a \sqcap b \to c := (a \sqcap b) \to c$

per ogni $a, b, c \in A$, $\sqcap \in \{\wedge, \vee\}$

Proposizione 3.1.1. *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ *un'algebra di Heyting e* a *e* b *due elementi di* A*; allora* $(a \to b) \wedge a \leq b$*.*

Dimostrazione. Per riflessività $a \to b \leq a \to b$, da cui $(a \to b) \wedge a \leq b$, per il secondo assioma della definizione di algebra di Heyting. □

Proposizione 3.1.2 (distributività di $\wedge$ con $\vee$)**.** *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ un'algebra di Heyting e a, b e c tre elementi di A; valgono i seguenti asserti:*

· (1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

· (2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Dimostrazione.

· (1) La disuguaglianza $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ vale in ogni reticolo (Oss. 2.2.2). Vediamo la disuguaglianza inversa. Poniamo $d := (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; allora, chiaramente, $a \wedge b \leq d$, da cui $b \leq a \to d$; analogamente, essendo $a \wedge c \leq d$, otteniamo $c \leq a \to d$; da queste due osservazioni possiamo così concludere che $b \vee c \leq a \to d$, e dunque, per definizione di algebra di Heyting, $a \wedge (b \vee c) \leq d$.

· (2) Basta usare il punto (1) e la proprietà di dualità della distributività di $\wedge$ con $\vee$ nei reticoli (Prop. 2.2.1).

□

Proposizione 3.1.3. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ un'algebra di Heyting. Siano $a, b \in A$. Allora*

· (1) $\top = a \to b$ *se e solo se* $a \leq b$.

· (2) $b \leq a \to b$

· (3) $a = \top \to a$

· (4) $a \leq \neg\neg a$

· (5) $a \wedge \neg a = \bot$

· (6) $\neg a = \neg\neg\neg a$

· (7) $a \leq b$ *implica* $\neg b \leq \neg a$

· (8) $\neg a \vee \neg b \leq \neg(a \wedge b)$

· (9) $\neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b)$

· (10) $\neg a \vee b \leq a \to b$

· (11) $a \vee b \leq \neg(\neg a \wedge \neg b)$

· (12) $a \wedge b \leq \neg(\neg a \vee \neg b)$

· (13) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

· (14) $a \vee b \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$

· (15) $\neg\neg(a \wedge b) \leq \neg\neg a \wedge \neg\neg b$

Dimostrazione.

(1) $\top = a \to b$ se e solo se $\top \leq a \to b$, se e solo se $\top \wedge a \leq b$, se e solo se $a \leq b$

(2) $b \wedge a \leq b$ implica $b \leq a \to b$.

(3) Per il punto precedente $a \leq \top \to a$. D'altra parte, per riflessività, sappiamo che $\top \to a \leq \top \to a$. Ma $\top \to a \leq \top \to a$ implica $(\top \to a) \wedge \top \leq a$, implica $\top \to a \leq a$.

(4) $a \to \bot \leq a \to \bot$ implica $(a \to \bot) \wedge a \leq \bot$, implica $a \wedge (a \to \bot) \leq \bot$, implica $a \leq (a \to \bot) \to \bot$, implica $a \leq \neg\neg a$.

(5) Sappiamo che $a \leq \neg\neg a$. Ma $a \leq \neg\neg a$ implica $a \leq \neg a \to \bot$, implica $a \wedge \neg a \leq \bot$, implica $a \wedge \neg a = \bot$.

(6) Sappiamo che $\neg a \leq \neg\neg\neg a$. Mostriamo la disuguaglianza opposta: sappiamo che $\neg\neg\neg a \wedge \neg\neg a \leq \bot$; ma $\neg\neg\neg a \wedge \neg\neg a \leq \bot$ implica $\neg\neg\neg a \wedge a \leq \bot$ (perché $a \leq \neg\neg a$), implica $\neg\neg\neg a \leq a \to \bot$, implica $\neg\neg\neg a \leq \neg a$.

(7) Sappiamo che $\neg b \wedge b \leq \bot$. Ma, se $a \leq b$, allora $\neg b \wedge b \leq \bot$ implica $\neg b \wedge a \leq \bot$, implica $\neg b \leq a \to \bot$, implica $\neg b \leq \neg a$

(8) $\bot \leq \bot$ implica $\bot \vee \bot \leq \bot$, implica $(\neg a \wedge a \wedge b) \vee (\neg b \wedge a \wedge b) \leq \bot$, implica - per distributività (Prop. 3.1.2) - $(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \wedge b) \leq \bot$, implica $\neg a \vee \neg b \leq (a \wedge b) \to \bot$, implica $\neg a \vee \neg b \leq \neg(a \wedge b)$

(9) Dato che $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$, segue che $\neg(a \vee b) \leq \neg a$ e $\neg(a \vee b) \leq \neg b$, da cui $\neg(a \vee b) \leq \neg a \wedge \neg b$. Viceversa: per riflessività sappiamo che $\bot \leq \bot$. Ma $\bot \leq \bot$ implica $\bot \vee \bot \leq \bot$, implica $(\neg a \wedge \neg b \wedge a) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge b) \leq \bot$, implica - per distributività - $(\neg a \wedge \neg b) \wedge (a \vee b) \leq \bot$, implica $\neg a \wedge \neg b \leq a \vee b \to \bot$, implica $\neg a \wedge \neg b \leq \neg(a \vee b)$

(10) Per riflessività: $b \leq b$. Ma $b \leq b$ implica $b \wedge a \leq b$, implica $\bot \vee (b \wedge a) \leq b$, implica $(\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a) \leq b$, implica - per distributività - $(\neg a \vee b) \wedge a \leq b$, implica $\neg a \vee b \leq a \to b$.

(11) Per riflessività $\bot \leq \bot$. Ma $\bot \leq \bot$ implica $\bot \vee \bot \leq \bot$, implica $(a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg b) \leq \bot$, implica $(a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) \leq \bot$, implica $a \vee b \leq \neg(\neg a \wedge \neg b)$.

(12) Per riflessività $\bot \leq \bot$. Ma $\bot \leq \bot$ implica $\bot \vee \bot \leq \bot$, implica $(a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) \leq \bot$, implica $(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \leq \bot$, implica $a \wedge b \leq (\neg a \vee \neg b) \to \bot$, implica $a \wedge b \leq \neg(\neg a \vee \neg b)$

(13) Per riflessività: $b \wedge c \leq b \wedge c$. Ma $b \wedge c \leq b \wedge c$ implica - per 3.1.1 - $((a \to b) \wedge a) \wedge ((a \to c) \wedge a) \leq b \wedge c$, implica $(a \to c) \wedge (b \to c) \leq a \to b \wedge c$. Viceversa: sappiamo che $(a \to b \wedge c) \wedge a \leq b \wedge c$; ma $(a \to b \wedge c) \wedge a \leq b \wedge c$ implica $(a \to b \wedge c) \wedge a \leq b$, implica $a \to b \wedge c \leq a \to b$; in modo analogo si dimostra che $a \to b \wedge c \leq a \to c$, e dunque possiamo concludere che $a \to b \wedge c \leq (a \to b) \wedge (a \to c)$

(14) Per riflessività: $c \leq c$. Ma $c \leq c$ implica $c \vee c \leq c$, implica $((a \to c) \wedge a) \vee ((b \to c) \wedge b) \leq c$, implica $((a \to c) \wedge (b \to c) \wedge a) \vee ((a \to c) \wedge (b \to c) \wedge b) \leq c$, implica $((a \to c) \wedge (b \to c)) \wedge (a \vee b) \leq c$, implica $(a \to c) \wedge (b \to c) \leq a \vee b \to c$. Viceversa: sappiamo che $(a \vee b \to c) \wedge (a \vee b) \leq c$; ma $(a \vee b \to c) \wedge (a \vee b) \leq c$ implica $(a \vee b \to c) \wedge a \leq c$, implica $a \vee b \to c \leq a \to c$; in modo analogo si dimostra che $a \vee b \to c \leq b \to c$, e dunque $a \vee b \to c \leq (a \to c) \wedge (b \to c)$

(15) Per riflessività: $a \leq a$. Ma $a \leq a$ implica $a \wedge b \leq a$, implica $\neg a \leq \neg(a \wedge b)$, implica $\neg\neg(a \wedge b) \leq \neg\neg a$. In modo analogo si dimostra $\neg\neg(a \wedge b) \leq \neg\neg b$, per cui possiamo concludere che $\neg\neg(a \wedge b) \leq \neg\neg a \wedge \neg\neg b$.

$\square$

Esempio 3.1.1. *Un esempio importante di algebre di Heyting è fornito dagli* ***spazi topologici****. Ricordiamo che uno spazio topologico è una coppia $\Omega = (A, \tau)$, dove A è un insieme e τ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A)$ con le seguenti proprietà:*

- $A \in \tau$
- *Se M è un sottoinsieme di τ, allora $\cup(M) \in \tau$*
- *Se M è un sottoinsieme finito non vuoto di τ, allora $\cap(M) \in \tau$*

Si osservi, in particolare, che $\varnothing \in \tau$, perché $\varnothing = \cup(\varnothing)$ e $\varnothing \subseteq \tau$.
Gli elementi di τ vengono detti ***aperti*** *dello spazio topologico Ω.*
Sia $\Omega = (A, \tau)$ uno spazio topologico; per ogni E in τ indichiamo con $int(E)$ l'unione di tutti gli aperti di τ contenuti in E o, equivalentemente, il più grande aperto di τ - nel senso dell'inclusione - contenuto in E; poniamo inoltre $E^c := A \setminus E$. Definiamo la funzione $\to_\Omega$ di $\tau \times \tau$ in τ nel seguente modo:

$$D \to_\Omega E := int(D^c \cup E)$$

per ogni $D, E \in \tau$. Si verifica facilmente che $(\tau, \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, \Omega, \to_\Omega)$ è un'algebra di Heyting.

3.2 Omomorfismi di algebre di Heyting

Definizione 3.2.1. *Siano* $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1, \rightarrow_1)$ *e* $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2, \rightarrow_2)$ *due algebre di Heyting; un* ***omomorfismo di algebre di Heyting*** *da* H_1 *in* H_2 *è una funzione* f *da* A_1 *in* A_2 *che rispetta la struttura di algebra di Heyting, ovvero che soddisfa le seguenti proprietà:*

- $a \leq_1 b$ *implica* $f(a) \leq_2 f(b)$
- $f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$
- $f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$
- $f(\perp_1) = \perp_2$
- $f(\top_1) = \top_2$
- $f(a \rightarrow_1 b) = f(a) \rightarrow_2 f(b)$

Osservazione 3.2.1. *Si osservi che la prima e la penultima condizione si possono derivare dalle altre:* $a \leq_1 b$ *implica* $a \wedge_1 b = a$ *implica* $f(a \wedge_1 b) = f(a)$ *implica* $f(a) \wedge_2 f(b) = f(a)$ *implica* $f(a) \leq_2 f(b)$*;* $f(\top_1) = f(\perp_1 \rightarrow_1 \perp_1) = f(\perp_1) \rightarrow_2 f(\perp_1) = \perp_2 \rightarrow_2 \perp_2 = \top_2$.

Chiaramente un omomorfismo di algebre di Heyting è anche un omomorfismo di reticoli limitati, e precisamente dei reticoli limitati soggiacenti.
Si verifica facilmente che le composizioni di omomorfismi di Heyting e le funzioni identità sono omomorfismi di Heyting.

Proposizione 3.2.1. *Siano* $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1, \rightarrow_1)$ *e* $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2, \rightarrow_2)$ *due algebre di Heyting. Sia* ϕ *un omomorfismo iniettivo di algebre di Heyting, da* H_1 *in* H_2*. Allora* ϕ *è un'immersione di ordini, da* $(A_1, \leq_1)$ *in* $(A_2, \leq_2)$*.*

Dimostrazione. $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$ implica $\phi(a) \rightarrow_2 \phi(b) = \top_2$ (Prop. 3.1.3, primo punto), implica $\phi(a \rightarrow_1 b) = \phi(\top_1)$, implica $a \rightarrow_1 b = \top_1$ (per l'iniettività), implica $a \leq_1 b$ (sempre per il primo punto della Prop. 3.1.3).
L'altra implicazione è banale. □

Definizione 3.2.2. *Siano* $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1, \rightarrow_1)$ *e* $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2, \rightarrow_2)$ *due algebre di Heyting.*
Un ***isomorfismo di algebre di Heyting*** *da* H_1 *in* H_2 *è un omomorfismo* ϕ *di algebre di Heyting da* H_1 *in* H_2 *per cui esiste un omomorfismo di algebre di Heyting* ψ *da* H_2 *in* H_1 *tale che* $\phi \circ \psi = id_{A_2}$ *e* $\psi \circ \phi = id_{A_1}$*.*

Dalla definizione discende subito che l'isomorfismo ϕ è necessariamente una funzione biiettiva di A_1 in A_2 e che la sua funzione inversa è proprio ψ (in simboli: $\phi^{-1} = \psi$).
Se H_1 e H_2 sono algebre di Heyting, scriviamo $H_1 \simeq H_2$ per dire che esiste un isomorfismo da H_1 in H_2; chiaramente $H_1 \simeq H_2$ se e solo se $H_2 \simeq H_1$ e, se $H_1 \simeq H_2$ e $H_2 \simeq H_3$, allora $H_1 \simeq H_3$ (quest'ultima deriva dal fatto che la composizione di isomorfismi è ancora un isomorfismo, come è facile da verificare)

Proposizione 3.2.2. *Siano* $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \bot_1, \top_1, \to_1)$ *e* $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \bot_2, \top_2, \to_2)$ *due algebre di Heyting. Sia* ϕ *un isomorfismo d'ordine da* $(A_1, \leq_1)$ *in* $(A_2, \leq_2)$*. Allora* ϕ *è un isomorfismo di algebre di Heyting da* H_1 *in* H_2*.*

Dimostrazione. Considero $a, b \in A_1$, $c \in A_2$.

- Dato che $a \wedge_1 b \leq_1 a$ e $a \wedge_1 b \leq_1 b$, segue che $\phi(a \wedge_1 b) \leq_1 \phi(a)$ e $\phi(a \wedge_1 b) \leq_1 \phi(b)$, da cui $\phi(a \wedge_1 b) \leq_2 \phi(a) \wedge_2 \phi(b)$

- Dato che ϕ^{-1} è un omomorfismo d'ordine, ragionando come nel punto precedente si ottiene che $\phi^{-1}(\phi(a) \wedge_2 \phi(b)) \leq_1 \phi^{-1}(\phi(a)) \wedge_1 \phi^{-1}(\phi(b))$, ovvero $\phi^{-1}(\phi(a) \wedge_2 \phi(b)) \leq_1 a \wedge_1 b$. Applicando ϕ a quest'ultima disuguaglianza si ottiene $\phi(a) \wedge_2 \phi(b) \leq_2 \phi(a \wedge_1 b)$.

- In modo analogo a quanto fatto per $\wedge$, si dimostra che $\phi(a \vee_1 b) = \phi(a) \vee_2 \phi(b)$

- Da $\bot_1 \leq_1 d$ per ogni $d \in A_1$ segue che $\phi(\bot_1) \leq_2 \phi(d)$ per ogni $d \in A_1$; in particolare $\phi(\bot_1) \leq_2 \phi(\phi^{-1}(e))$ per ogni $e \in A_2$, e quindi $\phi(\bot_1) \leq_2 e$ per ogni $e \in A_2$; ciò implica $\phi(\bot_1) = \bot_2$

- Osserviamo che $c \wedge_2 \phi(a) = \phi(\phi^{-1}(c)) \wedge_2 \phi(a) = \phi(\phi^{-1}(c) \wedge_1 a)$. Dunque se $c \leq_2 \phi(a \to_1 b)$, l'osservazione appena fatta ci dice che $c \wedge_2 \phi(a) \leq_2 \phi((a \to_1 b) \wedge_1 a) \leq_2 \phi(b)$.
Viceversa: $c \wedge_2 \phi(a) \leq_2 \phi(b)$, implica $\phi(\phi^{-1}(c)) \wedge_2 \phi(a) \leq_2 \phi(b)$, implica $\phi(\phi^{-1}(c) \wedge_1 a) \leq_2 \phi(b)$, implica $\phi^{-1}(c) \wedge_1 a \leq_1 b$, implica $\phi^{-1}(c) \leq_1 a \to_1 b$, implica $c \leq_2 \phi(a \to_1 b)$ □

Proposizione 3.2.3. *Gli isomorfismi di algebre di Heyting sono esattamente gli omomorfismi biiettivi di algebre di Heyting.*

Dimostrazione. Grazie alla Prop. 3.2.1, gli omomorfismi biiettivi di algebre di Heyting sono immersioni suriettive degli ordini soggiacenti. Dunque, grazie alla Prop. 2.1.3, gli omomorfismi biiettivi di algebre di Heyting sono isomorfismi degli ordini soggiacenti. Quindi, grazie alla Prop. 3.2.2, gli omomorfismi biiettivi di algebre di Heyting sono isomorfismi di algebre di Heyting. L'altra inclusione è banale. □

Proposizione 3.2.4. *Sia ϕ un omomorfismo di algebre di Heyting di $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1)$ in $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2)$. Allora $(\phi(A_1), \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2, \rightarrow_2)$ è un'algebra di Heyting (detta algebra di Heyting* ***immagine*** *di ϕ; la indichiamo con* ***Im***(ϕ)*).*

3.3 Prodotto di algebre di Heyting

Fissiamo un insieme I e una famiglia di algebre di Heyting $(H_i)_{i\in I}$ a indici in I, con $H_i = (A_i, \leq_i, \wedge_i, \vee_i, \perp_i, \rightarrow_i)$ per ogni $i \in I$.
Indichiamo con $\Pi_{i\in I}(A_i)$ il prodotto cartesiano di $(A_i)_{i\in I}$.

Definizione 3.3.1. *Definiamo la seguente relazione binaria su $\Pi_{i\in I}(A_i)$:*

· $(a_i)_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (b_i)_{i\in I}$ *se e solo se* $a_j \leq b_j$ *per ogni* $j \in I$

per ogni $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)$.
Definiamo le seguenti operazioni binarie su $\Pi_{i\in I}(A_i)$:

· $(a_i)_{i\in I}\ (\wedge_i)_{i\in I}\ (b_i)_{i\in I} = (a_i \wedge b_i)_{i\in I}$

· $(a_i)_{i\in I}\ (\vee_i)_{i\in I}\ (b_i)_{i\in I} = (a_i \vee b_i)_{i\in I}$

· $(a_i)_{i\in I}\ (\rightarrow_i)_{i\in I}\ (b_i)_{i\in I} = (a_i \rightarrow b_i)_{i\in I}$

per ogni $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)$.
Poniamo $\Pi_{i\in I}(H_i) := (\Pi_{i\in I}(A_i), (\leq_i)_{i\in I}, (\wedge_i)_{i\in I}, (\vee_i)_{i\in I}, (\perp_i)_{i\in I}, (\rightarrow_i)_{i\in I})$.

Proposizione 3.3.1. *$\Pi_{i\in I}(H_i)$ è un'algebra di Heyting.*

Dimostrazione. Qui nel seguito semplifichiamo gli indici, per agevolare la lettura.

· Per riflessività di $\leq_j$ abbiamo che $a_j \leq_j a_j$, per ogni $j \in I$, il che implica $(a_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i)_i$

· Sia $(a_i)_i\ (\leq_i)_i\ (b_i)_i$ e $(b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (c_i)_i$; allora $a_j \leq_j b_j$ e $b_j \leq_j c_j$ per ogni $j \in I$, il che implica $a_j \leq_j c_j$ per ogni $j \in I$, da cui $(a_i)_i\ (\leq_i)\ (c_i)_i$

· Sia $(a_i)_i\ (\leq_i)\ (b_i)_i$ e $(b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i)_i$; allora $a_j \leq_j b_j$ e $b_j \leq a_j$ per ogni $j \in I$, il che implica $a_j = b_j$ per ogni $j \in I$, da cui $(a_i)_i = (b_i)_i$

· Dato che $a_j \wedge_j b_j \leq_j a_j$ per ogni $j \in I$, abbiamo che $(a_i \wedge_i b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i)_i$, da cui segue $(a_i)_i\ (\wedge_i)_i\ (b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i)_i$

- Dato che $a_j \wedge_j b_j \leq_j b_j$ per ogni $j \in I$, abbiamo che $(a_i \wedge_i b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (b_i)_i$, da cui segue $(a_i)_i\ (\wedge_i)_i\ (b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (b_i)_i$

- Sia $(c_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i)_i$ e $(c_i)_i\ (\leq_i)_i\ (b_i)_i$; allora $c_j \leq_j a_j$ e $c_j \leq_j b_j$ per ogni $j \in I$, il che implica $c_j \leq_j a_j \wedge_j b_j$ per ogni $j \in I$; da ciò segue che $(c_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i \wedge_i b_i)_i$, e dunque $(c_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i)_i\ (\wedge_i)_i\ (b_i)_i$

- Il caso $(\vee_i)_i$ è analogo al caso $(\wedge_i)_i$

- $\bot_j \leq_j a_j$ per ogni $j \in I$ implica $(\bot_i)_i\ (\leq_i)_i\ (a_i)_i$

- $a_j \leq_j \top_j$ per ogni $j \in I$ implica $(a_i)_i\ (\leq_i)_i\ (\top_i)_i$

- $(a_i)_i\ (\leq_i)_i\ (b_i)_i\ (\rightarrow_i)_i\ (c_i)$ se e solo se $(a_i)_i\ (\leq_i)_i\ (b_i \rightarrow_i c_i)_i$ se e solo se $a_j \leq_j b_j \rightarrow_j c_j$ per ogni $j \in I$, se e solo se $a_j \wedge_j b_j \leq_j c_j$ per ogni $j \in I$, se e solo se $(a_i \wedge b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (c_i)_i$ se e solo se $(a_i)_i\ (\wedge_i)_i\ (b_i)_i\ (\leq_i)_i\ (c_i)_i$

per ogni $(a_i)_i$, $(b_i)_i$, $(c_i)_i \in \Pi_{i\in I}(A_i)$ □

$\Pi_{i\in I}(H_i)$ è detta **algebra di Heyting prodotto** relativa a $(H_i)_{i\in I}$.

3.4 Pre-algebre di Heyting

Definizione 3.4.1. *Una **pre-algebra di Heyting** è una settupla* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \rightarrow)$ *che soddisfa tutte le proprietà delle algebre di Heyting tranne l'antisimmetria di* $\leq$.

Si adottano le stesse convenzioni e notazioni adoperate nel caso delle algebre di Heyting (ad esempio: $\neg_H a := (a \rightarrow \bot)$).

Definizione 3.4.2. *Poniamo la relazione binaria* $\sim_H$ *su* A*:* $a \sim_H b$ *se e solo se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$*, per ogni* $a, b \in A$*; in altre parole,* $\sim_H$ *è la relazione di equivalenza* $\sim_K$ *indotta dal pre-ordine soggiacente* $K := (A, \leq)$ *(Def. 2.1.6).*

Definizione 3.4.3. *Indichiamo con* $[A]_H$ *l'insieme quoziente di* A *rispetto a* $\sim_H$*. Se* $a \in A$*, indichiamo con* $[a]_H$ *la classe di equivalenza di* a *rispetto a* $\sim_H$*. Definiamo la settupla* $[H] = ([A]_H, [\leq]_H, [\wedge]_H, [\vee]_H, [\bot]_H, [\top]_H, [\rightarrow]_H)$ *nel seguente modo (tralasciando alcuni indici):*

- $[a]_H\ [\leq]_H\ [b]_H$ *se e solo se* $a \leq b$.

- $[a]_H\ [\wedge]_H\ [b]_H := [a \wedge b]_H$

- $[a]_H\ [\vee]_H\ [b]_H := [a \vee b]_H$

· $[a]_H\ [\to]_H\ [b]_H := [a \to b]_H$

per ogni $a, b \in A$.
Si verifica facilmente che le definizioni sono ben poste e che $[H]$ è un'algebra di Heyting, detta ***quoziente*** *di H (o* ***riflessione ad algebra di Heyting*** *di H).*
Generalmente si ometterà di riportare il pedice H, quando ciò non genererà ambiguità.

Siano $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1, \to_1)$, $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2, \to_2)$ due pre-algebre di Heyting; sia ϕ una funzione di A_1 in A_2; poniamo $\overline{\phi}([a]) := [\phi(a)]$ per ogni $a \in A_1$; tale uguaglianza in generale non definisce propriamente una funzione di $[A_1]$ in $[A_2]$: si potrebbe avere $[a] = [b]$ ma $[\phi(a)] \neq [\phi(b)]$.

Definizione 3.4.4. *Un* ***omomorfismo di pre-algebre di Heyting*** *da H_1 in H_2 è una funzione ϕ da A_1 in A_2 tale che*

· (1) *$\overline{\phi}$ è una funzione ben definita*

· (2) *$\overline{\phi}$ è un omomorfismo di algebre di Heyting da $[H_1]$ in $[H_2]$*

Definizione 3.4.5. *La funzione $\overline{\phi}$ è detta funzione* ***quoziente*** *di ϕ (o, per essere più precisi,* ***riflessione ad algebra di Heyting*** *di ϕ)*

Osservazione 3.4.1. *Se ϕ è un omomorfismo di pre-ordini da $(A_1, \leq_1)$ in $(A_2, \leq_2)$, allora $\overline{\phi}$ è ben definita. Infatti, con questa ipotesi, $[a] = [b]$ implica $[a]\ [\leq_1]\ [b]$ e $[b]\ [\leq_1]\ [a]$, implica $a \leq_1 b$ e $b \leq_1 a$, implica $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$ e $\phi(b) \leq_2 \phi(a)$, implica $[\phi(a)] = [\phi(b)]$, per ogni $a, b \in A_1$, da cui la buona definizione di $\overline{\phi}$.*

Proposizione 3.4.1. *Siano $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1, \to_1)$ e $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge_2, \vee_2, \perp_2, \top_2, \to_2)$ due pre-algebre di Heyting. Sia ϕ una funzione da A_1 in A_2. Allora ϕ è un omomorfismo di algebre di Heyting da H_1 in H_2 se e solo se valgono i seguenti:*

· $(1')$ *ϕ è un omomorfismo di pre-ordini da $(A_1, \leq_1)$ in $(A_2, \leq_2)$*

· (2) *$\overline{\phi}$ è un omomorfismo di algebre di Heyting di $[H_1]$ in $[H_2]$*

Dimostrazione. La precedente osservazione ci dice che $(1')$ implica (1).
D'altra parte, supponiamo che valgano (1) e (2). Allora $a \leq_1 b$ implica $[a]\ [\leq_1]\ [b]$, implica $\overline{\phi}([a])\ [\leq_2]\ \overline{\phi}([b])$, implica $[\phi(a)]\ [\leq_2]\ [\phi(b)]$, implica $\phi(a) \leq_2 \phi(b)$, per ogni $a, b \in A_1$, ovvero vale la condizione $(1')$. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

3.5 Algebre di Boole

Proposizione 3.5.1. *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *un'algebra di Heyting; sia* a *un elemento di* A*. Allora i seguenti sono equivalenti:*

- (1) $\neg\neg a = a$
- (2) $a \vee \neg a = \top$
- (3) $\neg a \vee b = a \to b$ *per ogni* $b \in A$
- (4) $\neg a \to a = a$
- (5) $(a \to b) \to a = a$ *per ogni* $b \in A$

Dimostrazione. Si tenga presente la Prop. 3.1.3.

(1) implica (2): Supponiamo $a = \neg\neg a$. Per riflessività si ha $\bot \leq \bot$. Ma $\bot \leq \bot$ implica $\top \wedge \bot \leq \bot$, implica $\top \leq \neg\bot$, implica $\top \leq \neg(\neg a \wedge a)$, implica $\top \leq \neg\neg a \vee \neg a$, implica $\top \leq a \vee \neg a$, implica $\top = a \vee \neg a$.

(2) implica (1): Supponiamo $a \vee \neg a = \top$. Sappiamo già che $a \leq \neg\neg a$, mostriamo dunque la disuguaglianza opposta. Per riflessività: $a \leq a$. Ma $a \leq a$ implica $\neg\neg a \wedge a \leq a$, implica $(\neg\neg a \wedge a) \vee \bot \leq a$, implica $(\neg\neg a \wedge a) \vee (\neg\neg a \wedge \neg a) \leq a$, implica $\neg\neg a \wedge (a \vee \neg a) \leq a$, implica $\neg\neg a \wedge \top \leq a$, implica $\neg\neg a \leq a$.

(2) implica (3): Supponiamo che $a \vee \neg a = \top$. Sia $b \in A$. Per riflessività: $a \to b \leq a \to b$. Ma $a \to b \leq a \to b$ implica $a \to b \leq \neg a \vee (a \to b)$, implica $a \to b \leq (\neg a \vee (a \to b)) \wedge \top$, implica $a \to b \leq (\neg a \vee (a \to b)) \wedge (\neg a \vee a)$, implica $a \to b \leq \neg a \vee ((a \to b) \wedge a)$, implica $a \to b \leq \neg a \vee b$.
La disuguaglianza inversa vale in ogni algebra di Heyting ed è già stata dimostrata.

(3) implica (2): Supponiamo che $\neg a \vee b = a \to b$ per ogni $b \in A$. Allora, in particolare, $\neg a \vee a = a \to a$. Ma $a \to a = \top$, per cui $\neg a \vee a = \top$.

(3) implica (4): Supponiamo $\neg a \vee b = a \to b$ per ogni $b \in A$. Per quanto visto, da ciò segue la (1), ovvero $a = \neg\neg a$. Sappiamo già che $a \leq \neg a \to a$, ci basta quindi mostrare che $\neg a \to a \leq a$.
Per riflessività abbiamo $a \leq a$. Ma $a \leq a$ implica $a \vee a \leq a$, implica $\neg\neg a \vee a \leq a$, implica $\neg a \to a \leq a$.

(4) implica (1): Supponiamo che $\neg a \to a = a$. Sappiamo già che $a \leq \neg\neg a$, mostriamo quindi la disuguaglianza inversa. Chiaramente $\bot \leq a$. Ma $\bot \leq a$ implica $\neg\neg a \wedge \neg a \leq a$, implica $\neg\neg a \leq \neg a \to a$, implica $\neg\neg a \leq a$.

(1) implica (5): Supponiamo che $a = \neg\neg a$. Sia $b \in A$. Sappiamo già che (1) implica (3), dunque, in particolare, abbiamo $(a \to b) \to a = \neg(a \to b) \vee a$. Chiaramente $\perp \leq b$. Ma $\perp \leq b$ implica $\neg a \wedge a \leq b$, implica $\neg a \leq a \to b$, implica $\neg(a \to b) \leq \neg\neg a$, implica $\neg(a \to b) \leq a$, implica $\neg(a \to b) \vee a \leq a$, implica $(a \to b) \to a \leq a$. La disuguaglianza inversa è valida per ogni algebra di Heyting, come già mostrato.

(5) implica (4): Supponiamo che $(a \to b) \to a = a$ per ogni $b \in A$. Ma $(a \to b) \to a = a$ per ogni $b \in A$ implica $\neg a \to a \leq a$, implica $\neg a \to a = a$ (usando la Prop. 3.1.3, punto (4)). □

Definizione 3.5.1. *Definiamo* ***algebra di Boole*** *un'algebra di Heyting* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ *in cui ogni elemento* $a \in A$ *soddisfa le cinque condizioni equivalenti della proposizione precedente.*

Definizione 3.5.2. *Se* H_1 *e* H_2 *sono due algebre di Boole, un* ***omomorfismo di algebre di Boole*** *da* H_1 *in* H_2 *è, per definizione, un omomorfismo di algebre di Heyting da* H_1 *in* H_2*. Analogamente si definiscono gli isomorfismi.*

Esempio 3.5.1. *Ogni algebra di Heyting* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ *con due elementi è un'algebra di Boole; infatti, in questo caso, si ha* $A = \{\perp, \top\}$, $\perp \vee \neg\perp = \perp \vee \top = \top$ *e* $\top \vee \neg\top = \top$.

Esempio 3.5.2. *Sia* E *un insieme. Per ogni* $A \subseteq E$*, poniamo* $A^c := E \setminus A$*. Un'****algebra di sottoinsiemi*** *di* E *è un sottoinsieme* Ω *di* $\mathcal{P}(E)$ *tale che:*

- (1) $\varnothing \in \Omega$
- (1′) $E \in \Omega$
- (2) $A \in \Omega$ *implica* $A^c \in \Omega$
- (3) $A, I \in \Omega$ *implica* $A \cup I \in \Omega$
- (3′) $A, I \in \Omega$ *implica* $A \cap I \in \Omega$

Tale lista di assiomi non è minimale; è sufficiente infatti tenere gli assiomi (i), (2) *e* (iii)*, per qualsiasi scelta di* $(i) \in \{(1), (1')\}$ *e* $(iii) \in \{(3), (3')\}$*, e si ottiene un sistema di assiomi equivalente a quello dato; l'equivalenza tra queste formulazioni è una semplice applicazione delle leggi di De Morgan* $(A \cup I = (A^c \cap I^c)^c$ *e* $A \cap I = (A^c \cup I^c)^c$*, per ogni* $A, I \subseteq E)$.
Se Ω *è un'algebra di sottoinsiemi di* E*, definiamo* $A \to_\Omega I := A^c \cup I$ *per ogni* $A, I \subseteq E$.
Si verifica facilmente che $(\Omega, \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, E, \to)$ *è un'algebra di Boole. Infatti le proprietà di ordine, inf, sup, minimo e massimo sono un'immediata*

conseguenza delle note proprietà insiemistiche; per quanto riguarda l'implicazione, basta notare che $A \subseteq I \to_\Omega J$ *implica* $A \subseteq I^c \cup J$, *implica* $A \cap I \subseteq (I^c \cup J) \cap I$, *implica* $A \cap I \subseteq (I^c \cap I) \cup (J \cap I)$, *implica* $A \cap I \subseteq \varnothing \cup (J \cap I)$, *implica* $A \cap I \subseteq J \cap I$, *implica* $A \cap I \subseteq J$, *per ogni* $A, I \subseteq E$*; viceversa:* $A \cap I \subseteq J$ *implica* $(A \cap I) \cup I^c \subseteq I^c \cup J$, *implica* $(A \cup I^c) \cap (I \cup I^c) \subseteq I^c \cup J$, *implica* $(A \cup I^c) \cap E \subseteq I^c \cup J$, *implica* $A \cup I^c \subseteq I \to_\Omega J$, *per ogni* $A, I \subseteq E$*; si conclude notando che* $A \cup A^c = E$, *per ogni* $A \subseteq E$.

Definizione 3.5.3. *Una* ***pre-algebra di Boole*** *è una pre-algebra di Heyting* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ *tale* $\top \leq a \vee \neg a$ *per ogni* $a \in A$ (*ovvero:* $a \vee \neg a \sim_H \top$ *per ogni* $a \in A$, *secondo la Def. 3.4.2*).
In termini equivalenti: una pre-algebra di Boole è una pre-algebra di Heyting H *tale che* $[H]$ *è un'algebra di Boole* (*dove* $[H]$ *è stata definita in 3.4.3*)

Capitolo 4

Linguaggi e teorie

4.1 Linguaggi tipati del primo ordine

Introduciamo ora il concetto di linguaggio e di teoria su un linguaggio. Vedremo che ad ogni teoria è associata un'algebra di Heyting, detta 'Algebra di Lindenbaum-Tarski'.

Definizione 4.1.1. *Un **linguaggio tipato del primo ordine con uguaglianza** (in breve: **linguaggio**) è una sestupla $\mathcal{L} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$, dove:*

- $\boldsymbol{T}$ *è un insieme di simboli di **tipi***
- $\boldsymbol{P}$ *è un insieme di (simboli di) costanti proposizionali*
- $\boldsymbol{V}$ *è una funzione che ad ogni tipo T assegna un insieme numerabile $\boldsymbol{V}_T$ di variabili.*
  Se $T \neq T'$ allora $V_T \cap V_{T'} = \varnothing$.
- $\boldsymbol{R}$ *è una funzione che ad ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e ad ogni $(T_1, \ldots, T_n) \in \boldsymbol{T}^n$ associa un insieme di **simboli relazionali** $\boldsymbol{R}(T_1, \ldots, T_n)$.*
  *Gli elementi di $\boldsymbol{R}(T_1, \ldots, T_n)$ sono detti simboli relazionali di **arietà** $(T_1, \ldots, T_n)$.*
  Se $(T_1, \ldots, T_n) \neq (T'_1, \ldots, T'_n)$ allora $R(T_1, \ldots, T_n) \cap R(T'_1, \ldots, T'_n) = \varnothing$.
- $\boldsymbol{K}$ *è una funzione che ad ogni tipo $T \in \boldsymbol{T}$ associa un insieme di **costanti** $\boldsymbol{K}(T)$.*
  *Gli elementi di $\boldsymbol{K}(T)$ sono detti **costanti** di tipo T. Se $T \neq T'$ allora $K(T) \cap K(T') = \varnothing$.*

- *$\boldsymbol{F}$ è una funzione che ad ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e ad ogni $(T_1, \dots T_n, T) \in \boldsymbol{T}^{n+1}$ associa un insieme di* ***simboli funzionali*** *$\boldsymbol{F}(T_1, \dots, T_n, T)$.*
  Gli elementi di $\boldsymbol{F}(T_1, \dots, T_n, T)$ sono detti simboli funzionali di ***arietà*** *$(T_1, \dots, T_n, T)$.*
  Se $(T_1, \dots, T_n, T) \neq (T'_1, \dots, T'_n, T')$ allora $F(T_1,\ \dots,\ T_n,\ T) \cap F(T'_1, \dots, T'_n, T') = \varnothing$

Consideriamo i seguenti altri simboli associati al linguaggio $\mathcal{L}$:

- Il simbolo di uguaglianza ${=_T}^{\mathcal{L}}$, per ogni $T \in \boldsymbol{T}$
- I connettivi logici $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
- Il simbolo del falso $\perp$
- I quantificatori $\forall^T$ e $\exists^T$, per ogni $T \in \boldsymbol{T}$
- I simboli ausiliari ( ) ,

Scriveremo generalmente $=_T$ al posto di ${=_T}^{\mathcal{L}}$.
L'insieme di questi simboli - quelli che caratterizzano $\mathcal{L}$ più gli altri sopra elencati - è detto **alfabeto** di $\mathcal{L}$.
Precisiamo che tali simboli vanno intesi tutti diversi tra loro, nel senso che - ad esempio - un simbolo di costante e un simbolo funzionale non potranno mai coincidere, così come un simbolo logico e un simbolo relazionale, etc.

Definizione 4.1.2. *Un linguaggio $\mathcal{L} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$ in cui $\boldsymbol{T} = \varnothing$ è detto* ***proposizionale****; in sostanza un linguaggio proposizionale può essere identificato con un insieme $\boldsymbol{P}$ di costanti proposizionali.*

Definizione 4.1.3. *Un* ***linguaggio del primo ordine*** *(****non tipato****) è un linguaggio tipato del primo ordine $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$ tale che $\boldsymbol{T}$ contiene un solo tipo.*

Consideriamo un linguaggio $\mathcal{L} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$.

Definizione 4.1.4. *Gli insiemi $Term_{\mathcal{L}}(T)$ dei* ***termini*** *di tipo T, al variare di $T \in \boldsymbol{T}$, sono definiti ricorsivamente come i più piccoli insiemi che rispettano le seguenti proprietà*

- *$x \in Term_{\mathcal{L}}(T)$ per ogni $x \in \boldsymbol{V}_T$*
- *$K \in Term_{\mathcal{L}}(T)$ per ogni $K \in \boldsymbol{K}(T)$*
- *$f(t_1, \dots, t_n) \in Term_{\mathcal{L}}(T)$ per ogni $f \in \boldsymbol{F}(T_1,\ \dots,\ T_n,\ T)$*

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1, \ldots, T_n, T \in \boldsymbol{T}$, $t_1 \in Term_{\mathcal{L}}(T_1), \ldots, t_n \in Term_{\mathcal{L}}(T_1)$.

Notazione: scriviamo $t : T$ come abbreviazione di $t \in Term_{\mathcal{L}}(T)$.

Definizione 4.1.5. *L'insieme $Form_{\mathcal{L}}$ delle **formule** di $\mathcal{L}$ è il più piccolo insieme che rispetta le seguenti proprietà:*

- $\perp \in Form_{\mathcal{L}}$
- $P \in Form_{\mathcal{L}}$ *per ogni* $P \in \boldsymbol{P}$
- $R(t_1, \ldots, t_n) \in Form_{\mathcal{L}}$ *per ogni* $R \in \boldsymbol{R}(T_1, \ldots, T_n)$
- $(q =_T r) \in Form_{\mathcal{L}}$ *per ogni* $q : T$, $r : T$
- $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi) \in Form_{\mathcal{L}}$ *per ogni* ϕ, $\psi \in Form_{\mathcal{L}}$
- $(\forall^T x\phi)$, $(\exists^T x\phi) \in Form_{\mathcal{L}}$ *per ogni* ϕ, $\psi \in Form_{\mathcal{L}}$, $x \in \boldsymbol{V}_T$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1, \ldots, T_n, T \in \boldsymbol{T}$, $t_1 : T_1, \ldots, t_n : T_n$.

Adottiamo le seguenti abbreviazioni relative alle formule:

- $\top \equiv \perp \rightarrow \perp$
- $\neg\phi \equiv (\phi \rightarrow \perp)$
- $\phi \leftrightarrow \psi \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$
- $\phi \rightarrow \psi \sqcap \eta \equiv \phi \rightarrow (\psi \sqcap \eta)$
- $\phi \sqcap \psi \rightarrow \eta \equiv (\phi \sqcap \psi) \rightarrow \eta$
- $Q^T x\ \phi \rhd \psi \equiv (Q^T x\ \phi) \rhd \psi$
- $\phi \rhd Q^T x\ \psi \equiv \phi \rhd (Q^T x\ \psi)$

per ogni ϕ, $\psi \in Form_{\mathcal{L}}$, $T \in \boldsymbol{T}$ e $x \in V_T$; dove $\sqcap \equiv \wedge, \vee$, $Q \equiv \forall, \exists$, $\rhd \equiv \rightarrow, \wedge, \vee$.
Si ometteranno generalmente le parentesi esterne delle formule, quando ciò non creerà ambiguità; ad esempio, si scriverà $\phi \wedge \psi$ al posto di $(\phi \wedge \psi)$, etc.

Quando il linguaggio è non tipato, cioè ha un solo tipo T, si usa non riportare il simbolo T negli apici e nei pedici; si scrive quindi $\forall$ e $\exists$ al posto di $\forall^T$ e $\exists^T$.

Definizione 4.1.6. *Definiamo le variabili* $Var(t) \subseteq V_T$ *di un termine* $t : T$*, per ricorsione sulla complessità di* t

- $Var(x) := \{x\}$ *per ogni* $x \in V_T$
- $Var(K) := \varnothing$ *per ogni* $K \in \boldsymbol{K}(T)$
- $Var(f(t_1, \dots t_n)) = \cup_{i \in \{1,\dots,n\}} Var(t_i)$ *per ogni* $f \in \boldsymbol{F}(T_1, \dots, T_n, T)$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1, \dots, T_n \in \boldsymbol{T}$, $t_1 : T_1$, $\dots$, $t_n : T_n$.

Definizione 4.1.7. *Definiamo le variabili* $Var(\phi)$ *di una formula* ϕ *per ricorsione sulla complessità della formula:*

- $Var(\perp) := \varnothing$
- $Var(P) := \varnothing$ *per ogni* $P \in \boldsymbol{P}$
- $Var(R(t_1, \dots, t_n)) := \cup_{i \in \{1,\dots,n\}} Var(t_i)$ *per ogni* $R \in \boldsymbol{R}(T_1, \dots, T_n)$
- $Var(q =_T r) := Var(q) \cup Var(r)$ *per ogni* $q : T$, $r : T$
- $Var(\phi \rhd \psi) := Var(\phi) \cup Var(\psi)$ *dove* $\rhd \equiv \wedge, \vee, \rightarrow$
- $Var(Q^T x \phi) := Var(\phi) \cup \{x\}$ *per ogni* $x \in V_T$, $Q \equiv \forall, \exists$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, T_1, $\dots$, T_n, $T \in \boldsymbol{T}$, $t_1 : T_1$, $\dots$, $t_n : T_n$, ϕ, $\psi \in Form_{\mathcal{L}}$.

Definizione 4.1.8. *Definiamo l'insieme delle* ***variabili libere*** $VL(\phi)$ *di una formula* ϕ*, per ricorsione sulla complessità di* ϕ*:*

- $VL(\perp) := \varnothing$
- $VL(P) := \varnothing$ *per ogni* $P \in \boldsymbol{P}$
- $VL(R(t_1, \dots, t_n)) := \cup_{i \in \{1,\dots,n\}} Var(t_i)$ *per ogni* $R \in \boldsymbol{R}(T_1, \dots, T_n)$
- $VL(q =_T r) := Var(q) \cup Var(r)$ *per ogni* $q : T$, $r : T$
- $VL(\phi \rhd \psi) := VL(\phi) \cup VL(\psi)$ *dove* $\rhd \equiv \wedge, \vee, \rightarrow$
- $VL(Q^T x\ \phi) := VL(\phi) \setminus \{x\}$ *per ogni* $x \in V_T$, $Q \equiv \forall, \exists$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, T_1, $\dots$, T_n, $T \in \boldsymbol{T}$, $t_1 : T_1$, $\dots$, $t_n : T_n$, ϕ, $\psi \in Form_{\mathcal{L}}$.

Definizione 4.1.9. *Un* ***enunciato*** *o* ***formula chiusa*** *è una formula* ϕ *tale che* $VL(\phi) = \varnothing$.

Definizione 4.1.10. *Se $x_1, \ldots, x_n$ sono variabili distinte, usiamo il simbolo $Form_{\mathcal{L}}^{[x_1,\ldots,x_n]}$ per indicare l'insieme delle formule $\phi \in Form_{\mathcal{L}}$ tali che $VL(\phi)$ $\subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$; estendendo tale notazione, indichiamo con $Form_{\mathcal{L}}^{[-]}$ l'insieme delle formule ϕ di $\mathcal{L}$ tali che $VL(\phi) = \varnothing$, ovvero l'insieme delle formule chiuse di $\mathcal{L}$.*

Definizione 4.1.11. *Se $T \in \boldsymbol{T}$ e $x_1, \ldots, x_n$ sono variabili distinte, indichiamo con $Term_{\mathcal{L}}(T)^{[x_1,\ldots,x_n]}$ l'insieme dei termini $t \in Term_{\mathcal{L}}(T)$ tali che $Var(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$*

Definizione 4.1.12. *Definiamo l'**altezza** $h(\phi)$ di una formula ϕ per ricorsione sulla complessità di ϕ:*

- $h(\bot) := 0$
- $h(P) := 0$ *per ogni* $P \in \boldsymbol{P}$
- $h(R(t_1, \ldots, t_n)) := 0$ *per ogni* $R \in \boldsymbol{R}(T_1, \ldots, T_n)$
- $h(q =_T r) := 0$ *per ogni* $q : T,\ r : T$
- $h(\phi \rhd \psi) := max(h(\phi), h(\psi)) + 1$ *dove* $\rhd \equiv \wedge, \vee, \rightarrow$
- $h(Q^T x\phi) := h(\phi) + 1$ *per ogni* $x \in V_T$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1, \ldots, T_n$, $T \in \boldsymbol{T}$, $t_1 : T_1, \ldots, t_n : T_n$, $\phi, \psi \in Form_{\mathcal{L}}$.

Chiamiamo **formula atomica** ogni formula ϕ tale che $h(\phi) = 0$.

Definizione 4.1.13. *Definiamo la **sostituzione** $t[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_m]$ dei termini $u_1 : S_1, \ldots, u_m : S_m$ alle variabili $x_1 : S_1, \ldots, x_m : S_m$ all'interno del termine $t : T$*

- $x_i[u_1/x_1, \ldots, u_m/x_m] := u_i$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, n\}$
- $y[u_1/x_1, \ldots, u_m/x_m] := y$ *per ogni variabile* $y \neq x_1, \ldots, x_n$
- $K[u_1/x_1, \ldots, u_m/x_m] := K$ *per ogni* $K \in \boldsymbol{K}(T)$
- $f(\underline{t})[\underline{u}/\underline{x}] := f(t_1[\underline{u}/\underline{x}], \ldots, t_n[\underline{u}/\underline{x}])$ *per ogni* $f \in \boldsymbol{F}(T_1, \ldots, T_n, T)$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1, \ldots, T_n \in \boldsymbol{T}$, $K \in \boldsymbol{K}(T)$, $t_1 : T_1, \ldots, t_n : T_n$ (dove si è posto $\underline{t} \equiv t_1, \ldots, t_n$ e $\underline{u}/\underline{x} \equiv u_1/x_1, \ldots, u_m/x_m$).
Per induzione si verifica facilmente che $t[u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n] : T$.

Definizione 4.1.14. *Definiamo, per ricorsione generalizzata sull'altezza delle formule, la* ***sostituzione*** $\eta[u_1/x_1, \dots, u_m/x_m]$ *dei termini* $u_1 : S_1, \dots, u_m : S_m$ *alle variabili* $x_1 : S_1, \dots, x_m : S_m$ *all'interno della formula* η*:*

- $\bot[\underline{u}/\underline{x}] = \bot$
- $P[\underline{u}/\underline{x}] = P$ *per ogni* $P \in \boldsymbol{P}$
- $R(t_1, \dots, t_n)[\underline{u}/\underline{x}] := R(t_1[\underline{u}/\underline{x}], \dots, t_n[\underline{u}/\underline{x}])$ *per ogni* $R \in \boldsymbol{R}(T_1, \dots, T_n)$
- $(q =_T r)[\underline{u}/\underline{x}] := q[\underline{u}/\underline{x}] =_T r[\underline{u}/\underline{x}]$ *per ogni* $q : T$, $r : T$
- $(\phi \rhd \psi)[\underline{u}/\underline{x}] := \phi[\underline{u}/\underline{x}] \rhd \psi[\underline{u}/\underline{x}]$ *dove* $\rhd \equiv \wedge, \vee, \rightarrow$
- $(Q^{S_i} x_i \phi)[\underline{u}/\underline{x}] = \forall^{S_i} x_i\ \phi[u_1/x_1, \dots, \cancel{u_i/x_i}, \dots, u_m/x_m]$ *per ogni* $i \in \{1, \dots, n\}$
- $(Q^T y \phi)[\underline{u}/\underline{x}] = Q^T y\ \phi[\underline{u}/\underline{x}]$ *per ogni* $y \in V_T$, $y \notin \{\underline{x}\}$, $y \notin \cup_{i \in \{1,\dots,m\}} (VL(u_i))$
- $(Q^T y \phi)[\underline{u}/\underline{x}] = Q^T y_{,}\ (\phi[y_{,}/y][\underline{u}/\underline{x}])$ *per ogni variabile* $y : T$, $y \notin \{\underline{x}\}$, $y \in \cup_{i \in \{1,\dots,m\}} (VL(u_i))$*; con* $y_{,}$ *è la prima variabile successiva a* y *tale che* $y_{,} \notin \cup_{i \in \{1,\dots,m\}} (VL(u_i))$*;* $Q \equiv \forall, \exists$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T_1, \dots, T_n, T \in \boldsymbol{T}$, $t_1 : T_1, \dots, t_n : T_n$, $\phi, \psi \in Form_{\mathcal{L}}$.

Si dimostra facilmente, sempre per ricorsione generalizzata sull'altezza delle formule, che $\eta[\underline{u}/\underline{x}]$ è effettivamente una formula, con la stessa altezza di η.

Definizione 4.1.15. *Chiamiamo* ***teoria*** *sul linguaggio* $\mathcal{L}$ *ogni coppia* $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, Ax)$ *tale che* $Ax \subseteq Form_{\mathcal{L}}$*; gli elementi di* Ax *sono detti* ***assiomi*** *di* $\mathcal{T}$*; se* ϕ *è una formula su* $\mathcal{L}$*, scriviamo* $\phi \in \mathcal{T}$ *per dire* $\phi \in Ax$*.*

Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono due teorie su $\mathcal{L}$, scriviamo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ per dire che tutti gli assiomi di $\mathcal{T}$ sono anche assiomi di $\mathcal{T}'$.
Una teoria è detta **proposizionale** se il suo linguaggio è proposizionale.
Una teoria è detta **classica** se ha tra i suoi assiomi tutte le formule di tipo $\phi \vee \neg\phi$, per ogni $\phi \in Form_{\mathcal{L}}$.

Definizione 4.1.16. *Indichiamo con* $IL_{\mathcal{L}}$ *la teoria su* $\mathcal{L}$ *priva di assiomi.*

Definizione 4.1.17. *Indichiamo con* $CL_{\mathcal{L}}$ *la teoria i cui assiomi sono tutte e sole le formule del tipo* $\phi \vee \neg\phi$*, con* $\phi \in Form_{\mathcal{L}}$*; in altri termini,* $CL_{\mathcal{L}}$ *è la più piccola teoria classica su* $\mathcal{L}$*.*

Definizione 4.1.18. *Se* $\mathcal{T}$ *è una teoria su un linguaggio* $\mathcal{L}$*, indichiamo con* $\mathcal{T}^{Cl}$ *la teoria ottenuta da* $\mathcal{T}$ *aggiungendo agli assiomi di* $\mathcal{T}$ *tutte le formule di tipo* $\phi \vee \neg\phi$*, con* ϕ *formula di* $\mathcal{L}$*.*

4.2 Deduzioni naturali

Fissiamo un linguaggio del primo ordine $\mathcal{L} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$.
Diamo ora una definizione di **deduzione** (o 'derivazione') in $\mathcal{L}$ (il sistema di deduzione che introduciamo prende il nome di **deduzione naturale intuizionista**, DNI; quando si vorrà essere più precisi, al posto di 'deduzione' si parlerà di 'DNI-deduzione'). Tale definizione sarà data per induzione strutturale e, simultaneamente ad essa, verranno definite la nozioni di **conclusione** $Concl(\mathcal{D})$, insieme delle **ipotesi aperte** $Hp^{open}(\mathcal{D})$, **insieme delle foglie** $f(\mathcal{D})$ e **altezza** $h(\mathcal{D})$ relativi ad ogni deduzione $\mathcal{D}$. Come si vedrà, una deduzione sarà un diagramma ad albero composto da formule, come illustrato dal seguente esempio:

$$\cfrac{\phi \wedge \psi \to \phi \qquad \cfrac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \cdots}{\phi}\ \cdots$$

I punti in cui compaiono le singole formule vengono detti 'nodi' della deduzione. Come si vede nell'esempio, una singola formula - ϕ - può ripetersi più volte all'interno della deduzione; tali ripetizioni, considerate come oggetti distinti tra loro, verranno chiamate 'occorrenze' della formula, o 'etichette'. Nel seguito bisognerà tenere ben distinta ogni formula ϕ dalle etichette di ϕ che compaiono all'interno di una deduzione.

Passo base: Se ϕ è una formula, l'albero

$$\phi$$

è una deduzione. La conclusione è la formula ϕ. L'insieme delle ipotesi aperte e delle foglie coincidono e hanno come unico elemento l'unica 'etichetta ϕ' che compare nella deduzione. L'altezza è 1.

Notazione: se $\mathcal{D}$ è una deduzione, scriviamo

$$\begin{array}{c}[\phi]\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$$

per indicare la deduzione $\mathcal{D}$ e specificare al contempo che

· (1) L'insieme delle ipotesi aperte di $\mathcal{D}$ contiene un insieme non vuoto di occorrenze di ϕ; indichiamo con $[\phi]$ l'insieme di *tutte* le ipotesi aperte di $\mathcal{D}$ che sono occorrenze di ϕ.

