



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Formulazione Lagrangiana delle Teorie di Campo

Docente relatore: Prof. Ponno Antonio

Laureando: Marchesin Alessandro - Matricola 2033731

Anno Accademico 2023-2024

Indice

1	Cenni di base sulla simmetria relativistica	1
1.1	Le trasformazioni di Lorentz	1
1.2	Nozioni di base sulla teoria dei gruppi	2
1.2.1	Il gruppo di Lorentz-Poincarè	2
1.2.2	I gruppi $SL(2 \mathbb{C})$ ed il gruppo $U(1)$	4
2	L'equazione di Dirac	6
2.1	L'equazione di Klein-Gordon	6
2.2	L'equazione di Dirac	7
2.2.1	Le matrici γ	7
2.2.2	Gli spinori di Weyl	8
2.2.3	Gli spinori di Dirac	9
2.2.4	L'operatore di Dirac	10
2.3	Conseguenze dell'equazione di Dirac	11
2.3.1	Il momento di spin	11
2.3.2	La scoperta del positrone	13
3	Nozioni di base sul formalismo Lagrangiano	14
3.1	Il principio di minima azione e le equazioni del moto	14
3.2	Simmetrie globali	16
3.3	Il teorema di Noether	17
4	La Lagrangiana della QED	20
4.1	Assunti di base per la costruzione di Lagrangiane	20
4.2	Modello a campo spinoriale	20
4.3	La Lagrangiana di un campo spinoriale	22
4.3.1	La Lagrangiana del campo libero	22
4.3.2	La Lagrangiana nel campo elettromagnetico	23
4.4	" <i>Per altra via, per altri porti</i> "... lo spin dal teorema di Noether	24
5	Oltre la QED	25
5.1	I nodi fondamentali della teoria	25
5.2	Un nuovo punto di partenza	26
5.3	Conclusione	27

Epitome

L'obiettivo di questa tesi è introdurre la teoria fisica dell'elettrodinamica quantistica (spesso abbreviata in QED, *quantum electro-dynamics*), la teoria che descrive l'interazione tra gli elettroni ed il campo elettromagnetico a livello quantistico. Questo perché l'analogo classico dell'elettrodinamica (sviluppato soprattutto nel corso del XIX secolo a partire dalle equazioni di Maxwell) si trovò ben presto di fronte a nuovi problemi che necessitarono della nascente meccanica quantistica. Il percorso seguito è volto ad introdurre la QED da un punto di vista Lagrangiano, di fatto il primo vero formalismo con cui la teoria è stata storicamente sviluppata e presentata da Paul Dirac. Questo perché se è pur vero che la QED fu successivamente riproposta e corretta da fisici del calibro di Julian Schwinger, Richard Feynman e Shin'Ichiro Tomonaga, che vinsero contestualmente il Premio Nobel nel 1965 pur lavorando indipendentemente, l'opera di Dirac segnò un passo fondamentale nella costruzione delle teorie quantistiche relativistiche, quantamento sul versante della relatività ristretta. In questa tesi sarà dunque messo in luce l'aspetto del formalismo Lagrangiano su cui la teoria fu costruita. Il formalismo, infatti, seppur di matrice classica, restituì alcuni fondamentali concetti che costituirono la base dello sviluppo della successiva fisica delle particelle e delle interazioni fondamentali.

A partire dunque da un breve richiamo alla teoria delle trasformazioni di Lorentz ed alla teoria dei gruppi, la trattazione proseguirà alla costruzione dell'equazione di Dirac, tassello fondamentale della trattazione. Da lì si passerà ad una parentesi legata al concetto di azione, per poi arrivare alla dimostrazione di un importante risultato: il teorema di Noether. Sistemati tutti i pezzi sulla scacchiera, si potrà quindi partire alla volta dello studio di ciò che avviene quando nella teoria di Lagrange si inserisce l'equazione di Dirac. Se da una parte si otterranno alcuni risultati di estrema rilevanza fisica, dall'altra, il lettore se ne accorgerà sul finale, il percorso svolto non mancherà di riservare alcune curiose sorprese.

Capitolo 1

Cenni di base sulla simmetria relativistica

Per poter affrontare il percorso che porta alla formulazione della meccanica quantistica secondo i principi della relatività ristretta è innanzitutto necessario ripercorrere alcuni importanti passaggi che caratterizzarono la costruzione della simmetria relativistica.

1.1 Le trasformazioni di Lorentz

La teoria della relatività ristretta poggia su tre assunti fondamentali, essenziali per la costruzione del concetto di spazio-tempo.

1. Lo spazio ed il tempo sono omogenei;
2. Lo spazio è isotropo;
3. I segnali fisici hanno una velocità massima di propagazione. Questa velocità è chiamata c , ed è la velocità della luce nel vuoto. Essa è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Si considerino ora due eventi infinitesimamente separati nello spazio-tempo. Questi eventi, che possono essere chiamati P_1 e P_2 avranno rispettivamente coordinate x^μ ed $x^\mu + \delta x^\mu$. L'intervallo spazio-temporale tra i due eventi è chiamato ds^2 e definito come segue:

$$ds^2 = (cdt)^2 - \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

Allo stesso modo, in un altro sistema di riferimento:

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \quad (1.2)$$

Il fatto stesso che la velocità della luce sia indipendente dal sistema di riferimento porta ad osservare che i valori di ds^2 e ds'^2 coincidono. È dunque possibile scrivere la trasformazione di coordinate tra x^μ ed $x'^\mu = f^\alpha(x^\mu)$ nel modo seguente:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\nu x^\nu + a^\alpha \quad (1.3)$$

L'equazione appena riportata permette di distinguere le trasformazioni di coordinate tra "omogenee" (quelle per cui $a^\alpha = 0$) e quelle invece "non omogenee". Tornerà in seguito utile per descrivere il cambio di coordinate la seguente equazione, che altro non è se non lo jacobiano della trasformazione di coordinate.

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \quad (1.4)$$

Eguagliare i due intervalli spazio-temporali, sostituendo poi il risultato appena ottenuto, porta ad un'importante relazione.

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad \rightarrow \quad \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\nu dx^\nu \Lambda^\beta_\mu dx^\mu$$

Dunque:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\nu \Lambda^\beta_\mu \quad \rightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.5)$$

dove sono state usate le definizioni $\Lambda \equiv \Lambda^\alpha_\mu$ e $\eta \equiv \eta_{\alpha\beta}$. Quella appena ottenuta viene chiamata "relazione di base", in quanto soddisfatta da tutte le trasformazioni omogenee. C'è dunque una corrispondenza tra l'insieme di tutte le trasformazioni omogenee di coordinate e l'insieme di tutte le matrici Λ che soddisfano la relazione.

1.2 Nozioni di base sulla teoria dei gruppi

Per potersi addentrare correttamente all'interno dello studio delle simmetrie fisiche dell'elettrodinamica quantistica è necessario servirsi dello specifico settore dell'analisi matematica che si occupa dello studio delle simmetrie, ovvero delle trasformazioni di equazioni che ne lasciano invariata la forma. Questa branca della matematica viene designata con il nome di **"teoria dei gruppi"**. Un gruppo G consiste in un insieme di trasformazioni g_i , che possono essere combinate tra loro attraverso una specifica **"regola di composizione"** (più comunemente chiamata **"prodotto"**). Affinché tale insieme possa dirsi un gruppo, occorre tuttavia che siano rispettati i seguenti criteri:

1. Chiusura: $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 g_2 \in G$;
2. Associatività: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$, si ha che per il prodotto vale la relazione $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$;
3. Esistenza dell'identità: $\exists \mathbb{1} \in G$ t.c. $\forall g \in G : g \mathbb{1} = \mathbb{1} g = g$;
4. Esistenza dell'inverso: $\forall g \in G \exists g^{-1}$ t.c. $g g^{-1} = g^{-1} g = \mathbb{1}$.

un' importante distinzione che conviene fare all'interno della teoria dei gruppi è quella tra gruppi "abeliani" e "non abeliani".

Definizione. Un gruppo di simmetria G viene detto **"abeliano"** se tutti gli elementi del gruppo commutano tra loro, ovvero:

$$\forall g_1, g_2 \in G, g_1 g_2 = g_2 g_1$$

Un gruppo che non gode di tale proprietà verrà invece detto **"non abeliano"**.

Risulta utile introdurre, inoltre, alcune nozioni sul concetto di "sottogruppo", "gruppo disceto" e "gruppo di Lie".

Definizione. Dato un gruppo G , preso H un sottoinsieme di elementi di G , H verrà detto **"sottogruppo"** se e solo se gli elementi di cui si compone soddisfano le condizioni di gruppo.

Definizione. Un gruppo G verrà detto **"finito"** (o "finito discreto") se e solo se composto da un numero finito di elementi.

Definizione. Un gruppo G verrà detto **"gruppo di Lie"** se i suoi elementi sono funzioni differenziabili di un numero finito di parametri ed il prodotto tra due elementi è una funzione differenziabile dei parametri dei suoi fattori. Ciò vuol dire che:

$$g_1 g_2 = g(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_N^{(1)}) g(\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_N^{(2)}) = g(\xi_1, \dots, \xi_N) \quad \text{con} \quad \xi_I = f_I(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_N^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_N^{(2)})$$

dove $I \in [1, N]$ e le funzioni f_I sono differenziabili rispetto a tutti i parametri. Nel caso particolare in cui i parametri ξ_I variassero in un dominio compatto, inoltre, il gruppo verrà definito **"gruppo di Lie compatto"**.

L'ultima definizione risulta particolarmente importante perchè tutti i gruppi cui si farà cenno nel corso della trattazione sono gruppi di Lie. Nello specifico, per questi gruppi sarà sempre possibile studiare trasformazioni infinitesime nell'intorno dell'identità con uno sviluppo in serie al primo ordine. Prima di procedere, si rimanda ancora ad un paio di importanti concetti.

Definizione. Un gruppo $U(n)$ viene definito **"unitario"** se è il gruppo delle matrici $n \times n$ unitarie associato al prodotto tra matrici, per cui vale $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$, dove $U^\dagger = (U^*)^T$. Se poi il determinante delle matrici del gruppo dovesse essere unitario (una fase con modulo 1), allora il gruppo sarebbe detto **"gruppo speciale unitario"** ($SU(n)$). In particolare, per i gruppi unitari non abeliani, vale che il numero di generatori è determinato dalla formula $N_a = n^2 - 1$, dove n è il numero di dimensioni dello spazio fisico in cui si opera.

1.2.1 Il gruppo di Lorentz-Poincaré

Si può mostrare che le trasformazioni di Lorentz che soddisfano la relazione di base formino un gruppo. La trasformazione di Lorentz omogenea è definita come segue:

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \tag{1.6}$$

È possibile dimostrare la condizione di chiusura:

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta$$

Per quanto riguarda invece l'associatività:

$$x''^\mu = \Lambda_{1\ \alpha}^\mu \Lambda_{2\ \nu}^\alpha x^\nu$$

L'esistenza dell'elemento identità nel gruppo è dato dalla matrice $\mathbb{1}_{4 \times 4}$, tale che $\mathbb{1}^T \eta \mathbb{1} = \eta$. L'ultima proprietà discende invece dalla relazione di base, che può essere riscritta come:

$$\eta \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \eta = \mathbb{1} \quad \rightarrow \quad \eta = (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} \quad \text{con} \quad \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta$$

La matrice Λ^{-1} costituisce dunque l'inverso della matrice Λ .

Ora, attraverso il teorema di Binet:

$$\det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda = \det \eta \quad \rightarrow \quad \det^2 \Lambda = 1$$

Non solo, ma dalla relazione di base:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu \quad \rightarrow \quad \eta_{00} = 1 = \Lambda^\alpha_0 \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_0 = \Lambda^0_0 \eta_{00} \Lambda^0_0 + \Lambda^i_0 \eta_{ij} \Lambda^j_0$$

ricordando che $\eta_{00} = 1$ mentre $\eta_{ii} = -1$ si ottiene:

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_1^3 (\Lambda^i_0)^2 \quad \rightarrow \quad |\Lambda^0_0| \geq 0$$

Ciò che si può dedurre è che le condizioni che determinano il tipo di trasformazione sono due, ciascuna binaria. I casi totali sono dunque quattro.

Nome	$\det \Lambda$	Λ^0_0
L_+^\uparrow	1	> 0
L_-^\uparrow	-1	> 0
L_+^\downarrow	1	< 0
L_-^\downarrow	-1	< 0

Tabella 1.1: Classificazione delle trasformazioni di Lorentz

È importante notare che solo le trasformazioni L_+^\uparrow formano un sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz, motivo per cui sono anche dette "**trasformazioni di Lorentz proprie**".

