



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Conessioni e curvatura:
sviluppo storico e applicazioni**

Candidato:
Giada Strobbe
Matricola 1172015

Relatore:
Prof. Francesco Bottacin

Ai miei genitori, per il sostegno e la fiducia,
a mio fratello, per la leggerezza
e alla mia forza d'animo e costanza.

Indice

1	Superfici	11
1.1	Teoria locale delle superfici	12
1.1.1	Definizione ed esempi	12
1.1.2	Piano tangente	19
1.1.3	Vettori tangenti e derivazioni	22
1.2	Curvature	27
1.2.1	La prima forma fondamentale	28
1.2.2	Orientabilità	31
1.2.3	Curvatura normale e seconda forma fondamentale	34
1.2.4	Curvatura Gaussiana	38
1.2.5	Teorema egregium di Gauss	41
2	Varietà	47
2.1	Varietà differenziabili	48
2.1.1	Definizione ed esempi	48
2.1.2	Funzioni differenziabili tra varietà	57
2.1.3	Spazio tangente	59
2.2	Fibrati	64
2.2.1	Fibrati vettoriali	65
2.2.2	Sezioni di fibrati e tensori	69
2.2.3	Parentesi di Lie	79
2.3	Strutture su varietà	84
2.3.1	Connessioni	85
2.3.2	Connessione indotta sui fibrati tensoriali	90
2.3.3	Varietà Riemanniane	93
2.3.4	La connessione di Levi-Civita	95
2.4	Curvatura	101

3	Applicazioni alla Relatività Generale	107
3.1	L'equazione di campo di Einstein	108
3.1.1	La prima formulazione	108
3.1.2	Proprietà	111
3.1.3	La seconda formulazione	112
3.2	La soluzione di Schwarzschild	114
3.2.1	La metrica di Schwarzschild	114
3.2.2	Singolarità e buchi neri	116

Introduzione

Il mondo in cui viviamo non è piatto: basta guardarsi intorno per notare l'abbondanza, per non dire la prevalenza, di superfici curve; e nella scienza moderna (non solo in Matematica, ma anche in Fisica, Fisica Matematica, Ingegneria, . . .) compaiono problemi che si sviluppano naturalmente in ambienti geometrici che non sono piatti in alcun senso del termine, e che spesso hanno dimensione maggiore di due. Per ottenere un'adeguata descrizione della natura, risulta quindi necessario andare oltre le costruzioni lineari, ed introdurre il concetto di *curvatura*, una delle nozioni principali (o, forse, quella centrale dal punto di vista geometrico) della Geometria Differenziale. Sebbene in modo implicito, il concetto di curvatura era già presente nel V postulato (o postulato delle parallele) degli *Elementi* di Euclide:

“Se una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito si incontrano, dalla parte in cui i due angoli sono minori di due retti”.

Tale postulato, che nella tradizione didattica moderna viene in genere sostituito, in modo equivalente, dall'assioma di Playfair (1795)

“Dato un punto esterno ad una retta, esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per quel punto”,

presupponeva l'intuizione dello spazio ordinario (piatto), in cui il percorso più corto tra due punti fissati è dato da una retta; infatti, se consideriamo, ad esempio, una superficie sferica, il cammino di lunghezza minima tra due punti su di essa corrisponde ad un arco (quello minimo se i punti non sono antipodali) di circonferenza massima¹. Preso un cerchio massimo ed un punto esterno ad esso, non esiste alcuna “linea” per quel punto che non intersechi

¹Una circonferenza massima (o cerchio massimo) di una superficie sferica è data dall'intersezione della superficie stessa con un piano passante per il centro della sfera.

la circonferenza massima di partenza; deduciamo quindi che, sulla superficie sferica, il quinto postulato di Euclide non trova applicazione.

Tuttavia, il concetto di curvatura non emerge esplicitamente in Matematica fino alla comparsa della teoria delle curve e delle superfici nello spazio euclideo: lo studio delle prime inizia con il calcolo infinitesimale (già Newton, nel XVII secolo, aveva analizzato la curvatura di curve piane) e conduce all'idea di curvatura come ad una misura della deviazione della curva dalla sua tangente. Nei secoli successivi viene invece sviluppata la teoria delle superfici nello spazio euclideo: agli inizi del XIX secolo, Young e Laplace provarono che, per una superficie sferica di separazione tra due fluidi², la pressione interna è sempre maggiore di quella esterna, e che la differenza tra le due aumenta col diminuire del raggio; tale differenza non può che essere dovuta alla curvatura della superficie! Intuitivamente, possiamo dunque concludere che la curvatura di una superficie in un punto (in analogia alle curve) misura la deviazione della superficie dal piano tangente ad essa in quel punto.

Fino a quel momento, le forme e le proprietà delle superfici curve erano però state concepite solamente attraverso l'immersione nello spazio tridimensionale, considerato unico e assoluto, secondo la visione di Kant. Il passo rivoluzionario è costituito dalle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, lo scritto latino pubblicato da Gauss nel 1828, in cui riformulò lo studio geometrico delle superfici da un punto di vista *intrinseco*.

Per studiare le superfici curve in questi termini, Gauss capì che era necessario abbandonare le coordinate cartesiane: un punto P di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è, in particolare, un punto di \mathbb{R}^3 , ed è quindi individuato da una terna di numeri reali x, y, z , che determinano la sua distanza dai tre assi coordinati. Ma perché utilizzare tre coordinate per descrivere un punto su di una superficie bidimensionale?

Gauss capì che tale sistema portava con sé un eccesso di informazione, e inventò così le *coordinate gaussiane*³, introducendo per primo la nozione di

²Si pensi, ad esempio, ad una bolla di sapone: la pressione esterna e la tensione superficiale tenderebbero a contrarre la bolla; per mantenere l'equilibrio, è quindi necessaria una pressione interna, che deve tendere ad espandere la bolla.

³Data una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ ed un suo punto P , l'idea di Gauss fu quella di considerare due famiglie di curve U e V su S , tali che *ogni* elemento di ciascuna famiglia non intersechi *alcun* elemento della stessa famiglia, ma incontri *tutti* gli elementi dell'altra (almeno in un intorno \mathcal{U}_P del punto P) e tali che ogni famiglia copra \mathcal{U}_P . In questo modo, fu possibile localizzare un qualsiasi punto $Q \in \mathcal{U}_P$ dicendo su quale U -curva e V -curva si trovi; supponendo che u e v siano parametri reali enumeranti le U, V -curve rispettivamente, la coppia (u, v) fornisce il nuovo sistema di coordinate (gaussiano) per etichettare i punti di S .

coordinate curvilinee (o coordinate locali), attraverso le quali riuscì a svincolare lo studio delle superfici dalla loro immersione nello spazio euclideo.

Dati due punti P e Q su una superficie S , non era quindi più possibile (e nemmeno interessante!) calcolare la loro distanza “assoluta”, ossia la lunghezza del segmento di linea retta congiungente i due punti. Sicuramente però, per una piccola creatura confinata a vivere sulla superficie, era importante conoscere la lunghezza di una curva (sulla superficie) con estremi in P e Q . Come definire allora la distanza tra due punti della superficie?

Le grandi intuizioni di Gauss furono il concetto di *piano tangente* e la *metrica*: una regione sufficientemente piccola della superficie (attorno ad un punto) può essere approssimata dal piano tangente alla superficie in quel punto; inoltre, più piccola è la regione considerata, e migliore risulta l'approssimazione.

Attraverso questa osservazione, fu possibile definire *intrinsecamente* la lunghezza di *ogni* curva tra due punti della superficie, semplicemente come la lunghezza del segmento infinitesimale (assumendo gli estremi della curva infinitamente vicini, cioè $P = (u, v)$ e $Q = (u + du, v + dv)$) che li unisce e che si trova sul piano tangente. Fu così che egli fornì il primo esempio di metrica Riemanniana (in un certo senso, quella che chiameremo prima forma fondamentale).

A partire da quest'ultima, egli giunse ad un risultato dall'immenso significato geometrico: la curvatura Gaussiana K di una superficie non dipende dallo spazio circostante, ma è una caratteristica *intrinseca* alla superficie stessa. Questo fatto è noto come *Teorema egregium* (fu lo stesso Gauss ad attribuirgli tale etichetta) ed è contenuto nelle *Disquisitiones*.

Noto per le rare collaborazioni con altri matematici e per detestare l'insegnamento (spesso i suoi studenti erano demotivati e impreparati, e giungevano all'Università più per le loro relazioni sociali che per il loro valore intellettuale), Gauss dedicò invece molto del suo tempo a studenti particolarmente capaci e motivati, tra cui Bernhard Riemann. Nel 1854, in occasione dell'abilitazione all'insegnamento, Riemann dovette discutere quella su cui, tra le tre proposte, era a lui meno familiare e, di conseguenza, sperava venisse immediatamente scartata dalla commissione; infatti, fu proprio Gauss, ricordando i talenti del giovane e affascinato dall'idea di potergli assegnare un argomento impegnativo come i Fondamenti della Geometria, a persuadere la Facoltà in modo che gli venisse assegnata quella tematica. Riemann, sbalordito dalla notizia, dovette accettare la sfida e fu così che, in sole sette settimane, produsse un capolavoro dal titolo *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie*

zu Grunde liegen (*Sulle ipotesi che stanno alla base della Geometria*). In tale saggio (che si apre con una profonda critica al tradizionale approccio alla Geometria), introdusse, seguendo la nuova strada aperta da Gauss con le *Disquisitiones*, due oggetti fondamentali: le *varietà* (differenziabili) estese ad una dimensione arbitraria n , i cui punti sono etichettati da n (anziché due) coordinate curvilinee, ed una *forma quadratica simmetrica definita positiva* su ciascuno dei piani tangenti alla varietà (la metrica Riemanniana, $ds^2 = g_{hk}(x)dx^h dx^k$).

Egli dedusse che la geometria delle varietà era codificata nei tensori metrici (capì che la stessa varietà poteva ammettere metriche piuttosto diverse tra loro) ed infine giunse alla nozione (piuttosto astratta, ma molto rigorosa) di tensore di curvatura (di Riemann) R .

Purtroppo Riemann morì giovane e non riuscì a sviluppare la nuova teoria della Geometria Differenziale da lui fondata; eppure, ebbe modo di venire in Italia e, attraverso i suoi contatti con la Scuola Normale di Pisa e con il gruppo di ricerca di Enrico Betti (di cui era un caro amico), piantare i semi del calcolo differenziale assoluto.

Per sviluppare appieno la visione introdotta da Riemann, erano a quel punto necessari una buona notazione e un nuovo linguaggio matematico in grado di accoglierla: i tensori e il calcolo tensoriale.

Il termine “tensore” era già stato introdotto da Hamilton nel 1846, ma il calcolo tensoriale venne sviluppato solamente attorno al 1890 da Gregorio Ricci-Curbastro, sotto il nome di *calcolo differenziale assoluto*; nel 1900 fu reso accessibile al mondo matematico con la pubblicazione dell’omonimo testo di Tullio Levi-Civita⁴, originariamente scritto in italiano, successivamente ripubblicato in francese assieme a Ricci. Essi svilupparono formalmente il concetto di *derivata covariante*, che realizza l’idea (concepita per la prima volta da Elwin Bruno Christoffel) di trasporto parallelo, e che preserva gli angoli definiti dalla metrica e, tramite questo, trovarono una migliore formu-

⁴Tullio Levi-Civita (Padova, 1873 - Roma, 1941) si laureò in Matematica nel 1892 all’Università di Padova, scrivendo la sua tesi di laurea sotto la supervisione di Ricci-Curbastro. Nel 1898 divenne titolare a Padova della cattedra di meccanica razionale, e ci rimase fino al 1918, quando gli venne proposta la cattedra di analisi superiore presso l’Università di Roma. Nel 1936 ricevette un invito da parte di Einstein, e partì così per gli Stati Uniti rimanendoci un anno; tornò poi in Italia, ma nel 1938, a causa delle discriminazioni razziali del governo fascista, in quanto ebreo, venne espulso dall’Università e dalle società scientifiche di cui faceva parte: queste ferite insanabili lo portarono presto alla morte. Ricordiamo infine con piacere che il 25 novembre 2016 è stato a lui intitolato il Dipartimento di Matematica dell’Università di Padova.

lazione (permettendo un ulteriore sviluppo) per il tensore R introdotto da Riemann, e definito analiticamente da Christoffel (attraverso i simboli a tre indici da lui inventati): esso codifica nel modo più completo la curvatura di una varietà Riemanniana.

In un documento del 1903, Ricci introdusse un nuovo tensore (che porta il suo nome), ottenuto a partire dal tensore di Riemann attraverso una contrazione di indici. Tale tensore era destinato a svolgere un ruolo importante nello sviluppo del pensiero scientifico del XX secolo e nella nascita della Relatività Generale; in particolare, gli indizi che guidarono Einstein, con l'aiuto di Marcel Grossman, ad individuare la forma delle equazioni di campo della Relatività Generale, furono le identità derivate da Luigi Bianchi⁵ nel 1902, e pubblicate nello stesso anno (che, in realtà, secondo Levi-Civita, erano già state scoperte nel 1880 dallo stesso Ricci, ma scartate poiché considerate irrilevanti). In conclusione, una teoria così importante come quella della Relatività Generale, si erge grazie ad un linguaggio matematico introdotto da importanti matematici (principalmente della scuola italiana) della seconda metà del XIX secolo, come Ricci, Bianchi e Levi-Civita: il calcolo tensoriale o, com'era da loro chiamato, il *calcolo differenziale assoluto*.

Descriviamo ora in breve il contenuto di questo lavoro. Dando per noto il caso unidimensionale delle curve, nella prima parte del Capitolo 1 andremo a definire una superficie come un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 localmente identificabile con un aperto del piano, e ne illustreremo alcuni esempi. Daremo poi la nozione di vettore tangente ad una superficie S in un punto p , per giungere così alla definizione di piano tangente $T_p S$ e ad identificarlo con lo spazio $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ delle derivazioni in p . Nella seconda parte, servendoci del prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3 , andremo ad introdurre, su ciascuno dei piani tangenti, un oggetto intrinseco alla superficie: la prima forma fondamentale. Osservando poi che un piano tangente ad una superficie, essendo un piano di \mathbb{R}^3 , è completamente determinato non appena si conosce un versore ortogonale, vedremo che una famiglia di piani tangenti può essere descritta dalla mappa di Gauss, che associa ad ogni punto un versore normale al piano tangente in quel punto. Definiremo quindi la curvatura di una superficie lungo una direzione tangente prima da un punto di vista geometrico e poi da un punto di vista analitico; infine, dopo aver dato la definizione di curvatura

⁵Luigi Bianchi pubblicò, nel 1894, la prima edizione delle sue *Lezioni di Geometria Differenziale*, che costituisce il primissimo trattato sulla nuova disciplina introdotta da Riemann ed anche la prima volta in cui apparve il termine *Geometria Differenziale*.

Gaussiana di una superficie, concluderemo con il Teorema egregium di Gauss dimostrando che, sebbene la definizione includa esplicitamente lo spazio ambiente \mathbb{R}^3 , la curvatura Gaussiana è in realtà una quantità intrinseca, cioè è possibile misurarla rimanendo sulla superficie stessa.

Il Capitolo 2 è una naturale estensione del Capitolo 1 a spazi di dimensione n arbitraria: qui definiremo ufficialmente i concetti di varietà, applicazione differenziabile e spazio tangente ad una varietà M in un punto p , identificandolo, ancora una volta, con lo spazio $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ delle derivazioni in p . Passeremo poi allo studio dei fibrati vettoriali, dedicando particolare attenzione al fibrato tangente (ottenuto come unione disgiunta degli spazi tangenti ad una varietà); dopo aver richiamato una serie di risultati di Algebra Multilineare, introdurremo la nozione di campo vettoriale su una varietà M e vedremo che corrisponde ad una derivazione (in un “nuovo” senso) della \mathbb{R} -algebra $C^\infty(M)$ delle funzioni differenziabili definite su M a valori reali. Giungeremo così alla derivata di Lie e, dopo aver osservato che non presenta esattamente tutte le proprietà di cui gode la classica derivata direzionale in \mathbb{R}^n , daremo la definizione di connessione; introdurremo un’ulteriore struttura aggiuntiva, quella di metrica (pseudo)Riemanniana, e vedremo come essa permetta di ricavare la connessione di Levi-Civita. Concluderemo con i tensori di curvatura (di Riemann) e di Ricci, ed alcune loro proprietà.

Nel Capitolo 3, verranno accennate le applicazioni del concetto di curvatura alla teoria della Relatività Generale di Einstein. In particolare vedremo, senza entrare troppo nel dettaglio, qual è l’idea generale che conduce alle equazioni di campo e presenteremo l’esempio della soluzione trovata da Schwarzschild, ossia la metrica di Schwarzschild.

Capitolo 1

Superfici

Come è ben noto, la geometria euclidea classica ha sempre avuto un punto debole: non fu in grado di studiare in modo soddisfacente curve e superfici, a meno che non fossero linee rette o piani. Vennero trattate curve speciali¹ e alcune superfici molto particolari, ma non esiste alcuna traccia di una teoria generale.