· (2) $\mathcal{D}$ ha per conclusione la formula ψ

Passo induttivo: Siano $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ delle deduzioni. Allora una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ può essere costruita usando una delle seguenti regole

· Regola di introduzione di $\wedge$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\frac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \phi & \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}\ (\wedge I)_{DNI}$$

(si sottintende ovviamente che tale scrittura sia ben definita, ovvero che $\mathcal{D}_1$ abbia per conclusione la formula ϕ e $\mathcal{D}_2$ abbia per conclusione la formula ψ, altrimenti la regola non si applica; così anche nei punti a seguire)

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D}_1) \cup Hp^{open}(\mathcal{D}_2)$
$Concl(\mathcal{D}') := \phi \wedge \psi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D}_1) \cup f(\mathcal{D}_2)$
$h(\mathcal{D}') := max(h(\mathcal{D}_1), h(\mathcal{D}_2)) + 1$

· Regola di eliminazione a destra di $\wedge$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi}\ (\wedge E_{dx})_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Concl(\mathcal{D}') := \phi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di eliminazione a sinistra di $\wedge$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\ (\wedge E_{sx})_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Concl(\mathcal{D}') := \psi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di introduzione di $\rightarrow$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\phi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow I)_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D}) \setminus [\phi]$
(ovvero da $Hp^{open}(\mathcal{D})$ vanno tolte tutte le occorrenza di ϕ)
$Concl(\mathcal{D}') := \phi \rightarrow \psi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di eliminazione di $\rightarrow$ (modus ponens)
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\cfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \phi \rightarrow \psi & \phi\end{array}}{\psi}\ (\rightarrow E)_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D}_1) \cup Hp^{open}(\mathcal{D}_2)$
$Concl(\mathcal{D}') := \psi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D}_1) \cup f(\mathcal{D}_2)$
$h(\mathcal{D}') := max(h(\mathcal{D}_1), h(\mathcal{D}_2)) + 1$

· Regola di introduzione a destra di $\vee$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \phi\end{array}}{\phi \vee \psi}\ (\vee I_{dx})_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Concl(\mathcal{D}') := \phi \vee \psi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di introduzione a sinistra di $\vee$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\phi \vee \psi}\ (\vee I_{sx})_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Concl(\mathcal{D}') := \phi \vee \psi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di eliminazione di $\vee$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\dfrac{\begin{array}{c}\\ \mathcal{D}_1\\ \phi \vee \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\phi]\\ \mathcal{D}_2\\ \eta\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \mathcal{D}_3\\ \eta\end{array}}{\eta}\ (\vee E)_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D}_1) \cup (Hp^{open}(\mathcal{D}_2) \setminus [\phi]) \cup (Hp^{open}(\mathcal{D}_3) \setminus [\psi])$
$Concl(\mathcal{D}') := \eta$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D}_1) \cup f(\mathcal{D}_2) \cup f(\mathcal{D}_3)$
$h(\mathcal{D}') := max(h(\mathcal{D}_1), h(\mathcal{D}_2), h(\mathcal{D}_3)) + 1$

· Regola di introduzione di $\forall$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \phi\end{array}}{\forall^T x\phi}\ (\forall^T I)_{DNI}$$

per ogni tipo T, $x \in V_T$, tale che valgano almeno una delle seguenti condizioni

- $x \notin VL(\xi)$ per ogni formula ξ in $Hp^{open}(\mathcal{D})$
- $x \notin VL(\phi)$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Concl(\mathcal{D}') := \forall^T x\phi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di eliminazione di $\forall$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall^T x\phi\end{array}}{\phi[t/x]}\ (\forall^T E)_{DNI}$$

per ogni tipo T, $x \in V_T$ e $t : T$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Concl(\mathcal{D}') := \phi[t/x]$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di introduzione di $\exists$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \phi[t/x]\end{array}}{\exists^T x\phi}\ (\exists^T I)_{DNI}$$

per ogni tipo T, $x \in V_T$, $t : T$.

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Concl(\mathcal{D}') := \exists^T x\phi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola di eliminazione di $\exists$
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\dfrac{\begin{array}{c}\\ \mathcal{D}_1\\ \exists^T x\phi\end{array}\quad\begin{array}{c}[\phi]\\ \mathcal{D}_2\\ \psi\end{array}}{\psi}\ (\exists^T E)_{DNI}$$

per ogni tipo T e $x \in V_T$ tale che valga almeno una delle seguenti due condizioni

– $x \notin VL(\xi)$ per ogni ξ in $Hp^{open}(\mathcal{D}_2)\setminus [\phi]$; $x \notin VL(\psi)$
– $x \notin VL(\phi)$.

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D}_1) \cup (Hp^{open}(\mathcal{D}_2) \setminus [\phi])$
$Concl(\mathcal{D}') := \psi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D}_1) \cup f(\mathcal{D}_2)$
$h(\mathcal{D}') := max(h(\mathcal{D}_1), h(\mathcal{D}_2)) + 1$

· Regola del falso (ex falso quodlibet)
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \bot\end{matrix}}{\phi}\ (\bot)_{DNI}$$

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D})$
$Conc(\mathcal{D}') := \phi$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D})$
$h(\mathcal{D}') := h(\mathcal{D}) + 1$

· Regola dell'uguaglianza.
Una nuova deduzione $\mathcal{D}'$ è data da

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \phi[t/x]\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ t =_T u\end{matrix}}{\phi[u/x]}\ (=_T)_{DNI}$$

per ogni tipo T, $x \in V_T$, $t : T$, $u : T$.

$Hp^{open}(\mathcal{D}') := Hp^{open}(\mathcal{D}_1) \cup (Hp^{open}(\mathcal{D}_2)$
$Concl(\mathcal{D}') := \phi[u/x]$
$f(\mathcal{D}') := f(\mathcal{D}_1) \cup f(\mathcal{D}_2)$
$h(\mathcal{D}') := max(h(\mathcal{D}_1), h(\mathcal{D}_2)) + 1$

Ciò conclude la definizione.
Chiamiamo **premesse** (o ipotesi) di una deduzione $\mathcal{D}$ tutte le formule che hanno occorrenze nelle foglie di $\mathcal{D}$.
Chiamiamo 'deduzione di ϕ' ogni deduzione che ha per conclusione ϕ.

Definizione 4.2.1. *Sia Γ un insieme finito, anche vuoto, di formule di $\mathcal{L}$; sia $\mathcal{T}$ una teoria di $\mathcal{L}$ e ϕ una formula di $\mathcal{L}$; allora scriviamo $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi$ per dire che esiste una deduzione di ϕ in cui ogni premessa o è una formula di Γ, o è un assioma di $\mathcal{T}$ oppure è una formula del tipo $t = t$, per qualche termine t di $\mathcal{L}$; se Γ è l'insieme vuoto, allora scriviamo $\vdash_{\mathcal{T}} \phi$ per dire che esiste una deduzione con conclusione ϕ di cui ogni premessa o è un assioma* *di $\mathcal{T}$ oppure è una formula del tipo $t = t$, per qualche termine t di $\mathcal{L}$; ogni deduzione di questo tipo viene detta **dimostrazione** di ϕ in $\mathcal{T}$, e ϕ viene detta **teorema** di $\mathcal{T}$ (o, equivalentemente, **formula dimostrabile** in $\mathcal{T}$); diciamo che $\mathcal{T}$ **dimostra** ϕ se $\vdash_{\mathcal{T}} \phi$, ovvero se ϕ è un teorema di $\mathcal{T}$.*

Banalmente, tutti gli assiomi di una teoria sono teoremi della teoria.
Osserviamo che se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono due teorie su $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}_1} \phi$ implica $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}_2} \phi$.
Da questa osservazione segue subito che $\Gamma \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \phi$ se e solo se per ogni teoria $\mathcal{T}$ su $\mathcal{L}$ si ha $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi$.

Definizione 4.2.2. *Una teoria $\mathcal{T}$ è detta **consistente** se non dimostra $\perp$. Se invece $\perp$ è dimostrabile in $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ è detta **inconsistente**.*

Si osservi che, grazie all'*ex falso quodlibet*, una teoria inconsistente dimostra ogni formula (e per questo motivo la regola *ex falso quodlibet* è anche detta *principio di esplosione*, perché fa 'esplodere' il sistema rendendo tutto dimostrabile).

Proposizione 4.2.1.

$\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} (\phi \sqcap \psi) \sqcap \eta$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \sqcap (\psi \sqcap \eta)$

$\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \sqcap \psi$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \psi \sqcap \phi$

$\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} (\phi \sqcap \psi) \sqcup \eta$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} (\phi \sqcup \eta) \sqcap (\psi \sqcup \eta)$

dove $\sqcap \equiv \wedge, \vee$ *e* $\sqcup \equiv \wedge, \vee$

Poniamo

- $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{n+1} := (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \wedge \phi_{n+1}$
- $\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_{n+1} := (\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n) \vee \phi_{n+1}$

Proposizione 4.2.2.

- $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi_1$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi_2$ *e* ... *e* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi_n$

- $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ *se e solo se* $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \wedge \cdots \wedge \phi_n \to \psi$

$\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \psi$ *se e solo se* $\Gamma, \phi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$

Proposizione 4.2.3. *Sia Γ una lista di formule di $\mathcal{L}$, ψ una formula di $\mathcal{L}$, $\mathcal{T}$ una teoria su $\mathcal{L}$. Allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ se e solo se esistono $\phi_1, \ldots, \phi_n$ assiomi di $\mathcal{T}$ tali che $\Gamma, \phi_1, \ldots, \phi_n \vdash_{IL} \psi$*

Osservazione 4.2.1 (Proprietà di disgiunzione e di esistenza)**.** *In $IL_{\mathcal{L}}$ valgono le seguenti importanti proprietà:*

- $\Gamma \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \phi_1$ *o* $\Gamma \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \phi_2$ *o* $\ldots$ *o* $\Gamma \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \phi_n$

- *Sia* ϕ *una formula di* $\mathcal{L}$ *avente come unica variabile libera* x, *di tipo* T; *allora* $\Gamma \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \exists^T x\phi$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \phi[t/x]$ *per qualche termine* t *di tipo* T *di* $\mathcal{L}$

Due formule ϕ e ψ sono dette (sintatticamente) **equivalenti** rispetto a una teoria $\mathcal{T}$ se $\phi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ e $\psi \vdash_{\mathcal{T}} \phi$ (o, in altri termini, se $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \leftrightarrow \psi$).
Il seguente fatto è di semplice verifica: se $\mathcal{T}$ e ϕ sono una teoria e una formula sul linguaggio $\mathcal{L}$, allora ϕ è un teorema di $\mathcal{T}$ se e solo se ϕ è equivalente a $\top$ in $\mathcal{T}$.
Due formule ϕ e ψ di $\mathcal{L}$ sono dette (intuizionisticamente) equivalenti se sono equivalenti rispetto a $IL_{\mathcal{L}}$ (e dunque rispetto a ogni teoria su $\mathcal{L}$); sono invece dette **classicamente equivalenti** se sono equivalenti rispetto a $CL_{\mathcal{L}}$ (e dunque rispetto a ogni teoria classica su $\mathcal{L}$).

Proposizione 4.2.4 (Teorema di Glivenko)**.** *Sia* $\mathcal{L}$ *un linguaggio proposizionale e* ϕ *una formula di* $\mathcal{L}$ *e* Γ *un insieme finito di formule di* $\mathcal{L}$. *Allora*

$$\Gamma \vdash_{Cl_{\mathcal{L}}} \phi \text{ se e solo se } \Gamma \vdash_{Il_{\mathcal{L}}} \neg\neg\phi$$

Proposizione 4.2.5 (Traduzione di Gödel-Gentzen)**.** *Sia* $\mathcal{L}$ *un linguaggio tipato del primo ordine. Definiamo la seguente funzione* $\eta \mapsto \eta^N$ *da* $Form_{\mathcal{L}}$ *in* $Form_{\mathcal{L}}$:

- $\phi^N = \neg\neg\phi$ *se* ϕ *è una formula atomica*
- $(\phi \wedge \psi)^N = \phi^N \wedge \psi^N$
- $(\phi \vee \psi)^N = \neg(\neg\phi^N \wedge \neg\psi^N)$
- $(\phi \to \psi)^N = \phi^N \to \psi^N$
- $(\neg\phi)^N = \neg\phi^N$
- $(\forall^T x\phi)^N = \forall^T x\phi^N$
- $(\exists^T x\phi)^N = \neg\forall^T x\neg\phi^N$

per ogni $\phi, \psi \in Form_{\mathcal{L}}$.
Se Γ *è un insieme di formule di* $\mathcal{L}$, *poniamo* $\Gamma^N := \{\gamma^N : \gamma \in \Gamma\}$.
Allora:

$$\Gamma \vdash_{CL_{\mathcal{L}}} \phi \text{ se e solo se } \Gamma^N \vdash_{IL_{\mathcal{L}}} \phi^N$$

Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due teorie sul linguaggio $\mathcal{L}$. Diciamo che $\mathcal{T}'$ è una teoria **più forte** di $\mathcal{T}$ se ogni assioma di $\mathcal{T}$ è un teorema di $\mathcal{T}'$; è facile verificare che $\mathcal{T}'$ è più forte di $\mathcal{T}$ se e solo se, per ogni $\phi \in Form_{\mathcal{L}}$, si ha che $\vdash_{\mathcal{T}} \phi$ implica $\vdash_{\mathcal{T}'} \phi$; ovvero: ogni teorema di $\mathcal{T}$ è un teorema di $\mathcal{T}'$.
Diciamo che $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono **equivalenti** - in simboli: $\mathcal{T} \simeq \mathcal{T}'$ - se $\mathcal{T}$ è più forte di $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}$ è più forte di $\mathcal{T}'$; in altri termini, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono detti equivalenti se dimostrano le stesse formule, hanno cioè gli stessi teoremi. Si verifica facilmente che $\simeq$ è una relazione di equivalenza sull'insieme delle teorie sul linguaggio $\mathcal{L}$.

4.3 Sequenti e Corrispondenza di Curry-Howard

Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$.
Se ϕ, …, ϕ_n, ψ sono formule, Γ_1, …, Γ_n, Δ sono insiemi finiti, anche vuoti, di formule e $\mathcal{T}$ una teoria su $\mathcal{L}$, scriviamo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{T}} \phi_1 \qquad \dots \qquad \Gamma_n \vdash_{\mathcal{T}} \phi_n}{\Delta \vdash_{\mathcal{T}} \psi}$$

per dire che se $\Gamma_1 \vdash_{\mathcal{T}} \phi$, …, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{T}} \phi$, allora $\Delta \vdash_{\mathcal{T}} \psi$.
Notazione: per semplificare la notazione rappresenteremo un insieme finito di formule $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ semplicemente scrivendo la lista dei suoi elementi: $\phi_1, \dots, \phi_n$; coerentemente con tale notazione, se Γ_1 e Γ_2 sono due insiemi finiti di formule, scriviamo Γ_1, Γ_2 per indicare l'insieme $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
È facile verificare, per induzione sull'altezza delle dimostrazioni, che vale la seguente proposizione

Proposizione 4.3.1. *Per ogni ϕ, ψ, $\eta \in Form_{\mathcal{L}}$, per ogni insieme finito di formule Γ e Δ su $\mathcal{L}$, per ogni tipo T di $\mathcal{L}$, per ogni variabile $x \in V_T$, per ogni termine $u : T$ e $t : T$ e per ogni teoria $\mathcal{T}$ su $\mathcal{L}$ valgono i seguenti (mettiamo delle etichette a fianco delle barre orizzontali)*

1)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \psi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \wedge \psi}\,[\wedge I] \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi}\,[\wedge E_{dx}] \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \psi}\,[\wedge E_{sx}]$$

2)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \psi \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \psi}\,[\to E] \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \psi}{\Gamma \setminus \{\phi\} \vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \psi}\,[\to I]$$

3)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \vee \psi}\,[\vee I_{sx}] \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \vee \psi}\,[\vee I_{dx}]$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi \vee \psi \qquad \Gamma, \phi \vdash_{\mathcal{T}} \eta \qquad \Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{T}} \eta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \eta}\,[\rightarrow E]$$

4)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \forall^T x\phi}\,[\forall^T I] \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \forall^T x\phi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi[t/x]}\,[\forall^T E]$$

5)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi[t/x]}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \exists^T x\phi}\,[\exists^T I] \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \exists^T x\phi \qquad \Gamma, \phi \vdash_{\mathcal{T}} \psi}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \psi}\,[\exists^T E]$$

6)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \bot}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi}\,[\bot]$$

7)

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} t =_T u \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi[t/x]}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi[t/x]}\,[=_T]$$

8)

$$\frac{\Gamma \setminus \{\phi\} \vdash_{\mathcal{T}} \eta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \eta}\,[indeb]$$

ove tali scritture siano definite, ovvero qualora vengano rispettate le seguenti clausole:

- *In* $[\forall^T\ I]$*:* $x \notin VL(\Gamma) := \cup_{\gamma\in\Gamma}(VL(\gamma))$

- *In* $[\exists^T E]$*:* $x \notin VL(\Gamma) \cup VL(\phi)$

Questa proposizione ci suggerisce una riformulazione alternativa del concetto di deduzione; per distinguere questo nuovo concetto dal precedente, useremo un asterisco: deduzione*.
Innanzitutto notiamo che la proposizione fornisce un insieme di regole; per esempio abbiamo la regola data dalla scrittura

$$\frac{\Gamma \vdash \exists^T x\phi \qquad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi}\,[\exists^T E]$$

Un'**istanza** o **applicazione** di tale regola è ottenuta sostituendo ϕ e ψ con formule, Γ con un insieme finito di formule, T con un tipo, x con una variabile di tipo T, in modo da rispettare la clausola indicata dalla proposizione: $x \notin VL(\Gamma) \cup VL(\phi)$.
Chiamiamo l'insieme di regole così ottenute 'l'insieme delle regole per il calcolo in deduzione naturale intuizionista (DNI) con sequenti'.
Chiamiamo **sequenti** gli oggetti della forma $\Gamma \vdash \phi$, dove Γ è un insieme finito di formule, mentre ϕ è una singola formula.

Definizione 4.3.1. *Una **deduzione*** è così definita:*

- *Passo base: Per ogni insieme finito di formule Γ e per ogni formula ϕ*

$$\Gamma \vdash \phi$$

  è una deduzione*, di altezza 1, avente come unica foglia l'etichetta $\Gamma \vdash \phi$.
  La conclusione della deduzione* è il sequente $\Gamma \vdash \phi$

- *Passo induttivo: Siano $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ deduzioni* di conclusione, rispettivamente, $\Gamma_1 \vdash \phi_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \phi_n$ e se*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n \vdash \phi_n}{\Delta \vdash \psi} \ldots$$

  è l'applicazione di una regola del calcolo naturale intuizionista dei sequenti (ovvero una delle regole date dalla proposizione 4.3.1), allora il seguente diagramma ad albero $\mathcal{D}'$

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \ldots \quad \mathcal{D}_n}{\Delta \vdash \psi} \ldots$$

  è una deduzione*, di altezza $h(\mathcal{D}') := max(h(\mathcal{D}_1), \ldots, h(\mathcal{D}_n)) + 1$. L'insieme delle foglie di $\mathcal{D}'$ è dato dall'unione degli insiemi delle foglie di tutte le deduzioni* $\mathcal{D}_i$. La conclusione è $\Delta \vdash \psi$.

Analogamente a quanto fatto prima, chiamiamo 'premesse' di una deduzione* $\mathcal{D}$ i sequenti che compaiono nelle foglie.
Una **dimostrazione*** in una teoria $\mathcal{T}$ sul linguaggio $\mathcal{L}$ è una deduzione* le cui premesse possono essere solo dei seguenti tre tipi:

- Sequenti del tipo $\phi \vdash \phi$, con $\phi \in Form_{\mathcal{L}}$
- Sequenti del tipo $\vdash t =_T t$, dove t è un termine di $\mathcal{L}$ di tipo T

· Sequenti del tipo $\vdash \phi$, dove ϕ è un assioma di $\mathcal{T}$

Se $\mathcal{T}$ è una teoria su $\mathcal{L}$ e Γ è un insieme finito di formule, scriviamo $\Gamma \vdash^{\star}_{\mathcal{T}} \phi$ per dire che esiste una dimostrazione* che ha per conclusione un sequente $\Gamma' \vdash \phi$, con $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Una formula ϕ è detta **dimostrabile*** in $\mathcal{T}$ a partire da Γ se e solo se $\Gamma \vdash^{\star}_{\mathcal{T}} \phi$; se Γ è l'insieme vuoto, diciamo semplicemente che ϕ è dimostrabile, o anche che ϕ è un **teorema*** in $\mathcal{T}$.

Proposizione 4.3.2. *Sia Γ una lista di formule di $\mathcal{L}$, ϕ una formula di $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$ una teoria su $\mathcal{L}$. Allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi$ se e solo se $\Gamma \vdash^{\star}_{\mathcal{T}} \phi$.*

D'ora in poi useremo solamente il calcolo in deduzione naturale con sequenti, quindi smetteremo di adoperare l'asterisco $\star$ come fatto finora (d'altronde la precedente proposizione ci dice che, in entrambi i casi, si ottiene un'identica nozione di dimostrabilità). Con 'regole del calcolo DNI' intenderemo sempre le regole della deduzione naturale intuizionista con sequenti, e con le espressioni 'DNI-deduzione', 'DNI-dimostrazione', ... (o semplicemente 'deduzione', 'dimostrazione', ...) intenderemo sempre riferirci alle deduzione e alle dimostrazioni nel senso della deduzione naturale intuizionista con sequenti.
Si osservi che la forma delle dimostrazioni ottenute adoperando il calcolo dei sequenti ricorda quella delle TA_λ-dimostrazioni; in effetti una TA_λ-dimostrazione $\mathcal{D}$ può essere associata a una DNI-dimostrazione $\mathcal{D}^\star$ in un modo molto semplice che ora illustriamo; tale associazione è nota come **corrispondenza di Curry-Howard**.

· Prendiamo come insieme degli **atomi** l'insieme delle **costanti proposizionali** $\boldsymbol{P}$ del linguaggio $\boldsymbol{L}$. Per ognuna di queste costanti proposizionali supponiamo di avere un insieme di variabili.

· Identifichiamo il simbolo $\to$ relativo ai linguaggi del primo ordine con il simbolo $\to$ relativo ai λ-termini; così facendo, l'insieme dei **tipi** $\mathbf{Type}_{\boldsymbol{P}}$ viene a coincidere con l'insieme delle **formule implicative**, ovvero il più piccolo insieme contenente $\boldsymbol{P}$ e chiuso rispetto a $\to$ (nel senso che, se esso contiene ϕ e ψ, allora contiene pure $\phi \to \psi$).

· A ogni TA_λ-contesto $\Gamma = x_1 : \phi_1, \ldots, x_n : \phi_n$ associamo l'insieme di formule $\Gamma^\star = \phi_1, \ldots, \phi_n$ (come già precisato, sia per i TA_λ contesti che per gli insiemi finiti di formule rimuoviamo generalmente le parentesi graffe).

Definizione 4.3.2. *Possiamo ora procedere ad associare ad ogni TA_λ- dimostrazione una DNI-dimostrazione:*

· *Se $\mathcal{D}$ è la TA_λ-dimostrazione*

$$x : \phi \vdash x : \phi$$

allora a $\mathcal{D}$ associamo la seguente DNI-dimostrazione $\mathcal{D}^\star$:

$$\phi \vdash \phi$$

· *Se $\mathcal{D}$ è la TA_λ-dimostrazione*

$$\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma - x \vdash \lambda x.t : \phi \to \psi} \to I$$

allora ad essa associamo la seguente DNI-dimostrazione $\mathcal{D}^\star$:

$$\frac{\mathcal{D}_1^\star}{(\Gamma - x)^\star \vdash \phi \to \psi} \; [\to I]$$

dove $\mathcal{D}_1^\star$ è la DNI-dimostrazione associata (induttivamente) a $\mathcal{D}_1$

· *Se $\mathcal{D}$ è la TA_λ-dimostrazione*

$$\frac{\mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{D}_2}{\Gamma \vdash qu : \psi} \to E$$

allora ad essa associamo la seguente DNI-dimostrazione $\mathcal{D}^\star$:

$$\frac{\mathcal{D}_1^\star \qquad \mathcal{D}_2^\star}{\Gamma^\star \vdash \psi} \; [\to E]$$

dove $\mathcal{D}_1^\star$ e $\mathcal{D}_2^\star$ sono le DNI-dimostrazioni associate (induttivamente) a $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$

Si verifica facilmente che questa definizione è ben posta, nel senso che quelle che otteniamo sono proprio DNI-deduzioni (del calcolo intuizionista dei sequenti).

Proposizione 4.3.3. *Siano $x_1, \dots, x_n$ variabili distinte e sia $\mathcal{D}$ una TA_λ-deduzione con conclusione $x_1 : \alpha_1, \dots, x_n : \alpha_n \vdash t : \beta$. Allora $\mathcal{D}^\star$ è una DNI-dimostrazione di $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$*

Facciamo ora l'operazione inversa: ad ogni DNI-deduzione associamo una TA_λ deduzione.

Definizione 4.3.3. *Sia $\mathcal{D}$ una DNI-deduzione, avente come premesse solo formule implicative, e in cui si applicano solo le regole di introduzione e eliminazione di $\rightarrow$. A $\mathcal{D}$ associamo una TA_λ-deduzione $\mathcal{D}_\lambda$, definita per ricorsione sull'altezza di $\mathcal{D}$ nel seguente modo:*

- *Se $\mathcal{D}$ è una dimostrazione del tipo $\phi \vdash \phi$, allora ad essa associamo la TA_λ-deduzione $x : \phi \vdash x : \phi$, con x una qualunque variabile di tipo ϕ*

- *Se $\mathcal{D}$ si conclude applicando la regola $[\rightarrow E]$ alle DNI-deduzioni $\mathcal{D}^1$ e $\mathcal{D}^2$, e se $\mathcal{D}^1$ e $\mathcal{D}^2$ hanno conclusione rispettivamente $\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \phi$, allora cambiamo tutte le variabili in ${\mathcal{D}^2}_\lambda$ in modo che ${\mathcal{D}^2}_\lambda$ non abbia variabili in comune con ${\mathcal{D}^1}_\lambda$; quindi applichiamo a ${\mathcal{D}^1}_\lambda$ e al nuovo ${\mathcal{D}^2}_\lambda$ la regola $\rightarrow E$: otteniamo così $\mathcal{D}_\lambda$*

- *Si procede similmente per le DNI-deduzioni terminanti con l'applicazione di $[\rightarrow_I]$*

Teorema 4.3.1 (Curry-Howard)**.**

- (1) *Le formule implicative dimostrabili in DNI sono esattamente i tipi dei λ-termini chiusi*

- (2) $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ *è dimostrabile in DNI se e solo se esistono un termine t di TA_λ e delle variabili distinte $x_1, \dots, x_n$ tali che $x_1 : \alpha_1, \dots, x_n : \alpha_n \vdash t : \beta$ è dimostrabile in TA_λ*

- (3) *La funzione $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}^\star$ dà una corrispondenza $1:1$ tra le deduzioni in TA_λ (identificate a meno di cambio di variabile nei soggetti dei sequenti) e le deduzioni di DNI aventi nelle premesse solo formule implicative e in cui si applicano solo le regole di eliminazione e introduzione di $\rightarrow$; l'inversa di $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}^\star$ è $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}_\lambda$*

Dimostrazione. Si veda [4], cap. 6. □

Questo teorema traccia dunque una corrispondenza importante tra la teoria TA_λ (che è un particolare sistema di λ-calcolo con tipi semplici) e un 'frammento' del sistema di deduzione naturale intuizionista, DNI.
L'importanza di questa corrispondenza, in termini molto generici, sta nel costruire un ponte tra il costruttivismo matematico - che fa uso della DNI come sistema deduttivo - e la teoria della computabilità; i sistemi di λ-calcolo sono infatti dei modelli universali di computazione, che possono essere usati per simulare ogni macchina di Turing; daremo più avanti una definizione di macchina di Turing, ma non affronteremo in modo esplicito il legame tra macchina di Turing e λ-calcolo.

4.4 Algebre di Lindenbaum-Tarski

Andiamo a chiarire finalmente il collegamento tra linguaggi e algebre di Heyting.

Proposizione 4.4.1. *Sia* $\mathcal{L} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$ *un linguaggio tipato del primo ordine e* $\mathcal{T}$ *una teoria su* $\mathcal{L}$*. Allora* $(Form_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{T}}, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *è una pre-algebra di Heyting.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a dimostrare le proprietà relative a $\to$; il resto è un facile esercizio.

- Supponiamo che $\eta \vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \psi$. Sia $\mathcal{D}$ una dimostrazione di $\eta \vdash \phi \to \psi$. Allora abbiamo la seguente dimostrazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\eta \wedge \phi \vdash \eta \wedge \phi}{\eta \wedge \phi \vdash \eta} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\eta \vdash \phi \to \psi}}{\eta \wedge \phi, \eta \vdash \phi \to \psi}}{\eta \wedge \phi \vdash \eta \to (\phi \to \psi)}}{\eta \wedge \phi \vdash \phi \to \psi} \qquad \dfrac{\eta \wedge \phi \vdash \eta \wedge \phi}{\eta \wedge \phi \vdash \phi}}{\eta \wedge \phi \vdash \psi}$$

e dunque $\eta \wedge \phi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$

- Supponiamo che $\eta \wedge \phi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$. Sia $\mathcal{D}$ una dimostrazione di $\eta \wedge \phi \vdash \psi$. Allora abbiamo la seguente dimostrazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\eta \vdash \eta}{\eta, \phi \vdash \eta} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \vdash \phi}{\phi, \eta \vdash \phi}}{\eta, \phi \vdash \phi}}{\eta, \phi \vdash \eta \wedge \phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{\vdash \eta \wedge \phi \to \psi}}{\eta \vdash \eta \wedge \phi \to \psi}}{\eta, \phi \vdash \eta \wedge \phi \to \psi}}{\eta, \phi \vdash \psi}}{\eta \vdash \phi \to \psi}$$

da cui concludiamo che $\eta \vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \psi$. □

Poniamo $\mathbf{Form}_{\mathcal{L},\mathcal{T}} := (Form_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{T}}, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ e, coerentemente alle notazioni già introdotte (Def. 3.4.3), indichiamo con $[\mathbf{Form}_{\mathcal{L},\mathcal{T}}]$ l'algebra di Heyting quoziente di $\mathbf{Form}_{\mathcal{L},\mathcal{T}}$. L'algebra di Heyting $[\mathbf{Form}_{\mathcal{L},\mathcal{T}}]$ è detta **algebra di Lindenbaum-Tarski** (intuizionista) indotta dalla teoria $\mathcal{T}$.
Si dimostra allo stesso modo che, se $x_1, \ldots, x_n$ sono variabili distinte del linguaggio $\mathcal{L}$, allora $\mathbf{Form}_{\mathcal{L},\mathcal{T}}^{[x_1,\ldots,x_n]} := (Form_{\mathcal{L}}{}^{[x_1,\ldots,x_n]}, \vdash_{\mathcal{T}}, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ è una pre-algebra di Heyting (ricordiamo che $Form_{\mathcal{L}}{}^{[x_1,\ldots,x_n]}$ è l'insieme delle formule del linguaggio $\mathcal{L}$ le cui variabili libere sono comprese in $\{x_1, \ldots, x_n\}$, come definito in 4.1.10).

Osservazione 4.4.1. *Si osservi che,* $\boldsymbol{Form}_{\mathcal{L},\mathcal{T}}$ *è di Boole se e solo se* $\mathcal{T}$ *dimostra tutte le formule di tipo* $\phi \vee \neg\, \phi$*; in particolare,* $\boldsymbol{Form}_{\mathcal{L},\mathcal{T}^{Cl}}$ *è di Boole per ogni teoria* $\mathcal{T}$ *(dove* $\mathcal{T}^{Cl}$ *è stato definito in 4.1.18).*

Capitolo 5

Strutture Implicative

5.1 Definizione di struttura implicativa

Definizione 5.1.1. *Una* ***struttura implicativa*** *è una settupla* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$*, dove:*

· (1) $(A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è un reticolo completo.*

· (2) $\rightarrow$ *è una funzione di* $A \times A$ *in* A *con le seguenti proprietà:*

  – (2.1) *Se* $b \leq a$ *e* $a' \leq b'$*, allora* $a \rightarrow a' \leq b \rightarrow b'$

  – (2.2) $\wedge_{d \in D}(a \rightarrow d) = a \rightarrow \wedge(D)$ *per ogni* $D \subseteq A$

  per ogni $a, a', b, b' \in A$.

Gli elementi di una struttura implicativa vengono detti **realizzatori generalizzati**.

Osservazione 5.1.1. *L'assioma* (2.1) *può essere sostituito col seguente:*

· (2.1*) *Per ogni* $c \in A$ *la funzione* $c \rightarrow \cdot$ *è monotona e la funzione* $\cdot \rightarrow c$ *è anti-monotona.*

Infatti: supponiamo che $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$ *sia una struttura implicativa; allora* $a \leq b$ *implica* $c \leq c$ *e* $a \leq b$*, implica* $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ *, per ogni* $a, b, c \in A$.
D'altra parte $a \leq b$ *implica* $a \leq b$ *e* $c \leq c$*, implica* $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$*, per ogni* $a, b, c \in A$.
Viceversa, mostriamo che se $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è un reticolo completo e* $\rightarrow$ *è una funzione di* $A \times A$ *in* A *che rispetta l'assioma* (2.1*)*, allora vale l'assioma* (2.1)*:* $b \leq a$ *e* $a' \leq b'$ *implica* $a \rightarrow a' \leq a \rightarrow b'$ *e* $a \rightarrow b' \leq b \rightarrow b'$*, implica* $a \rightarrow a' \leq b \rightarrow b'$.

Definizione 5.1.2. *Per semplificare le notazioni, poniamo*

$$a_{n+1} \to \cdots \to a_1 := a_{n+1} \to (a_n \to \cdots \to a_1)$$
$$\neg_H a := (a \to \bot)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, a, $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$.

Scriveremo generalmente $\neg a$ al posto di $\neg_H a$, se ciò non creerà ambiguità.

Osservazione 5.1.2. *L'assioma* (2.2) *può essere sostituito con la seguente coppia di assiomi*

- (2.2*) $\wedge_{d\in D}(a \to d) = a \to \wedge(D)$ *per ogni* $a \in A$, $D \subseteq A$, $D \neq \varnothing$
- (2.2**) $\top = a \to \top$ *per ogni* $a \in A$

È sufficiente notare, infatti, che $\wedge(\varnothing) = \top$ *e* $\wedge_{d\in\varnothing}(a \to d) = \top$, *per ogni* $a \in A$.

Osservazione 5.1.3. *L'assioma* (2.2**) *può essere sostituito dal seguente assioma*

$$(2.2^{\star\star\star})\ \top = \top \to \top$$

Infatti, se $\top = a \to \top$ *per ogni* $a \in A$, *allora, in particolare,* $\top = \top \to \top$; *viceversa, se* $\top = \top \to \top$, *allora* $\top = a \to \top$ *per ogni* $a \in A$, *perché* $\cdot \to \top$ *è anti-monotona.*

Definizione 5.1.3. *Chiamiamo* ***struttura quasi-implicativa*** *ogni settupla* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *che soddisfa gli assiomi* (1), (2.1) *e* (2.2*), *ma non necessariamente il* (2.2**). *Le strutture quasi-implicative avranno poco peso in questa tesi, sebbene molte delle proprietà che mostreremo in seguito non richiederanno l'assunzione dell'assioma* (2.2**). *Il motivo di questa scelta sarà chiaro nel paragrafo 11.2.*

5.2 Applicazione in strutture implicative

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Definizione 5.2.1. *Dati due elementi* a *e* b *in* A, *chiamiamo* ***applicazione*** *di* a *e* b *l'elemento*

$$a \cdot_H b := \wedge(\{c \in A : a \leq b \to c\})$$

Nel seguito ometteremo generalmente il pedice H in $\cdot_H$, quando ciò non creerà ambiguità.
Definiamo induttivamente $a_1 \cdot ... \cdot a_{n+1} := (a_1 \cdot ... \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$.
Inoltre, per semplificare ulteriormente le notazioni, poniamo $a \to b \cdot c := a \to (b \cdot c)$ e $a \cdot b \to c := (a \cdot b) \to c$, per ogni $a, b, c \in A$.

Proposizione 5.2.1. *Per ogni a, a', b, b' in A:*

- $\cdot$ (1) *$a \leq a'$ e $b \leq b'$ implica $a \cdot b \leq a' \cdot b'$.*
- $\cdot$ (2) *$(a \to b) \cdot a \leq b$.*
- $\cdot$ (3) *$a \leq b \to a \cdot b$.*
- $\cdot$ (4) *$a \cdot b \leq c$ se e solo se $a \leq b \to c$.*
- $\cdot$ (5) *$\perp \cdot b = \perp$.*

Dimostrazione.

(1) $b \leq b'$ implica $b' \to c \leq b \to c$ (perché $\cdot \to c$ è antimonotona, per l'Oss. 5.1.1). Quindi $a \leq a'$ e $b \leq b'$ implica $\{c \in A : a' \leq b' \to c\} \subseteq \{c \in A : a \leq b \to c\}$, implica $\wedge(\{c \in A : a \leq b \to c\}) \leq \wedge(\{c \in A : a' \leq b' \to c\})$, implica $a \cdot b \leq a' \cdot b'$

(2) $b \in \{c \in A : a \to b \leq a \to c\}$ implica $\wedge(\{c \in A : a \to b \leq a \to c\}) \leq b$, implica $(a \to b) \cdot a \leq b$

(3) $b \to a \cdot b = b \to \wedge(\{c \in A : a \leq b \to c\}) = \wedge(\{b \to c : c \in A, a \leq b \to c\}) \geq a$

(4) $a \cdot b \leq c$ implica $b \to a \cdot b \leq b \to c$ (Oss. 5.1.1), implica $a \leq b \to c$ (usando il punto (3) e la transitività di $\leq$).
Viceversa: $a \leq b \to c$ implica $c \in \{x \in A : a \leq b \to x\}$ implica $\wedge(\{x \in A : a \leq b \to x\}) \leq c$ implica $a \cdot b \leq c$

(5) $\perp \leq b \to \perp$ implica $\perp \cdot b \leq \perp$ (punto (4)), implica $\perp \cdot b = \perp$ □

Osservazione 5.2.1. *I precedenti risultati (Prop. 5.2.1) possono essere generalizzati mediante una semplice induzione:*

- $\cdot$ (1) *Se $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$, allora $a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq b_1 \cdot ... \cdot b_n$*
- $\cdot$ (2) *$(a_1 \to \cdots \to a_n \to b) \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq b$*
- $\cdot$ (3) *$a \leq b_1 \to \ldots \to b_n \to a \cdot b_1 \cdot ... \cdot b_n$*
- $\cdot$ (4) *$a \cdot b_1 \cdot ... \cdot b_n \leq c$ se e solo se $a \leq b_1 \to \cdots \to b_n \to c$*

· (5) $\bot \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_n = \bot$

Definizione 5.2.2. *Definiamo* $\boldsymbol{\lambda}\phi := \wedge_{a\in A}(a \to \phi(a))$ *per ogni funzione* ϕ *da* A *in* A.

Proposizione 5.2.2.
(1) $\phi(a) \leq \gamma(a)$ *per ogni* $a \in A$ *implica* $\boldsymbol{\lambda}\phi \leq \boldsymbol{\lambda}\gamma$ *per ogni* $\phi, \gamma \in A^A$
(2) $(\boldsymbol{\lambda}\phi) \cdot a \leq \phi(a)$ *per ogni* $a \in A$, $\phi \in A^A$
(3) $a \leq \boldsymbol{\lambda}(a \cdot (-))$ *per ogni* $a \in A$

Dimostrazione.
(1) $\phi(a) \leq \gamma(a)$ implica $a \to \phi(a) \leq a \to \gamma(a)$, per ogni $a \in A$ (perché $a \to \cdot$ è monotona, per l'Oss. 5.1.1). Ciò implica $\wedge_{a\in A}(a \to \phi(a)) \leq \wedge_{a\in A}(a \to \gamma(a))$, ovvero $\boldsymbol{\lambda}\phi \leq \boldsymbol{\lambda}\gamma$ (Def. 5.2.2).

(2) $\boldsymbol{\lambda}\phi = \wedge_{a\in A}(a \to \phi(a))$ implica $\boldsymbol{\lambda}\phi \leq a \to \phi(a)$ per ogni $a \in A$, e dunque $(\boldsymbol{\lambda}\phi) \cdot a \leq \phi(a)$ per ogni $a \in A$ (Prop. 5.2.1).

(3) $a \leq b \to a \cdot b$ per ogni $b \in A$ implica $a \leq \wedge_{b\in A}(b \to a \cdot b)$, implica $a \leq \boldsymbol{\lambda}(a \cdot (-))$.

□

5.3 Valutazione di λ-termini

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Definizione 5.3.1. *Ad ogni* $t \in \Lambda_A^{[-]}$ *associamo un elemento* $t^{\star H} \in A$ *nel seguente modo*

· $a^{\star H} := a$

· $(tu)^{\star H} := t^{\star H} \cdot u^{\star H}$

· $(\lambda x.q)^{\star H} := \boldsymbol{\lambda}(q[\cdot/x]^{\star H}) = \wedge_{a\in A}(a \to q[a/x]^{\star H})$

per ogni $a \in A$, $x \in V$, $t, u \in \Lambda_A^{[-]}$, $q \in \Lambda_A^{[x]}$.
La funzione ${}^{\star H}$ *è detta* ***valutazione*** *in* H

Per semplificare le notazioni, scriveremo generalmente $t^\star$ al posto di $t^{\star H}$, quando ciò non creerà ambiguità.

Osservazione 5.3.1. *Si verifica facilmente che*

· $t =_\alpha u$ *implica* $t^\star = u^\star$

- $t^\star \leq t_1^\star$ *implica* $(ut)^\star \leq (ut_1)^\star$
- $t^\star \leq t_1^\star$ *implica* $(tu)^\star \leq (t_1 u)^\star$
- $t^\star \leq t_1^\star$ *implica* $(\lambda x.t)^\star \leq (\lambda x.t_1)^\star$

per ogni $u, t, t_1 \in \Lambda_A^{[-]}$, $x \in V$.

Lemma 5.3.1. *Sia* $\underline{x} \equiv x_1, \dots, x_n \in V$, $x_i \neq x_j$ *per ogni* $i \neq j$, $\underline{u} \equiv u_1, \dots, u_n \in \Lambda_A^{[-]}$, $t \in \Lambda_A^{[\underline{x}]}$. *Allora*

$$t[\underline{u}/\underline{x}]^\star = t[\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star$$

dove $\underline{u}/\underline{x} \equiv u_1/x_1, \dots, u_n/x_n$ *e* $\underline{u}^\star/\underline{x} \equiv u_1^\star/x_1, \dots, u_n^\star/x_n$.

Dimostrazione. Induzione sulla lunghezza m di t:

- $a[\underline{u}/\underline{x}]^\star = a^\star = a[\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star$
- $x_j[\underline{u}/\underline{x}]^\star = u_j^\star = u_j^{\star\star} = x_j[\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star$

per ogni $a \in A$, $j \in \{1, \dots, n\}$.
Se il termine t ha lunghezza $m + 1 \geq 2$, deve essere necessariamente di tipo pq, $\lambda x_j.p$ o $\lambda y.r$, con $y \notin \{\underline{x}\}$, $VL(p) \subseteq \{\underline{x}\}$, $VL(q) \subseteq \{\underline{x}\}$, $VL(r) \subseteq \{\underline{x}, y\}$; applico l'ipotesi induttiva su p, q e $r[y/a]$, che hanno lunghezza $\leq m$:

- $(pq)[\underline{u}/\underline{x}]^\star = p[\underline{u}/\underline{x}]^\star \cdot q[\underline{u}/\underline{x}]^\star = p[\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star \cdot q[\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star = (pq)[\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star$
- $(\lambda y.r)[\underline{u}/\underline{x}]^\star = (\lambda y.(r[\underline{u}/\underline{x}]))^\star = \wedge_{a\in A}(a \to r[\underline{u}/\underline{x}][a/y]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to r[a/y][\underline{u}/\underline{x}]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to r[a/y][\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to r[\underline{u}^\star/\underline{x}][a/y]^\star) = (\lambda y.r)[\underline{u}^\star/\underline{x}]^\star$
- $(\lambda x_j.p)[\underline{u}/\underline{x}]^\star = (\lambda x_j.(p[\underline{u}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}]))^\star = \wedge_{a\in A}(a \to p[\underline{u}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}][a/x_j]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to p[a/x_j][\underline{u}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}]^\star) = \dots$ proseguire come sopra ...

  dove si è posto $u^{(j)}/x^{(j)} \equiv u_1/x_1, \dots, \xcancel{u_j/x_j}, \dots, u_n/x_n$

$\square$

Proposizione 5.3.1. *Sia* $\underline{x} \equiv x_1, \dots, x_n \in V$, $x_i \neq x_j$ *per ogni* $i \neq j$, $t \in \Lambda_A^{[\underline{x}]}$, $\underline{\tau} \equiv \tau_1, \dots, \tau_n \in \Lambda_A^{[-]}$, $\underline{u} \equiv u_1, \dots, u_n \in \Lambda_A^{[-]}$, $\tau_i^\star \leq u_i^\star$ *per ogni* i. *Allora*

$$t[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star \leq t[\underline{u}/\underline{x}]^\star$$

Dimostrazione. Induzione sulla complessità dei λ-termini:

- $a[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star = a^\star = a[\underline{u}/\underline{x}]^\star \leq a[\underline{u}/\underline{x}]^\star$

- $x_j[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star = \tau_j^\star \leq u_j^\star = x_j[\underline{u}/\underline{x}]^\star$

- $(pq)[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star = p[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star \cdot q[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star \leq p[\underline{u}/\underline{x}]^\star \cdot q[\underline{u}/\underline{x}]^\star = (pq)[\underline{u}/\underline{x}]^\star$

- $(\lambda y.r)[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star = (\lambda y.(r[\underline{\tau}/\underline{x}]))^\star = \wedge_{a\in A}(a \to r[\underline{\tau}/\underline{x}][a/y]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to r[a/y][\underline{\tau}/\underline{x}]^\star) \leq \wedge_{a\in A}(a \to r[a/y][\underline{u}/\underline{x}]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to r[\underline{u}/\underline{x}][a/y]^\star) = (\lambda y.r)[\underline{u}/\underline{x}]^\star$

- $(\lambda x_j.p)[\underline{\tau}/\underline{x}]^\star = (\lambda x_j.(p[\underline{\tau}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}]))^\star = \wedge_{a\in A}(a \to p[\underline{\tau}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}][a/x_j]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to p[a/x_j][\underline{\tau}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}]^\star) \leq \wedge_{a\in A}(a \to p[a/x_j][\underline{u}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}]^\star) = \wedge_{a\in A}(a \to p[\underline{u}^{(j)}/\underline{x}^{(j)}][a/x_j]^\star) = (\lambda x_j.p)[\underline{u}/\underline{x}]^\star$

□

Proposizione 5.3.2. *Per ogni $t, u \in \Lambda_A^{[-]}$ abbiamo che*

· *$t \twoheadrightarrow_\beta u$ implica $t^\star \leq u^\star$*

· *$t \twoheadrightarrow_\eta u$ implica $u^\star \leq t^\star$*

($\twoheadrightarrow_\beta$ e $\twoheadrightarrow_\eta$ sono stati definiti in 1.1.15).

Dimostrazione.

$((\lambda x.p)q)^\star = (\lambda x.p)^\star \cdot q^\star = \boldsymbol{\lambda}(p[\cdot/x]^\star) \cdot q^\star \leq p[q^\star/x]^\star = p[q/x]^\star$ (Prop. 5.2.2)

$(\lambda x.qx)^\star = \boldsymbol{\lambda}((qx)[\cdot/x]^\star) = \boldsymbol{\lambda}(q^\star \cdot (-)) \geq q^\star$ (Prop. 5.2.2)
per ogni $q \in \Lambda_A^{[-]}$, $x \in V$, $p \in \Lambda_A^{[x]}$.
Si conclude grazie alla Oss. 5.3.1. □

Lemma 5.3.2. *Sia $\underline{a} \equiv a_n, \ldots, a_1 \in A$, $\underline{x} \equiv x_n, \ldots, x_1 \in V$, $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$, $t \in \Lambda_A^{[\underline{x}]}$. Allora*

$$(\lambda\underline{x}.t)^\star = \wedge_{\underline{a}\in A}(a_n \to \cdots \to a_1 \to t[\underline{a}/\underline{x}]^\star)$$

dove, al membro sinistro, $\underline{x} \equiv x_n \ldots x_1$

Dimostrazione. Induzione su n.

$(\lambda x_1.t)^\star = \wedge_{a_1\in A}(a_1 \to t[a_1/x_1]^\star)$ per definizione di $\star$.

$(\lambda x_{n+1}\underline{x}.t)^\star = \wedge_{a_{n+1}\in A}(a_{n+1} \to (\lambda\underline{x}.t)\ [a_{n+1}/x_{n+1}]^\star) = \wedge_{a_{n+1}\in A}\ (a_{n+1} \to (\lambda\underline{x}.(t[a_{n+1}/x_{n+1}]))^\star) = \wedge_{a_{n+1}\in A}(a_{n+1} \to a_n \to \cdots \to a_1 \to t[a_{n+1}/x_{n+1}][\underline{a}/\underline{x}]^\star) = \wedge_{a_{n+1}\in A}(a_{n+1} \to a_n \to \cdots \to a_1 \to t[a_{n+1}/x_{n+1}, \underline{a}/\underline{x}]^\star)$ □

5.4 Contesti di variabili

Definizione 5.4.1. *Sia A un insieme. Un* ***contesto (di variabili)*** *Γ in A è una scrittura del tipo $\Gamma \equiv x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n$, dove $a_1, \ldots, a_n \in A$, $x_1, \ldots, x_n \in V$, $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$; a_i è detto* ***tipo*** *della variabile x_i nel contesto Γ in A. Indichiamo con $Cont_A$ l'insieme dei contesti in A.*

Se $\Gamma \in Cont_A$, $a \in A$ e $x \in V$, scriviamo $x : a \in \Gamma$ per dire che $x : a$ compare nella lista Γ.
Se $\Gamma \equiv x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \in Cont_A$, poniamo $dom(\Gamma) := \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definizione 5.4.2. *Sia $\Gamma \equiv x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \in Cont_A$ e $t \in \Lambda_A^{[x_1,\ldots,x_n]}$. Definiamo:*

$$t[\Gamma] := t[a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n].$$

Consideriamo ora una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$. Siano $\Gamma, \Delta \in Cont_A$; poniamo $\Gamma \leq \Delta$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

- $dom(\Delta) \subseteq dom(\Gamma)$
- $x : a \in \Delta$, $x : b \in \Gamma$ implica $b \leq a$

per ogni $x \in V$, $a, b \in A$.

Definizione 5.4.3. *Sia $\Gamma \equiv x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \in Cont_A$ e $t \in \Lambda_A^{[x_1,\ldots,x_n]}$. Diamo la seguente definizione*

$$\Gamma \vdash t : a \text{ se e solo se } t[\Gamma]^\star \leq a.$$

dove * è stato definito in 5.3.1.

Proposizione 5.4.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ una struttura implicativa. Allora*

(1) $(x : a) \in \Gamma$ *implica* $\Gamma \vdash x : a$

(2) $\Gamma \vdash a : a$

(3) $\Gamma \vdash t : a$, $a \leq b$ *implica* $\Gamma \vdash t : b$

(4) $\Delta \leq \Gamma$, $\Gamma \vdash t : a$ *implica* $\Delta \vdash t : a$

(5) $\Gamma \vdash t : \top$

(6) $\Gamma, x : a \vdash t : b$ *implica* $\Gamma \vdash \lambda x.t : a \to b$

(7) $\Gamma \vdash t : a$, $\Gamma \vdash u : b$ *implica* $\Gamma \vdash tu : a \cdot b$

(8) $\Gamma \vdash t : a \to b$, $\Gamma \vdash u : a$ *implica* $\Gamma \vdash tu : b$

(9) $\Gamma \vdash t : d$ *per ogni* $d \in D$ *se e solo se* $\Gamma \vdash t : \wedge(D)$

per ogni $a, b \in A$, $t, u \in \Lambda_A$, $\Gamma, \Delta \in Cont_A$, $x \in V$, $D \subseteq A$.

(*Si osservi che se le premesse di questi asserti sono ben definite, come si suppone tacitamente, allora lo sono anche le conclusioni; ad esempio, in* (6), *se la scrittura* $\Gamma, x : a \vdash t : b$ *è ben definita, allora* $VL(t) \subseteq dom(\Gamma) \cup \{x\}$, *e dunque* $VL(\lambda x.t) \subseteq dom(\Gamma)$, *da cui segue che la scrittura* $\Gamma \vdash \lambda x.t : a \to b$ *è ben definita*).

Dimostrazione.

(1) Se $(x : a) \in \Gamma$, allora $a^\star = a$ (vera per definizione di *) implica $a^\star \leq a$ implica $x[a/x]^\star \leq a$ implica $x[\Gamma]^\star \leq a$ implica $\Gamma \vdash x : a$.

(2) $a^\star = a$ implica $a^\star \leq a$ implica $a[\Gamma]^\star \leq a$ implica $\Gamma \vdash a : a$.

(3) $\Gamma \vdash t : a$ equivale a $t[\Gamma]^\star \leq a$, quindi la tesi segue per transitività di $\leq$.

(4) Sia $\Delta \leq \Gamma$ e $\Gamma \vdash t : a$. Siano $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$ esattamente le variabili libere di t; allora $t[\Gamma] = t[\underline{c}/\underline{x}]$ e $t[\Delta] = t[\underline{b}/\underline{x}]$, per qualche $\underline{b} \equiv b_1, \ldots, b_n \in A$, $\underline{c} \equiv c_1, \ldots, c_n \in A$ con $b_i \leq c_i$ per ogni i; da ciò segue che $t[\Delta]^\star \leq t[\Gamma]^\star$ (Prop. 5.3.1), il che permette facilmente di concludere.

(5) $\Gamma \vdash t : \top$ significa $t[\Gamma]^\star \leq \top$, vera perché $\top$ è un massimo.

(6) $t[\Gamma, x : a]^\star \leq b$ implica $(\lambda x.t)[\Gamma]^\star = (\lambda x.(t[\Gamma]))^\star = \wedge_{c \in A}(c \to t[\Gamma][c/x]^\star)$ $\leq a \to t[\Gamma][a/x]^\star = a \to t[\Gamma, x : a]^\star \leq a \to b$ (per la monotonia di $a \to \cdot$).

(7) $\Gamma \vdash t : a$, $\Gamma \vdash u : b$ implica $t[\Gamma]^\star \leq a$, $u[\Gamma]^\star \leq b$; implica $t[\Gamma]^\star \cdot u[\Gamma]^\star \leq a \cdot b$ (Prop. 5.2.1); implica $(tu)[\Gamma]^\star \leq a \cdot b$; implica $\Gamma \vdash tu : a \cdot b$.

(8) $\Gamma \vdash t : a \to b$, $\Gamma \vdash u : a$ implica $\Gamma \vdash tu : (a \to b) \cdot a$ implica $\Gamma \vdash tu : b$, perché $(a \to b) \cdot a \leq b$.

(9) Equivale a: $t[\Gamma]^\star \leq d$ per ogni $d \in D$ se e solo se $t[\Gamma]^\star \leq \wedge(D)$, che è vera per definizione di $\wedge(D)$. □

5.5 Strutture implicative e combinatori

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Osservazione 5.5.1. *Applicando la valutazione* * (*Def. 5.3.1*) *ai combinatori* $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{C}$ (*Def. 1.2.1*) *e usando la Prop. 5.3.2, otteniamo:*

- $\boldsymbol{I}^\star = \wedge_{a \in A}(a \to a)$

- $\boldsymbol{K}^\star = \wedge_{a,b\in A}(a \to b \to a)$
- $\boldsymbol{S}^\star = \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot f \cdot (e \cdot f))$
- $\boldsymbol{B}^\star = \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot (e \cdot f))$
- $\boldsymbol{W}^\star = \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot e \cdot e)$
- $\boldsymbol{C}^\star = \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot f \cdot e)$

Proposizione 5.5.1.