Una importante precisazione che occorre fare sul gruppo di Lorentz è quella che riguarda i suoi generatori. Prendendo infatti in considerazione una generica trasformazione infinitesima, scritta come:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (1.7)$$

si ottiene, mediante la relazione fondamentale:

$$\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0 \quad (1.8)$$

Siccome una matrice 4×4 antisimmetrica possiede sei parametri liberi (tre boost e tre rotazioni), occorrerà introdurre una base di sei matrici, che saranno appellate come $(\mathcal{M}^A)^{\mu\nu}$, con $A = 1, 2, \dots, 6$. Per la trattazione successiva sarà tuttavia adottata una scelta stilistica differente, ovvero $(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu\nu}$, dove $\rho, \sigma = 0, \dots, 3$ ¹. Si ottiene la seguente scrittura:

$$(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu\nu} = \eta^{\rho\mu} \delta^{\sigma\nu} - \eta^{\sigma\mu} \delta^{\rho\nu} \quad (1.9)$$

Una riscrittura ottenuta abbassando gli indici (procedura utile a fini pratici, come per farle agire sui campi) è la seguente²:

¹Per dovere di completezza, si noti che, se da una parte gli indici ρ, σ si riferiscono alla matrice della base, gli indici μ, ν fanno riferimento agli elementi di matrice.

²Questa operazione non garantisce più l'antisimmetria delle matrici.

$$(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \eta^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - \eta^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu \quad (1.10)$$

Si possono definire in questo modo gli operatori di momento angolare e quelli di boost:

$$J^k = -\frac{1}{2}i\epsilon_{mn}^k \mathcal{M}^{mn}; \quad K^n = i\mathcal{M}^{n0} = -i\mathcal{M}^{0n} \quad (1.11)$$

Dove $k, m, n \in [1, 2, 3]$. Tali definizioni permettono di scrivere una generica trasformazione di Lorentz come segue³:

$$\Lambda = e^{-i(\vec{\phi} \cdot \vec{J} + \vec{\zeta} \cdot \vec{K})} \quad (1.12)$$

A voler definire poi $T_\pm^j \equiv \frac{1}{2}(J^j \pm K^j)$ si otterrà:

$$\Lambda = e^{-i(\vec{\phi} - i\vec{\zeta}) \cdot \vec{T}_+} e^{-i(\vec{\phi} + i\vec{\zeta}) \cdot \vec{T}_-} \quad (1.13)$$

Si lascerà per il momento in sospenso questo risultato, che tornerà utile nelle sezioni successive, quando si dovrà introdurre la trasformazione di Lorentz in cui incorrono gli spinori. Questo perchè a seconda che il campo che incorre nella trasformazione sia un campo scalare, vettoriale o spinoriale, essi trasformeranno in rappresentazioni differenti del gruppo di Lorentz. Un importante risultato è quello che riguarda i fermioni, le cui trasformazioni (sinistre e destre) sono:

$$\Lambda^{(1/2,0)} = e^{-i(\phi_i - i\xi_i)\sigma^i} \quad \Lambda^{(0,1/2)} = e^{-i(\phi_i + i\xi_i)\sigma^i}$$

1.2.2 I gruppi $SL(2|\mathbb{C})$ ed il gruppo $U(1)$

Per poter proseguire nei successivi sviluppi della teoria è necessario introdurre due particolari gruppi.

Il primo gruppo è formato dalle matrici N di dimensione 2×2 con determinante unitario, associate al prodotto tra matrici. Si può verificare che tale insieme soddisfa a tutte le condizioni di gruppo. La condizione di chiusura è assicurata dal teorema di Binet sul determinante di un prodotto di matrici, la seconda condizione è invece garantita dalla proprietà associativa del prodotto di matrici. A soddisfare la condizione di esistenza dell'elemento d'identità è la matrice $\mathbb{1}_{2 \times 2}$, ed infine l'ultima condizione è soddisfatta dal fatto stesso che $\det N \neq 0$, cosa che si traduce nell'esistenza dell'inverso N^{-1} . Il gruppo appena introdotto sarà nominato $SL(2|\mathbb{C})$, ovvero "gruppo speciale lineare". Si nota però che $SL(2|\mathbb{C})$ **non** è un gruppo abeliano.

Si vorrebbe ora mostrare che esiste una mappa che associa ogni matrice N ad una trasformazione propria di Lorentz. La mappa non è tuttavia biunivoca.

$$\Lambda(N_1 N_2) = \Lambda(N_1) \Lambda(N_2) \quad e \quad \Lambda(N_1) = \Lambda(N_2) \quad \rightarrow \quad N_1 = \pm N_2$$

Si utilizzino ora come base dello spazio delle matrici 2×2 le matrici di Pauli $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_j)$. Le matrici di Pauli sono Hermitiane. Introducendo dunque le matrici $\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_j)$ si può verificare la relazione seguente.

$$\text{tr}(\tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

Nella base appena introdotta è possibile scrivere una qualsiasi matrice X come combinazione lineare degli elementi di base.

$$X = x^\mu \sigma_\mu$$

Nonostante il carattere generale delle matrici, è possibile notare come il termine x^μ sia un quadrivettore a valori reali. La possibile interpretazione di tale quadri-vettore può dunque essere quella delle coordinate nello spazio-tempo di Minkowski. Si può esplicitare x^μ :

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\sigma}^\mu X) \quad (1.15)$$

La matrice X può essere trasformata nella matrice X' (definita nella stessa base in maniera analoga) mediante la seguente trasformazione.

$$X' = x'^\mu \sigma_\mu = N X N^\dagger \quad (1.16)$$

³In cui i $\vec{\phi}$ indicano i parametri di rotazione, mentre i $\vec{\zeta}$ quelli di boost.

Le due relazioni precedenti permettono di mettere in relazione le due coordinate.

$$x'^{\mu} = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\sigma}^{\mu} X') = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\sigma}^{\mu} N X N^{\dagger}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\sigma}_{\nu} N \sigma_{\nu} N^{\dagger}) x^{\nu} \quad (1.17)$$

È possibile dunque ricollegare il risultato appena ottenuto con le trasformazioni di coordinate di Lorentz ridefinendo Λ^{μ}_{ν} .

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\sigma}^{\mu} N \sigma_{\nu} N^{\dagger}) \quad (1.18)$$

A confermare che il quadri-vettore x^{μ} possa essere interpretato come la coordinata nello spazio-tempo di Minkowski concorre anche il fatto che la definizione appena introdotta di Λ^{μ}_{ν} soddisfi la relazione di base, cosa che ne conferma anche che sia una trasformazione di Lorentz. Non solo, perchè è anche possibile verificare che il determinante di tali matrici è 1, e che:

$$\Lambda^0_0 = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\sigma}_0 N \sigma_0 N^{\dagger}) = \frac{1}{2} \text{tr}(N N^{\dagger}) > 0$$

Non è dunque solo una trasformazione di Lorentz, ma più specificamente una che appartiene al sottogruppo L_+^{\uparrow} .

Ora che è stato provato che ad una matrice N è sempre associata una trasformazione L_+^{\uparrow} , si dovrà cercare di mostrare che è pur vero il contrario. Si parta dalle due matrici N_1 ed N_2 .

$$\Lambda(N_1) = \Lambda(N_2) \iff \text{tr}(\tilde{\sigma}^{\mu} N_1 \sigma_{\nu} N_1^{\dagger}) = \text{tr}(\tilde{\sigma}^{\mu} N_2 \sigma_{\nu} N_2^{\dagger}) \iff N_1 = \pm N_2$$

Si prenda ora la matrice X'' , definita come la trasformazione della matrice X prima attraverso N_1 e poi attraverso N_2 .

$$X'' = N_2 N_1 X N_1^{\dagger} N_2^{\dagger} = (N_2 N_1) X (N_2 N_1)^{\dagger}$$

Se è dunque possibile affermare che $x''^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(N_1 N_2) x^{\nu}$ allora varrà che $\Lambda^{\mu}_{\nu}(N_1 N_2) = \Lambda^{\mu}_{\alpha}(N_1) \Lambda^{\alpha}_{\nu}(N_2)$

La mappa che collega le matrici N alle trasformazioni L_+^{\uparrow} vale in entrambe le direzioni.

Per quanto riguarda invece il gruppo $U(1)$, questo può essere definito dall'insieme delle matrici U di dimensione $n \times n$ tali che $U U^{\dagger} = U^{\dagger} U = \mathbb{1}_{n \times n}$ associato al prodotto tra matrici⁴. Si può mostrare che $U(1)$ è un gruppo. Le seguenti relazioni

$$(U_1 U_2)^{\dagger} (U_1 U_2) = U_2^{\dagger} (U_1^{\dagger} U_1) U_2 = U_2^{\dagger} U_2 = \mathbb{1} \quad e \quad (U_2 U_1)^{\dagger} (U_2 U_1) = U_1^{\dagger} (U_2^{\dagger} U_2) U_1 = U_1^{\dagger} U_1 = \mathbb{1}$$

Mostrano la proprietà di chiusura. L'associatività è data come per $SL(2|\mathbb{C})$ dalle proprietà del prodotto tra matrici. La condizione di esistenza dell'identità è soddisfatta dalla presenza di $\mathbb{1}_{2 \times 2}$, mentre per la condizione di esistenza dell'inverso basta osservare che:

$$(U^{-1})^{\dagger} U^{-1} = (U U^{\dagger})^{-1} = U^{-1} (U^{-1})^{\dagger} = (U^{\dagger} U)^{-1} = \mathbb{1}$$

L'esistenza dell'inverso può essere dunque identificata nell'inverso della matrice U , anch'esso appartenente ad $U(1)$. È pertanto possibile affermare che $U(1)$ sia un gruppo. Un'importante osservazione conclusiva è la seguente: siccome $U^{\dagger} U = \mathbb{1}$, allora $|\det U|^2 = 1$, il che porta ad affermare che $\det U = e^{i\alpha}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare, il sottogruppo delle matrici $U(n)$ tali che $\det U = 1$ è anche chiamato "**gruppo unitario speciale**", e denotato come $SU(n)$. Si può notare, inoltre, come, per il modo in cui è definito, $U(1)$ sia un gruppo Abelian. Un generico elemento di $U(1)$ può essere scritto come $e^{i\alpha \mathbb{1}}$.

In particolare, la differenza che porta da $U(1)$ ad uno dei più importanti gruppi $SU(n)$, ovvero $SU(2)$, è la sostituzione del parametro $\alpha \mathbb{1}$ con $\alpha t = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_3$, dove i t_i sono la metà della matrici di Pauli (verranno introdotte in seguito a proposito dell'equazione di Dirac). Questo fatto non sarà da trascurare, perchè farà sì che gli elementi su cui agisce l'equazione di Dirac non siano normali vettori, perchè dovranno compiere 2 giri completi attorno ad un asse per tornare su se stessi. Il numero di generatori per $SU(2)$, sulla base della formula citata in precedenza, è 3.

⁴Nella trattazione, con U^{\dagger} si intende $(U^*)^T$, dove U^* indica la coniugazione complessa della matrice.

Capitolo 2

L'equazione di Dirac

L'obiettivo di questo capitolo è introdurre il nucleo di partenza della teoria della QED: l'equazione di Dirac. L'analisi dell'equazione ed in particolare della Lagrangiana ad essa associata portarono infatti alla comprensione di alcuni concetti chiave sui fenomeni quantistico-relativistici che saranno di fondamentale importanza anche per lo sviluppo delle teorie d'interazione forte e debole. Per poter tuttavia comprendere a fondo il significato dell'equazione, si è deciso di procedere secondo un'ottica storica, tesa a rendere più scorrevole la comprensione della catena logica che portò ai vari risultati.

2.1 L'equazione di Klein-Gordon

Presentata nel 1926, l'equazione di Klein-Gordon rappresenta il primo vero risultato che mette assieme la meccanica quantistica con la relatività ristretta. Per poterla ottenere è necessario partire dall'equazione libera non relativistica di Schrödinger.

$$\hat{E}\psi(\vec{r}, t) = \frac{\hat{P}^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

dove \hat{E} e \hat{P} indicano gli operatori quantistici associati rispettivamente ad energia ed impulso lineare, mentre $\psi(\vec{r}, t)$ denota la funzione d'onda come funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Si noti infatti che, per come è costruita l'equazione, le coordinate spaziali e quella temporale sono trattate diversamente, dettaglio che mal si concilia con il principio di relatività. Una relazione che invece si concilia con esso è la seguente:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \quad (2.2)$$

I principi della meccanica quantistica permettono di sostituire le osservabili con i corrispondenti operatori. Si tratta tuttavia di un passaggio delicato, in quanto ci si ritrova a dover in tal caso affrontare la radice quadrata di un operatore differenziale. Conviene dunque "quadrare" l'equazione.

$$(i\hbar\partial_t)^2\psi = (m^2c^4 + p^2c^2)\psi \quad (2.3)$$

La sostituzione di p con l'operatore impulso ed alcuni passaggi algebrici portano all'equazione seguente, detta "equazione di Klein-Gordon".

$$\left(-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \nabla^2\right)\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\square - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \quad (2.4)$$

dove è stata adoperata la definizione dell'operatore d'Alembertiano $\square \equiv \partial_\mu\partial^\mu$. In unità naturali dunque:

$$(\square - m^2)\psi = 0 \quad (2.5)$$

Prima di procedere è utile soffermarsi su alcuni aspetti fisici dell'equazione. Il primo è sicuramente il fatto che, essendo l'operatore di d'Alembert un invariante relativistico, tempo e spazio sono trattati allo stesso modo. Sorge tuttavia un "problema". Alcune soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon si presentano nella seguente forma:

$$\psi = Ne^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

dove però E non è definita positiva in base alla relazione energia-impulso, perchè le radici quadrate di un numero reale e positivo sono due ed opposte. Ciò deriva essenzialmente dalla forma quadratica dell'equazione di Klein-Gordon. La principale conseguenza la si ritrova nella densità di probabilità associata all'equazione:

$$\rho_{KG}(\vec{r}, t) = i(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) = i(\psi^*(-iE)\psi - \psi(iE)\psi^*) = E(\psi^*\psi + \psi\psi^*) \quad (2.6)$$

Questa grandezza non può dunque essere interpretata come una densità di probabilità, perchè non definita positiva.