Questo perché i geometri classici non possedevano il linguaggio necessario per parlare di curve e superfici generiche, dal momento che la geometria euclidea si basava, mediante assiomi, su tre concetti elementari: punto, linea e piano. Tutto doveva allora essere descritto in quei termini, mentre curve e superfici non si prestano ad essere studiate per mezzo di questo vocabolario.

Il passo rivoluzionario capace di superare i confini della geometria euclidea per sviluppare una nuova “scienza differenziale” degli spazi, in grado di trattare sia quelli piatti che quelli curvi, è costituito dalle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, lo scritto di Gauss contenente il principale teorema di questo capitolo, ovvero il Teorema egregium. Il punto di partenza di Gauss fu quello di riformulare lo studio geometrico delle superfici da un punto di vista *intrinseco*. Egli si chiese come una piccola creatura, costretta a vivere su di una superficie, avrebbe potuto concepire la geometria del suo mondo; il piccolo essere, non potendo osservare la forma globale della superficie perché ad esso inaccessibile, avrebbe esplorato soltanto proprietà locali, ovvero in prossimità di un certo punto.

In questo primo capitolo verrà tralasciato il caso unidimensionale (le cur-

¹Ad esempio, le sezioni coniche. Esse, in quanto intersezione di un cono con un piano, necessitavano semplicemente della geometria di rette e piani.

ve), per concentrare lo studio sulle superfici.

Ci proponiamo quindi di rispondere alle domande: “cosa significa affermare che una superficie è curva? E come si può misurare quanto curva è una superficie?”.

1.1 Teoria locale delle superfici

Inizieremo dando la definizione di superficie come sottoinsieme di \mathbb{R}^3 che localmente assomiglia, sia dal punto di vista topologico che differenziale, ad un sottoinsieme aperto del piano (per mezzo delle parametrizzazioni locali). Vedremo dunque che, essendo il calcolo delle derivate parziali un'operazione puramente locale, è possibile differenziare funzioni su di una superficie e introdurremo quindi il loro differenziale. Infine, daremo la nozione di vettore tangente ad una superficie in un punto, per arrivare al concetto di piano tangente.

1.1.1 Definizione ed esempi

Definizione 1.1. *Un sottoinsieme connesso $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie (regolare o embedded) nello spazio se $\forall p \in S$ esiste una mappa $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme aperto, tale che:*

- $\varphi(U) \subseteq S$ è un intorno aperto di p in S (o, equivalentemente, $\exists W \subseteq \mathbb{R}^3$ intorno aperto di p in \mathbb{R}^3 tale che $\varphi(U) = W \cap S$);
- φ è un omeomorfismo² con l'immagine³;
- il differenziale $d\varphi_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettivo $\forall x \in U$ ⁴.

²Ricordiamo che una mappa f tra due spazi topologici X e Y è un omeomorfismo se è continua, biettiva e con inversa continua.

³Dal momento che φ è un omeomorfismo tra U e $\varphi(U)$, la topologia dell'aperto U del piano induce una topologia sull'aperto $\varphi(U)$ di S .

⁴Il differenziale $d\varphi_x$ di $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ in $x \in U$ è rappresentato dalla matrice Jacobiana

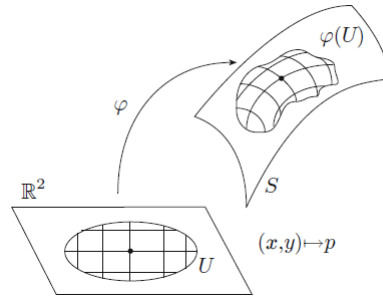
$$Jac \varphi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Chiedere che il differenziale sia iniettivo è equivalente a chiedere che la matrice Jacobiana abbia rango massimo, ovvero 2.

Una mappa φ soddisfacente le tre condizioni sopra elencate è detta *parametrizzazione locale* in p ; se $O = (0, 0) \in U$ e $\varphi(O) = p$ diciamo che la parametrizzazione locale è *centrata* in p .

La mappa inversa $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ è chiamata *carta locale* in p ; φ assegna ad ogni punto $p \in \varphi(U)$ una coppia di numeri reali $(x, y) = \varphi^{-1}(p) \in U$, dette *coordinate locali* di p , che giocheranno il ruolo di coordinate di p in S , in analogia alle coordinate cartesiane per i punti del piano.

Un *atlante* per una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ è una famiglia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}_\alpha$ di parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ tali che $S = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$.



In un certo senso, scegliere una parametrizzazione locale⁵ di una superficie equivale a costruire una mappa geografica per una porzione della superficie. Come vedremo, le parametrizzazioni locali sono utili per trasferire nozioni e proprietà da aperti del piano ad aperti di superfici, e viceversa.

Esempio 1.2 (Il piano). *Il piano $S \subset \mathbb{R}^3$ passante per il punto $p \in \mathbb{R}^3$ e parallelo ai vettori linearmente indipendenti $v, w \in \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare, con atlante formato da una singola parametrizzazione locale $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(x) = p + x_1v + x_2w$.*

Esempio 1.3 (Il grafico di una funzione). *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e $f \in C^\infty(U)$ una funzione arbitraria. Allora il grafico della funzione f*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

è una superficie regolare, con atlante formato da una sola parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(x) = (x, f(x))$.

⁵**Attenzione:** diverse parametrizzazioni locali forniscono differenti coordinate locali!

Infatti, le prime due condizioni della definizione di superficie sono soddisfatte e, infine,

$$\text{Jac } \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix}$$

ha rango 2 per ogni $x \in U$.

Esempio 1.4 (La sfera). *La sfera centrata nell'origine di raggio unitario*

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$$

è una superficie regolare.

- Dato $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, possiamo definire delle parametrizzazioni locali per S^2 , $\varphi_1, \dots, \varphi_6: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi_{1,2}(x, y) = (x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

$$\varphi_{3,4}(x, y) = (x, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y),$$

$$\varphi_{5,6}(x, y) = (\pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y).$$

È possibile verificare che $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ è un atlante⁶ per S^2 .

- Dati $U = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ e $\psi_{1,2}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definite da

$$\psi_1(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

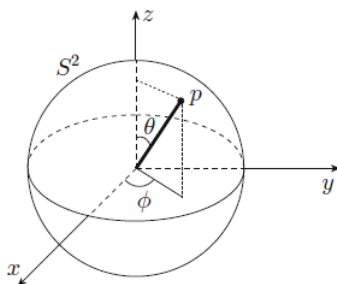
$$\psi_2(\theta, \phi) = (-\sin \theta \cos \phi, \cos \theta, -\sin \theta \sin \phi),$$

si ha che $\{\psi_1, \psi_2\}$ è un atlante⁷ per S^2 . Le coordinate locali (θ, ϕ) sono le coordinate sferiche; θ è la colatitudine (la latitudine è $\pi/2 - \theta$),

⁶ $S^2 = \varphi_1(U) \cup \dots \cup \varphi_6(U)$; si noti che ognuna delle parametrizzazioni locali qui definite è indispensabile: togliendone una, non riusciamo a coprire l'intera sfera.

⁷Una stessa superficie può quindi ammettere più atlanti.

mentre ϕ è la longitudine.



Vogliamo dare ora un metodo generale per costruire superfici regolari; partiamo dalla seguente:

Definizione 1.5. Siano $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una mappa C^∞ .

Un punto $p \in V$ è detto punto critico di f se il differenziale $df_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ non è suriettivo.

Un valore critico è l'immagine di un punto critico⁸.

Un valore regolare è un punto di $f(V)$ che non è un valore critico.

Indichiamo con $Crit(f) \subset V$ l'insieme dei punti critici di f .

Osservazione 1.6. Secondo la Definizione (1.5), se $m = 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$, allora

$$p \in V \text{ è punto critico di } f \iff$$

$$\iff df_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ non è suriettivo} \iff \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right] = df_p = 0 \iff \\ \iff \nabla f(p) = 0.$$

Proposizione 1.7. Siano $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e $f \in C^\infty(V)$.

Se $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f allora ogni componente connessa dell'insieme di livello $f^{-1}(a) = \{p \in V \mid f(p) = a\}$ è una superficie regolare.

Dimostrazione. Sia $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$. Essendo a , per ipotesi, un valore regolare di f , dall'Osservazione (1.6), si ha che

$$\nabla f(p_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \right] \neq 0.$$

⁸Quasi tutti i punti di $f(V)$ sono valori regolari; infatti, è possibile vedere che la misura dell'insieme formato dai valori critici di f in \mathbb{R}^m è zero (Teorema di Sard). Tale osservazione motiva la vasta applicazione della Proposizione (1.7) che segue.

A meno di permutare le coordinate, possiamo assumere $\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Consideriamo ora

$$F : \quad V \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x, y, f(x, y, z)).$$

Abbiamo:

$$Jac F(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(p_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(p_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(p_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(p_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(p_0) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \end{bmatrix},$$

che ha determinante

$$\det Jac F(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0.$$

Possiamo quindi applicare il teorema della funzione inversa⁹: esistono un intorno $\tilde{V} \subseteq V$ di p_0 ed un intorno $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $F(p_0)$ tali che $F|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow W$ sia un diffeomorfismo di classe C^∞ . Ponendo $G = (G_1, G_2, G_3) = F^{-1}: W \rightarrow \tilde{V}$, abbiamo

$$(u, v, w) = (F \circ G)(u, v, w) = F(G_1(u, v, w), G_2(u, v, w), G_3(u, v, w)) \\ = (G_1(u, v, w), G_2(u, v, w), f(G_1(u, v, w), G_2(u, v, w), G_3(u, v, w))).$$

Quindi $G_1(u, v, w) \equiv u$, $G_2(u, v, w) \equiv v$ e

$$f(G_1(u, v, w), G_2(u, v, w), G_3(u, v, w)) \equiv w \quad \forall (u, v, w) \in W. \quad (1.1)$$

L'insieme $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v, a) \in W\}$ è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 (perché W è un aperto di \mathbb{R}^3); definiamo allora $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(u, v) = G(u, v, a) = (u, v, G_3(u, v, a)).$$

⁹Diamo prima la seguente:

Definizione 1.8. Un diffeomorfismo di classe C^k , con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, tra due insiemi aperti $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tale che sia h che la sua inversa h^{-1} sono di classe C^k .

Quindi ricordiamo:

Teorema 1.9 (della funzione inversa). Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k , con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, dove Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

Sia $p_0 \in \Omega$ tale che $\det Jac F(p_0) \neq 0$. Allora esistono un intorno $U \subset \Omega$ di p_0 ed un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di $F(p_0)$ tali che $F|_U: U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo di classe C^k .

Dall'uguaglianza (1.1) si deduce che $\varphi(U) = f^{-1}(a) \cap \widetilde{V}$, e si può verificare che tale φ è una parametrizzazione locale di $f^{-1}(a)$ nel punto p_0 . \square

Definizione 1.10. *Nelle ipotesi della Proposizione (1.7), ogni componente di $f^{-1}(a)$ è detta superficie di livello di f .*

Esempio 1.11 (L'ellissoide). *L'ellissoide¹⁰ avente equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $a, b, c > 0$ è una superficie regolare. Infatti, esso è della forma $f^{-1}(1)$, dove

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Poiché $\nabla f(x, y, z) = \left[\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right]$, l'unico punto critico di f è l'origine $O = (0, 0, 0)$, e quindi l'unico valore critico di f è $f(O) = 0$; perciò $f^{-1}(1)$ è una superficie di livello.

Usando le parametrizzazioni locali, vogliamo ora conoscere quando una funzione, definita su di una superficie, è di classe C^∞ .

Definizione 1.13. *Siano $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$.*

Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ è:

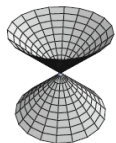
¹⁰L'ellissoide è un esempio di quadrica. Una *quadrica* è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 formato da punti che risolvono un'equazione della forma $p(x, y, z) = 0$, dove p è un polinomio di grado 2.

Attenzione: non tutte le quadriche sono superfici regolari! Vediamo un esempio:

Esempio 1.12 (Il cono a due falde). *Il cono (infinito) a due falde*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

è una quadrica, ma non una superficie regolare.



Infatti, se l'origine $O = (0, 0, 0) \in S$ avesse in S un intorno omeomorfo ad un sottoinsieme aperto del piano, allora $S \setminus \{O\}$ dovrebbe essere connesso, ma non lo è.

- di classe C^∞ in p se $\exists \varphi: U \rightarrow S$ parametrizzazione locale in p tale che $f \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞ in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$;
- di classe C^∞ se lo è in ogni punto di S .

Denotiamo con $C^\infty(S)$ lo spazio delle funzioni C^∞ definite su S .

Usando un approccio simile, vediamo il caso di funzioni tra superfici:

Definizione 1.14. Date $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ due superfici, diciamo che una funzione $F: S_1 \rightarrow S_2$ è:

- di classe C^∞ in $p \in S_1$ se $\exists \varphi_1: U_1 \rightarrow S_1, \varphi_2: U_2 \rightarrow S_2$ parametrizzazioni locali in p ed $F(p)$ rispettivamente, tali che $\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ è di classe C^∞ (dove definita);
- di classe C^∞ se lo è in ogni punto di S_1 ;
- un diffeomorfismo se è di classe C^∞ , invertibile, con inversa di classe C^∞ ; in questo caso diciamo che S_1 ed S_2 sono diffeomorfe.

Queste definizioni (1.13) e (1.14) non dipendono dalle parametrizzazioni locali scelte; è possibile vedere che mappe C^∞ sono continue, inoltre:

Proposizione 1.15. Se $F: S_1 \rightarrow S_2$ e $G: S_2 \rightarrow S_3$ sono funzioni C^∞ tra superfici, allora la loro composizione $G \circ F: S_1 \rightarrow S_3$ è di classe C^∞ .

Dimostrazione. Fissiamo $p \in S_1$ e scegliamo, in modo arbitrario, una parametrizzazione locale $\varphi_1: U_1 \rightarrow S_1$ di S_1 in p , una parametrizzazione locale $\varphi_2: U_2 \rightarrow S_2$ di S_2 in $F(p)$, e una parametrizzazione locale $\varphi_3: U_3 \rightarrow S_3$ di S_3 in $G(F(p))$. Allora

$$\varphi_3^{-1} \circ (G \circ F) \circ \varphi_1 = (\varphi_3^{-1} \circ G \circ \varphi_2) \circ (\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)$$

è di classe C^∞ , dove definita. □

Esempio 1.16 (di diffeomorfismo). Una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset S$ è un diffeomorfismo tra U e $\varphi(U)$.

Infatti, è invertibile per definizione; ci resta da verificare che sia φ che la sua inversa sono di classe C^∞ .

Scegliamo come parametrizzazione locale di U la mappa identica $id: U \rightarrow U$ e $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ come parametrizzazione locale di S . Quindi:

$$\varphi \text{ è di classe } C^\infty \iff \varphi^{-1} \circ \varphi \circ id = id \text{ è di classe } C^\infty,$$

$$\varphi^{-1} \text{ è di classe } C^\infty \iff id \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = id \text{ è di classe } C^\infty,$$

entrambe soddisfatte.

1.1.2 Piano tangente

In questa sezione intendiamo dare la nozione di vettore tangente ad una superficie in un punto. Incominciamo considerando un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 :

Definizione 1.17. Siano $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme e $p \in S$.

Un vettore tangente ad S nel punto p è un vettore della forma $\sigma'(0)$, dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^∞ con supporto in S e tale che $\sigma(0) = p$.

L'insieme dei vettori tangenti all'insieme S nel punto p è detto cono tangente¹¹ ad S in p e si denota con $T_p S$.

Osservazione 1.18. $T_{x_0} U = \mathbb{R}^2 \forall U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $\forall x_0 \in U$, infatti:

ogni curva contenuta in $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è piana, dunque i vettori tangenti ad U in x_0 stanno in \mathbb{R}^2 . Viceversa, preso un vettore $v \in \mathbb{R}^2$, la curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$, definita da $\sigma(t) = x_0 + tv$, ha supporto in U (per ε sufficientemente piccolo), è tale che $\sigma(0) = x_0$ e ha v come vettore tangente.

Il significato geometrico di questa definizione ci porta ad ipotizzare che, nel caso in cui S sia una superficie, $T_p S$ sia un piano.

Proposizione 1.19. Siano $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$ e $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale in p con $\varphi(x_0) = p$. Allora $d\varphi_{x_0}$ è un isomorfismo tra \mathbb{R}^2 e $T_p S$. In particolare, $T_p S = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, dipendente soltanto da S e p , e non da φ .

¹¹Un cono (con vertice nell'origine) in uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme $C \subseteq V$ tale che $av \in C \forall a \in \mathbb{R}, v \in C$. Il cono tangente ad un insieme è un cono in questo senso, infatti: innanzitutto, il vettore nullo è tangente ad una curva costante, quindi $0 \in T_p S \forall p \in S$. Poi, se $a \in \mathbb{R}^*$ e $0 \neq v \in T_p S$, scelta una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, allora la curva $\sigma_a: (-\frac{\varepsilon}{|a|}, \frac{\varepsilon}{|a|}) \rightarrow S$, definita da $\sigma_a(t) = \sigma(at)$, soddisfa $\sigma_a(0) = p$ e $\sigma'_a(0) = av$; perciò $av \in T_p S$.