$\boldsymbol{S}^\star = \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to c)$

$\boldsymbol{B}^\star = \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b) \to (c \to a) \to c \to b)$

$\boldsymbol{W}^\star = \wedge_{a,b\in A}((a \to a \to b) \to a \to b)$

$\boldsymbol{C}^\star = \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to b \to a \to c)$

Dimostrazione. Usiamo l'Oss. 5.1.1, la Def. 5.1.2 e la Prop. 5.2.1.

$\mathbf{S}^\star = \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot f \cdot (e \cdot f)) \geq \wedge_{d,e,f\in A}((f \to d \cdot f) \to e \to f \to d \cdot f \cdot (e \cdot f)) \geq \wedge_{d,e,f\in A}((f \to e \cdot f \to d \cdot f \cdot (e \cdot f)) \to e \to f \to d \cdot f \cdot (e \cdot f)) \geq \wedge_{d,e,f\in A}((f \to e \cdot f \to d \cdot f \cdot (e \cdot f)) \to (f \to e \cdot f) \to f \to d \cdot f \cdot (e \cdot f)) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to c)$

$\mathbf{B}^\star = \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot (e \cdot f)) \geq \wedge_{d,e,f\in A}(e \cdot f \to d \cdot (e \cdot f) \to e \to f \to d \cdot (e \cdot f)) \geq \wedge_{d,e,f\in A}(e \cdot f \to d \cdot (e \cdot f) \to (f \to e \cdot f) \to f \to d \cdot (e \cdot f)) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b) \to (c \to a) \to c \to b)$

$\mathbf{W}^\star = \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot e \cdot e) \geq \wedge_{d,e\in A}((e \to d \cdot e) \to e \to d \cdot e \cdot e) \geq \wedge_{d,e\in A}((e \to e \to d \cdot e \cdot e) \to e \to d \cdot e \cdot e) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to a \to b) \to a \to b)$

$\mathbf{C}^\star = \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot f \cdot e) \geq \wedge_{d,e,f\in A}((f \to d \cdot f) \to e \to f \to d \cdot f \cdot e) \geq \wedge_{d,e,f\in A}((f \to e \to d \cdot f \cdot e) \to e \to f \to d \cdot f \cdot e) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to b \to a \to c)$

$\wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to c) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to ((a \to b) \cdot a \to c) \cdot ((a \to b) \cdot a)) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to (b \to c) \cdot ((a \to b) \cdot a)) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to (a \to b \to c) \cdot a \cdot ((a \to b) \cdot a)) \geq \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot e \cdot (e \cdot f)) = \mathbf{S}^\star$

$\wedge_{a,b,c\in A}((a \to b) \to (c \to a) \to c \to b) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b) \to (c \to a) \to c \to ((c \to a) \cdot c \to b) \cdot ((c \to a) \cdot c)) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b) \to (c \to a) \to c \to (a \to b) \cdot ((c \to a) \cdot c)) \geq \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot (e \cdot f)) = \mathbf{B}^\star$

$\wedge_{a,b,c\in A}((a \to a \to b) \to a \to b) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to a \to b) \to a \to (a \to b) \cdot a) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to a \to b) \to a \to (a \to a \to b) \cdot a \cdot a) \geq \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot e \cdot e) = \mathbf{W}^\star$

$\wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to b \to a \to c) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to b \to a \to (b \to c) \cdot b) \geq \wedge_{a,b,c\in A}((a \to b \to c) \to b \to a \to (a \to b \to c) \cdot a \cdot b) \geq \wedge_{d,e,f\in A}(d \to e \to f \to d \cdot f \cdot e) = \mathbf{C}^\star$.

□

5.6 L'operatore di controllo $\propto$

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$

Proposizione 5.6.1. $\wedge_{a,b\in A}(((a \to b) \to a) \to a) = \wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a)$

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Dato che H è una struttura implicativa, $a \to \cdot$ è monotona, $(a \to \cdot) \to a$ è antimonotona e $((a \to \cdot) \to a) \to a$ è monotona; dunque $(\neg a \to a) \to a \leq ((a \to b) \to a) \to a$ per ogni $b \in A$, da cui $(\neg a \to a) \to a \leq \wedge_{b\in A}((a \to b) \to a) \to a$. Data l'arbitrarietà di $a \in A$, da ciò segue che $\wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a) \leq \wedge_{a,b\in A}(((a \to b) \to a) \to a)$. D'altra parte la disuguaglianza $\wedge_{a,b\in A}(((a \to b) \to a) \to a) \leq \wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a)$ è ovvia, e dunque - per antisimmetria di $\leq$ - si conclude che $\wedge_{a,b\in A}(((a \to b) \to a) \to a) = \wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a)$ □

Definizione 5.6.1. *Poniamo*

$$\propto_H := \wedge_{a,b\in A}(((a \to b) \to a) \to a) = \wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a)$$

$\propto_H$ *è detto* ***operatore di controllo*** *di H.*

5.7 Consistenza di strutture implicative

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Definizione 5.7.1. *La struttura implicativa H è detta*

· ***intuizionisticamente consistente*** *se $t^{\star H} \neq \bot$ per ogni $t \in \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$.*

· ***classicamente consistente*** *se* $t^{\star H} \neq \bot$ *per ogni* $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$.

Questa definizione è un caso particolare di una definizione più generale, ovvero la definizione di 'consistenza classica/intuizionista di un separatore in una struttura implicativa', che incontreremo nel seguito (Def. 7.1.2).

5.8 Scelta non deterministica: $\pitchfork$

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \rightarrow)$.

Osservazione 5.8.1. $a \rightarrow b \rightarrow a \wedge b = (a \rightarrow b \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b \rightarrow b)$ *per ogni* $a, b \in A$.
Infatti, grazie alla monotonia di $a \rightarrow b \rightarrow \cdot$ *e alla definizione di* $a \wedge b$, *abbiamo che* $a \rightarrow b \rightarrow a \wedge b \leq a \rightarrow b \rightarrow a$ *e* $a \rightarrow b \rightarrow a \wedge b \leq a \rightarrow b \rightarrow b$, *da cui* $a \rightarrow b \rightarrow a \wedge b \leq (a \rightarrow b \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b \rightarrow b)$.
Viceversa, abbiamo che $((a \rightarrow b \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b \rightarrow b)) \cdot a \cdot b \leq (a \rightarrow b \rightarrow a) \cdot a \cdot b \leq a$ *e* $((a \rightarrow b \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b \rightarrow b)) \cdot a \cdot b \leq (a \rightarrow b \rightarrow b) \cdot a \cdot b \leq b$, *da cui* $((a \rightarrow b \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b \rightarrow a)) \cdot a \cdot b \leq a \wedge b$*; ma ciò avviene se e solo se* $(a \rightarrow b \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b \rightarrow b) \leq a \rightarrow b \rightarrow a \wedge b$, *e dunque abbiamo concluso.*

Osservazione 5.8.2. $\wedge_{a,b \in A}(a \rightarrow b \rightarrow a \wedge b) = (\lambda xy.x)^\star \wedge (\lambda xy.y)^\star$ *per ogni* $x, y \in V$, $x \neq y$. *Ciò segue immediatamente dalla precedente osservazione, dato che* $(\lambda xy.x)^\star = \wedge_{a \in A}(a \rightarrow b \rightarrow a)$, $(\lambda xy.y)^\star = \wedge_{a,b \in A}(a \rightarrow b \rightarrow b)$ *e* $(\wedge_{a,b \in A}(a \rightarrow b \rightarrow a)) \wedge (\wedge_{a,b \in A}(a \rightarrow b \rightarrow b)) = \wedge_{a,b \in A}((a \rightarrow b \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b \rightarrow b))$.

Definizione 5.8.1. *Definiamo*

$$\pitchfork_H := (\lambda xy.x)^\star \wedge (\lambda xy.y)^\star = \wedge_{a,b \in A}(a \rightarrow b \rightarrow a \wedge b).$$

$\pitchfork_H$ *è detto* ***operatore di scelta non deterministica*** *di* H.

5.9 Induzione nelle strutture implicative

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \rightarrow)$.

Definizione 5.9.1. *Per ogni numero naturale* $n \in \mathbb{N}$ *definamo*

· $N(n)_H := \wedge_{a \in A^{\mathbb{N}}}(a_0 \rightarrow \wedge_{i \in \mathbb{N}}(a_i \rightarrow a_{i+1}) \rightarrow a_n)$

· $IND_H := \wedge_{n \in \mathbb{N}}(N(n))$

dove a_i è la i-esima componente di $a \in A^{\mathbb{N}}$, per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Definizione 5.9.2. *Fissate tre variabili distinte $x, y, z \in V$, diamo le seguenti ulteriori definizioni:*

- $(zero) := \lambda xy.x =_\alpha \boldsymbol{K}$
- $(succ) := \lambda xyz.z(xyz)$

Lemma 5.9.1.

$(zero)^{\star H} \leq N(0)_H$

$(succ)^{\star H} \leq N(n)_H \to N(n+1)_H$ *per ogni $n \in \mathbb{N}$*

Dimostrazione.

- $(zero)^\star = \wedge_{b,c \in A}(b \to c \to b) \leq a_0 \to \wedge_{i \in \mathbb{N}}(a_i \to a_{i+1}) \to a_0$ per ogni $a \in A^{\mathbb{N}}$, quindi $(zero)^\star \leq \wedge_{a \in A^{\mathbb{N}}}(a_0 \to \wedge_{i \in \mathbb{N}}(a_i \to a_{i+1}) \to a_0) = N(0)$

- Usiamo le ormai note proprietà descritte in 5.2.1.
Poniamo $f_a := \wedge_{i \in \mathbb{N}}(a_i \to a_{i+1})$ e $e_{n,a} := a_0 \to f_a \to a_n$, per ogni $a \in A^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$, da cui $N(n) = \wedge_{a \in A^{\mathbb{N}}}(a_0 \to f_a \to a_n) = \wedge_{a \in A}(e_{n,a})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Osserviamo che $(succ)^\star = \wedge_{b,c,d \in A}(b \to c \to d \to d \cdot (b \cdot c \cdot d)) \leq e_{n,a} \to a_0 \to f_a \to f_a \cdot (e_{n,a} \cdot a_0 \cdot f_a) \leq e_{n,a} \to a_0 \to f_a \to f_a \cdot a_n \leq e_{n,a} \to a_0 \to f_a \to (a_n \to a_{n+1}) \cdot a_n \leq e_{n,a} \to a_0 \to f_a \to a_{n+1} = e_{n,a} \to e_{n+1,a}$ per ogni $a \in A^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$
Dunque $(succ)^\star \cdot N(n) \leq (succ)^\star \cdot e_{n,a} \leq e_{n+1,a}$ per ogni $a \in A^{\mathbb{N}}$, da cui $(succ)^\star \cdot N(n) \leq \wedge_{a \in A^{\mathbb{N}}}(e_{n+1,a}) = N(n+1)$; possiamo così concludere che $(succ)^\star \leq N(n) \to N(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

5.10 Le operazioni $\times$ e $+$

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$.

Definizione 5.10.1. *Definiamo:*

- $a \times_H b := \wedge_{c \in A}((a \to b \to c) \to c)$
- $a +_H b := \wedge_{c \in A}((a \to c) \to (b \to c) \to c)$
- $a \leftrightarrow_H b := (a \to b) \times_H (b \to a)$

per ogni $a, b \in A$.

Quando ciò non creerà ambiguità, si scriverà $\times$, $+$ e $\leftrightarrow$ al posto di $\times_H$, $+_H$ e $\leftrightarrow_H$.

Proposizione 5.10.1. *Sia* $\Gamma \in Cont_A$, x, $y \in V$; a, b, $c \in A$; t, u, r, $q \in \Lambda_A$. *Allora*

- $\Gamma \vdash t : a$, $\Gamma \vdash u : b$ *implica* $\Gamma \vdash \lambda x.xtu : a \times b$.
- $\Gamma \vdash t : a \times b$ *implica* $\Gamma \vdash t\ \lambda xy.x : a$.
- $\Gamma \vdash t : a \times b$ *implica* $\Gamma \vdash t\ \lambda xy.y : b$.
- $\Gamma \vdash t : a$ *implica* $\Gamma \vdash \lambda xy.xt : a + b$
- $\Gamma \vdash t : b$ *implica* $\Gamma \vdash \lambda xy.yt : a + b$
- $\Gamma \vdash t : a + b$, $\Gamma, x : a \vdash r : c$, $\Gamma, y : b \vdash q : c$ *implica* $\Gamma \vdash t\ (\lambda x.r)(\lambda y.q) : c$

(*si osservi che, se le premesse di questi asserti sono ben definite - come tacitamente si suppone - allora anche le conclusioni lo sono; ad esempio, nel primo punto, se* $\Gamma \vdash t : a$ *e* $\Gamma \vdash u : b$ *sono ben definite, allora* $VL(t) \subseteq dom(\Gamma)$ *e* $VL(u) \subseteq dom(\Gamma)$, *e dunque* $VL(\lambda x.xtu) \subseteq dom(\Gamma)$, *da cui segue che* $\Gamma \vdash \lambda x.xtu : a \times b$ *è ben definita; altro esempio: nell'ultimo punto, se le premesse sono ben definite, allora* $x, y \notin dom(\Gamma)$, $VL(r) \subseteq dom(\Gamma) \cup \{x\}$ *e* $VL(q) \subseteq dom(\Gamma) \cup \{y\}$, *da cui* $VL((\lambda x.r)(\lambda y.q)) \subseteq dom(\Gamma)$, *e dunque* $\Gamma \vdash t\ (\lambda x.r)(\lambda y.q) : c$ *è ben definita; si procede similmente con gli altri punti*)

Dimostrazione. Per semplificare le formule, supponiamo sempre che $x, y \notin dom(\Gamma)$ (si veda l'Oss. 1.1.1).

Sia $\Gamma \vdash t : a$, $\Gamma \vdash u : b$, ovvero $t[\Gamma]^\star \leq a$, $u[\Gamma]^\star \leq b$. Allora $(\lambda x.xtu)[\Gamma]^\star = (\lambda x.((xtu)[\Gamma]))^\star = \wedge_{e\in A}(e \to (etu)[\Gamma]^\star) = \wedge_{e\in A}(e \to e \cdot t[\Gamma]^\star \cdot u[\Gamma]^\star) \leq \wedge_{e\in A}(e \to e \cdot a \cdot b) \leq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b \to c) \cdot a \cdot b) \leq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c) = a \times b$, da cui $\Gamma \vdash \lambda x.xtu : a \times b$

Sia $\Gamma \vdash t : a \times b$, cioè $t[\Gamma]^\star \leq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c)$. Allora $(t\ \lambda xy.x)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda xy.x)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda xy.x)^\star \leq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c) \cdot \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d) \leq ((a \to b \to a) \to a) \cdot (a \to b \to a) \leq a$, da cui $\Gamma \vdash t\ \lambda xy.x : a$

Sia $\Gamma \vdash t : a \times b$, cioè $t[\Gamma]^\star \leq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c)$. Allora $(t\ \lambda xy.x)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda xy.y)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda xy.y)^\star \leq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c) \cdot \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to e) \leq ((a \to b \to b) \to b) \cdot (a \to b \to b) \leq b$, da cui $\Gamma \vdash t\ \lambda xy.y : b$

Sia $\Gamma \vdash t : a$, ovvero $t[\Gamma]^\star \leq a$. Allora $(\lambda xy.xt)[\Gamma]^\star = (\lambda xy.xt[\Gamma])^\star = \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot t[\Gamma]^\star) \leq \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot a) \leq \wedge_{c\in A}((a \to c) \to (b \to c) \to (a \to c) \cdot a) \leq \wedge_{c\in A}((a \to c) \to (b \to c) \to c) = a + b$, da cui $\Gamma \vdash \lambda xy.xt : a + b$

Sia $\Gamma \vdash t : b$, ovvero $t[\Gamma]^\star \leq b$. Allora $(\lambda xy.yt)[\Gamma]^\star = (\lambda xy.yt[\Gamma])^\star = \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot t[\Gamma]^\star) \leq \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to e \cdot b) \leq \wedge_{c\in A}((a \to c) \to (b \to c) \to (b \to c) \cdot b) \leq \wedge_{c\in A}((a \to c) \to (b \to c) \to c) = a + b$, da cui $\Gamma \vdash \lambda xy.yt : a + b$

Sia $\Gamma \vdash t : a+b$, $\Gamma, x : a \vdash r : c$, $\Gamma, y : b \vdash q : c$, cioè $t[\Gamma]^\star \leq a+b$, $r[\Gamma, x : a] \leq c$, $q[\Gamma, y : b] \leq c$. Allora $(t\ (\lambda x.r)(\lambda y.q))[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda x.r)[\Gamma]^\star \cdot (\lambda y.q)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda x.r[\Gamma])^\star \cdot (\lambda y.q[\Gamma])^\star \leq (a+b) \cdot (a \to r[\Gamma][a/x]^\star) \cdot (b \to q[\Gamma][b/y]^\star) = (a+b) \cdot (a \to r[\Gamma, x : a]^\star) \cdot (b \to q[\Gamma, y : b]^\star) \leq (a+b) \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \leq c$ □

Proposizione 5.10.2. *$(\lambda xy.yxx)^\star \leq a \wedge b \to a \times b$ per ogni $a, b \in A$, $x, y \in V$, $x \neq y$.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in A$ e $x, y \in V$ con $x \neq y$. Poniamo $d := a \wedge b$ e $c' := a \to b \to c$, per ogni $c \in A$.
Allora $(\lambda xy.yxx)^\star \cdot (a \wedge b) = (\lambda xy.yxx)^\star \cdot d \leq (d \to c' \to c' \cdot d \cdot d) \cdot d \leq c' \to c' \cdot d \cdot d \leq c' \to c' \cdot a \cdot b \leq c' \to c$, per ogni $c \in A$, da cui $(\lambda xy.yxx)^\star \cdot (a \wedge b) \leq \wedge_{c\in A}(c' \to c) = a \times b$, il che implica $(\lambda xy.yxx)^\star \leq a \wedge b \to a \times b$. □

Proposizione 5.10.3. *$a \times b = (\lambda x.xab)^\star$ per ogni $a, b \in A$, $x \in V$.*

Dimostrazione.

$a \times b = \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c) \geq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to (a \to b \to c) \cdot a \cdot b) \geq \wedge_{d\in A}(d \to d \cdot a \cdot b) = (\lambda x.xab)^\star$.

$(\lambda x.xab)^\star = \wedge_{d\in A}(d \to d \cdot a \cdot b) \geq \wedge_{d\in A}((a \to b \to d \cdot a \cdot b) \to d \cdot a \cdot b) \geq \wedge_{d\in A}((a \to b \to c) \to c) = a \times b$ □

5.11 $\forall$, $\exists$

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Definizione 5.11.1. *Per ogni $D \subseteq A$ definiamo*

$$\forall(D) := \wedge(D)$$

Proposizione 5.11.1. *Sia $D \subseteq A$, $\Gamma \in Cont_A$, $t \in \Lambda_A$, $VL(t) \subseteq dom(\Gamma)$. Allora*

- $\Gamma \vdash t : d$ *per ogni* $d \in D$ *se e solo se* $\Gamma \vdash t : \forall(D)$.

- $\Gamma \vdash t : \forall(D)$ *implica* $\Gamma \vdash t : d$, *per ogni* $d \in D$ *per ogni* $d \in D$

Dimostrazione.

Il primo punto segue dalla Prop. 5.4.1, punto (10).

Il secondo punto deriva da $\forall(D) = \wedge(D) \leq d$ e dalla transitività di $\leq$. □

Definizione 5.11.2. *Per ogni $D \subseteq A$ definiamo*

$$\exists(D) := \wedge_{c \in A}(\wedge_{d \in D}(d \to c) \to c)$$

Proposizione 5.11.2. *Sia $D \subseteq A$, $\Gamma \in Cont_A$, $x, y \in V$, $y \notin dom(\Gamma)$, t, $u \in \Lambda_A$, $VL(t) \subseteq dom(\Gamma)$, $VL(u) \subseteq dom(\Gamma) \cup \{y\}$, $a \in A$. Allora*

Se $\Gamma \vdash t : d$ per qualche $d \in D$, allora $\Gamma \vdash \lambda x.xt : \exists(D)$.

Se $\Gamma \vdash t : \exists(D)$ e $\Gamma, y : d \vdash u : a$ per ogni $d \in D$, allora $\Gamma \vdash t\ \lambda y.u : a$

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $x \notin dom(\Gamma)$.

- Supponiamo $\Gamma \vdash t : d$, cioè $t[\Gamma]^\star \leq d$. Allora $\exists(D) = \wedge_{c \in A}(\wedge_{b \in A}(b \to c) \to c) \geq \wedge_{c \in A}((d \to c) \to c) \geq \wedge_{c \in A}((d \to c) \to (d \to c) \cdot d) \geq \wedge_{e \in A}(e \to e \cdot d) \geq \wedge_{e \in A}(e \to e \cdot t[\Gamma]^\star) = (\lambda x.xt[\Gamma])^\star = (\lambda x.xt)[\Gamma]^\star$, da cui $\Gamma \vdash \lambda x.xt : \exists(D)$.

- Supponiamo che $\Gamma \vdash t : \exists(D)$ e $\Gamma, y : d \vdash u : a$ per ogni $d \in D$, cioè che $t[\Gamma]^\star \leq \wedge_{c \in A}(\wedge_{d \in D}(d \to c) \to c)$ e $u[\Gamma, y : d]^\star \leq a$ per ogni $d \in D$.
Allora $(\lambda y.u)[\Gamma]^\star = (\lambda y.u[\Gamma])^\star = \wedge_{b \in A}(b \to u[\Gamma][b/y]^\star) = \wedge_{b \in A}(b \to u[\Gamma, y : b]^\star) \leq \wedge_{d \in D}(d \to u[\Gamma, y : d]^\star) \leq \wedge_{d \in D}(d \to a)$. Da ciò segue $(t\ \lambda y.u)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda y.u)[\Gamma]^\star \leq (\wedge_{d \in D}(d \to a) \to a) \cdot \wedge_{d \in D}(d \to a) \leq d$, e dunque $\Gamma \vdash t\ \lambda y.u : a$. □

Osservazione 5.11.1. *Se avessimo sostituito ∃ con ∨ arbitrario, il secondo asserto della precedente proposizione (la regola di eliminazione di ∃) non sarebbe più stato dimostrabile. Si vedrà tra poco una classe di strutture implicative - le strutture implicative compatibili con i sup arbitrari- per le quali il secondo asserto continua a valere anche sostituendo ∨ arbitrario a ∃. Tra le strutture implicative compatibili con i sup arbitrari si annoverano in particolare le algebre di Heyting complete, in cui ∃ e ∨ coincidono.*

5.12 id

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$.
Definiamo la funzione tra classi $\mathbf{id}_H$:

$$\begin{gathered} \mathbf{id}_H \colon \mathit{Set} \times \mathit{Set} \to A \\ (n, n) \mapsto \mathbf{I}^\star \\ (m, n) \mapsto (\top \to \perp) \text{ se } m \neq n \end{gathered}$$

Si osservi che $\top \to \perp$ è un minimo nel sottoinsieme di A costituito da tutti gli elementi di tipo $a \to b$ (essendo le funzioni di tipo $a \to \cdot \colon A \to A$ monotone e le funzioni di tipo $\cdot \to b \colon A \to A$ antimonotone).

Proposizione 5.12.1. *Sia $M \neq \varnothing$ un insieme. Allora*

$$\boldsymbol{id}_H(m, n) = \wedge_{\gamma \in A^M}(\gamma(m) \to \gamma(n)) \text{ per ogni } m, n \in M.$$

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

- Caso $m = n$: $\wedge_{\gamma \in A^M}(\gamma(n) \to \gamma(n)) = \wedge_{d \in A}(d \to d) = \mathbf{I}^\star = \mathbf{id}_H(n, n)$.

- Caso $n \neq m$. Sia $\phi \colon M \to A$ una funzione che manda m in $\top$ e n in $\perp$. Allora $\wedge_{\gamma \in A^M}(\gamma(m) \to \gamma(n)) \leq \phi(m) \to \phi(n) = \top \to \perp = \mathbf{id}_H(m, n)$.
Viceversa: $\mathbf{id}_H(m, n) = \top \to \perp \leq \top \to \gamma(n) \leq \gamma(m) \to \gamma(n)$ per ogni $\gamma \in A^M$, e dunque $\mathbf{id}_H(m, n) = \top \to \perp \leq \wedge_{\gamma \in A^M}(\gamma(m) \to \gamma(n))$. □

Proposizione 5.12.2. *Sia $M \neq \varnothing$ un insieme. Allora $\boldsymbol{id}_H(m, n) \cdot \phi(m) \leq \phi(n)$ per ogni $m, n \in M$, $\phi \in A^M$.*

Dimostrazione. $\mathbf{id}_H(m, n) \cdot \phi(m) = \wedge_{\gamma \in A^M}(\gamma(m) \to \gamma(n)) \cdot \phi(m) \leq (\phi(m) \to \phi(n)) \cdot \phi(m) \leq \phi(n)$ □

Proposizione 5.12.3. *Sia $M \neq \varnothing$ un insieme. Allora $\boldsymbol{id}_H(m, n) \cdot a \leq a$ per ogni $m, n \in M$, $a \in A$.*

Dimostrazione. $\mathbf{id}_H(m, n) \cdot a \leq (k_a(m) \to k_a(n)) \cdot a = (a \to a) \cdot a \leq a$, dove $k_a \in A^M$, $k_a(l) := a$ per ogni $l \in M$. □

Proposizione 5.12.4. *Sia $M \neq \varnothing$ un insieme. Allora*

$\Delta \vdash \lambda x.x : \boldsymbol{id}_H(n, n)$

$\Gamma \vdash t : \boldsymbol{id}_H(m, n), \;\; \Gamma \vdash u : \gamma(m) \;\; \textit{implica} \;\; \Gamma \vdash tu : \gamma(n)$

per ogni $m, n \in M$, $x \in V$, $\Gamma \in Cont_A$, $t, u \in \Lambda_A$, $VL(t) \subseteq dom(\Gamma)$, $VL(u) \subseteq dom(\Gamma)$, $\gamma \in A^M$

Dimostrazione. Semplice uso delle definizioni e dei precedenti risultati:

- $\Gamma \vdash \lambda x.x : \mathbf{id}_H(n,n)$ se e solo se $(\lambda x.x)[\Gamma]^\star \leq \mathbf{id}_H(n,n)$ se e solo se $(\lambda x.x)^\star \leq \mathbf{id}_H(n,n)$ se e solo se $\mathbf{I}^\star \leq \mathbf{I}^\star$, vera perché $\leq$ è riflessiva.

- Sia $\Gamma \vdash t : \mathbf{id}_H(m,n)$, $\Gamma \vdash u : \gamma(m)$, ovvero $t[\Gamma]^\star \leq \mathbf{id}_H(m,n)$, $u[\Gamma]^\star \leq \gamma(m)$. Allora $(tu)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot u[\Gamma]^\star \leq \mathbf{id}_H(m,n) \cdot \gamma(m) \leq \gamma(n)$, da cui $\Gamma \vdash tu : \gamma(n)$. □

5.13 p-or

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$.

Definizione 5.13.1. *Definiamo p-or*$_H := (\perp \to \top \to \perp) \wedge (\top \to \perp \to \perp)$

Proposizione 5.13.1. $\pitchfork_H \leq$ *p-or*$_H$

Dimostrazione.

$\pitchfork = \wedge_{a \in A}(a \to b \to a \wedge b) \leq \perp \to \top \to \perp \wedge \top = \perp \to \top \to \perp.$

$\pitchfork = \wedge_{a \in A}(a \to b \to a \wedge b) \leq \top \to \perp \to \top \wedge \perp = \top \to \perp \to \perp.$

Possiamo così concludere che $\pitchfork \leq (\perp \to \top \to \perp) \wedge (\top \to \perp \to \perp) =$ *p-or* □

5.14 Strutture implicative compatibili

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$.

Osservazione 5.14.1. *Sia $D \subseteq A$ e $b \in A$. Allora $\vee(D) \to b \leq \wedge_{d \in D}(d \to b)$. Infatti, dato che $\cdot \to b$ è anti-monotona, si ha $\vee(D) \to b \leq d \to b$ per ogni $d \in D$, da cui segue $\vee(D) \to b \leq \wedge_{d \in D}(d \to b)$*

Definizione 5.14.1. *Diciamo che H è **compatibile con i sup arbitrari** se $\wedge_{d \in D}(d \to b) = \vee(D) \to b$ per ogni $D \subseteq A$, $b \in A$.*

Osservazione 5.14.2. *Questa definizione è estendibile, pari pari, alle strutture quasi-implicative (come la maggior parte delle definizioni date). Nel seguito incontreremo un esempio di strutture quasi-implicative compatibili con i sup arbitrari, quindi è bene tener presente questa nota.*

Proposizione 5.14.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ compatibile con i sup arbitrari. Allora:*

- $\perp \to a = \top$
- $a \times_H \perp = \top \to \perp$

- $\bot \times_H a = \top \to \bot$
- $p\text{-}or_H = \top$
- $a +_H \bot = (\lambda xy.xa)^{\star H}$
- $\bot +_H a = (\lambda xy.ya)^{\star H}$

Dimostrazione.
$\bot \to a = \vee(\varnothing) \to a = \wedge_{d\in\varnothing}(d \to a) = \wedge(\varnothing) = \top$

- $a \times \bot = \wedge_{c\in A}((a \to \bot \to c) \to c) = \wedge_{c\in A}((a \to \top) \to c) = \wedge_{c\in A}(\top \to c) = \top \to \wedge(A) = \top \to \bot$
- $\bot \times a = \wedge_{c\in A}((\bot \to a \to c) \to c) = \wedge_{c\in A}(\top \to c) = \top \to \wedge(A) = \top \to \bot$
- $p\text{-}or_H = (\bot \to \top \to \bot) \wedge (\top \to \bot \to \bot) = \top \wedge (\top \to \top) = \top \to \top = \top$
- $(\lambda xy.xa)^\star = \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d\cdot a) \leq \wedge_{c,e\in A}((a \to c) \to e \to (a \to c)\cdot a) \leq \wedge_{c,e\in A}((a \to c) \to e \to c) \leq \wedge_{c\in A}((a \to c) \to (\bot \to c) \to c) = a + \bot$.
- $a + \bot = \wedge_{c\in A}((a \to c) \to (\bot \to c) \to c) = \wedge_{c\in A}((a \to c) \to \top \to c) \leq \wedge_{d\in A}((a \to d \cdot a) \to \top \to d \cdot a) \leq \wedge_{d\in A}(d \to \top \to d \cdot a) \leq \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot a) = (\lambda xy.xa)^\star$
- $\bot + a = \wedge_{c\in A}((\bot \to c) \to (a \to c) \to c) = \wedge_{c\in A}(\top \to (a \to c) \to c) \leq \wedge_{d\in A}(\top \to (a \to d \cdot a) \to d \cdot a) \leq \wedge_{d\in A}(\top \to d \to d \cdot a) \leq \wedge_{d,e\in A}(e \to d \to d \cdot a) = (\lambda xy.ya)^\star$
- $(\lambda xy.ya)^\star = \wedge_{d,e\in A}(d \to e \to e \cdot a) \leq \wedge_{c\in A}((\bot \to c) \to (a \to c) \to (a \to c) \cdot a) \leq \wedge_{c\in A}((\bot \to c) \to (a \to c) \to c) = \bot + a$

$\square$

Proposizione 5.14.2. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ compatibile con i sup arbitrari. Allora:*

Se $\Gamma \vdash t : d$ per qualche $d \in D$, allora $\Gamma \vdash t : \vee(D)$.

Se $\Gamma \vdash t : \vee(D)$ e $\Gamma, y : d \vdash u : a$ per ogni $d \in D$, allora $\Gamma \vdash t\ \lambda y.u : a$

per ogni $\Gamma \in Cont_A$, $t, u \in \Lambda_A$, $VL(t) \subseteq dom(\Gamma)$, $y \in V$, $y \notin dom(\Gamma)$, $VL(u) \subseteq dom(\Gamma) \cup \{y\}$, $a \in A$, $D \subseteq A$.

Dimostrazione.

- Supponiamo $\Gamma \vdash t : d$, cioè $t[\Gamma]^\star \leq d$, per qualche $d \in D$. Dato che $d \leq \vee(D)$, per transitività segue che $t[\Gamma]^\star \leq \vee(D)$, ovvero $\Gamma \vdash t : \vee(D)$

- Supponiamo che $\Gamma \vdash t : \vee(D)$ e $\Gamma, y : d \vdash u : a$ per ogni $d \in D$, cioè che $t[\Gamma]^\star \leq \vee(D)$ e $u[\Gamma, y : d]^\star \leq a$ per ogni $d \in D$.
Allora $(t\ \lambda y.u)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda y.u)[\Gamma]^\star = t[\Gamma]^\star \cdot (\lambda y.u[\Gamma])^\star = t[\Gamma]^\star \cdot \wedge_{b\in A}(b \to u[\Gamma][b/y]^\star) = t[\Gamma]^\star \cdot \wedge_{b\in A}(b \to u[\Gamma, y : b]^\star) \leq t[\Gamma]^\star \cdot \wedge_{d\in D}(d \to u[\Gamma, y : d]^\star) \leq t[\Gamma]^\star \cdot \wedge_{d\in d}(d \to a) = t[\Gamma]^\star \cdot (\vee(D) \to a) \leq \vee(D) \cdot (\vee(D) \to a) \leq a$, da cui $\Gamma \vdash t\ \lambda y.u : a$. □

5.15 Prodotto di strutture implicative

Fissiamo una famiglia di strutture implicative $(H_i)_{i\in I}$, con $H_i = (A_i, \leq_i, \wedge_i, \vee_i, \bot_i, \top_i, \to_i)$; indichiamo con $\Pi_{i\in I}(A_i)$ il prodotto cartesiano relativo alla famiglia $(A_i)_{i\in I}$; definiamo $(\leq_i)_{i\in I}$, $(\wedge_i)_{i\in I}$, $(\vee_i)_{i\in I}$ e $(\to_i)_{i\in I}$ nel modo visto nel paragrafo relativo al prodotto di algebre di Heyting (Def. 3.3.1). Poniamo $\Pi_{i\in I}(H_i) := (\Pi_{i\in I}(A_i), (\wedge_i)_{i\in I}, (\vee_i)_{i\in I}, (\bot_i)_{i\in I}, (\top_i)_{i\in I}, (\to_i)_{i\in I})$. Per quanto riguarda gli inf e i sup arbitrari, se $D \subseteq \Pi_{i\in I}(A_i)$, poniamo $(\wedge_i)_{i\in I}(D) := (\wedge_i(D_i))_{i\in I}$ e $(\vee_i)_{i\in I}(D) := (\vee_i(D_i))_{i\in I}$, dove D_i indica la proiezione canonica di D in A_i.

Proposizione 5.15.1. *$\Pi_{i\in I}(H_i)$ è una struttura implicativa.*

Dimostrazione. La dimostrazione, per quel che riguarda la relazione, gli inf e i sup binari, il minimo e il massimo, è chiaramente identica a quella data nel caso delle algebre di Heyting (Prop. 3.3.1). Ci manca da verificare che $(\to_i)_{i\in I}$, gli inf e i sup arbitrari soddisfino le proprietà richieste:

· Sappiamo che $\wedge_j(D_j) \leq_j d_j$ per ogni $j \in I$ e $d_j \in D_j$, da cui segue che $(\wedge_i(D_i))_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (d_i)_{i\in I}$ per ogni $(d_i)_{i\in I} \in D$, e quindi $(\wedge_i)_{i\in I}(D)\ (\leq_i)_{i\in I}\ (d_i)_{i\in I}$ per ogni $(d_i)_{i\in I} \in D \subseteq \Pi_{i\in I}(A_i)$

· $(b_i)_{i\in I} \leq (d_i)_{i\in I}$ per ogni $(d_i)_{i\in I} \in D \subseteq \Pi_{i\in I}(A_i)$ implica $b_j \leq_j d_j$ per ogni $j \in I$ e $d_j \in D_j$, implica $b_j \leq_j \wedge_j(D_j)$ per ogni $j \in I$, implica $(b_i)_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (\wedge_{i\in I}(D_i))_{i\in I}$, implica $(b_i)_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (\wedge_i)_{i\in I}(D)$

· Il caso dei sup arbitrari è analogo a quello degli inf arbitrari.

· $(b_i)_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (a_i)_{i\in I}$ e $(a'_i)_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (b'_i)_{i\in I}$ implica $b_i \leq a_i$ e $a'_i \leq b'_i$ per ogni $i \in I$, implica $a_i \to_i a'_i \leq_i b_i \to_i b'_i$ per ogni $i \in I$, implica $(a_i \to_i a'_i)_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (b_i \to_i b'_i)_{i\in I}$, implica $(a_i)_{i\in I}\ (\to_i)_{i\in I}\ (a'_i)_{i\in I}\ (\leq_i)_{i\in I}\ (b_i)_{i\in I}\ (\to_i)_{i\in I}\ (b'_i)_{i\in I}$

- $(\wedge_i)_{i\in I}$ $(\{(a_i)_{i\in I}(\rightarrow_i)_{i\in I}(d_i)_{i\in I} : (d_i)_{i\in I} \in D\}) = (\wedge_i)_{i\in I}$ $(\{(a_i \rightarrow_i d_i)_{i\in I} : (d_i)_{i\in I} \in D\}) = (\wedge_i)_{i\in I}$ $(\Pi_{i\in I}(\{a_i \rightarrow_i d_i : d_i \in D_i\})) = (\wedge_i(\{a_i \rightarrow_i d_i : d_i \in D_i\}))_{i\in I} = (a_i \rightarrow_i \wedge_i(D_i))_{i\in I} = (a_i)_{i\in I}$ $(\rightarrow_i)_{i\in I}$ $(\wedge_i(D_i))_{i\in I} = (a_i)_{i\in I}$ $(\rightarrow_i)_{i\in I}$ $(\wedge_i)_{i\in I}$ $(D))$, per ogni $(a_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)$ e $D \subseteq \Pi_{i\in I}(A_i)$, $D \neq \varnothing$

- $(\top_i)_{i\in I}$ $(\rightarrow_i)_{i\in I}$ $(\top_i)_{i\in I} = (\top_i \rightarrow_i \top_i)_{i\in I} = (\top_i)_{i\in I}$

□

Per semplificare le notazioni poniamo $H := \Pi_{i\in I}(H_i)$.

- Scriviamo $\times_j$, $+_j$, $\propto_j$, $\pitchfork_j$, $\neg_j$, $\cdot_j$ e $t^{\star j}$ per indicare, rispettivamente, $\times_{H_j}$, $+_{H_j}$, $\propto_{H_j}$, $\pitchfork_{H_j}$, $\neg_{H_j}$, $\cdot_{H_j}$ e $t^{\star H_j}$.

- Scriviamo $\times$, $+$, $\propto$, $\pitchfork$, $\neg$, $\cdot$ e $t^\star$ per indicare, rispettivamente, $\times_H$, $+_H$, $\propto_H$, $\pitchfork_H$, $\neg_H$, $\cdot_H$ e $t^{\star H}$.

Definiamo la seguente funzione da $\Pi_{i\in I}(A_i)$ in $\Pi_{i\in I}(A_i)$:

- $(\neg_i)_{i\in I}(a_i)_{i\in I} := (\neg_i a_i)_{i\in I}$

per ogni $(a_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)$.
Definiamo le seguenti funzioni da $\Pi_{i\in I}(A_i) \times \Pi_{i\in I}(A_i)$ in $\Pi_{i\in I}(A_i)$:

- $(a_i)_{i\in I}$ $(\cdot_i)_{i\in I}$ $(b_i)_{i\in I} := (a_i \cdot_i b_i)_{i\in I}$

- $(a_i)_{i\in I}$ $(\times_i)_{i\in I}$ $(b_i)_{i\in I} := (a_i \times_i b_i)_{i\in I}$

- $(a_i)_{i\in I}$ $(+_i)_{i\in I}$ $(b_i)_{i\in I} := (a_i +_i b_i)_{i\in I}$

per ogni $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)$.

Proposizione 5.15.2. *Con le notazioni introdotte sopra:*

$\times = (\times_i)_{i\in I}$

$+ = (+_i)_{i\in I}$

$\neg = (\neg_i)_{i\in I}$

$\cdot = (\cdot_i)_{i\in I}$

$\propto = (\propto_i)_{i\in I}$

$\pitchfork = (\pitchfork_i)_{i\in I}$

Dimostrazione. Deriva tutto facilmente dalle definizioni:

$(a_i)_{i\in I} \times (b_i)_{i\in I} = (\wedge_i)_{i\in I}(\{(a_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (b_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (c_i)_{i\in I} : (c_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i)_{i\in I} \ (\{(a_i \to_i b_i \to_i c_i)_{i\in I} : (c_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i(\{a_i \to_i b_i \to_i c_i : c_i \in A_i\})_{i\in I} = (a_i \times_i b_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} \ (\times_i)_{i\in I} \ (b_i)_{i\in I}$

$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} = (\wedge_i)_{i\in I}(\{((a_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (c_i)_{i\in I}) \ (\to_i)_{i\in I} \ ((b_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (c_i)_{i\in I}) \ (\to_i)_{i\in I} \ (c_i)_{i\in I} : (c_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i)_{i\in I}(\{((a_i \to_i c_i) \to_i (b_i \to_i c_i) \to_i c_i)_{i\in I} : (c_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i(\{(a_i \to_i c_i) \to_i (b_i \to_i c_i) \to_i c_i : c_i \in A_i\}))_{i\in I} = (a_i +_i b_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} \ (+_i)_{i\in I} \ (b_i)_{i\in I}$

$\neg \ (a_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (\bot_i)_{i\in I} = (a_i \to_i \bot_i)_{i\in I} = (\neg_i a_i)_{i\in I} = (\neg_i)_{i\in I}(a_i)_{i\in I}$

$(a_i)_{i\in I} \cdot (b_i)_{i\in I} = (\wedge_i)_{i\in I}(\{(c_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i) : (a_i)_{i\in I} \ (\leq_i)_{i\in I} \ (b_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (c_i)_{i\in I}\}) = (\wedge_i)_{i\in I} \ (\{(c_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i) : (a_i)_{i\in I} \ (\leq_i)_{i\in I} \ (b_i \to_i c_i)_{i\in I}\}) = (\wedge_i)_{i\in I} \ (\{(c_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i) : a_i \leq_i b_i \to_i c_i \text{ per ogni } i \in I \ \}) = (\wedge_i(\{c_i \in A_i : a_i \leq_i b_i \to_i c_i\}))_{i\in I} = (a_i \cdot_i b_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} \ (\cdot_i)_{i\in I} \ (b_i)_{i\in I}$

$\propto = (\wedge_i)_{i\in I}(\{(\ \neg(a_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (a_i)_{i\in I}) \ (\to_i)_{i\in I} \ (a_i)_{i\in I} : (a_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i)_{i\in I} \ \{((\neg_i a_i \to_i a_i) \to_i a_i)_{i\in I} : (a_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\propto_i)_{i\in I}$

$\pitchfork = (\wedge_i)_{i\in I}((a_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (b_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (a_i)_{i\in I} \ (\wedge_i)_{i\in I} \ (b_i)_{i\in I} : (a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)) = (\wedge_i)_{i\in I} \ ((a_i \to_i b_i \to_i a_i \wedge_i b_i)_{i\in I} : (a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)) = (\wedge_i(\{a_i \to_i b_i \to_i a_i \leq_i b_i : a_i, b_i \in A_i\}))_{i\in I} = (\pitchfork_i)_{i\in I}$ □

Proposizione 5.15.3. *Siano $x_1, \ldots, x_n \in V$ (anche una lista vuota di variabili), $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$ e $t \in \Lambda_\varnothing^{[x_1,\ldots,x_n]}$; siano $(a_{1i})_{i\in I}, \ \ldots, \ (a_{ni})_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)$. Allora $t[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ \ldots, \ (a_{ni})_{i\in I}/x_n]^\star = (t[a_{1i}/x_1, \ \ldots, \ a_{ni}/x_n]^{\star i})_{i\in I}$*

Dimostrazione. Induzione sulla lunghezza di t.

- Se t ha lunghezza 1 allora necessariamente $n \geq 1$ e $t = x_j$ per qualche $j \in \{1, \ldots, n\}$. Osserviamo che $x_j[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ \ldots, \ (a_{ni})_{i\in I}/x_n]^\star = (a_{j_i})^\star_{i\in I} = (a_{j_i})_{i\in I} = (a_{j_i}{}^{\star i})_{i\in I} = (x_j[a_{1i}/x_1, \ \ldots, \ a_{ni}/x_n]^{\star i})_{i\in I}$

- $(qu)[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ \ldots, \ (a_{ni})_{i\in I}/x_n]^\star = q[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ \ldots, \ (a_{ni})_{i\in I}/x_n]^\star \cdot u[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ldots, (a_{ni})_{i\in I}/x_n]^\star = (q[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n]^{\star i})_{i\in I} \cdot (u[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n]^{\star i})_{i\in I} = (q[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n]^{\star i} \cdot_i u[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n]^{\star i})_{i\in I} = ((qu)[a_{1i}/x_1, \ldots \ a_{ni}/x_n \ ]^{\star i})_{i\in I}$ per ogni $q, u \in \Lambda_\varnothing^{[x_1,\ldots,x_n]}$.

- $(\lambda y.q)[(a_{1i})_i/x_1, \ \ldots, \ (a_{ni})_i/x_n]^\star = (\lambda y.(q[(a_{1i})_i/x_1, \ \ldots, \ (a_{ni})_i/x_n]))^\star = (\wedge_i)_{i\in I} \ (\{(b_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ q[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ \ldots, \ (a_{ni})_{i\in I}/x_n, (b_i)_{i\in I}/y]^\star : (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i)_{i\in I} \ (\{(b_i)_{i\in I} \ (\to_i)_{i\in I} \ (q[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n, b_i/y]^{\star i})_{i\in I}$

$: (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i)_{i\in I} \; (\{(b_i \rightarrow_i q[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n, b_i/y]^{\star i})_{i\in I} : (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = (\wedge_i(\{b_i \rightarrow_i q[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n, b_i/y]^{\star i} : b_i \in A_i\}))_{i\in I} = ((\lambda y.q)[a_{1i}/x_1, \ldots, a_{ni}/x_n]^{\star i})_{i\in I}$ per ogni $y \in V$, $y \notin x_1, \ldots, x_n$, $q \in \Lambda_{\varnothing}^{[x_1,\ldots,x_n,y]}$

- $(\lambda x_j.q)[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ldots, (a_{ni})_{i\in I}/x_n]^\star = (\lambda x_j.(q[(a_{1i})_{i\in I}/x_1 \;, \ldots, \cancel{(a_{j_i})_{i\in I}/x_j} \;, \ldots, \; (a_{ni})_{i\in I}]))^\star = (\wedge_i)_{i\in I} \; (\{(b_i)_{i\in I} \; (\rightarrow_i)_{i\in I} \; q[(a_{1i})_{i\in I}/x_1, \ldots, (b_{j_i})_{i\in I}/x_j, \ldots, (a_i^n)_i/x_n]^\star : (b_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}(A_i)\}) = \ldots$ (proseguire come sopra) $\ldots$

$\square$

Notazione: se $(H_i)_{i\in I}$ è una famiglia di strutture implicative tale che $H_i = (A_i, \leq_i, \wedge_i, \vee_i, \perp_i, \top_i, \rightarrow_i) = (A_1, \leq_1, \wedge_1, \vee_1, \perp_1, \top_1, \rightarrow_1) = H_1$ per ogni $i \in I$, allora si scriverà solitamente $\Pi_{i\in I}(H_1)$ o H_1^I al posto di $\Pi_{i\in I}(H_i)$. Inoltre con $(\leq_1)_{i\in I}$, $(\wedge_1)_{i\in I}$, $(\vee_1)_{i\in I}$, $(\perp_1)_{i\in I}$, $\ldots$ si indicheranno rispettivamente $(\leq_i)_{i\in I}$, $(\wedge_i)_{i\in I}$, $(\vee_i)_{i\in I}$, $(\perp_i)_{i\in I}$, $\ldots$

Capitolo 6

Esempi di strutture implicative

6.1 Strutture implicative vacue

Per prendere mano con il concetto di struttura implicativa, inizieremo il capitolo trattando di strutture implicative vacue. Tali strutture, di per sé non interessanti, sono un'utile fonte di controesempi.

Definizione 6.1.1. *Una* ***struttura implicativa vacua*** *è una settupla* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ *dove*

- $(A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è un reticolo completo*
- $\to$ *è l'operazione binaria su* A *definita da* $a \to b := b$

Definizione 6.1.2. *Una* ***struttura implicativa vacua superiore*** *è una settupla* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ *dove*

- $(A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è un reticolo completo*
- $\to$ *è l'operazione binaria su* A *definita da* $a \to b := \top$

Proposizione 6.1.1. *Le strutture implicative vacue sono strutture implicative*

Dimostrazione.

- Sia $b \leq a$, $a' \leq b'$. Allora $a \to a' = a' \leq b' = b \to b'$
- $\wedge_{d \in D}(a \to d) = \wedge_{d \in D}(d) = \wedge(D) = a \to \wedge(D)$
- $\top \to \top = \top$.

per ogni $a, b, a', b' \in A$, $\varnothing \neq D \subseteq A$. □

Proposizione 6.1.2. *Le strutture implicative vacue superiori sono strutture implicative*

Dimostrazione.

- Sia $b \leq a$, $a' \leq b'$. Allora $a \to a' = \top \leq \top = b \to b'$
- $\wedge_{d \in D}(a \to d) = \wedge_{d \in D}(\top) = \top = a \to \wedge(D)$
- $\top \to \top = \top$.

per ogni $a, b, a', b' \in A$, $\varnothing \neq D \subseteq A$. $\square$

Proposizione 6.1.3. *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *una struttura vacua superiore. Allora*

- $a \cdot b = \bot$
- $\boldsymbol{\lambda} f = \top$

per ogni $a, b \in A$, $f \in A^A$.

Dimostrazione.

$a \cdot b = \wedge(\{c \in A : a \leq b \to c\}) = \wedge(\{c \in A : a \leq \top\}) = \wedge(A) = \bot$

$\boldsymbol{\lambda} f = \wedge_{d \in A}(d \to f(d)) = \wedge_{d \in A}(\top) = \top$ $\square$

Proposizione 6.1.4. *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *una struttura implicativa vacua superiore. Sia* $t \in \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$, *e dunque* $t = \lambda x.q$ *o* $t = ur$, *per qualche* $x \in V$, $u, r \in \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$, $q \in \Lambda_{\varnothing}^{[x]}$. *Allora*

- *Se* $t = \lambda x.q$, *allora* $t^\star = \top$
- *Se* $t = ur$, *allora* $t^\star = \bot$

Dimostrazione.

$(\lambda x.q)^\star = \boldsymbol{\lambda}(q \cdot (-)) = \top$

$(ur)^\star = u^\star \cdot r^\star = \bot$ $\square$

Osservazione 6.1.1. *Si noti in particolare che dalla precedente segue che*

- $\top = \boldsymbol{I}^\star \neq (\boldsymbol{II})^\star = \bot$, *sebbene* $\boldsymbol{II} \twoheadrightarrow_\beta \boldsymbol{I}$
- $\top = (\lambda x.\boldsymbol{II}x)^\star \neq (\boldsymbol{II})^\star = \bot$, *sebbene* $\lambda x.\boldsymbol{II}x \twoheadrightarrow_\eta \boldsymbol{II}$

Questa osservazione mostra che la Prop. 5.3.2 non può essere rafforzata convertendo le disuguaglianze in uguaglianze.

Proposizione 6.1.5. *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *una struttura implicativa vacua. Allora* $\propto_H = \bot$

Dimostrazione. $\propto_H = \wedge_{a,b \in A}(((a \to b) \to a) \to a) = \wedge_{a,b \in A}(a) = \wedge(A) = \bot$ $\square$

6.2 Algebre di Heyting complete

Definizione 6.2.1. *Chiamiamo* ***algebra di Heyting completa*** *ogni algebra di Heyting* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$ *il cui reticolo soggiacente* $(A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top)$ *è completo.*

Esempio 6.2.1. *Sia* $\Omega = (A, \tau)$ *uno spazio topologico; consideriamo la settupla* $H = (\tau, \subseteq, \cap^1, \cup, \varnothing, A, \rightarrow_\Omega)$*, dove*

- $D \rightarrow_\Omega E := int_\Omega(D^c \cup E)$ *per ogni* $D, E \in \tau$ *(già definito in 3.1.1)*
- $D \cap^1 E := D \cap E$ *per ogni* $D, E \in \tau$
- $\cap^1(M) := int_\Omega(\cap(M))$ *per ogni* $M \subseteq \tau$

Si verifica facilmente che tale settupla è un'algebra di Heyting completa; se 'dimentichiamo' gli inf e i sup arbitrari, otteniamo l'algebra di Heyting indotta da Ω*, descritta nell'Esempio 3.1.1.*

Proposizione 6.2.1 (Distributività di $\vee$ arbitrario con $\wedge$)**.**
Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$ *un'algebra di Heyting completa,* D *un sottoinsieme di* A *e* a *un elemento di* A*. Allora*

$$\vee(D) \wedge a = \vee_{d \in D}(d \wedge a)$$

Dimostrazione. La disuguaglianza $\geq$ vale in ogni reticolo completo ed è una semplice conseguenza delle definizioni (come già osservato in 2.5.3).
Per quanto riguarda l'altra disuguaglianza: chiaramente $e \wedge a \leq \vee_{d \in D}(d \wedge a)$ per ogni $e \in D$, da cui $e \leq a \rightarrow \vee_{d \in D}(d \wedge a)$ per ogni $e \in D$; ciò implica $\vee(D) \leq a \rightarrow \vee_{d \in D}(d \wedge a)$, e quindi $\vee(D) \wedge a \leq \vee_{d \in D}(d \wedge a)$. □

Proposizione 6.2.2. *Le algebre di Heyting complete sono strutture implicative compatibili con i sup arbitrari (Def. 5.14.1)*

Dimostrazione. Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$ un'algebra di Heyting completa.

- Siano $b \leq a$, $a' \leq b'$ in A. Dato che $\leq$ è riflessiva, abbiamo $a \rightarrow a' \leq a \rightarrow a'$. Ora $a \rightarrow a' \leq a \rightarrow a'$ implica $(a \rightarrow a') \wedge a \leq a'$. Da $b \leq a$ segue che $(a \rightarrow a') \wedge b \leq (a \rightarrow a') \wedge a$, pertanto dalla precedente osservazione e dalla transitività di $\leq$ segue che $(a \rightarrow a') \wedge b \leq a'$; ma, dato che $a' \leq b'$, da quest'ultima segue $(a \rightarrow a') \wedge b \leq b'$, e dunque $a \rightarrow a' \leq b \rightarrow b'$.

- Sia $D \subseteq A$, $D \neq \varnothing$. Per riflessività sappiamo che $a \rightarrow d \leq a \rightarrow d$ per ogni $d \in D$. Ma $a \rightarrow d \leq a \rightarrow d$ per ogni $d \in D$ implica $(a \rightarrow d) \wedge a \leq d$ per ogni $d \in D$, implica $\wedge_{d \in D}((a \rightarrow d) \wedge a) \leq \wedge(D)$, implica $(\wedge_{d \in D}(a \rightarrow d)) \wedge a \leq \wedge(D)$, implica $\wedge_{d \in D}(a \rightarrow d) \leq a \rightarrow \wedge(D)$.

- Sia $D \subseteq A$, $D \neq \varnothing$. Per quanto visto riguardo alle algebre di Heyting, sappiamo che $(a \to \wedge(D)) \wedge a \leq \wedge(D)$; ma $(a \to \wedge(D)) \wedge a \leq \wedge(D)$ implica $(a \to \wedge(D)) \wedge a \leq d$ per ogni $d \in D$, implica $a \to \wedge(D) \leq a \to d$ per ogni $d \in D$, implica $a \to \wedge(D) \leq \wedge_{d\in D}(a \to d)$

- Sia $a \in A$. Ovviamente $\top \leq \top$. Ma $\top \leq \top$ implica $\top \wedge a \leq \top$ implica $\top \leq a \to \top$.