2.2 L'equazione di Dirac

Nel 1928, Paul Dirac propose un modo per poter risolvere le inconsistenze legate all'equazione di Klein-Gordon. La sua soluzione partì dall'idea che l'equazione avrebbe dovuto soddisfare i principi della meccanica quantistica: essa doveva dunque essere lineare ed al primo ordine sia nel tempo che nelle coordinate spaziali. Dirac costruì un operatore differenziale al primo ordine:

$$\not{\partial} = \sum_j \gamma_j \partial_j = \gamma^j \partial_j \quad (2.7)$$

dove i γ^j sono coefficienti (scalari o matriciali) costanti. L'equazione di Klein-Gordon può dunque essere riscritta nel modo seguente:

$$\not{\partial}\not{\partial}\psi = m^2\psi \quad (2.8)$$

È dunque molto più semplice ora prendere la "radice quadrata"¹ degli operatori differenziali.

$$(\gamma^j \partial_j - m)\psi = 0 \quad (2.9)$$

Tuttavia, la condizione per cui $\not{\partial}\not{\partial} = \square$ non è gratuita. Essa richiede delle condizioni sulle matrici γ^j .

$$\begin{aligned} \square &= \not{\partial}\not{\partial} = (\gamma^j \partial_j)(\gamma^k \partial_k) \\ &= \gamma^j \gamma^k \partial_j \partial_k = \frac{\gamma^j \gamma^k + \gamma^k \gamma^j}{2} \partial_j \partial_k \end{aligned}$$

È dunque richiesta la condizione seguente:

$$\gamma^j \gamma^k + \gamma^k \gamma^j = 2\eta^{jk} \quad (2.10)$$

Questa condizione rientra in ciò che viene chiamata "Algebra di Clifford". In particolare, la più semplice rappresentazione dell'algebra di Clifford non può che comprendere l'utilizzo di matrici 4×4 . I coefficienti γ^j non possono dunque essere scalari: essi devono essere matrici, per la precisione di dimensione 4×4 . Ne consegue che nemmeno la funzione d'onda può essere uno scalare, ma dovrà invece avere 4 componenti.

2.2.1 Le matrici γ

In questo paragrafo verranno brevemente indagate le proprietà delle matrici γ , al fine di trovarne l'espressione, fondamentale per completare l'equazione di Dirac.

Il primo passo è definire due nuove applicazioni: X_* e X^* , che vorremmo appartenessero all'insieme delle matrici hermitiane di dimensione 2×2 a valori complessi, ovvero $H(2, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{M} \rightarrow X_* &= t\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} & x \in \mathcal{M} \rightarrow X^* &= -t\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \\ X_* &= \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} & X^* &= \begin{pmatrix} -t+z & x-iy \\ x+iy & -t-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per poter eseguire un raffronto, una simile mappa tridimensionale è quella che a vettori dello spazio tridimensionale associa matrici 2×2 attraverso le matrici di Pauli.

$$X_* = \vec{r} \cdot \vec{\sigma}$$

Il ruolo delle matrici γ è dunque quello di mappare vettori quadri-dimensionali in matrici 4×4 .

$$\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow M(4, \mathbb{C}) \quad (2.11)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & X_* \\ X^* & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La rappresentazione esplicita (una delle possibili) delle matrici γ_j è pertanto la seguente:

¹Chiaramente, non si intende una vera e propria radice quadrata, da cui le virgolette.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La scrittura dell'equazione di Dirac attraverso le matrici γ permette di individuare immediatamente il carattere di invarianza relativistica. Questo lo si può notare a partire dalla definizione delle matrici X_* e X^* , che ricalca quella già data in precedenza nel paragrafo dedicato alla trattazione del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$.

Una piccola nota sulle matrici γ è doverosa: le rappresentazioni possibili per queste matrici sono molto numerose. Durante la trattazione ne verranno spesso adoperate diverse, che verranno di volta in volta mostrate per permettere al lettore di procedere fluentemente nell'analisi.

2.2.2 Gli spinori di Weyl

L'introduzione del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$ permette di definire dei nuovi oggetti matematici, che, si vedrà nel seguito, risulteranno fondamentali per la costruzione della teoria dell'elettrodinamica quantistica. Gli oggetti in questione sono detti "spinori", e, nonostante la loro rappresentazione possa sembrare in tutto uguale a quella dei vettori, il loro significato è differente. Se infatti si adoperasse il formalismo dei vettori, non sarebbe possibile rappresentare correttamente la rotazione intrinseca dei fermioni, qui da intendersi legata al momento angolare intrinseco degli stessi. Essi, infatti, avendo spin semi-intero, non tornano alla loro posizione originale dopo un giro completo attorno ad un asse. Il punto di partenza è il seguente²:

$$\psi'_a = N_a{}^b \psi_b \quad \text{esplicitamente} \quad U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = N^{(1/2,0)}(\Lambda^{-1})\psi(\Lambda x) \quad (2.14)$$

Questa legge di trasformazione permette di mappare vettori bidimensionali a valori complessi in altri vettori bidimensionali complessi attraverso le matrici 2×2 del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$. I vettori che soddisfano a tale relazione sono denotati con "indici spinoriali³" e vengono chiamati "spinori levogiri di Weyl". È utile introdurre due matrici:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Si può mostrare che queste matrici sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$. Il compito di queste matrici è innalzare o abbassare gli indici spinoriali levogiri.

$$\psi_a = \epsilon_{ab}\psi^b \quad ; \quad \psi^a = \epsilon^{ab}\psi_b$$

È tuttavia possibile prendere in considerazione anche la matrici N^* i cui elementi sono i complessi coniugati della matrice N . Queste matrici realizzano la seguente trasformazione:

$$\chi'_a = N_a{}^b \chi_b \quad \text{esplicitamente} \quad U(\Lambda)\chi(x)U^{-1}(\Lambda) = N^{(0,1/2)}(\Lambda^{-1})\chi(\Lambda x)$$

Gli indici spinoriali puntati indicano che gli oggetti matematici che entrano nell'equazione non sono spinori levogiri, bensì "spinori destrogiri di Weyl". Anche in questo caso è utile richiamare l'attenzione a due particolari matrici.

$$\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Queste matrici, come le loro controparti levogire, sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$ e sono utilizzate per innalzare o abbassare gli indici spinoriali destrogiri.

Non solo, perchè esse soddisfano alle seguenti relazioni:

$$\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = N^*_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} N^*_{\dot{b}}{}^{\dot{d}} \epsilon_{\dot{c}\dot{d}}, \quad \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = N^*_{\dot{c}}{}^{\dot{a}} N^*_{\dot{d}}{}^{\dot{b}} \epsilon^{\dot{c}\dot{d}}, \quad (2.17)$$

Queste relazioni mostrano che $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ e $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ sono tensori invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$. Questa proprietà tornerà molto utile quando si tratterà di analizzare le invarianze della Lagrangiana di Dirac.

In generale, se si intendesse estendere questo tipo di trasformazioni a tensori spinoriali più generali, si dovrà ricorrere alla seguente legge di trasformazione:

²La matrice $U(\Lambda)$ rappresenta qui una trasformazione di Lorentz unitaria

³Nel corso della tesi gli indici spinoriali verranno notati con lettere dell'alfabeto latino (puntate e non), per distinguerli dagli indici vettoriali, che invece saranno notati con lettere dell'alfabeto greco.

$$\psi'_{a_1, \dots, a_m, a_1, \dots, a_n} = N_{a_1}^{b_1} \dots N_{a_m}^{b_m} N_{a_1}^*{}^{b_1} N_{a_n}^*{}^{b_n} \psi_{b_1, \dots, b_m, b_1, \dots, b_n}$$

Gli spinori di Weyl sono fondamentali per descrivere lo spin dell'elettrone in uno spazio tridimensionale in condizioni non-relativistiche. È per questo motivo che risulta necessario generalizzare la loro validità all'ambito relativistico. Questa operazione può essere eseguita a partire dall'equazione di Dirac introducendo opportuni oggetti matematici, detti "spinori di Dirac".

2.2.3 Gli spinori di Dirac

Per poter rendere Lorentz-invarianti gli spinori di Weyl occorre partire da un'osservazione: la definizione di $\not{\partial}$ non rende infatti l'operatore Lorentz-invariante. Se anche si riuscisse a trovare un modo di scrivere le matrici γ in modo Lorentz-invariante, a variare in base al sistema di riferimento sarebbero gli operatori ∂_j . La definizione già introdotta per le matrici $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & X_* \\ X^* & \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

unita alla rappresentazione dello spazio di Minkowski attraverso le applicazioni X_* e X^* , permettono di definire l'azione del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$ sui vettori $x \in \mathcal{M}$ come segue:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}[N] : \mathcal{M} &\rightarrow H(2, \mathbb{C}) \\ x &\rightarrow \hat{\Lambda}[N](x)_* := NX_*N^\dagger \end{aligned}$$

È tuttavia possibile dare una definizione simile per le matrici associate all'applicazione che porta alle matrici X^* .

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}[N] : \mathcal{M} &\rightarrow H(2, \mathbb{C}) \\ x &\rightarrow \hat{\Lambda}[N](x)^* := (N^\dagger)^{-1}X^*N^{-1} \end{aligned}$$

È ora possibile, attraverso gli strumenti appena introdotti, provare il seguente risultato.

Teorema. Sia $\rho : SL(2|\mathbb{C}) \rightarrow GL(4|\mathbb{C})$ la rappresentazione delle matrici del gruppo $SL(2|\mathbb{C})$ come matrici 4×4 a coefficienti complessi. Data la definizione seguente di ρ :

$$\rho(N) = \begin{pmatrix} N & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & (N^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}$$

vale per le matrici di Dirac la seguente relazione:

$$\gamma(\hat{\Lambda}[N](x)) = \rho(N)\gamma(x)\rho^{-1}(N)$$

Dimostrazione. Partendo dalla definizione di $\gamma(x)$ già fornita:

$$\begin{aligned} \gamma(\hat{\Lambda}[N](x)) &= \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \hat{\Lambda}[N](x)_* \\ \hat{\Lambda}[N](x)^* & \mathbb{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{0} & NX_*N^\dagger \\ (N^\dagger)^{-1}X^*N^{-1} & \mathbb{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & (N^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{0} & X_* \\ X^* & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^{-1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & N^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \rho(N)\gamma(x)\rho(N^{-1}) = \rho(N)\gamma(x)\rho^{-1}(N) \end{aligned}$$

■

Questo risultato suggerisce una serie di osservazioni. La prima è che le matrici $\gamma(x)$ debbano essere trasformazioni lineari da \mathbb{C}^4 a \mathbb{C}^4 . Non solo, perchè la regola di trasformazione cui queste matrici soddisfano le rende di fatto invarianti rispetto al sistema di riferimento adottato. La seconda è che ad ogni trasformazione $\hat{\Lambda}$ di Lorentz sia associata una matrice $\rho(N)$, che definisce il cambio di sistema di riferimento. È possibile visualizzare

con più semplicità il concetto attraverso la scrittura per componenti. Siano $\hat{\Lambda}^i_j$ le entrate di $\hat{\Lambda}[N]$. Inoltre, per come sono definite le matrici γ_j , è possibile giungere alla relazione seguente:

$$\gamma(x) = x^j \gamma_j \quad (2.18)$$

Mettendo assieme i risultati sin qui ottenuti si ottiene:

$$\begin{aligned} \gamma(\hat{\Lambda}[N](x)) &= \hat{\Lambda}^i_j x^j \gamma_i \\ \rho(N)\gamma(x)\rho^{-1}(N) &= \rho(N)x^j \gamma_j \rho^{-1}(N) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\hat{\Lambda}^i_j \gamma_i = \rho(N)\gamma_j \rho^{-1}(N) \quad (2.19)$$

Ciò che se ne può concludere è che, affinché siano proprio le matrici $\gamma(x)$ a definire l'equazione di Dirac, gli oggetti su cui l'equazione agisce non solo devono essere spinori (per i motivi in precedenza addotti) ma devono avere quattro componenti. Questi spinori sono chiamati "**spinori di Dirac**":

$$\psi_D \equiv \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

ovvero una generalizzazione degli spinori levogiri e destrogiri di Weyl. Essi trasformano secondo la legge seguente:

$$\psi' = \rho(N)\psi \quad (2.21)$$

e la loro rappresentazione è molto simile a quella di un vettore a quattro componenti.