Dimostrazione. Proviamo che $T_p S = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$.

Preso $v \in \mathbb{R}^2$, possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che $x_0 + tv \in U \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Consideriamo la curva $\sigma_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ data da $\sigma_v(t) = \varphi(x_0 + tv)$; essa è ben definita e soddisfa $\sigma_v(0) = \varphi(x_0) = p$ e $\sigma'_v(0) = d\varphi_{x_0}(v)$. Abbiamo così provato che $d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2) \subseteq T_p S$.

Viceversa, sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva tale che $\sigma(0) = p$; possiamo assumere che il supporto di σ sia contenuto in $\varphi(U)$ (se così non fosse, basta scegliere un ε più piccolo). La composizione $\sigma_0 = \varphi^{-1} \circ \sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ è una curva¹² di classe C^∞ con supporto in U tale che $\sigma_0(0) = (\varphi^{-1} \circ \sigma)(0) = \varphi^{-1}(\sigma(0)) = \varphi^{-1}(p) = x_0$; poniamo $v = \sigma'_0(0) \in T_{x_0} U = {}^13\mathbb{R}^2$. Allora

$$d\varphi_{x_0}(v) = \frac{d(\varphi \circ \sigma_0)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \sigma)}{dt}(0) = \sigma'(0),$$

quindi $T_p S \subseteq d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$.

Dunque, $d\varphi_{x_0}: \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ è suriettivo; poiché esso, per definizione, è anche iniettivo, esso è un isomorfismo tra \mathbb{R}^2 e $T_p S$. \square

Definizione 1.20. Data una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ ed un punto $p \in S$, il piano tangente¹⁴ ad S in p è lo spazio vettoriale $T_p S \subset \mathbb{R}^3$.

L'isomorfismo tra \mathbb{R}^2 e $T_p S$ ci permette di dare la seguente:

Definizione 1.21. Siano $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$. Se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale centrata in p , ed $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^2 , allora una base per $T_p S$ è data dai vettori tangenti $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p \in T_p S$ definiti ponendo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \stackrel{15}{=} d\varphi_O(e_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(O) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}(O) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_j}(O) \end{bmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(O) \quad \forall j = 1, 2.$$

La base $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ ¹⁶ è la base di $T_p S$ indotta dalla parametrizzazione

¹²Per la regolarità di σ_0 si vedano l' Esempio (1.16) e la Proposizione (1.15).

¹³Per questa uguaglianza si veda l'Osservazione (1.18).

¹⁴Il piano tangente è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , passante quindi per l'origine, indipendentemente dal punto p . Perciò, quando disegniamo il piano tangente come un piano "appoggiato" alla superficie, stiamo in realtà rappresentando il piano tangente affine $p + T_p S$ per p , parallelo a $T_p S$, che è quello che meglio approssima la superficie nel punto p . È evidente inoltre che $T_p U = T_p S \forall U \subseteq S$ aperto di una superficie S .

¹⁵Al posto di $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$, scriveremo spesso $\partial_j|_p$ (o anche, quando non può sorgere confusione, semplicemente ∂_j).

¹⁶Si noti che $\partial_1|_p$ e $\partial_2|_p$ sono semplicemente le due colonne di $Jac \varphi(O)$, con $O = \varphi^{-1}(p)$.

locale φ .

Vediamo ora come trovare il piano tangente alle superfici di livello:

Proposizione 1.22. *Siano $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto, $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare di una funzione $f \in C^\infty(V)$. Se S è una componente connessa di $f^{-1}(a)$ e $p \in S$, allora il piano tangente $T_p S$ è il sottospazio di \mathbb{R}^3 ortogonale a $\nabla f(p)$.*

Dimostrazione. Consideriamo $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p S$ e $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Differenziando $f \circ \sigma \equiv a$ e valutando il tutto in $t = 0$ abbiamo

$$0 = \frac{d}{dt} a = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt}(0) = \nabla f(\sigma(0)) \cdot \sigma'(0) = \nabla f(p) \cdot v,$$

quindi $v \perp \nabla f(p)$. Abbiamo così dimostrato che $T_p S \subseteq (\nabla f(p))^\perp$; hanno entrambi dimensione 2, pertanto devono coincidere. \square

Esempio 1.23 (La sfera). *Sia $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$. S^2 è una superficie di livello: posta $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, abbiamo che $S^2 = f^{-1}(1)$, con 1 valore regolare di f . Dalla Proposizione (1.22), $T_{p_0} S^2$ è il sottospazio di \mathbb{R}^3 ortogonale a $\nabla f(p_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0) = 2p_0$. Quindi, **il piano tangente alla sfera in un punto è sempre ortogonale al raggio in quel punto.***

- Se $z_0 > 0$, usando la parametrizzazione φ_1 dell'Esempio (1.4), troviamo che una base di $T_{p_0} S^2$ è data dai vettori

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{p_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{bmatrix} \quad e \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{p_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{bmatrix} \quad {}^{17}.$$

- La base indotta dalla parametrizzazione locale ψ_1 data dalle coordinate sferiche (Esempio (1.4)) consiste dei vettori

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{p_0} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad e \quad \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \right|_{p_0} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

¹⁷Con un calcolo diretto si può verificare, in accordo con la Proposizione (1.22), che i vettori trovati sono ortogonali a $\nabla f(p_0)$.

Esempio 1.24 (Il grafico di una funzione). Sia $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ il grafico di una funzione $f \in C^\infty(U)$, con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Usando la parametrizzazione locale introdotta nell'Esempio (1.3) e la Proposizione (1.19), abbiamo che una base per $T_p\Gamma_f$, con $p = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \Gamma_f$ è formata dai vettori

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

1.1.3 Vettori tangenti e derivazioni

In questa sezione vedremo come differenziare funzioni su superfici. In primo luogo, osserviamo che per differenziare una funzione in un punto, basta conoscere il comportamento della funzione in un intorno del punto; se siamo interessati a differenziare in un punto p , due funzioni che coincidono in un qualche intorno di quel punto p sono del tutto equivalenti.

Ciò suggerisce la seguente:

Definizione 1.25. Siano $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$. Sia poi

$$\mathcal{F} = \{(U, f) \mid U \subseteq S \text{ intorno aperto di } p \text{ in } S, f \in C^\infty(U)\}.$$

Definiamo una relazione di equivalenza \sim su \mathcal{F} ponendo: $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste intorno aperto $W \subseteq U \cap V$ di p in S tale che $f|_W = g|_W$.

$C^\infty(p) = \mathcal{F}/\sim$ è lo spazio dei germi delle funzioni di classe C^∞ in p , ed $f_p \in C^\infty(p)$ è un germe di f in p . Un elemento (U, f) della classe di equivalenza $f_p = [(U, f)]$ è detto rappresentante di f_p .

Se sarà necessario ricordare la superficie su cui stiamo lavorando, scriveremo $C_S^\infty(p)$ al posto di $C^\infty(p)$.

Ciò che vogliamo realmente differenziare sono, quindi, germi di funzioni di classe C^∞ .

Lemma 1.26. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$, e $f_p, g_p \in C^\infty(p)$ due germi in p . Dati $(U_1, f_1), (U_2, f_2)$ due rappresentanti di f_p , e $(V_1, g_1), (V_2, g_2)$ due rappresentanti di g_p , allora:

- (i) $(U_1 \cap V_1, f_1 + g_1) \sim (U_2 \cap V_2, f_2 + g_2)$;
- (ii) $(U_1 \cap V_1, f_1 g_1) \sim (U_2 \cap V_2, f_2 g_2)$;
- (iii) $(U_1, \lambda f_1) \sim (U_2, \lambda f_2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- (iv) $f_1(p) = f_2(p)$.

Dimostrazione. (i) $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \implies \exists$ un intorno aperto $W_f \subseteq U_1 \cap U_2$ di p tale che $f_1|_{W_f} = f_2|_{W_f}$. Analogamente, $(V_1, g_1) \sim (V_2, g_2) \implies \exists$ un intorno aperto $W_g \subseteq V_1 \cap V_2$ di p tale che $g_1|_{W_g} = g_2|_{W_g}$. Allora $(f_1 + g_1)|_{W_f \cap W_g} = (f_2 + g_2)|_{W_f \cap W_g}$, con $W_f \cap W_g \subseteq (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) = (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2)$ un intorno aperto di p . Allo stesso modo si prova (ii), mentre (iii) e (iv) sono ovvie. \square

Definizione 1.27. Siano $f_p, g_p \in C^\infty(p)$ due germi in $p \in S$. Denotiamo con $f_p + g_p \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, f + g)$, dove (U, f) e (V, g) sono due rappresentanti di f_p e g_p rispettivamente. Analogamente, denotiamo con $f_p g_p \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, fg)$ e, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda f_p \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U, \lambda f)$. Infine, per ogni $f_p = [(U, f)] \in C^\infty(p)$, definiamo il suo valore $f_p(p) \in \mathbb{R}$ in p ponendo $f_p(p) = f(p)$.¹⁸

Definizione 1.29. Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ una mappa C^∞ tra due superfici, e $p \in S_1$. Definiamo la mappa¹⁹

$$\begin{aligned} F_p^* : C_{S_2}^\infty(F(p)) &\longrightarrow C_{S_1}^\infty(p) \\ \mathfrak{g}_{F(p)} = [(V, g)] &\longmapsto F_p^*(\mathfrak{g}_{F(p)}) = [(F^{-1}(V), g \circ F)]. \end{aligned}$$

Lemma 1.30. (i) $(id_S)_p^* = id_{C_{S_1}^\infty(p)} \forall p \in S$, con S superficie;
(ii) Se $F: S_1 \rightarrow S_2$ e $G: S_2 \rightarrow S_3$ sono funzioni C^∞ tra superfici, allora $(G \circ F)_p^* = F_p^* \circ G_{F(p)}^* \forall p \in S_1$;
(iii) Se $F: S_1 \rightarrow S_2$ è un diffeomorfismo, allora F_p^* è un isomorfismo di \mathbb{R} -algebre $\forall p \in S_1$.²⁰

¹⁸Il Lemma (1.26) assicura che questi oggetti sono tutti ben definiti. È possibile verificare che $C^\infty(p)$ con queste operazioni è una \mathbb{R} -algebra.

Definizione 1.28. Un'algebra su un campo \mathbb{K} è un insieme A dotato di un'addizione $+$, una moltiplicazione \cdot e una moltiplicazione per scalari $\lambda \cdot$, tali che:
(i) $(A, +, \cdot)$ è un anello;
(ii) $(A, +, \lambda \cdot)$ è uno spazio vettoriale;
(iii) Vale la proprietà associativa: $(\lambda f)g = \lambda(fg) = f(\lambda g)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f, g \in A$.

¹⁹La mappa, che è un omomorfismo di \mathbb{R} -algebre, è ben definita: se (V_1, g_1) e (V_2, g_2) sono due rappresentanti di $\mathfrak{g}_{F(p)}$, allora $(F^{-1}(V_1), g_1 \circ F)$ e $(F^{-1}(V_2), g_2 \circ F)$ rappresentano lo stesso germe in p .

A volte, invece di $F_p^*(\mathfrak{g}_{F(p)})$ scriveremo $\mathfrak{g}_{F(p)} \circ F$.

²⁰In particolare, se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale di S con $\varphi(x_0) = p \in S$, allora $\varphi_{x_0}^*: C_{\varphi(U)}^\infty(p) = C_S^\infty(p) \rightarrow C_U^\infty(x_0)$ è un isomorfismo di \mathbb{R} -algebre.

Dimostrazione. (i) è banale. Per provare (ii), esplicitiamo:

$$(G \circ F)_p^* : C_{S_3}^\infty(G(F(p))) \longrightarrow C_{S_1}^\infty(p) \\ [(V, g)] \longmapsto [((G \circ F)^{-1}(V), g \circ (G \circ F))],$$

$$G_{F(p)}^* : C_{S_3}^\infty(G(F(p))) \longrightarrow C_{S_2}^\infty(F(p)) \\ [(V, g)] \longmapsto [(G^{-1}(V), g \circ G)],$$

$$F_p^* : C_{S_2}^\infty(F(p)) \longrightarrow C_{S_1}^\infty(p) \\ [(U, f)] \longmapsto [(F^{-1}(U), f \circ F)].$$

Quindi:

$(F_p^* \circ G_{F(p)}^*)((V, g)) = F_p^*([(G^{-1}(V), g \circ G)]) = [(F^{-1}(G^{-1}(V)), (g \circ G) \circ F)]$; infine basta osservare che $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ e che la composizione di funzioni è associativa.

(iii) Poniamo $G = F^{-1}$ in (ii) e otteniamo così: $(F^{-1} \circ F)_p^* = F_p^* \circ (F^{-1})_{F(p)}^*$, ovvero $(id_{S_1})_p^* = id_{C_{S_1}^\infty(p)} = F_p^* \circ (F^{-1})_{F(p)}^*$, da cui $(F_p^*)^{-1} = (F^{-1})_{F(p)}^*$. \square

Siamo ora in grado di definire cosa si intende per derivata parziale su una superficie:

Definizione 1.31. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Una derivazione in p è una funzione \mathbb{R} -lineare $D: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la regola di Leibniz:

$$D(f_p g_p) = f_p(p)D(g_p) + g_p(p)D(f_p).^{21}$$

Definizione 1.32. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Data una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ in p , con $\varphi(x_0) = p$, definiamo una mappa²²

$$\varphi_* : \mathcal{D}(C^\infty(x_0)) \longrightarrow \mathcal{D}(C^\infty(p)) \\ D \longmapsto D \circ \varphi_{x_0}^*,$$

ossia, $\varphi_*(D)(f_p) = D(f_p \circ \varphi) \quad \forall f_p \in C^\infty(p), D \in \mathcal{D}(C^\infty(x_0))$.

Esiste una caratterizzazione intrinseca per il piano tangente ad una superficie in punto; precisamente:

Teorema 1.33. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora il piano tangente $T_p S$ è canonicamente isomorfo allo spazio $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ delle derivazioni in p .

²¹L'insieme $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ delle derivazioni in p è un sottospazio vettoriale del duale di $C^\infty(p)$.

²² φ_* è un isomorfismo di spazi vettoriali, con inversa $(\varphi_*)^{-1}(D) = D \circ (\varphi^{-1})_p^*$.

Idea di Dimostrazione. Si considera una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ centrata in p e si costruisce il diagramma commutativo²³:

$$\begin{array}{ccc} T_O U = \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}(C^\infty(O)) \\ d\varphi_O \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ T_p S & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{D}(C^\infty(p)) \end{array}$$

dove le mappe $d\varphi_O$ e φ_* sono quelle definite in (1.19) e (1.32), mentre la mappa lineare α è definita ponendo $\alpha(v) = \frac{\partial}{\partial v}\Big|_O = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_O + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_O$, in modo che $\beta = \varphi_* \circ \alpha \circ (d\varphi_O)^{-1}$.

In primo luogo, si mostra che α è un isomorfismo di spazi vettoriali; allora, dal momento che $d\varphi_O$ e φ_* sono isomorfismi, anche β è un isomorfismo.

Successivamente, per vedere che β è canonico, ovvero esprimibile in un modo indipendente da φ , si procede nel modo seguente:

si considera un vettore $v \in T_p S$ e si sceglie una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tale che $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Ora, poiché il prossimo calcolo sarà utile anche in seguito, lo vediamo esplicitamente:

$$\beta(v)(f_p) = (f \circ \sigma)'(0), \quad \forall f_p = [(U, f)] \in C^\infty(p). \quad (1.2)$$

Infatti, seguendo quanto precedentemente fatto nella dimostrazione della Proposizione (1.19), assumiamo che il supporto di σ sia contenuto in $\varphi(U)$ e poniamo $\sigma_0 = \varphi^{-1} \circ \sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, soddisfacente $\sigma_0(0) = \varphi^{-1}(\sigma(0)) = \varphi^{-1}(p) = O$.

Poiché $d\varphi_O$ è suriettivo, esiste un vettore $v^0 = (v_1^0, v_2^0) \in T_O U = \mathbb{R}^2$ tale che $d\varphi_O(v^0) = v = v_1^0 \partial_1|_p + v_2^0 \partial_2|_p$. Poniamo $\sigma'_0(0) = v^0$; allora:

$$\begin{aligned} \beta(v)(f_p) &= (\varphi_* \circ \alpha \circ (d\varphi_O)^{-1})(v)(f_p) \\ &= (\varphi_* \circ \alpha)(v^0)(f_p) = \alpha(v^0)(\varphi_O^*(f_p)) \\ &= \alpha(v^0)(f_p \circ \varphi) \\ &= v_1^0 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_1}(O) + v_2^0 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_2}(O) \\ &= (\sigma'_0)_1(0) \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_1}(O) + (\sigma'_0)_2(0) \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_2}(O) \\ &= ((f \circ \varphi) \circ \sigma_0)'(0) \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \sigma)'(0) = (f \circ \sigma)'(0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

²³Dal diagramma si deduce che φ_* è l'analogo di $d\varphi_O$ quando si interpretano i piani tangenti come spazi di derivazioni.