- Sia $D \subseteq A$, $b \in A$. Sappiamo già che vale $\vee(D) \to b \leq \wedge_{d\in D}(d \to b)$, perché si è visto che questa proprietà è valida per ogni struttura implicativa (Oss. 5.14.1). Mostriamo il viceversa. Osserviamo che $\vee(D) \wedge \wedge_{d\in D}(d \to b) = \vee_{e\in D}(e \wedge \wedge_{d\in D}(d \to b)) \leq \vee_{e\in D}(e \wedge (e \to b)) \leq \vee_{e\in D}(b) = b$, da cui la tesi (per la prima uguaglianza si è usata la Prop. 6.2.1).

□

Osservazione 6.2.1. *Banalmente, la precedente ci dice, in particolare, che le algebre complete di Heyting sono esattamente le strutture implicative* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *tali che* $a \leq b \to c$ *se e solo se* $a \wedge b \leq c$*, per ogni* $a, b, c \in A$.
Possiamo così applicare i risultati visti per le strutture implicative alle algebre di Heyting complete.

Fissiamo un'algebra di Heyting completa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Proposizione 6.2.3. $a \cdot b = a \wedge b$ *per ogni* $a, b \in A$.

Dimostrazione.

$a \cdot b = \wedge(\{c \in A : a \leq b \to c\}) = \wedge(\{c \in A : a \wedge b \leq c\}) = a \wedge b.$ □

Segue, in particolare, che $\cdot$ è commutativo e associativo.

Proposizione 6.2.4. *Sia* $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n \in V$, $x_i \neq x_j$ *per ogni* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *con* $i \neq j$*. Sia* $\underline{a} \equiv a_1, \ldots, a_n \in A$*. Sia* $t \in \Lambda_{\varnothing}^{[\underline{x}]}$*. Allora*

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq t[\underline{a}/\underline{x}]^\star$$

In particolare, se $t \in \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$*, allora* $t^\star \geq \top$*, e dunque* $t^\star = \top$*.*

Dimostrazione. Induzione sulla complessità di t.

- $x_i[\underline{a}/\underline{x}]^\star = a_i^\star = a_i \geq a_i \geq a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$

- $(ru)[\underline{a}/\underline{x}]^\star = r[\underline{a}/\underline{x}]^\star \wedge u[\underline{a}/\underline{x}]^\star \geq (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \wedge (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$

- $(\lambda y.q)[\underline{a}/\underline{x}]^\star = \lambda y.(q[\underline{a}/\underline{x}])^\star = \wedge_{c\in A}(c \to q[\underline{a}/\underline{x}][c/y]^\star) \geq \wedge_{c\in A}(c \to q[c/y,\underline{a}/\underline{x}]^\star) \geq \wedge_{c\in A}(c \to c \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \geq \wedge_{c\in A}(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$
- $(\lambda x_i.q)[\underline{a}/\underline{x}]^\star = \lambda x_i.(q[a_1/x_1,\ldots,\cancel{a_i/x_i},\ldots,a_n/x_n])^\star = \ldots$ (proseguire come sopra)

dove $y \in V$, $y \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$ □

Proposizione 6.2.5. *Supponiamo che A abbia almeno due elementi. Allora H è intuizionisticamente consistente (Def. 5.7.1).*

Dimostrazione. Sappiamo che $t^\star = \top$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_{\varnothing}$ (Prop. 6.2.4). Inoltre, dato che A ha almeno due elementi, si deve necessariamente avere $\bot \neq \top$; ciò permette di concludere che $t^\star \neq \bot$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_{\varnothing}$, ovvero che H è intuizionisticamente consistente. □

Proposizione 6.2.6. *Per ogni $a, b \in A$ abbiamo:*

- $a \times_H b = a \wedge b$
- $a +_H b = a \vee b$

Dimostrazione.

- Sia $c \in A$. Sappiamo che $a \wedge (a \to b \to c) \leq b \to c$. Ma $a \wedge (a \to b \to c) \leq b \to c$ implica $(a \wedge b) \wedge (a \to b \to c) \leq c$, implica $a \wedge b \leq (a \to b \to c) \to c$. Data l'arbitrarietà di $c \in A$, ne concludiamo che $a \wedge b \leq \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c)$, ovvero $a \wedge b \leq a \times_H b$.

- Dalla teoria delle strutture implicative sappiamo che $((a \to b \to a) \to a) \wedge (a \to b \to a) \leq a$. Ma $((a \to b \to a) \to a) \wedge (a \to b \to a) \leq a$ implica $((a \to b \to a) \to a) \wedge \top \leq a$, perché in ogni algebra di Heyting si ha $a \to b \to a = \top$; ma ciò implica che $(a \to b \to a) \to a \leq a$, e dunque $\wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c) \leq a$, ovvero $a \times_H b \leq a$

- Sappiamo che $((a \to b \to b) \to b) \wedge (a \to b \to b) \leq b$. Ma $((a \to b \to b) \to b) \wedge (a \to b \to b) \leq b$ implica $((a \to b \to b) \to b) \wedge \top \leq b$, implica $(a \to b \to b) \to b \leq b$, implica $\wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c) \leq b$, ovvero $a \times_H b \leq b$

- Ricordiamo che nelle algebre di Heyting vale la distributività di $\vee$ con $\wedge$ (Prop. 3.1.2). Sia $c \in A$. Per riflessività abbiamo che che $c \leq c$. Ma $c \leq c$ implica $c \wedge ((b \to c) \vee (a \to c)) \leq c$, implica $(c \wedge (b \to c)) \vee (c \wedge (a \to c)) \leq c$, implica $(a \wedge (a \to c) \wedge (b \to c)) \vee (b \wedge (a \to c) \wedge (b \to c)) \leq c$, implica $(a \vee b) \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) \leq c$, implica $a \vee b \leq (a \to c) \to (b \to c) \to c$. Data l'arbitrarietà di $c \in A$, ne deduciamo che $a \vee b \leq \wedge_{c\in A}((a \to c) \to (b \to c) \to c)$, ovvero $a \vee b \leq a +_H b$

- Sappiamo che $\top \to \top \to a \vee b \leq a \vee b$, perché in ogni algebra di Heyting si ha $\top \to d = d$ per ogni elemento d; ma ciò implica $(a \to a \vee b) \to (b \to a \vee b) \to a \vee b \leq a \vee b$, dato che $a \to a \vee b = b \to a \vee b = \top$; dunque $\wedge_{c\in A}((a \to c) \to (b \to c) \to c) \leq a \vee b$

□

Proposizione 6.2.7. $\exists_H(D) = \vee(D)$ *per ogni* $D \subseteq A$

Dimostrazione. $\vee(D) \wedge (\vee(D) \to c) \leq c$ per ogni $c \in A$ implica $\vee(D) \leq (\vee(D) \to c) \to c$ per ogni $c \in A$, implica $\vee(D) \leq \wedge_{c\in A}((\vee(D) \to c) \to c)$, implica $\vee(D) \leq \wedge_{c\in A}(\wedge_{d\in D}(d \to c) \to c)$ (per la compatibilità con i sup arbitrari), implica $\vee(D) \leq \exists_H(D)$.
Viceversa: sia $d \in D$; usando le proprietà della algebre di Heyting (Prop. 3.1.3, punti (1) e (3)), osserviamo che $(d \to d) \to d = \top \to d = d \leq \vee(D)$, da cui deduciamo che $\wedge_{a\in A}((d \to a) \to a) \leq \vee(D)$. Per arbitrarietà di $d \in D$ segue che $\wedge_{d\in D} \wedge_{a\in A} ((d \to a) \to a) \leq \vee(D)$, ovvero $\exists_H(D) \leq \vee(D)$ □

6.3 Algebre di Boole complete

Un'**algebra di Boole completa** è, per definizione, un'algebra di Heyting completa che è pure un'algebra di Boole, ovvero un'algebra di Heyting completa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ tale che $a = \neg\neg a$ per ogni $a \in A$. Tutto quanto si è detto nel precedente paragrafo riguardo alle algebre di Heyting complete vale naturalmente anche per le algebre di Boole complete, essendo queste delle particolari algebre di Heyting complete. Vediamo ora dei risultati specifici riguardanti queste strutture.

Proposizione 6.3.1. *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *un'algebra di Heyting completa. Allora i seguenti sono equivalenti:*

· (1) *H è un'algebra di Boole (completa)*

· (2) $\propto_H = \top$

· (3) $t^\star = \top$ *per ogni* $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$

Dimostrazione.

(1) implica (2): Supponiamo che H sia di Boole. Allora sappiamo che $\neg a \to a = a$ per ogni $a \in A$ (Prop. 3.5.1), da cui $(\neg a \to a) \to a = \top$ per ogni $a \in A$ (Prop. 3.1.3, punto (1)).
Da ciò segue che $\propto_H = \wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a) = \wedge_{a\in A}(\top) = \top$.

(2) implica (3): Supponiamo che $\propto_H = \top$. Sia $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$. Quindi esiste $u \in \Lambda^{[x_1,\ldots,x_n]}_{\varnothing}$ tale che $t = u[\propto_H /x_1, \ldots, \propto_H /x_n]$. Per la Prop. 6.2.4, abbiamo che $u[\propto_H /x_1, \ldots, \propto_H /x_n]^\star \geq \propto_H \wedge \cdots \wedge \propto_H = \propto_H = \top$, da cui $t^\star = \top$

(3) implica (1): Se $t^\star = \top$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$ allora, in particolare, $\propto_H = \propto_H^\star = \top$, ovvero $\wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a) = \top$. Ma da ciò segue che $(\neg a \to a) \to a = \top$ per ogni $a \in A$, ovvero $\neg a \to a = a$ per ogni $a \in A$, il che equivale a dire che H è di Boole. □

Proposizione 6.3.2. *Le algebre complete di Boole con almeno 2 elementi sono classicamente consistenti.*

Dimostrazione. Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ un'algebra di Boole completa con almeno 2 elementi. Dalla precedente sappiamo che $t^\star = \top$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$. Dato che H ha almeno 2 elementi, si ha necessariamente che $\top \neq \bot$; da ciò segue che $t^\star \neq \bot$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$, ovvero H è classicamente consistente. □

Proposizione 6.3.3. *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ *un'algebra di Boole completa. Sia* $D \subseteq A$. *Allora*

(1) $\vee(D) = \neg \wedge (\neg D)$

(2) $\wedge(D) = \neg \vee (\neg D)$

dove $\neg D := \{\neg d : d \in D\}$.

Dimostrazione. Si tenga presente la Prop. 3.1.3, in particolare i punti (4), (5) e (7). Inoltre, essendo H compatibile con i sup arbitrari, osserviamo che

$$(\star)\ \neg \vee (E) = \wedge(\neg E) \text{ per ogni } E \subseteq A$$

(1) Sappiamo che $\vee(D) \wedge \neg \vee (D) = \bot$; ma $\vee(D) \wedge \neg \vee (D) = \bot$ implica $\vee(D) \wedge \wedge(\neg D) \leq \bot$, implica $\vee(D) \leq \neg \wedge (\neg D)$.
Viceversa: essendo H di Boole, abbiamo $\neg\neg \vee (D) \leq \vee(D)$; ma $\neg\neg \vee (D) \leq \vee(D)$ implica $\neg \wedge (\neg D) \leq \vee(D)$, per $(\star)$.

(2) Da $(\star)$, ponendo $E = \neg D$, si ha $\neg \vee (\neg D) = \wedge(\neg\neg D)$. Ciò conclude la dimostrazione, perché $\neg\neg D = D$, essendo H di Boole. □

6.4 Strutture applicative

Prima di passare alle algebre combinatorie, sarà utile introdurre un tipo di struttura molto semplice:

Definizione 6.4.1. *Una* ***struttura applicativa*** (***parziale***) *è una coppia* $(R, \cdot)$ *dove*

- R *è un insieme*
- $\cdot$ *è una funzione da* $(R \cup \{\uparrow\}) \times (R \cup \{\uparrow\})$ *in* $R \cup \{\uparrow\}$ *tale che*

$$\uparrow = \alpha \cdot \uparrow = \uparrow \cdot\, \alpha = \uparrow \cdot \uparrow \text{ per ogni } \alpha \in R$$

dove $\uparrow \notin R$ *(possiamo porre, per esempio,* $\uparrow := \{R\}$*).*

Per convenzione, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in R \cup \{\uparrow\}$, scriviamo $\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_{n+1}$ per $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n) \cdot \alpha_{n+1}$.

Definizione 6.4.2. *Chiamiamo* ***struttura applicativa totale*** *ogni struttura applicativa parziale* $Q = (R, \cdot)$ *tale che* $\alpha \cdot \beta \neq \uparrow$ *per ogni* $\alpha, \beta \in R$*; è chiaro che una struttura applicativa totale è identificabile con una coppia* $Q = (R, \cdot)$ *dove* R *è un insieme e* $\cdot$ *è un'operazione binaria su* R *definita su tutti gli elementi di* $R \times R$*.*

Definizione 6.4.3. *Se* $Q = (R, \cdot)$ *è una struttura applicativa parziale, definiamo la settupla* $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}(R), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, R, \to_Q)$*, dove:*

$$a \to_Q b := \{\gamma \in R : \gamma \cdot \alpha \in b \text{ per ogni } \alpha \in R\ \}$$

per ogni $a, b \subseteq R$*.*

Osservazione 6.4.1. *Se, per ogni* $d, e \subseteq R$*, definiamo* $d \cdot e := \{\delta \cdot \epsilon : \delta \in d, \epsilon \in e\}$*, allora* $a \to_Q b$ *può essere equivalentemente definito tramite*

$$a \to_Q b := \{\gamma \in R : \{\gamma\} \cdot a \subseteq b\}$$

o come il più grande sottoinsieme di R *tale che:*

$$(a \to_Q b) \cdot a \subseteq b$$

Proposizione 6.4.1. *Sia* $Q = (R, \cdot)$ *una struttura applicativa parziale. Allora* $\mathcal{Q}$ *è una struttura quasi-implicativa compatibile con i sup arbitrari. Inoltre* $\mathcal{Q}$ *è una struttura implicativa (compatibile con i sup arbitrari) se e solo se* Q *è una struttura applicativa totale.*

Dimostrazione.

- Il fatto che sia una struttura quasi-implicativa deriva facilmente da note proprietà insiemistiche. Verifichiamo solo le proprietà relative a $\to_Q$:

– $b \subseteq a$, $a' \subseteq b'$ implica $\{\gamma \in R : \{\gamma\} \cdot a \subseteq a' \} \subseteq \{\gamma \in R : \{\gamma\} \cdot b \subseteq b'\}$ implica $a \to_Q a' \subseteq b \to_Q b'$.

– $\cap_{d\in D}(a \to_Q d) = \cap_{d\in D}(\{\gamma \in R : \{\gamma\}\cdot a \subseteq d \}) = \{\gamma \in R : \{\gamma\}\cdot a \subseteq \cap(D)\} = a \to_Q \cap(D)$, per ogni $\varnothing \neq D \subseteq \mathcal{P}(R)$

· Compatibilità: $\cap_{d\in D}(d \to_Q b) = \cap_{d\in D}(\{\gamma \in R : \{\gamma\}\cdot d \subseteq b\}) = \{\gamma \in R : \{\gamma\} \cdot \cup(D) \subseteq b \} = \cup(D) \to_Q b$

· Infine: $\mathcal{Q}$ è una struttura implicativa se e solo se $R \to_Q R = R$, se e solo se $\gamma \cdot \alpha \in R$ per ogni $\gamma, \alpha \in R$, se e solo se $\mathcal{Q}$ è una struttura applicativa totale.

□

Notazione: se $Q = (R, \cdot)$ è una struttura applicativa totale, indichiamo con $\cdot_{\mathcal{Q}}$ l'applicazione relativa alla struttura implicativa $\mathcal{Q}$, coerentemente alle notazioni già introdotte relativamente alle strutture implicative; andrebbe quindi fatta attenzione nel distinguere tra l'applicazione $\cdot$ della struttura applicativa totale Q e l'applicazione $\cdot_{\mathcal{Q}}$ della struttura implicativa associata $\mathcal{Q}$ (non potremmo dunque utilizzare $\cdot$ come abbreviazione di $\cdot_{\mathcal{Q}}$). Tuttavia vale il seguente.

Proposizione 6.4.2. *Sia $Q = (R, \cdot)$ una struttura applicativa totale. Siano $a, b \subseteq R$. Allora*

$$a \cdot_{\mathcal{Q}} b = a \cdot b$$

Dimostrazione. $a \cdot_{\mathcal{Q}} b = \cap\{c \subseteq R : a \subseteq b \to_Q c\} = \cap\{c \subseteq R : a \subseteq \{\alpha \in R : \{\alpha\} \cdot b \subseteq c\}\} = \cap\{c \subseteq R : \{\alpha\} \cdot b \subseteq c$ per ogni $\alpha \in a\} = \cap\{c \subseteq R : a \cdot b \subseteq c\}$ $= a \cdot b$. □

Definizione 6.4.4. *Poniamo $R^{\uparrow} := R \cup \{\uparrow\}$.*

Definizione 6.4.5. *Se $Q = (R, \cdot)$ è una struttura applicativa, definiamo la seguente funzione $t \mapsto t^{\bullet Q}$ di $R[-]$ in $R^{\uparrow}$:*

· $\alpha^{\bullet Q} = \alpha$ *per ogni* $\alpha \in R$

· $(qu)^{\bullet Q} = q^{\bullet Q} \cdot u^{\bullet Q}$ *per ogni* $u, q \in R[-]$

6.5 Algebre combinatorie

Un'**algebra combinatoria (parziale)** è una quadrupla $P = (R, \cdot, k, s)$ dove:

- $(R, \cdot)$ è una struttura applicativa parziale
- k e s sono elementi di R tali che
  - $s \cdot \alpha \cdot \beta \neq \uparrow$
  - $k \cdot \alpha \cdot \beta = \alpha$
  - $s \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma \cdot (\beta \cdot \gamma)$

  per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in R$

Osservazione 6.5.1. *Si noti che dagli assiomi segue che $k \cdot \alpha \neq \uparrow$, $k \cdot \alpha \cdot \beta \neq \uparrow$ e $s \cdot \alpha \neq \uparrow$ per ogni $\alpha, \beta \in R$.*

Gli elementi di un'algebra combinatoria parziale vengono detti **realizzatori**.
Un'algebra combinatoria $(R, \cdot, k, s)$ è detta totale se $(R, \cdot)$ è una struttura applicativa totale.
Dato che un'algebra combinatoria parziale può essere identificata con una struttura applicativa parziale - $(R, \cdot, k, s) \mapsto (R, \cdot)$ - i risultati visti per le strutture applicative parziali si applicano alle algebre combinatorie parziali.
Fissiamo un'algebra combinatoria totale $P := (R, \cdot, k, s)$ e poniamo $Q := (R, \cdot)$.

Definizione 6.5.1.

- *Poniamo $\rightarrow_P := \rightarrow_Q$ (Def. 6.4.3).*
- *Indichiamo con $\mathcal{P}$ la struttura implicativa indotta da Q (Def. 6.4.3), ovvero $\mathcal{P} := (\mathcal{P}(R), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, R, \rightarrow_P)$.*
- *Indichiamo con $\cdot_{\mathcal{P}}$ l'applicazione di $\mathcal{P}$ (Def. 5.2.1).*

Ricordiamo che, nel precedente paragrafo, si è dimostrato che $a \cdot_{\mathcal{P}} b = a \cdot b$ per ogni $a, b \subseteq R$, dove $a \cdot b := \{\alpha \cdot \beta : \alpha \in a, \beta \in b\}$ (Prop. 6.4.2).

Osservazione 6.5.2.

Si osservi che $k \in a \rightarrow_P b \rightarrow_P a$ per ogni $a, b \subseteq R$. Infatti, fissati $a, b \subseteq R$, si ha che $k \cdot \alpha \cdot \beta = \alpha \in a$ per ogni $\alpha \in a$, $\beta \in b$. Ciò equivale a dire che $k \cdot \alpha \in b \rightarrow_P a$ per ogni $\alpha \in a$, da cui la tesi.

Con un argomento analogo si osserva che $s \in (a \to_P b \to_P c) \to_P (a \to_P b) \to_P a \to_P c$ *per ogni* $a, b, c \subseteq R$.

Per il seguito, si tengano a mente le definizioni date nel paragrafo 1.2. Definiamo la seguente funzione da $(\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup R)[-]$ in $R^{\uparrow} = R \cup \{\uparrow\}$:

- $\boldsymbol{K}^{\bullet P} := k$
- $\boldsymbol{S}^{\bullet P} := s$
- $\alpha^{\bullet P} = \alpha$ per ogni $\alpha \in R$
- $(qu)^{\bullet P} = q^{\bullet P} \cdot u^{\bullet P}$ per ogni $q, u \in (\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup R)[-]$

Osservazione 6.5.3. *Una semplice induzione mostra che:*

- *Se* $t \in (\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup R)[\underline{x}]$ *allora* $L\underline{x}.t \in (\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup R)[-]$ (*come sappiamo già dal paragrafo 1.2*) *e* $(L\underline{x}.t)^{\bullet P} \neq \uparrow$.
- *Se* $t \in (\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\} \cup R)[\underline{x}]$, *allora* $((L\underline{x}.t)\underline{a})^{\bullet P} = t[\underline{a}/\underline{x}]^{\bullet P}$

Proposizione 6.5.1. *Sia* $t \in (\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\})[-]$. *Allora* $t^{\bullet P} \in t^{\star \mathcal{P}}$

Dimostrazione. Induzione sulla complessità di t:
$\boldsymbol{K}^{\bullet P} = k \in \cap_{a,b \subseteq R}(a \to_P b \to_P a) = \boldsymbol{K}^{\star \mathcal{P}}$
$\boldsymbol{S}^{\bullet P} = s \in \cap_{a,b,c \subseteq R}((a \to_P b \to_P c) \to_P (a \to_P b) \to_P a \to_P c) = \boldsymbol{S}^{\star \mathcal{P}}$
$(qu)^{\bullet P} = q^{\bullet P} \cdot u^{\bullet P} \in q^{\star \mathcal{P}} \cdot u^{\star \mathcal{P}} = q^{\star \mathcal{P}} \cdot_{\mathcal{P}} u^{\star \mathcal{P}} = (qu)^{\star \mathcal{P}}$ □

Proposizione 6.5.2. *La struttura implicativa* $\mathcal{P}$ *è intuizionisticamente consistente* (*Def. 5.7.1*)

Dimostrazione. Sia $t \in \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$. Sappiamo che esiste $t_0 \in \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}\}[-]$ tale che $t_0 \twoheadrightarrow_{\beta} t$ (Prop. 1.2.1), e dunque $t_0^{\star \mathcal{P}} \subseteq t^{\star \mathcal{P}}$ (per la Prop. 5.3.2 e la Def. 6.5.1). Ma $t_0^{\bullet P} \in t_0^{\star \mathcal{P}}$ (Prop. 6.5.1) e quindi $t_0^{\bullet P} \in t^{\star \mathcal{P}}$, da cui $t^{\star \mathcal{P}} \neq \varnothing$. □

6.6 Proprietà delle algebre combinatorie

Sia $P := (R, \cdot, k, s)$ un'algebra combinatoria parziale.
Definiamo i seguenti elementi in R:

- $i := s \cdot k \cdot k$
- $\overline{k} := k \cdot i$

Osserviamo che

- $i \cdot \alpha = s \cdot k \cdot k \cdot \alpha = k \cdot \alpha \cdot (k \cdot \alpha) = \alpha$
- $\overline{k} \cdot \alpha \cdot \beta = k \cdot i \cdot \alpha \cdot \beta = i \cdot \beta = \beta$

per ogni $\alpha, \beta \in R$.
Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Osserviamo che ogni elemento $\alpha \in R$ definisce una funzione $(\alpha.)^n$ da $(R^{\uparrow})^n$ in $R^{\uparrow}$

$$\begin{gathered}(\alpha.)^n \colon (R^{\uparrow})^n \to R^{\uparrow} \\ (\beta_1, \ldots, \beta_n) \mapsto \alpha \cdot \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n\end{gathered}$$

In particolare:

- $(i.)^1|_R$ è l'identità di R (restringendo il codominio in R)
- $(k \cdot \alpha.)^1|_R$ è la funzione costante che manda tutti gli elementi di R in $\alpha \in R$
- $(k.)^2|_{R\times R}$ è la proiezione sulla prima componente.
- $(\overline{k}.)^2|_{R\times R}$ è la proiezione sulla seconda componente.

Definiamo i seguenti termini combinatori chiusi a parametri in R: $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ $\in (\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\} \cup R)[-]$

- $\mathbf{p} := Lxyz.zxy$
- $\mathbf{p}_1 := Lx.xk$
- $\mathbf{p}_2 := Lx.x\overline{k}$

Proposizione 6.6.1.
$(\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{p}\alpha\beta))^{\bullet P} = \alpha$
$(\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{p}\alpha\beta))^{\bullet P} = \beta$

per ogni $\alpha, \beta \in R$

Dimostrazione.
- $(\mathbf{p}_1(\mathbf{p}\alpha\beta))^{\bullet} = ((Lx.xk)(\mathbf{p}\alpha\beta))^{\bullet} = (\mathbf{p}\alpha\beta k)^{\bullet} = ((Lxyz.zxy)\alpha\beta k)^{\bullet} = (k\alpha\beta)^{\bullet} = k \cdot \alpha \cdot \beta = \alpha$
- $(\mathbf{p}_2(\mathbf{p}\alpha\beta))^{\bullet} = ((Lx.x\overline{k})(\mathbf{p}\alpha\beta))^{\bullet} = \overline{k} \cdot \alpha \cdot \beta = \beta$ $\square$

Proposizione 6.6.2. *Sia $P = (R, \leq, k, s)$ un'algebra combinatoria parziale. Allora i seguenti asserti sono equivalenti:*

- (1) *R ha un solo elemento.*
- (2) $k = s$
- (3) $k = \overline{k}$
- (4) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ *per ogni* $\alpha, \beta \in R$
- (5) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ *per ogni* $\alpha, \beta, \gamma \in R$
- (6) *R è un insieme finito*

Dimostrazione.
(1) implica (2), (3), (4), (5), (6): ovvio.
(2) implica (1): $\alpha = i \cdot \alpha = i \cdot i \cdot \alpha = s \cdot k \cdot k \cdot i \cdot \alpha = k \cdot k \cdot k \cdot i \cdot \alpha = k \cdot i \cdot \alpha = i$
(3) implica (1): $\alpha = k \cdot \alpha \cdot k = \overline{k} \cdot \alpha \cdot k = k$
(4) implica (1): $\alpha = \overline{k} \cdot k \cdot \alpha = k \cdot \overline{k} \cdot \alpha = \overline{k}$
(5) implica (1): $\alpha = k \cdot \alpha \cdot k = k \cdot k \cdot k \cdot \alpha \cdot k = k \cdot (k \cdot k) \cdot \alpha \cdot k = k \cdot k \cdot k = k$
(6) implica (1): Supponiamo che $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$; osservo che $\beta \mapsto k \cdot \beta$ è una funzione iniettiva da R in R, perché $k \cdot \beta_1 = k \cdot \beta_2$ implica $k \cdot \beta_1 \cdot \gamma = k \cdot \beta_2 \cdot \gamma$, implica $\beta_1 = \beta_2$. Dunque $R = \{k \cdot \alpha_1, \dots, k \cdot \alpha_n\}$. In particolare dobbiamo avere $i = k \cdot \alpha_j$ per qualche j. Ma $i = k \cdot \alpha_j$ implica $i \cdot \alpha_l = k \cdot \alpha_j \cdot \alpha_l$, implica $\alpha_l = \alpha_j$, per ogni l. □

Proposizione 6.6.3. *Sia $Q = (R, \cdot)$ una struttura applicativa. Allora Q ammette una struttura di algebra combinatoria parziale se e solo se Q è* ***combinatoriamente completa****, ovvero se e solo se soddisfa la seguente proprietà:*

- *per ogni $n \geq 0$, per ogni $n+1$-upla di variabili distinte $\underline{x} \equiv x_1, \dots, x_{n+1}$ e per ogni $t \in R[x_1, \dots, x_{n+1}]$ esiste $\delta_{\underline{x},t} \in R$ tale che $\delta_{\underline{x},t} \cdot \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n \in R$ e $\delta_{t,v} \cdot \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_{n+1} = t[\alpha_1/x_1, \dots, \alpha_{n+1}/x_{n+1}]^{\bullet Q}$ per ogni $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$.*

Dimostrazione. Sia $Q = (R, \cdot)$ combinatoriamente completa. Poniamo

$$\underline{x} \equiv x_1,\, x_2$$
$$t := x_1$$
$$k := \delta_{\underline{x},t}.$$

Per ogni $\alpha, \beta \in R$ si ha che $k \cdot \alpha \cdot \beta = x_1[\alpha/x_1, \beta/x_2]^{\bullet Q} = \alpha^{\bullet Q} = \alpha$.
Poniamo ora

$$\begin{aligned} \underline{x} &\equiv x_1, x_2, x_3 \\ t &:= x_1 x_3 (x_2 x_3) \\ s &:= \delta_{\underline{x},t}. \end{aligned}$$

Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in R$ abbiamo $s \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = t[\alpha/x_1, \beta/x_2, \gamma/x_3]^{\bullet Q} = \alpha \cdot \gamma \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
Quindi $(R, \leq, k, s)$ è un'algebra combinatoria parziale su $Q = (R, \cdot)$.
Viceversa: sia $P = (R, \cdot, k, s)$ un'algebra combinatoria parziale. Sia $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_{n+1}$ e $t \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Poniamo

$$\delta_{\underline{x},t} := (Lx_1 \ldots x_{n+1}.t)^{\bullet P} \in R \text{ (Oss. 6.5.3)}$$

Allora $\delta_{\underline{x},t} \cdot \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n = (Lx_1...x_{n+1}.t)^{\bullet P} \cdot \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n = ((Lx_1...x_{n+1}.t)\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{\bullet P} = (Lx_{n+1}.t[\alpha_1/x_1, \ldots, \alpha_n/x_n])^{\bullet P} \in R$.
Infine:
$\delta_{\underline{x},t} \cdot \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_{n+1} = t[\alpha_1/x_1, \ldots, \alpha_{n+1}/x_{n+1}]^{\bullet P} = t[\alpha_1/x_1, \ldots, \alpha_{n+1}/x_{n+1}]^{\bullet Q}$
(l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che, banalmente, $u^{\bullet P}$ coincide con $u^{\bullet Q}$ se $u \in R[-]$)

□

6.7 Macchina universale di Turing

L'esempio più importante di algebra combinatoria parziale proviene dall'informatica teorica, e merita un paragrafo a parte. Più precisamente tale esempio riguarda la macchina di Turing, un modello astratto che descrive una macchina in grado di svolgere calcoli.
La macchina di Turing è un automa con una testina di lettura/scrittura, che agisce su un nastro monodirezionale 'potenzialmente illimitato'. Ad ogni istante la macchina si trova in un certo 'stato', appartenente a un insieme finito di stati, e ciascuno di questi stati determina lo stato successivo in cui si troverà la macchina, fino a un'eventuale interruzione del processo di calcolo.
Data una prima idea generale, andiamo a definire formalmente il nostro oggetto di studio: una **macchina di Turing** è una quadrupla $T = (\mathcal{S}, s_0, F, \delta)$ dove

- $\mathcal{S}$ è un insieme finito, i cui elementi sono detti 'stati'
- s_0 è un elemento di $\mathcal{S}$, detto 'stato iniziale'
- F è un sottoinsieme di $\mathcal{S}$, i cui elementi sono detti 'stati finali'

- δ è una funzione di $\mathcal{S} \times \{\bullet, \Box\}$ in $(\mathcal{S} \times \{\bullet, \Box\} \times \{L, H, R\}) \cup \{\uparrow\}$, dove L, R, H stanno per 'left', 'right' e 'halt'; tale funzione è detta **funzione di transizione**, e rappresenta il programma che esegue l'input

Un **nastro** per una macchina di Turing è una sequenza di simboli $\bullet$ e $\Box$ che vale sempre $\Box$ da un certo punto in poi. Ad esempio, un nastro potrebbe essere $(\Box\Box\Box\bullet\Box\bullet\bullet\bullet\bullet\Box\bullet\bullet)$, dove la chiusura della parentesi a destra indica che di lì in poi si trovano solo simboli $\Box$. I simboli vengono numerati a partire da 0; ad esempio, nel nastro appena presentato, il simbolo $\bullet$ compare in posizione 3, 5, 6, 7, 8, 10 e 11, mentre in tutte le altre posizioni c'è $\Box$.
Una **configurazione** per una macchina di Turing T è una terna (N, Pos, St), dove $N = (N_0, N_1, N_2, \dots)$ è un nastro, Pos è un numero intero che rappresenta la posizione della testina, e St è uno stato di T.
Se (N, Pos, St) è una configurazione con $Pos \geq 0$ e $\delta(St, N_{Pos}) \neq \uparrow$, allora T agisce su (N, Pos, St) generando una nuova configurazione, in questo modo: si calcola $\delta(St, N_{Pos})$ ottenendo: 1) un simbolo $\bullet$ o $\Box$, che sostituiamo a N_{Pos} nella posizione Pos del nastro N, ottenendo così un nuovo nastro 2) un nuovo stato, che sarà il nuovo stato della macchina e 3) un'indicazione su dove proseguire e dunque una nuova posizione (L porta in posizione Pos-1, R in posizione Pos+1, con H invece si rimane nella posizione Pos); la terna formata dal nuovo nastro, dalla nuova posizione e dal nuovo stato è la nuova configurazione ottenuta dall'azione di T
Una **configurazione iniziale** per una macchina di Turing $T = (\mathcal{S}, s_0, F, \delta)$ è una configurazione di T del tipo $(N, 0, s_0)$.
Una **configurazione finale** è una configurazione (N, Pos, St) tale che $St \in F$.
Una **configurazione di errore** è una configurazione (N, Pos, St) tale che $St \notin F$ e vale una delle seguenti due condizioni:

- $Pos \geq 0$ e $\delta(St, N_{Pos}) = \uparrow$.

- $Pos < 0$.

Un **calcolo** in una macchina di Turing T è una lista finita di configurazioni $c_0, \dots, c_n$ di T tale che

- c_0 è una configurazione iniziale

- c_n è una configurazione finale o di errore

- T agisce su c_i dando c_{i+1}, per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Indichiamo con $\langle \bullet \rangle$ l'insieme di tutte le liste finite ottenute ripetendo il simbolo $\bullet$.
Siano $a_1, \ldots, a_n$, $r \in \langle \bullet \rangle$; se $T = (\mathcal{S}, s_0, F, \delta)$ è una macchina di Turing in grado di eseguire un calcolo da $((a_1 \Box a_2 \Box a_3 \Box \ldots \Box a_n), 0, s_0)$ a $((r), 0, s_1)$, per un certo $s_1 \in F$, diciamo che T dà output r su input $(a_1, \ldots, a_n)$, e scriviamo $T(a_1, \ldots, a_n) = r$. Se invece T agisce su $((a_1 \Box a_2 \Box a_3 \Box \ldots \Box a_n), 0, s_0)$ portando, a un certo punto, a una configurazione di errore, scriviamo $T(a_1, \ldots, a_n) = \uparrow$

Una funzione $f\colon \langle \bullet \rangle^n \to \langle \bullet \rangle \cup \{\uparrow\}$ è detta **Turing computabile** per la macchina di Turing T se $T(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$ per ogni $(a_1, \ldots, a_n) \in \langle \bullet \rangle^n$.
Si osservi che $\langle \bullet \rangle$ può essere identificato esplicitamente con $\mathbb{N}$, così che alla precedente definizione corrisponde una definizione di Turing computabilità per le funzioni di $\mathbb{N}^n$ in $\mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$:

- Identifichiamo $\bullet$ con 0
- Se $r \in \langle \bullet \rangle$ è identificato con $n \in \mathbb{N}$, allora identifichiamo $r\bullet$ con $n + 1$

Una **macchina a registro illimitato** (o **macchina di Turing universale**) è una macchina dotata di una testina che scorre su un nastro illimitato (che non fa parte della macchina, ma è l'*input* della macchina), con inizio ma senza fine, diviso in registri messi in successione, su ognuno dei quali è impresso un numero naturale, e tutti i registri assumono il valore 0 da un certo punto in poi; es: (3 24 17 6 0 7), dove la chiusura della parentesi tonda sta a significare che tutti i registri successivi hanno valore 0. Un programma per questo tipo di macchina è una lista finita e ordinata di comandi, che possono essere di 4 tipi:

- $Z(k)$ azzera il registro k-esimo e ordina alla macchina di posizionare la testina sopra il registro successivo.
- $S(k)$ cancella il numero impresso nel registro k-esimo e vi imprime il numero successivo; poi ordina alla macchina di posizionare la testina sul comando successivo.
- $T(n, m)$ cancella il numero impresso sul registro m-esimo e vi imprime lo stesso numero che si trova sul registro n-esimo; poi ordina alla macchina di posizionare la testina sul comando successivo.
- $J(n, m, k)$ confronta tra loro i registri n-esimo e m-esimo:

– Se i due registri contengono lo stesso numero, allora l'ordine dato è quello di posizionare la testina sopra il comando k-esimo
– Se i due numeri sono diversi, l'ordine è quello di posizionare la testina sul comando successivo.

A differenza del registro, la lista di comandi del programma rimane immutata nel corso dell'esecuzione.
La macchina universale di Turing agisce così:

· All'inizio la macchina posiziona la testina di lettura sopra il primo comando e lo esegue.

· Supponiamo che la macchina sia giunta all'i-esimo passo senza arrestarsi; allora l'$i+1$-esimo passo che compie la macchina è quello di eseguire il comando sottostante la testina di lettura.

con la seguente clausola:

· Se la macchina riceve l'ordine di posizionare la testina in una posizione che va *oltre* la lunghezza del programma, l'esecuzione si arresta.

Indichiamo con $\mathbb{P}$ l'insieme di tutti i programmi della macchina a registro illimitato. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, possiamo associare ad ogni programma $P \in \mathbb{P}$ una funzione f_P^k: $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ nel seguente modo:

· Se il programma P eseguito su input $(x_1, \ldots, x_k)$ termina, allora f_P^k $(x_1, \ldots, x_k)$ è il numero impresso sul registro 0 (quello più a sinistra nel nastro) alla fine dell'esecuzione

· Se il programma P eseguito su input $(x_1, \ldots, x_k)$ non termina, allora f_P^k $(x_1, \ldots, x_k) := \uparrow$

Una funzione f: $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ è detta **Turing universalmente computabile** se esiste un programma P tale che $f = f_P^k$.

Teorema 6.7.1. *f: $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ è Turing universalmente computabile se e solo se f: $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ è Turing computabile per qualche macchina di Turing T.*

Questo teorema ci dice, in sintesi, che una funzione tra numeri naturali può essere 'simulata' da un qualche macchina di *Turing* se e solo se può essere simulata dalla macchina universale di Turing; la macchina universale di Turing è dunque un programma che simula programmi (da cui l'appellativo di 'universale'); ciò è esattamente - in astratto e in estrema sintesi- quello che fanno gli odierni computer. Avendo dato un'idea dell'importanza della macchina universale di Turing, possiamo ora precisare in che senso essa produca un esempio di algebra combinatoria parziale, adoperando il seguente risultato:

Teorema 6.7.2. *Esiste una funzione biunivoca ϕ: $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$ tale che, se definiamo l'operazione binaria $\cdot$ su $\mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ nel seguente modo:*

- $n \cdot m := f^1_{\phi(n)}(m)$ *se* $n, m \in \mathbb{N}$
- $n \cdot m := \uparrow$ *se* $n = \uparrow$ *o* $m = \uparrow$

allora esistono $s, k \in \mathbb{N}$ tali che $(\mathbb{N}, \cdot, k, s)$ è un'algebra combinatoria parziale.

Definizione 6.7.1. *L'algebra combinatoria parziale definita dal precedente teorema (fissati gli opportuni k e s) è detta* ***prima algebra di Kleene*** *ed è indicata con $\mathcal{K}_1$*

6.8 Strutture astratte di Krivine

Consideriamo una quadrupla $Q = (\Lambda, \Pi, \cdot, \vartriangle)$, dove:

- Λ è un insieme
- Π è un insieme
- $\cdot$ è una funzione di $\Lambda \times \Pi$ in Π
- $\vartriangle$ è una relazione binaria tra elementi di Λ e gli elementi di Π

Se $e \subseteq \Pi$, poniamo $e^{\vartriangle} := \{t \in \Lambda : t \vartriangle \eta \text{ per ogni } \eta \in e\}$.

Definizione 6.8.1. *Indichiamo con $\to_Q$ l'operazione binaria su $\mathcal{P}(\Pi)$ definita da*

$$a \to_Q b := a^{\vartriangle} \cdot b := \{\alpha \cdot \beta : \alpha \in a^{\vartriangle}, \beta \in b\}$$

per ogni $a, b \subseteq \Pi$.

Definizione 6.8.2. *Poniamo $\mathcal{Q} := (\mathcal{P}(\Pi), \supseteq, \cup, \cap, \Pi, \varnothing, \to_Q)$.*

Proposizione 6.8.1. *$\mathcal{Q}$ è una struttura implicativa.*

Dimostrazione. Discende tutto da note proprietà insiemistiche. Verifichiamo quindi solamente le proprietà riguardanti $\to_Q$:

- Sia $b \supseteq a$, $a' \supseteq b'$. Da $b \supseteq a$ segue chiaramente $a^{\vartriangle} \supseteq b^{\vartriangle}$, e da ciò otteniamo $a^{\vartriangle} \cdot a' \supseteq b^{\vartriangle} \cdot b'$, ovvero $a \to_Q a' \supseteq b \to_Q b'$

- $\cup_{d \in D}(a \to_Q d) = \cup_{d \in D}(a^{\vartriangle} \cdot d) = a^{\vartriangle} \cdot \cup(D) = a \to_Q \cup(D)$ per ogni $D \subseteq \mathcal{P}(\Pi)$

- $\varnothing \to_Q \varnothing = \{\alpha \cdot \beta : \alpha \in \varnothing^{\vartriangle}, \beta \in \varnothing\} = \varnothing$

□

Osservazione 6.8.1. *Osserviamo che, se $a, b \subseteq \Pi$, allora $a \cdot_Q b = \cup\{c \subseteq \Pi : a \supseteq b^{\vartriangle} \cdot c\} = \{\gamma \in \Pi : b^{\vartriangle} \cdot \{\gamma\} \subseteq a\}$*

Definizione 6.8.3. *Una **struttura astratta di Krivine** è una lista a dieci elementi $H = (\Lambda, \Pi, \sharp, \cdot, h, \mathbb{K}, \mathbb{S}, ᴐᴐ, PL, \vartriangle)$, dove*

- *$\Lambda \neq \varnothing$ è un insieme, i cui elementi sono detti **realizzatori** (**classici**)*
- *$\Pi \neq \varnothing$ è un insieme, i cui elementi sono detti **contro-realizzatori** o **stack** (parola inglese per 'mucchio', 'pila', ...)*
- *$\cdot$ è una funzione da $\Lambda \times \Pi$ in Π*
- *$\vartriangle$ è una relazione tra elementi di Λ e gli elementi di Π, detta **polo***
- *$\sharp$ è un'operazione binaria su Λ*
- *h è una funzione da Π in Λ*
- *$\mathbb{K}, \mathbb{S}, ᴐᴐ$ sono tre elementi distinti di Λ*
- *PL è un sottoinsieme di Λ contenente $\mathbb{K}, \mathbb{S}$ e $ᴐᴐ$, chiuso rispetto a $\sharp$ (cioè, se $t, u \in PL$, allora $t \sharp u \in PL$)*

La struttura deve rispettare i seguenti assiomi

- *$t \vartriangle u \cdot \omega$ implica $t \sharp u \vartriangle \omega$*
- *$t \vartriangle \omega$ implica $\mathbb{K} \vartriangle t \cdot (u \cdot \omega)$*
- *$t \vartriangle u \cdot ((q \sharp u) \cdot \omega)$ implica $\mathbb{S} \vartriangle t \cdot (q \cdot (u \cdot \omega))$*
- *$t \vartriangle h(\omega) \cdot \omega$ implica $ᴐᴐ \vartriangle t \cdot \omega$*
- *$t \vartriangle \omega$ implica $h(\omega) \vartriangle t \cdot \eta$*

per ogni $t, u, q \in \Lambda$, $\omega, \eta \in \Pi$.

Poniamo $Q := (\Lambda, \Pi, \cdot, \vartriangle)$.

Definizione 6.8.4. *Definiamo*

- $\rightarrow_H \;:=\; \rightarrow_Q$ (*Def. 6.8.1*)
- $\mathcal{H} := \mathcal{Q} = (\mathcal{P}(\Pi),\ \supseteq,\ \cup,\ \cap,\ \Pi,\ \varnothing,\ \rightarrow_H)$ (*Def. 6.8.2*)

Da quanto visto (Prop. 6.8.1), è chiaro che $\mathcal{H}$ è una struttura implicativa, che diciamo indotta dalla struttura astratta di Krivine H.

Definizione 6.8.5. *Definiamo la relazione $\Vdash$ tra elementi di Λ (realizzatori) e elementi di $\mathcal{P}(\Pi)$ (sottoinsiemi di contro-realizzatori) come segue:*

$$t \Vdash a \text{ se e solo se } t \in a^{\vartriangle}, \text{ per ogni } t \in \Lambda,\ a \subseteq \Pi$$

Diciamo che un elemento $a \in \mathcal{P}(\Pi)$ è **realizzato** se esiste $t \in PL$ tale che $t \Vdash a$, ovvero se $a^{\vartriangle} \cap PL \neq \varnothing$.

Definizione 6.8.6. *Una struttura astratta di Krivine $H = (\Lambda,\ \Pi,\ \sharp,\ \cdot,\ h,\ \mathbb{K},\ \mathbb{S},\ \text{æ},\ PL,\ \vartriangle)$ è detta* ***consistente*** *se Π (che è il minimo della struttura implicativa associata $\mathcal{H}$) non è realizzato, ovvero se $\Pi^{\vartriangle} \cap PL = \varnothing$.*

Fissiamo una struttura astratta di Krivine $H = (\Lambda,\ \Pi,\ \sharp,\ \cdot,\ h,\ \mathbb{K},\ \mathbb{S},\ \text{æ},\ PL,\ \vartriangle)$.
Se $T,\ U \subseteq \Lambda$, poniamo $T \sharp U := \{t \sharp u : t \in T,\ u \in U\}$

Proposizione 6.8.2. *Siano $a, b \subseteq \Pi$. Allora $a^{\vartriangle} \sharp b^{\vartriangle} \subseteq (a \cdot_{\mathcal{H}} b)^{\vartriangle}$*

Dimostrazione. Siano $t \in a^{\vartriangle}$, $u \in b^{\vartriangle}$, $\gamma \in (a \cdot_{\mathcal{H}} b) = \{\delta \in \Pi : b^{\vartriangle} \cdot \{\delta\} \subseteq a\}$. Chiaramente $u \cdot \gamma \in a$, e dunque $t \vartriangle u \cdot \gamma$. Grazie agli assiomi delle strutture astratte di Krivine, da $t \vartriangle u \cdot \gamma$ deduciamo $t \sharp u \vartriangle \gamma$. Per arbitrarietà di $\gamma \in (a \cdot_{\mathcal{H}} b)$, segue che $t \sharp u \in (a \cdot_{\mathcal{H}} b)^{\vartriangle}$. Infine, per arbitrarietà di $t \in a^{\vartriangle}$ e $u \in b^{\vartriangle}$, concludiamo che $a^{\vartriangle} \sharp b^{\vartriangle} \subseteq (a \cdot_{\mathcal{H}} b)^{\vartriangle}$ □

Proposizione 6.8.3. *Siano $t, u \in \Lambda$, $a, b \subseteq \Pi$. Supponiamo che $t \Vdash a$ e $u \Vdash b$. Allora $t \sharp u \Vdash a \cdot_{\mathcal{H}} b$.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi abbiamo che $t \in a^{\vartriangle}$, $u \in b^{\vartriangle}$, da cui segue che $t \sharp u \in a^{\vartriangle} \sharp b^{\vartriangle}$. Dato che $a^{\vartriangle} \sharp b^{\vartriangle} \subseteq (a \cdot_{\mathcal{H}} b)^{\vartriangle}$, segue che $t \sharp u \in (a \cdot_{\mathcal{H}} b)^{\vartriangle}$, ovvero $t \sharp u \Vdash a \cdot_{\mathcal{H}} b$. □

Proposizione 6.8.4. *Sia $t \in \Lambda$, $b \subseteq a \subseteq \Pi$ e $t \Vdash a$. Allora $t \Vdash b$*

Dimostrazione. $t \Vdash a$ significa $t \in a^{\vartriangle}$. Dato che $a \supseteq b$, si ha che $a^{\vartriangle} \subseteq b^{\vartriangle}$, e dunque $t \in b^{\vartriangle}$, ovvero $t \Vdash b$. □

Osservazione 6.8.2. *Se $\triangle$ non è una relazione vuota, allora esiste $q \in \Lambda$ tale che $q \Vdash b$ per ogni $b \subseteq \Pi$.*
Infatti: $t \triangle \alpha$ implica $h(\alpha) \triangle t \cdot \beta$ per ogni $\beta \in \Pi$, implica $h(\alpha) \sharp t \triangle \beta$ per ogni $\beta \in \Pi$, implica $h(\alpha) \sharp t \in \Pi^{\triangle}$, implica $h(\alpha) \sharp t \Vdash \Pi$, e quest'ultima equivale a $h(\alpha) \sharp t \Vdash b$ per ogni $b \subseteq \Pi$.

Definizione 6.8.7. *Definiamo una funzione $t \mapsto t^{\circ H}$ da $\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}, \propto_{\mathcal{H}}\}[-]$ in PL, in questo modo*

- $\boldsymbol{K}^{\circ H} = \mathbb{K}$
- $\boldsymbol{S}^{\circ H} = \mathbb{S}$
- ${\propto_{\mathcal{H}}}^{\circ H} = ᴐᴐ$
- $(qu)^{\circ H} = q^{\circ H} \sharp u^{\circ H}$

È immediato verificare che l'immagine di questa funzione appartiene effettivamente a PL (perché PL è chiuso rispetto a $\sharp$).

Proposizione 6.8.5. *Sia $t \in \{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}, \propto_{\mathcal{H}}\}[-]$. Allora $t^{\circ H} \Vdash t^{\star\mathcal{H}}$*

Dimostrazione.
- Sia $\gamma \in \mathbf{K}^{\star\mathcal{H}} = \cup_{e,f\subseteq\Pi}(e \to_H f \to_H e)$. Allora $\gamma \in e \to_H f \to_H e = e^{\triangle} \cdot (f^{\triangle} \cdot e)$ per qualche $e, f \subseteq \Pi$, ovvero $\gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \epsilon)$ per qualche $e, f \subseteq \Pi$, $\alpha \in e^{\triangle}$, $\beta \in f^{\triangle}$, $\epsilon \in e$. Chiaramente $\alpha \triangle \epsilon$, da cui segue che $\mathbb{K} \triangle \alpha \cdot (\beta \cdot \epsilon)$, ovvero $\mathbb{K} \triangle \gamma$. Data l'arbitrarietà di $\gamma \in \mathbf{K}^{\star\mathcal{H}}$, ciò equivale esattamente a dire che $\mathbb{K} \in (\mathbf{K}^{\star\mathcal{H}})^{\triangle}$, ovvero $\mathbb{K} \Vdash \mathbf{K}^{\star\mathcal{H}}$, cioè $\mathbf{K}^{\circ H} \Vdash \mathbf{K}^{\star\mathcal{H}}$.

- Sia $\gamma \in \mathbf{S}^{\star\mathcal{H}} = \cup_{e,f,g\subseteq\Pi}((e \to_H f \to_H g) \to_H (e \to_H f) \to_H e \to_H g)$. Allora $\gamma \in (e^{\triangle} \cdot (f^{\triangle} \cdot g))^{\triangle} \cdot ((e^{\triangle} \cdot f)^{\triangle} \cdot (e^{\triangle} \cdot g))$ per qualche $e, f, g \subseteq \Pi$, ovvero $\gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot (\delta \cdot \eta))$, per qualche $\alpha \in (e^{\triangle} \cdot (f^{\triangle} \cdot g))^{\triangle}$, $\beta \in (e^{\triangle} \cdot f)^{\triangle}$, $\delta \in e^{\triangle}$ e $\eta \in g$.
Dato che $\beta \in (e^{\triangle} \cdot f)^{\triangle}$, si ha che $\beta \triangle \delta \cdot \phi$ per ogni $\phi \in f$, da cui segue -grazie agli assiomi delle strutture astratte di Krivine- che $\beta \sharp \delta \triangle \phi$ per ogni $\phi \in f$, e dunque $\beta \sharp \delta \in f^{\triangle}$.
Dato che $\alpha \in (e^{\triangle} \cdot (f^{\triangle} \cdot g))^{\triangle}$, $\delta \in e^{\triangle}$, $(\beta \sharp \delta) \in f^{\triangle}$ e che $\eta \in g$, segue che $\alpha \triangle \delta \cdot ((\beta \sharp \delta) \cdot \eta)$, da cui deduciamo - grazie agli assiomi- che $\mathbb{S} \triangle \alpha \cdot (\beta \cdot (\delta \cdot \eta))$, ovvero $\mathbb{S} \Vdash \gamma$.
Quest'ultima osservazione, insieme all'arbitrarietà di $\gamma \in \mathbf{S}^{\star\mathcal{H}}$, ci dice infine che $\mathbb{S} \Vdash \mathbf{S}^{\star\mathcal{H}}$, ovvero $\mathbf{S}^{\circ H} \Vdash \mathbf{S}^{\star\mathcal{H}}$.

- Sia $\gamma \in \cup_{e,f\subseteq E}(((e \to_H f) \to_H e) \to_H e) = \propto_{\mathcal{H}}$. Allora $\gamma \in ((e^{\triangle} \cdot f)^{\triangle} \cdot e)^{\triangle} \cdot e$ per qualche $e, f \subseteq \Pi$, ovvero $\gamma = \alpha \cdot \eta$ per qualche $\alpha \in ((e^{\triangle} \cdot f)^{\triangle} \cdot e)^{\triangle}$, $\eta \in e$.

Ovviamente $\delta \perp\!\!\!\perp \eta$ per ogni $\delta \in e^{\perp\!\!\!\perp}$, il che implica che $h(\eta) \perp\!\!\!\perp \delta \cdot \epsilon$ per ogni $\delta \in e^{\perp\!\!\!\perp}$, $\epsilon \in \Pi$; in particolare $h(\eta) \perp\!\!\!\perp \delta \cdot \phi$ per ogni $\delta \in e^{\perp\!\!\!\perp}$, $\phi \in f$. Ciò implica che $h(\eta) \in (e^{\perp\!\!\!\perp} \cdot f)^{\perp\!\!\!\perp}$, e dunque che $h(\eta) \cdot \eta \in (e^{\perp\!\!\!\perp} \cdot f)^{\perp\!\!\!\perp} \cdot e$. Ma allora, dato che $\alpha \in ((e^{\perp\!\!\!\perp} \cdot f)^{\perp\!\!\!\perp} \cdot e)^{\perp\!\!\!\perp}$, segue necessariamente che $\alpha \perp\!\!\!\perp h(\eta) \cdot \eta$; grazie agli assiomi delle strutture astratte di Krivine, da quest'ultima segue che $\text{ↄↄ} \perp\!\!\!\perp \alpha \cdot \eta$, ovvero $\text{ↄↄ} \perp\!\!\!\perp \gamma$.
Infine, data l'arbitrarietà di $\gamma \in \propto_{\mathcal{H}}$, possiamo concludere che $\text{ↄↄ} \Vdash \propto_{\mathcal{H}}$, ovvero $\propto_{\mathcal{H}}^{\circ H} \Vdash \propto_{\mathcal{H}}$.