2.2.4 L'operatore di Dirac

Per concludere a dovere la costruzione dell'equazione di Dirac è infine necessario soffermarsi sull'operatore $\not{\partial}$, altresì chiamato "**operatore di Dirac**". La definizione in precedenza fornita dell'operatore restituisce:

$$\not{\partial}\psi = \gamma^j \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \quad (2.22)$$

La definizione in esame presenta un problema di carattere relativistico: la derivazione rispetto alle coordinate x_j è dipendente dal sistema di riferimento adottato. Converrà dunque richiamare all'attenzione due equazioni: l'equazione del cambiamento di coordinate e l'equazione di trasformazione degli spinori. Si giunge al risultato che segue:

$$\begin{aligned} \not{\partial}'\psi' &= \gamma_j \eta'^{jk} \frac{\partial\psi'}{\partial x'^k} = \gamma_j \eta'^{jk} \rho(N) \frac{\partial\psi}{\partial x'^k} \\ &= \gamma_j \eta'^{jk} \rho(N) \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \gamma_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} \rho(N) \eta^{ri} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Le due metriche η' ed η coincidono. Questo perchè, nel caso specifico dello spazio-tempo di Minkowski, i loro coefficienti sono costanti. Si noti che ciò non sarebbe scontato nel caso in cui lo spazio-tempo fosse curvo. Per poter concludere la riflessione sull'operatore di Dirac occorre richiamare la seguente identità:

$$\not{\partial}'\psi' = \rho(N)\gamma_r \eta^{ri} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \quad (2.23)$$

che è possibile verificare dalla relazione di trasformazione di Lorentz applicata alle matrici γ^j . L'implicazione formale del ragionamento in esame è infine la seguente:

$$\not{\partial}'\psi' = \rho(N)\not{\partial}\psi \quad (2.24)$$

Se ne conclude che l'operatore di Dirac non è solo un operatore del primo ordine, ma che è invariante rispetto al cambio di sistema di riferimento, come si può notare dal fatto che esso "passi attraverso" la trasformazione dello spinore ψ . La sua azione è dunque limitata agli spinori di Dirac. Per darne infine una rappresentazione

esplicita occorre porre particolare attenzione al fatto che la definizione di $\not{\partial}$ non dipende dalle matrici γ_j , ma dalle matrici γ^j ⁴.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Se ne ricava:

$$\not{\partial} = \gamma^j \partial_{x_j} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial} \\ \mathbb{1}\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

L'equazione di Dirac può dunque essere riscritta separando le quattro componenti dello spinore di Dirac nei due spinori di Weyl.

$$\begin{cases} (-\partial_t + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial})\psi_R = m\psi_L \\ (\partial_t + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial})\psi_L = m\psi_R \end{cases} \quad (2.27)$$

2.3 Conseguenze dell'equazione di Dirac

L'equazione di Dirac costituisce, così come costruita, il nucleo da cui scaturiscono una serie di implicazioni fisiche destinate a rivoluzionare la fisica fondamentale. Nei paragrafi seguenti saranno brevemente illustrati due importanti concetti che nascono proprio dall'interpretazione di tale equazione e si annoverano tra i concetti basilari della fisica delle particelle: il concetto di "spin" e quello di "antimateria".

2.3.1 Il momento di spin

Il passaggio logico immediatamente seguente alla costruzione dell'equazione del moto di una teoria è la ricerca delle soluzioni che soddisfano all'equazione stessa. Per quanto interessante, tuttavia, la discussione dettagliata delle soluzioni all'equazione di Dirac esula dalla trattazione di questa tesi. Ciò su cui ci si intende soffermare è infatti un importante dettaglio che emerge da tali soluzioni.

Si assuma che le soluzioni dell'equazione di Dirac in assenza di forze esterne siano del tipo:

$$\psi_i = c_i e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} \quad (2.28)$$

esattamente come ci si attenderebbe dalla teoria di Schrodinger, immaginando che tutte e quattro le componenti dell'equazione siano onde piane. L'equazione di Dirac può dunque essere riscritta come segue:

$$\left[\frac{1}{c} \mathbb{1}(H + e\phi) + \gamma_1(p_x + eA_x) + \gamma_2(p_y + eA_y) + \gamma_3(p_z + eA_z) + \gamma_0 m_0 c \right] \psi = 0 \quad (2.29)$$

Dove è stata utilizzata la seguente rappresentazione delle matrici γ .

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Sostituendo le espressioni delle matrici come appena presentate nell'equazione precedente si otterrà l'equazione di Dirac scritta in componenti. Successivamente è possibile inserire l'equazione d'onda come introdotta ad inizio paragrafo osservando che ne risulterà il sistema:

$$\begin{aligned} c_1 \left(\frac{E}{c} + m_0 c \right) + c_3 p_x + c_4 (p_x - i p_y) &= 0; & c_2 \left(\frac{E}{c} + m_0 c \right) + c_3 (p_x + i p_y) + c_4 p_x &= 0 \\ c_1 p_z + c_2 (p_x - i p_y) + c_3 \left(\frac{E}{c} - m_0 c \right) &= 0; & c_1 (p_x + i p_y) - c_2 p_z + c_4 \left(\frac{E}{c} - m_0 c \right) &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si giunge al risultato di seguito presentato.

⁴Si presti particolare attenzione. In particolare, ciò è dovuto al fatto che $\gamma^j = \eta^{jk} \gamma_k$, in cui $\eta^{jk} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Per questo si inverte solo il segno di γ_0 .

$$c_1 = \frac{-c_3 p_z - c_4(p_x - ip_y)}{E/c + m_0 c}; \quad c_2 = \frac{-c_3(p_x + ip_y) + c_4 p_z}{E/c + m_0 c}$$

O, in alternativa, risolvendo per c_3 e c_4 :

$$c_3 = \frac{-c_1 p_z - c_2(p_x - ip_y)}{E/c - m_0 c}; \quad c_4 = \frac{-c_1(p_x + ip_y) + c_2 p_z}{E/c - m_0 c}$$

Questi risultati mostrano che, laddove l'energia della particella dovesse essere poco più grande della massa (caso di basse velocità, non relativistico), i valori di c_1 e c_2 risulterebbero trascurabili rispetto a c_3 e c_4 . Si parla in questo caso di **"componenti grandi"** e **"componenti piccole"** del campo di Dirac. Ci si riporta così all'equazione di Schrodinger a due componenti, che in tal caso tornano ad essere gli spinori di Pauli.

Non è tuttavia l'unico importante risultato che consegue dall'aver scritto esplicitamente l'equazione di Dirac. La scrittura esplicita permette infatti di riscrivere le componenti piccole del campo in funzione delle componenti grandi. Se poi a questo si dovesse aggiungere che l'equazione di Dirac deve, come quella di Schrodinger e quella di Klein-Gordon, presentare una densità (ρ) ed una densità di flusso (f) che gli derivino, tali per cui:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot f = 0 \quad (2.31)$$

e che Dirac stesso dimostrò avere queste espressioni:

$$\begin{aligned} \rho &= \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4 \\ f_x &= -c(\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1) \\ f_y &= -ci(-\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1) \\ f_z &= -c(\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2) \end{aligned}$$

Si può infine procedere a trovare l'espressione della corrente in componenti semplicemente moltiplicando la densità di flusso per $-e^5$:

$$\begin{aligned} J_x &= -\frac{e}{2m_0} \left[\psi_3^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x \right) \psi_3 + \psi_4^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x \right) \psi_4 + \mathcal{CC} \right] \\ &\quad - \frac{e\hbar}{2m_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4) - \frac{\partial}{\partial z} i(-\psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3) \right] \\ J_y &= -\frac{e}{2m_0} \left[\psi_3^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y \right) \psi_3 + \psi_4^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y \right) \psi_4 + \mathcal{CC} \right] \\ &\quad - \frac{e\hbar}{2m_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3) - \frac{\partial}{\partial x} (-\psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4) \right] \\ J_z &= -\frac{e}{2m_0} \left[\psi_3^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + eA_z \right) \psi_3 + \psi_4^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + eA_z \right) \psi_4 + \mathcal{CC} \right] \\ &\quad - \frac{e\hbar}{2m_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} i(-\psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3) - \frac{\partial}{\partial y} (\psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3) \right] \end{aligned}$$

Ciò che balza all'occhio nell'osservare queste correnti è che, mentre da un lato i primi termini sono quelli che ci saremmo attesi anche nel caso non relativistico, i secondi termini di ciascuna componente della corrente sono completamente diversi, ma emergono necessariamente dai calcoli. Ciò che emerge dalla teoria di Dirac è diverso da ciò che accade nell'elettromagnetismo classico, dove la distinzione tra corrente reale e corrente di magnetizzazione è un processo arbitrario. Qui la densità di corrente emerge come un contributo intrinseco. Si è di fronte ad una dimostrazione dell'esistenza del cosiddetto **"spin"**, un contributo del momento angolare che non emerge se non quando si studia l'equazione di Dirac, ovvero si passa all'ambito ultra-relativistico della meccanica quantistica.

⁵Nelle formule che seguono, la dicitura "CC" indica il complesso coniugato del termine precedente.

2.3.2 La scoperta del positrone

La conclusione di questo capitolo intende offrire al lettore un esempio storicamente fondamentale dell'interpretazione dell'equazione di Dirac e degli oggetti matematici su cui essa si applica. L'esempio in questione riguarda la scoperta del "positrone", l'anti-particella "gemella" dell'elettrone, cronologicamente la prima ad essere teorizzata e scoperta.

La relazione relativistica tra energia ed impulso costituisce, come spiegato in precedenza, il punto di partenza comune delle equazioni di Klein-Gordon e Dirac. Non è tuttavia complicato osservare che tale relazione ammetta come possibili soluzioni valori dell'energia negativi. Secondo Dirac tali valori non potevano essere scartati in una teoria quantistica perchè in generale una perturbazione può causare una transizione da stati ad energia positiva a stati ad energia negativa.

Il problema di affrontare la descrizione di particelle con energia negativa risiede nel fatto che per esse non esiste un valore minimo di energia che ne rappresenti la stabilità. Dirac venne così indotto a pensare che fosse lo stato del vuoto ad occupare tutti i possibili valori negativi, costituendo ciò che viene chiamato "mare di Dirac". In accordo con il principio di esclusione di Pauli, dunque, nessun'altra particella avrebbe potuto occupare quegli stati. Il ragionamento di Dirac si ritrovò tuttavia a doversi confrontare con l'eventualità che un elettrone ad energia negativa potesse, per effetto "tunnel", ritrovarsi in uno stato di energia positiva, lasciando così una lacuna nel mare di Dirac. O, equivalentemente, che l'elettrone in uno di questi gusci potesse essere eccitato con un'energia minima di $2m_0c^2$ dallo stato di riposo ad energia negativa allo stato di riposo ad energia positiva. Fu questo il passo decisivo che portò Dirac stesso a teorizzare l'esistenza del "positrone".

Per rendersi meglio conto della cosa si osservi l'equazione che descrive il moto di una particella relativistica in un campo elettromagnetico:

$$\frac{d(\gamma m_0 v^i)}{dt} = -e(E^i + (\vec{v} \times \vec{B})^i) \quad (2.32)$$

In questo caso risulta esplicito che cambiare il segno della massa (accettando valori negativi dell'energia) cambi automaticamente il segno della carica corrispondente.

L'idea proposta da Dirac nel 1931 venne accettata non senza difficoltà dalla comunità scientifica all'epoca. Numerosi erano stati infatti i tentativi di evitare di postulare l'esistenza di nuove particelle, strada vista con sospetto da molti fisici, tra cui lo stesso Dirac, che cercò di interpretare il moto dell'elettrone ad energia negativa in un campo magnetico come l'analogo moto di una particella con carica ed energia positiva. Anche l'idea che la misteriosa particella potesse essere il protone venne rapidamente scartata, questa volta a causa delle implicazioni che ciò avrebbe avuto sul modello dell'atomo di idrogeno, essenzialmente fondato sulla grande differenza tra le masse di elettrone e protone. La soluzione al caso venne dunque lasciata ai risultati sperimentali, che non tardarono a mostrarsi. Nel 1929, gli esperimenti sui raggi cosmici di Dmitri Skobel'syn e pochi anni più tardi quelli di Patrick Blackett e Giuseppe Occhialini portarono infatti l'evidenza sperimentale dell'esistenza del positrone, ufficializzata nel 1932 dagli esperimenti di Carl Anderson. Sperimentalmente, inoltre, fu verificato che l'energia necessaria per la creazione di una coppia elettrone-positrone fosse proprio quella di $2m_0c^2$ già proposta da Dirac.