Dimostrato ciò si conclude, infatti: il membro in (1.2) di sinistra non dipende da σ e nemmeno dal rappresentante di f_p scelto, mentre quello di destra non dipende da alcuna parametrizzazione locale. Quindi β non dipende né da φ e né da σ ; pertanto è un isomorfismo canonico. \square

D'ora in poi, quindi, possiamo identificare tra loro $T_p S$ e $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ senza esplicitare l'isomorfismo β ; perciò, un vettore tangente sarà considerato sia come un vettore di \mathbb{R}^3 sia come una derivazione dello spazio dei germi in p .

Osservazione 1.34. *Se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale centrata in $p \in S$, preso $v = v_1 \partial_1|_p + v_2 \partial_2|_p \in T_p S$, allora la (1.3) implica:*

$$v(f_p) = v_1 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_1}(O) + v_2 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_2}(O), \quad \forall f_p = [(V, f)] \in C^\infty(p).$$

In particolare,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p (f_p) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}(O), \quad (1.4)$$

che dà un senso alla Definizione (1.21).

Definizione 1.35. *Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ una mappa C^∞ tra due superfici. Il differenziale di F in $p \in S_1$ è la mappa lineare*

$$\begin{aligned} dF_p: T_p S_1 &\longrightarrow T_{F(p)} S_2 \\ D &\longmapsto D \circ F_p^* \end{aligned}$$

per ogni derivazione $D \in T_p S_1$.

Proposizione 1.36. (i) $d(id_S)_p = id_{T_p S} \forall p \in S$, con S superficie;
(ii) Se $F: S_1 \rightarrow S_2$ e $G: S_2 \rightarrow S_3$ sono funzioni C^∞ tra superfici, e $p \in S_1$, allora $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$;
(iii) Se $F: S_1 \rightarrow S_2$ è un diffeomorfismo, allora dF_p è invertibile con inversa $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)} \forall p \in S_1$.

Dimostrazione. Segue dalla definizione di differenziale e dal Lemma (1.30). \square

Vediamo come agisce il differenziale su vettori tangenti ad una curva:

Lemma 1.37. *Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ una mappa C^∞ tra superfici, e $p \in S_1$. Se $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ è una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, allora*

$$dF_p(v) = (F \circ \sigma)'(0).$$

Dimostrazione. Poniamo $w = (F \circ \sigma)'(0) \in T_{F(p)}S_2$. Usando la notazione introdotta nel Teorema (1.33), vogliamo mostrare che $dF_p(\beta(v)) = \beta(w)$. Ricordando (1.2), abbiamo:

$$dF_p(\beta(v))(f_{F(p)}) = \beta(v)(F_p^*(f_{F(p)})) = \beta(v)(f_{F(p)} \circ F) = ((f \circ F) \circ \sigma)'(0) = (f \circ (F \circ \sigma))'(0) = \beta(w)(f_{F(p)}), \text{ per ogni } f_{F(p)} = [(U, f)] \in C^\infty(F(p)). \quad \square$$

Grazie al lemma appena dimostrato, possiamo dare la definizione²⁴ di differenziale di una mappa di classe C^∞ definita su una superficie S a valori in \mathbb{R}^n .

Osservazione 1.39. Se $F: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^∞ e $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale centrata in $p \in S$, allora vale:

$$dF_p(\partial_j) = {}^{25}(F \circ \sigma)'(0) = {}^{26}\partial_j(F_p) = {}^{27}\frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial x_j}(O), \quad \forall i, j = 1, 2,$$

dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una curva arbitraria in S , con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = \partial_j$, e dove $\{\partial_1, \partial_2\}$ è la base di T_pS indotta da φ .

1.2 Curvature

Uno degli scopi principali della geometria differenziale è quello di trovare un modo efficace per misurare la curvatura di oggetti non piatti (nel nostro caso le superfici). Una superficie può però curvare diversamente nelle diverse direzioni; per questo motivo abbiamo bisogno di introdurre una misura di curvatura collegata alle direzioni tangenti, ossia un metodo attraverso il quale sia possibile valutare la variazione dei piani tangenti.

Per rispondere a questo problema definiremo via via nuovi oggetti. Per prima cosa introdurremo, su ciascuno dei piani tangenti, una forma quadratica definita positiva, un oggetto intrinseco che ci permetterà di misurare la lunghezza dei vettori tangenti alla superficie.

24

Definizione 1.38. Data $F: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ , il differenziale $dF_p: T_pS \rightarrow \mathbb{R}^n$ di F in $p \in S$ è definito ponendo $dF_p(v) = (F \circ \sigma)'(0)$ per ogni $v \in T_pS$, dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una qualsiasi curva in S tale che $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$.

²⁵Per la Definizione (1.38).

²⁶Per la (1.2).

²⁷Per l'Osservazione (1.34).

Poiché abbiamo già osservato che un piano tangente ad una superficie è, in particolare, un piano in \mathbb{R}^3 , esso è completamente determinato non appena conosciamo un versore ortogonale. Vedremo dunque che una famiglia di piani tangenti può essere descritta dalla *mappa di Gauss*, che associa ad ogni punto della superficie un versore normale al piano tangente in quel dato punto; tale mappa esiste sempre localmente ed esiste globalmente solamente sulle superfici orientabili.

Quindi, vedremo due modi per misurare la curvatura di una superficie lungo una direzione tangente: geometricamente, come la curvatura della curva data dall'intersezione della superficie con un piano ortogonale; analiticamente, usando il differenziale della mappa di Gauss ed una forma quadratica associata, la *seconda forma fondamentale*. Andremo infine ad introdurre la curvatura Gaussiana di una superficie come il determinante del differenziale della mappa di Gauss, per concludere con il Teorema egregium di Gauss.

1.2.1 La prima forma fondamentale

Incominciamo questo viaggio tra le curvature delle superfici misurando dapprima la lunghezza dei vettori tangenti.

Abbiamo già visto che il piano tangente ad una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ in un punto $p \in S$ può essere pensato come un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , ed è ben noto che quest'ultimo è dotato di un prodotto scalare canonico. È quindi possibile restringere ad ogni piano tangente il prodotto scalare usuale di \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.40. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Per ogni punto $p \in S$, denotiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ il prodotto scalare definito positivo su $T_p S$ indotto dal prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3 . La prima forma fondamentale I_p è la forma quadratica (definita positiva) associata a questo prodotto scalare:*

$$\forall v \in T_p S, \quad \begin{array}{l} I_p : T_p S \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \langle v, v \rangle_p \geq 0. \end{array}$$

Osservazione 1.41. *Conoscere la prima forma fondamentale I_p è equivalente a conoscere il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, infatti:*

$$\langle v, w \rangle_p = \frac{1}{2}[I_p(v+w) - I_p(v) - I_p(w)] = \frac{1}{4}[I_p(v+w) - I_p(v-w)].$$

Consideriamo $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale in $p \in S$, e $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base di $T_p S$ indotta da φ . Presi $v, w \in T_p S$, è possibile scriverli come

combinazione lineare dei vettori di base, ovvero $v = v_1\partial_1 + v_2\partial_2 \in T_pS$ e $w = w_1\partial_1 + w_2\partial_2 \in T_pS$; possiamo allora esprimere $\langle v, w \rangle_p$ in coordinate:

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle_p &= \langle v_1\partial_1 + v_2\partial_2, w_1\partial_1 + w_2\partial_2 \rangle_p \\ &= \langle v_1\partial_1, w_1\partial_1 \rangle_p + \langle v_1\partial_1, w_2\partial_2 \rangle_p + \langle v_2\partial_2, w_1\partial_1 \rangle_p + \langle v_2\partial_2, w_2\partial_2 \rangle_p \\ &= v_1w_1\langle \partial_1, \partial_1 \rangle_p + [v_1w_2 + v_2w_1]\langle \partial_1, \partial_2 \rangle_p + v_2w_2\langle \partial_2, \partial_2 \rangle_p.\end{aligned}$$

Definizione 1.42. Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie S . Allora i coefficienti metrici di S rispetto a φ sono le funzioni $E, F, G^{28}: U \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$E(x) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\varphi(x)}, \quad F(x) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}, \quad G(x) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}$$

per ogni $x \in U$.

Essi determinano completamente la prima forma fondamentale:

$$\begin{aligned}I_p(v) &= \langle v_1\partial_1 + v_2\partial_2, v_1\partial_1 + v_2\partial_2 \rangle_p \\ &= \langle v_1\partial_1, v_1\partial_1 \rangle_p + \langle v_1\partial_1, v_2\partial_2 \rangle_p + \langle v_2\partial_2, v_1\partial_1 \rangle_p + \langle v_2\partial_2, v_2\partial_2 \rangle_p \\ &= v_1^2\langle \partial_1, \partial_1 \rangle_p + 2v_1v_2\langle \partial_1, \partial_2 \rangle_p + v_2^2\langle \partial_2, \partial_2 \rangle_p \\ &= E(x)v_1^2 + 2F(x)v_1v_2 + G(x)v_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(x) & F(x) \\ F(x) & G(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

per ogni $p = \varphi(x) \in \varphi(U)$ e $v = v_1\partial_1 + v_2\partial_2 \in T_pS$.

Esempio 1.43 (Il piano). Dato il piano S dell'Esempio (1.2), la base di $T_pS \forall p \in S$ indotta dalla parametrizzazione locale φ è costituita dai vettori $\partial_1 = \mathbf{v}$ e $\partial_2 = \mathbf{w}$; i coefficienti metrici del piano rispetto a φ sono dati da:

$$E \equiv \|\mathbf{v}\|^2, \quad F \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad G \equiv \|\mathbf{w}\|^2.$$

²⁸I coefficienti metrici sono funzioni di classe C^∞ in U .

La notazione E, F, G fu introdotta da Gauss all'inizio del XIX secolo. In una notazione più moderna, possiamo scrivere $E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$, per ottenere

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{h,k=1}^2 g_{hk}(p)v_hw_k.$$

Sebbene le funzioni E, F, G siano definite su U , a volte sarà più conveniente considerarle definite su $\varphi(U)$, ovvero sostituirle con $E \circ \varphi^{-1}, F \circ \varphi^{-1}, G \circ \varphi^{-1}$ rispettivamente, come nel calcolo appena svolto.

Esempio 1.44 (Il grafico di una funzione). Siano $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f \in C^\infty(U)$, e $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione locale del grafico Γ_f data da $\varphi(x) = (x, f(x))$ dell'Esempio (1.3). Ricordando quanto visto nell'Esempio (1.24), i coefficienti metrici di Γ_f rispetto a φ sono dati da

$$E = 1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad G = 1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2.$$

Esempio 1.45 (La sfera). I coefficienti metrici della sfera S^2 rispetto alle parametrizzazioni usate nell'Esempio (1.23) sono:

$$E = \frac{1 - y^2}{1 - x^2 - y^2}, \quad F = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}, \quad G = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - y^2}.$$

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta \equiv 1, \\ F &= -\sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi + \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi \equiv 0, \\ G &= \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Da quest'ultimo esempio deduciamo che i coefficienti metrici dipendono dalla parametrizzazione locale scelta.

Esiste una relazione tra la *prima forma fondamentale* e la *lunghezza di una curva su di una superficie*, infatti: se conosciamo la prima allora, data una curva $\sigma: [a, b] \rightarrow S$ con supporto in S , siamo in grado di calcolarne la sua lunghezza $L(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{\sigma(t)}(\sigma'(t))} dt$. Viceversa, se conosciamo la lunghezza delle curve con supporto in S , possiamo trovare la prima forma fondamentale: dato $p \in S$ e $v \in T_p S$, consideriamo una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$; poniamo $l(t) = L(\sigma|_{[0,t]})$. Allora $I_p(v) = \left| \frac{dl}{dt}(0) \right|^2$. Rimanendo sulla superficie, possiamo misurare la lunghezza di una curva avente supporto sulla superficie e, quindi, siamo in grado di calcolare la prima forma fondamentale. Deduciamo dunque che la prima forma fondamentale è un oggetto *intrinseco*²⁹, ovvero non dipende dal modo in cui la superficie è immersa nello spazio \mathbb{R}^3 .

Concludiamo questa sezione con la seguente:

²⁹Per questo motivo, le proprietà della superficie che dipendono soltanto dalla prima forma fondamentale saranno chiamate *proprietà intrinseche*.

Definizione 1.46. Siano $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$. L'angolo $\theta \in \mathbb{R}$ tra due vettori tangenti $v, w \in T_p S$ è tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle_p}{\sqrt{I_p(v)I_p(w)}}.$$

Inoltre, se $\sigma_1, \sigma_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ sono due curve tali che $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$, chiameremo angolo tra σ_1 e σ_2 in p l'angolo tra $\sigma_1'(0)$ e $\sigma_2'(0)$.

Nel piano gli assi cartesiani si incontrano, solitamente, formando un angolo retto. Le parametrizzazioni locali soddisfacenti un'analogia proprietà hanno un nome speciale:

Definizione 1.47. Una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ di una superficie S è ortogonale³⁰ se $\partial_1|_p$ e $\partial_2|_p$ sono ortogonali per ogni $p \in \varphi(U)$.

1.2.2 Orientabilità

Se dovessimo spiegare il concetto di orientabilità in un modo semplice e veloce, diremmo che una superficie è orientabile se ha due facce, una esterna ed una interna (ad esempio, la sfera), mentre non lo è se possiede una sola faccia, ovvero se non è possibile definire un interno ed un esterno della superficie (ad esempio, il nastro di Möbius).

In questa sezione vedremo due modi di definire la nozione di orientazione: il primo intrinseco, mentre il secondo legato al fatto che la superficie è contenuta in \mathbb{R}^3 .

Per descrivere il primo, occorre rifarsi all'idea secondo cui una superficie è orientabile se è possibile orientare tutti i suoi piani tangenti in modo consistente³¹. Diamo subito la seguente:

Definizione 1.48. Data una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ e due sue parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ e $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow S$, diciamo che φ_α e φ_β determinano la stessa orientazione (o sono equiorientate) se $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) =$

³⁰In questo caso abbiamo: $\cos \theta = \frac{\langle \partial_1, \partial_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(\partial_1)I_p(\partial_2)}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$, quindi una parametrizzazione locale è ortogonale se, e solo se, $F \equiv 0$.

³¹Ricordiamo che orientare un piano significa scegliere per esso una base ordinata, ovvero fissare una direzione di rotazione preferenziale per gli angoli, e che due basi determinano la stessa orientazione se, e soltanto se, la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo.

\emptyset oppure $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) > 0$ su $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$. Diciamo invece che determinano orientazioni opposte se $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) < 0$ su $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$.³²

La superficie S è orientabile³³ se esiste un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}_\alpha$ per S formato da parametrizzazioni locali a due a due equiorientate (diciamo che l'atlante è orientato e che la superficie è orientata dall'atlante \mathcal{A}).

Esempio 1.49 (Il grafico di una funzione). Una superficie che ammette un atlante formato da una sola parametrizzazione locale è, ovviamente, orientabile.

Quindi, tutte le superfici ottenibili come grafici di funzioni sono orientabili.

Esempio 1.50 (La sfera). Una superficie con un atlante formato da due parametrizzazioni locali, le cui immagini hanno intersezione connessa, è orientabile. Infatti, nell'intersezione, $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ ha segno costante. Se è positivo, abbiamo finito; altrimenti, basta permutare le coordinate nel dominio di una delle parametrizzazioni (quest'operazione infatti cambia il segno di $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$).

Quindi, ad esempio, la sfera è orientabile.

Illustriamo ora un secondo metodo per definire l'orientazione di una superficie che, come già accennato prima, dipende fortemente dall'immersione della superficie in \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.51. Un campo di vettori normali su di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è una mappa di classe C^∞

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto N(p), \end{aligned}$$

con la proprietà che $N(p)$ è ortogonale a $T_p S$ per ogni punto $p \in S$.

Se inoltre $\|N\| \equiv 1$, diremo che N è un campo di versori normali ad S .

³²Attenzione: può succedere che una coppia di parametrizzazioni locali non determini né lo stesso orientamento e neppure quello opposto. Ad esempio, potrebbe accadere che $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ abbia due componenti connesse, con la proprietà che $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ sia positivo su una di esse, mentre sull'altra risulti negativo.

³³L'orientabilità è una proprietà *globale*: non è possibile verificare l'orientabilità di una superficie semplicemente controllando le singole parametrizzazioni locali.

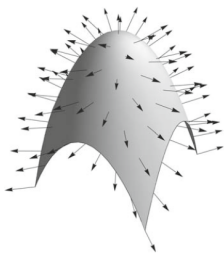


Figura 1.1: Un campo di vettori normali

Se N è un campo di versori normali su di una superficie S , intuitivamente possiamo dire che N indica la faccia esterna della superficie, mentre $-N$ indica la faccia interna (o viceversa).