- Siano $q, u \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}, \propto_{\mathcal{H}}\}[-]$. Dunque, per ipotesi induttiva (sulla complessità dei termini) abbiamo che $q^{\circ H} \Vdash q^{\star\mathcal{H}}$ e $u^{\circ H} \Vdash u^{\star\mathcal{H}}$. Dato che $q^{\star\mathcal{H}} \supseteq u^{\star\mathcal{H}} \to_H q^{\star\mathcal{H}} \cdot_{\mathcal{H}} u^{\star\mathcal{H}}$, segue che $q^{\circ H} \Vdash u^{\star\mathcal{H}} \to_H q^{\star\mathcal{H}} \cdot_{\mathcal{H}} u^{\star\mathcal{H}}$. Possiamo quindi dedurne che $q^{\circ H} \sharp\, u^{\circ H} \Vdash (u^{\star\mathcal{H}} \to_H q^{\star\mathcal{H}} \cdot_{\mathcal{H}} u^{\star\mathcal{H}}) \cdot_{\mathcal{H}} u^{\star\mathcal{H}}$. Infine, dato che $q^{\circ H} \sharp\, u^{\circ H} = (qu)^{\circ H}$ e $(u^{\star\mathcal{H}} \to_H q^{\star\mathcal{H}} \cdot_{\mathcal{H}} u^{\star\mathcal{H}}) \cdot_{\mathcal{H}} u^{\star\mathcal{H}} \supseteq q^{\star\mathcal{H}} \cdot_{\mathcal{H}} u^{\star\mathcal{H}} = (qu)^{\star\mathcal{H}}$, si ha $(qu)^{\star H} \Vdash (qu)^{\star\mathcal{H}}$ $\square$

Proposizione 6.8.6. *Se H è consistente come struttura di Krivine (cioè $\Pi^{\perp\!\!\!\perp} \cap PL = \varnothing$), allora $\mathcal{H}$ è consistente come struttura implicativa (cioè $t^{\star\mathcal{H}} \neq \Pi$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_{\mathcal{H}}\}}$)*

Dimostrazione. Supponiamo che $\Pi^{\perp\!\!\!\perp} \cap PL = \varnothing$. Sia $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_{\mathcal{H}}\}}$. Sappiamo che esiste $t_0 \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}, \propto_{\mathcal{H}}\}[-]$ tale che $t_0 \twoheadrightarrow_\beta t$ (Prop. 1.2.4), e dunque $t_0^{\star\mathcal{H}} \supseteq t^{\star\mathcal{H}}$ (Prop. 5.3.2 e Def. 6.8.4). Dato che $t_0^{\circ H} \Vdash t_0^{\star\mathcal{H}}$ (Prop. 6.8.5), dalla precedente osservazione deduciamo che $t_0^{\circ H} \Vdash t^{\star\mathcal{H}}$, ovvero $t_0^{\circ H} \in (t^{\star\mathcal{H}})^{\perp\!\!\!\perp}$. Ma $t_0^{\circ H} \in PL$, perciò abbiamo $t_0^{\circ H} \in (t^{\star\mathcal{H}})^{\perp\!\!\!\perp} \cap PL$, da cui $(t^{\star\mathcal{H}})^{\perp\!\!\!\perp} \cap PL \neq \varnothing$. Segue che $t^{\star\mathcal{H}} \neq \Pi$, altrimenti si avrebbe $\Pi^{\perp\!\!\!\perp} \cap PL = (t^{\star\mathcal{H}})^{\perp\!\!\!\perp} \cap PL \neq \varnothing$. $\square$

Capitolo 7

Separatori

7.1 Separatori: prime proprietà

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$.

Proposizione 7.1.1. *Sia Σ un sottoinsieme di A con la seguente proprietà:*

$$(1)\ a \in \Sigma,\ a \leq b \text{ implica } b \in \Sigma, \text{ per ogni } b \in A$$

Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

· (3) *a, $a \rightarrow b \in \Sigma$ implica $b \in \Sigma$, per ogni $b \in A$*

· (3′) *$a, b \in \Sigma$ implica $a \cdot b \in \Sigma$*

Dimostrazione. Supponiamo valga (3). Siano $a, b \in \Sigma$. Siccome $a \leq b \rightarrow a \cdot b$, dalla (1) segue che $b \rightarrow a \cdot b \in \Sigma$; ma, poiché $b \in \Sigma$, dalla (3) segue $a \cdot b \in \Sigma$. Viceversa, supponiamo valga (3′). Siano $a, a \rightarrow b \in \Sigma$, con $b \in A$. Dalla (3′) segue che $(a \rightarrow b) \cdot a \in \Sigma$; ma $(a \rightarrow b) \cdot a \leq b$, dunque dalla (1) segue $b \in \Sigma$. □

Definizione 7.1.1. *Un **separatore** di H è un sottoinsieme $\Sigma \subseteq A$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

· (1) *$a \in \Sigma$, $a \leq b$ implica $b \in \Sigma$, per ogni $b \in A$.*

· (2) *$\boldsymbol{K}^{\star}$, $\boldsymbol{S}^{\star} \in \Sigma$*

· (3) *a, $a \rightarrow b \in \Sigma$ implica $b \in \Sigma$, per ogni $b \in A$*

Per quanto visto, la condizione (3) può essere sostituita con la (3′), fornendo una definizione equivalente.

Definizione 7.1.2. *Un separatore Σ di H è detto*

- ***consistente*** *(in H) se $\bot \notin \Sigma$*
- ***inconsistente*** *(in H) se $\bot \in \Sigma$*
- ***classico*** *(in H) se $\propto_H \in \Sigma$*

(alternativamente possiamo dire che H è consistente/inconsistente/classico rispetto a Σ)

Osservazione 7.1.1. *A è un separatore di H, detto separatore **improprio** o **banale**. Si osservi che un separatore Σ è banale se e solo se è inconsistente. Infatti, se Σ è inconsistente, allora $\bot \in \Sigma$; ma dato che $\bot \leq a$ per ogni $a \in A$, dalla proprietà (1) dei separatori si ha che $a \in \Sigma$ per ogni $a \in A$, da cui $A = \Sigma$; il viceversa è ovvio.*

Osservazione 7.1.2. *Si osservi che, se Σ è un separatore di H, allora $\top \in \Sigma$; infatti $\boldsymbol{K}^\star \in \Sigma$ per la proprietà (2) dei separatori; ma $\boldsymbol{K}^\star \leq \top$, e dunque $\top \in \Sigma$, per la proprietà (1) dei separatori.*

Definizione 7.1.3. *Chiamiamo **algebra implicativa** ogni coppia (H, Σ) dove H è una struttura implicativa e Σ un separatore di H.*
Un'algebra implicativa (H, Σ) è detta consistente/inconsistente/classica se il separatore Σ è consistente/inconsistente/classico in H

Fissiamo un separatore Σ di H.

Proposizione 7.1.2. *Sia $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n \in V$ (distinte), $\underline{a} \equiv a_1, \ldots, a_n \in A$ e $t \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}]}$.*
Allora $a_1 \to \cdots \to a_n \to t[\underline{a}/\underline{x}]^\star \in \Sigma$

Dimostrazione. La dimostrazione ha bisogno di diverse premesse:

- Sia $t \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}[-]$. Allora $t^\star \in \Sigma$.

  Infatti: $t \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}[-]$ significa che t è prodotto di $\mathbf{K}$ e $\mathbf{S}$, perciò la tesi segue dalle proprietà (2) e (3′) (Prop. 7.1.1) dei separatori (Def. 7.1.1).

- Sia $t \in \Lambda_\varnothing^{[-]}$ e $t_0 := t^c$ (Def. 1.2.4) . Allora $t_0^\star \in \Sigma$.

  Infatti: $t \in \Lambda_\varnothing^{[-]}$ implica $t_0 = t^c \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}[-]$ (Oss. 1.2.1), implica $t_0^\star \in \Sigma$ (per il punto precedente).

· Siano $x_1, \ldots, x_n \in V$ (distinti) e $t \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}]}$.
Allora $(\lambda \underline{x}.t)^\star = \wedge_{a_1,\ldots,a_n \in A}(a_1 \to \cdots \to a_n \to t[a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n]^\star) \in \Sigma$.

Infatti: sappiamo che $(\lambda \underline{x}.t)_0 := (\lambda \underline{x}.t)^c \twoheadrightarrow_\beta \lambda \underline{x}.t \in \Lambda_\varnothing^{[-]}$ (Prop. 1.2.4), da cui $(\lambda \underline{x}.t)_0^\star \leq (\lambda \underline{x}.t)^\star$ (Prop. 5.3.2). Dato che $\lambda \underline{x}.t \in \Lambda_\varnothing^{[-]}$, si ha $(\lambda \underline{x}.t)_0^\star \in \Sigma$ (per il primo punto). Pertanto, grazie alla proprietà (1) dei separatori (Def. 7.1.1), possiamo concludere che $(\lambda \underline{x}.t)^\star \in \Sigma$.

Possiamo ora dimostrare l'enunciato della proposizione. Sappiamo che $(\lambda \underline{x}.t)^\star \in \Sigma$. Ma $(\lambda \underline{x}.t)^\star = \wedge_{b_1,\ldots,b_n \in A}(b_1 \to \cdots \to b_n \to t[b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n]^\star) \leq a_1 \to \cdots \to a_n \to t[\underline{a}/\underline{x}]^\star$. Dunque, per la proprietà (1) dei separatori, segue $a_1 \to \cdots \to a_n \to t[\underline{a}/\underline{x}]^\star \in \Sigma$ □

Proposizione 7.1.3. *Siano $x_1, \ldots, x_n \in V$ (distinte), $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ e $t \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}]}$. Allora $t[\underline{a}/\underline{x}]^\star \in \Sigma$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $a_1 \to \ldots a_n \to t[\underline{a}/\underline{x}]^\star \in \Sigma$; dato che, per ipotesi, $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, segue che $(a_1 \to \ldots a_n \to t[\underline{a}/\underline{x}]^\star) \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in \Sigma$, per la proprietà (3′) dei separatori. Ma $(a_1 \to \ldots a_n \to t[\underline{a}/\underline{x}]^\star) \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leq t[\underline{a}/\underline{x}]^\star$ e dunque, per la proprietà (1) dei separatori, si ha $t[\underline{a}/\underline{x}]^\star \in \Sigma$. □

Osservazione 7.1.3. *La precedente proposizione 7.1.3 equivale a dire che $\Lambda_\Sigma^{[-]^\star} := \{t^\star : t \in \Lambda_\Sigma^{[-]}\} \subseteq \Sigma$, perché i λ-termini chiusi a parametri in Σ sono esattamente i λ-termini puri le cui variabili libere sono state sostituite da elementi di Σ; questo fatto è piuttosto intuitivo, ma si veda la Prop. 7.2.1, poco più avanti, dove viene dimostrato un risultato un po' più generale.*

Osservazione 7.1.4. *Dalla Prop. 7.1.3 discende che $q^\star \in \Sigma$ per ogni $q \in \Lambda_\varnothing^{[-]}$. In particolare $\boldsymbol{K}^\star$, $\boldsymbol{S}^\star$, $\boldsymbol{I}^\star$, $\boldsymbol{B}^\star$, $\boldsymbol{W}^\star$, $\boldsymbol{C}^\star \in \Sigma$.*

Proposizione 7.1.4. *Sia Σ un separatore di H. Allora:*

$(a \to a \to b) \to a \to b \in \Sigma$

$(a \to b) \to (c \to a) \to c \to b \in \Sigma$

$(a \to b \to c) \to b \to a \to c \in \Sigma$

$(a \to b \to c) \to (a \to b) \to (a \to c) \in \Sigma$

per ogni $a, b, c \in A$.

Dimostrazione. Basta usare le uguaglianze dimostrate per i combinatori e la proprietà (1) dei separatori. Ad esempio $\mathbf{B}^\star = \wedge_{a,b,c}((a \to b) \to (c \to a) \to c \to b) \in \Sigma$ e $\mathbf{B}^\star \leq (a \to b) \to (c \to a) \to c \to b)$ implica $(a \to b) \to (c \to a) \to c \to b \in \Sigma$. □

Proposizione 7.1.5. *Sia Σ un separatore di H. Allora:*

$a \in \Sigma$ *implica* $b \to a \in \Sigma$

$a \to a \to b \in \Sigma$ *implica* $a \to b \in \Sigma$

$a \to b \in \Sigma$, $c \to a \in \Sigma$ *implica* $c \to b \in \Sigma$

$a \to b \to c \in \Sigma$ *implica* $b \to a \to c \in \Sigma$

$a \to b \to c \in \Sigma$, $a \to b \in \Sigma$ *implica* $a \to c \in \Sigma$

per ogni $a, b, c \in A$

Dimostrazione.

- $a \to b \to a = a \to b \to x[a/x, b/y]^\star \in \Sigma$; dunque, se $a \in \Sigma$, $(a \to b \to a) \cdot a \in \Sigma$; ma $(a \to b \to a) \cdot a \leq b \to a$, dunque $b \to a \in \Sigma$.

- $(a \to a \to b) \to a \to b \in \Sigma$ per la proposizione precedente; dunque, se $a \to a \to b \in \Sigma$, allora $((a \to a \to b) \to a \to b) \cdot (a \to a \to b) \in \Sigma$; ma $((a \to a \to b) \to a \to b) \cdot (a \to a \to b) \leq a \to b$, dunque $a \to b \in \Sigma$.

- In modo simile si svolgono gli altri punti, usando la proposizione precedente. □

7.2 Le funzioni ↑, @, Λ

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Definizione 7.2.1. *Se $D \subseteq A$ e $\underline{w} \equiv w_1, \ldots, w_n$ è una lista di variabili (distinte), definiamo $\Lambda^{[\underline{w}]}(D)$ come l'insieme formato da tutti i λ-termini di tipo $t[\underline{d}/\underline{x}]$, dove $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_m$ è una lista di variabili diverse dalle variabili di $\underline{w}$, $\underline{d} \equiv d_1, \ldots d_m \in D$ e $t \in \Lambda_{\varnothing}^{[x,w]}$ (a parole: $\Lambda^{[\underline{w}]}(D)$ è l'insieme dei λ-termini puri [Def. 1.1.5] in cui tutte le variabili libere, tranne quelle presenti in $\underline{w}$, vengono sostituite da elementi di D). Se $\underline{w}$ è la lista vuota, scriviamo $\Lambda^{[-]}(D)$ per dire $\Lambda^{[\underline{w}]}(D)$ (si tratta dell'insieme dei λ-termini puri in cui tutte le variabili libere sono state sostituite con elementi di D)*

Proposizione 7.2.1. $\Lambda_D^{[w]} = \Lambda^{[\underline{w}]}(D)$

Dimostrazione. La disuguaglianza $\Lambda^{[\underline{w}]}(D) \subseteq \Lambda_D^{[w]}$ è quasi ovvia, e non la svolgiamo.
Dimostriamo che $\Lambda_D^{[w]} \subseteq \Lambda^{[\underline{w}]}(D)$ per ogni lista di variabili $\underline{w}$ (anche questa disuguaglianza è piuttosto intuitiva, ma la svolgiamo per esercizio). Si procederà per induzione sulla lunghezza dei λ-termini.
Sia $t \in \Lambda_D^{[w]}$. Allora

· Se t ha lunghezza 1, allora abbiamo 2 casi:

  – $t = d$ per qualche $d \in D$; allora $d = x[d/x] \in \Lambda^{[\underline{w}]}(D)$
  – $t = w_i$ per qualche i. Allora $t = w_i = w_i[d/x] \in \Lambda^{[\underline{w}]}(D)$, per ogni $d \in D$ e x variabile diversa dalle variabili $\underline{w}$.

· Se t ha lunghezza $n+1$, con $n \geq 1$, allora abbiamo i seguenti due casi:

  – $t = qu$, con $q, u \in \Lambda_D^{[\underline{w}]}$, di lunghezza $\leq n$. Quindi, applicando l'ipotesi induttiva sulla lunghezza dei λ-termini, otteniamo che $q = t_1[\underline{d_1}/\underline{x}]$ e $u = t_2[\underline{d_2}/\underline{z}]$, con $t_1 \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x},\underline{w}]}$ e $t_2 \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{z},\underline{w}]}$ (non è restrittivo supporre che $\underline{x}$ e $\underline{z}$ non abbiano variabili in comune). Da ciò segue che $t_1 t_2 \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x},\underline{z},\underline{w}]}$ e $t = qu = t_1[\underline{d_1}/\underline{x}]\ t_2[\underline{d_2}/\underline{z}] = t_1[\underline{d_1}/\underline{x}, \underline{d_2}/\underline{z}]\ t_2[\underline{d_1}/\underline{x}, \underline{d_2}/\underline{z}] = (t_1 t_2)[\underline{d_1}/\underline{x}, \underline{d_2}/\underline{z}] \in \Lambda^{[\underline{w}]}(D)$
  – $t = \lambda x.u$ con $u \in \Lambda_D^{[x,\underline{w}]}$. Per ipotesi induttiva sulla lunghezza dei λ-termini, abbiamo che $u = q[\underline{d}/\underline{z}]$ con $\underline{z}$ una lista di variabili diverse dalle variabili $x, \underline{w}$ e $q \in \Lambda_\varnothing^{[x,\underline{w}]}$; ma allora $\lambda x.q \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{w}]}$ e $t = \lambda x.u = \lambda x.(q[\underline{d}/\underline{z}]) = (\lambda x.q)[\underline{d}/\underline{z}] \in \Lambda^{[\underline{w}]}(D)$

$\square$

Se $E \subseteq \Lambda_A$, poniamo $E^\star := \{e^\star : e \in E\}$.

Definizione 7.2.2. *Sia $D \subseteq A$; diamo le seguenti definizioni:*

· $\uparrow (D)_H := \{a \in A : d \leq a$ *per qualche* $d \in D\}$.

· $@(D)_H$ *è il più piccolo sottoinsieme di A tale che $D \subseteq @(D)_H$ e $a \cdot b \in @(D)_H$ per ogni $a, b \in @(D)_H$*

· $\Lambda(D)_H := (\Lambda^{[-]}(D))^{\star H}$.

$\uparrow (D)_H$, $@(D)_H$ *e* $\Lambda(D)_H$ *sono detti, rispettivamente,* ***chiusura superiore****,* ***chiusura applicativa*** *e* ***λ-chiusura*** *di D in H.*

Come di consueto, quando la struttura implicativa di riferimento H sarà chiara dal contesto, il pedice H verrà omesso.

Osservazione 7.2.1. *Per quanto visto poco sopra,* $\Lambda(D) = \Lambda_D^{[-]\star}$

Osservazione 7.2.2. *È immediato verificare che*

· $D \subseteq \uparrow (D)$

· $D \subseteq @(D)$

· $D \subseteq \Lambda(D)$

Osservazione 7.2.3. *Altro fatto immediato: siano D ed E due sottoinsiemi di A; allora:*

· $D \subseteq E$ *implica* $\uparrow(D) \subseteq \uparrow(E)$

· $D \subseteq E$ *implica* $@(D) \subseteq @(E)$

· $D \subseteq E$ *implica* $\Lambda(D) \subseteq \Lambda(E)$

Proposizione 7.2.2. *Sia Σ un separatore di H. Allora*

· $\uparrow(\Sigma) = \Sigma$

· $@(\Sigma) = \Sigma$

· $\Lambda(\Sigma) = \Sigma$

Dimostrazione. Le inclusioni $\supseteq$ valgono banalmente per ogni $D \subseteq A$. Mostriamo le inclusioni $\subseteq$:

· $\uparrow(\Sigma) \subseteq \Sigma$ è una parafrasi della proprietà (1) dei separatori, applicata a Σ.

· $@(\Sigma) \subseteq \Sigma$ è una parafrasi della proprietà ($3'$) dei separatori.

· $\Lambda(\Sigma) \subseteq \Sigma$ corrisponde al fatto - già dimostrato - che Σ contiene tutti gli elementi del tipo $t[\underline{a}/\underline{x}]^\star$, con $\underline{a} \equiv a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n \in V$ (variabili distinte) e $t \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}]}$

□

Proposizione 7.2.3. $@(D) \subseteq \Lambda(D)$ *per ogni* $D \subseteq A$.

Dimostrazione. Sappiamo che $D \subseteq \Lambda(D)$. Siano $c, d \in \Lambda(D)$; allora $c = t[\underline{a}/\underline{x}]^\star$ e $d = u[\underline{b}/\underline{z}]^\star$ con $t \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}]}$, $u \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{z}]}$, $\underline{a} \equiv a_1, \ldots, a_n \in D$, $\underline{b} \equiv b_1, \ldots, b_m \in D$, $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n \in V$, $\underline{z} \equiv z_1, \ldots, z_m \in V$, $x_i \neq x_j$ e $z_i \neq z_j$ per ogni $i \neq j$. Naturalmente non è restrittivo supporre che le liste $\underline{x}$ e $\underline{z}$ non abbiano variabili in comune. Abbiamo così che $tu \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x},\underline{z}]}$ e $c \cdot d = t[\underline{a}/\underline{x}]^\star \cdot u[\underline{b}/\underline{z}]^\star = (tu)[\underline{a}/\underline{x}, \underline{b}/\underline{z}]^\star \in \Lambda(D)$. □

Proposizione 7.2.4. *Sia $D \subseteq A$. Allora $\perp \in \Lambda(D)$ se e solo se $\perp \in \uparrow(\Lambda(D))$.*

Dimostrazione. Se $\perp \in \uparrow(\Lambda(D))$ allora esiste $a \in \Lambda(D)$ tale che $a \leq \perp$, da cui $\perp = a \in \Lambda(D)$. L'altra implicazione è ovvia, perché $\Lambda(D) \subseteq \uparrow(\Lambda(D))$. □

Lemma 7.2.1. *Sia $D \subseteq A$. Allora:*

- $\uparrow(\uparrow(D)) = \uparrow(D)$
- $@(@(D)) = @(D)$
- $\Lambda(\Lambda(D)) = \Lambda(D)$

Dimostrazione.

Le inclusioni $\supseteq$ sono già state dimostrate.

- $a \in \uparrow(\uparrow(D))$ implica $b \leq a$ per qualche $b \in \uparrow(D)$, implica $c \leq b \leq a$ per qualche $c \in D$, implica $a \in \uparrow(D)$.

- Ovviamente $@(D) \subseteq @(D)$. Inoltre, per definizione di $@(D)$, $a{\cdot}b \in @(D)$ per ogni $a, b \in @(D)$. Quindi, per la minimalità di $@(@(D))$, abbiamo $@(@(D)) \subseteq @(D)$.

- $b \in \Lambda(\Lambda(D))$ implica $b = t[u_1[\underline{a}^1/\underline{x}^1]^\star/y_1, \ldots, u_n[\underline{a}^n/\underline{x}^n]^\star/y_n]^\star = t[u_1[\underline{a}^1/\underline{x}^1]/y_1, \ldots, u_n[\underline{a}^n/\underline{x}^n]/y_n]^\star$, con $t \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{y}]}$, $u_i \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}^i]}$, $a^i_j \in D$, $\underline{x}^i \equiv x^i_1, \ldots, x^i_{m(i)} \in V$, $y_1, \ldots, y_n \in V$, $x^i_l \neq x^i_k$, $y_l \neq y_k$ per ogni i, j, k, l con $l \neq k$. Naturalmente non è restrittivo supporre che $\underline{x}^i$ e $\underline{x}^j$ non abbiano variabili in comune, per ogni $i \neq j$. Grazie alla diversità tra le variabili x^i_j si ha $t[u_1[\underline{a}^1/\underline{x}^1]/y_1, \ldots, u_n[\underline{a}^n/\underline{x}^n]/y_n]^\star = t[u_1/y_1, \ldots, u_n/y_n]\ [\underline{a}^1/\underline{x}^1, \ldots, \underline{a}^1/\underline{x}^n]^\star$; ma $t[u_1/y_1, \ldots, u_n/y_n] \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n]}$, e pertanto $t[u_1/y_1, \ldots, u_n/y_n]\ [\underline{a}^1/\underline{x}^1, \ldots, \underline{a}^1/\underline{x}^n]^\star \in \Lambda(D)$; ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 7.2.5. *Siano $D, E \subseteq A$. Allora*

- *$E \subseteq \uparrow(D)$ se e solo se $\uparrow(D) = \uparrow(D \cup E)$.*
- *$E \subseteq @(D)$ se e solo se $@(D) = @(D \cup E)$.*
- *$E \subseteq \Lambda(D)$ se e solo se $\Lambda(D) = \Lambda(D \cup E)$.*

Dimostrazione.

- Mostriamo che, se $E \subseteq \uparrow(D)$, allora $\uparrow(D) = \uparrow(D \cup E)$.
  $E \subseteq \uparrow(D)$ implica $\uparrow(D) \cup E = \uparrow(D)$ implica $\uparrow(\uparrow(D) \cup E) = \uparrow(\uparrow(D))$.
  Dato che $D \subseteq \uparrow(D)$, abbiamo che $\uparrow(D \cup E) \subseteq \uparrow(\uparrow(D) \cup E)$; inoltre sappiamo che $\uparrow(\uparrow(D)) = \uparrow(D)$; dunque la precedente uguaglianza implica $\uparrow(D \cup E) \subseteq \uparrow(D)$.
  Inoltre, essendo $D \subseteq D \cup E$, segue $\uparrow(D) \subseteq \uparrow(D \cup E)$.

- Mostriamo che, se $\uparrow(D) = \uparrow(D \cup E)$, allora $E \subseteq \uparrow(D)$.
  Se $E \not\subseteq \uparrow(D)$ allora esiste $e \in E$ tale che $e \notin \uparrow(D)$, e dunque $e \in \uparrow(D \cup E)$ ma $e \notin \uparrow(D)$, da cui $\uparrow(D) \neq \uparrow(D \cup E)$.

· I casi @ e Λ sono del tutto analoghi.

$\square$

Proposizione 7.2.6. *Sia $D \subseteq A$. Se $T \subseteq \Lambda_D^{[-]}$, allora $\Lambda(D \cup T^\star) = \Lambda(D)$.*

Dimostrazione. Deriva dal precedente risultato, notando che, se $T \subseteq \Lambda_D^{[-]}$, allora $T^\star \subseteq \Lambda_D^{[-]\star} = \Lambda(D)$, per ogni $D \subseteq A$. $\square$

Proposizione 7.2.7. *Sia $D \subseteq A$. Allora $\uparrow(\Lambda(D)) = \uparrow(@(D \cup \{\boldsymbol{K}^\star, \boldsymbol{S}^\star\}))$.*

Dimostrazione. $\mathbf{K}$, $\mathbf{S} \in \Lambda_\varnothing^{[-]} \subseteq \Lambda_D^{[-]}$, quindi $\Lambda(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}) = \Lambda(D)$. Per quanto già visto, sappiamo che $@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}) \subseteq \Lambda(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})$, e dunque $\uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})) \subseteq \uparrow(\Lambda(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})) = \uparrow(\Lambda(D))$.
Viceversa: sia $a \in \uparrow(\Lambda(D))$; allora esiste $b \in \Lambda(D)$ tale che $b \leq a$; dunque $b = t[\underline{d}/\underline{x}]^\star$ per qualche $t \in \Lambda_\varnothing^{[\underline{x}]}$, $\underline{d} \equiv d_1, \ldots, d_n \in D$, $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n \in V$. Sappiamo che $t^c \in \{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}[\underline{x}]$ e $t^c \twoheadrightarrow_\beta t$, e dunque $t^c[\underline{d}/\underline{x}] \in (\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\} \cup D)[-]$ e $t^c[\underline{d}/\underline{x}] \twoheadrightarrow_\beta t[\underline{d}/\underline{x}]$, da cui $t^c[\underline{d}/\underline{x}]^\star \leq t[\underline{d}/\underline{x}]^\star = b$; dato che $t^c[\underline{d}/\underline{x}] \in (\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\} \cup D)[-]$, si ha $t^c[\underline{d}/\underline{x}]^\star \in @(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})$. Quindi $b \in \uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}))$; infine, dalla proprietà di chiusura di $\uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}))$, segue che $a \in \uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}))$. $\square$

7.3 Separatori generati

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.
Per ogni $D \subseteq A$ definiamo $Sep(D)_H := \uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})) = \uparrow(\Lambda(D))$.
A volte scriveremo semplicemente $Sep(D)$ invece di $Sep(D)_H$.

Proposizione 7.3.1. *Sia $D \subseteq A$. Allora $Sep(D)$ è il più piccolo separatore Σ di H tale che $D \subseteq \Sigma$.*

Dimostrazione.

· $D \subseteq \Lambda(D) \subseteq \uparrow(\Lambda(D)) = Sep(D)$.

· Mostriamo che $Sep(D)$ è un separatore:

  – (1) Sia $a \in Sep(D)$, $b \in A$, $a \leq b$. Dato che $Sep(D) = \uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}))$, si ha $c \leq a \leq b$ per qualche $c \in @(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})$, da cui $b \in \uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})) = Sep(D)$, grazie alla transitività di $\leq$.

  – (2) $\mathbf{K}^\star$, $\mathbf{S}^\star \in Sep(D)$, direttamente dalla definizione di $Sep(D)$.

– (3) Siano a, $b \in Sep(D) = \uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}))$. Allora, dalla definizione di $\uparrow$, esistono a_1, $b_1 \in @(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})$ tali che $a_1 \leq a$ e $b_1 \leq b$, da cui $a_1 \cdot b_1 \leq a \cdot b$. L'insieme $@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})$ è chiuso rispetto all'applicazione, dunque $a_1 \cdot b_1 \in @(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})$, da cui segue che $a \cdot b \in \uparrow(@(D \cup \{\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\})) = Sep(D)$.

· Minimalità: Supponiamo che Σ sia un separatore di A e $D \subseteq \Sigma$. allora $\Lambda(D) \subseteq \Lambda(\Sigma) = \Sigma$, da cui $Sep(D) = \uparrow(\Lambda(D)) \subseteq \uparrow(\Sigma) = \Sigma$.

□

$Sep(D)$ è detto **separatore generato** da D.

Lemma 7.3.1. *Sia Σ un separatore di H. Allora $a \to b \in \Sigma$ se e solo se $b \in Sep(\Sigma \cup \{a\})$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $a \to b \in \Sigma$. Chiaramente $\Sigma \cup \{a\} \subseteq Sep(\Sigma \cup \{a\})$ e dunque $a \to b$, $a \in Sep(\Sigma \cup \{a\})$, da cui $b \in Sep(\Sigma \cup \{a\})$, per la proprietà (3) dei separatori.
Viceversa: se $b \in Sep(\Sigma \cup \{a\}) = \uparrow(\Lambda(\Sigma \cup \{a\}))$, allora $c \leq b$ per qualche $c = t[d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]^\star$, dove $t \in \Lambda^{[x]}_{\varnothing}$, $d_1, \ldots, d_n \in \Sigma \cup \{a\}$. Non è restrittivo supporre $d_1 = a$. Poniamo $t_1 := \lambda x_1.(t[d_2/x_2, \ldots, d_n/x_n]) = (\lambda x_1.t)[d_2/x_2, \ldots, d_n/x_n]$. Chiaramente $t_1^\star \in \Sigma$. Osserviamo che $t_1 a \twoheadrightarrow_\beta t[d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]$, da cui $(t_0 a)^\star = t_1^\star \cdot a \leq t[d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]^\star = c \leq b$, e dunque $t_1^\star \leq a \to b$, da cui segue $a \to b \in \Sigma$.

□

7.4 Nuclei

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$.

Definizione 7.4.1. *Definiamo:*

· $S^0_{J,H} := Sep(\varnothing)_H$

· $S^0_{K,H} := Sep(\{\propto_H\})_H$

$S^0_{J,H}$ e $S^0_{K,H}$ sono detti, rispettivamente, ***nucleo intuizionista*** *e* ***nucleo classico*** *di H.*

Per quanto visto, è chiaro che $S^0_{J,H}$ è il più piccolo separatore di H, mentre $S^0_{K,H}$ è il più piccolo separatore di H contenente $\propto_H$, ovvero è il più piccolo separatore classico.
Scriveremo solitamente S^0_J e S^0_K invece di $S^0_{J,H}$ e $S^0_{K,H}$.

Proposizione 7.4.1. (*ricordare Def. 5.7.1*)
H è intuizionisticamente consistente se e solo se $\perp \notin S^0_J$.
H è classicamente consistente se e solo se $\perp \notin S^0_K$

Dimostrazione.
Per definizione, 'intuizionisticamente consistente' significa che $t^\star \neq \perp$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_\varnothing$, cioè $\perp \notin \Lambda^{[-]\star}_\varnothing = \Lambda(\varnothing)$. Ma $\perp \notin \Lambda(\varnothing)$ equivale a $\perp \notin \uparrow(\Lambda(\varnothing))$ (Prop. 7.2.4). Ciò ci permette di concludere, dato che $\uparrow(\Lambda(\varnothing)) = Sep(\varnothing) = S^0_J$.

Per definizione, 'classicamente consistente' significa che $t^\star \neq \perp$ per ogni $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$, cioè $\perp \notin \Lambda^{[-]\star}_{\{\propto_H\}} = \Lambda(\{\propto_H\})$. Ma $\perp \notin \Lambda(\{\propto_H\})$ equivale a $\perp \notin \uparrow(\Lambda(\{\propto_H\}))$ (Prop. 7.2.4). Ciò ci permette di concludere, dato che $\uparrow(\Lambda(\{\propto_H\})) = Sep(\{\propto_H\}) = S^0_K$. □

Parafrasando quanto appena dimostrato (usando le Def. 5.7.1 e 7.1.2):

· La struttura implicativa H è intuizionisticamente consistente se e solo se il suo nucleo intuizionista $S^0_{J,H}$ è consistente in H (o, in altri termini: se e solo se H è consistente rispetto a $S^0_{J,H}$)

· La struttura implicativa H è classicamente consistente se e solo se $S^0_{K,H}$ è consistente in H (o, in altri termini: se e solo se H è consistente rispetto a $S^0_{K,H}$)

Dunque la nozione di consistenza di separatori (Def. 7.1.2) generalizza la nozione di consistenza di strutture implicative (Def. 5.7.1) grazie alla Prop. 7.4.1

7.5 Algebra di Heyting indotta da un separatore

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$.
Sia Σ un separatore di H. Definiamo la relazione $\vdash_{H,\Sigma}$ sugli elementi di A in questo modo: $a \vdash_{H,\Sigma} b$ se e solo se $a \to b \in \Sigma$.
Si scriverà più brevemente $\vdash_\Sigma$ al posto di $\vdash_{H,\Sigma}$, il più delle volte.
Consideriamo la settupla $H_\Sigma := (A, \vdash_{H,\Sigma}, \times_H, +_H, \perp, \top, \to)$.
Nel seguito semplifichiamo alcuni pedici.

Proposizione 7.5.1. *H_Σ è una pre-algebra di Heyting.*

Dimostrazione. Procediamo punto per punto, utilizzando in particolare i risultati del paragrafo 7.1:

(1.1) Riflessività di $\vdash$:
Sia $a \in A$. Allora $a \to a = a \to x[a/x]^\star \in \Sigma$ (Prop. 7.1.2).

(1.2) Transitività di $\vdash$:
Sia $a \to b$, $b \to c \in \Sigma$. Allora, per la proprietà (3′) dei separatori (Prop. 7.1.1, Def. 7.1.1), si ha $\mathbf{B}^\star \cdot (b \to c) \cdot (a \to b) \in \Sigma$. Ma, usando le uguaglianze dimostrate riguardanti i combinatori, osserviamo che $\mathbf{B}^\star \cdot (b \to c) \cdot (a \to b) \leq ((b \to c) \to (a \to b) \to a \to c) \cdot (b \to c) \cdot (a \to b) \leq a \to c$ e quindi, per la proprietà (1) dei separatori, $a \to c \in \Sigma$.

(2.1) $a \times b \vdash a$:
Poniamo $d := (\lambda xy.x)^\star \leq a \to b \to a$, $c := d \to a$. Osserviamo che $(\lambda z.z(\lambda xy.x))^\star \cdot (a \times b) \leq (c \to c \cdot d) \cdot (d \to d \cdot a \cdot b) \leq (c \to a) \cdot (d \to a) = (c \to a) \cdot c \leq a$. Dunque $(\lambda x.x(\lambda xy.x))^\star \leq a \times b \to a$, da cui $a \times b \to a \in \Sigma$.

(2.2) $a \times b \vdash b$:
Pongo $d := (\lambda xy.y)^\star \leq a \to b \to b$, $c := d \to b$. Osserviamo che $(\lambda z.z(\lambda xy.y))^\star \cdot (a \times b) \leq (c \to c \cdot d) \cdot (d \to d \cdot a \cdot b) \leq (c \to b) \cdot (d \to b) = (c \to b) \cdot c \leq b$. Dunque $(\lambda x.x(\lambda xy.y))^\star \leq a \times b \to b$, da cui $a \times b \to b \in \Sigma$.

(2.3) $c \vdash a$, $c \vdash b$ implica $c \vdash a \times b$:
Supponiamo $c \to a$, $c \to b \in \Sigma$.
Osserviamo che $(\lambda xy.y((c \to a)x)((c \to b)x))^\star \leq c \to e \to e \cdot ((c \to a) \cdot c) \cdot ((c \to b) \cdot c) \leq c \to e \to e \cdot a \cdot b$ per ogni $e \in A$, da cui $(\lambda xy.y((c \to a)x)((c \to b)x))^\star \leq \wedge_{e \in A}(c \to e \to e \cdot a \cdot b) = c \to \wedge_{e \in A}(e \to e \cdot a \cdot b) = c \to a \times b$, e quindi $c \to a \times b \in \Sigma$.

(3.1) $a \vdash a + b$:
Osserviamo che $(\lambda xyz.yx)^\star \leq \wedge_{e,f \in A}(a \to e \to f \to e \cdot a) = a \to \wedge_{e,f \in A}(e \to f \to e \cdot a) \leq a \to \wedge_{c \in A}((a \to c) \to (b \to c) \to (a \to c) \cdot a) \leq a \to \wedge_{c \in A}((a \to c) \to (b \to c) \to c) = a \to a + b$, da cui $a \to a + b \in \Sigma$.

(3.2) $b \vdash a + b$:
Osserviamo che $(\lambda xyz.zx)^\star \leq \wedge_{e,f \in A}(b \to e \to f \to e \cdot b) = b \to \wedge_{e,f \in A}(e \to f \to f \cdot b) \leq b \to \wedge_{c \in A}((a \to c) \to (b \to c) \to (b \to c) \cdot b) \leq b \to \wedge_{c \in A}((a \to c) \to (b \to c) \to c) = b \to a + b$, da cui $a \to a + b \in \Sigma$.

(3.3) $a \vdash c$, $b \vdash c$ implica $a + b \vdash c$:
Sia $a \to c$, $b \to c \in \Sigma$. Poniamo $e := (a + b) \to c$. Osserviamo che $(\lambda x.x(a \to c)(b \to c))^\star \leq e \to e \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \leq (a + b) \to c$, da cui $(a + b) \to c \in \Sigma$.

(4) $\bot \vdash a$ per ogni $a \in A$:
$\mathbf{I}^\star \leq a \to a \leq \bot \to a$, da cui $\bot \to a \in \Sigma$, per ogni $a \in A$.

(5) $a \vdash \top$ per ogni $a \in A$:
$\mathbf{I}^\star \leq a \to a \leq a \to \top$, da cui $a \to \top \in \Sigma$, per ogni $a \in A$.

(6) $a \times b \vdash c$ se e solo se $a \vdash b \to c$:
Poniamo $d := a \to b \to c$, $e := a \times b \leq (a \to b \to c) \to c$. Osserviamo che $(\lambda xy.yx)^\star \leq d \to e \to e \cdot d \leq d \to e \to c$, da cui $d \to e \to c \in \Sigma$, ovvero $(a \to b \to c) \to (a \times b \to c) \in \Sigma$.
Ora poniamo $g := a \to b \to c$, $h := a \times b \to c \leq (g \to c) \to c$. Osserviamo che $(\lambda xyz.x(\lambda w.wab))^\star \leq h \to a \to b \to h \cdot (g \to g \cdot a \cdot b) \leq h \to a \to b \to h \cdot (g \to c) \leq h \to a \to b \to c$, da cui $h \to a \to b \to c \in \Sigma$, ovvero $(a \times b \to c) \to (a \to b \to c) \in \Sigma$.
Dunque $a \times b \to c \in \Sigma$ se e solo se $a \to b \to c \in \Sigma$, grazie alla proprietà (3) dei separatori. □

Dato che H_Σ è una pre-algebra di Heyting, il quoziente $[H_\Sigma] = ([A]_{H_\Sigma}, [\vdash]_{H_\Sigma}, [\times]_{H_\Sigma}, [+]_{H_\Sigma}, [\bot]_{H_\Sigma}, [\top]_{H_\Sigma}, [\to]_{H_\Sigma})$ è un'algebra di Heyting (si veda la Def. 3.4.3).
NOTAZIONE: quando non ci saranno rischi di ambiguità, si scriverà più semplicemente $[H_\Sigma] = ([A]_\Sigma, [\vdash]_\Sigma, [\times]_\Sigma, [+]_\Sigma, [\bot]_\Sigma, [\top]_\Sigma, [\to]_\Sigma)$.

Osservazione 7.5.1. $[\top]_{H_\Sigma} = \Sigma$. *Infatti se $a \in [\top]_{H_\Sigma}$, allora $\top \to a \in \Sigma$; ma, dato che Σ è un separatore di $(A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$, abbiamo $\top \in \Sigma$, e dunque, per la proprietà (3) dei separatori, $a \in \Sigma$.*
Viceversa, se $a \in \Sigma$, allora $(\lambda x.a)^\star \leq \top \to a \in \Sigma$, e dunque $[\top]_{H_\Sigma}$ $[\vdash]_{H_\Sigma}$ $[a]_{H_\Sigma}$; ma $[\top]_{H_\Sigma}$ è un massimo, quindi $[a]_{H_\Sigma}$ $[\vdash]_{H_\Sigma}$ $[\top]_{H_\Sigma}$, e dunque, per antisimmetria, $[a]_{H_\Sigma} = [\top]_{H_\Sigma}$, da cui $a \in [\top]_{H_\Sigma}$.

Proposizione 7.5.2. *I seguenti asserti sono equivalenti.*

- (1) $[A]_{H_\Sigma}$ *ha un solo elemento*
- (2) $[\top]_{H_\Sigma} = [\bot]_{H_\Sigma}$
- (3) $\bot \in \Sigma$
- (4) $\Sigma = A$

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (2) deriva dal fatto generale (banale) che un'algebra di Heyting ha un solo elemento se e solo se il suo minimo e il suo massimo coincidono. Gli asserti (2) e (3) sono equivalenti perché $\Sigma = [\top]_{H_\Sigma}$ (Oss. 7.5.1). L'equivalenza tra (3) e (4) è banale (Oss. 7.1.1). □

Proposizione 7.5.3. *Se Σ è un separatore classico della struttura implicativa H - ovvero: se $\propto_H \in \Sigma$ - allora $[H_\Sigma]$ è un'algebra di Boole.*

Dimostrazione. $\propto_H = \wedge_{a \in A}((\neg a \to a) \to a) \leq \wedge_{a \in A}((\neg a \to \bot) \to a) \leq (\neg b \to \bot) \to b = \neg\neg b \to b$ per ogni $b \in A$; dunque, se $\propto_H \in \Sigma$, allora $\neg\neg b \to b \in \Sigma$ per ogni $b \in A$ e quindi $\neg\neg[b]_{H_\Sigma}$ $[\vdash]_{H_\Sigma}$ $[b]_{H_\Sigma}$ per ogni $b \in A$, il che prova che $[H_\Sigma]$ è di Boole. □

In genere l'algebra di Heyting $[H_\Sigma]$ non è completa, però ogni suo sottoinsieme di elementi ammette un minorante e un maggiorante; più precisamente:

Proposizione 7.5.4. *Sia $D \subseteq A$. Allora*

- $[\wedge(D)]_{H_\Sigma}\ [\vdash]_{H_\Sigma}\ [d]_{H_\Sigma}$ *per ogni* $d \in D$.

- $[d]_{H_\Sigma}\ [\vdash]_{H_\Sigma}\ [\vee(D)]_{H_\Sigma}$ *per ogni* $d \in D$.

Dimostrazione. $\wedge(D) \leq d$ implica $d \to d \leq \wedge(D) \to d$, implica $\wedge(D) \to d \in \Sigma$, implica $\wedge(D) \vdash_{H,\Sigma} d$, implica $[\wedge(D)]_{H_\Sigma}\ [\vdash]_{H_\Sigma}\ [d]_{H_\Sigma}$, per ogni $d \in D$.
Si procede analogamente con $\vee$, notando che da $d \leq \vee(D)$, segue $d \to d \leq d \to \vee(D)$, per ogni $d \in D$. □

7.6 Ultraseparatori

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$.

Proposizione 7.6.1. *Sia Σ un separatore di H, $\bot \notin \Sigma$, $a \in \Sigma$. Allora $\neg a \notin \Sigma$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\neg a = a \to \bot \in \Sigma$. Allora, dato che $a \in \Sigma$, per la proprietà (3) dei separatori otteniamo $\bot \in \Sigma$, il che contraddice le ipotesi. □

Chiamiamo **ultraseparatore** di H ogni separatore Σ di H che rispetta le seguenti condizioni:

- $\bot \notin \Sigma$ (ovvero: Σ è consistente)
- Se Σ' è un separatore di H e $\bot \notin \Sigma'$, allora $\Sigma \subseteq \Sigma'$ implica $\Sigma' = \Sigma$ (ovvero: Σ è elemento massimale nell'insieme dei separatori consistenti di H, munito della relazione binaria, riflessiva, antisimmetrica e transitiva $\subseteq$)

Il seguente risultato è ottenuto applicando il lemma di Zorn:

Lemma 7.6.1. *Sia Σ un separatore consistente di H. Allora esiste un ultraseparatore Ψ di H tale che $\Sigma \subseteq \Psi$*

Dimostrazione. Pongo $O := \{\Phi$ separatore di H: $\bot \notin \Phi, \Sigma \subseteq \Phi\ \}$. Osserviamo che $O \neq \varnothing$, dato che $\Sigma \in O$.
L'enunciato è equivalente a: "esiste $\Psi \in O$ tale che $\Psi \subseteq \Phi$ implica $\Psi = \Phi$,

per ogni $\Phi \in O$". Grazie al fatto che $\subseteq$ è una relazione binaria riflessiva, antisimmetrica e transitiva su O, il lemma di Zorn ci dice che per dimostrare questa proposizione basta dimostrare che ogni catena U di $(O, \subseteq)$ (cioè ogni sottoinsieme di O totalmente ordinato rispetto a $\subseteq$) ammette un maggiorante in O, cioè un $\Pi \in O$ tale che $Q \subseteq \Pi$ per ogni $Q \in U$. Sia U una catena di $(O, \subseteq)$. Se $U = \varnothing$ allora abbiamo concluso, basta porre $\Pi := \Sigma$. Supponiamo $U \neq \varnothing$. Poniamo $\Pi := \cup(\{Q \in U\})$. Chiaramente basta dimostrare che $\Pi \in O$ per concludere.

- (1) Sia $a \in \Pi$ e $b \in A$ tale che $a \leq b$. Allora $a \in Q$ per qualche $Q \in U$. Ma Q è un separatore, perché $Q \in U \subseteq O$, perciò, per la proprietà (1) dei separatori, $b \in Q$, e quindi $b \in \Pi$, dato che $Q \subseteq \Pi$.

- (2) Dato che $U \neq \varnothing$, esiste $Q \in U$. Dato che Q è un separatore, segue che $\mathbf{S}^\star$, $\mathbf{K}^\star \in Q$; ma $Q \subseteq \Pi$, quindi $\mathbf{S}^\star$, $\mathbf{K}^\star \in \Pi$.

- (3) Siano $a, b \in \Pi$, allora $a \in Q_a$ e $b \in Q_b$, per qualche $Q_a, Q_b \in U$; siccome U è totalmente ordinato, esiste $Q \in \{Q_a, Q_b\}$ tale che $Q_a \subseteq Q$, $Q_b \subseteq Q$; chiaramente a e b appartengono a Q e dunque, essendo Q un separatore, $a \cdot b$ appartiene a Q; ma $Q \subseteq \Pi$ e dunque $a \cdot b$ appartiene anche a Π.

- (4) U contiene almeno un elemento Q e, per definizione di Π, si ha $Q \subseteq \Pi$. Ma $\Sigma \subseteq Q$, perché $Q \in U \subseteq O$. Da ciò segue $\Sigma \subseteq \Pi$, per transitività di $\subseteq$.

- (5) Se $\perp \in \Pi$ allora $\perp \in Q$, per qualche $Q \in U$, ma ciò è assurdo, perché $U \subseteq O$, quindi tutti i suoi elementi sono consistenti.

$\square$

Lemma 7.6.2. *Sia Σ un separatore di H e $c \in A$. Poniamo $\Sigma_c := \{a \in A : c \vdash_{H,\Sigma} a\} = \{a \in A : c \to a \in \Sigma\}$. Allora valgono le seguenti:*

- (1) $c \in \Sigma_c$

- (2) $\Sigma \subseteq \Sigma_c$

- (3) Σ_c *è un separatore di H*

- (4) $[c]_{H_\Sigma} \neq [\perp]_{H_\Sigma}$ *implica* $\perp \notin \Sigma_c$.

Dimostrazione. Si farà uso della Prop. 7.1.3

(1) $\Sigma \ni \mathbf{I}^\star \leq c \to c$ implica $c \to c \in \Sigma$ implica $c \in \Sigma_c$.

(2) Se $a \in \Sigma$, allora $c \to a \geq (\lambda x.y)[a/y]^\star \in \Sigma$, e dunque $c \to a \in \Sigma$, da cui $a \in \Sigma_c$.

(3.1) Sia $a \in \Sigma_c$ e $a \leq b$. Da $a \in \Sigma_c$ segue $c \to a \in \Sigma$; da $a \leq b$ segue $c \to a \leq c \to b$, e dunque $c \to b \in \Sigma$, da cui $b \in \Sigma_c$.

(3.2) Osserviamo che $\Sigma \ni (\lambda x.\mathbf{S})^\star \leq c \to \mathbf{S}^\star$, dunque $c \to \mathbf{S}^\star \in \Sigma$, da cui $\mathbf{S}^\star \in \Sigma_c$. In modo analogo si dimostra $\mathbf{K}^\star \in \Sigma_c$.

(3.3) Siano $a, b \in \Sigma_c$, ovvero $c \to a$, $c \to b \in \Sigma$. Osserviamo che $c \to a \cdot b \geq c \to (c \to a) \cdot c \cdot ((c \to b) \cdot c) \geq \curlywedge_{d \in A}(d \to (c \to a) \cdot d \cdot ((c \to b) \cdot d)) = (\lambda x.(c \to a)x((c \to b)x))^\star \in \Sigma$, da cui $c \to a \cdot b \in \Sigma$, ovvero $a \cdot b \in \Sigma_c$.

(4) Supponiamo che $[c]_{H_\Sigma} \neq [\bot]_{H_\Sigma}$. Allora $c \to \bot \notin \Sigma$ oppure $\bot \to c \notin \Sigma$. Escludo la seconda, perché $\Sigma \ni \bot \to \bot \leq \bot \to c$ implica $\bot \to c \in \Sigma$. Quindi $c \to \bot \notin \Sigma$, e ciò equivale a $\bot \notin \Sigma_c$. $\square$

Proposizione 7.6.2. *Sia Σ un separatore di H. I seguenti sono equivalenti:*

- *Σ è un ultraseparatore di H.*
- *$[A]_{H_\Sigma}$ ha due elementi (e dunque l'algebra di Heyting $[H_\Sigma] = ([A]_{H_\Sigma}, [\vdash]_{H_\Sigma}, [\times]_{H_\Sigma}, [+]_{H_\Sigma}, [\to]_{H_\Sigma})$ è necessariamente un'algebra di Boole)*

Dimostrazione. Supponiamo che Σ sia un ultraseparatore. Dunque Σ è consistente e pertanto $[A]_{H_\Sigma}$ ha almeno due elementi. Sia $c \in A$, $[c]_{H_\Sigma} \neq [\bot]_{H_\Sigma}$ e poniamo $\Sigma_c := \{a \in A : [c]_{H_\Sigma}\ [\vdash]_{H_\Sigma}\ [a]_{H_\Sigma}\} = \{a \in A : c \to a \in \Sigma\}$. Sappiamo che Σ è un separatore consistente di H e che $\Sigma \subseteq \Sigma_c$, $c \in \Sigma_c$. Per la massimalità di Σ (tra i separatori consistenti) segue che $\Sigma = \Sigma_c$, e dunque $c \in \Sigma = [\top]_{H_\Sigma}$, da cui $[c]_{H_\Sigma} = [\top]_{H_\Sigma}$. Ne concludiamo che $[A]_{H_\Sigma} = \{[\bot]_{H_\Sigma}, [\top]_{H_\Sigma}\}$.
Viceversa, supponiamo che $[A]_{H_\Sigma}$ abbia due elementi, il che equivale a dire che $[A]_{H_\Sigma} = \{[\top]_{H_\Sigma}, [\bot]_{H_\Sigma}\}$, con $[\top]_{H_\Sigma} \neq [\bot]_{H_\Sigma}$.
Σ è consistente: infatti se $\bot \in \Sigma$ allora, come visto, $[A]_{H_\Sigma}$ ha un solo elemento: assurdo.
Σ è massimale tra i separatori consistenti: sia Φ un separatore consistente tale che $\Sigma \subseteq \Phi$. Dato che Φ è consistente, abbiamo che $a \in \Phi$ implica $a \to \bot \notin \Phi$, implica $a \to \bot \notin \Sigma$, implica $[a]_{H_\Sigma} \neq [\bot]_{H_\Sigma}$, implica $[a]_{H_\Sigma} = [\top]_{H_\Sigma} = \Sigma$, implica $a \in \Sigma$. $\square$

7.7 Separatori, filtri, $\pitchfork$ e *p-or*

Fissiamo una struttura implicativa $H := (A, \leq, \curlywedge, \curlyvee, \bot, \top, \to)$.
Ricordiamo i seguenti fatti:

· $\pitchfork_H = \wedge_{e,f\in A}(e \to f \to e \wedge f) = (\lambda xy.x)^\star \wedge (\lambda xy.y)^\star$ Def. 5.8.1

· $p\text{-}or_H = (\bot \to \top \to \bot) \wedge (\top \to \bot \to \bot)$ Def. 5.13.1

· $\propto_H = \wedge_{a,b\in A}((a \to b) \to a) \to a) = \wedge_{a\in A}((\neg a \to a) \to a)$ Def. 5.6.1

· $\pitchfork_H \leq p\text{-}or_H$ Prop. 5.13.1

Proposizione 7.7.1. *Sia Σ un separatore di H. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

· (1) $\pitchfork_H \in \Sigma$.

· (2) $[a \wedge b]_{H_\Sigma} = [a \times b]_{H_\Sigma}$ *per ogni* $a, b \in A$

· (3) Σ *è un filtro.*

Dimostrazione.

(1) implica (2): Siano $a, b \in \Sigma$. Sappiamo già che $a \wedge b \to a \times b \in \Sigma$ (ciò vale per ogni separatore: Prop. 7.5.1), quindi ci basta mostrare che $a \times b \to a \wedge b \in \Sigma$. Osserviamo che $a \times b = \wedge_{c\in A}((a \to b \to c) \to c) \leq (a \to b \to a \wedge b) \to a \wedge b$. Dunque $(\lambda x.x \pitchfork_H)^\star = \wedge_{d\in A}(d \to d \cdot \pitchfork_H) \leq a \times b \to a \times b \cdot (a \to b \to a \wedge b) \leq a \times b \to a \wedge b$, da cui $a \times b \to a \wedge b \in \Sigma$.

(2) implica (3): Sia $[a \wedge b]_{H_\Sigma} = [a \times b]_{H_\Sigma}$ per ogni $a, b \in A$.

- Innanzitutto $\Sigma \neq \varnothing$ perché $\top \in \Sigma$.