Una volta mostrata l'effettiva esistenza, rimaneva dunque il problema sull'interpretazione fisica di queste nuove particelle. Una tra le più interessanti fu quella di Richard Feynman, che, basandosi sui risultati ottenuti assieme a John Wheeler riguardo la teoria della "materia assorbente" e sulla completa reversibilità temporale dei fenomeni quantistici, propose l'idea che il positrone fosse un elettrone in moto a ritroso nel tempo, e così fosse per tutte le antiparticelle. Questa intuizione, oggi meglio conosciuta con il nome di "teoria di Feynman-Stueckelberg", ebbe grande impatto sul panorama della fisica del tempo, perchè mise in discussione il concetto stesso di causalità, il "faro" che aveva pochi decenni prima guidato Einstein nello sviluppo della teoria della relatività.

A prescindere tuttavia dall'interpretazione fisica associata a tali particelle, tutto questo discorso è volto a mostrare che l'equazione di Dirac rappresentò il primo passo nella direzione della scoperta dell'antimateria, un crocevia fondamentale nello sviluppo di tutta la fisica successiva.

Capitolo 3

Nozioni di base sul formalismo Lagrangiano

Il capitolo seguente è atto ad offrire al lettore alcune nozioni di base sul formalismo lagrangiano, che confluiranno assieme a ciò che è stato trattato in precedenza verso la costruzione di alcuni fondamentali risultati ottenuti dalla prima formulazione della teoria della QED.

3.1 Il principio di minima azione e le equazioni del moto

È utile richiamare all'attenzione alcune definizioni che saranno fondamentali nello sviluppo della teoria che segue. Le definizioni da introdurre sono quella di "campo", "ipersuperficie di tipo spazio" (nello spazio-tempo di Minkowski) ed "azione".

Definizione. Dato lo spazio-tempo di Minkowski corredato dalle quadri-coordinate x^μ , un "campo" viene definito come una qualunque funzione delle coordinate $\psi \equiv \psi(x)$. Esso può essere scalare, tensoriale, spinoriale o di altra natura. Ad ogni tipologia di campo sono associati gli indici i tali che $\psi(x) \equiv \psi^i(x)$.

Definizione. Una "ipersuperficie di tipo spazio" nello spazio-tempo di Minkowski $\sigma(x)$ è definita tale se e solo se il suo vettore normale $n_\mu(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x^\mu}$ è un vettore di tipo tempo in ogni punto x^μ . Ne consegue che:

$$\Delta s^2(n_\mu) = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = n^\nu n_\nu > 0$$

Definizione. Si definisce "azione" la grandezza fisica \mathcal{S} , definita come segue:

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}$$

dove si assume che Ω sia un dominio nello spazio-tempo di Minkowski (che può eventualmente coincidere con tutto lo spazio) e \mathcal{L} è denominata "densità di Lagrangiana". Si postula che $\mathcal{L}(\psi)$ sia un campo scalare reale ed invariante per le trasformazioni di Lorentz, cosa che assicura la Lorentz-invarianza anche per la grandezza $\mathcal{S}[\psi]$. Non solo, perchè per il modello in esame si prenderà in considerazione anche che la \mathcal{L} sia una funzione di ψ , ma anche delle sue derivate prime.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x), \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \psi(x), \dots, \partial_{\mu_1 \dots \mu_n} \psi(x))$$

La dinamica del campo $\psi(x)$ è data dal principio di minima azione, che permette fisicamente soluzioni che ne minimizzino l'integrale.

Si prendano ora due campi $\psi^i(x)$ e $\psi'^i(x)$, e la loro differenza $\delta\psi^i$.

$$\delta\psi^i = \psi'^i(x) - \psi^i(x) \tag{3.1}$$

Quest'ultima grandezza ($\delta\psi^i$) vada sotto il nome di "variazione di campo"¹.

A questo punto della trattazione conviene introdurre una grandezza cui da ora in poi si darà il nome di "variazione di campo generalizzata", e che verrà segnalata con il simbolo $\bar{\delta}\psi^i$.

$$\bar{\delta}\psi^i = \psi'^i(x') - \psi^i(x) \tag{3.2}$$

Quello che può sembrare un dettaglio di poco conto nasconde in realtà un motivo preciso. Questo perchè, nel caso di trasformazioni di Lorentz infinitesime:

¹I due campi devono chiaramente possedere lo stesso tipo di indici.

$$\begin{aligned}\delta\bar{\psi}^i &= (\delta_j^i + \omega_j^i)\psi^j - \psi^i \\ &= \omega_j^i\psi^j \\ &= \omega_j^i g^{j\alpha}\psi_\alpha\end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i lati per δ_i^ρ si ottiene:

$$\begin{aligned}\delta\bar{\psi}^\rho &= \delta_i^\rho \omega_j^i g^{j\alpha}\psi_\alpha \\ &= \frac{1}{2}\omega_j^i (\delta_i^\rho g^{j\alpha} - \delta_j^\rho g^{i\alpha})\psi_\alpha\end{aligned}$$

dove è stata adoperata l'antisimmetria della matrice ω_j^i per scambio degli indici. Abbassando a dovere gli indici si ottiene infine.

$$\delta\bar{\psi}^\rho = \frac{1}{2}\omega_{ij}(\Sigma^{ij})^\alpha_\rho\psi_\alpha$$

Dalle definizioni di $\delta\psi^i$ e $\delta\bar{\psi}^i$ segue che:

$$\delta\bar{\psi}^i = \delta\psi^i + \psi^{i'}(x') - \psi^{i'}(x) = \delta\psi^i + \partial_\nu\psi^i\delta x^\nu$$

Si può dunque scrivere:

$$\delta\psi^\alpha = -\omega^\mu_{\nu}x^\nu\partial_\mu\psi^\alpha + \frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}(\Sigma^{\rho\sigma})^\alpha_\beta\psi^\beta \quad (3.3)$$

Per il momento questo risultato non sembra suggerire molto. Per poter dare infatti una conclusione a questo calcolo sarà necessario far uso di un importante risultato, noto come "**Teorema di Noether**". Per il momento basti osservare che tale matrice Σ agisce direttamente sugli indici del campo.

Si può dunque definire la variazione dell'azione corrispondente:

$$\delta\mathcal{S} = \mathcal{S}[\psi + \delta\psi] - \mathcal{S} = \int_\Omega d^4x A(x)\delta\psi(x) + \dots \approx \int_\Omega d^4x A(x)\delta\psi(x) \quad (3.4)$$

Nell'equazione appena riportata i puntini indicano la presenza di termini di ordine superiore alla derivata prima, mentre $A(x)$ indica la cosiddetta "**derivata variazionale** (o funzionale)", definita come $A(x) \equiv \frac{\delta\mathcal{S}[\psi]}{\delta\psi}$.

Il passaggio seguente è cruciale, perchè mette in relazione l'integrando direttamente con la grandezza $\delta\mathcal{S}$. Il teorema cui fare riferimento v`a sotto il nome di "**Lemma fondamentale del calcolo variazionale**".

Teorema. *Lemma fondamentale del calcolo variazionale.* Sia $f(x)$ una funzione di classe C^0 in un intervallo aperto (x_1, x_2) e sia $h(x)$ una funzione ammissibile di classe C^1 nello stesso intervallo (ciò implica che $h(x_1) = h(x_2) = 0$). Se vale che:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)h(x) = 0$$

e questa condizione vale $\forall h(x)$, allora $f(x) \equiv 0$.

Dimostrazione.

(\rightarrow) È evidente che, nel caso in cui $f(x) \equiv 0$, il valore dell'integrale è identicamente nullo.

(\leftarrow) Per assurdo, si ponga $f(x) > 0$ per un certo valore x_0 . Dal momento che $f(x)$ è una funzione continua, varrà per essa il teorema di permanenza del segno, che fa sì che essa rimanga strettamente positiva in un dominio compatto Ω intorno a x_0 . Essendo poi $h(x)$ una funzione arbitraria (non identicamente nulla, ma ad esempio positiva in Ω), il valore dell'integrale non può essere nullo, contraddicendo l'ipotesi del teorema.

■

Nel caso in esame, l'integrale si presenta nella forma:

$$\delta\mathcal{S}[\psi] = \int_\Omega \frac{\delta\mathcal{S}[\psi]}{\delta\psi^i} \delta\psi^i(x) \quad (3.5)$$

Trovare il minimo dell'azione $\mathcal{S}[\psi]$ significa porre $\delta\mathcal{S}[\psi] = 0$. Ciò che ne consegue per il teorema è che:

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\psi]}{\delta\psi^i} = 0 \quad (3.6)$$

E questo $\forall\delta\psi^i$.

Si consideri ora la seguente scrittura dell'integrale d'azione:

$$\mathcal{S}[\psi] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu}\psi) \quad (3.7)$$

È possibile riscrivere allora il $\delta\mathcal{S}[\psi]$ come segue:

$$\delta\mathcal{S}[\psi] = \mathcal{S}[\psi + \delta\psi] - \mathcal{S}[\psi] = \int_{\Omega} d^4x \{ \mathcal{L}(\psi + \delta\psi, \partial_{\mu}\psi + \partial_{\mu}\delta\psi) - \mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu}\psi) \}$$

Questa scrittura può essere espansa in serie di Taylor.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[\psi] &= \int_{\Omega} d^4x \{ \mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu}\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \partial_{\mu}\delta\psi - \mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu}\psi) \} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \delta\psi \right) - \left(\partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \right) \delta\psi \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \right) \right] \delta\psi + \int_{\partial\Omega} d\sigma_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \right) \delta\psi \end{aligned}$$

Nella riscrittura finale, il secondo addendo integrale è stato riscritto adoperando il teorema di Gauss, dal momento che esso risultava essere l'integrale sul volume della divergenza dell'integrando finale. Chiaramente, il dominio d'integrazione non è più Ω , ma il suo bordo, denotato come $\partial\Omega$ (da non confondere con il simbolo di derivazione parziale). Dalle condizioni al contorno segue tuttavia che $\delta\psi \rightarrow 0$ sul bordo della regione $\partial\Omega$. Ne consegue che:

$$\delta\mathcal{S}[\psi] = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \right) \right] \delta\psi = 0 \quad (3.8)$$

Secondo il teorema precedente risulta allora che la derivata variazionale è:

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\psi]}{\delta\psi^i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \right) \quad (3.9)$$

Non solo, perchè sapere che essa deve essere identicamente nulla porta alla formulazione delle equazioni del moto, anche dette "equazioni di Eulero-Lagrange".

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Un importante dettaglio da tenere a mente è che, per come sono fatte le equazioni di Eulero-Lagrange, aggiungere alla Lagrangiana un termine di divergenza $\partial_{\mu}R^{\mu}(\psi)$ non dà luogo a modifiche nelle equazioni.

3.2 Simmetrie globali

Come sarà più chiaro in seguito, alcuni dei più importanti risultati ottenuti da Dirac sono stati raggiunti mediante lo studio delle simmetrie dell'equazione di Dirac e della sua Lagrangiana. Occorre quindi porre l'attenzione sulle trasformazioni delle coordinate e dei campi. Si consideri per prima cosa il seguente sistema di trasformazioni infinitesime:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad (3.11)$$

$$\psi'^i(x') = \psi^i(x) + \Delta\psi^i(x) \quad (3.12)$$

Definizione. Una trasformazione di coordinate e campi viene detta "trasformazione di simmetria" se e solo se lascia invariato l'integrale d'azione².

²Il dominio Ω' è ottenuto da Ω attraverso la trasformazione delle coordinate.

$$\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_{\mu}\psi(x)) = \int_{\Omega'} d^4x \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial'_{\mu}\psi'(x'))$$

Si può riscrivere la trasformazione dei campi come segue:

$$\psi'^i(x + \delta x) = \psi'^i(x) + \partial_{\mu}\psi'^i(x)\delta x^{\mu} = \psi^i(x) + \Delta\psi^i(x) \quad (3.13)$$

Dunque:

$$\Delta\psi^i(x) = [\psi'^i(x) - \psi^i(x)] + \partial_{\mu}\psi^i(x)\delta x^{\mu} = \delta\psi^i(x) + \partial_{\mu}\psi^i(x)\delta x^{\mu} \quad (3.14)$$

Che, a ragionarci su, è proprio quella definizione che in precedenza è stata data a $\delta\bar{\psi}$, la variazione di campo generalizzata. Quella che segue è una riscrittura delle trasformazioni già presentate, posta però in modo tale da risultare più utile nel prosieguo.

$$\delta x^{\mu} = X^{\mu}_I \xi^I \quad (3.15)$$

$$\delta\psi^i(x) = Y^i_I(x, \psi(x), \partial_{\mu}\psi(x))\xi^I \quad (3.16)$$

Dove si è posto che $I = 1, 2, \dots, N$. Questo tipo di trasformazioni sono dette "trasformazioni globali N-parametriche"³. Più avanti si farà invece riferimento alle "trasformazioni locali", che sono invece coordinate-indipendenti.