Non tutte le superfici ammettono però un campo di versori normali:

Proposizione 1.52. *Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è orientabile se, e soltanto se, esiste un campo di versori normali su S .*

Dimostrazione. Facciamo prima un'osservazione: consideriamo una parametrizzazione locale $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ di S e poniamo

$$N_\alpha(p) = \frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|}(p) \quad \forall p \in \varphi_\alpha(U_\alpha), \quad \text{dove} \quad \partial_{j,\alpha} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} \quad \forall j = 1, 2.$$

Poiché $\{\partial_{1,\alpha}, \partial_{2,\alpha}\}$ è una base di $T_p S$, il versore $N_\alpha(p)$ è ben definito, diverso dal vettore nullo e ortogonale a $T_p S$; inoltre, essendo di classe C^∞ , possiamo concludere che N_α è un campo di versori normali su $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Notiamo poi che se $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow S$ è una seconda parametrizzazione locale di S con la proprietà che $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, allora è possibile far vedere che vale la seguente uguaglianza su $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$:

$$N_\alpha = \text{sgn}(\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)) N_\beta. \quad (1.5)$$

“ \implies ” Sia S orientabile con atlante orientato $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}_\alpha$. Se $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$, con $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{A}$, (1.5) implica che $N_\alpha(p) = N_\beta(p)$; quindi la mappa N_α non dipende dalla particolare parametrizzazione scelta, e definisce un campo di versori normali su S .

“ \impliedby ” Sia $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di versori normali su S , e sia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}_\alpha$ un atlante per S , con la proprietà che il dominio U_α di ciascuna φ_α sia connesso. Dalla definizione di prodotto vettoriale, segue che $N_\alpha(p)$ è ortogonale a $T_p S$ per ogni $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, e $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$; dunque, $\langle N, N_\alpha \rangle \equiv \pm 1$ su ognuno degli U_α . Poiché U_α è connesso, possiamo assumere che tutti questi prodotti scalari siano identicamente uguali a 1 (altrimenti, basta modificare φ_α scambiando le coordinate in U_α). Quindi, $N_\alpha \equiv N$ su ciascuno degli U_α ; da (1.5), l'atlante \mathcal{A} è orientato. \square

Definizione 1.53. *Data una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ orientata da un atlante \mathcal{A} , diciamo che un campo di versori normali N determina l'orientazione (assegnata) se $N = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$ per una qualsiasi parametrizzazione locale $\varphi \in \mathcal{A}$.*

Se S è una superficie orientata, allora esiste sempre un *unico* campo di versori normali che determina l'orientazione assegnata. Concludiamo con un risultato che ci fornisce una grande famiglia di superfici orientabili:

Corollario 1.54. *Sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare per una funzione $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ , dove $V \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto. Allora ogni componente connessa S di $f^{-1}(a)$ è orientabile, e un campo di versori normali è dato da $N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.*

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione (1.22). □

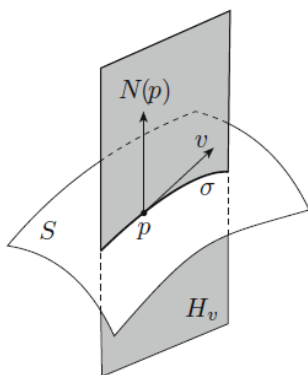
1.2.3 Curvatura normale e seconda forma fondamentale

Esistono più modi significativi per misurare la curvatura di una superficie, ma ci concentreremo in modo dettagliato solo sulla curvatura Gaussiana.

Come abbiamo già osservato, la curvatura di una superficie, qualunque essa sia, non è costante in tutte le direzioni. A tal proposito, consideriamo un cilindro circolare³⁴; esso è curvo lungo le direzioni tangenti ai paralleli, mentre non lo è nella direzione della generatrice. Deduciamo quindi che la sua curvatura è massima nella direzione dei paralleli, minima nella direzione della generatrice e, nelle altre direzioni, prende valori intermedi. Per calcolarla potremmo, ad esempio, considerare una curva contenuta nella superficie, tangente alla direzione scelta; ma con quale criterio scegliere una tale curva? A priori (e anche a posteriori), se scegliamo una curva casuale, la sua curvatura potrebbe dipendere da alcune proprietà della curva stessa! Abbiamo quindi bisogno di un procedimento che selezioni una curva (dipendente soltanto dalla superficie S e dalla direzione tangente v a cui siamo interessati) che rappresenti la geometria della superficie lungo quella data direzione.

Vediamo, senza entrare troppo nel dettaglio, come procurarci una tale curva.

³⁴Come noto, il cilindro è una superficie di rotazione. Una superficie di rotazione (o di rivoluzione) è ottenuta facendo ruotare una curva, detta *generatrice*, attorno all'asse di rotazione. Un *parallelo* di tale superficie è una curva che si ottiene intersecando un piano ortogonale all'asse di rotazione con la superficie stessa.



L'idea è quella di considerare, dato $p \in S$, con $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, un vettore $N(p) \in \mathbb{R}^3$ ortogonale a $T_p S$. Scelto poi un vettore $v \in T_p S$, prendiamo il piano per p parallelo ai vettori $N(p)$ e v che, nella figura, è indicato con H_v . Ebbene, almeno in un intorno del punto p , questo piano interseca la superficie nel supporto di una curva regolare σ . Intuitivamente, questa curva σ , detta *sezione normale* di S in p lungo v , è la curva cercata: essa dipende solo dalla geometria della superficie S nella direzione del vettore tangente v . Di conseguenza,

possiamo enunciare che la *curvatura normale* di S in p lungo la direzione v è la curvatura in p (orientata)³⁵ della sezione normale σ di S in p lungo v , considerata come curva piana contenuta in H_v .

Nel caso del cilindro circolare di raggio $r > 0$ è facilmente verificabile che la curvatura normale lungo la direzione tangente alla generatrice è zero, mentre quella lungo le direzioni tangenti ai paralleli (che sono sezioni normali) è $\pm 1/r$; lungo le altre direzioni, poiché le sezioni normali sono ellissi, il calcolo non dev'essere troppo complicato!

Il problema diventa però arduo nel caso di una superficie arbitraria; in questo caso, infatti, le sezioni normali sono definite solo implicitamente (come intersezione di un piano con una superficie), e quindi il calcolo della curvatura normale potrebbe non essere agevole.

Per rimediare a questo problema, introduciamo ora un secondo modo per studiare la curvatura di una superficie. Questa via si basa sull'idea che, dal momento che stiamo considerando superfici contenute nello spazio \mathbb{R}^3 , il piano tangente è determinato dal vettore normale, che è unico a meno del segno. Possiamo quindi provare a misurare la variazione del piano tangente ad una superficie differenziando il vettore normale. Occorre la prossima:

³⁵La curva σ va scelta in modo che $\sigma(0) = p$ ed orientata in modo che $\sigma'(0) = v$, mentre il piano H_v va orientato in modo che la base $\{v, N(p)\}$ sia una base positiva. Qui va data:

Definizione 1.55. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata, e $N: S \rightarrow S^2$ un campo di vettori normali che determina l'orientazione assegnata. Se $p \in S$, diciamo che una base $\{v_1, v_2\}$ di $T_p S$ è positiva (rispettivamente, negativa) se la base $\{v_1, v_2, N(p)\}$ di \mathbb{R}^3 ha la stessa orientazione (rispettivamente, l'orientazione opposta) della base canonica di \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.56. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata³⁶.

La mappa di Gauss di S è il campo di versori normali $N: S \rightarrow S^2$ che identifica l'orientazione data.

Poiché $N(p)$ è ortogonale a $T_p S$, la mappa di Gauss determina in modo unico i piani tangenti alla superficie, e la sua variazione misura quanto la superficie è “lontana” dall'essere un piano. Ciò suggerisce che la curvatura di una superficie potrebbe essere correlata al differenziale della mappa di Gauss. Per verificare questa relazione, vediamo alcuni semplici esempi:

Esempio 1.57 (Il piano). In un piano parametrizzato come nell'Esempio (1.2), abbiamo

$$N \equiv \frac{v \wedge w}{\|v \wedge w\|},$$

dunque N è costante e $dN \equiv 0$.

Esempio 1.58 (La sfera). Sia $S = S^2$. Usando una qualsiasi delle parametrizzazioni descritte nell'Esempio (1.45), troviamo $N(p) = p$, in accordo con l'Esempio (1.23). La mappa di Gauss della sfera S^2 è quindi la mappa identica, dunque

$$dN_p = id \quad \forall p \in S^2.$$

Esempio 1.59 (Il cilindro). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ il cilindro circolare di equazione $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ definita da $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$, abbiamo che 1 è un valore regolare di f , quindi $S = f^{-1}(1)$ è una superficie di livello di f . Allora, per il Corollario (1.54), il cilindro è orientabile e una mappa di Gauss di S è data da:

$$N(p) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall p = (p_1, p_2, p_3) \in S.$$

In particolare, $T_p S = N(p)^\perp = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot N(p) = 0\} = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 p_1 + v_2 p_2 = 0\}$. Essendo N la restrizione ad S di una mappa lineare di \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^3 , abbiamo che $dN_p(v) = (v_1, v_2, 0) \forall v \in T_p S$. In particolare, vale che $dN_p(T_p S) \subseteq T_p S$.

³⁶Anche se, per motivi di semplicità, lavoreremo spesso con superfici orientate, la gran parte di quanto viene detto qui vale per qualsiasi superficie. Infatti, ogni superficie è localmente orientabile: se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale nel punto p , allora $N = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$ è una mappa di Gauss per $\varphi(U)$.

In quest'ultimo esempio, il differenziale della mappa di Gauss mappa il piano tangente alla superficie in sé stesso; questa non è una coincidenza. Per definizione, infatti, dN_p manda T_pS in $T_{N(p)}S^2$. Ma, come già osservato in precedenza nell'Esempio (1.23), il piano tangente alla sfera in un punto è ortogonale a quel punto: $T_{N(p)}S^2 \perp N(p)$; quindi $T_{N(p)}S^2$ e T_pS devono coincidere.

Riassumendo, possiamo considerare il differenziale della mappa di Gauss in un punto $p \in S$ come un *endomorfismo di T_pS* . Esso è pure simmetrico. Per provare quest'ultima affermazione ci avvaliamo di:

Teorema 1.60 (Schwarz). *Dati un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $f \in C^2(\Omega)$, vale:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Proposizione 1.61. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. Allora dN_p è un endomorfismo di T_pS , simmetrico rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ per ogni $p \in S$.*

Dimostrazione. Sia φ una parametrizzazione locale centrata in p , e sia $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base di T_pS indotta da φ . È sufficiente provare la tesi per la base indotta, ovvero

$$\langle dN_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p = \langle \partial_1, dN_p(\partial_2) \rangle_p.$$

Per definizione, $\langle N \circ \varphi, \partial_2 \rangle \equiv 0$ e $\langle N \circ \varphi, \partial_1 \rangle \equiv 0$. Differenziando la prima rispetto a x_1 , la seconda rispetto a x_2 , e ricordando l'Osservazione (1.39), troviamo:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \langle N \circ \varphi, \partial_2 \rangle(O) &= \left\langle \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_1}(O), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(O) \right\rangle + \left\langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(O) \right\rangle \\ &= \langle dN_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p + \left\langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(O) \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x_2} \langle N \circ \varphi, \partial_1 \rangle(O) &= \left\langle \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_2}(O), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(O) \right\rangle + \left\langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}(O) \right\rangle \\ &= \langle dN_p(\partial_2), \partial_1 \rangle_p + \left\langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}(O) \right\rangle. \end{aligned}$$

Per il Teorema (1.60), i due termini più a destra nelle due uguaglianze sono uguali, quindi abbiamo la tesi. \square

Avendo a disposizione un prodotto scalare ed un endomorfismo simmetrico, possiamo provare a mescolarli tra loro:

Definizione 1.62. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata, con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. La seconda forma fondamentale³⁷ di S è la forma quadratica:*

$$\forall v \in T_p S, \quad Q_p: T_p S \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto -\langle dN_p(v), v \rangle_p.$$

Esempio 1.63 (Il piano). *La seconda forma fondamentale di un piano è zero ovunque.*

Esempio 1.64 (La sfera). *La seconda forma fondamentale della sfera orientata dalla mappa di Gauss dell'Esempio (1.58) è: $Q_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle_p = -\langle v, v \rangle_p = -I_p(v)$, ovvero*

$$Q_p = -I_p.$$

Esempio 1.65 (Il cilindro). *La seconda forma fondamentale del cilindro orientato dalla mappa di Gauss dell'Esempio (1.59) è $Q_p(v) = -v_1^2 - v_2^2$.*

È possibile dimostrare che la curvatura normale coincide con la seconda forma fondamentale: sotto le ipotesi della Definizione (1.62), la curvatura normale di S in punto $p \in S$ lungo un versore $v \in T_p S$ corrisponde esattamente a $Q_p(v)$.

1.2.4 Curvatura Gaussiana

Definizione 1.66. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$.*

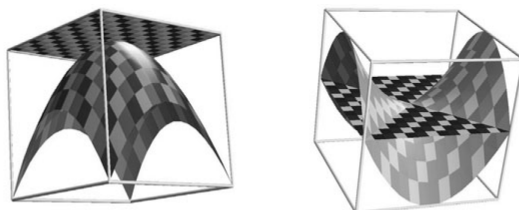
La curvatura Gaussiana di S è la funzione $K: S \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\forall p \in S, \quad K(p) = \det(dN_p).$$

Il segno della curvatura Gaussiana può dare un'idea di come appare una superficie:

³⁷Si osservi che cambiando l'orientazione della superficie S , la mappa di Gauss cambia segno e, di conseguenza, cambia segno anche la seconda forma fondamentale.

Definizione 1.67. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata, con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. Un punto $p \in S$ è ellittico se $K(p) > 0$ (tutte le curvature normali in p hanno lo stesso segno)³⁸; iperbolico se $K(p) < 0$ (esistono curvature normali in p di segno opposto)³⁹; parabolico se $K(p) = 0$ ma $dN_p \neq 0$; e planare se $dN_p = 0$.



Consideriamo una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ in $p \in S$, dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è orientata con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$. Sia poi $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base di $T_p S$ indotta da φ . Allora, se $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 \in T_p S$, possiamo esprimere la seconda forma fondamentale in coordinate locali:

$$\begin{aligned} Q_p(v) &= -\langle dN_p(v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2), v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 \rangle_p \\ &= -v_1^2 \langle dN_p(\partial_1), \partial_1 \rangle_p - 2v_1 v_2 \langle dN_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p - v_2^2 \langle dN_p(\partial_2), \partial_2 \rangle_p \\ &= Q_p(\partial_1) v_1^2 - 2 \langle dN_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p v_1 v_2 + Q_p(\partial_2) v_2^2. \end{aligned}$$

Definizione 1.68. Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie S .

I coefficienti di forma⁴⁰ di S rispetto a φ sono le funzioni e, f, g ⁴¹: $U \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$e(x) = Q_{\varphi(x)}(\partial_1), \quad f(x) = -\langle dN_{\varphi(x)}(\partial_1), \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}, \quad g(x) = Q_{\varphi(x)}(\partial_2)$$

³⁸Intuitivamente, ciò significa che tutte le sezioni normali di S in p curvano dalla stessa parte rispetto a $T_p S$ e quindi, in prossimità del punto p , la superficie è interamente da un solo lato del piano tangente (figura a sinistra).

³⁹Ciò significa che le sezioni normali possono curvare da parti opposte rispetto a $T_p S$, cioè che in un intorno del punto p la superficie ha pezzi da entrambe le parti del piano tangente (figura a destra).

⁴⁰La curvatura Gaussiana, essendo definita direttamente a partire dalla mappa di Gauss, è indipendente dalla parametrizzazione scelta; ciò non vale per i coefficienti metrici e di forma.

⁴¹I coefficienti di forma sono funzioni C^∞ in U . Come per i coefficienti metrici, quella che indichiamo qui è la notazione di Gauss. Useremo anche la notazione più moderna: $e = h_{11}, f = h_{12} = h_{21}, g = h_{22}$.

Allo stesso modo, talvolta sarà più conveniente considerare queste funzioni definite su $\varphi(U)$, cioè sostituirle con $e \circ \varphi^{-1}, f \circ \varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1}$ rispettivamente.

per ogni $x \in U$, dove $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$.

Osservazione 1.69. *Differenziando le identità $\langle N \circ \varphi, \partial_j \rangle \equiv 0 \forall j = 1, 2$, possiamo ottenere espressioni alternative per i coefficienti di forma:*

$$e = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right\rangle, \quad f = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle, \quad g = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right\rangle. \quad (1.6)$$

I coefficienti di forma determinano completamente la seconda forma fondamentale:

$$\begin{aligned} Q_p(v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2) &= e(x)v_1^2 + 2f(x)v_1v_2 + g(x)v_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(x) & f(x) \\ f(x) & g(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

per ogni $p = \varphi(x) \in \varphi(U)$ e $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 \in T_p S$.