- Siano $a, b \in \Sigma$; allora $[a]_{H_\Sigma} = [b]_{H_\Sigma} = [\top]_{H_\Sigma}$. Dunque $[a \wedge b]_{H_\Sigma} = [a \times b]_{H_\Sigma} = [a]_{H_\Sigma}\ [\times]_{H_\Sigma}\ [b]_{H_\Sigma} = [\top]_{H_\Sigma}\ [\times]_{H_\Sigma}\ [\top]_{H_\Sigma} = [\top]_{H_\Sigma} = \Sigma$, da cui $a \wedge b \in \Sigma$.

- Dato che Σ è un separatore, $a \in \Sigma$, $a \leq b$ implica $b \in \Sigma$, per ogni $b \in A$.

(3) implica (1): Dato che Σ è un separatore, abbiamo che $(\lambda xy.x)^\star$, $(\lambda xy.y)^\star \in \Sigma$. Ma allora, dato che Σ è un filtro, segue che $(\lambda xy.x)^\star \wedge (\lambda xy.y)^\star \in \Sigma$; ciò conclude la dimostrazione, perché $(\lambda xy.x)^\star \wedge (\lambda xy.y)^\star = \pitchfork_H$.

□

Proposizione 7.7.2. *Sia $\Sigma := S^0_{K,H}$ il nucleo classico della struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$. Allora $[p\text{-}or]_{H_\Sigma} = [\pitchfork]_{H_\Sigma}$*

Dimostrazione.

- Da $\pitchfork_H \leq p\text{-}or_H$ segue $S^0_{K,H} \ni \mathbf{I}^\star \leq \pitchfork_H \to \pitchfork_H \leq \pitchfork_H \to p\text{-}or_H$, da cui $\pitchfork_H \to p\text{-}or_H \in S^0_{K,H}$.

- Viceversa: poniamo $t := \lambda xyz.\ \propto_H\ \lambda w.x(wy)(wz) \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto\}}$, così che $t^\star \in S^0_{K,H}$ (Def. 7.4.1, Prop. 7.1.3, Oss. 7.1.3). Fissiamo $a, b \in A$.
Osserviamo che $t^\star \cdot p\text{-}or_H \leq t^\star \cdot (\bot \to \top \to \bot) \leq a \to b \to \propto_H \cdot \wedge_{d\in A}(d \to (\bot \to \top \to \bot) \cdot (d \cdot a) \cdot (d \cdot b))) \leq a \to b \to \propto_H \cdot (\neg a \to (\bot \to \top \to \bot) \cdot (\neg a \cdot a) \cdot (\neg a \cdot b)) \leq a \to b \to \propto_H \cdot (\neg a \to (\bot \to \top \to \bot) \cdot \bot \cdot \top) \leq a \to b \to \propto_H \cdot (\neg a \to \bot) \leq a \to b \to a$.
Osserviamo che $t^\star \cdot p\text{-}or \leq t^\star \cdot (\top \to \bot \to \bot) \leq a \to b \to \propto_H \cdot \wedge_d(d \to (\top \to \bot \to \bot) \cdot (d \cdot a) \cdot (d \cdot b))) \leq a \to b \to \propto_H \cdot (\neg b \to (\top \to \bot \to \bot) \cdot (\neg b \cdot a) \cdot (\neg b \cdot b)) \leq a \to b \to \propto_H \cdot (\neg b \to (\top \to \bot \to \bot) \cdot \top \cdot \bot) \leq a \to b \to \propto_H \cdot (\neg b \to \bot) \leq a \to b \to b$.
Per arbitrarietà di $a, b \in A$ ne concludiamo che $t^\star \leq p\text{-}or \to \wedge_{a,b\in A}((a \to b \to a) \wedge (a \to b \to b)) = p\text{-}or \to \wedge_{a,b\in A}(a \to b \to a \wedge b) = p\text{-}or \to \pitchfork_H$, da cui $p\text{-}or \to \pitchfork_H \in S^0_{K,H}$

□

7.8 Separatori e induzione

Proposizione 7.8.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ una struttura implicativa e sia $\Sigma := S^0_{J,H}$ il nucleo intuizionista di H. Allora $[IND_H]_{H_\Sigma} = [\pitchfork_H]_{H_\Sigma}$*

Dimostrazione. Nel seguito semplifichiamo alcuni pedici.

- Dimostriamo $IND \to \pitchfork \in \Sigma^0_J$.
Fissiamo $a, b \in A$. Sia $c \in A^{\mathbb{N}}$, $c_0 := a$, $c_n := b$ per ogni $n \geq 0$. Osserviamo che $\wedge_{i\in\mathbb{N}}(c_i \to c_{i+1}) = (a \to b) \wedge (b \to b)$; infatti $\wedge_{i\in\mathbb{N}}(c_i \to c_{i+1}) = (a \to b) \wedge \wedge_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}(b \to b)$ ed è immediato verificare che $\wedge_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}(b \to b) = b \to b$.
Dunque $IND = \wedge_{n\in\mathbb{N}} \wedge_{d\in A^{\mathbb{N}}}(d_0 \to \wedge_{i\in\mathbb{N}}(d_i \to d_{i+1}) \to d_n) \leq c_0 \to \wedge_i(c_i \to c_{i+1}) \to c_0 = a \to (a \to b) \wedge (b \to b) \to a$ e $IND \leq c_0 \to \wedge_i(c_i \to c_{i+1}) \to c_1 = a \to (a \to b) \wedge (b \to b) \to b$, da cui $IND \leq a \to (a \to b) \wedge (b \to b) \to a \wedge b =: d$, e quindi $d \to a \to b \to a \wedge b \leq IND \to a \to b \to a \wedge b$.
Osserviamo che $(\lambda xyz.xy(\mathbf{K}z))^\star \leq d \to a \to b \to d \cdot a \cdot (\mathbf{K} \cdot b) \leq d \to a \to b \to ((a \to b) \wedge (b \to b) \to a \wedge b) \cdot (\mathbf{K} \cdot b) \leq d \to a \to b \to ((a \to b) \wedge (b \to b) \to a \wedge b) \cdot (((b \to a \to b) \wedge (b \to b \to b)) \cdot b) \leq d \to a \to b \to ((a \to b) \wedge (b \to b) \to a \wedge b) \cdot ((a \to b) \wedge (b \to b)) \leq d \to a \to b \to a \wedge b$. Dunque, per transitività, $(\lambda xyz.xy(\mathbf{K}z))^\star \leq IND \to a \to b \to a \wedge b$, da cui segue che $IND \to a \to b \to a \wedge b$. Ciò vale per ogni $a, b \in A$ e quindi, passando all'inf, otteniamo $(\lambda xyz.xy(\mathbf{K}z))^\star \leq IND \to \pitchfork$, e dunque $IND \to \pitchfork \in S^0_J$.

- Viceversa: Dimostriamo $\pitchfork \to IND \in S^0_J$.
Indichiamo con Y l'operatore di punto fisso di Turing (Def. 1.1.16).
Osserviamo che:

$\Theta := Y(\lambda x. \pitchfork (zero)(succ\, x)) \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x. \pitchfork (zero)(succ\, x))(Y\lambda x. \pitchfork (zero)(succ\, x)) = (\lambda x. \pitchfork (zero)(succ\, x))\Theta \twoheadrightarrow_\beta \pitchfork (zero)(succ\, \Theta)$ (usando la Prop. 1.1.2).
Dunque $\Theta^\star \leq (\pitchfork (zero)(succ\, \Theta))^\star = ((\lambda xy.x)^\star \wedge (\lambda xy.y)^\star) \cdot (zero)^\star \cdot (succ\Theta)^\star \leq ((\lambda y.(zero))^\star \wedge (\lambda y.y)^\star) \cdot (succ\Theta)^\star \leq (zero)^\star \wedge (succ\Theta)^\star$.
Ora $\Theta^\star \leq (zero)^\star \wedge (succ\Theta)^\star \leq N(0) \wedge (succ\Theta)^\star \leq N(0)$.
Se $\Theta^\star \leq N(n)$ allora $\Theta^\star \leq (zero)^\star \wedge (succ\Theta)^\star \leq (succ\Theta)^\star \leq succ^\star\Theta^\star \leq (N(n) \to N(n+1))N(n) \leq N(n+1)$.
Grazie a questa dimostrazione induttiva concludiamo che $\Theta^\star \leq N(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $\Theta^\star \leq IND$. Dunque $(\lambda x.Y\lambda y.x(zero)(succ\, y))^\star \leq (\pitchfork \to Y\lambda y. \pitchfork (zero)(succ\, y))^\star = \pitchfork \to \Theta^\star \leq \pitchfork \to IND$; quindi $\pitchfork \to IND \in S^0_J$.
□

7.9 Separatori e filtri principali

Si noti che, banalmente, se $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ è una struttura implicativa, a un elemento di A e $\langle\{a\}\rangle^{filter}_H$ il filtro (principale) generato da a in H, allora $\langle\{a\}\rangle^{filter}_H = \uparrow (\{a\})_H$ (si veda il paragrafo 2.3 e la Def. 7.2.2).

Proposizione 7.9.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ una struttura implicativa. Sia Σ un separatore di H. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (1) Σ *è finitamente generato e* $\pitchfork \in \Sigma$.
- (2) $\Sigma = \uparrow (\{a\})$ *per qualche* $a \in A$ (*ovvero* Σ *è un filtro principale*).
- (3) *L'algebra di Heyting* $[H_\Sigma]$ *è completa e* $[\wedge_{i\in I}(a_i)]_{H_\Sigma} = \wedge_{i\in I}[a_i]_{H_\Sigma}$ *per ogni* $(a)_{i\in I} \in A^I$.

Dimostrazione.

(1) implica (2): Sia $\Sigma = \uparrow @(\{g_1, \ldots, g_n\})$ e $\pitchfork \in \Sigma$. Dato che $\pitchfork \in \Sigma$ e che Σ è un separatore, ne segue che Σ è un filtro, dunque contiene gli inf finiti. Quindi, posto $\gamma_{k,i} := \lambda x_1 \ldots x_k.x_i$ si ha che $a_k := \wedge_{i\in\{1,\ldots,k\}}(\gamma_{k,i}{}^\star) = \wedge_{i\in\{1,\ldots,k\}} \wedge_{b_1,\ldots,b_k\in A} (b_1 \to \cdots \to b_k \to b_i) = \wedge_{b_1,\ldots,b_n\in A}(b_1 \to \cdots \to b_k \to \wedge_{i\in\{1,\ldots k\}}(b_i)) \in \Sigma$, per ogni $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.
Definiamo $t := \lambda x.a_{n+1}g_1 \ldots g_n(xx)$ e $\Theta := Yt$, dove Y è il combinatore di punto fisso di Turing: $q(Yq) \twoheadrightarrow_\beta Yq$ per ogni $q \in \Lambda_A$.
Dato che $Y \in \Lambda^{[-]}_\varnothing$, è chiaro che $\Theta \in \Lambda^{[-]}_\Sigma$, e dunque $\Theta^\star$ appartiene a Σ.
Osserviamo che $\Theta^\star = (Yt)^\star \leq (t(Yt))^\star = (t\Theta)^\star \leq (a_{n+1}g_1 \ldots g_n(\Theta\Theta))^\star \leq (g_1 \wedge \ldots g_n \wedge \Theta\Theta)^\star = g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \wedge \Theta^\star \cdot \Theta^\star$ e quindi $\Theta^\star \leq \Theta^\star \cdot \Theta^\star$ e $\Theta^\star \leq g_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Grazie a quest'ultima osservazione si dimostra, con l'uso di una semplice

induzione, che $\Theta^\star \leq a$, per ogni $a \in @(\{g_1, \ldots, g_n\})$. Infatti, se $a = g^1 g^2$, con $g^1, g^2 \in @(\{g_1, \ldots, g_n\})$, allora, per ipotesi induttiva, $\Theta^\star \leq g^1$ e $\Theta^\star \leq g^2$, e dunque $\Theta^\star \cdot \Theta^\star \leq g^1 \cdot g^2 = a$; ma $\Theta^\star \leq \Theta^\star \cdot \Theta^\star$ e quindi, per transitività, $\Theta^\star \leq a$. Il passo base è ovviamente dato da $\Theta^\star \leq g_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, già dimostrato.
Da $\Theta^\star \leq a$ per ogni $a \in @\{g_1, \ldots, g_n\}$ segue chiaramente che $\Theta^\star \leq a$ per ogni $a \in \Sigma = \mathit{Sep}(\Sigma) = \uparrow @\{g_1, \ldots, g_n\}$: infatti, se $a \in \Sigma$, allora $b \leq a$ per qualche $b \in @(\{g_1, \ldots, g_n\})$, e dunque $\Theta^\star \leq b \leq a$, da cui $\Theta^\star \leq a$. Dato $\Theta^\star$ appartiene a Σ, quest'ultima osservazione ci dice che $\Sigma = \uparrow \{\Theta^\star\}$.

(2) implica (3): Supponiamo che $\Sigma = \uparrow \{a\}$ per un qualche $a \in A$. Sia $(a_i)_{i \in I}$ una famiglia di elementi in A a indici nell'insieme I. Sappiamo che $[\curlywedge_i(a_i)]_{H_\Sigma}$ $[\vdash]_{H_\Sigma}$ $[a_j]_{H_\Sigma}$ per ogni $j \in I$. Sia $[b]_{H_\Sigma}$ $[\vdash]_{H_\Sigma}$ $[a_j]_{H_\Sigma}$ per ogni $j \in I$, ovvero $b \to a_j \in \Sigma$ per ogni $j \in I$. Dato che per ipotesi $\Sigma = \uparrow \{a\}$, ciò corrisponde esattamente a dire $a \leq b \to a_j$ per ogni $j \in I$. Ciò a sua volta equivale a $a \leq \curlywedge_i(b \to a_i)$, ovvero $a \leq b \to \curlywedge_i(a_i)$. Ma ciò equivale a $b \to \curlywedge_i(a_i) \in \Sigma$, e dunque $[b]_{H_\Sigma}$ $[\vdash]_{H_\Sigma}$ $[\curlywedge_i(a_i)]$. Abbiamo così dimostrato che $[\curlywedge_i(a_i)]_{H_\Sigma}$ è un estremo inferiore di $\{[a_i]_{H_\Sigma} : i \in I\}$ in $[H_\Sigma]$. Data l'unicità degli estremi inferiori, abbiamo $\curlywedge_i([a_i]_{H_\Sigma}) = [\curlywedge_i(a_i)]_{H_\Sigma}$. Abbiamo così dimostrato (3).

(3) implica (1): supponiamo che l'algebra di Heyting $[H_\Sigma]$ sia completa e che $[\curlywedge_{i \in I}(a_i)]_{H_\Sigma} = \curlywedge_i([a_i]_{H_\Sigma})$. Poniamo $a := \curlywedge(\Sigma)$. Ricordando che $\Sigma = [\top]_{H_\Sigma}$ (e dunque $\Sigma = [\sigma]_{H_\Sigma}$ per ogni $\sigma \in \Sigma$), osserviamo che

$$[a]_{H_\Sigma} = [\curlywedge(\Sigma)]_{H_\Sigma} = \curlywedge_{\sigma \in \Sigma}([\sigma]_{H_\Sigma}) = \curlywedge_{\sigma \in \Sigma}([\top]_{H_\Sigma}) = [\top]_{H_\Sigma} = \Sigma$$

e dunque $a \in \Sigma$, da cui segue $\Sigma = \uparrow \{a\}$. Da ciò deduciamo che Σ è un filtro e pertanto contiene $\pitchfork$. Ovviamente $\Sigma = \uparrow \{a\} \subseteq \uparrow @(\{a, \mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star\}) = \mathit{Sep}(\{a\})$; d'altra parte, $\mathit{Sep}(\{a\}) \subseteq \Sigma$, perché Σ è un separatore contenente a. Quindi $\Sigma = \mathit{Sep}(a)$ e abbiamo concluso. □

7.10 Separatori e compatibilità

Proposizione 7.10.1. *Sia $H = (A, \leq, \curlywedge, \curlyvee, \bot, \top, \to)$ una struttura implicativa compatibile con i sup arbitrari (Def. 5.14.1). Sia Σ un separatore classico di H (ovvero un separatore contenente $\propto_H$). Allora Σ è un filtro.*

Dimostrazione. Dato che Σ è un separatore classico di H, abbiamo che $\Psi := S^0_{K,H} \subseteq \Sigma$. Sappiamo che $[\pitchfork_H]_{H_\Psi} = [\textit{p-or}_H]_{H_\Psi}$ (Prop. 7.7.2). Dato che H è compatibile, abbiamo $\textit{p-or}_H = \top$ (Prop. 5.14.1), e dunque $[\textit{p-or}_H]_{H_\Psi} = [\top]_{H_\Psi}$. Dunque $[\pitchfork]_{H_\Psi} = [\top]_{H_\Psi} = \Psi \subseteq \Sigma$ e quindi $\pitchfork_H \in \Sigma$.
Da ciò concludiamo che Σ è un filtro, perché un separatore di H è un filtro se e solo se contiene $\pitchfork_H$ (Prop. 7.7.1) □

7.11 Prodotto di separatori

Fissiamo una famiglia di strutture implicative $(H_i)_{i\in I}$ - $H_i = (A_i, \leq_i, \wedge_i, \vee_i, \perp_i, \top_i, \rightarrow_i)$ - e una famiglia di insiemi $(\Sigma_i)_{i\in I}$ tali che Σ_i sia un separatore di H_i, per ogni $i \in I$. Poniamo $A := \Pi_{i\in I}(A_i)$, $H := \Pi_{i\in I}(H_i)$, $\Sigma := \Pi_{i\in I}(\Sigma_i)$. Indichiamo con $t \mapsto t^{\star i}$ la valutazione $t \mapsto t^{\star H_i}$ nella struttura implicativa H_i, e con $t \mapsto t^{\star}$ la valutazione $t \mapsto t^{\star H}$ nella struttura implicativa H. Indichiamo con $\cdot_i$ l'applicazione $\cdot_{H_i}$ tra elementi della struttura implicativa H_i, e con $\cdot$ l'applicazione $\cdot_H$ tra elementi della struttura implicativa H.

Proposizione 7.11.1. *$\Sigma = \Pi_{i\in I}(\Sigma_i)$ è un separatore di $H = \Pi_{i\in I}(H_i)$.*

Dimostrazione.

- Se $(a_i)_i \in \Sigma$, $(b_i)_i \in A$ e $(a_i)_i\ (\leq_i)_i\ (b_i)_i$, allora $a_i \in \Sigma_i$, $b_i \in A_i$ e $a_i \leq b_i$ per ogni $i \in I$, da cui segue $b_i \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$, e dunque $(b_i)_i \in \Sigma$.

- Sappiamo che $\mathbf{S}^{\star i}, \mathbf{K}^{\star i} \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$, da cui $(\mathbf{S}^{\star i})_i$, $(\mathbf{K}^{\star i})_i \in \Sigma$, ovvero $\mathbf{S}^{\star}$, $\mathbf{K}^{\star} \in \Sigma$

Se $(a_i)_i$, $(b_i)_i \in \Sigma$, allora $a_i, b_i \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$, da cui $a_i \cdot_i b_i \in \Sigma_i$ e dunque $(a_i \cdot_i b_i)_i \in \Sigma$, ovvero $(a_i)_i \cdot (b_i)_i \in \Sigma$ □

Poniamo

- $\vdash_i := \vdash_{H_i,\Sigma_i}$ per ogni $i \in I$
- $\vdash := \vdash_{H,\Sigma}$

Proposizione 7.11.2. *$(a_i)_{i\in I} \vdash (b_i)_{i\in I}$ se e solo se $a_i \vdash_i b_i$ per ogni $i \in I$*

Dimostrazione. $(a_i)_i \vdash (b_i)_i$ se e solo se $(a_i)_i\ (\rightarrow_i)_i\ (b_i)_i \in \Sigma$, se e solo se $(a_i \rightarrow_i b_i)_i \in \Sigma$, se e solo se $a_i \rightarrow_i b_i \in \Sigma_i$ per ogni $i \in I$, se e solo se $a_i \vdash_i b_i$ per ogni $i \in I$. □

Per semplificare le scritture poniamo

- $\overline{H}_i := H_{i\Sigma_i} = (A_i, \vdash_i, \times_{H_i}, +_i, \perp_i, \top_i, \rightarrow_i)$, la pre-algebra di Heyting indotta dal separatore Σ_i su H_i
- $\overline{H} := H_\Sigma$, la pre-algebra di Heyting indotta dal separatore $\Sigma = \Pi_{i\in I}(\Sigma_i)$ su $H = \Pi_{i\in I}(\Sigma_i)$.
  Definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \pi_j\colon\ [A]_{\overline{H}} &\rightarrow [A_j]_{\overline{H}_j} \\ [(a_i)_i] &\mapsto [a_j] \end{aligned}$$

Tale funzione è ben definita: se $[(a_i)_i] = [(b_i)_i]$, allora $[a_i] = [b_i]_i$ per ogni $i \in I$; dunque $\pi_j([(b_i)_i]) = [b_j] = [a_j] = \pi_j([(a_i)_i])$

Proposizione 7.11.3. *π_j è un omomorfismo di algebre di Heyting da $[\overline{H}]$ a $[\overline{H}_j]$*

Dimostrazione. Deriva tutto facilmente dalle definizioni:

- $\pi_j([(a_i)_i]\ [(\wedge_i)_i]\ [(b_i)_i]) = \pi_j([(a_i \wedge_i b_i)_i]) = [a_j \wedge_j b_j] = [a_j]\ [\wedge_j]\ [b_j] = \pi_j([(a_i)_i])\ [(\wedge_i)_i]\ \pi_j([(b_i)_i])$

- $\pi_j([(a_i)_i]\ [(\vee_i)_i]\ [(b_i)_i]) = \pi_j([(a_i \vee_i b_i)_i]) = [a_j \vee_j b_j] = [a_j]\ [\vee_j]\ [b_j] = \pi_j([(a_i)_i])\ [(\vee_i)_i]\ \pi_j([(b_i)_i])$

- $\pi_j([(\perp_i)_i]) = [\perp_j]$ e $[\perp_j]$ è il sup di $[\overline{H}_j]$

- $\pi_j([(a_i)_i]\ [(\rightarrow_i)_i]\ [(b_i)_i]) = \pi_j([(a_i \rightarrow_i b_i)_i]) = [a_j \rightarrow_j b_j] = [a_j]\ [\rightarrow_j]\ [b_j] = \pi_j([(a_i)_i])\ [\rightarrow_j]\ \pi_j([(b_i)_i])$

□

Definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \langle \pi_i \rangle_{i \in I} \colon\ [A]_{\overline{H}} &\to \Pi_{i\in I}[A_i]_{\overline{H}_i} \\ [(a_i)_{i\in I}] &\mapsto ([a_i])_{i\in I} \end{aligned}$$

Tale funzione è ben definita: se $[(a_i)_i] = [(b_i)_i]$, allora $[a_i] = [b_i]$ per ogni $i \in I$; dunque $\langle \pi_i \rangle_i\ ([(b_i)_i]) = ([b_i])_i = ([a_i])_i$.

Proposizione 7.11.4. *$\langle \pi_i \rangle_i$ è un isomorfismo di algebre di Heyting di $[\overline{H}]$ in $\Pi_{i\in I}([\overline{H}_i])$*

Dimostrazione. Grazie alle Prop. 2.1.3 e 3.2.2, basta mostrare che $\langle \pi_i \rangle_i$ è un'immersione d'ordine suriettiva, dell'ordine parziale $([A]_{\overline{H}}, [\vdash]_{\overline{H}})$ nell'ordine parziale $(\Pi_{i\in I}([A_i]_{\overline{H}_i}),([\vdash_i]_{\overline{H}_i})_{i\in I})$.
Ma ciò è presto verificato: $[(a_i)_{i\in I}]_{\overline{H}}\ [\vdash]_{\overline{H}}\ [(b_i)_{i\in I}]_{\overline{H}}$ se e solo se $(a_i)_{i\in I} \vdash (b_i)_{i\in I}$, se e solo se $a_i \vdash_i b_i$ per ogni $i \in I$, se e solo se $[a_i]_{\overline{H}_i}\ [\vdash_i]_{\overline{H}_i}\ [b_i]_{\overline{H}_i}$ per ogni $i \in I$, se e solo se $([a_i]_{\overline{H}_i})_{i\in I}\ ([\vdash_i]_{\overline{H}_i})_{i\in I}\ ([b_i]_{\overline{H}_i})_{i\in I}$.
La suriettività è immediata, usando l'assioma della scelta.

□

7.12 Separatore potenza uniforme

Fissiamo una struttura implicativa $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ e un separatore Σ di H. Per ogni insieme di indici I definiamo:

- $H^I := \Pi_{i\in I}(H)$
- $\Sigma[I]_H := \{(a_i)_{i\in I} \in A^I$: esiste $\sigma \in \Sigma$ tale che $\sigma \leq a_i$ per ogni $i \in I\}$

Osservazione 7.12.1. $\Sigma[I]_H = \{(a_i)_{i\in I} \in A^I : \wedge_{i\in I}(a_i) \in \Sigma\}$. *Il verso* $\supseteq$ *è quasi immediato, basta porre* $\sigma := \wedge_{i\in I}(a_i)$. *Per il verso opposto basta usare le proprietà di base degli estremi inferiori e la proprietà* (1) *della definizione di separatore* (*Def. 7.1.1*)

Osservazione 7.12.2. *Osserviamo che* $\Sigma[I]_H \subseteq \Sigma^I$. *Infatti se* $(a_i)_{i\in I} \in \Sigma[I]_H$ *allora esiste* $\sigma \in \Sigma$ *tale che* $\sigma \leq a_i$ *per ogni* $i \in I$, *e da ciò segue che* $a_i \in \Sigma$ *per ogni* $i \in I$, *e dunque* $(a_i)_{i\in I} \in \Sigma^I$.

Osservazione 7.12.3. *Sia* $diag(\Sigma^I) := \{(\sigma)_{i\in I} : \sigma \in \Sigma\}$. *Si verifica immediatamente che* $diag(\Sigma^I) \subseteq \Sigma[I]_H$.

Osservazione 7.12.4. *Indichiamo con* $\delta_{\Sigma,I}$ *la funzione di* Σ *in* Σ^I *che manda* σ *in* $(\sigma)_{i\in I}$. *Osserviamo che* $\Sigma[I]_H = \uparrow (Im(\delta_{\Sigma,I}))_{H^I}$. *Infatti* $\Sigma[I]_H = \{(a_i)_{i\in I} \in A^I :$ *esiste* $\sigma \in \Sigma$ *tale che* $\sigma \leq a_i$ *per ogni* $i \in I\} = \{(a_i)_{i\in I} \in A^I :$ *esiste* $\sigma \in \Sigma$ *tale che* $(\sigma)_{i\in I}\ (\leq)_{i\in I} (a_i)_{i\in I}\} = \{(a_i)_{i\in I} \in A^I :$ *esiste* $\sigma \in \Sigma$ *tale che* $\delta_{\Sigma,I}(\sigma)\ (\leq)_{i\in I}\ (a_i)_{i\in I}\} = \uparrow (Im\delta_{\Sigma,I})_{H^I}$

Proposizione 7.12.1. $\Sigma[I]_H = Sep(Im(\delta_{\Sigma,I}))_{H^I}$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $Im(\delta_{\Sigma,I}) = @(Im(\delta_{I,\Sigma}))_{H^I}$, perché in questo modo avremmo, grazie all'osservazione precedente, che $\Sigma[I]_H = \uparrow (Im_{\delta_{\Sigma,I}})_{H^I} = \uparrow (@(Im(\delta_{I,\Sigma}))_{H^I})_{H^I} = Sep(Im(\delta_{\Sigma.I}))_{H^I}$. Ma questo è immediato, perché $\delta_{\Sigma,I}(a)\ (\cdot)_{i\in I}\ \delta_{\Sigma,I}(b) = (a)_{i\in I}\ (\cdot)_{i\in I}\ (b)_{i\in I} = (a\cdot b)_{i\in I} = \delta_{\Sigma,I}(a\cdot b) \in Im(\delta_{\Sigma,I})$, per ogni $a, b \in \Sigma$. □

In particolare $\Sigma[I]_H$ è un separatore di H^I, detto **separatore potenza uniforme** di H^I.

Osservazione 7.12.5 (Separatori potenza uniforme classici)**.** *Si osservi che* $\Sigma[I]$ *è classico* (*in* H^I) *se e solo se* Σ *è classico* (*in* H); *infatti* $\Sigma[I]$ *è classico se e solo se* $\propto_{H^I} = (\propto)_{i\in I} \in \Sigma[I]$, *se e solo se* $\wedge_{i\in I}(\propto_H) \in \Sigma$, *se e solo se* $\propto_H \in \Sigma$.
Grazie alla Prop. 7.5.3, ciò ci dice che, se Σ *è classico, allora* $[H^I_{\Sigma[I]}]$ *è un'algebra di Boole.*

Osservazione 7.12.6 (Separatori potenza uniforme consistenti)**.** *Si noti che* $(\perp)_{i\in I} \in \Sigma[I]_H$ *se e solo se* $\wedge_{i\in I}(\perp) \in \Sigma$*, se e solo se* $\perp \in \Sigma$*. Dunque* $\Sigma[I]_H$ *è consistente in* H^I *se e solo se* Σ *è consistente in* H

Proposizione 7.12.2. *I seguenti sono equivalenti.*

- · (1) $\Sigma[I]_H = \Sigma^I$
- · (2) Σ *è chiuso rispetto agli* inf *arbitrari con indici in* I.

Dimostrazione. (1) implica (2): Supponiamo che $\Sigma[I]_H = \Sigma^I$. Sia $(\sigma_i)_{i\in I} \in \Sigma^I$; allora esiste $\tau \in \Sigma$ tale che $\tau \leq \sigma_i$ per ogni $i \in I$. Dunque $\wedge_{i\in I}(\sigma_i) \geq \tau \in \Sigma$, da cui segue che $\wedge_{i\in I}(\sigma_i) \in \Sigma$.
(2) implica (1): Sia Σ chiuso rispetto agli inf arbitrari con indici in I. Sia $(\sigma_i)_{i\in I} \in \Sigma^I$. Per l'ipotesi di chiusura, abbiamo che $\wedge_{i\in I}(\sigma_i) \in \Sigma$. Ma $\wedge_{i\in I}(\sigma_i) \leq \sigma_j$ per ogni $j \in I$ e dunque $(\sigma_i)_{i\in I} \in \Sigma[I]_H$. □

Grazie alla nozione di separatore potenza uniforme, possiamo caratterizzare i nuclei intuizionista e classico di H^I

Osservazione 7.12.7. *Dal fatto che* $\propto_H \in S^0_{K,H}$ *e che* $\propto_{H^I} = (\propto_H)_{i\in I} \in diag(\ (S^0_{K,H})^I)$ *segue immediatamente che* $\propto_{H^I} \in S^0_{K,H}[I]_H$*; ovvero:* $S^0_{K,H}[I]_H$ *è un separatore classico di* H^I*.*

Proposizione 7.12.3. *Per ogni insieme di indici* I *si ha che*

- · $S^0_{J,H^I} = S^0_{J,H}[I]_H$
- · $S^0_{K,H^I} = S^0_{K,H}[I]_H$

dove $H^I := \Pi_{i\in I}(H)$
(*si tengano presenti la Def. 7.4.1 e il paragrafo 5.15*)

Dimostrazione.

Dato che S^0_{J,H^I} è il più piccolo separatore di H^I, si ha $S^0_{J,H^I} \subseteq S^0_{J,H}[I]_H$. Se $(\sigma_i)_i \in S^0_{J,H}[I]_H$, allora esiste $\tau \in S^0_{J,H} = \uparrow (\Lambda(\varnothing)_H)_H$ tale che $\tau \leq \sigma_i$ per ogni $i \in I$; dunque esiste $t \in \Lambda^{[-]}_{\varnothing}$ tale che $t^{\star H} \leq \tau \leq \sigma_i$ per ogni $i \in I$. Ma allora $S^0_{J,H^I} \ni t^{\star H^I} = (t^{\star H})_{i\in I}\ (\leq)_{i\in I}\ (\sigma_i)_{i\in I}$, e dunque $(\sigma_i)_{i\in I} \in S^0_{J,H^I}$.

Dato che S^0_{K,H^I} è il più piccolo separatore classico di H^I, e che $S^0_{K,H}[I]_H$ è un separatore classico di H^I, si ha $S^0_{K,H^I} \subseteq S^0_{K,H}[I]_H$. Se $(\sigma_i)_{i\in I} \in S^0_{K,H}[I]_H$, allora esiste $\tau \in S^0_{K,H} = \uparrow (\Lambda(\{\propto_H\})_H)_H$ tale che $\tau \leq \sigma_i$ per ogni $i \in I$; dunque esiste $t \in \Lambda^{[-]}_{\{\propto_H\}}$ tale che $t^{\star H} \leq \tau \leq \sigma_i$ per ogni $i \in I$. Ma allora $S^0_{K,H^I} \ni t^{\star H^I} = (t^{\star H})_{i\in I}\ (\leq)_{i\in I}\ (\sigma_i)_{i\in I}$, e dunque $(\sigma_i)_{i\in I} \in S^0_{K,H^I}$.

□

Capitolo 8

Esempi di separatori

8.1 Separatori nelle strutture implicative vacue

Per allenarci con le definizioni e ripassare cose già viste, vediamo un paio di fatti riguardanti le strutture implicative vacue.

Proposizione 8.1.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ una struttura implicativa vacua superiore. Allora A è l'unico separatore di H.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma \subseteq A$ un separatore di H. $\mathbf{II} \in \Lambda_{\varnothing}^{[-]}$, dunque $(\mathbf{II})^{\star} \in \Sigma$. Ma $(\mathbf{II})^{\star} = \perp$, perché abbiamo visto che nelle strutture implicative vacue superiori tutti i λ-termini chiusi e puri che sono prodotto di due λ-termini vengono valutati nel minimo. Dunque $\perp \in \Sigma$, da cui $\Sigma = A$ (perché un separatore è inconsistente se e solo se è banale). $\square$

Proposizione 8.1.2. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ una struttura implicativa vacua. Allora A è l'unico separatore classico di H*

Dimostrazione. Deriva dal fatto, già visto che, se H è una struttura implicativa vacua, allora $\propto_H = \perp$, e che l'unico separatore che contiene $\perp$ è il separatore banale. $\square$

8.2 Separatori nelle algebre di Heyting e di Boole complete

Proposizione 8.2.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ un'algebra di Heyting completa. Sia Σ un sottoinsieme di A. Allora i seguenti sono equivalenti:*

· *Σ è un separatore di H*

· *Σ è un filtro di H*

Dimostrazione. Ricordiamo che un filtro Σ di H è definito dalle seguenti proprietà:

· (0) $\Sigma \neq \varnothing$

· (1) Se $a \in \Sigma$, $b \in A$ e $a \leq b$, allora $b \in \Sigma$

· (2) $a, b \in \Sigma$ implica $a \wedge b \in \Sigma$

e che un separatore Σ di H è definito dalle seguenti proprietà:

· (1) $a \in \Sigma$, $b \in A$, $a \leq b$ implica $b \in \Sigma$

· (2) $\mathbf{K}^\star$, $\mathbf{S}^\star \in \Sigma$

· (3′) $a, b \in \Sigma$ implica $a \cdot b \in \Sigma$

La proprietà (1) dei filtri è identica alla proprietà (1) dei separatori. La proprietà (2) dei filtri viene a coincidere con la proprietà (3′) dei separatori, perché $a \cdot b = a \wedge b$ per ogni $a, b \in A$ (essendo H un'algebra di Heyting completa). La proprietà (0) dei filtri è implicata dalla proprietà (2) dei separatori. Infine le proprietà (0) e (1) dei filtri implicano la proprietà (2) dei separatori, essendo $\mathbf{K}^\star = \mathbf{S}^\star = \top$ (perché nelle algebre di Heyting complete tutti i λ-termini puri e chiusi vengono valutati come massimi, come già mostrato [Prop. 6.2.4]). □

Osservazione 8.2.1. *In particolare, se $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ è un'algebra di Heyting completa, $\{\top\}$ è il più piccolo separatore di H, essendo il più piccolo filtro di H. Dunque $S^0_{J,H} = \{\top\}$.*

Osservazione 8.2.2. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$ un'algebra di Boole completa; allora, per la Prop. 6.3.1, $\propto_H = \top$, da cui $S^0_{J,H} = S^0_{K,H} = \{\top\}$*

8.3 Separatori nelle algebre combinatorie

Proposizione 8.3.1. *Se $P = (R, \cdot, k, s)$ è un'algebra combinatoria totale, allora $\mathcal{P}(R) \setminus \{\varnothing\}$ è un ultraseparatore (ovvero un separatore massimale tra i separatori consistenti) della struttura implicativa $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(R), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, R, \to_P)$.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica:

- Se $a \in \mathcal{P}(R) \setminus \{\varnothing\}$, $b \in \mathcal{P}(R)$ e $a \subseteq b$, allora ovviamente $b \neq \varnothing$, e dunque $b \in \mathcal{P}(R)$

- $s \in \mathbf{S}^\star$ e $k \in \mathbf{K}^\star$, dunque $\mathbf{S}^\star \neq \varnothing$, $\mathbf{K}^\star \neq \varnothing$, da cui $\mathbf{K}^\star, \mathbf{S}^\star \in \mathcal{P}(R) \setminus \{\varnothing\}$

- Se $a, b \in \mathcal{P}(R) \setminus \{\varnothing\}$, allora esistono $\alpha \in a$ e $\beta \in b$, e dunque $\alpha \cdot \beta \in a \cdot b$; da ciò segue che $a \cdot b \neq \varnothing$, e quindi $a \cdot b \in \mathcal{P}(R) \setminus \{\varnothing\}$

- Le proprietà di consistenza e massimalità sono ovvie. □

8.4 Separatori nelle strutture di Krivine

Fissiamo una struttura astratta di Krivine $H = (\Lambda, \Pi, \sharp, \cdot, h, \mathbb{K}, \mathbb{S}, ᴐᴐ, PL, \vartriangle)$. Ricordiamo che la struttura astratta di Krivine H induce una struttura implicativa $\mathcal{H} = (\mathcal{P}(\Pi), \supseteq, \cup, \cap, \Pi, \varnothing, \to_H)$, dove $a \to_H b := a^\vartriangle \cdot b := \{\alpha \cdot \beta : \alpha \in a^\vartriangle, \beta \in b\}$, per ogni $a, b \subseteq \Pi$.
Poniamo $\mathbf{\Sigma}_H := \{a \subseteq \Pi : a^\vartriangle \cap PL \neq \varnothing\} = \{a \subseteq \Pi : \text{esiste } t \in PL \text{ tale che } t \Vdash a\}$ (si ricordi che $\Vdash$ è la relazione su $\Lambda \times \mathcal{P}(\Pi)$ così definita: $t \Vdash a$ se e solo se $t \in a^\vartriangle$).

Proposizione 8.4.1. $\mathbf{\Sigma}_H$ *è un separatore classico di* $\mathcal{H}$.

Dimostrazione.

- Sia $a \in \mathbf{\Sigma}_H$, $b \subseteq \Pi$ e $a \supseteq b$. L'ipotesi $a \in \mathbf{\Sigma}_H$ equivale a dire che esiste $t \in PL$ tale che $t \Vdash a$; dato che $a \supseteq b$, e quindi $a^\vartriangle \subseteq b^\vartriangle$, da $t \Vdash a$ segue $t \Vdash b$, e dunque $b \in \mathbf{\Sigma}_H$.

- Sappiamo che $\mathbb{K} = \mathbf{K}^{\circ H} \Vdash \mathbf{K}^{\star\mathcal{H}}$, $\mathbb{S} = \mathbf{S}^{\circ H} \Vdash \mathbf{S}^{\star\mathcal{H}}$, $ᴐᴐ = \propto_{\mathcal{H}}^{\circ H} \Vdash \propto_{\mathcal{H}}$, e dunque $\mathbb{K} \in (\mathbf{K}^{\star\mathcal{H}})^\vartriangle$, $\mathbb{S} \in (\mathbf{S}^{\star\mathcal{H}})^\vartriangle$, $ᴐᴐ \in (\propto_{\mathcal{H}})^\vartriangle$. Dato che $\mathbb{K}, \mathbb{S}, ᴐᴐ \in PL$, da quest'ultima osservazione segue che $\mathbf{K}^{\star\mathcal{H}}$, $\mathbf{S}^{\star\mathcal{H}}$, $\propto_{\mathcal{H}} \in \mathbf{\Sigma}_H$.

- Siano $a, b \in \mathbf{\Sigma}_H$. Ciò equivale a dire che esistono $t, q \in PL$ tali che $t \Vdash a$, $q \Vdash b$. Da $t \Vdash a$, $q \Vdash b$ segue $t \sharp q \Vdash a \cdot_{\mathcal{H}} b$ (perché, per definizione, PL è chiuso rispetto a $\sharp$). Dato che $t, q \in PL$, si ha che $t \sharp q \in PL$, e dunque la precedente osservazione ci dice che $a \cdot_{\mathcal{H}} b \in \mathbf{\Sigma}_H$ □

Proposizione 8.4.2. *Il separatore* $\mathbf{\Sigma}_H$ *di* $\mathcal{H}$ *è consistente* (*ovvero* $\Pi \notin \mathbf{\Sigma}_H$) *se e solo se la struttura astratta di Krivine* H *è consistente* (*ovvero* $\Pi^\vartriangle \cap PL = \varnothing$)

Dimostrazione. È una conseguenza pressoché immediata della definizione di $\mathbf{\Sigma}_H$: $\Pi \notin \mathbf{\Sigma}_H = \{a \subseteq \Pi : a^\vartriangle \cap PL \neq \varnothing\}$ se e solo se $\Pi^\vartriangle \cap PL = \varnothing$ □

Parte II

Categorie e tripos

Capitolo 9

Categorie

9.1 Definizione di categoria

Introduciamo molto brevemente le nozioni base relative alla teoria delle categorie, senza dare dimostrazioni. Per uno sguardo più approfondito si rimanda al noto testo di Eilenberg e MacLane, 'Categories for Working Mathematicians' [15].
Le categorie sono, essenzialmente, un modo per formalizzare in astratto la nozione di 'struttura' (si pensi alle strutture di gruppo, spazio vettoriale, etc.) e di mappa che preserva la struttura (si pensi agli omomorfismi di gruppo, di anello, alle trasformazioni lineari etc.). Questa astrazione permette di far luce sui legami tra teorie apparentemente molto lontane tra loro.

Definizione 9.1.1. *Una* ***categoria*** *è una sestupla* $\mathbb{C} = (Ob, Ar, d_0, d_1, id, \circ)$ *dove*

- Ob *è una classe, i cui elementi sono detti* ***oggetti***
- Ar *è una classe, i cui elementi sono detti* ***frecce***
- d_0 *è una funzione dalla classe* Ar *alla classe* Ob*; se* $f \in Ar$*, allora* $d_0(f)$ *è detta* ***sorgente*** *(o oggetto sorgente) di* f
- d_1 *è una funzione dalla classe* Ar *alla classe* Ob*; se* $f \in Ar$*, allora* $d_1(f)$ *è detto (oggetto)* ***target*** *di* f
- id *è una funzione dalla classe* Ob *alla classe* Ar*. Se* $A \in Ob$*, indichiamo con* id_A *l'immagine di* A *attraverso* id *e la chiamiamo* ***freccia identità*** *di* A

- $\circ$ *è una funzione dalla classe* $\{(f,g) \in Ar \times Ar : d_1(f) = d_0(g)\}$ *alla classe* Ar*; se* $f, g \in \{(f,g) \in Ar \times Ar : d_1(f) = d_0(g)\}$*, indichiamo con* $g \circ f$ *l'immagine di* (f,g) *e la chiamiamo* ***freccia di composizione*** *di* f *con* g

Tale sestupla, per essere una categoria, deve rispettare i seguenti assiomi:

- $d_0(id_A) = d_1(id_A) = A$ *per ogni* $A \in Ob$
- $d_0(g \circ f) = d_0(f)$ *per ogni* $f, g \in Ar$ *tali che* $d_1(f) = d_0(g)$
- $d_1(g \circ f) = d_1(g)$ *per ogni* $f, g \in Ar$ *tali che* $d_1(f) = d_0(g)$
- $f \circ id_{d_0(f)} = f = id_{d_1(f)} \circ f$ *per ogni* $f \in Ar$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *per ogni* $h, g, f \in Ar$ *tali che* $d_1(f) = d_0(g)$ *e* $d_1(g) = d_0(h)$

Sia $\mathbb{C} = (Ob, Ar, d_0, d_1, id, \circ)$ una categoria. Diciamo che una freccia f di $\mathbb{C}$ è **componibile** in $\mathbb{C}$ con una freccia g di $\mathbb{C}$ se e solo se (g, f) appartiene al dominio della funzione $\circ$.
Se A, $B \in Ob$, si pone $\mathbb{C}(A,B) := \{f \in Ar : d_0(f) = A, d_1(f) = B\}$. Se $f \in \mathbb{C}(A,B)$ diciamo che f è una freccia da A in B in $\mathbb{C}$. Si userà a volte la scrittura $f :_{\mathbb{C}} A \to B$ per dire $f \in \mathbb{C}(A,B)$; se ciò non creerà ambiguità, scriveremo semplicemente $f : A \to B$ al posto di $f :_{\mathbb{C}} A \to B$.
Diciamo che una freccia f si trova 'tra' gli oggetti A e B nella categoria $\mathbb{C}$ se $f \in \mathbb{C}(A,B)$ o $f \in \mathbb{C}(B,A)$.
Si noti che le classi $\mathbb{C}(A,B)$ formano una partizione della classe Ar, al variare di A, B in Ob.
In teoria delle categorie si rappresentano le informazioni attraverso dei diagrammi. Ad esempio, fissata implicitamente una categoria di riferimento $\mathbb{C}$, il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[u, "i"] & D \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

ci dice che

- f è una freccia da A in B in $\mathbb{C}$
- g è una freccia da B in D in $\mathbb{C}$
- h è una freccia da D in C in $\mathbb{C}$

· ...

Un diagramma è detto *commutativo* se, data una coppia di vertici qualsiasi (i punti del diagramma che rappresentano gli oggetti), la composizione di frecce lungo un qualsiasi cammino che unisce il primo al secondo punto dà sempre lo stesso risultato. Ad esempio, per il diagramma sopra essere commutativo equivale esattamente a dire che

· $g \circ f = j$

· $h \circ j = i$

· $h \circ g \circ f = i$ (quest'ultima è conseguenza delle precedenti due)

Il concetto di categoria è pervasivo, e praticamente tutte le strutture che si incontrano nei corsi di algebra e geometria formano categorie; elenchiamone solo alcuni esempi:

· La categoria degli insiemi, **Set**; gli oggetti sono gli insiemi; le frecce sono le funzioni tra insiemi, ovvero le terne $f = (A, \phi, B)$, dove A e B sono insiemi e ϕ è un grafico di $A \times B$, ovvero un sottoinsieme di $A \times B$ tale che per ogni a esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in \phi$ (e si pone $\phi(a) := b$ e $f(a) := b$); l'oggetto sorgente di una freccia (A, ϕ, B) è A; il target di una freccia (A, ϕ, B) è B; la freccia identità di un oggetto A è la funzione (A, id_A, A), dove $id_A := \{(a, a) : a \in A\}$. Se $f = (A, \phi, B)$ è una freccia da A in B e $g = (B, \gamma, C)$ è una freccia da B in C, in **Set**, allora la freccia di composizione di f con g è la terna (A, δ, C), dove $\delta = \{(a, c) \in A \times C : \text{esiste } b \in B \text{ tale che } (a, b) \in \phi \text{ e } (b, c) \in \gamma\}$.

· La categoria dei gruppi, **Grp**; gli oggetti sono i gruppi; le frecce tra i gruppi sono gli omomorfismi di gruppo, ovvero le terne (A, ϕ, B) dove A e B sono gruppi e, se indichiamo con $|A|$ e $|B|$ gli insiemi soggiacenti ad A e B, $(|A|, \phi, |B|)$ è una funzione di insiemi che rispetta la struttura di gruppo di A e B, nel senso ben noto al lettore. L'oggetto sorgente di una freccia (A, ϕ, B) è A; il target di una freccia (A, ϕ, B) è B; la freccia identità di un oggetto A è la terna $(A,\ id_{|A|},\ A)$, dove $id_{|A|} = \{(a, a) : a \in |A|\}$; la freccia di composizione di una freccia (A, ϕ, B) con una freccia (B, γ, C) è la freccia (A, δ, C), dove $\delta = \{(a, c) \in A \times C : \text{esiste } b \in B \text{ tale che } (a, b) \in \phi \text{ e } (b, c) \in \gamma\}$.

allo stesso modo si definiscono le note categorie di **Ring** (anelli), R-**Mod** (R-moduli, fissato un anello R), K-**Vect** (spazi vettoriali sul campo K, fissato un campo K), **Top** (spazi topologici), **PreOrd** (pre-ordini), **Pos** (ordini parziali), ...

Osservazione 9.1.1. *Spesso si tende ad identificare una funzione di insiemi* (A, ϕ, B) *con il grafico soggiacente* ϕ *e un omomorfismo di gruppi* (A, ϕ, B) *con la funzione insiemistica soggiacente* $(|A|, \phi, |B|)$*, o con il grafico soggiacente* ϕ*; analoghe identificazioni vengono compiute nel trattare gli omomorfismi delle altre strutture algebriche, come anelli, moduli, spazi vettoriale, etc. Nella pratica tale ambiguità di linguaggio non crea in genere problemi e la si adotterà a volte nel seguito.*

Definizione 9.1.2. *Se* $\mathbb{C}$ *è una categoria, da essa possiamo definire la categoria* $\mathbb{C}^{op}$ ***opposta*** *a* $\mathbb{C}$ *nel seguente modo:*

- *Gli oggetti di* $\mathbb{C}^{op}$ *sono esattamente gli oggetti di* $\mathbb{C}$
- *Le frecce di* $\mathbb{C}$ *sono esattamente le frecce di* $\mathbb{C}$
- *La sorgente di una freccia* f *in* $\mathbb{C}^{op}$ *è il target di* f *in* $\mathbb{C}$
- *Il target di una freccia* f *in* $\mathbb{C}^{op}$ *è la sorgente di* f *in* $\mathbb{C}$*.*
- *La freccia identità di un oggetto* A *in* $\mathbb{C}^{op}$ *è esattamente la freccia identità di* A *in* $\mathbb{C}$
- *Una freccia* g *è componibile con una freccia* f *in* $\mathbb{C}^{op}$ *se e solo se* f *è componibile con* g *in* $\mathbb{C}$
- *Se una freccia* f *è componibile con una freccia* g *in* $\mathbb{C}$*, allora la freccia di composizione di* g *con* f *in* $\mathbb{C}^{op}$ *è esattamente la freccia di composizione di* f *con* g *in* $\mathbb{C}$*.*

Si verifica facilmente che $\mathbb{C}^{op}$ *è effettivamente una categoria. Inoltre* $\mathbb{C}^{op\ op} = \mathbb{C}$

Definizione 9.1.3. *Sia* $\mathbb{C} = (Ob,\ Ar,\ d_0,\ d_1,\ id,\ \circ)$ *una categoria. Una freccia* $f \in Ar$ *è detta **isomorfismo*** *(o **iso**) di* $\mathbb{C}$ *se se esiste una freccia* $g :_{\mathbb{C}} B \to A$ *tale che* $g \circ f = id_A$ *e* $f \circ g = id_B$*. La freccia* g *è detta **inversa*** *di* f *in* $\mathbb{C}$*.*

Si verificano facilmente i seguenti fatti:

- Ogni isomorfismo f di $\mathbb{C}$ ha un'unica freccia inversa in $\mathbb{C}$. Indichiamo con $f_{\mathbb{C}}^{-1}$ (o f^{-1}) quest'unica inversa.
- La freccia inversa di un isomorfismo f di $\mathbb{C}$ è un isomorfismo di $\mathbb{C}$ la cui freccia inversa è f.

- Per ogni oggetto $A \in Ob$, la freccia id_A è un isomorfismo di $\mathbb{C}$ la cui inversa in $\mathbb{C}$ è id_A.
- Se $f :_{\mathbb{C}} A \to B$ e $g :_{\mathbb{C}} B \to C$ sono isomorfismi di $\mathbb{C}$, allora $g \circ f$ è un isomorfismo di $\mathbb{C}$, di inversa $f_{\mathbb{C}}^{-1} \circ g_{\mathbb{C}}^{-1}$.

9.2 Funtori

Notazione: se $\mathbb{C}$ è una categoria, si userà indicare con $Ob_{\mathbb{C}}$ la classe degli oggetti di $\mathbb{C}$, con $Ar_{\mathbb{C}}$ la classe delle frecce di $\mathbb{C}$, con ${d_0}^{\mathbb{C}}$ la funzione che fornisce le sorgenti delle frecce di $\mathbb{C}$, con ${d_1}^{\mathbb{C}}$ la funzione che fornisce i target delle frecce di $\mathbb{C}$, con $id^{\mathbb{C}}$ la funzione che fornisce le identità degli oggetti di $\mathbb{C}$ e con $\circ_{\mathbb{C}}$ la funzione di composizione di $\mathbb{C}$. Quando ciò non creerà ambiguità, si ometterà $\mathbb{C}$ nei pedici e negli apici.

Definizione 9.2.1. *Siano $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ due categorie. Un funtore F da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$ è una coppia (F_0, F_1), dove*

- *F_0 è una funzione dalla classe $Ob_{\mathbb{C}}$ alla classe $Ob_{\mathbb{D}}$*
- *F_1 è una funzione dalla classe $Ar_{\mathbb{C}}$ alla classe $Ar_{\mathbb{D}}$*

Affinché tale coppia sia un funtore, bisogna che siano rispettati i seguenti assiomi:

- *Se $f \in \mathbb{C}(A, B)$, allora $F_1(f) \in \mathbb{D}(F_0(A), F_0(B))$*
- $F_1(id_A^{\mathbb{C}}) = id_{F_0(A)}^{\mathbb{D}}$
- $F_1(h \circ_{\mathbb{C}} g) = F_1(h) \circ_{\mathbb{D}} F_1(g)$

per ogni A, $B \in Ob_{\mathbb{C}}$ e per ogni $f, g, h \in Ar_{\mathbb{C}}$ tali che ${d_1}^{\mathbb{C}}(g) = {d_0}^{\mathbb{C}}(h)$

Notazione: dato che generalmente usiamo le lettere maiuscole per gli oggetti e quelle minuscole per le frecce, se $F = (F_0, F_1)$ è un funtore, non sarà in genere ambiguo rimuovere i pedici 0 e 1 e scrivere semplicemente $F(A)$ e $F(f)$ al posto di $F_0(A)$ e $F_1(f)$, per ogni oggetto A e ogni freccia f, come faremo nel seguito.

Se F è un funtore da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$, chiamiamo $\mathbb{C}$ la categoria-dominio di F e $\mathbb{D}$ la categoria-codominio di F. Scriveremo $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ per dire che il funtore F ha categoria-dominio $\mathbb{C}$ e categoria-codominio $\mathbb{D}$.
Se $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ e $\mathbb{E}$ sono tre categorie, $F = (F_0, F_1)$ un funtore da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$ e $G =$

(G_0, G_1) un funtore da $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$, il **funtore composizione** di F e G - che indichiamo con $G \circ F$ - è definito come il funtore da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{E}$ individuato dalla coppia $(G_0 \circ F_0, G_1 \circ F_1)$ dove $G_0 \circ F_0$ è la composizione della funzione F_0 con la funzione G_0 e $G_1 \circ F_1$ è la composizione della funzione F_1 con la funzione G_1; è immediato verificare che $G \circ F$ è effettivamente un funtore da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{E}$.

Osservazione 9.2.1. *Ogni funtore F da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$ determina un funtore F^{op} di $\mathbb{C}^{op}$ in $\mathbb{D}^{op}$, tramite le uguaglianze $F^{op}(A) = F(A)$ e $F^{op}(f) = F(f)$, per ogni $A \in Ob_{\mathbb{C}}$ e $f \in Ar_{\mathbb{C}}$. Si osservi che $F^{op\ op} = F$*

Esempio 9.2.1.