Alla luce del procedimento appena illustrato, è possibile riscrivere la trasformazione del campo ψ^i , ovvero ψ'^i .

$$\psi'^i(x) = \psi^i(x) + [Y^i_I(x, \psi(x), \partial_{\mu}\psi(x)) + \partial_{\mu}\psi^i(x)X^{\mu}_I]\xi^I \quad (3.17)$$

Nello specifico, si possono definire altri due tipi di trasformazioni, ovverosia quelle "spaziotemporali" e quelle "di simmetria interna". Ciò che le differenzia è che il termine δx^{μ} è nullo per le seconde.

3.3 Il teorema di Noether

Avendo introdotto dapprima il formalismo lagrangiano e poi le trasformazioni di simmetria, è ora possibile discutere di un importante risultato che riguarda la loro connessione concettuale: il teorema di Noether.

Teorema. Ad ogni trasformazione di simmetria N-parametrica continua corrispondono N invarianti dinamici.

Dimostrazione. Si assuma che l'azione sia invariante per una trasformazione di simmetria ($\delta\mathcal{S}[\psi] = \mathcal{S}'[\psi'] - \mathcal{S}[\psi] = 0$). Dato che la trasformazione delle coordinate segue la seguente espressione:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$$

si può scrivere il determinante dello jacobiano della trasformazione come segue.

$$\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \det(\delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}\delta x^{\mu}) = 1 + \frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}$$

Si badi ad un importante dettaglio: i termini di ordine superiore al primo sono stati trascurati.

$$\mathcal{S}'[\psi'] = \int_{\Omega} d^4x (1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu}) \mathcal{L}\left(\psi'(x + \delta x), \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu}\psi'(x + \delta x)\right) \quad (3.18)$$

Si passi ora all'osservazione di un paio di relazioni utili:

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\mu} - \partial_{\mu}\delta x^{\nu} \quad ; \quad \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\delta x^{\mu} \quad (3.19)$$

Come già evidenziato in precedenza, verranno presi in considerazione solamente i termini del primo ordine. Si giunge dunque al seguente risvolto:

$$\mathcal{S}'[\psi'] = \int_{\Omega} d^4x (1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu}) \mathcal{L}(\psi + \Delta\psi, (\delta^{\nu}_{\mu} - \partial_{\mu}\delta x^{\nu})(\partial_{\nu}\psi + \partial_{\nu}\Delta\psi)) \quad (3.20)$$

³Con il termine "globali" si fa riferimento al fatto che esse dipendano dalle coordinate.

L'attuale passo del procedimento permette di espandere in serie di Taylor l'integrando⁴ (si badi alla rimozione dei termini di ordini superiori al primo).

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'[\psi'] &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu}\psi)[1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu}] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^i}\Delta\psi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}(\partial_{\mu}\Delta\psi^i - \partial_{\nu}\psi^i\partial_{\mu}\delta x^{\nu}) \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_{\mu}\delta x^{\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^i}\delta\psi^i + \frac{\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}\partial_{\mu}\delta\psi^i - \frac{\mathcal{L}}{\partial\psi^i}\partial_{\mu}\psi^i\delta x^{\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\nu}\psi^i}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\psi^i\delta x^{\mu} \right\} \\ &\quad + \int_{\Omega} d^4x \left\{ \mathcal{L} + \mathcal{L}(\partial_{\mu}\delta x^{\mu}) + (\partial_{\mu}\mathcal{L})\delta x^{\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^i}\delta\psi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}\partial_{\mu}\delta\psi^i \right\} \end{aligned}$$

Ora risulta possibile applicare le equazioni di Eulero-Lagrange al calcolo, ottenendo:

$$\mathcal{S}'[\psi'] = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \mathcal{L} + \partial_{\mu}(\mathcal{L}\delta x^{\mu}) + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}\delta\psi^i \right) \right\} \quad (3.21)$$

Le trasformazioni di coordinate e campi sono l'ultimo ingrediente che occorre.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[\psi] &= \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}\delta\psi^i + \mathcal{L}\delta x^{\mu} \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}Y^i_I + \mathcal{L}X^{\mu}_I \right\} \xi^I = 0 \end{aligned}$$

Rimane da notare che se da un lato i parametri ξ^I sono linearmente indipendenti, dall'altro il dominio Ω scelto è del tutto arbitrario. L'unica possibile via d'uscita è che:

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}Y^i_I + \mathcal{L}X^{\mu}_I \right) = 0 \quad (3.22)$$

Questa grandezza la si definirà, d'ora in avanti, "**quadri-corrente di Noether**" o "**quadri-corrente generalizzata**".

$$J^{\mu}_I \equiv - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\psi^i}Y^i_I + \mathcal{L}X^{\mu}_I \right) \quad (3.23)$$

Il fatto che sia la quadri-divergenza della corrente ad essere nulla permette di applicare il teorema di Gauss:

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu}J^{\mu}_I = \int_{\sigma_2} d\sigma_{\mu}J^{\mu}_I - \int_{\sigma_1} d\sigma_{\mu}J^{\mu}_I = 0 \quad (3.24)$$

Dove σ_1 e σ_2 sono le ipersuperfici che delimitano la regione di spazio-tempo che si prende in considerazione. A partire da tali considerazioni, si può definire una grandezza $C_I[\sigma]$ come segue:

$$C_I[\sigma] = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu}J^{\mu}_I \quad (3.25)$$

Dal momento che la corrente J^{μ}_I si conserva, risulta conseguentemente evidente che, stando alla definizione, anche $C_I[\sigma]$ sia una grandezza conservata, ed indipendente dalla σ scelta. In particolare, a voler considerare una superficie σ che rappresenti il luogo dei punti dello spazio-tempo che risiedono nello stesso istante di tempo, si otterrà una grandezza conservata proprio nel tempo, ovvero sia un "**invariante dinamico**".

$$C_I[t_2] = C_I[t_1]; \quad C_I[t] = \int d^3x J^0_I(x) \quad (3.26)$$

Si presti tuttavia attenzione ai seguenti due particolari:

1. Un grado di libertà del campo è definito come uno $\psi^i(x)$ tale che, se inserito all'interno delle equazioni del moto che regolano la dinamica del campo, esso ne sia soluzione $\forall x \in \Omega$. Ebbene, il teorema di Noether vale solo in questa condizione (detta anche "**condizione on shell**").

⁴Tra il primo ed il secondo passaggio è stata adoperata la seguente identità: $\delta\partial_{\mu}\psi^i = \partial_{\mu}\delta\psi^i$. Questo perchè la variazione è coordinate-indipendente.

2. Il modo in cui è stato enunciato il teorema lascia intendere che è possibile modificare la corrente conservata mediante trasformazioni del tipo:

$$\tilde{J}_I^\mu = J_I^\mu + \partial_\nu f_I^{\mu\nu}$$

Dove $f_I^{\mu\nu}$ risulta antisimmetrico negli indici μ, ν . Questo affinché:

$$\partial_\mu \tilde{J}_I^\mu = \partial_\mu J_I^\mu + \partial_\mu \partial_\nu f_I^{\mu\nu} = 0$$

Questo si riflette nella possibilità di costruire correnti differenti a partire da una sola.

Quello appena ottenuto è un risultato tutt'altro che banale. Grazie ad esso si ha la possibilità di connettere la teoria sin qui descritta con la concretezza delle osservabili fisiche. Il prezzo da pagare è tuttavia quello di dover necessariamente passare per la costruzione della Lagrangiana del sistema, un dettaglio affascinante, se si pensa a quanto ci suggerisca sul funzionamento della natura. Il teorema di Noether offre, ad esempio, un buon modo per capire se un'equazione del moto possa essere formalmente corretta per descrivere un sistema. Questo perchè concretamente il teorema di Noether chiede che:

- (a) le equazioni del moto derivino da un principio variazionale;
- (b) l'azione (e di conseguenza la Lagrangiana) sia invariante sotto le simmetrie richieste.

Per fare un esempio concreto, si pensi all'equazione di Abraham-Lorentz-Dirac, introdotta per descrivere l'autocampo di una particella, il campo che una particella carica sente per la sua stessa presenza.

$$m\omega^\mu = \frac{q}{c} F_{ext}^{\mu\nu} u_\nu + \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^5} \left\{ \omega^2 u^\mu + c^2 \frac{\partial \omega^\mu}{\partial s} \right\} \quad (3.27)$$

Tra i tanti problemi che affliggono questa equazione⁵ vi è proprio quello di non derivare da principi variazionali, cosa che spinge alla richiesta di passare da una teoria di campo classica ad una teoria di campi quantistici. Per concludere però con un esempio in cui il teorema di Noether gioca un ruolo positivo, si può evidenziare come da questo (in particolare dall'espressione della quadri-corrente) si possa passare alla costruzione del "tensore energia-impulso" ($T^{\mu\nu}$), che descrive il flusso d'energia e quantità di moto associati ad un campo.

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu \quad (3.28)$$

Esso risulta essere un elemento indispensabile, ad esempio, per la costruzione delle equazioni di Einstein nell'ambito della relatività generale.

⁵Dove $F_{ext}^{\mu\nu}$ indica il tensore di Maxwell del campo esterno.

Capitolo 4

La Lagrangiana della QED

Ora che sono stati introdotti tutti gli elementi necessari per comprendere le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica quantistica da una parte, e le nozioni basilari di comprensione del formalismo lagrangiano dall'altra, è possibile procedere alla costruzione delle Lagrangiane di alcune particelle, o per meglio dire, campi.

4.1 Assunti di base per la costruzione di Lagrangiane

È già stato evidenziato che la Lagrangiana associata ad un sistema debba essere uno scalare di Lorentz. Il metodo canonico di costruzione delle Lagrangiane prevede tuttavia che siano rispettate delle regole specifiche:

- La Lagrangiana deve essere una funzione del campo (scalare, vettoriale, spinoriale) e delle sue derivate, calcolate però tutte nello stesso punto x^μ dello spazio-tempo. Questo principio prende il nome di "località";
- la Lagrangiana deve essere invariante per trasformazioni di Poincarè;
- la Lagrangiana deve possedere solo costanti d'accoppiamento che abbiano unità di misura ≥ 0 . Se così non fosse, infatti, non sarebbe poi possibile rinormalizzarla nel passaggio ad una teoria di campi quantistici.

In generale, una Lagrangiana può sempre essere suddivisa in due termini: uno detto "Lagrangiana libera" (\mathcal{L}_0) e l'altro detto "Lagrangiana d'interazione" (\mathcal{L}_{int}).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (4.1)$$

Nello specifico, mentre \mathcal{L}_0 deve essere una forma bilineare nei campi e nelle sue derivate, \mathcal{L}_{int} deve essere una funzione delle potenze del campo e delle derivate di ordine superiore al secondo. Il vero problema riguarda tuttavia \mathcal{L}_{int} nello specifico, per la quale non vi sono prescrizioni generali per garantirne la corretta costruzione. Si può tuttavia immaginare che all'interno della Lagrangiana possano rientrare anche altri termini già introdotti, come $\eta_{\mu\nu}$, σ^μ , $\tilde{\sigma}^\mu$ e ϵ_{ab} , in accordo con il principio della Lorentz-covarianza.

4.2 Modello a campo spinoriale

L'equazione di Dirac può essere alternativamente riscritta come segue:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (4.2)$$

dove, per dovere di completezza, si ricorda che:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}; \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix}$$

Il primo passo utile è quello di formulare l'equazione per un campo spinoriale non-massivo. Per farlo occorre partire dallo spinore di Weyl, ovvero ϕ_a . Ricordando che per la Lorentz-covarianza occorrerà fare uso soltanto di strumenti quali $\partial_\mu \phi_a$, σ^μ , $\tilde{\sigma}^\mu$ e $\eta_{\mu\nu}$, la forma più semplice da cui è possibile partire è la seguente:

$$i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} \partial_\mu \phi_a = 0 \quad (4.3)$$

Si può verificare che l'equazione appena introdotta sia compatibile con l'equazione d'onda, applicandoci l'operatore $-i\sigma_{\dot{a}a}^\nu \partial_\nu$. Per spiegarsi il motivo per cui questo avviene si ricorda che le matrici σ soddisfano alla seguente relazione.

$$(\sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu + \sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu)_b^a = 2\eta^{\mu\nu} \delta_b^a \quad (4.4)$$

Nel caso in considerazione, si può osservare che il vettore di Lubansky-Pauli corrisponde a $W_\mu = \frac{1}{2}P_\mu$ ¹. Dunque, l'analisi della rappresentazione irriducibile di Poincarè permette di trarne che l'elicità del campo è $\lambda = \frac{1}{2}$. L'equazione di partenza viene comunemente detta "equazione di Weyl". Lo stesso procedimento potrà inoltre essere applicato anche allo spinore $\chi_{\dot{a}}$, ottenendo l'altra equazione di Weyl, che corrisponde, stando allo stesso criterio, ad un'elicità $\lambda = -\frac{1}{2}$.

$$i(\sigma^\mu)_{\dot{a}a}\partial_\mu\chi^{\dot{a}} = 0 \quad (4.5)$$

Il nodo della questione sta nel fatto che le equazioni di Weyl descrivono il comportamento di particelle non-massive. Per introdurre un termine di massa occorre fare leva su un paio di dettagli, in primo luogo il fatto che, in entrambe le equazioni, ci sia un indice libero, in secondo il fatto che sia ϕ_a che $\chi_{\dot{a}}$ non sono provvisti di indice. Occorrerà dunque scrivere un'equazione che combini i due spinori.

$$\begin{aligned} i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\partial_\mu\phi_a - m\chi^{\dot{a}} &= 0 \\ i(\sigma^\mu)_{\dot{a}a}\partial_\mu\chi^{\dot{a}} - m\phi_a &= 0 \end{aligned}$$

È possibile agire sulla prima delle due equazioni mediante l'operatore $i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu$.

$$-(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu)_b{}^a\partial_\mu\partial_\nu\phi_a - im(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu\chi^{\dot{a}} = 0$$

Sfruttando ora la seconda equazione del sistema è possibile riscrivere il tutto nel seguente modo:

$$-(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu)_b{}^a\partial_\mu\partial_\nu\phi_a - m^2\phi_b = 0 \quad (4.6)$$

Grazie alla commutatività delle derivate è possibile riscrivere.

$$-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu + \sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu)_b{}^a\partial_\mu\partial_\nu\phi_a - m^2\phi_b = 0 \quad (4.7)$$

La relazione sulle matrici σ permette infine di ritrovare:

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi_b &= 0 \\ (\square + m^2)\chi^{\dot{a}} &= 0 \end{aligned}$$

Il fatto che sia possibile ricavare tali relazioni ha un significato fisico ben preciso: conferma cioè che tutto ciò che è stato fatto sia in accordo con la relazione energia-impulso relativistica.