Possiamo esprimere anche la matrice $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ che rappresenta il differenziale dN_p rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$, usando le funzioni E, F, G, e, f, g :

Proposizione 1.70. *Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e sia $N = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$. Allora la matrice $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ che rappresenta l'endomorfismo dN rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$ è data da*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

In particolare, la curvatura Gaussiana è data da

$$K = \det(A) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Dimostrazione. Per ogni $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2, w = w_1 \partial_1 + w_2 \partial_2 \in T_p S$, abbiamo:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\langle dN_p(v), w \rangle_p = {}^{42} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

⁴²Con un calcolo diretto è possibile verificare quest'ultima uguaglianza: basta scrivere $-\langle dN_p(v), w \rangle_p = -\langle Av, w \rangle_p$.

da cui segue che

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} A.$$

La matrice $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ rappresenta un prodotto scalare definito positivo rispetto ad una base; in particolare, è invertibile e ha determinante positivo pari a $EG - F^2$. \square

Esempio 1.71 (Il piano). *Nel piano, poiché la seconda forma fondamentale è zero ovunque, abbiamo che $e \equiv f \equiv g \equiv 0$, indipendentemente dalla parametrizzazione scelta. In particolare, la curvatura Gaussiana è zero ovunque.*⁴³

Esempio 1.72 (La sfera). *Abbiamo visto nell'Esempio (1.64) che su una sfera orientata come nell'Esempio (1.58), abbiamo $Q_p = -I_p$. Ciò significa che, per una qualsiasi parametrizzazione, i coefficienti di forma hanno lo stesso valore assoluto, ma segno opposto rispetto ai corrispondenti coefficienti metrici. Dunque, $K \equiv 1$.*

1.2.5 Teorema egregium di Gauss

In quest'ultima sezione vedremo che la curvatura Gaussiana è una proprietà intrinseca di una superficie⁴⁴: dipende solamente dalla prima forma fondamentale, e non dal modo in cui la superficie è immersa nello spazio. Poiché abbiamo definito K coinvolgendo direttamente la mappa di Gauss, la quale è strettamente collegata all'inclusione della superficie in \mathbb{R}^3 , questo risultato si rivela essere piuttosto inaspettato.

Dunque, iniziamo:

Sia $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e sia $N: \varphi(U) \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss di $\varphi(U)$ data da $N = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$.⁴⁵ La

⁴³Altri esempi di superfici con curvatura Gaussiana costante uguale a zero sono i cilindri. La pseudosfera, invece, ha curvatura Gaussiana costante negativa.

⁴⁴Ovvero, è possibile misurare la curvatura Gaussiana di una superficie rimanendo sulla superficie stessa. Questo, ad esempio, ci consente di determinare che la Terra non è piatta senza ricorrere a immagini satellitari, poiché è possibile verificare che la Terra ha una curvatura Gaussiana non nulla con misurazioni effettuate a livello del mare.

⁴⁵Nel procedimento che illustreremo, non verrà richiesto che la superficie sia orientabile. Si noti infatti che, se consideriamo una superficie S orientata e ne cambiamo l'orientazio-

trippla $\{\partial_1, \partial_2, N\}$ è una base di \mathbb{R}^3 ovunque; possiamo dunque esprimere un qualsiasi vettore di \mathbb{R}^3 come combinazione lineare di questi vettori. Esistono perciò delle funzioni $\Gamma_{ij}^r, h_{ij}, a_{ij} \in C^\infty(U)$ tali che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 + h_{ij} N, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_j} = a_{1j} \partial_1 + a_{2j} \partial_2 \quad (1.9)$$

per ogni $i, j = 1, 2$. Dal Teorema (1.60), Γ_{ij}^r e h_{ij} sono simmetrici rispetto agli indici inferiori, ossia

$$\Gamma_{ji}^r = \Gamma_{ij}^r \quad \text{e} \quad h_{ji} = h_{ij} \quad \forall i, j, r = 1, 2.$$

Essendo $\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_i} = dN_p(\partial_i)$, i termini a_{ij} di (1.9) sono le componenti della matrice A che rappresenta dN_p rispetto alla base $\{\partial_1, \partial_2\}$, quindi sono dati da (1.7). Da (1.6) troviamo che gli h_{ij} in (1.8) sono i coefficienti di forma. Gli unici coefficienti sconosciuti che compaiono in (1.8) e (1.9) sono i Γ_{ij}^r .

Definizione 1.73. *Le funzioni Γ_{ij}^r sono i simboli di Christoffel della parametrizzazione locale φ .*

Procediamo quindi a calcolare i simboli di Christoffel; poniamo $i = 1 = j$ in (1.8) e consideriamo il prodotto scalare con ∂_1 e con ∂_2 :

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \partial_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \partial_1, \partial_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_1}, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \partial_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \partial_1, \partial_2 \rangle - \langle \partial_1, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \rangle = \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_2}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Analogamente, ponendo $i = 1$ e $j = 2$, troviamo:

$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_2}, \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \end{cases} \quad (1.11)$$

ed infine, per $i = 2 = j$:

ne, allora la mappa di Gauss cambierà segno, mentre la curvatura Gaussiana K rimarrà invariata. Per questo motivo, possiamo definire la curvatura Gaussiana anche per superfici non orientabili (e questo è il caso che tratteremo qui): se p è un punto di una superficie arbitraria S , la curvatura Gaussiana di S in p corrisponde alla curvatura Gaussiana in p dell'immagine di una qualsiasi parametrizzazione locale di S centrata in p .

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_2}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Questi sono tre sistemi lineari quadrati la cui matrice dei coefficienti ha determinante $EG - F^2$, che è sempre positivo; quindi ammettono un'unica soluzione, esprimibile in termini dei coefficienti metrici e delle loro derivate. È importante notare che i *simboli di Christoffel dipendono solo dalla prima forma fondamentale di S* , cioè sono intrinseci. Come conseguenza, *qualsiasi quantità esprimibile per mezzo dei simboli di Christoffel è intrinseca*: dipende soltanto dalla struttura metrica della superficie, e non dal modo in cui la superficie è immersa in \mathbb{R}^3 .

Osservazione 1.74. *Se la parametrizzazione locale è ortogonale (1.47), ovvero $F \equiv 0$, i simboli di Christoffel si scrivono in un modo particolarmente semplice:*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x_1}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial x_2}, & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial x_1}, \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial x_2}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x_2}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Vediamo ora di calcolare i simboli di Christoffel in qualche esempio.

Esempio 1.75 (Il piano). *Per quanto visto nell'Esempio (1.43), i simboli di Christoffel del piano sono tutti ovunque nulli.*

Esempio 1.76 (La sfera). *A partire dall'Esempio (1.45), si possono calcolare i simboli di Christoffel della parametrizzazione della sfera*

- $\varphi_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{x}{1-x^2-y^2}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{x^2 y}{1-x^2-y^2}, \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{x(1-x^2)}{1-x^2-y^2}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{y(1-y^2)}{1-x^2-y^2}, \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{xy}{1-x^2-y^2}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{y(1-x^2)}{1-x^2-y^2}. \end{cases}$$

- *Mentre quelli della parametrizzazione $\psi_1(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ sono:*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 \equiv 0, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \equiv 0, \\ \Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{11}^2 \equiv 0, \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, & \Gamma_{22}^2 \equiv 0. \end{cases}$$

I simboli di Christoffel non possono essere scelti in modo arbitrario, poiché devono soddisfare delle condizioni di compatibilità. Per trovarli, calcoliamo le derivate terze della parametrizzazione.

Come per le derivate seconde, esistono delle funzioni $A_{ijk}^r, B_{ijk} \in C^\infty(U)$ tali che

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = A_{ijk}^1 \partial_1 + A_{ijk}^2 \partial_2 + B_{ijk} N.$$

Dal Teorema (1.60), le funzioni A_{ijk}^r e B_{ijk} sono simmetriche rispetto agli indici in basso, ovvero:

$$A_{ijk}^r = A_{jik}^r = A_{ikj}^r \quad \text{e} \quad B_{ijk} = B_{jik} = B_{ikj} \quad \forall i, j, k, r = 1, 2. \quad (1.14)$$

Derivando (1.8) e poi inserendo (1.8) e (1.9) nelle espressioni trovate, otteniamo:

$$A_{ijk}^r = \frac{\partial \Gamma_{jk}^r}{\partial x_i} + \Gamma_{jk}^1 \Gamma_{i1}^r + \Gamma_{jk}^2 \Gamma_{i2}^r + h_{jk} a_{ri},$$

$$B_{ijk} = \Gamma_{jk}^1 h_{i1} + \Gamma_{jk}^2 h_{i2} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i}.$$

Ricordando che $A_{ijk}^r - A_{jik}^r = 0$, troviamo le *equazioni di Gauss*:

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^r}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x_j} + \sum_{s=1}^2 (\Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^r - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^r) = -(h_{jk} a_{ri} - h_{ik} a_{rj}) \quad \forall i, j, k, r = 1, 2. \quad (1.15)$$

Se ora poniamo $i = r = 1$ e $j = k = 2$ in (1.15), abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} + \sum_{s=1}^2 (\Gamma_{22}^s \Gamma_{1s}^1 - \Gamma_{12}^s \Gamma_{2s}^1) &= -(h_{22} a_{11} - h_{12} a_{12}) \\ &= -\left(-g \frac{eG - fF}{EG - F^2} + f \frac{fG - gF}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{(eg - f^2)G}{EG - F^2} \\ &= GK. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato il seguente risultato fondamentale:

Teorema 1.77 (Teorema egregium di Gauss). *La curvatura Gaussiana K di una superficie è data dalla formula*

$$K = \frac{1}{G} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} + \sum_{s=1}^2 (\Gamma_{22}^s \Gamma_{1s}^1 - \Gamma_{12}^s \Gamma_{2s}^1) \right]. \quad (1.16)$$

In particolare, la curvatura Gaussiana di una superficie è una proprietà intrinseca, ossia dipende solamente dalla prima forma fondamentale.

Lemma 1.78. Se $\varphi: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale ortogonale di una superficie S , allora

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \right].$$

Dimostrazione. Basta sostituire i simboli di Christoffel per una parametrizzazione ortogonale dell'Osservazione (1.74) in (1.16). \square

Concludiamo prendendo in considerazione la simmetria, fin d'ora ignorata, dei B_{ijk} in (1.14) rispetto agli indici inferiori: la condizione $B_{ijk} - B_{jik} = 0$ per ogni $i, j, k = 1, 2$, ci fornisce le *equazioni di Codazzi-Mainardi*:

$$\sum_{s=1}^2 (\Gamma_{jk}^s h_{is} - \Gamma_{ik}^s h_{js}) = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i},$$

meno importanti rispetto a quelle di Gauss, ma comunque utili nello studio delle superfici.

Capitolo 2

Varietà

Le *Disquisitiones generales circa superficies curvas* furono essenziali per stabilire il concetto di *spazio* e permisero così l'avanzare dell'idea che si potessero generalizzare gli studi di Gauss a spazi di dimensione arbitraria; tale intuizione fu quella di Bernhard Riemann, brillante allievo di Gauss.

Dopo la sua prima tesi del 1851 sulle funzioni di variabile complessa, lavoro che aveva già impressionato Gauss, a Riemann toccò l'abilitazione all'insegnamento¹. Ricordando i talenti del giovane, fu Gauss stesso a persuadere la Facoltà in modo che gli venisse assegnato un argomento impegnativo, come i Fondamenti della Geometria. Fu così che, nel 1854, Riemann discusse la sua tesi dal titolo *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*², ossia *Sulle ipotesi che stanno alla base della Geometria*, in cui definì, seppur in un modo non troppo rigoroso, il concetto di varietà differenziabile come un insieme n -dimensionale sul quale è possibile svolgere i calcoli propri dell'Analisi.

È proprio la sistematizzazione di questo saggio, assieme all'opera di alcuni importanti geometri moderni, a portare all'identificazione delle *varietà diffe-*

¹L'abilitazione all'insegnamento era il primo tradizionale passo nella carriera accademica della maggior parte delle Università europee. Nella Germania del XIX secolo, la procedura per accedervi consisteva nella stesura di una tesi relativa ad un argomento scelto dalla Facoltà da una lista di tre proposti dal candidato.

Quando Riemann dovette dare le tre proposte, due di esse abbracciavano campi in cui egli era piuttosto ferrato, mentre la terza, dal titolo traducibile in *Principi della Geometria*, era stata aggiunta, con qualche esitazione, per completare la tripletta con la speranza che venisse immediatamente scartata.

²Fa parte del saggio anche il tensore di curvatura, che andremo ad introdurre verso la fine del capitolo. L'opera venne pubblicata postuma nel 1867.

renziabili come oggetto principale di studio della Geometria Differenziale.

Il calcolo differenziale classico è fatto su aperti di \mathbb{R}^n ; uno degli obiettivi principali della Geometria Differenziale è estenderne l'applicabilità ad insiemi più generali. L'idea alla base è che le definizioni e le principali proprietà del calcolo differenziale sono di natura *locale*; quindi, se un insieme M è fatto, *localmente*, come un aperto di \mathbb{R}^n , abbiamo buone speranze di poter introdurre un calcolo differenziale su M .

2.1 Varietà differenziabili

2.1.1 Definizione ed esempi

Prima di definire le varietà differenziabili, vediamo cosa si intende per *varietà topologica*.

Definizione 2.1. *Sia M uno spazio topologico.*

Una carta (U, φ) di M è una coppia formata da un aperto $U \subseteq M$ e da un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$, dove V è un aperto di \mathbb{R}^n .

L'inversa di φ , $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ è detta parametrizzazione locale.

Se $p \in U$, diremo che (U, φ) è una carta *in* p ; se inoltre $\varphi(p) = O \in \mathbb{R}^n$, diremo che la carta è *centrata* in p .

Una carta permette di introdurre un *sistema di coordinate locali* sull'aperto U , ovvero permette di identificare ciascun punto di U con una n -upla di numeri reali, le sue coordinate locali: se $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, diremo che $x^1, \dots, x^n: U \rightarrow \mathbb{R}$ sono le *coordinate locali* nella carta data.

Ovviamente, uno stesso punto di M potrebbe appartenere al dominio di più carte diverse, e quindi essere identificato da diverse coordinate locali:

se (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) sono due carte locali con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, allora le funzioni $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2(U_1 \cap U_2)}$ ³ sono *omeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n* .

Dunque, poniamo $\eta_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$; queste sono dette *funzioni di transizione* (o *cambiamenti di coordinate*) e soddisfano le seguenti identità: $\eta_{ii} = id$, $\eta_{ji} = \eta_{ij}^{-1}$ e, su $U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha che $\eta_{ij} \circ \eta_{jk} = \eta_{ik}$.

³D'ora in poi, per evitare di appesantire la notazione, scriveremo semplicemente $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, senza indicare il loro dominio di definizione.

Definizione 2.2. Due carte (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) su uno spazio topologico M sono compatibili se:

- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, oppure
- $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, gli insiemi $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ e $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sono aperti in \mathbb{R}^n , e il cambiamento di coordinate $\eta_{12}: \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ è un omeomorfismo.

Definizione 2.3. Uno spazio topologico M con una famiglia di carte $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tali che $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ è una varietà topologica.

Ovvero, uno spazio topologico M è localmente fatto come un aperto di \mathbb{R}^n (è una *varietà topologica*) se ogni punto di M ha un intorno omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n .

Osservazione 2.4. Supponiamo che esistano due carte (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) per la varietà M tali che $\varphi_1: U_1 \rightarrow \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\varphi_2: U_2 \rightarrow \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, la funzione di transizione $\eta_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ determina un omeomorfismo tra un aperto di \mathbb{R}^n e un aperto di \mathbb{R}^m . Ciò implica⁴ che $m = n$; l'intero n è quindi ben definito ed è la *dimensione delle carte locali*.

Se una varietà è connessa, tutte le carte devono avere necessariamente la stessa dimensione; questa è chiamata *dimensione della varietà*.

Quali proprietà richiedere ad una varietà topologica per poter introdurre il calcolo differenziale?

Consideriamo una varietà (topologica) M , una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ed un atlante⁵ $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ per M ; allora:

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n \\ & \searrow f|_{U_i} & \downarrow \tilde{f}_i \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

⁴Due aperti di spazi euclidei di dimensione diversa non possono mai essere omeomorfi. Ad esempio, se $m = 1$ ed $n = 2$, togliendo un punto nell'intervallo aperto di \mathbb{R} , esso si sconnette, mentre l'aperto di \mathbb{R}^2 tolto il punto rimane connesso; nel caso in cui $m = 2$ ed $n = 3$, abbiamo che entrambi gli aperti, tolto un punto, rimangono connessi, ma solamente uno dei due è semplicemente connesso. Esiste un risultato generale, per m ed n qualsiasi, noto come *Teorema di invarianza della dimensione*.

⁵Come visto anche nel capitolo precedente, un atlante è una famiglia di carte locali.

$\tilde{f}_i = f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1}$ è una funzione definita su un aperto di \mathbb{R}^n a valori reali. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, otteniamo la relazione:

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}, \quad \forall i, j \in I.$$

In conclusione: dare una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ equivale a dare una famiglia di funzioni $\{\tilde{f}_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$, dove $V_i = \varphi_i(U_i)$ sono aperti di \mathbb{R}^n , tali che $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$, $\forall i, j \in I$ ⁶.