- *Per ogni categoria $\mathbb{C}$ abbiamo il funtore identità $\boldsymbol{I}_{\mathbb{C}}$, da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, definito da $\boldsymbol{I}_{\mathbb{C}}(A) := A$ e $\boldsymbol{I}_{\mathbb{C}}(f) := f$, per ogni oggetto A e ogni freccia f*

- *Un tipo di funtori importanti sono i funtori dimentichi, che 'dimenticano' parte della struttura di una categoria. Un esempio è il funtore U_{Grp} di **Grp** in **Set**; esso è definito da $U_{Grp}(G) = |G|$ e $F(G, \phi, H) = (|G|, \phi, |H|)$, per ogni gruppo G e ogni omomorfismo di gruppi (G, ϕ, H).*

Siano $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ due categorie. Un **isomorfismo** (categoriale) da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$ è un funtore $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ tale che esiste un funtore $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tale che $F \circ G = \mathbf{I}_{\mathbb{D}}$ e $G \circ F = \mathbf{I}_{\mathbb{C}}$; tale funtore G (detto funtore inverso di F), se esiste, è chiaramente unico, ed è anch'esso un isomorfismo, da $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$, il cui funtore inverso è proprio F.

9.3 Trasformazioni naturali

Definizione 9.3.1. *Siano $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ due categorie e F e G due funtori da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$; una **trasformazione naturale** η da F in G è una famiglia $(\eta_X)_{X \in Ob_{\mathbb{C}}}$ di frecce di $Ar_{\mathbb{D}}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

- *Per ogni $X \in Ob_{\mathbb{C}}$, η_X è una freccia da $F(X)$ in $G(X)$*

- *Per ogni oggetto $A, B \in Ob_{\mathbb{C}}$ e ogni freccia $f \in \mathbb{C}(A, B)$ il seguente diagramma in $\mathbb{D}$ è commutativo*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

ovvero: $G(f) \circ_{\mathbb{D}} \eta_A = \eta_B \circ_{\mathbb{D}} F(f)$

Siano $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ due categorie, e F e G due funtori da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$. Un **isomorfismo naturale** da F in G è una trasformazione naturale $(\eta_X)_{X \in Ob_{\mathbb{C}}}$ da F in G tale che η_X è un iso di $\mathbb{D}$ per ogni $X \in Ob_{\mathbb{C}}$

Notazione: scriveremo $\eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ per dire che η e una trasformazione naturale di F in G. Se poi η è un isomorfismo naturale, possiamo specificarlo scrivendo $\eta : F \underset{\simeq}{\stackrel{\cdot}{\longrightarrow}} G$.

Esempio 9.3.1. *Se F è un funtore di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$, allora un isomorfismo naturale da F in F è dato dalla famiglia $(id^{\mathbb{D}}_{F(X)})_{X \in Ob_{\mathbb{C}}}$*

Due categorie $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ sono dette **equivalenti** se esistono un funtore F da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$, un funtore G da $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$, un isomorfismo naturale da $G \circ F$ in $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}$ e un isomorfismo naturale da $F \circ G$ in $\mathbf{I}_{\mathbb{D}}$.

Se F e G sono due funtori da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{D}$, adoperiamo il simbolo $Nat(F, G)$ per indicare la classe di tutte trasformazioni naturali da F in G.

9.4 Oggetti terminali e prodotti

Definizione 9.4.1. *Sia $\mathbb{C}$ una categoria. Un **oggetto terminale** di $\mathbb{C}$ è un oggetto A di $\mathbb{C}$ tale che, per ogni oggetto B di $\mathbb{C}$, esiste un'unica freccia in $\mathbb{C}(B, A)$.*

Definizione 9.4.2. *Sia $\mathbb{C}$ una categoria e $A_1, \ldots, A_n$ oggetti di $\mathbb{C}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; un **prodotto** di $(A_1, \ldots, A_n)$ in $\mathbb{C}$ è una $n+1$-upla $(P, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ tale che*

- $P \in Ob_{\mathbb{C}}$
- $\pi_i \in \mathbb{C}(P, A_i)$ *per ogni* i
- *Per ogni oggetto Q di $\mathbb{C}$ e per ogni lista $(q_1, \ldots, q_n)$ di frecce di $\mathbb{C}$, con $q_i \in \mathbb{C}(Q, A_i)$ per ogni i, esiste un'unica freccia $\psi \in \mathbb{C}(Q, P)$ tale che $\pi_i \circ_{\mathbb{C}} \psi = q_i$ per ogni i*

La seguente proposizione è di facile verifica.

Proposizione 9.4.1. *Sia $\mathbb{C}$ una categoria.*

- *(Unicità dell'oggetto terminale) Se A e B sono due oggetti terminali di $\mathbb{C}$, allora l'unica freccia da A in B e l'unica freccia da B in A sono entrambi isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.*

· (*Unicità del prodotto*) *Siano* $A_1, \ldots, A_2$ *oggetti di* $\mathbb{C}$ *e* $(P, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ *e* $(Q, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ *prodotti di* $(A_1, \ldots, A_n)$*; sia* ψ *l'unica freccia in* $\mathbb{C}(Q, P)$ *tale che* $\pi_i \circ_{\mathbb{C}} \psi$ *per ogni* i *e sia* ϕ *l'unica freccia in* $\mathbb{C}(P, Q)$ *tale che* $q_i \circ_{\mathbb{C}} \phi$ *per ogni* i*; allora* ψ *e* ϕ *sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.*

· (*Commutatività del prodotto*) *Siano* $A_1, \ldots, A_n$ *oggetti di* $\mathbb{C}$*,* $(P, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ *un prodotto di* $(A_1, \ldots, A_n)$ *e* σ *una permutazione di* $\{1, \ldots, n\}$*; allora* $(P, \pi_{\sigma(1)}, \ldots, \pi_{\sigma(n)})$ *è un prodotto di* $(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)})$*.*

· (*Associatività del prodotto*) *Siano* A_1, A_2, A_3 *tre oggetti di* $\mathbb{C}$*,* (P, π_1, π_2) *un prodotto di* (A_1,A_2)*,* (Q, q_1, q_2) *un prodotto di* (P, A_3)*; allora* $(Q,\ \pi_1 \circ_{\mathbb{C}} q_1,\ \pi_2 \circ_{\mathbb{C}} q_1,\ q_2)$ *è un prodotto di* (A_1, A_2, A_3)

Definizione 9.4.3. *Chiamiamo* ***categoria con prodotti finiti*** *ogni coppia* $(\mathbb{C}, \mathit{prod})$ *in cui* $\mathbb{C}$ *è una categoria e prod è una funzione che associa ad ogni* n*-upla di oggetti* $(A_1, \ldots, A_n)$ *un prodotto di* $(A_1, \ldots, A_n)$ *in* $\mathbb{C}$*, per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*.*

Definizione 9.4.4. *Chiamiamo* ***categoria cartesiana*** *ogni terna* $(\mathbb{C}, 1, \mathit{prod})$ *tale che*

· $(\mathbb{C}, \mathit{prod})$ *è una categoria con prodotti finiti*

· 1 *è un oggetto terminale di* $\mathbb{C}$

Convenzioni notazionali: data una categoria cartesiana $\mathfrak{D} = (\mathbb{C}, 1, \mathit{prod})$, si useranno le seguenti convenzioni sulle notazioni:

· $!^{\mathfrak{D}}_A$ indicherà l'unica freccia da A in 1

· $(A_1 \times_{\mathfrak{D}} \ldots \times_{\mathfrak{D}} A_n,\ {}^{\mathfrak{D}}\pi_1^{A_1,\ldots,A_n}, \ldots, {}^{\mathfrak{D}}\pi_n^{A_1,\ldots,A_2})$ indicherà il prodotto relativo a $(A_1, \ldots, A_n)$

· Se f_i è una freccia in $\mathbb{C}(P, A_i)$, per ogni $i = 1, \ldots, n$, indicheremo con $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle^{\mathfrak{D}}$ l'unica freccia in $\mathbb{C}(A_1 \times_{\mathfrak{D}} \ldots \times_{\mathfrak{D}} A_n,\ P)$ tale che ${}^{\mathfrak{D}}\pi_i^{A_1,\ldots,A_n} \circ_{\mathbb{C}} \langle f_1, \ldots, f_2 \rangle^{\mathfrak{D}} = f_i$ per ogni i

· Se f_i è una freccia in $\mathbb{C}(A_i, B_i)$, per ogni $i = 1, \ldots, n$, si porrà $f_1 \times_{\mathfrak{D}} \ldots \times_{\mathfrak{D}} f_n := \langle\ f_1 \circ_{\mathbb{C}} \pi_1^{A_1,\ldots,A_n}, \ldots, f_n \circ_{\mathbb{C}} \pi_n^{A_1,\ldots,A_n}\ \rangle^{\mathfrak{D}}$; si osservi che tale freccia appartiene a $\mathbb{C}(A_1 \times_{\mathfrak{D}} \cdots \times_{\mathfrak{D}} A_n,\ B_1 \times_{\mathfrak{D}} \cdots \times_{\mathfrak{D}} B_n)$

Come di consueto, pedici e apici saranno messi, quando ciò non creerà ambiguità. Le convenzioni indicate dagli ultimi tre punti verranno usate, naturalmente, anche per una categoria con prodotti finiti $\mathfrak{D} = (\mathbb{C}, \mathit{prod})$.

Esempio 9.4.1.

- *In **Set** gli oggetti terminali sono esattamente i singoletti.*

- *Se A e B sono due insiemi, un prodotto di (A, B) in **Set** è dato dalla terna $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$, dove $A \times B$ è il prodotto cartesiano di A e B - ovvero $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ - π_1 è la proiezione canonica di $A \times B$ in A - ovvero la funzione con dominio $A \times B$ e codominio A definita da $\pi_1(a, b) = a$ - e π_2 è la proiezione canonica di $A \times B$ in B.*

9.5 Pullback

Definizione 9.5.1. *Sia $\mathbb{C}$ una categoria, A, B, D tre oggetti di $\mathbb{C}$, f_1 una freccia in $\mathbb{C}(B, A)$ e f_2 una freccia in $\mathbb{C}(D, A)$; un **pullback** di (f, g) in $\mathbb{C}$ è una terna (P, p_1, p_2) tale che*

- $P \in Ob_{\mathbb{C}}$

- $p_1 \in \mathbb{C}(P, B)$, $p_2 \in \mathbb{C}(P, D)$

- $f_1 \circ_{\mathbb{C}} p_1 = f_2 \circ_{\mathbb{C}} p_2$

- *Per ogni terna (Q, q_1, q_2) dove Q è un oggetto di $\mathbb{C}$, $q_1 \in \mathbb{C}(Q, B)$, $q_2 \in \mathbb{C}(Q, D)$ e tale che $f_1 \circ_{\mathbb{C}} q_1 = f_2 \circ_{\mathbb{C}} q_2$, esiste un'unica freccia $\psi \in \mathbb{C}(Q, P)$ tale che $p_1 \circ_{\mathbb{C}} \psi = q_1$ e $p_2 \circ_{\mathbb{C}} \psi = q_2$*

Un pullback (P, p_1, p_2) di una coppia di frecce (f_1, f_2) è rappresentato generalmente con un grafico del seguente tipo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & D \arrow[d, "f_2"] \\ B \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Si dimostra facilmente il seguente risultato.

Proposizione 9.5.1 (Unicità dei pullback)**.** *Siano A, B, D tre oggetti di una categoria $\mathbb{C}$, f_1 una freccia in $\mathbb{C}(B, A)$ e f_2 una freccia in $\mathbb{C}(D, A)$; siano (P, p_1, p_2) e (Q, q_1, q_2) due pullback di (f_1, f_2); sia ψ l'unica freccia da Q in P tale che $p_1 \circ_{\mathbb{C}} \psi = q_1$ e $p_2 \circ_{\mathbb{C}} \psi$; sia ϕ l'unica freccia da P in Q tale che $q_1 \circ_{\mathbb{C}} \phi$ e $q_2 \circ_{\mathbb{C}} \phi$; allora ψ e ϕ sono due isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.*

Esempio 9.5.1. *Il pullback in* ***Set*** *di due funzioni* $f_1 : B \to A$ *e* $f_2 : D \to A$ *è dato dalla terna* (P, p_1, p_2) *dove*

- $P := \{(b, d) \in B \times D : f_1(b) = f_2(d)\}$
- $p_1 : P \to B$ *è la proiezione di* P *sulla prima componente.*
- $p_2 : P \to D$ *è la proiezione di* P *sulla seconda componente.*

9.6 Esponenziali

Definizione 9.6.1. *Sia* $\mathfrak{D} = (\mathbb{C}, prod)$ *una categoria con prodotti finiti. Chiamiamo* ***esponenziale*** *da* A *in* B *in* $\mathfrak{D}$ *ogni coppia* (E, ev) *dove*

- E *è un oggetto di* $\mathbb{C}$
- $ev : E \times A \to B$ *è una freccia tale che, per ogni oggetto* C *e ogni freccia* $f : C \times A \to B$ *esiste un'unica freccia* $\lceil f \rceil : C \to E$ *tale che* $ev \circ (\lceil f \rceil \times id_A) = f$

$$\begin{tikzcd}
E \times A \arrow[r, "ev"] & B \\
C \times A \arrow[u, "\lceil f \rceil \times id_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Osservazione 9.6.1. *Supponiamo che esistano due esponenziali* (E_1, ev_1) *e* (E_2, ev_2) *da* A *in* B *in* $\mathfrak{D}$*. Per ogni freccia* $f : C \times A \to B$ *indichiamo con* $\lceil f \rceil^1$ *l'unica freccia di* C *in* E_1 *tale che* $ev_1 \circ (\lceil f \rceil^1 \times id_A) = f$ *e con* $\lceil f \rceil^2$ *l'unica freccia di* C *in* E_2 *tale che* $ev_2 \circ (\lceil f \rceil^2 \times id_A) = f$*. Allora* $\lceil ev_1 \rceil^2 : E_1 \to E_2$ *e* $\lceil ev_2 \rceil^1 : E_2 \to E_1$ *sono due isomorfismi tali che* $\lceil ev_1 \rceil^2 \circ \lceil ev_2 \rceil^1 = id_{E_2}$ *e* $\lceil ev_2 \rceil^1 \circ \lceil ev_1 \rceil^2 = id_{E_1}$

Osservazione 9.6.2. *Siano* A *e* B *due oggetti di* $\mathbb{C}$ *e* (E, ev) *un esponenziale da* A *in* B *in* $\mathfrak{D}$*; per ogni* $f : C \times A \to B$ *indichiamo con* $\lceil f \rceil$ *l'unica freccia di* C *in* E *tale che* $ev \circ (\lceil f \rceil \times id_A) = f$*; supponiamo che esista un isomorfismo* ψ *da un oggetto* E_1 *in* E*. Poniamo* $ev_1 := ev \circ (\psi \times id_A) : E_1 \times A \to B$*. Allora* (E_1, ev_1) *è un esponenziale di* A *in* B *in* $\mathfrak{D}$*. Inoltre, se per ogni freccia* $f : C \times A \to B$ *indichiamo con* $\lceil f \rceil^1$ *l'unica freccia dia* C *in* E_1 *tale che* $ev_1 \circ (\lceil f \rceil^1 \times id_A) = f$*, allora si ha che* $\lceil f \rceil^1 = \psi \circ \lceil f \rceil$*.*

Definizione 9.6.2. *Una* ***categoria cartesiana chiusa*** *è una quadrupla* $\mathfrak{D} = (\mathbb{C}, 1, prod, exp)$ *dove*

- · $(\mathbb{C}, 1, prod)$ *è categoria cartesiana.*
- · *exp è una funzione che ad ogni coppia di oggetti* (A, B) *di* $\mathbb{C}$ *associa un esponenziale* $exp(A, B)$ *da* A *in* B *di* $\mathbb{C}$

Convenzione: quando considereremo una categoria cartesiana chiusa ($\mathbb{C}$, 1, *prod*, *exp*) indicheremo con $(B^A, ev_{(A,B)})$ l'esponente da A in B.

Esempio 9.6.1. *In **Set** un esponenziale da A in B è dato dalla coppia* (B^A, ev)*, dove* B^A *è l'insieme delle funzioni da* A *in* B*, mentre* $ev : B^A \times A \to B$ *è la funzione definita da* $ev(f, a) := f(a)$*. Se* C *è un insieme e* $g : C \times A \to B$ *è una funzione, l'unica funzione* $\lceil g \rceil : C \to B^A$ *tale che* $ev \circ (\lceil g \rceil \times id_A) = g$ *è definita dall'uguaglianza* $\lceil g \rceil(c)(a) := g(c, a)$*, per ogni* $c \in C$*,* $a \in A$*.*

Capitolo 10

Iperdottrine e tripos

10.1 Definizione di iperdottrina

Inizia qui una assai breve introduzione alla teoria dei tripos; la stesura di queste note si basa in gran parte sulle dispense del corso di 'Logica 2' della laurea magistrale in matematica, anno 2020-2021, tenuto dal professore Samuele Maschio [16].

Definizione 10.1.1. *Se $(A, \leq)$ e $(B, \leq_1)$ sono pre-ordini, chiamiamo* ***aggiunzione*** *da $(A, \leq)$ in $(B, \leq_1)$ ogni coppia (F, G) dove F è una funzione da A in B e G è una funzione da B in A che rispetta la seguente proprietà*

$(\star)$ *$F(a) \leq_1 b$ se e solo se $a \leq G(b)$, per ogni $a \in A$ e $b \in B$*

Si osservi che

· (1) $a \leq G(F(a))$ per ogni $a \in A$ (basta usare $(\star)$ e la disuguaglianza $F(a) \leq_1 F(a)$)

· (2) $b \leq_1 F(G(b))$ per ogni $b \in B$ (basta usare $(\star)$ e la disuguaglianza $G(b) \leq G(b)$)

· (3) F è un omomorfismo di pre-ordini da $(A, \leq)$ in $(B, \leq_1)$. Infatti $a \leq a'$ implica $a \leq G(F(a'))$, implica $F(a) \leq_1 F(a')$ (per (1) e $(\star)$)

· (4) G è un omomorfismo di pre-ordini da $(B, \leq_1)$ in $(A, \leq)$. Infatti $b \leq_1 b'$ implica $b \leq_1 F(G(b'))$, implica $G(b) \leq G(b')$ (per (2) e $(\star)$)

Osservazione: essendo gli ordini, le pre-algebre di Heyting e le algebre di Heyting (identificabili con) particolari pre-ordini, la definizione di aggiunzione si estende in modo naturale anche a queste strutture.

Notazione: se H è un pre-ordine/una pre-algebra di Heyting, indichiamo con $\leq_H$ le relazione di pre-ordine relativa ad H.
Nel seguito a volte identificheremo, a livello di notazioni, le varie strutture con i loro insiemi soggiacenti, e i morfismi tra strutture con le funzioni soggiacenti.

Definizione 10.1.2. *Sia* $(\mathbb{C}, 1, prod)$ *una categoria cartesiana* (*Def. 9.4.4*). *Un'****iperdottrina del primo ordine*** *su* $(\mathbb{C}, 1, prod)$ *è una terna* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$ *dove*

- $\boldsymbol{p}$ *è un funtore da* $\mathbb{C}^{op}$ *in* ***Heyt***
- $\exists$ *è una funzione da* $Ar_{\mathbb{C}}$ *in* $Ar_{\boldsymbol{Set}}$ *che manda ciascuna freccia di tipo* $f :_{\mathbb{C}} A \to B$ *in una funzione di tipo* $\exists_f : \boldsymbol{p}(A) \to \boldsymbol{p}(B)$
- $\forall$ *è una funzione da* $Ar_{\mathbb{C}}$ *in* $Ar_{\boldsymbol{Set}}$ *che manda ciascuna freccia di tipo* $f :_{\mathbb{C}} A \to B$ *in una funzione di tipo* $\forall_f : \boldsymbol{p}(A) \to \boldsymbol{p}(B)$

La terna $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$ *per essere un'iperdottrina del primo ordine deve rispettare le seguenti proprietà:*

- $(\exists_f, \boldsymbol{p}(f))$ *è un'aggiunzione da* $\boldsymbol{p}(A)$ *in* $\boldsymbol{p}(B)$, *per ogni* $f :_{\mathbb{C}} A \to B$
- $(\boldsymbol{p}(f), \forall_f)$ *è un'aggiunzione da* $\boldsymbol{p}(B)$ *a* $\boldsymbol{p}(A)$, *per ogni* $f :_{\mathbb{C}} A \to B$
- *Proprietà di* ***Beck-Chevalley****: per ogni pullback in* $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{p}(P) \arrow[d, "\exists_\gamma"'] & \boldsymbol{p}(B) \arrow[l, "\boldsymbol{p}(\phi)"'] \arrow[d, "\exists_g"] \\ \boldsymbol{p}(A) & \boldsymbol{p}(C) \arrow[l, "\boldsymbol{p}(f)"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{p}(P) \arrow[d, "\forall_\gamma"'] & \boldsymbol{p}(B) \arrow[l, "\boldsymbol{p}(\phi)"'] \arrow[d, "\forall_g"] \\ \boldsymbol{p}(A) & \boldsymbol{p}(C) \arrow[l, "\boldsymbol{p}(f)"] \end{tikzcd}$$

Osservazione 10.1.1. *La definizione poteva essere ristretta imponendo la commutatività solo di uno (qualunque) dei due diagrammi; l'altro commuta di conseguenza.*

Osservazione 10.1.2. *Per quanto detto sulle aggiunzioni dei pre-ordini, dalla definizione abbiamo che*

· $\exists_f(a) \leq_{\boldsymbol{p}(B)} b$ *se e solo se* $a \leq_{\boldsymbol{p}(A)} \boldsymbol{p}(f)(b)$

· $\boldsymbol{p}(f)(b) \leq_{\boldsymbol{p}(A)} a$ *se e solo se* $b \leq_{\boldsymbol{p}(B)} \forall_f(a)$

per ogni $a \in \boldsymbol{p}(A)$, $b \in \boldsymbol{p}(B)$

10.2 Interpretazione in iperdottrine

In questa sessione fissiamo

· Una categoria cartesiana $\mathfrak{D} = (\mathbb{C}, 1, prod)$.
Per ogni n-upla $(A_1, \ldots, A_n)$ di oggetti di $\mathbb{C}$, indichiamo con $(A_1 \times \cdots \times A_n, \pi_1^{A_1,\ldots,A_n}, \ldots, \pi_n^{A_1,\ldots,A_n})$ il prodotto $prod(A_1, \ldots, A_n)$.

· Un'iperdottrina del primo ordine $(\mathbf{p}, \exists, \forall)$ su $\mathfrak{D}$

· Un linguaggio del primo ordine tipato $\mathcal{L} = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$

Osservazione 10.2.1. *Le definizioni relative ai linguaggi tipati del primo ordine sono state date al paragrafo 4.1.*
Si ricordi, in particolare, che abbiamo definito un linguaggio tipato del primo ordine in modo che ogni variabile appartenga ad un solo tipo.

Notazione: data una pre-algebra di Heyting H, incheremo con $|H|$ l'insieme soggiacente a H, con $\leq_H$ la relazione di pre-ordine di H, con $\wedge_H$ la funzione che fornisce gli inf binari di H, etc.

Definizione 10.2.1. *Un* ***contesto di variabili*** *di* $\mathcal{L}$ *è una scrittura del tipo* $[x_1, \ldots, x_n]$ *dove* $x_1, \ldots, x_n$ *sono variabili distinte di* $\mathcal{L}$ *(includiamo anche il contesto vuoto:* $[-]$*)*

Definizione 10.2.2. *Diciamo che un termine* t *ammette conteso* $[\underline{x}]$ *se* $Var(t) \subseteq \{\underline{x}\}$

Definizione 10.2.3. *Diciamo che una formula* ϕ *ammette contesto* $[\underline{x}]$ *se* $VL(\phi) \subseteq \{\underline{x}\}$

Indichiamo con $Term_{\mathcal{L}}(T)^{[\underline{x}]}$ l'insieme dei termini t di tipo T che ammettono contesto $[\underline{x}]$ (notazione già introdotta in 4.1.11)

Indichiamo con $Form_{\mathcal{L}}^{[\underline{x}]}$ l'insieme delle formule ϕ che ammettono contesto $[\underline{x}]$ (notazione già introdotta in 4.1.10).

Definizione 10.2.4. *Indichiamo con* $Term_{\mathcal{L}}(T)[\underline{x}]$ *l'insieme di tutte le scritture di tipo* $t[\underline{x}]$ *con* $t \in Term_{\mathcal{L}}(T)^{[\underline{x}]}$.
Gli elementi di $Term_{\mathcal{L}}[\underline{x}]$ *sono detti* ***termini*** *di* $\mathcal{L}$ ***nel contesto*** $[\underline{x}]$.

Definizione 10.2.5. *Indichiamo con* $Form_{\mathcal{L}}[\underline{x}]$ *l'insieme di tutte le scritture di tipo* $\phi[\underline{x}]$ *con* $\phi \in Form_{\mathcal{L}}^{[\underline{x}]}$.
Gli elementi di $Form_{\mathcal{L}}[\underline{x}]$ *sono detti* ***formule*** *di* $\mathcal{L}$ ***nel contesto*** $[\underline{x}]$.

Definizione 10.2.6. *Un'interpretazione* $|-|$ *di* $\mathcal{L}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$ *è il dato di una famiglia di funzioni del seguente tipo*

- $|-| : \boldsymbol{T} \to Ob_{\mathbb{C}}$
- $|-| : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{p}(1)$
- $|-| : \boldsymbol{R}(T_1, \ldots, T_n) \to \boldsymbol{p}(|T_1| \times \cdots \times |T_n|)$
- $|-| : \boldsymbol{K}(T) \to \mathbb{C}(1, |T|)$
- $|-| : \boldsymbol{F}(T_1, \ldots, T_n, T) \to \mathbb{C}(|T_1| \times \cdots \times |T_n|, |T|)$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *e* $T_1, \ldots, T_n, T \in \boldsymbol{T}$

Definizione 10.2.7. *Data un'interpretazione* $|-|$ *di* $\mathcal{L}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$, *per ogni lista di variabili* $\underline{x}$ *definiamo un oggetto* $|\underline{x}|$ *di* $\mathbb{C}$, *nel seguente modo:*

- $|\underline{x}| := 1$ *se* $\underline{x}$ *è la lista vuota*
- $|x| := |T|$, *per ogni* $T \in \boldsymbol{T}$ *e* $x \in \boldsymbol{V}_T$
- $|x_1, \ldots, x_n| := |x_1| \times \ldots \times |x_n|$ *se* $n \geq 2$

Definizione 10.2.8. *Data un'interpretazione* $|-|$ *di* $\mathcal{L}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$ *e una lista di variabili distinte* $x_1, \ldots, x_n$, *rimane associata univocamente una famiglia di funzioni*

$$|-| : Term_{\mathcal{L}}(S)[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{C}(|x_1, \ldots, x_n|, |S|)$$

al variare di $S \in \boldsymbol{T}$, *così definita:*

- $|x_i[x_1, \ldots, x_n]| = \pi_i^{|x_1|, \ldots, |x_n|}$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

· $|K[x_1, \ldots, x_n]| := |K| \circ !_{|x_1,\ldots,x_n|}$ *per ogni* $K \in \boldsymbol{K}(S)$

· $|f(t_1, \ldots, t_m)[x_1, \ldots, x_n]| := |f| \circ \langle |t_1[x_1, \ldots, x_n]|, \ldots, |t_m[x_1, \ldots, x_n]| \rangle$

per ogni $S_1, \ldots, S_m, S \in \boldsymbol{T}$, $t_1 \in Term_{\mathcal{L}}(S_1)^{[\underline{x}]}$, …, $t_m \in Term_{\mathcal{L}}(S_m)^{[\underline{x}]}$ *e* $f \in \boldsymbol{F}(S_1, \ldots, S_m, S)$

Si osservi che $|x[x]| = id_{|x|}$ per ogni variabile x.

Definizione 10.2.9. *Prima di proseguire con la prossima definizione, sarà bene stabilire alcune utili abbreviazioni:*

· (1) *Siano* A_1, …, A_n *degli oggetti di* $\mathbb{C}$*; poniamo:*

- $\pi^{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,A_n} := \langle \pi_1^{A_1,\ldots,A_n}, \ldots, \cancel{\pi_i^{A_1,\ldots,A_n}}, \ldots, \pi_n^{A_1,\ldots,A_n} \rangle$
- $\pi^{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,(A_j),\ldots,A_n} := \langle \pi_1^{A_1,\ldots,A_n}, \ldots, \cancel{\pi_i^{A_1,\ldots,A_n}}, \ldots, \cancel{\pi_j^{A_1,\ldots,A_n}}, \ldots, \pi_n^{A_1,\ldots,A_n} \rangle$
- …
- $\pi^{(A_1),\ldots,(A_n)} := !_{A_1 \times \cdots \times A_n}$ (*nel caso in cui tutti gli* A_i *siano messi all'interno di parentesi tonde*).

· (2) *Siano* A_1, …, A_n *degli oggetti di* $\mathbb{C}$*; poniamo:*

- $\exists_{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,A_n} := \exists_{\pi^{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,A_n}}$
- …
- $\forall_{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,A_n} := \forall_{\pi^{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,A_n}}$
- …
- $\boldsymbol{p}_{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,A_n} := \boldsymbol{p}(\pi^{A_1,\ldots,(A_i),\ldots,A_n})$
- …

· (3) *Se con* $\underline{A}$ *indichiamo una lista di oggetti* A_1, …, A_n *di* $\mathbb{C}$*, allora usiamo* $\underline{A}^{i_1,\ldots,i_k}$ *per indicare la lista* $\underline{A}$ *modificata mettendo* A_{i_1}, A_{i_2}, … *e* A_{i_k} *tra parentesi tonde.*

· (4) *Adottiamo la stessa convenzione del punto* (3) *per le liste di variabili; ad esempio, se* $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$*, allora* $\underline{x}^{i,j} \equiv x_1, \ldots, (x_i), \ldots, (x_j), \ldots, x_n$.

· (5) *Poniamo* $|x_1, \ldots, (x_i), \ldots, x_n| := |x_1|, \ldots, (|x_i|) \ldots, |x_n|$ *etc.*

· (6) *Poniamo*

- $\exists^{|-|}_{x_1,\ldots,(x_i),\ldots,x_n} := \exists_{|x_1|,\ldots,(|x_i|),\ldots,|x_n|}$
- $\forall^{|-|}_{x_1,\ldots,(x_i),\ldots,x_n} := \exists_{|x_1|,\ldots,(|x_i|),\ldots,|x_n|}$

– ...

Applicando tali definizioni abbiamo, ad esempio, che

· $\exists^{|-|}_{\underline{x}^i}$ *rappresenta la funzione* $\exists$ *applicata alla freccia* $\pi^{|x_1|,\ldots,(|x_i|),\ldots,|x_n|}$.

· $\exists^{|-|}_{\underline{x},(y)}$ *rappresenta la funzione* $\exists$ *applicata alla freccia* $\pi^{|x_1|,\ldots,|x_n|,(|y|)}$.

· $\boldsymbol{p}^{|-|}_{\underline{x}^i}$ *rappresenta il funtore* $\boldsymbol{p}$ *applicato alla freccia* $\pi^{|x_1|,\ldots,(x_i),\ldots,|x_n|}$.

· *etc.*

Poniamo infine

$$\mathbf{p}(f_1,\ldots,f_n) := \mathbf{p}(\langle f_1,\ldots,f_n\rangle)$$

per ogni n-upla di frecce di $\mathbb{C}$ con medesima sorgente.
Possiamo finalmente estendere il concetto di interpretazioni ai termini in contesto del linguaggio.

Definizione 10.2.10. *Data un'interpretazione* $|-|$ *di* $\mathcal{L}$ *in* $(\boldsymbol{p},\exists,\forall)$ *e una lista di variabili distinte* $x_1\ \ldots,\ x_n$*, rimane associata univocamente una funzione*

$$|-| : Form_{\mathcal{L}}[x_1,\ldots,x_n] \to \boldsymbol{p}(|x_1,\ldots,x_n|)$$

così definita:

· – $|\bot[\underline{x}]| := \bot_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)}$
  – $|P[\underline{x}]| := \boldsymbol{p}(!_{|\underline{x}|})(|P|)$
  – $|R(t_1,\ldots,t_m)[\underline{x}]| := \boldsymbol{p}(|t_1[\underline{x}]|,\ldots,|t_m[\underline{x}]|)(|R|)$
  – $|(u_1 =_S u_2)[\underline{x}]| := \boldsymbol{p}(|u_1[\underline{x}]|,|u_2[\underline{x}]|)(\exists_{\Delta_{|S|}}(\top_{\boldsymbol{p}(|S|)}))$

  per ogni $S_1,\ldots\ S_m$, $S\in\boldsymbol{T}$, $R\in\boldsymbol{R}(S_1,\ldots,S_n)$, $P\in\boldsymbol{P}$, $R\in\boldsymbol{R}(S_1,\ldots,S_n)$, $t_1\in Term_{\mathcal{L}}(S_1)^{[\underline{x}]}$, $\ldots$, $t_m\in Term_{\mathcal{L}}(S_m)^{[\underline{x}]}$, $u_1,u_2\in Term_{\mathcal{L}}(S)^{[\underline{x}]}$

· – $|(\phi\wedge\psi)[\underline{x}]| := |\phi[\underline{x}]| \wedge_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)} |\psi[\underline{x}]|$
  – $|(\phi\vee\psi)[\underline{x}]| := |\phi[\underline{x}]| \vee_{\boldsymbol{p}(|[\underline{x}]|)} |\psi[\underline{x}]|$
  – $|(\phi\to\psi)[\underline{x}]| := |\phi[\underline{x}]| \to_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)} |\psi[\underline{x}]|$

  per ogni $\phi,\psi\in Form^{[\underline{x}]}_{\mathcal{L}}$

· – $|\exists^S y\phi[\underline{x}]| := \exists^{|-|}_{\underline{x},(y)}(|\phi[\underline{x},y]|)$

– $|\forall^S y\phi[\underline{x}]| := \forall^{|-|}_{\underline{x},(y)}(|\phi[\underline{x},y]|)$

per ogni $S \in \boldsymbol{T}$, $y \in \boldsymbol{V}_S$, $y \neq x_i$ *per ogni* i, $\phi, \psi \in Form^{[\underline{x},y]}_{\mathcal{L}}$.

· – $|\exists^{T_i} x_i\phi[\underline{x}]| := \boldsymbol{p}^{|-|}_{\underline{x}^i}\ (\exists^{|-|}_{\underline{x}^i}(|\phi[\underline{x}]|))$

– $|\forall^{T_i} x_i\phi[\underline{x}]| := \boldsymbol{p}^{|-|}_{\underline{x}^i}\ (\forall^{|-|}_{\underline{x}^i}(|\phi[\underline{x}]|))$

per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi, \psi \in Form^{[\underline{x}]}_{\mathcal{L}}$

10.3 Modelli di una teoria in un'iperdottrina

In questo paragrafo fissiamo un linguaggio del primo ordine tipato $\mathcal{L}$, una teoria cartesiana $\mathfrak{D} = (\mathbb{C}, 1, prod)$ e un'iperdottrina $(\mathbf{p}, \exists, \forall)$ su $\mathfrak{D}$. Adottiamo le solite convenzioni notazionali riguardo i prodotti. Si tengano presenti le definizioni introdotte nel paragrafo 4.2 ($\vdash_{\mathcal{T}}$, dimostrazioni, consistenza etc.)

Definizione 10.3.1. *Sia* Γ *una lista (finita) di formule di* $\mathcal{L}$ *e* $[\underline{x}]$ *un contesto di variabili di* $\mathcal{L}$. *Diciamo che* Γ *ammette contesto* $[\underline{x}]$ *(o che* $[\underline{x}]$ *è un contesto per* Γ*) se tutte le formule di* Γ *ammettono contesto* $[\underline{x}]$ *(Def. 10.2.3).*

Definizione 10.3.2. *Una* ***lista di formule in contesto*** *è una scrittura di tipo* $\Gamma[\underline{x}]$ *dove* Γ *è una lista di formule e* $[\underline{x}]$ *è un contesto per* Γ

Definizione 10.3.3. *Sia* $|-|$ *un'interpretazione di* $\mathcal{L}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$. *Estendiamo* $|-|$ *alle liste di formule in contesto nel seguente modo:*

· $|\Gamma[\underline{x}]| := \top_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)}$ *se* Γ *è la lista vuota*

· $|\gamma_1, \ldots, \gamma_n\ [\underline{x}]| := |\gamma_1[\underline{x}]| \wedge_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)} \cdots \wedge_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)} |\gamma_n[\underline{x}]|$

Definizione 10.3.4. *Sia* $|-|$ *un'interpretazione di* $\mathcal{L}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$. *Sia* Γ *una lista di formule di* $\mathcal{L}$, ϕ *una formula di* $\mathcal{L}$ *e* $[\underline{x}]$ *un contesto di variabili per* Γ, ϕ. *Diciamo che il sequente* $\Gamma \vdash \phi$ *è soddisfatto dall'interpretazione* $|-|$ *nel contesto* $[\underline{x}]$ *se* $|\Gamma[\underline{x}]| \leq_{\boldsymbol{p}([\underline{x}])} |\phi[\underline{x}]|$*; in tal caso scriviamo*

$$\Gamma \models^{|-|}_{[\underline{x}]} \phi$$

Se Γ *è la lista vuota, possiamo scrivere semplicemente*

$$\models^{|-|}_{[\underline{x}]} \phi$$

Definizione 10.3.5. *Se* $[\underline{x}]$ *e* $[\underline{y}]$ *sono due contesti di variabili, scriviamo* $[\underline{x}] \subseteq [\underline{y}]$ *per dire che tutte le variabili di* $[\underline{x}]$ *sono presenti in* $[\underline{y}]$.

Osservazione 10.3.1. *Si osservi che, se* $[\underline{x}] \subseteq [\underline{y}]$, *allora*

- *Se* $\Gamma \models^{|-|}_{[\underline{x}]} \phi$ *è ben definita allora anche* $\Gamma \models^{|-|}_{[\underline{y}]} \phi$ *è ben definita*

- $\Gamma \models^{|-|}_{[\underline{x}]} \phi$ *implica* $\Gamma \models^{|-|}_{[\underline{y}]} \phi$

Definizione 10.3.6. *Sia* $\mathcal{T}$ *una teoria su* $\mathcal{L}$. *Sia* $|-|$ *un'interpretazione di* $\mathcal{L}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$. *L'interpretazione* $|-|$ *è detta* ***modello*** *della teoria* $\mathcal{T}$ *se per ogni assioma* ϕ *di* $\mathcal{T}$ *e ogni contesto* $[\underline{x}]$ *di* ϕ *si ha*

$$\models^{|-|}_{[\underline{x}]} \phi$$

ovvero

$$|\phi[\underline{x}]| = \top_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)}$$

(*chiaramente ciò è equivalente a richiedere che esista un contesto* $[\underline{x}]$ *contenente tutte e sole le variabili libere di* ϕ *tale che* $\models^{|-|}_{[\underline{x}]} \phi$)

Osservazione 10.3.2. *Si osservi che, banalmente, un modello di* $IL_{\mathcal{L}}$ *non è altro che un'interpretazione di* $\mathcal{L}$.

Teorema 10.3.1 (di validità o correttezza)**.** *Sia* $\mathcal{T}$ *una teoria su* $\mathcal{L}$. *Sia* $|-|$ *un modello di* $\mathcal{T}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \phi$, *allora esiste un contesto di variabili* $[\underline{x}]$ *per* Γ *e* ϕ *tale che*

$$\Gamma \models^{|-|}_{[\underline{x}]} \phi$$

In particolare per ogni teorema ϕ *di* $\mathcal{T}$ *esiste un contesto* $[\underline{x}]$ *di* ϕ *tale che* $|\phi[\underline{x}]| = \top_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)}$

Teorema 10.3.2 (di consistenza)**.** *Se* $|-|$ *è un modello di* $\mathcal{T}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$ *tale che* $\top_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)} \neq \bot_{\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)}$ *per ogni lista di variabili* $\underline{x}$, *allora* $\mathcal{T}$ *è consistente*

Dimostrazione. Se $\mathcal{T}$ è inconsistente allora $\vdash_{\mathcal{T}} \bot$ (Def. 4.2.2). Quindi esiste un contesto $[\underline{x}]$ tale che $\models^{|-|}_{[\underline{x}]} \bot$ (per il Teo. 10.3.1), ovvero $\top_{\mathbf{p}(|\underline{x}|)} \leq \bot_{\mathbf{p}(|\underline{x}|)}$, da cui $\top_{\mathbf{p}(|\underline{x}|)} = \bot_{\mathbf{p}(|\underline{x}|)}$ □

Osservazione 10.3.3. *Un modo equivalente di enunciare il precedente teorema di consistenza è il seguente: se* $|-|$ *è un modello di* $\mathcal{T}$ *in* $(\boldsymbol{p}, \exists, \forall)$ *tale che* $\boldsymbol{p}(|\underline{x}|)$ *ha almeno 2 elementi per ogni* $\underline{x}$, *allora* $\mathcal{T}$ *è consistente.*

10.4 Tripos

Definizione 10.4.1. *Sia* $\mathfrak{D} = (\mathbb{C}, 1, prod, exp)$ *una categoria cartesiana chiusa* (*Def. 9.6.2*). *Un **tripos** su* $\mathfrak{D}$ *è una sestupla* $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \boldsymbol{tt}, F)$ *tale che*

- $(\mathbb{P}, \exists, \forall)$ *è un'iperdottrina su* $(\mathbb{C}, 1, prod)$
- W *è un oggetto di* $\mathbb{C}$
- $\boldsymbol{tt}$ *è un elemento di* $\mathbb{P}(W)$
- F *è una famiglia di funzioni,* $(F_B)_{B \in Ob_{\mathbb{C}}}$*, dove - per ogni* $B \in Ob_{\mathbb{C}}$ *-* F_B *è una funzione da* $\mathbb{P}(B)$ *a* $\mathbb{C}(B, W)$ *tale che* $\mathbb{P}(F_B(\psi))(\boldsymbol{tt}) = \psi$ *per ogni* $\psi \in \mathbb{P}(B)$

La condizione aggiuntiva rispetto alla definizione di iperdottrina permette di interpretare i linguaggi tipati di ordine superiore; la nozione di tripos è inoltre strettamente legata a quella di **topos**, un particolare tipo di categoria cartesiana chiusa in cui è possibile 'mimare' tutte le usuali costruzioni utilizzate in **Set**; in particolare ogni tripos induce un topos e da ogni topos si può ottenere un tripos, il **tripos dei sottoggetti di un topos**. Per lo studio e l'approfondimento di tutte queste nozioni si rimanda a [6] e [17].

Definizione 10.4.2. *Siano* $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \boldsymbol{tt}, F)$ *e* $(\mathbb{P}_1, \exists_1, \forall_1, W_1, \boldsymbol{tt}_1, F_1)$ *due tripos su una categoria cartesiana chiusa* $\mathbb{C}$*; diciamo che essi sono tra loro **isomorfi** se esiste un isomorfismo naturale da* $\mathbb{P}_1$ *in* $\mathbb{P}$*.*

Definizione 10.4.3. *Sia* $\mathcal{L}$ *un linguaggio del primo ordine tipato e* $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \boldsymbol{tt}, F)$ *un tripos. Un'interpretazione di* $\mathcal{L}$ *in* $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \boldsymbol{tt}, F)$ *è un'interpretazione di* $\mathcal{L}$ *nell'iperdottrina* $(\mathbb{P}, \exists, \forall)$*, definita in 10.2.6.*

Capitolo 11

Tripos implicativi

11.1 Costruzione di un tripos implicativo

Per il seguito conviene avere presente i paragrafi 5.15 (prodotto di strutture implicative), 7.5 (algebre di Heyting indotte da un separatore) e 7.12 (separatore potenza uniforme). Si ricordino inoltre le definizioni di $\exists$ e $\forall$ relative alle strutture implicative, date nel paragrafo 5.11. Per alleggerire la scrittura, alcuni indici verranno omessi o semplificati.

Proposizione 11.1.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$ una struttura implicativa e Σ un separatore di H. Poniamo $H^I := \Pi_{i \in I}(H)$. Definiamo*

$$\mathbb{P}_{H,\Sigma}(I) := [{H^I}_{\Sigma[I]}]$$
$$\mathbb{P}_{H,\Sigma}(f)([(b_j)_{j \in J}]_{\Sigma[J]}) := [(b_{f(i)})_{i \in I}]_{\Sigma[I]}$$

per ogni coppia di insiemi I e J, per ogni funzione $f : I \rightarrow J$ e per ogni $(b_j)_{j \in J} \in A^J$.
*Allora $\mathbb{P}_{H,\Sigma}$ è un ben definito funtore da **Set**^{op} in **Heyt**.*

Dimostrazione.

Buona definizione di $\mathbb{P}$:

- Dimostriamo che $\mathbb{P}(f)$ è una funzione ben definita.
  Sia $[(c_j)_{j \in J}]_{\Sigma[J]} = [(b_j)_{j \in J}]_{\Sigma[J]}$; allora $\wedge_{j \in J}(b_j \rightarrow c_j) \in \Sigma$; dato che $\wedge_{j \in J}(b_j \rightarrow c_j) \leq \wedge_{i \in I}(b_{f(i)} \rightarrow c_{f(i)})$, segue che $\wedge_{i \in I}(b_{f(i)} \rightarrow c_{f(i)}) \in \Sigma$ e dunque $(b_{f(i)} \rightarrow c_{f(i)})_{i \in I} \in \Sigma[I]$
  Analogamente si dimostra che $(c_{f(i)} \rightarrow b_{f(i)})_{i \in I} \in \Sigma[I]$, da cui la buona definizione di $\mathbb{P}(f)$.

- Dimostriamo che $\mathbb{P}(f)$ è un omomorfismo di algebre di Heyting da $[H^J_{\Sigma[J]}]$ a $[H^I_{\Sigma[I]}]$.

– $\mathbb{P}(f)([(a_j)_j]_{\Sigma[J]}[\times_{H^J}]_{\Sigma[J]}[(b_j)_j]_{\Sigma[J]}) = \mathbb{P}(f)([(a_j)_j \times_{H^J} (b_j)_j]_{\Sigma[J]}) = \mathbb{P}(f)\ ([(a_j \times_H b_j)_j]_{\Sigma[J]}) = [(a_{f(i)} \times_H b_{f(i)})_{i\in I}]_{\Sigma[I]} = [(a_{f(i)})_i \times_{H^I} (b_{f(i)})_i]_{\Sigma[I]} = [(a_{f(i)})_i]_{\Sigma[I]}\ [\times_{H^I}]_{\Sigma[I]}\ [(b_{f(i)})_i]_{\Sigma[I]} = \mathbb{P}(f)([(a_i)_i]_{\Sigma[J]})\ [\times_{H^I}]_{\Sigma[I]}\ \mathbb{P}(f)([(a_i)_i]\ _{\Sigma[J]})$

– Il caso di $[+_{H^J}]_{\Sigma[J]}$ e $[\rightarrow_{H^J}]_{\Sigma[J]}$ è analogo.

– $\mathbb{P}(f)([\bot_{H^J}]_{\Sigma[J]}) = \mathbb{P}(f)[(\bot)_{j\in J}]_{\Sigma[J]} = [(\bot)_{i\in I}]_{\Sigma[I]} = [\bot_{H^I}]_{\Sigma[I]}$

Funtorialità:

· Siano $f : I \to J$ e $g : J \to K$ due funzioni tra insiemi; allora $(\mathbb{P}(g \circ f))([(a_k)_{k\in K}]_{\Sigma[K]}) = [(a_{((g\circ f)(i))_{i\in I}})]_{\Sigma[I]} = [(a_{g(f(i))})_{i\in I}]_{\Sigma[I]} = \mathbb{P}(f)$ $([(a_{g(j)})_{j\in J}]_{\Sigma[J]}) = \mathbb{P}(f)(\mathbb{P}(g)[(a_k)_{k\in K}]_{\Sigma[K]}) = (\mathbb{P}(f) \circ \mathbb{P}(g))([(a_k)_{k\in K}]_{\Sigma[K]})$

· $\mathbb{P}(id_I)([(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) = [(a_{id_I(i)})_{i\in I}]_{\Sigma[I]} = [(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}$ per ogni $[(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}$ $\in [A^I]_{\Sigma[I]}$, quindi $\mathbb{P}(id_I) = id_{[H^I_{\Sigma[I]}]} = id_{\mathbb{P}(I)}$

□

Proposizione 11.1.2. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \rightarrow)$ una struttura implicativa e Σ un separatore di H. Siano I e J due insiemi e f una funzione da I in J; consideriamo la funzione*

$$\begin{aligned} \forall^0_f : A^I &\to A^J \\ (a_i)_{i\in I} &\mapsto (\wedge_{i\in I: f(i)=j} a_i)_{j\in J} \end{aligned}$$

Definiamo $\forall_f$ come la funzione di $[A^I]_{\Sigma[I]}$ in $[A^J]_{\Sigma[J]}$ determinata da

$$\forall_f([(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) := [\forall^0_f(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[J]}.$$

Allora

· *$\forall_f$ è ben definito*

· *$\forall_f$ è un omomorfismo di ordini, dall'ordine parziale $([A^I], [\vdash_{\Sigma[I]}])$ all'ordine parziale $([A^J], [\vdash_{\Sigma[J]}])$*

· *$(\mathbb{P}_{H,\Sigma}(f), \forall_f)$ è un'aggiunzione, da $([A^J], [\vdash_{\Sigma[J]}])$ in $([A^I], [\vdash_{\Sigma[I]}])$ (con riferimento alla Def. 10.1.1)*

Dimostrazione.

Buona definizione: osserviamo che $a_i \to b_i \leq \wedge_{i:f(i)=j}(a_i) \to b_i$ per ogni $j \in J$ e per ogni $i \in I$ tale che $f(i) = j$ (per anti-monotonia di $\rightarrow$), da cui segue che

(1) $\wedge_{j\in J} \wedge_{i\in I: f(i)=j}(a_i \to b_i) \leq \wedge_{j\in J} \wedge_{i\in I: f(i)=j}\ (\wedge_{i\in I: f(i)=j}(a_i) \to b_i)$

Per la definizione di struttura implicativa e di $\forall^0_f$, abbiamo che

$$(2)\ \wedge_{j\in J} \wedge_{i\in I: f(i)=j} (\wedge_{i\in I: f(i)=j} (a_i) \to b_i) =$$
$$\wedge_{j\in J} (\wedge_{i\in I: f(i)=j}(a_i) \to \wedge_{i\in I: f(i)=j}(b_i)) =$$
$$\wedge_{j\in J}(\forall^0_f((a_i)_{i\in I}) \to \forall^0_f((b_i)_{i\in I}))$$

Inoltre vale che

$$(3)\ \wedge_{i\in I}(a_i \to b_i) \leq \wedge_{j\in J} \wedge_{i\in I: f(i)=j} (a_i \to b_i)$$

Da (1), (2) e (3) segue che

$$(4)\ \wedge_{i\in I}(a_i \to b_i) \leq \wedge_{j\in J}(\forall^0_f((a_i)_{i\in I}) \to \forall^0_f((b_i)_{i\in I}))$$

Supponiamo ora che $(a_i)_i \vdash_{\Sigma[I]} (b_i)_i$ ovvero $(a_i \to b_i)_{i\in I} \in \Sigma[I]$; dunque esiste $\sigma \in \Sigma$ tale che $\sigma \leq \wedge_{i\in I}(a_i \to b_i)$; ma allora, per la (4), abbiamo che $\sigma \leq \wedge_{j\in J}(\forall^0_f((a_i)_{i\in I}) \to \forall^0_f((b_i)_{i\in I}))$ e quindi $\forall^0_f((a_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma[I]} \forall^0_f((b_i)_{i\in I})$.
Per simmetria si ha pure $(b_i)_i \vdash_{\Sigma[I]} (a_i)_i$ implica $\forall^0_f((b_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma[I]} \forall^0_f((a_i)_{i\in I})$ e ciò ci permette di concludere che la funzione $\forall_f$ è ben definita.

Proprietà di omomorfismo di ordini e aggiunzione: sia $[(a_i)_{i\in I}] \in [A^I]$ e $[(b_j)_{j\in J}] \in [A^J]$; allora

$\mathbb{P}(f)([(b_i)_{i\in I}])\ [\vdash_{\Sigma[I]}]\ [(a_i)_{i\in I}]$ se e solo se $\wedge_{i\in I}(b_{f(i)} \to a_i) \in \Sigma$ se e solo se $\wedge_{j\in J} \wedge_{i: f(i)=j}(b_j \to a_i) \in \Sigma$ se e solo se $\wedge_{j\in J}(b_j \to \wedge_{i: f(i)=j}(a_i)) \in \Sigma$ se e solo se $[(b_j)_{j\in J}]\ [\vdash_{\Sigma[J]}]\ \forall_f([(a_i)_{i\in I}])$

□

Proposizione 11.1.3. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ una struttura implicativa e Σ un separatore di H. Siano I e J due insiemi e f una funzione da I in J; consideriamo la funzione*

$$\exists^0_f : A^I \to A^J$$
$$(a_i)_{i\in I} \mapsto (\exists_{i\in I: f(i)=j} a_i)_{j\in J}$$

dove $\exists_{i: f(i)=j} a_i := \exists(\{a_i : i \in I, f(i) = j\}) = \wedge_{i\in I: f(i)=j} \wedge_{c\in A} ((a_i \to c) \to c)$
Definiamo $\exists_f$ come la funzione da $[A^I]_{\Sigma[I]}$ a $[A^J]_{\Sigma[J]}$ determinata da

$$\exists_f([(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) := [\exists^0_f((a_i)_{i\in I})]_{\Sigma[J]}$$

Allora

- $\exists_f$ *è ben definito*
- $\exists_f$ *è un omomorfismo di ordini, dall'ordine parziale* $([A^I], [\vdash_{\Sigma[I]}])$ *all'ordine parziale* $([A^J], [\vdash_{\Sigma[J]}])$
- $(\exists_f, \mathbb{P}_{H,\Sigma}(f))$ *è un'aggiunzione, da* $([A^I], [\vdash_{\Sigma[I]}])$ *in* $([A^J], [\vdash_{\Sigma[J]}])$

Dimostrazione.

<u>*Premessa*</u>: siano $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I} \in A^I$; supponiamo che $s \leq \wedge_{i\in I}(a_i \to b_i)$. Fissiamo $j \in J$ e $i \in I$ tale che $f(i) = j$ e $c \in A$. Osserviamo allora la seguente catena di conseguenze:

$$((a_i \to c) \to c) \cdot (a_i \to c) \leq c$$
$$((a_i \to c) \to c) \cdot (a_i \to (b_i \to c) \cdot b_i) \leq c$$
$$((a_i \to c) \to c) \cdot (a_i \to (b_i \to c) \cdot ((a_i \to b_i) \cdot a_i)) \leq c$$
$$((a_i \to c) \to c) \cdot (a_i \to (b_i \to c) \cdot (s \cdot a_i)) \leq c$$

Poniamo $d_{j,i,c} := ((a_i \to c) \to c)$ e $e_{j,i,c} := b_i \to c$.
Allora la precedente diventa:

$$d_{j,i,c} \cdot (a_i \to e_{j,i,c} \cdot (s \cdot a_i)) \leq c$$

Osserviamo la seguente catena di conseguenze:

$$d_{j,i,c} \cdot (a_i \to e_{j,i,c} \cdot (s \cdot a_i)) \leq c$$
$$d_{j,i,c} \cdot \wedge_{g\in A}(g \to e_{j,i,c} \cdot (s \cdot g)) \leq c$$
$$\wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot \wedge_{g\in A}(g \to e \cdot (s \cdot g))) \cdot d_{j,i,c} \cdot e_{j,i,c} \leq c$$
$$\wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot \wedge_{g\in A}(g \to e \cdot (s \cdot g))) \cdot d_{j,i,c} \leq e_{j,i,c} \to c$$
$$\wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot \wedge_{g\in A}(g \to e \cdot (s \cdot g))) \cdot \exists^0_f((a_i)_{i\in I})_j \leq e_{j,i,c} \to c$$

Per arbitrarietà di $c \in A$ e $i \in f^{-1}(j)$ abbiamo:

$$\wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot \wedge_{g\in A}(g \to e \cdot (s \cdot g))) \cdot \exists^0_f((a_i)_{i\in I})_j \leq \exists^0_f((b_i)_{i\in I})_j$$

e dunque

$$\wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot \wedge_{g\in A}(g \to e \cdot (s \cdot g))) \leq \exists^0_f((a_i)_{i\in I})_j \to \exists^0_f((b_i)_{i\in I})_j$$

da cui

$$\wedge_{d,e\in A}(d \to e \to d \cdot \wedge_{g\in A}(g \to e \cdot (s \cdot g))) \leq \wedge_{j\in J}(\exists^0_f((a_i)_{i\in I})_j \to \exists^0_f((b_i)_{i\in I})_j)$$

ovvero:

$$(\lambda xy.x(\lambda z.y(sz)))^{\star H} \leq \wedge_{j\in J}\ (\exists^0_f((a_i)_{i\in I})_j \to \exists^0_f((b_i)_{i\in I})_j)$$

Chiamiamo s_1 l'elemento di A che si trova a sinistra della disuguaglianza; essendo s_1 un elemento di tipo $t[s/w]^{\star H}$, con $t \in \Lambda^{[w]}_{\varnothing}$ e s un elemento di Σ, s_1 deve necessariamente appartenere a Σ (Prop. 7.1.3).