Per poter elaborare oltre l'equazione di Dirac, tuttavia, occorre introdurre il cosiddetto "spinore aggiunto di Dirac" ($\bar{\psi}$), definito nel modo seguente:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 \quad (4.8)$$

Per riferirsi agli spinori a due componenti, lo spinore aggiunto può essere riscritto come segue:

$$\bar{\psi} = (\bar{\chi}^a, \bar{\phi}_{\dot{a}}) \quad (4.9)$$

e l'equazione di Dirac può essere riscritta, attraverso la coniugazione Hermitiana:

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0 \quad (4.10)$$

Si noti inoltre come, dal momento che $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ e $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$, si possa ottenere $\psi^\dagger = \bar{\psi}\gamma^0$ (moltiplicando ambo i lati a destra per γ^0). Detto ciò, sostituendo tale risultato e moltiplicando nuovamente a destra per γ^0 nell'equazione precedente si giunge a:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 + m\bar{\psi} = 0 \quad (4.11)$$

Dalle proprietà delle matrici γ segue poi che $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$. Pertanto:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (4.12)$$

L'ultimo risultato va sotto il nome di "equazione di Dirac per il campo libero coniugata".

¹Dove P_μ rappresenta il quadri-impulso relativistico.

4.3 La Lagrangiana di un campo spinoriale

4.3.1 La Lagrangiana del campo libero

Si può costruire una lagrangiana di campo libero che riproduca l'equazione di Dirac. La si chiamerà \mathcal{L}_0 .

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) \quad (4.13)$$

Si può verificare che, adottando ψ e $\bar{\psi}$ come coordinate generalizzate, si possano ottenere le equazioni del moto attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange. Un altro importante aspetto da verificare quando si tratta di Lagrangiane è, come già affermato in precedenza, che essa sia invariante per trasformazioni di Poincarè, dunque anche per trasformazioni di Lorentz. Per fare ciò occorrerà semplicemente osservare se l'espressione data corrisponda o meno ad uno scalare di Lorentz. Conoscendo dunque la forma di ψ e $\bar{\psi}$ espressi attraverso spinori a due componenti si ottengono:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= (\bar{\chi}^a \bar{\phi}_{\dot{a}}) \begin{pmatrix} \phi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix} = \bar{\chi}^a \phi_a + \bar{\phi}_{\dot{a}} \chi^{\dot{a}} \\ \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi &= (\bar{\chi}^a \bar{\phi}_{\dot{a}}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix} = \bar{\chi}^a (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} \partial_\mu \chi^{\dot{a}} + \bar{\phi}_{\dot{a}} (\tilde{\sigma}^\mu)^{a\dot{a}} \partial_\mu \phi_a \end{aligned}$$

Che si può verificare per entrambi che siano scalari di Lorentz, dunque Lorentz-invarianti.

Il passo successivo consiste nell'introdurre un potenziale (scalare), da sottrarre alla Lagrangiana del campo libero.

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) - V(\psi, \bar{\psi}) \quad (4.14)$$

dove, ricordando le già citate regole di costruzione delle Lagrangiane, si deduce che la scelta più semplice è:

$$V(\psi, \bar{\psi}) = \lambda(\bar{\psi}\psi)^2 \quad (4.15)$$

Ora che è stata introdotta la questione del potenziale si può cercare di trarre alcune conclusioni. Il punto di partenza è, ancora una volta, la Lagrangiana del campo libero di Dirac.

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.16)$$

Già dai primi capitoli era stato introdotto il gruppo delle trasformazioni unitarie $U(1)$. Ebbene, questa Lagrangiana risulta essere invariante per tali trasformazioni:

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{ie\xi} \psi \rightarrow \delta\psi' \approx ie\xi\psi \\ \bar{\psi}' &= e^{ie\xi} \bar{\psi} \rightarrow \delta\bar{\psi}' \approx ie\xi\bar{\psi} \end{aligned}$$

dove i risultati su $\delta\psi'$ e $\delta\bar{\psi}'$ sono riferiti all'espansione per esponenti piccoli².

Il teorema di Noether apre la strada alla definizione della quadri-corrente conservata. Si noti che tali trasformazioni sono locali, in quanto non riguardanti le derivate.

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} ie\psi = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \quad (4.17)$$

Sarà dunque possibile calcolare la corrispondente carica conservata, che sarà denominata Q .

$$Q = \int d^3x j^0 = e \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0 \psi = e \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (4.18)$$

Il risultato appena ottenuto è molto importante, perchè rappresenta la conservazione della carica elettrica del campo spinoriale, almeno (in questo caso) per quanto concerne il campo spinoriale libero.

²Si presti attenzione alla notazione: qui infatti $\delta\bar{\psi}$ indica semplicemente la variazione del campo coniugato di Dirac, non una diversa definizione della variazione.

4.3.2 La Lagrangiana nel campo elettromagnetico

Il passo successivo nella costruzione della Lagrangiana consiste nell'inserire la parte che rappresenta l'interazione con il campo elettromagnetico, che, occorre ricordarlo, è un campo vettoriale senza massa. Nel caso di un campo classico si ha:

$$\mathcal{L}_{int} = j^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (4.19)$$

Dove si è fatto uso proprio del j^μ introdotto al paragrafo precedente.

Si può dunque modificare la Lagrangiana precedentemente introdotta inserendovi semplicemente il potenziale:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.20)$$

Prima di procedere con l'analisi della Lagrangiana in questione sarà tuttavia necessario riportare alla memoria alcune importanti proprietà di A_μ . Si sa infatti che la trasformazione di gauge $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\xi(x)$ ³ lascia invariato il tensore $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Si desidera rendere l'intera Lagrangiana invariante per tale trasformazione di gauge. Per far sì che ciò sia possibile, si definisca una nuova operazione di derivazione, che d'ora in poi andrà sotto il nome di "**derivata covariante**".

$$\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi; \quad (\mathcal{D}_\mu\psi)^* = \partial_\mu\psi^* + ieA_\mu\psi^* \quad (4.21)$$

I passaggi per dimostrare che queste derivate siano effettivamente covarianti rispetto a tali trasformazioni di gauge sono gli stessi sia per un campo scalare sia per uno spinoriale. La dimostrazione della loro covarianza rispetto alla gauge passa per il fatto che:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu\psi' &= \partial_\mu\psi' - ieA'_\mu\psi' = \partial_\mu(e^{ie\xi(x)}\psi) - ie(A_\mu + \partial_\mu\xi(x))(e^{ie\xi(x)}\psi) = \\ &= e^{ie\xi(x)}(ie\partial_\mu\xi(x)\psi + \partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi - ie\partial_\mu\xi(x)\psi) = \\ &= e^{ie\xi(x)}\mathcal{D}_\mu\psi \end{aligned}$$

È abbastanza semplice notare come queste trasformazioni incidano sui campi spinoriali e sui loro coniugati di Dirac:

$$\psi' = e^{ie\xi(x)}\psi; \quad \bar{\psi}' = e^{-ie\xi(x)}\bar{\psi} \quad (4.22)$$

Ora che sono a disposizione tutti gli elementi necessari, si può verificare l'invarianza della Lagrangiana sotto le suddette trasformazioni, ovvero sostituendo a $\psi, \bar{\psi}, A_\mu$ la terna $\psi', \bar{\psi}', A'_\mu$. Questa nuova Lagrangiana sarà denominata \mathcal{L}' .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA'_\mu)\psi' - m\bar{\psi}'\psi' = \\ &= ie^{-ie\xi(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu - ie\partial_\mu\xi(x))e^{ie\xi(x)}\psi - me^{-ie\xi(x)}\bar{\psi}e^{ie\xi(x)}\psi = \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

Il fatto che questa Lagrangiana sia effettivamente covariante (rispetto a tali trasformazioni di gauge) mette tuttavia in evidenza un'importante aspetto, ovvero sia che nel passare dalla Lagrangiana del campo spinoriale libero a quella comprensiva del campo elettromagnetico l'unico passaggio effettivo compiuto sia stato la sostituzione della derivata ∂_μ con la relativa derivata covariante \mathcal{D}_μ . Questo tipo di procedimento va sotto il nome di "**sostituzione minimale**". La Lagrangiana completa che descrive l'elettrodinamica quantistica applicata ai fermioni si compone dunque di tre termini:

1. la Lagrangiana del campo elettromagnetico libero;
2. la Lagrangiana del campo spinoriale libero;
3. la Lagrangiana d'interazione.

Dove, come appena visto, gli ultimi due termini possono essere accorpati mediante la sostituzione minimale. Il risultato finale sarà dunque il seguente:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.23)$$

³Dove $\xi(x)$ è un arbitrario campo scalare dipendente dalle quadri-coordinate.

4.4 "Per altra via, per altri porti"... lo spin dal teorema di Noether

Nel capitolo dedicato alla costruzione del formalismo lagrangiano è stata introdotta l'equazione che descrive la trasformazione di Lorentz infinitesima di uno spinore che soddisfa all'equazione di Dirac.

$$\delta\psi^\alpha = -\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi^\alpha + \frac{1}{2} \Omega_{\rho\sigma} (\Sigma^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta \psi^\beta \quad (4.24)$$

Come già accennato, per dare un senso fisico a questo risultato occorre enunciare il teorema di Noether. Questo perchè, inserendo tale variazione all'interno della formula che fornisce la quadri-corrente conservata corrispondente si ottiene.

$$(J^\mu)^{\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho} - i\bar{\psi}\gamma^\mu \Sigma^{\rho\sigma} \psi \quad (4.25)$$

Dove $T^{\mu\sigma}$ (e corrispondenti variazioni negli indici), simmetrico rispetto allo scambio degli indici, è il tensore energia-impulso.

Il motivo che dà importanza a tale risultato risiede nel termine $-i\bar{\psi}\gamma^\mu \Sigma^{\rho\sigma} \psi$, che risulta aggiuntivo rispetto a quello che dovrebbe essere il "tensore momento angolare" ($\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma}$).

$$\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho} \quad (4.26)$$

Questo tensore risulta familiare, perchè è esso stesso la corrente conservata. O meglio, lo sarebbe nel caso in cui non prendessimo in considerazione la teoria di Dirac sin qui esposta. Il contributo aggiuntivo è infatti da interpretarsi quale *momento angolare intrinseco*, ciò che viene più comunemente chiamato "spin".

La matrice $\Sigma^{\rho\sigma}$ si può costruire nel caso degli spinori a partire dalle matrici γ .

$$\Sigma^{\rho\sigma} = -\frac{\hbar}{2} \sigma^{\rho\sigma} \quad (4.27)$$

e definendo le matrici σ come segue:

$$\sigma^{\rho\sigma} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = -\sigma^{\sigma\rho} \quad (4.28)$$

Si può facilmente verificare che tale costruzione obbedisce al fatto che la matrice Σ ubbidisca all'algebra di Lorentz.

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = -i\hbar(\eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho}) \quad (4.29)$$

Ora, prestando attenzione al significato degli indici (dal momento che verranno talora soppressi quelli matriciali per dare evidenza a quelli vettoriali), si può dare per *gli operatori* di spin la seguente forma:

$$\sigma_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Sigma^{jk} = \frac{\hbar}{4} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

È abbastanza semplice verificare ora che, essendo lo spin un momento angolare (altrimenti non avrebbe senso sommarlo al momento angolare orbitale nelle formule precedenti), a livello quantistico:

$$|\vec{\Sigma}|^2 = \hbar^2 s(s+1) \mathbb{1} = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbb{1} \quad (4.31)$$

Da cui si evince una cosa sinora data per scontata: lo spin dell'elettrone è $\frac{1}{2}$!