Quando $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^r in $x_0 \in M$?

Potremmo essere tentati dal seguente ragionamento (errato): poiché M è una varietà, esiste sicuramente un aperto U_i di M contenente il punto x_0 . Diremmo allora che f è di classe C^r in x_0 se e solo se \tilde{f}_i è di classe C^r in $\varphi_i(x_0)$. Tale definizione non è però ben posta, infatti: se $x_0 \in U_i \cap U_j$, in un intorno di x_0 la funzione f è rappresentata sia da \tilde{f}_i che da \tilde{f}_j , che devono soddisfare $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$; a meno che η_{ij} non sia di classe C^s con $s \geq r$, il fatto che \tilde{f}_i sia di classe C^r non garantisce che anche \tilde{f}_j lo sia.

Definizione 2.5. Una varietà è di classe C^s se⁷ tutte le funzioni di transizione η_{ij} sono di classe C^s , $\forall i, j \in I$.

Per semplicità, supporremo che tutte le varietà siano di classe C^∞ , ovvero siano varietà differenziabili.

Osservazione 2.6. Chiaramente, lo stesso approccio può essere usato per definire varietà di classe C^k , con $k \in \mathbb{N}$ qualsiasi, semplicemente richiedendo che i cambiamenti di coordinate siano diffeomorfismi di classe C^k invece che C^∞ . Per esempio, le varietà topologiche non sono altro che le varietà di classe C^0 , in cui i cambiamenti di coordinate sono solo degli omeomorfismi. Va anche detto che diversi risultati che verranno presentati (in particolare quelli riguardanti i vettori tangenti e le derivazioni) potrebbero non valere per varietà di classe C^k , con $k < \infty$; questo perché la derivata di una funzione di classe C^k , in generale, è solamente di classe C^{k-1} (e non di classe C^k).

Osservazione 2.7. Per definizione di varietà, ogni punto di M ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n , quindi le proprietà locali della

⁶Usando questo fatto, lo studio di una funzione f definita su una varietà può essere ricondotto allo studio di funzioni \tilde{f}_i definite su aperti di \mathbb{R}^n .

⁷Per l'osservazione appena fatta, in una varietà M di classe C^s possiamo definire la nozione di funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^r , solo per $s \geq r$.

topologia di una varietà sono le stesse della topologia di \mathbb{R}^n .⁸

Ma ciò vale solo per le proprietà locali! Ad esempio, dalla definizione non discende che una varietà sia uno spazio topologico separato (cioè di Hausdorff), anche se \mathbb{R}^n lo è.

Per motivi tecnici, chiederemo che lo spazio topologico soggiacente ad una varietà differenziabile sia di Hausdorff e che la topologia sia a base numerabile. Inoltre, supporremo che le varietà siano connesse⁹.

Vediamo ora qualche esempio di varietà.

Esempio 2.8. \mathbb{R}^n , aperti di \mathbb{R}^n e spazi vettoriali di dimensione finita su \mathbb{R} sono esempi di varietà differenziabili. Infatti, $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ è un atlante per \mathbb{R}^n , $\mathcal{A}' = \{(U, id_U)\}$ è un atlante per $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e, dato uno spazio vettoriale V di dimensione n su \mathbb{R} , possiamo fissarne una base \mathcal{B} e indicare con $\varphi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione che associa ad ogni vettore $v \in V$ le sue coordinate rispetto alla base \mathcal{B} fissata. Allora, $\mathcal{A}'' = \{(V, \varphi_{\mathcal{B}})\}$ è un atlante per V .

Esempio 2.9. Se M è una varietà e $U \subseteq M$ è aperto, allora anche U è una varietà (della stessa dimensione). Infatti, se $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$ è un atlante di M , allora $\{(U_{\alpha} \cap U, \varphi_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U})\}$ è un atlante per U .

Esempio 2.10 (Prodotto di varietà). Se M è una varietà m -dimensionale, e N è una varietà n -dimensionale, allora $M \times N$ è una varietà di dimensione $m + n$, detta varietà prodotto. Infatti, se $\mathcal{A} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$ è un atlante per M , e $\mathcal{B} = \{(V_{\beta}, \psi_{\beta})\}$ è un atlante per N , allora

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_{\alpha} \times V_{\beta}, \varphi_{\alpha} \times \psi_{\beta})\},$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha} \times \psi_{\beta} : U_{\alpha} \times V_{\beta} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\longmapsto (\varphi_{\alpha}(x), \psi_{\beta}(y)), \end{aligned}$$

è un atlante per $M \times N$.

Esempio 2.11. Il gruppo generale lineare

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) = M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

⁸Ad esempio, ogni varietà è localmente compatta (ogni punto ha una base di intorni costituita da insiemi compatti), localmente connessa e localmente connessa per archi.

⁹Se una varietà non è connessa, basterà studiare le singole componenti connesse.

essendo un sottoinsieme aperto di $M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, dall'Esempio (2.8) segue che è una varietà di dimensione n^2 .

Esempio 2.12 (La sfera di raggio R in \mathbb{R}^{n+1}). La sfera S_R^n n -dimensionale di raggio $R > 0$ e centrata nell'origine è definita da

$$S_R^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = R\}^{10} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

(la topologia è quella indotta da \mathbb{R}^{n+1}).

Useremo due carte.

Sia $N = (0, \dots, 0, R)$ il “polo Nord”, $S = (0, \dots, 0, -R)$ il “polo Sud” e $P = (p^1, \dots, p^{n+1}) \in S_R^n$. Sia inoltre π l'iperpiano $\{x^{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (iperpiano che identifichiamo con \mathbb{R}^n nel modo ovvio).

- La prima carta è $(S_R^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$, dove $\varphi_N: S_R^n \setminus \{N\} \rightarrow \pi \cong \mathbb{R}^n$ è la proiezione stereografica dal punto N , cioè l'applicazione che associa a ciascun punto $P \in S_R^n \setminus \{N\}$ l'intersezione della retta passante per N e P con l'iperpiano π .

La retta per N e P è parametrizzata da $t \mapsto x(t) = N + t(P - N)$, cioè

$$\begin{cases} x^1 = tp^1 \\ \vdots \\ x^n = tp^n \\ x^{n+1} = R + t(p^{n+1} - R). \end{cases}$$

Intersecando questa retta con l'iperpiano π si ricava $t = \frac{R}{R - p^{n+1}}$, da cui si ottiene:

$$\varphi_N(P) = \frac{R}{R - p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n).$$

Per mostrare che φ_N è un omeomorfismo tra $S_R^n \setminus \{N\}$ e \mathbb{R}^n , esibiamo l'inversa. Se $\varphi_N(P) = x$, dobbiamo avere $x^j = \frac{Rp^j}{R - p^{n+1}}$ per $j = 1, \dots, n$. Elevando al quadrato, sommando e ricordando che $P \in S_R^n$ otteniamo:

$$\|x\|^2 = R^2 \frac{R + p^{n+1}}{R - p^{n+1}},$$

ossia

$$p^{n+1} = R \frac{\|x\|^2 - R^2}{\|x\|^2 + R^2};$$

¹⁰**Notazione:** quando $R = 1$, scriveremo semplicemente S^n al posto di S_1^n .

$$p^j = \frac{x^j(R - p^{n+1})}{R} = \frac{2R^2 x^j}{\|x\|^2 + R^2}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Quindi φ_N è invertibile, con inversa

$$\varphi_N^{-1}(y) = \left(\frac{2R^2 y^1}{\|y\|^2 + R^2}, \dots, \frac{2R^2 y^n}{\|y\|^2 + R^2}, R \frac{\|y\|^2 - R^2}{\|y\|^2 + R^2} \right).$$

- Ci serve un'altra carta per coprire il polo Nord; in modo analogo, troviamo la descrizione esplicita della proiezione dal punto S :

$$\begin{aligned} \varphi_S : S_R^n \setminus \{S\} &\longrightarrow \pi \cong \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto \frac{R}{R+p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n); \end{aligned}$$

La sua inversa è data da

$$\begin{aligned} \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S_R^n \setminus \{S\} \\ y = (y^1, \dots, y^n) &\longmapsto \left(y^1 \frac{2R^2}{\|y\|^2 + R^2}, \dots, y^n \frac{2R^2}{\|y\|^2 + R^2}, R \frac{R^2 - \|y\|^2}{\|y\|^2 + R^2} \right). \end{aligned}$$

Queste due carte formano un atlante¹¹ per la sfera S_R^n :

$$(S_R^n \setminus \{N\}) \cup (S_R^n \setminus \{S\}) = S_R^n.$$

Vediamo se le due carte sono compatibili, cioè calcoliamo la funzione di transizione.

$(S_R^n \setminus \{N\}) \cap (S_R^n \setminus \{S\}) = S_R^n \setminus \{N, S\}$ e si ha che

$$\varphi_N(S_R^n \setminus \{N, S\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{O\} = \varphi_S(S_R^n \setminus \{N, S\}),$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \\ y = (y^1, \dots, y^n) &\longmapsto \frac{R^2}{\|y\|^2} y, \end{aligned}$$

che è, ovviamente, di classe C^∞ .

Quindi la sfera S_R^n è una varietà differenziabile di dimensione n .

¹¹Abbiamo trovato un atlante formato da due carte. Ebbene, non è possibile fare di meglio! Infatti, se esistesse un atlante costituito da una sola carta $\varphi: S_R^n \rightarrow \varphi(S_R^n) \subset \mathbb{R}^n$, allora S_R^n sarebbe omeomorfa ad un aperto di \mathbb{R}^n . Ma ciò non è possibile perché S_R^n è compatto (chiuso e limitato in \mathbb{R}^{n+1}), mentre un aperto di \mathbb{R}^n non è compatto.

Esempio 2.13 (Prodotti di sfere). *Dagli esempi (2.10) e (2.12), segue che il toro n -dimensionale $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (dove il prodotto ha n fattori) è una varietà differenziabile.*

Gli esempi che abbiamo visto finora sono, in modo naturale, sottoinsiemi di un qualche spazio euclideo \mathbb{R}^N . Il prossimo esempio non è di questo tipo (anche se è possibile immergerlo, seppur in modo non ovvio, in uno spazio euclideo).

Esempio 2.14 (Spazio proiettivo). *Consideriamo lo spazio proiettivo reale di dimensione n :*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}}{\sim},$$

dove la relazione di equivalenza \sim è definita ponendo

$$(x^0, \dots, x^n) \sim (y^0, \dots, y^n) \iff (x^0, \dots, x^n) = \lambda(y^0, \dots, y^n) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In altre parole, gli elementi di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ sono i sottospazi unidimensionali di \mathbb{R}^{n+1} , ossia le rette (passanti per l'origine) di \mathbb{R}^{n+1} .

Se $x = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$, indicheremo con $[x^0 : \cdots : x^n]$ la sua proiezione $[x] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, e diremo che (x^0, \dots, x^n) sono le coordinate omogenee di $[x]$. Chiaramente abbiamo

$$[\lambda x^0 : \cdots : \lambda x^n] = [x^0 : \cdots : x^n] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall [x] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n,$$

per cui sia (x^0, \dots, x^n) sia $(\lambda x^0, \dots, \lambda x^n)$ sono coordinate omogenee di $[x]$. Cerchiamo ora degli aperti che ricoprono $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$; poniamo

$$U_i = \{[x^0 : \cdots : x^n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid x^i \neq 0\}.$$

Allora $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \bigcup_{i=0, \dots, n} U_i$. Definiamo φ_i ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad U_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [x^0 : \cdots : x^n] &\longmapsto \left(\frac{x^0}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^n}{x^i} \right). \end{aligned}$$

Si noti che φ_i è ben definita, in quanto

$$\varphi_i([x^0 : \cdots : x^n]) = \varphi_i([\lambda x^0 : \cdots : \lambda x^n]), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione inversa è

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_i \\ y = (y^1, \dots, y^n) &\longmapsto [y^1 : \dots : y^i : 1 : y^{i+1} : \dots : y^n]. \end{aligned}$$

Un atlante per $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è dato da $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0, \dots, n}$.

Le carte sono compatibili, infatti sull'intersezione $U_i \cap U_j$ (dove si ha sia che $x^i \neq 0$ che $x^j \neq 0$), si ha:

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y^1, \dots, y^n) &= \varphi_i([y^1 : \dots : y^j : 1 : y^{j+1} : \dots : y^n]) \\ &= \left(\frac{y^1}{y^i}, \dots, \frac{y^{i-1}}{y^i}, \frac{y^{i+1}}{y^i}, \dots, \frac{y^j}{y^i}, \frac{1}{y^i}, \frac{y^{j+1}}{y^i}, \dots, \frac{y^n}{y^i} \right). \end{aligned}$$

Questa è l'espressione delle funzioni di transizione. Dato che $y^i \neq 0$ e $y^j \neq 0$, tutte le $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sono di classe C^∞ , $\forall i, j = 0, \dots, n$.

Questo dimostra che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è una varietà differenziabile di dimensione n (la topologia di varietà coincide con la topologia quoziente indotta da $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$).

Analogamente a quanto visto per le superfici, il prossimo esempio è piuttosto importante perché fornisce una procedura sistematica per costruire molti esempi di varietà differenziabili. Per introdurlo, ci servono definizioni e teoremi analoghi a quelli del capitolo precedente.

Esempio 2.15 (Insiemi di livello).

Definizione 2.16. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 .¹² Un punto $p \in \Omega$ è detto punto critico di F se il differenziale $dF_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ non è suriettivo.

Un valore critico è l'immagine di un punto critico.

Un valore regolare è un punto di $F(\Omega)$ che non è un valore critico.

Indicheremo con $\text{Crit}(F)^{13} \subseteq \Omega$ l'insieme dei punti critici di F .

¹²Nella Definizione (1.5) abbiamo considerato una funzione di classe C^∞ . Notiamo che è sufficiente chiedere che la funzione sia semplicemente di classe C^1 , poiché abbiamo solamente bisogno di calcolarne il differenziale.

¹³Si osservi che $\text{Crit}(F)$ è un sottoinsieme chiuso di Ω , infatti: calcolare i punti critici di F significa trovare l'insieme delle soluzioni delle equazioni che risultano ponendo uguali a zero tutti i minori di ordine massimo della matrice Jacobiana di F . Poiché $F \in C^1$, le derivate parziali di F sono di classe C^0 ; deduciamo che i punti critici, dal momento che corrispondono all'antiimmagine di $\{0\}$ tramite funzioni continue, costituiscono un insieme chiuso in Ω .

Invitiamo il lettore a rivedere il Teorema della funzione inversa (1.9); ed enunciamo quindi la seguente¹⁴:

Teorema 2.17. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ aperto e sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^∞ . Se $a \in F(\Omega)$, allora l'insieme $M_a = F^{-1}(a) \setminus \text{Crit}(F)$ ha una struttura naturale di varietà n -dimensionale, compatibile¹⁵ con la topologia indotta da \mathbb{R}^{n+m} . In particolare, se a è un valore regolare, allora l'intero insieme di livello $F^{-1}(a) = \{p \in \Omega \mid F(p) = a\}$ è una varietà n -dimensionale.*

Dimostrazione. Sia $p_0 \in M_a$. Dato che p_0 non è un punto critico di F , il differenziale dF_{p_0} è suriettivo, quindi la matrice Jacobiana di F nel punto p_0 $Jac F(p_0) \in M_{m \times (m+n)}(\mathbb{R})$ ha rango massimo, uguale a m .

A meno di permutare le coordinate, possiamo supporre che il minore formato dalle ultime m colonne sia non nullo, ovvero:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+1}}(p_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+m}}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+1}}(p_0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+m}}(p_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Consideriamo la funzione $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definita ponendo

$$G(x) = G(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+m}) = (x^1, \dots, x^n, F(x));$$

Si ha che

$$\det Jac G(p_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+1}}(p_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+m}}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+1}}(p_0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+m}}(p_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Possiamo quindi applicare il Teorema della funzione inversa a G . Esistono pertanto degli intorni $\tilde{U} \subseteq \Omega \setminus \text{Crit}(F)$ di p_0 e $W \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ di $G(p_0)$ tali che $G|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow W$ sia un diffeomorfismo. Sia $H = (h^1, \dots, h^{n+m})$ l'inversa di $G|_{\tilde{U}}$. Si ha:

$$y = (y^1, \dots, y^{n+m}) = G(H(y)) = (h^1(y), \dots, h^n(y), F(H(y))),$$

¹⁴È semplicemente una generalizzazione della Proposizione (1.7) a spazi di dimensione arbitraria; infatti, per $n = 2$ ed $m = 1$, ritroviamo la proposizione per le superfici di livello.

¹⁵Ossia, un aperto per la topologia presente su M_a è dato dall'intersezione di M_a con un aperto di \mathbb{R}^{n+m} .

per cui $h^i(y) = y^i$, per $i = 1, \dots, n$. Pertanto

$$F(H(y)) = F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots, h^{n+m}(y)) = (y^{n+1}, \dots, y^{n+m}), \quad \forall y \in W. \quad (2.1)$$

Poniamo $U = M_a \cap \tilde{U}$. L'insieme

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, a) \in W\}$$

è un aperto di \mathbb{R}^n (perché W è aperto di \mathbb{R}^{n+m}).