<u>*Buona definizione*</u>: sia $(a_i)_{i\in I} \vdash_{\Sigma[I]} (b_i)_{i\in I}$, ovvero esiste $s \in \Sigma$ tale che $s \leq \wedge_{i\in I}(a_i \to b_i)$; per quanto visto nella premessa, ciò implica che esiste $s_1 \in \Sigma$ tale che $s_1 \leq \wedge_{j\in J}(\exists^0_f((a_i)_{i\in I})_j \to \exists^0_f((b_i)_{i\in I})_j)$, da cui segue che $\exists^0_f((a_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma[J]} \exists^0_f((b_i)_{i\in I})$; per un argomento analogo, si ha che, se $(b_i)_{i\in I} \vdash_{\Sigma[I]} (a_i)_{i\in I}$ allora $\exists^0_f((b_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma[J]} \exists^0_f((a_i)_{i\in I})$; da ciò la buona definizione di $\exists_f$

<u>*Proprietà di omomorfismo di ordini e aggiunzione*</u> : sia $[(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]} \in [A^I]_{\Sigma[I]}$ e $[(b_j)_{j\in J}]_{\Sigma[I]} \in [A^J]_{\Sigma[J]}$; allora

$[(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]} \leq \mathbb{P}(f)((b_j)_{j\in J})$ se e solo se $\wedge_{i\in I}(a_i \to b_{f(i)}) \in \Sigma$ se e solo se $\wedge_{j\in J}$ $\wedge_{i\in I:f(i)=j}(a_i \to b_j) \in \Sigma$ se e solo se $\wedge_{j\in J}((\exists_{i\in I:f(i)=j}a_i) \to b_i) \in \Sigma$ se e solo se $\wedge_{j\in J}(\exists^0_f((a_i)_{i\in I})_j \to b_j) \in \Sigma$ se e solo se $\exists_f([(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) \leq [(b_j)_{j\in J}]_{\Sigma[J]}$

(il terzo 'se e solo se' deriva dalle proprietà di $\exists$ ed è lasciato come esercizio).

□

Teorema 11.1.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ una struttura implicativa e Σ un separatore di H. Poniamo $W := A$, $\boldsymbol{tt} := [id_A]_{\Sigma[A]} \in \mathbb{P}(\Sigma)$; per ogni insieme I, definiamo la funzione $F_I : \mathbb{P}(I) \to W^I$, ponendo*

$$F_I([\psi]_{\Sigma[I]}) := \psi$$

Allora $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \boldsymbol{tt}, (F_I)_{I\in Ob_{\mathbf{Set}}})$ è un tripos.

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato che $(\exists, \mathbb{P})$ e $(\mathbb{P}, \forall)$ sono aggiunzioni. Mostriamo che vale la proprietà di Beck-Chevalley: supponiamo di avere il seguente diagramma pullback in **Set**:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & J \arrow[d, "g"] \\ K \arrow[r, "\phi"'] & L \end{tikzcd}$$

Per mostrare la validità della proprietà di Beck-Chevalley, ci basta mostrare che il seguente commuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(I) \arrow[r, "\forall_f"] & \mathbb{P}(J) \\ \mathbb{P}(K) \arrow[u, "\mathbb{P}(\gamma)"] \arrow[r, "\forall_\phi"'] & \mathbb{P}(L) \arrow[u, "\mathbb{P}(g)"'] \end{tikzcd}$$

Sappiamo che, a meno di isomorfismo, valgono le seguenti identità (Esempio 9.5.1):

- $I = \{(j,k) \in J \times K : \phi(k) = g(j)\}$
- $f(j,k) = j$ per ogni $(i,j) \in I$
- $\gamma(j,k) = k$ per ogni $(i,j) \in I$

Dunque, per ogni $[(a_k)_{k\in K}] \in \mathbb{P}(K)$ abbiamo:

$$(\forall_f \circ \mathbb{P}(\gamma))([(a_k)_{k\in K}]_{\Sigma[K]}) = \forall_f([(a_{\gamma(j,k)})_{(j,k)\in I}]_{\Sigma[I]}) = \forall_f([(a_k)_{(j,k)\in I}]_{\Sigma[I]}) =$$
$$[(\bigwedge_{(j,k)\in I: f(j,k)=j_1} a_k)_{j_1\in J}]_{\Sigma[J]} = [(\bigwedge_{(j,k)\in I: j=j_1} a_k)_{j_1\in J}]_{\Sigma[J]} = [(\bigwedge_{(j,k)\in I} a_k)_{j\in J}]_{\Sigma[J]}$$
$$= [(\bigwedge_{j\in J, k\in K: g(j)=\phi(k)} a_k)_{j\in J}]_{\Sigma[J]} = [((\forall^0_\phi((a_k)_{k\in K}))_{g(j)})_{j\in J}]_{\Sigma[J]} =$$
$$\mathbb{P}(g)\ [\forall^0_\phi((a_k)_{k\in K})]_{\Sigma[L]} = \mathbb{P}(g)(\forall_\phi([(a_k)_{k\in K}]_{\Sigma[K]})) = (\mathbb{P}(g) \circ \forall_\phi)[(a_k)_{k\in K}]_{\Sigma[K]}$$

Dimostriamo infine che W, $\mathbf{tt}$ e $(F_I)_{I\in Ob_{\mathbf{Set}}}$ soddisfano le proprietà richieste; sia I un insieme e $[\psi]_{\Sigma[I]} \in \mathbb{P}(I)$; per maggior chiarezza di notazioni, scriviamo id_A come $(c_a)_{a\in A}$, con $c_a := a$ per ogni $a \in A$; allora

$$\mathbb{P}(F_I([\psi]_{\Sigma[I]}))(\mathbf{tt}) = \mathbb{P}(\psi)([(c_a)_{a\in A}]_{\Sigma[A]}) = [(c_{\psi(i)})_{i\in I}]_{\Sigma[I]}$$
$$= [(\psi(i))_{i\in I}]_{\Sigma[I]} = [\psi]_{\Sigma[I]}$$

□

Definizione 11.1.1. *Ricordiamo che un'algebra implicativa è una coppia* $(H,\ \Sigma)$ *in cui* H *è una struttura implicativa e* Σ *è un separatore di* H (*Def. 7.1.3*).
Chiamiamo ***tripos implicativo*** *indotto dall'algebra implicativa* $(H,\ \Sigma)$ *il tripos descritto nella precedente proposizione.*
Se $\mathcal{L}$ *è un linguaggio tipato del primo ordine, chiamiamo interpretazione di* $\mathcal{L}$ *in* $(H,\ \Sigma)$ *ogni interpretazione di* $\mathcal{L}$ *nel tripos implicativo indotto da* $(H,\ \Sigma)$ (*la definizione di interpretazione in un tripos è stata data in 10.4.3*)

In un recente articolo [20] il matematico Alexandre Miquel ha dimostrato il seguente importante risultato:

Teorema 11.1.2. *Ogni tripos su* ***Set*** *è isomorfo* (*Def. 10.4.2*) *a un tripos implicativo.*

Osservazione 11.1.1. *Sia* (H, Σ) *un'algebra implicativa classica* (*Def. 7.1.3*), *ovvero sia* H *una struttura implicativa e* Σ *un suo separatore classico* (*Def. 7.1.2*). *Sia* $\mathcal{L}$ *un linguaggio del primo ordine tipato e* $|-|$ *un'interpretazione del linguaggio* $\mathcal{L}$ *in* $(H,\ \Sigma)$*; dato che* Σ *è classico* (*in* H), *segue che* $\Sigma[I]$ *è classico* (*in* H^I) *per ogni insieme* I (*Osservazione 7.12.5*) *e dunque* $[H_{\Sigma[I]}]$ *è un'algebra di Boole per ogni insieme* I (*Prop. 6.3.1*). *Abbiamo dunque che* $|(\phi\vee\neg\phi)[\underline{x}]| = |\phi[\underline{x}]| \vee_G \neg_G|\phi[\underline{x}]| = \top_G$ *- con* $G := [H^{|\underline{x}|}_{\Sigma[|\underline{x}|]}]$ *- per ogni formula* ϕ *di* $\mathcal{L}$ *e per ogni contesto di variabili* $[\underline{x}]$ *di* ϕ.
In altri termini: le interpretazioni di linguaggi in algebre implicative classiche soddisfano il principio del terzo escluso (*in particolare i modelli di una teoria* $\mathcal{T}$ *su* $\mathcal{L}$ *in un'algebra implicativa classica soddisfano il principio del terzo escluso, anche se la teoria* $\mathcal{T}$ *non dovesse dimostrare alcun teorema di tipo* $\phi \vee \neg\phi$, *in deduzione naturale intuizionista*).

Definizione 11.1.2. *Chiamiamo* ***tripos implicativo classico*** *ogni tripos implicativo associato a un'algebra implicativa classica* (H, Σ) (*ovvero un'algebra implicativa* (H, Σ) *tale che* $\propto_H \in \Sigma$).

Osservazione 11.1.2 (tripos implicativi e teorema di consistenza)**.** *Il teorema di consistenza per le iperdottrine* (*Teo. 10.3.2*), *nel caso dei tripos implicativi, si traduce nel seguente modo: se* $\mathcal{T}$ *è una teoria su* $\mathcal{L}$ *e se* $|-|$ *è un modello di* $\mathcal{T}$ *in un tripos* $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \boldsymbol{tt}, (F_I)_{I \in Ob_{\boldsymbol{Set}}})$ *indotto da un'algebra implicativa consistente* (H, Σ), *allora* $\mathcal{T}$ *è consistente* (*si usi l'Oss. 7.12.6*).

Osservazione 11.1.3 (Il diagramma fondamentale)**.** *Sia* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$ *una struttura implicativa e* Σ *un separatore di* H. *Sia* I *un insieme. Allora in* ***Set*** *abbiamo il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} A^I \arrow[r, "\gamma_I"] \arrow[d, "\beta_I"'] & {[A^I]_{\Sigma[I]}} \arrow[d, "\rho_I"] \arrow[dl, "\delta_I"'] \\ {[A^I]_{\Sigma^I}} \arrow[r, "\alpha_I"'] & ([A]_\Sigma)^I \end{tikzcd}$$

dove le funzioni α, β, γ, δ *e* ρ (*omettiamo i pedici*) *sono determinate dalle seguenti uguaglianze:*

- $\alpha([(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) := ([a_i]_\Sigma)_{i\in I}$
- $\beta((a_i)_{i\in I}) := [(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma^I}$
- $\gamma((a_i)_{i\in I}) := [(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}$
- $\delta([(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) := [(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma^I}$
- $\rho([(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) := ([a_i]_\Sigma)_{i\in I}$

per ogni $(a_i)_{i\in I}$.
Si osservi che

- *Tutte le funzioni del diagramma sono suriettive* (*ovvio*).
- *Il diagramma commuta* (*semplice verifica*).
- α *determina un isomorfismo di algebre di Heyting da* $[H^I_{\Sigma^I}]$ *in* $([H_\Sigma])^I$, *per quanto visto trattando del prodotto di separatori* (*Prop. 7.11.4*).

Vale il seguente risultato:

Proposizione 11.1.4. *Con le notazioni e le ipotesi di sopra, i seguenti asserti sono equivalenti:*

1. *ρ è iniettiva*

2. *ρ determina un isomorfismo di algebre di Heyting, da $\mathbb{P}_{H,\Sigma}(I)$ a $([H_\Sigma])^I$ (l'algebra di Heyting prodotto)*

3. $\Sigma[I] = \Sigma^I$

4. *Σ è chiuso rispetto agli inf arbitrari su I*

Dimostrazione.
(1) implica (2) : dato che ρ è iniettiva e suriettiva, essa è una funzione biiettiva; d'altra parte, ρ è pure un omomorfismo di algebre di Heyting - da $\mathbf{P}(A)$ a $[H_\Sigma]^I$ - e dunque è pure un isomorfismo di algebre di Heyting, perché gli isomorfismi di algebre di Heyting coincidono con gli omomorfismi biiettivi di algebre di Heyting (Prop. 3.2.3).
(2) implica (1) : Tutti gli isomorfismi di algebre di Heyting sono biiettivi e quindi, in particolare, iniettivi.
(2) implica (3) : dato che ρ e α sono iso, si deve necessariamente avere che anche δ è un iso, dall'algebra di Heyting $[H^I_{\Sigma[I]}]$ all'algebra di Heyting $[H^I_{\Sigma^I}]$; da ciò segue che $\Sigma[I] = \Sigma^I$ (altrimenti si avrebbe $\Sigma[I] \subset \Sigma^I$, e dunque ci sarebbe un elemento diverso dal minimo che viene mandato nel minimo da δ, il che impedirebbe a δ di essere un iso).
(3) implica (2) : Se $\Sigma[I] = \Sigma^I$, allora δ è l'identità di $[A^I]_{\Sigma^I}$ in sé e quindi, in particolare, è un isomorfismo di algebre di Heyting; dato che anche α è un isomorfismo, segue che ρ è un isomorfismo, in quanto composizione di isomorfismi.
(3) implica (4) e (4) implica (3) : questa equivalenza è già stata mostrata parlando del generatore potenza uniforme (Prop. 7.12.2). □

11.2 I tripos quasi-implicativi

Sinora ci siamo concentrati sulle strutture implicative, accennando vagamente al fatto che le costruzioni sin qui viste possono essere estese al caso di strutture quasi-implicative (Def. 5.1.3). Vediamo di approfondire questo punto. Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \rightarrow)$ una struttura quasi-implicativa (Def. 5.1.3). Modifichiamo le definizioni viste nel seguente modo:

· $a \cdot b := \{c \in A : a \leq b \rightarrow c\}$ se l'insieme a destra dell'uguaglianza è non vuoto e se $a, b \neq \uparrow$, altrimenti si pone $a \cdot b := \uparrow$, per ogni $a, b \in A \cup \{\uparrow\}$

· Sia f una funzione da A in $A \cup \{\uparrow\}$. Indichiamo con $dom(f)^\downarrow$ l'insieme degli elementi di A tali che $f(a) \neq \uparrow$. Allora poniamo

$$\boldsymbol{\lambda} f := \wedge_{a \in dom(f)^{\downarrow}} (a \to f(a))$$

Si osservi che l'elemento $\boldsymbol{\lambda} f$ è sempre ben definito.

· Definiamo la funzione $\star$ da $\Lambda_A^{[-]}$ a $A \cup \{\uparrow\}$ nel seguente modo:

  – $a^\star := a$ per ogni $a \in A$
  – $(tu)^\star = t^\star \cdot u^\star$
  – $(\lambda x.t)^\star := \boldsymbol{\lambda}(t[-/x]^\star)$

· Poniamo $\propto_H := \wedge_{a,b \in A}(((a \to b) \to a) \to a)$

È facile verificare che, nel caso di una struttura implicativa (totale) tali definizioni (ristrette ad A) coincidono con quelle date introducendo le strutture implicative.
I risultati riguardanti le valutazioni dei combinatori rimangono ancora validi.
I separatori sono definiti allo stesso modo che nel caso delle strutture implicative ed essi inducono una struttura di pre-algebra di Heyting, analogamente a quanto visto per le strutture implicative. Chiamiamo **algebra quasi-implicativa** ogni coppia (H, Σ) in cui H è una struttura quasi-implicativa e Σ un suo separatore.
A questo punto si procede a dare la definizione di tripos associato a un'algebra quasi-implicativa (H, Σ); la definizione è del tutto analoga a quella di tripos implicativo.

Proposizione 11.2.1. *Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \perp, \top, \to)$ una struttura quasi-implicativa e $\underline{H}$ il* ***completamento*** *di H, ovvero la settupla $(A \cup \{\top'\}, \leq', \wedge', \vee', \perp, \top', \to')$ dove:*

· *$\top' \notin A$ è un nuovo elemento (ad esempio: $\top' := \{A\}$)*

· *$a \sqcap' b := a \sqcap b$ se $a, b \neq \top'_H$ e $\sqcap \in \{\wedge, \vee, \to\}$*

· *$a \vee' b := \top'$ se $a = \top'$ o $b = \top'$*

· *$\top' \wedge' a := a =: a \wedge' \top'$*

· *$\top' \to' b := \top \to b$*

· *$a \to' \top' := \top'$*

· *$\wedge'(D) := \wedge(D \setminus \{\top'\})$ se $\{\top'\} \neq D \subseteq A \cup \{\top'\}$*

· *$\wedge'(\{\top'\}) := \top'$*

- $\vee'(D) := \vee(D)$ *se* $D \subseteq A$
- $\vee'(D) := \top'$ *se* $\top' \in D \subseteq A \cup \{\top'\}$

per ogni $a, b \in A \cup \{\top'\}$.
Allora

- (0) $\underline{H}$ *è una struttura implicativa*
- (1) $a \leq b$ *se e solo se* $a \leq' b$, *per ogni* $a, b \in A$
- (2) $\wedge_{i \in I}(a_i) = \wedge'_{i \in I}(a_i)$ *per ogni* $I \neq \varnothing$ *e per ogni* $(a_i)_{i \in I} \in A^I$
- (3) $a \to b = a \to' b$ *per ogni* $a, b \in A$
- (4) $\boldsymbol{K}^{\star H} = \boldsymbol{K}^{\star \underline{H}}$
- (5) $\boldsymbol{S}^{\star H} = \boldsymbol{S}^{\star \underline{H}}$
- (6) *Se* Σ *è un separatore di* H, *allora* $\Sigma \cup \{\top'\}$ *è un separatore di* $\underline{H}$

Dimostrazione. Per (0) basta una semplice verifica; (1), (2) e (3) sono ovvi. Proviamo il punto (4): per definizione di $\star\underline{H}$ abbiamo che

$$\boldsymbol{K}^{\star \underline{H}} = \wedge'_{a,b \in A \cup \{\top'\}}(a \to' b \to' a)$$

e dunque

$$\boldsymbol{K}^{\star \underline{H}} = (\wedge'_{a,b \in A}(a \to' b \to' a)) \wedge' (\wedge'_{b \in A}(\top' \to' b \to' \top')) \wedge' (\wedge'_{a \in A}(a \to' \top' \to' a)) \wedge' (\top' \to' \top' \to' \top')$$

Osserviamo che

$$\wedge'_{a,b \in A}(a \to' b \to' a) = \wedge'_{a,b \in A}(a \to' b \to a) = \wedge'_{a,b \in A}(a \to b \to a) = \wedge_{a,b \in A}(a \to b \to a)$$

$$\wedge'_{b \in A}(\top' \to' b \to' \top') \geq' \wedge'_{b \in A}(\top' \to' \top' \to' \top') = \wedge'_{b \in A}(\top' \to' \top') = \wedge'_{b \in A}(\top') = \top', \text{ da cui } \wedge'_{b \in A}(\top' \to' b \to' \top') = \top'$$

$$\wedge'_{a \in A}(a \to' \top' \to' a) = \wedge'_{a \in A}(a \to' \top \to a) = \wedge'_{a \in A}(a \to \top \to a) = \wedge_{a \in A}(a \to \top \to a)$$

$$\top' \to' \top' \to' \top' = \top' \to' \top' = \top'$$

Quindi, sostituendo:

- $\boldsymbol{K}^{\star \underline{H}} = (\wedge_{a,b \in A}(a \to b \to a)) \wedge' \top' \wedge' (\wedge_{a \in A}(a \to \top \to a)) \wedge' \top'$

Possiamo concludere grazie alla seguente sequenza di implicazioni

- $\boldsymbol{K}^{\star\underline{H}} = (\wedge_{a,b\in A}(a \to' b \to' a)) \wedge' \top' \wedge' (\wedge_{a\in A}(a \to \top \to a)) \wedge' \top'$
- $\boldsymbol{K}^{\star\underline{H}} = (\wedge_{a,b\in A}(a \to b \to a)) \wedge' (\wedge_{a\in A}(a \to \top \to a))$
- $\boldsymbol{K}^{\star\underline{H}} = (\wedge_{a,b\in A}(a \to b \to a)) \wedge (\wedge_{a\in A}(a \to \top \to a))$
- $\boldsymbol{K}^{\star\underline{H}} = \wedge_{a,b\in A}(a \to b \to a)$
- $\boldsymbol{K}^{\star\underline{H}} = \boldsymbol{K}^{\star H}$

Il punto (5) è analogo al (4). Il punto (6) è una conseguenza diretta della definizione di separatore e dei precedenti punti. □

Definizione 11.2.1. $(\underline{H}, \Sigma \cup \{\top'\})$ *è detto **completamento** di* (H, Σ)

Proposizione 11.2.2. *Sia (H, Σ) un'algebra quasi-implicativa, con $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$; sia $(\underline{H}, \Sigma \cup \{\top'\})$ il completamento di (H, Σ), con $\underline{H} = (A \cup \{\top'\}, \leq', \wedge', \vee', \bot, \top', \to')$. Per ogni insieme I indichiamo con η_I la funzione da A^I in $(A \cup \{\top'\})^I$ che manda $\alpha : I \to A$ in $\phi \circ \alpha : I \to A \cup \{\top'\}$, dove ϕ è la funzione di inclusione di A in $A \cup \{\top'\}$. Sia $\boldsymbol{P}$ il tripos implicativo associato ad (H, Σ) e $\underline{\boldsymbol{P}}$ il tripos implicativo associato a $(\underline{H}, \Sigma \cup \{\top'\})$. Allora $(\eta_I)_{I \in Ob_{Set}}$ è un isomorfismo naturale da $\boldsymbol{P}$ a $\underline{\boldsymbol{P}}$*

Dimostrazione. Poniamo $A' := A \cup \{\top'\}$ e $\Sigma' := \Sigma \cup \{\top'\}$.

- Il quoziente di η_I è un'immersione d'ordine, di H^I in $\underline{H}^I$ Infatti:
  Supponiamo che $I \neq \varnothing$; allora, per ogni $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A^I$, abbiamo:

  $(a_i)_{i\in I} \vdash_{\Sigma[I]} (b_i)_{i\in I}$ se e solo se $\wedge_{i\in I}(a_i \to b) \in \Sigma$ se e solo se $\wedge_{i\in I}(a_i \to b) \in \Sigma'$ (perché $a_i \to b_i \neq \top'$ per ogni $i \in I$) se e solo se $\wedge'_{i\in I}(a_i \to' b_i) \in \Sigma'$ se e solo se $\eta_I((a_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma'[I]} \eta((b_i)_{i\in I})$.

  Nel caso invece in cui $I = \varnothing$, allora A^I e A'^I sono singoletti, quindi la tesi è immediata.

- Il quoziente di η_I è suriettivo. Infatti:
  Consideriamo la mappa ψ da A' in A' definita dall'uguaglianza

  $$\psi(b) := \wedge'_{c\in A'}((b \to' c) \to' c)$$

  per ogni $b \in A'$.
  Sia ψ_I la funzione da A'^I in A'^I che manda $(b_i)_{i\in I}$ in $(\psi(b_i))_{i\in I}$. Allora

– $(b_i)_{i\in I} \vdash_{\Sigma'[I]} \psi_I((b_i)_{i\in I})$. Infatti:

$$(\lambda xz.zx)^{\star\underline{H}} = \wedge'_{d,e\in A'}(d \to' e \to' e \cdot' d) \leq' \\ \wedge'_{d,e\in A'}(d \to' (d \to' e) \to' (d \to' e) \cdot' d) \leq' \\ \wedge'_{d,e\in A'}(d \to' (d \to' e) \to' e) = \wedge'_{d\in A'}(d \to' \wedge_{e\in A'}(d \to' e) \to' e) = \\ \wedge'_{d\in A'}(d \to' \psi(d))$$

– $\psi_I((b_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma'[I]} (b_i)_{i\in I}$. Infatti:

$$(\lambda y.y\mathbf{I})^{\star\underline{H}} = \wedge'_{d\in A'}(d \to' d \cdot' \mathbf{I}^{\star\underline{H}}) \leq' \wedge'_{d\in A'}(\psi(d) \to' \psi(d) \cdot' \mathbf{I}^{\star\underline{H}}) \leq' \\ \wedge'_{d\in A'}(\psi(d) \to' ((d \to' d) \to' d) \cdot' (d \to' d)) \leq' \wedge'_{d\in A'}(\psi(d) \to' d)$$

– $\psi_I((b_i)_{i\in I}) \in A^I$. Infatti:

$$(\psi_I((b_i)_{i\in I}))_j = \psi(b_j) = \wedge'_{c\in A'}((b_j \to' c) \to' c) \leq' (b_j \to' \bot) \to' \bot \\ \leq' \bot \to' \bot = \bot \to \bot \in A$$

Grazie a quest'ultimo punto $\eta_I(\psi_I((b_i)_{i\in I}))$ è ben definito e - chiaramente - è uguale a $\psi_I((b_i)_{i\in I})$; ma, grazie ai primi due punti, questo valore è equivalente a $(b_i)_{i\in I}$, rispetto alla relazione di equivalenza indotta dalla relazione di pre-ordine $\vdash_I$; per l'arbitrarietà di $(b_i)_{i\in I} \in A'^I$, segue la suriettività del quoziente di η_I

· Il quoziente di η_I è un isomorfismo di algebre di Heyting, da H^I in $\underline{H}^I$. Questo punto deriva dal fatto che, come mostrato, il quoziente di η_I è un'immersione d'ordine suriettiva, di H^I in $\underline{H}^I$.

· La naturalità della famiglia dei quozienti $(\overline{\eta}_I)_{I\in Ob_{\mathbf{Set}}} : \boldsymbol{P} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \underline{\boldsymbol{P}}$ è una verifica quasi immediata; infatti, sia $f : I \to J$, allora

$$\overline{\eta}_I \circ \boldsymbol{P}(f)\ ([(a_j)_{i\in J}]_{\Sigma[J]}) = \overline{\eta}_I([(a_{f(i)})_{i\in I}]_{\Sigma[I]}) = [(a_{f(i)})_{i\in I}]_{\Sigma'[I]} \\ \underline{\boldsymbol{P}}(f) \circ \overline{\eta}_J\ ([(a_j)_{j\in J}]_{\Sigma[J]}) = \underline{\boldsymbol{P}}(f)\ ([(a_j)_{j\in J}]_{\Sigma[J]}) = [(a_{f(i)})_{i\in I}]_{\Sigma'[I]}$$

$$\begin{tikzcd} {[H^I]_{\Sigma[I]}} \arrow[r, "\overline{\eta}_I"] & {[\underline{H}^I]_{\Sigma'[I]}} \\ {[H^J]_{\Sigma[J]}} \arrow[u, "\boldsymbol{P}(f)"] \arrow[r, "\overline{\eta}_J"'] & {[\underline{H}^J]_{\Sigma'[J]}} \arrow[u, "\underline{\boldsymbol{P}}(f)"'] \end{tikzcd}$$

□

Tutto ciò ci mostra che un'algebra quasi-implicativa (H, Σ) fornisce un tripos 'essenzialmente' identico al tripos indotto dal completamento di (H, Σ); dunque, dal punto di vista logico, l'interpretazione associata a un'algebra quasi-implicativa (H, Σ) (cioè al suo tripos) è pressoché identica (a meno di ovvie identificazioni) all'interpretazione associata al completamento di (H, Σ); ciò spiega perché si sia evitato di soffermarci sulle strutture quasi-implicative e ci si sia concentrati prevalentemente sulle strutture implicative.

11.3 I tripos di forcing

Se nella costruzione del tripos implicativo invece di considerare una generica algebra implicativa consideriamo una coppia $(H, \{\top\})$ dove $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \rightarrow)$ è un'algebra di Heyting completa, otteniamo ciò che, per definizione, chiamiamo **tripos di forcing**.
Osserviamo che, in questo caso, dato un insieme I e due elementi $(a_i)_{i\in I}$ e $(b_i)_{i\in I} \in A^I$, abbiamo che $(a_i)_{i\in I} \vdash_{\Sigma[I]} (b_i)_{i\in I}$, se e solo se $\wedge_{i\in I}(a_i \rightarrow b_i) = \top$, se e solo se $a_i \rightarrow b_i = \top$ per ogni $i \in I$, se e solo se $\top \leq a_i \rightarrow b_i$ per ogni $i \in I$, se e solo se $\top \wedge a_i \leq b_i$ per ogni $i \in I$, se e solo se $a_i \leq b_i$ per ogni $i \in I$; questa osservazione e l'antisimmetria di $\leq$, ci dicono che H^I_Σ non è solo una pre-algebra di Heyting, ma bensì un'algebra di Heyting, e che la funzione $(a_i)_{i\in I} \mapsto [(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}$ definisce un isomorfismo di algebre di Heyting da H^I in $[H^I_{\Sigma[I]}]$.
Questa considerazione, e altre legate alla caratteristiche delle algebre di Heyting complete (si veda la breve sezione dedicata a tali strutture), fanno sì che il tripos di forcing su un'algebra di Heyting completa sia descrivibile come la sestupla $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \mathbf{tt}, (F_I)_{I\in Ob_{\mathbf{Set}}})$ dove

- $\mathbb{P}$ è il funtore da $\mathbf{Set}^{op}$ in $\mathbf{Heyt}$ così definito

$$\begin{gathered}\mathbb{P} : \mathbf{Set}^{op} \rightarrow \mathbf{Heyt}\\ I \mapsto H^I\\ (f : I \rightarrow J) \mapsto (-) \circ f : H^J \rightarrow H^I\end{gathered}$$

- Per ogni funzione $f : I \rightarrow J$, $\forall_f$ è l'omomorfismo di ordini da H^I in H^J che manda $(a_i)_{i\in I}$ in $(\wedge_{i\in I:f(i)=j}(a_i))_{j\in J}$
- Per ogni funzione $f : I \rightarrow J$, $\exists_f$ è l'omomorfismo di ordini da H^I in H^J che manda $(a_i)_{i\in I}$ in $(\vee_{i\in I:f(i)=j}(a_i))_{j\in J}$
- $W := A$
- $\mathbf{tt} := id_A \in A^A = |\mathbb{P}(W)|$ (l'insieme soggiacente di $\mathbb{P}(W)$)
- Per ogni insieme I, F_I è la funzione da $|\mathbb{P}(I)| = A^I$ in $W^I = A^I$ che manda ogni elemento in sé, ovvero l'identità su A^I.

Proposizione 11.3.1. *Sia* (H, Σ) *un'algebra implicativa, con* $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \to)$. *Sia* $(\mathbb{P}, \exists, \forall, W, \boldsymbol{tt}, F)$ *il tripos implicativo relativo alla coppia* (H, Σ). *Allora i seguenti asserti sono equivalenti:*

- (1) $\mathbb{P}$ *è isomorfo a* $\mathbb{P}_1$*, per un certo tripos di forcing* $(\mathbb{P}_1, \exists_1, \forall_1, W_1, \boldsymbol{tt}_1, F_1)$
- (2) Σ *è un filtro principale di* H
- (3) Σ *è un separatore finitamente generato di* H *e* $⋔_H \in \Sigma$

Dimostrazione. L'equivalenza tra (2) e (3) è già stata dimostrata nel capitolo riguardante i separatori (Prop. 7.9.1). Mostriamo che (1) implica (2) e viceversa:
(2) implica (1) : se Σ è un filtro principale di H, allora sappiamo che l'algebra di Heyting $[H_\Sigma]$ è completa (Prop. 7.9.1). Inoltre, dato che Σ è un filtro principale, esso è chiaramente chiuso per gli inf arbitrari (perché gli inf arbitrari di elementi di Σ sono tutti maggiori o uguali del generatore di Σ). Ciò implica che la funzione ρ_I introdotta nella precedente osservazione sia un isomorfismo da $\mathbb{P}(I) = H^I$ in $([H_\Sigma])^I$, per ogni insieme I; sia $(\mathbb{P}_1, \exists_1, \forall_1, W_1, \mathbf{tt}_1, F_1)$ il tripos di forcing relativo all'algebra di Heyting completa $[H_\Sigma]$; allora è facile verificare che $(\rho_I)_{I \in Ob_{\mathbf{Set}}}$ è un isomorfismo naturale di $\mathbb{P}$ in $\mathbb{P}_1$, il che ci permette di concludere.
(1) implica (2) : supponiamo che ci sia un'algebra di Heyting completa $K = (D, \preceq, \sqcap, \sqcup, \bot^1, \top^1, \to^1)$ e un isomorfismo naturale ϕ da $\mathbb{P}$ a $\mathbb{P}_1$, dove $\mathbb{P}_1$ è il funtore relativo al tripos di forcing $(\mathbb{P}_1, \exists_1, \forall_1, W_1, \mathbf{tt}_1, F_1)$ indotto da K. Allora, in particolare, segue che $\mathbb{P}(\{\star\})$ è isomorfo a $\mathbb{P}_1(\{\star\})$, tramite l'isomorfismo di algebre di Heyting $\phi_{\{\star\}}$. Dato che $\mathbb{P}(\{\star\})$ e $\mathbb{P}_1(\{\star\})$ sono isomorfi, come algebre di Heyting, rispettivamente a $[H_\Sigma]$ e a K, ne segue che $[H_\Sigma]$ è isomorfo a K.
Fissato un insieme I, per ogni $i \in I$ indichiamo ora con c_i la funzione da $\{\star\}$ in I che manda $\star$ in i.
Osserviamo che

- $\mathbb{P}(c_i)$ è l'omomorfismo di algebre di Heyting che va da $[H^I_{\Sigma[I]}]$ in $[H_\Sigma]$ e che manda $[(a_i)_{i\in I}]_{\Sigma[I]}$ in $[a_{c_i(\star)}]_\Sigma = [a_i]_\Sigma$, per ogni $(a_i)_{i\in I} \in A^I$ (a meno di identificare canonicamente $\mathbb{P}(\star)$ con $[H_\Sigma]$).
- $\mathbb{P}_1(c_i)$ è l'omomorfismo di algebre di Heyting che va da K^I in K e che manda $(d_l)_{l\in I}$ in $(l \mapsto d_l) \circ c_i = (l \mapsto d_l) \circ (\star \mapsto i) = d_i$, per ogni $(d_l)_{l\in I} \in D^I$ (a meno di identificare canonicamente $\mathbb{P}_1(I)$ con K^I e $\mathbb{P}_1(\{\star\})$ con K).

Segue che

- $\mathbb{P}(c_i)$ è la i-esima componente della funzione ρ_I (relativa alla struttura implicativa H, introdotta parlando del 'diagramma fondamentale')

- $\mathbb{P}_1(c_i)$ è l'omomorfismo di algebre di Heyting da K^I in K che coincide con la proiezione sulla i-esima componente.

Osserviamo che, grazie al fatto che $(\phi_I)_{I\in Ob_{\mathbf{Set}}}$ è una trasformazione naturale da $\mathbb{P}$ in $\mathbb{P}_1$, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
{[H_\Sigma]} \arrow[r, "\phi_{\{\star\}}"] & K \\
{[H^I_{\Sigma[I]}]} \arrow[u, "\mathbb{P}(c_i)"] \arrow[r, "\phi_I"'] & K^I \arrow[u, "\mathbb{P}_1(c_i)"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Consideriamo ora il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
{([H_\Sigma])^I} \arrow[r, "\phi^I_{\{\star\}}"] & K^I \\
{[H^I_{\Sigma[I]}]} \arrow[u, "\rho_I"] \arrow[r, "\phi_I"'] & K^I \arrow[u, "id_{K^I}"']
\end{tikzcd}$$

dove $\phi^I_{\{\star\}}(([a_i]_\Sigma)_{i\in I}) = (\phi_{\{\star\}}([a_i]_\Sigma))_{i\in I}$.
Anche tale diagramma è commutativo, come segue facilmente dal fatto che

- Il precedente diagramma è commutativo

- ρ_I ha per i-esima componente $\mathbb{P}(c_i)$

- id_{K^I} ha per i-esima componente - ovviamente - la proiezione canonica di K^I in K, che abbiamo visto coincidere con $\mathbb{P}_1(c_i)$

Dalla commutatività dell'ultimo diagramma e dal fatto che $\phi^I_{\{\star\}}$, ϕ^I e id_{K^I} sono tutti isomorfismi di algebre di Heyting, segue che anche ϕ_I è un isomorfismo di algebre di Heyting; dunque il separatore Σ è chiuso rispetto agli inf arbitrari, ed è quindi un filtro principale di H (infatti Σ, essendo chiuso per inf arbitrari, deve contenere l'inf di tutti i sui elementi, e tale inf genera chiaramente tutti gli elementi di Σ).

11.4 I tripos di realizzabilità (alla Kleene)

Se invece di considerare generiche algebre implicative (H, Σ) ci restringiamo a considerare il caso di coppie $(\mathcal{P}, \mathcal{P}(R) \setminus \{\varnothing\})$ in cui $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(R), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, R, \to_P)$ è la struttura implicativa indotta da un'algebra combinatoria totale $P = (R, \cdot, k, s)$ - descritta nel paragrafo 6.5 - otteniamo una famiglia di tripos noti come **tripos della realizzabilità** (alla Kleene). Fissiamo un'algebra combinatoria totale $P = (R, \cdot, k, s)$ e specifichiamo la struttura del tripos relativo a P (ossia indotto dall'algebra implicativa $(\mathcal{P}, \mathcal{P}(R) \setminus \{\varnothing\})$). Esso consiste di una sestupla ($\mathbb{P}$, $\exists$, $\forall$, W, **tt**, F) così definita:

· $\mathbb{P}$ è un funtore da $\mathbf{Set}^{op}$ in $\mathbf{Heyt}$ determinato dalle seguenti assegnazioni:

  – $\mathbb{P}(I) := [\mathcal{P}^I]$ per ogni insieme I, dove $\mathcal{P}^I = (\mathcal{P}(R)^I, \leq_I, \wedge_I, \vee_I, \perp_I, \top_I, \to_I)$ è la pre-algebra di Heyting definita nel modo seguente:

    * $\phi \leq_I \psi$ se e solo se esiste $\alpha \in R$ tale che per ogni $i \in I$ e per ogni $\beta \in \phi(i)$ si ha che $\alpha \cdot \beta \in \psi(i)$
    * $(\phi \wedge_I \psi)(i) = \{p \cdot \alpha \cdot \beta : \alpha \in \phi(i) \text{ e } \beta \in \psi(i)\}$ per ogni $i \in I$
    * $(\phi \vee_I \psi)(i) = \{p \cdot k \cdot \alpha : \alpha \in \phi(i)\} \cup \{p \cdot \overline{k} \cdot \beta : \beta \in \psi(i)\}$ per ogni $i \in I$
    * $\perp_I$ è la funzione da I in $\mathcal{P}(R)$ che manda tutto in $\varnothing$
    * $\top_I$ è la funzione da I in $\mathcal{P}(R)$ che manda tutto in R
    * $(\phi \to_I \psi)(i) = \{\alpha \in R : \alpha \cdot \beta \in \psi(i)\}$ per ogni $i \in I$

  per ogni ϕ, $\psi \in \mathcal{P}(R)^I$

  – $\mathbb{P}(f)$ è l'omomorfismo di algebre di Heyting corrispondente al quoziente (nel senso della Def. 3.4.5) dell'omomorfismo di pre-algebre di Heyting $(-) \circ f : \mathcal{P}(R)^J \to \mathcal{P}(R)^I$, per ogni funzione $f : I \to J$

· $\exists_f$ è l'omomorfismo di ordini corrispondente alla riflessione a ordine parziale (nel senso dell'Oss. 2.1.2) dell'omomorfismo di pre-ordini $\exists^1_f : \mathcal{P}(R)^I \to \mathcal{P}(R)^J$, definito da $\exists^1_f(\phi)(j) := \{\alpha \in R : \text{esiste } i \in I \text{ tale che } f(i) = j \text{ e } \alpha \in \phi(i)\}$, per ogni $\phi \in \mathcal{P}(R)^I$ e per ogni $j \in J$; tutto ciò per ogni coppia di insiemi I e J e per ogni funzione $f : I \to J$.

· $\forall_f$ è l'omomorfismo di ordini corrispondente alla riflessione a ordine parziale dell'omomorfismo di pre-ordini $\forall^1 : \mathcal{P}(R)^I \to \mathcal{P}(R)^J$, definito da $\forall^1_f(\phi)(j) := \{\alpha \in R : \alpha \cdot \beta \in \phi(i) \text{ per ogni } \beta \in R \text{ e per ogni } i \in I \text{ tale che } f(i) = j\}$ per ogni $\phi \in \mathcal{P}(R)^I$ e per ogni $j \in J$; tutto ciò per ogni coppia di insiemi I e J e per ogni funzione $f : I \to J$.

- $W = \mathcal{P}(R)$
- $\mathbf{tt} = id_{\mathcal{P}}(R)$
- $F_I = id_{\mathcal{P}(R)^I}$

L'esempio paradigmatico di tripos di realizzabilità è il così detto **tripos effettivo** $\mathbb{P}^{eff}$, ovvero il tripos di realizzabilità associato alla prima algebra (combinatoria parziale) di Kleene $\mathcal{K}_1$ (più precisamente: associato al completamento della struttura quasi-implicativa indotta dall'algebra combinatoria parziale $\mathcal{K}_1$); tale struttura è stata definita in 6.7.1.
Per maggiori dettagli riguardanti il tripos della realizzabilità si veda, ad esempio, il libro di Van Oosten: 'Realizability: an Introduction to its Categorical Side' [28].

11.5 I tripos di realizzabilità classica

Abbiamo visto che ad ogni struttura astratta di Krivine $H = (\Lambda, \Pi, \sharp, \cdot, h, \mathbb{K}, \mathbb{S}, \text{ɔɔ}, PL, \triangle)$ è associata una struttura implicativa $\mathcal{H} := (\mathcal{P}(\Pi), \supseteq, \cup, \cap, \Pi, \varnothing, \to_H)$, dove $a \to_H b := a^{\triangle} \cdot b = \{\alpha \cdot \beta : \alpha \in a^{\triangle}, \beta \in b\}$, per ogni $a, b \subseteq \Pi$ (paragrafo 6.8). Abbiamo visto che questa struttura implicativa ammette un separatore classico (ovvero contenente $\propto_{\mathcal{H}}$), precisamente il separatore $\Sigma_{\mathcal{H}} := \{a \in \mathcal{P}(\Pi) : a^{\triangle} \cap PL \neq \varnothing\}$ (paragrafo 8.4). Chiamiamo **tripos di realizzabilità classica** ogni tripos relativo a un'algebra implicativa $(\mathcal{H}, \Sigma_{\mathcal{H}})$ in cui $\mathcal{H}$ è la struttura implicativa indotta da una struttura astratta di Krivine H e $\Sigma_{\mathcal{H}}$ è il separatore classico relativo alla struttura implicativa $\mathcal{H}$.
Il risultato fondamentale riguardante i tripos di realizzabilità classica è che ogni tripos implicativo classico è isomorfo a un tripos di realizzabilità classica. Per dimostrarlo ci serve prima il seguente risultato.

Proposizione 11.5.1. *Siano* (H_1, Σ_1) *e* (H_2, Σ_2) *due algebre implicative, con* $H_1 = (A_1, \leq_1, \wedge^1, \vee^1, \perp_1, \top_1, \to_1)$ *e* $H_2 = (A_2, \leq_2, \wedge^2, \vee^2, \perp_2, \top_2, \to_2)$*; supponiamo che esista una funzione suriettiva da* A_1 *in* A_2 *tale che*

- (1) $\psi(\wedge^1_{i\in I} a_i) = \wedge^2_{i\in I}(\psi(a_i))$
- (2) $\psi(a \to_1 b) = \psi(a) \to_2 \psi(b)$
- (3) $a \in \Sigma_1$ *se e solo se* $\psi(a) \in \Sigma_2$

per ogni insieme I*, per ogni* $(a_i)_{i\in I} \in A_1^I$ *e* $a, b \in A_1$*.*
Poniamo $\psi^I((a_i)_{i\in I}) = (\psi(a_i))_{i\in I} \in A_2^I$ *per ogni* $(a_i)_{i\in I}$*.*
Sia $(\mathbb{P}_1, \dots)$ *il tripos implicativo relativo a* (H_1, Σ_1) *e* $(\mathbb{P}_2, \dots)$ *il tripos implicativo relativo a* (H_2, Σ_2)*. Allora*

· *ψ^I è un omomorfismo di pre-ordini, da $(A_1^I, \vdash_{\Sigma_1[I]})$ a $(A_2^I, \vdash_{\Sigma_2[I]})$, per ogni insieme I.*

· *Se indichiamo con $[\psi^I]$ la funzione quoziente di ψ^I (nel senso dell'Oss. 2.1.2), allora $[\psi^I]$ è un isomorfismo di algebre di Heiting, da $[H^I_{1\,\Sigma_1[I]}]$ a $[H^I_{2\,\Sigma_2[I]}]$, per ogni insieme I.*

· *$([\psi^I])_{I \in Ob_{\mathbf{Set}}}$ è un isomorfismo naturale da $\mathbb{P}_1$ in $\mathbb{P}_2$.*

Dimostrazione. Per ogni insieme I consideriamo la mappa ψ^I da A_1^I in A_2^I definito da $\psi^I((a_i)_{i\in I}) = (\psi(a_i)_i)_{i\in I}$. Per ogni $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A_1^I$ osserviamo che

$(a_i)_{i\in I} \vdash_{\Sigma_1[I]} (b_i)_{i\in I}$ se e solo se $\wedge_{i\in I}(a_i \to_1 b_i) \in \Sigma_1$ se e solo se $\psi(\wedge_{i\in I}(a_i \to_1 b_i)) \in \Sigma_2$ se e solo se $\wedge_{i\in I}(\psi(a_i \to_1 b_i)) \in \Sigma_2$ se e solo se $\wedge_{i\in I}(\psi(a_i) \to_2 \psi(b_i)) \in \Sigma_2$ se e solo se $(\psi(a_i))_{i\in I} \vdash_{\Sigma_2[I]} (\psi(b_i))_{i\in I}$ se e solo se $\psi^I((a_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma_2[I]} \psi^I((b_i)_{i\in I})$

Pertanto $\psi^I : (A_1^I, \vdash_{\Sigma_1[I]}) \to (A_2^I, \vdash_{\Sigma[I]})$ è compatibile, nel senso che $(a_i)_{i\in I} \vdash_{\Sigma_1[I]} (b_i)_{i\in I}$ se e solo se $\psi^I((a_i)_{i\in I}) \vdash_{\Sigma_2[I]} \psi^I((b_i)_{i\in I})$, per ogni $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A_1^I$; ciò ci di dice, in particolare, che ψ^I è un omomorfismo di pre-ordini e che, se passiamo al quoziente $[\psi^I]$, otteniamo un'immersione d'ordine, di $([A_1^I]_{\Sigma_1[I]}, [\vdash_{\Sigma[I]}])$ in $([A_2^I]_{\Sigma_2[I]}, [\vdash_{\Sigma_2[I]}])$.
Inoltre, dato che $\psi : A_1^I \to A_2^I$ è per ipotesi suriettiva, anche ψ^I è suriettiva, e dunque anche il quoziente $[\psi^I]$ è suriettivo.
Dato che ogni immersione d'ordine suriettiva è un isomorfismo d'ordine, e che ogni isomorfismo d'ordine tra ordini soggiacenti algebre di Heyting è un isomorfismo delle algebre di Heyting, ne concludiamo che $[\psi^I]$ è un isomorfismo di algebre di Heyting, da $[H^I_{1\,\Sigma_1[I]}]$ in $[H^I_{2\,\Sigma_2[I]}]$.
La naturalità di $([\psi^I])_{I\in Ob_{\mathbf{Set}}}$ deriva dalla commutatività del seguente diagramma, definito fissando una funzione $f : L \to K$:

$$\begin{array}{ccc} A_1^L & \xrightarrow{\psi^L} & A_2^L \\ {\scriptstyle (-)\circ f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (-)\circ f} \\ A_1^K & \xrightarrow[\psi^K]{} & A_2^L \end{array}$$

$((\psi^L) \circ ((-) \circ f))\ (a_k)_{k\in K} = (\psi^L)\ ((a_{f(l)})_{l\in L}) = (\psi(a_{f(l)}))_{l\in L}$
$(((-) \circ f) \circ \psi^K)\ ((a_k)_{k\in K}) = (((-) \circ f))\ ((\psi(a_k))_{k\in K}) = (\psi(a_{f(l)}))_{l\in L}$

□

Possiamo ora dimostrare il risultato principale.

Teorema 11.5.1. *Ogni tripos implicativo classico è isomorfo a un tripos implicativo di realizzabilità classica.*

Dimostrazione. Sia $H = (A, \leq, \wedge, \vee, \bot, \top, \rightarrow)$ una struttura implicativa e Σ un separatore classico di H. Definiamo $K = (\Lambda, \Pi, \sharp, \star, h, \mathbb{K}, \mathbb{S}, \text{ↄↄ}, PL, \triangle)$ nel seguente modo:

- $\Lambda := A =: \Pi$
- $PL := \Sigma$
- $\alpha \sharp \beta := \alpha$ per ogni $\alpha, \beta \in A$
- $\alpha \star \beta := \alpha \rightarrow \beta$ per ogni $\alpha, \beta \in A$
- $h(\alpha) := \alpha \rightarrow \bot$ per ogni $\alpha \in A$ per ogni $\alpha \in A$
- $\mathbb{K} := \mathbf{K}^{\star H}$, $\mathbb{S} := \mathbf{S}^{\star H}$, $\text{ↄↄ} := \propto_H$
- $\alpha \triangle \beta$ se e solo se $\alpha \leq \beta$ per ogni $\alpha, \beta \in A$

Si verifica facilmente che la struttura sopra definita è effettivamente una struttura astratta di Krivine. Si noti che in tale struttura abbiamo

$$d^{\triangle} = \{\alpha \in A : \alpha \leq \delta \text{ per ogni } \delta \in d\} = \{\alpha \in A : a \leq \wedge(d)\}$$

per ogni $d \subseteq \Lambda$.
Come sappiamo, la struttura astratta di Krivine K induce una struttura implicativa $\mathcal{K} := (\mathcal{P}(A), \supseteq, \cup, \cap, A, \varnothing, \rightarrow_K)$, dove $a \rightarrow_K b = a^{\triangle} \star b = \{\alpha \star b : \alpha \in a^{\triangle}, \beta \in b\}$, e a questa struttura implicativa è associato un separatore classico: $\Sigma_{\mathcal{H}} := \{a \subseteq A : a^{\triangle} \cap PL \neq \varnothing\}$.
Indichiamo con $(\mathbb{P}_2, \dots)$ il tripos di realizzabilità classico associato a $(\mathcal{K}, \Sigma_{\mathcal{K}})$ e con $(\mathbb{P}_1, \dots)$ il tripos implicativo classico associato a (H, Σ).
Sia ψ la funzione da $\mathcal{P}(A)$ in A definita da $\psi(b) := \wedge(b)$ per ogni $b \subseteq A$. Si verifica facilmente che ψ rispetta le proprietà descritte dall'enunciato della precedente proposizione, rispetto alle strutture implicative $H_1 := \mathcal{K}$, $H_2 := H$ e ai separatori $\Sigma_1 := \Sigma_{\mathcal{H}}$ e $\Sigma_2 := \Sigma$; dunque - adottando le notazioni della precedente proposizione - otteniamo che $([\psi^I])_{I \in Ob_{\mathbf{Set}}}$ è un isomorfismo naturale di $\mathbb{P}_1$ in $\mathbb{P}_2$. $\square$

Bibliografia

[1] Paul J Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50(6):1143–1148, 1963.

[2] Leo Esakia. *Heyting algebras: duality theory*, volume 50. Springer, 2019.

[3] Melvin Chris Fitting. *Intuitionistic logic model theory and forcing.* Yeshiva University, 1968.

[4] J Roger Hindley. *Basic simple type theory.* Number 42. Cambridge University Press, 1997.

[5] J Roger Hindley and Jonathan P Seldin. *Lambda-calculus and Combinators, an Introduction*, volume 2. Cambridge University Press Cambridge, 2008.

[6] JME Hyland, Peter T Johnstone, and Andrew M Pitts. Tripos theory. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 88, pages 205–232. Cambridge University Press, 1980.

[7] Thomas J Jech. *Lectures in set theory: with particular emphasis on the method of forcing*, volume 217. Springer, 2006.

[8] Peter T Johnstone. *Topos theory.* Courier Corporation, 2014.

[9] Stephen Cole Kleene. On the interpretation of intuitionistic number theory. *The journal of symbolic logic*, 10(4):109–124, 1945.

[10] Jean-Louis Krivine. Realizability in classical logic. *Panoramas et synthèses*, 27:197–229, 2009.

[11] Jean-Louis Krivine. Realizability algebras ii: new models of zf+ dc. *Logical Methods in Computer Science*, 8, 2012.

[12] Joachim Lambek and Philip J Scott. *Introduction to higher-order categorical logic*, volume 7. Cambridge University Press, 1988.

[13] F William Lawvere. Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor. *Applications of Categorical Algebra*, 17:1–14, 1970.

[14] Daniel Leivant. Higher order logic. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming (2)*, pages 229–322, 1994.

[15] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[16] Samuele Maschio. *Ventiquattro lezioni di teoria delle categorie [appunti del corso di logica 2, Università degli studi di Padova, anno 2020-2021].*

[17] Colin McLarty. *Elementary categories, elementary toposes.* Clarendon Press, 1992.

[18] Alexandre Miquel. A survey of classical realizability. In *International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, pages 1–2. Springer, 2011.

[19] Alexandre Miquel. Implicative algebras: a new foundation for realizability and forcing. *Mathematical Structures in Computer Science*, 30(5):458–510, 2020.

[20] Alexandre Miquel. Implicative algebras ii: Completeness wrt set-based triposes. *arXiv preprint arXiv:2011.09085*, 2020.

[21] Walter Ferrer Santos, Jonas Frey, Mauricio Guillermo, Octavio Malherbe, and Alexandre Miquel. Ordered combinatory algebras and realizability. *Mathematical Structures in Computer Science*, 27(3):428–458, 2017.

[22] Walter Ferrer Santos and Octavio Malherbe. The category of implicative algebras and realizability. *Mathematical Structures in Computer Science*, 29(10):1575–1606, 2019.

[23] Peter Selinger. Lecture notes on the lambda calculus. *arXiv preprint arXiv:0804.3434*, 2008.

[24] Thomas Streicher. Krivine's classical realisability from a categorical perspective. *Mathematical Structures in Computer Science*, 23(6):1234–1256, 2013.

[25] Alfred Tarski. The semantic conception of truth: and the foundations of semantics. *Philosophy and phenomenological research*, 4(3):341–376, 1944.

[26] Anne S Troelstra. *Principles of Intuitionism: Lectures Presented at the Summer Conference on Intuitionism and Proof Theory (1968) at SUNY at Buffalo, NY*, volume 95. Springer, 2006.

[27] Anne Sjerp Troelstra and Dirk van Dalen. Constructivism in mathematics. vol. i, volume 121 of. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 26, 1988.

[28] Jaap Van Oosten. *Realizability: an introduction to its categorical side.* Elsevier, 2008.