Come già messo in evidenza quando il termine di spin è stato ricavato direttamente dall'equazione di Dirac, il dettaglio che al lettore non deve sfuggire da questa trattazione, è che lo spin sia un effetto relativistico, che non emergerebbe altrimenti. Ciò che manualmente aveva fatto Pauli, introducendo gli spinori e le matrici di Pauli nella teoria di Schroedinger, generalizzandone l'equazione, ritrova qui una spiegazione formale, che parte dai principi primi della relatività.

Capitolo 5

Oltre la QED

In questo capitolo conclusivo si cercheranno di mettere in evidenza alcuni tratti fondamentali della trattazione precedente, ponendo l'attenzione su due particolari aspetti: i risultati ottenuti e le possibilità aperte dalla teoria. Si noter  infatti come, sotto questi punti di vista, la teoria di Dirac si sia inserita nel percorso della fisica moderna come un fondamentale crocevia.

5.1 I nodi fondamentali della teoria

Molti sono i nuovi concetti fisici introdotti, come gi  visto, grazie alla teoria di Dirac. Primo su tutti, come gi  osservato a pi  riprese, quello di "spin". Anche se, difatto, esso fu introdotto storicamente da Pauli, infatti, fu solo con l'intervento di Dirac che esso assunse una giustificazione formale. Esso risulta fondamentale proprio perch  intrinseco delle particelle, e tale   il motivo per cui, nel voler costruire una teoria quantistica davvero efficace,   necessario considerarlo.   stato infatti osservato in precedenza che lo spin   un risultato matematico che emerge quando si spinge la meccanica quantistica all'ambito relativistico. Il lettore non deve tuttavia incorrere nell'errore di considerarlo per tale ragione come un mero effetto relativistico, perci  trascurabile in regimi non relativistici. Per capire il motivo baster  citare un paio di esempi: l'atomo idrogenoide ed il decadimento del parapositronio e dell'ortopositronio. Per quanto riguarda il primo, infatti,   possibile correggere l'hamiltoniano dell'atomo idrogenoide attraverso l'aggiunta di alcuni termini ricavati proprio dall'equazione di Dirac:

$$\Delta H = \frac{\pi \hbar^2}{2m_e^2 c^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \delta(\vec{r}) - \frac{p^4}{8m_e^3 c^2} + \frac{1}{2m_e^2 c^2 r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (5.1)$$

Con i dovuti calcoli si noter  che, in questo caso, la correzione dovuta alla spin-orbita dell'elettrone (il terzo addendo, che rappresenta il moto dell'elettrone in un campo magnetico) risulta effettivamente piccola rispetto ai valori d'energia calcolati in approssimazione classica (cosa confermata dagli esperimenti), da considerare dunque solo nel caso in cui si volesse studiare la struttura fine dell'atomo idrogenoide. Lo stesso non si pu  dire perch  del secondo esempio, in cui i seguenti decadimenti elettromagnetici:

$$\begin{aligned} e^+ + e^- (S = 0) &\rightarrow 2\gamma \\ e^+ + e^- (S = 1) &\rightarrow 3\gamma \end{aligned}$$

sono vincolati al fatto che elettrone e positrone, nel positronio, si pongano in uno stato di singoletto o di tripletto di spin. Data infatti la "coniugazione di carica" (C), l'operatore quantistico che associa materia ed antimateria invertendo, tra le altre cose, anche la carica elettrica, si noter  come, essendo associata al fotone una coniugazione di carica negativa (-1), i due decadimenti sopra riportati non possono che essere quelli mostrati¹. La coniugazione di carica   infatti una simmetria conservata dalle interazioni elettromagnetiche. In esempi come questo si pu  dunque notare che la pertinenza del concetto di spin diventi di fatto irrinunciabile, non trattandosi pi  solo di una correzione relativistica.

Il secondo concetto davvero significativo introdotto dalla QED fu senz'altro quello della gi  citata "antimateria". A prescindere infatti dall'interpretazione che pu  essere data alla sua natura, il concetto di antimateria risulta fondamentale nella fisica delle particelle. Essa   infatti associata proprio alla coniugazione di carica (C). Assieme alle trasformazioni di parit  (P) ed alle inversioni temporali (T), anch'esse oggetto di studio da parte dello stesso Dirac, essa costituisce infatti uno dei tasselli fondamentali nella costruzione e nello studio delle simmetrie della natura. Due tra queste sono la simmetria CP, la cui violazione spiega l'asimmetria tra materia ed antimateria nell'universo, e la CPT, ad oggi considerata una delle poche simmetrie esatte della natura.

¹Nel caso in esame, la coniugazione di carica di n fotoni ($(-1)^n$) deve uguagliare quella del positronio ($(-1)^{l+s}$), con l, s i momenti angolari spaziale e di spin del positronio. Per semplicit    stato considerato $l = 0$.

Infine, come terzo aspetto, è importante evidenziare il risultato che, attraverso l'applicazione del teorema di Noether, permette di stabilire la conservazione della carica elettrica. Questo perchè, nonostante i numerosi tentativi e le numerosissime evidenze sperimentali, il principio di conservazione della carica elettrica non risulta essere dimostrato sperimentalmente, come mostrano i risultati di esperimenti anche molto recenti come quello di Borexino (Laboratori Nazionali del Gran Sasso), secondo cui la stabilità dell'elettrone risulta in un limite inferiore di 10^{28} anni. Ad oggi dunque, anche dopo svariati decenni, risultati come quello di Dirac permangono come gli unici a dare una soluzione definitiva al problema.

È chiaro che, in generale, i risultati ottenuti grazie alla QED di Dirac non si limitino a quelli citati. Gran parte del merito della teoria derivò infatti dallo studio delle soluzioni dell'equazione di Dirac, argomento di estrema importanza e molto interessante che tuttavia esula dalla trattazione della presente tesi.

5.2 Un nuovo punto di partenza

La teoria formulata da Dirac non ebbe tuttavia il solo merito di introdurre nuovi importanti concetti nella fisica dell'epoca, ma anche di insegnare, a livello matematico, un "modus operandi". I primi ad apprendere questa importante lezione furono i fisici Chen Ning Yang e Robert Mills.

Essi partirono infatti proprio dalla QED, estendendo l'invarianza dei campi a trasformazioni di $U(1)$ con parametri locali. In generale, ciò permette alla Lagrangiana che descrive il campo di prendere in considerazione l'interazione con campi vettoriali, cui verrà associata, come fatto nelle pagine precedenti, una derivata covariante $\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$, ed in seguito un tensore associato attraverso la relazione $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -ieF^{\mu\nu}$.

Per dare un'idea del procedimento da seguire, occorre:

1. definire una trasformazione del campo $\psi'^i(x) \equiv h_j^i(\xi(x))\psi(x)$, con $\xi(x) = \xi^1(x), \xi^2(x), \dots, \xi^N(x)$. Qui la generica componente verrà chiamata $\xi^a(x)$. Si noti la dipendenza dalle coordinate;
2. considerare $h(x) = e^{ig\xi^a T^a}$, dove T^a sono i generatori dell'algebra di Lie;
3. osservare che, dal momento che $\partial_\mu \psi'(x) = h(\partial_\mu \psi + h^{-1}(\partial_\mu h)\psi)$, allora l'unico modo di rendere la Lagrangiana invariante è che $h = \text{costante}$;
4. definire una derivata covariante $\mathcal{D} \equiv \partial_\mu - igA_\mu$, tale per cui $\mathcal{D}'_\mu \psi' = h\mathcal{D}_\mu \psi$. Da questa identità si ricava facilmente la seguente trasformazione di gauge dei campi di Yang-Mills: $A'_\mu = hA_\mu h^{-1} + \frac{i}{g}h\partial_\mu h^{-1}$;
5. sostituire nella Lagrangiana la derivata covariante alla derivata parziale:

$$\mathcal{L}(h\psi, \mathcal{D}_\mu h\psi) = \mathcal{L}(h\psi, h\mathcal{D}_\mu \psi) = \mathcal{L}(\psi, \mathcal{D}_\mu \psi) \quad (5.2)$$

questo passaggio non solo rende la Lagrangiana gauge-invariante, ma fa entrare nella stessa il campo A_μ .

6. introdurre il "tensore degli sforzi di Yang-Mills", $G_{\mu\nu}$:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -igG_{\mu\nu} \quad (5.3)$$

dove si ha $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$;

7. Costruire l'azione $S[\psi, A]$ e porne la variazione $\frac{\delta S[\psi, A]}{\delta \psi^i}$ a 0;

Al di là del calcolo da fare, che è molto simile a quello già mostrato per la QED, si giunge alla scrittura seguente:

$$\mathcal{L}_{totale}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = \mathcal{L}(\psi, \mathcal{D}_\mu \psi) + \mathcal{L}_{YM}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) \quad (5.4)$$

dove

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}G^{a\mu\nu}G_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{4}\text{tr}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \quad (5.5)$$

Questo procedimento venne adottato dai fisici Yang e Mills per costruire una teoria che descrivesse l'interazione forte (la teoria venne chiamata, in analogia alla QED, QCD, ovvero "Cromodinamica quantistica"). Il metodo venne tuttavia ripreso anche in seguito per unificare la teoria delle interazioni elettromagnetiche e deboli, nella cosiddetta "Teoria elettrodebole".

5.3 Conclusione

Esempi come quelli citati nel paragrafo precedente indicano che la grande importanza attribuita al lavoro di Dirac non risiede solamente nella capacità di conferire all'elettrodinamica quantistica una soluzione tanto elegante quanto formalmente forte. Certo, è innegabile che Dirac fosse partito nella costruzione della QED con l'intento specifico di risolvere il problema dell'elettrone nel campo elettromagnetico, sistemando molti punti lasciati irrisolti dell'elettrodinamica classica attraverso l'introduzione del formalismo quantistico. Il grande passo in avanti del fisico britannico fu tuttavia quello di individuare nel formalismo di Lagrange, nato più di un secolo prima nell'ambito classico, il linguaggio di una nuova fisica.

Non è un fatto che deve sorprendere. Rimanendo sempre nel campo dell'elettrodinamica, infatti, pochi anni più tardi, un giovane fisico americano, Richard Feynman, si scoprì ugualmente colpito da tale formalismo da adottarlo per la costruzione di un'elettrodinamica dei potenziali anticipati e ritardati. Questi risultati, frutto del lavoro di Feynman e del suo allora professore, John Wheeler, ispirarono negli anni successivi lo stesso Feynman nella costruzione della nuova QED, teoria che varrà ben tre premi Nobel (a Julian Schwinger, Shin'ichiro Tomonaga e Feynman stesso) nel 1965.

È pur vero, però, che, da lì in poi, la fisica si troverà spesso a dover affrontare problemi che metteranno in difficoltà i risultati ottenuti dal metodo di Dirac. In particolare, i punti più rischiosi di questo processo che porterà alla costruzione del Modello Standard furono rappresentati dalle rotture delle simmetrie, conservate talora da alcune interazioni, talora da altre. Il che è di fatto comprensibile, data la natura estremamente generale del lavoro di Dirac, che, come mostrato, ebbe grande rilevanza in ambiti molto diversi della fisica del XX secolo, dalla fisica della materia a quella delle particelle elementari, come mostrato in alcuni esempi durante la trattazione. Il metodo di Dirac è tuttavia rimasto, in tutto questo, sempre un importante punto di riferimento, tanto caro ai fisici proprio per la sua brillantezza, di cui lo stesso Dirac non nascondeva di andare particolarmente fiero.

Bibliografia

- 1 Nidia Favaretto, *Algebre di Clifford, Spinori e l'Equazione di Dirac in uno Spazio-Tempo Curvo*, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-2020, Relatore: Prof. Francesco Bottacin, Università degli Studi di Padova, Padova, 2020.
- 2 Oskar Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeitschrift für Physik, Copenhagen, 1926.
- 3 Cinzia Sada, *Fisica Atomica*, Corso di Istituzioni di Fisica della Materia A.A. 23-24, Università degli Studi di Padova, Padova, 2024.
- 4 Iosif L. Buchbinder; Ilya L. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*, Oxford University Press, Oxford, 2021.
- 5 Ramona Gröber, *Lezione 4, Lezione 9, Lezione 10, Lezione 22*, Corso di Campi Elettromagnetici A.A. 23-24, Università degli Studi di Padova, Padova, 2024.
- 6 Franco Simonetto, *Panoramica Particelle (elementari) e come catalogarle*, Corso di Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare A.A. 22-23, Università degli Studi di Padova, Padova, 2022.
- 7 Paul A. M. Dirac, *The quantum theory of the electron*, The Royal Society, St. John's College, Cambridge, 1928.
- 8 Franco Simonetto, *Simmetrie e Leggi di Conservazione*, Corso di Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare A.A. 22-23, Università degli Studi di Padova, Padova, 2022.
- 9 John C. Slater, *Teoria Quantistica della Materia*, Zanichelli, Bologna, 1980.