Definiamo $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ ponendo

$$\psi(x) = (x, h^{n+1}(x, a), \dots, h^{n+m}(x, a));$$

dall'uguaglianza (2.1) si deduce che $\psi(V) = F^{-1}(a) \cap \tilde{U} = U$, quindi $\varphi = \psi^{-1}$ è una carta locale su M_a , definita in un intorno U di p_0 .

Notiamo che, dalla definizione di ψ , si ha che $\varphi(x^1, \dots, x^{n+m}) = (x^1, \dots, x^n)$, cioè φ è la proiezione sulle prime n coordinate.

Per terminare, rimane solo da dimostrare che due carte (U, φ) e (U', φ') costruite in questo modo sono compatibili. Per quanto visto, $\varphi' \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \psi$, che ha come coordinate o le x^i oppure le $h^j(x, a)$, e queste funzioni sono chiaramente di classe C^∞ . \square

Applichiamo quest'ultima proposizione al caso di S_R^n :

Esempio 2.18. *Sia*

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2. \end{aligned}$$

Allora l'unico valore critico di F è zero. Pertanto $F^{-1}(R^2) = S_R^n$ è una varietà n -dimensionale, per ogni $R \neq 0$.

2.1.2 Funzioni differenziabili tra varietà

Analogamente a quanto fatto per le superfici, dopo aver parlato di funzioni differenziabili definite su varietà a valori reali, andiamo a definire il concetto di funzione differenziabile (o di classe C^∞) tra due varietà differenziabili.

Definizione 2.19. *Date M e N due varietà differenziabili, di dimensione m ed n rispettivamente, diciamo che un'applicazione $F: M \rightarrow N$ è:*

- differenziabile (o di classe C^∞) in (un intorno di) $p \in M$ se esistono una carta (U, φ) in p e una carta (V, ψ) in $F(p)$ tali che $F(U) \subseteq V$ ¹⁶ e la composizione $\widetilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ sia di classe C^∞ in un intorno di $\varphi(p)$;
- differenziabile (o di classe C^∞) se lo è in ogni punto di M ;
- un diffeomorfismo se è differenziabile, invertibile, e con inversa differenziabile.

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq U & \xrightarrow{F|_U} & V \subseteq N \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m \supseteq \varphi(U) & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Denotiamo con $C^\infty(M, N)$ l'insieme delle applicazioni differenziabili da una varietà M ad una varietà N , e con $C^\infty(M)$ quello delle funzioni differenziabili da M in \mathbb{R} .

Questa definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta delle carte locali:

Proposizione 2.20. *Sia $F: M \rightarrow N$ un'applicazione tra varietà, differenziabile in $p \in M$. Allora, per ogni carta (U_2, φ_2) in p e ogni carta (V_2, ψ_2) in $F(p)$, la composizione $\widetilde{F}_2 = \psi_2 \circ F \circ \varphi_2^{-1}$ è di classe C^∞ in $\varphi_2(p)$.*

Dimostrazione. Siano (U_1, φ_1) e (V_1, ψ_1) carte in p e $F(p)$ rispettivamente, tali che $\widetilde{F}_1 = \psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ sia di classe C^∞ in $\varphi_1(p)$. Allora:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_2 &= \psi_2 \circ F \circ \varphi_2^{-1} = (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \\ &= (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ \widetilde{F}_1 \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}). \end{aligned}$$

è di classe C^∞ in $\varphi_2(p)$ in quanto composizione di funzioni di classe C^∞ (definite sugli opportuni aperti). \square

È possibile vedere che applicazioni differenziabili sono continue, inoltre:

Proposizione 2.21. *Se $F: M \rightarrow N$ e $G: N \rightarrow L$ sono applicazioni differenziabili tra varietà, allora la composizione $G \circ F: M \rightarrow L$ è differenziabile.*

¹⁶Osservazione: poiché gli aperti U e V possono essere scelti arbitrariamente piccoli, a patto di restringere l'aperto U , possiamo supporre $F(U) \subseteq V$.

Dimostrazione. Preso $p \in M$, sappiamo che per ogni carta (U, φ) in p , (V, ψ) in $F(p)$ e (W, ϕ) in $G(F(p))$, le applicazioni $\widetilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ e $\widetilde{G} = \phi \circ G \circ \psi^{-1}$ sono di classe C^∞ . Ma allora anche

$$\widetilde{G \circ F} = \phi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\phi \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = \widetilde{G} \circ \widetilde{F}$$

è di classe C^∞ . □

Esempio 2.22 (di diffeomorfismo). *Sia $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta locale di una varietà M . Allora φ è un diffeomorfismo tra U e V , infatti: è un omeomorfismo (per definizione), e $\widetilde{\varphi} = id \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = id$ e $\widetilde{\varphi^{-1}} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ id = id$ sono di classe C^∞ .*

2.1.3 Spazio tangente

Come definire il concetto di “vettore tangente” a una varietà in un suo punto?

Una prima idea, come già osservato per le superfici, potrebbe essere quella di affermare che un vettore tangente ad una varietà M in un suo punto p è un vettore tangente ad un arco di curva σ , passante per p e contenuta in M . Tuttavia, questo approccio è alquanto scomodo¹⁷, e perciò non sarà oggetto della nostra trattazione.

Abbiamo poi individuato (anche) una caratterizzazione intrinseca per il piano tangente ad una superficie in un suo punto, introducendo i germi di funzioni differenziabili. Ci proponiamo così di estendere, alle varietà n -dimensionali, quanto visto in (1.1.3):

Definizione 2.23. *Siano M una varietà, $p \in M$. Sia poi*

$$\mathcal{F} = \{(U, f) \mid U \subseteq M \text{ intorno aperto di } p \text{ in } M, f \in C^\infty(U)\}.$$

Definiamo una relazione di equivalenza \sim su \mathcal{F} ponendo: $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste intorno aperto $W \subseteq U \cap V$ di p in M tale che $f|_W = g|_W$.

$C^\infty(p) = \mathcal{F} / \sim$ è lo spazio dei germi delle funzioni di classe C^∞ in p , ed $f_p \in C^\infty(p)$ è un germe di f in p . Un elemento (U, f) della classe di

¹⁷La derivata prima di una funzione che descrive un arco di curva rappresenta, dal punto di vista fisico, il vettore velocità. L'idea sarebbe dunque quella di considerare tutte le derivate prime (valutate nel punto p) delle curve passanti per quel punto e contenute in M ; per fare ciò occorre però utilizzare le carte locali (al fine di riferirsi ad archi di curve in \mathbb{R}^n), e quindi controllare che la costruzione ottenuta sia indipendente dalla loro scelta.

equivalenza $f_p = [(U, f)]$ è detto rappresentante di f_p ¹⁸.

Se sarà necessario ricordare la varietà su cui stiamo lavorando, scriveremo $C_M^\infty(p)$ al posto di $C^\infty(p)$.

È possibile vedere, tramite un risultato del tutto analogo al Lemma (1.26), che la seguente

Definizione 2.24. Siano $f, g \in C^\infty(p)$ due germi in $p \in M$, con M una varietà. Denotiamo con $f + g \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, f + g)$, dove (U, f) e (V, g) sono due rappresentanti di f e g rispettivamente. Analogamente, denotiamo con $\lambda f \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, \lambda f)$ e, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda f \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U, \lambda f)$. Infine, per ogni $f = [(U, f)] \in C^\infty(p)$, definiamo il suo valore $f(p) \in \mathbb{R}$ in ponendo $f(p) = f(p)$.

è ben posta e che, in questo modo, $C^\infty(p)$ ha una struttura di \mathbb{R} -algebra. Definiamo il *pull-back* di una mappa differenziabile:

Definizione 2.25. Data $F: M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile tra varietà, e $p \in M$, definiamo la mappa¹⁹

$$\begin{aligned} F_p^* : C_N^\infty(F(p)) &\longrightarrow C_M^\infty(p) \\ g = [(V, g)] &\longmapsto F_p^*(g) = g \circ F = [(F^{-1}(V), g \circ F)]. \end{aligned}$$

Possiamo ora dare la definizione ufficiale di vettore tangente.

Definizione 2.26. Sia M una varietà, e $p \in M$. Una derivazione in p è un'applicazione \mathbb{R} -lineare $D: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la regola di Leibniz:

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(p).$$

Definizione 2.27. Lo spazio tangente $T_p M$ a M in p è l'insieme $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ di tutte le derivazioni in p ²⁰. Un elemento $D \in T_p M$ è detto vettore tangente a M in p . Chiaramente, $T_p M$ è uno spazio vettoriale reale²¹.

¹⁸Per rendere la notazione più leggera, d'ora in poi scriveremo f in luogo di f_p (ossia ometteremo l'indicazione, a pedice, del punto in cui si considera il germe di una funzione).

¹⁹Di nuovo, la mappa è ben definita, è un omomorfismo di \mathbb{R} -algebre, e soddisfa il Lemma (1.30) per varietà; in particolare, se (U, φ) è una carta in $p \in M$, allora $\varphi_p^*: C^\infty(\varphi(p)) \rightarrow C^\infty(p)$ è un isomorfismo di \mathbb{R} -algebre.

²⁰È evidente che se $U \subseteq M$ è un aperto, allora $T_p U = T_p M$ per ogni $p \in U$.

²¹ $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ ha una struttura naturale di \mathbb{R} -spazio vettoriale: se $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(C^\infty(p))$, allora $D_1 + D_2 \in \mathcal{D}(C^\infty(p))$; inoltre, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda D_1 \in \mathcal{D}(C^\infty(p))$.

Esempio 2.28 (La derivata direzionale). Sia $M = \mathbb{R}^n$. Dato $p \in \mathbb{R}^n$, lo spazio tangente $T_p\mathbb{R}^n$ è lo stesso \mathbb{R}^n .

A qualsiasi vettore $v = (v^1, \dots, v^n) \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ possiamo associare una derivazione in p : la derivata parziale nella direzione di v (o derivata direzionale rispetto a v) in p

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{D}(C^\infty(p)) \\ v &\longmapsto \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p = \partial_v|_p = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p. \end{aligned}$$

Osservazione 2.29 (Derivazioni e carte locali). Sia (U, φ) una carta locale in $p \in M$. Siano (x^1, \dots, x^n) le coordinate in \mathbb{R}^n , dove n è la dimensione della varietà; vogliamo definire un vettore tangente $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \in T_pM$, che generalizzi alle varietà la nozione di derivata parziale in una direzione coordinata²².

Dato $f = [(V, f)] \in C^\infty(p)$, possiamo supporre che $V \subseteq U$ ²³.

$$\begin{array}{ccc} U \supseteq V & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n \\ & \searrow f & \downarrow f \circ \varphi^{-1} \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Poniamo

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f)^{24} = \partial_i|_p(f) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))^{25};$$

intuitivamente, $\partial_i|_p \in T_pM$ è il vettore tangente lungo la curva su M che si ottiene come antiimmagine dell' i -esimo asse coordinato, tramite la carta locale φ .

²²Il sistema di coordinate (x^1, \dots, x^n) determina delle derivazioni “canoniche”:

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

che costituiscono una base di $T_q\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, $\forall q \in \mathbb{R}^n$; esse corrispondono ai vettori e_1, \dots, e_n della base canonica di \mathbb{R}^n (tramite l'identificazione $T_q\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$).

²³Se $V \not\subseteq U$, poiché abbiamo a disposizione un'intera classe di equivalenza di coppie, ci basta sostituire V con un aperto più piccolo contenente il punto p .

²⁴**Notazione:** a volte scriveremo anche $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ in luogo di $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f)$; inoltre, se non ci sarà pericolo di confusione, scriveremo $\partial_i|_p$ o $\partial_i(p)$ per $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.

²⁵È facile verificare che $\partial_i|_p(f)$ è ben definito (non dipende dal rappresentante (V, f) scelto) e che $\partial_i|_p$ è, in effetti, una derivazione in p . Ovviamente, la definizione di $\partial_i|_p$ non è intrinseca, in quanto dipende dalla carta locale (U, φ) scelta, mentre $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ è definito in modo canonico (esso dipende solo dal punto p e non dalla scelta di una carta locale).

Definizione 2.30. Sia $F: M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile tra varietà. Il differenziale di F in $p \in M$ è l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} dF_p: T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N \\ D &\longmapsto D \circ F_p^*, \end{aligned}$$

per ogni derivazione $D \in T_pM$; in altre parole,

$$dF_p(D)(g) = (D \circ F_p^*)(g) = D(g \circ F), \quad \forall g \in C^\infty(F(p)).$$

Il differenziale gode delle usuali proprietà:

Proposizione 2.31. (i) $d(id_M)_p = id_{T_pM} \forall p \in M$, con M varietà;
(ii) Se $F: M \rightarrow N$ e $G: N \rightarrow L$ sono applicazioni differenziabili tra varietà, e $p \in M$, allora $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$;
(iii) Se $F: M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, allora dF_p è invertibile con inversa $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)} \forall p \in M$.

Dimostrazione. (i) $d(id_M)_p(D) = D \circ (id_M)_p^* = {}^{26}D, \forall D \in T_pM$.

(ii) Sia $D \in T_pM$. Dalla definizione di differenziale e dalle proprietà del pull-back, si ha: $d(G \circ F)_p(D) = D \circ (G \circ F)_p^* = D \circ (F_p^* \circ G_{F(p)}^*) = (D \circ F_p^*) \circ G_{F(p)}^* = dF_p(D) \circ G_{F(p)}^* = dG_{F(p)}(dF_p(D)) = (dG_{F(p)} \circ dF_p)(D)$.

(iii) Segue da (i) e da (ii) ponendo $G = F^{-1}$. \square

Il prossimo obiettivo è dimostrare che lo spazio tangente in un punto a una varietà n -dimensionale è uno spazio vettoriale di dimensione finita esattamente n ²⁷. Ci servirà il seguente risultato:

Lemma 2.32. ²⁸ Siano $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ e sia $f \in C^\infty(x_0)$. Allora esistono dei germi $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(x_0)$ tali che $g_j(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)$ e

$$f = f(x_0) + \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) g_j,$$

dove $x^j \in C^\infty(x_0)$ è il germe rappresentato dalla j -esima funzione coordinata.

²⁶Quest'ultima uguaglianza discende dal Lemma (1.30), applicato alle varietà.

²⁷È esattamente la generalizzazione di quanto osservato per le superfici: il piano tangente a una superficie in un punto è uno spazio vettoriale di dimensione 2, isomorfo allo spazio delle derivazioni in quel punto.

²⁸Questo lemma vale solo per (germi di) funzioni di classe C^∞ . Se invece $f \in C^r(x_0)$ con $r < \infty$, allora si avrebbe $\frac{\partial f}{\partial x^j} \in C^{r-1}(x_0)$ e quindi anche il germe g_j sarebbe solamente di classe C^{r-1} .

Dimostrazione. Sia (U, f) un rappresentante di $f \in C^\infty(x_0)$; eventualmente restringendo U , possiamo supporre che U sia stellato rispetto a x_0 .

Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x_0 + t(x - x_0)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0))(x^j - x_0^j) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0))(x^j - x_0^j) dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0)) dt. \end{aligned}$$

Dunque basta prendere come g_j il germe rappresentato dalla coppia (U, g_j) , con

$$g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0)) dt.$$

□

Proposizione 2.33. (i) Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $x_0 \in U$ e si consideri

$$\begin{aligned} \iota : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_{x_0}U \\ v = (v^1, \dots, v^n) &\longmapsto \iota(v) = \partial_v|_{x_0} = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{x_0}; \end{aligned}$$

ι è un isomorfismo di spazi vettoriali.

(ii) Data una varietà differenziabile M di dimensione n , e $p \in M$, allora $T_p M$ è uno spazio vettoriale di dimensione n . In particolare, se $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ è una carta in p , allora $\left\{ \partial_1|_p = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \partial_n|_p = \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ è una base di $T_p M$.

Dimostrazione. (i) L'applicazione ι è chiaramente lineare; dobbiamo dimostrare che è biettiva.

Iniettività: se $v = (v^1, \dots, v^n) \neq 0$, allora $v^h \neq 0$ per qualche $h = 1, \dots, n$; dunque:

$$\iota(v)(x^h) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial x^h}{\partial x^j}(x_0) = v^h \neq 0,$$

dove $x^h \in C^\infty(x_0)$ è il germe rappresentato da (\mathbb{R}^n, x^h) , con

$$\begin{aligned} x^h : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q = (q^1, \dots, q^n) &\longmapsto x^h(q) = q^h. \end{aligned}$$

Perciò $\iota(v) \neq 0$, ossia non è la derivazione identicamente nulla.

Suriettività: data $D \in T_{x_0}U$, cerchiamo $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $D = \iota(v)$. Poniamo $v^j = D(x^j)$, dove $x^j \in C^\infty(x_0)$, e verifichiamo che $D = \iota(v)$, cioè $D(f) = \iota(v)(f) \forall f \in C^\infty(x_0)$. Usando il lemma precedente, abbiamo²⁹:

$$\begin{aligned} D(f) &= D\left[f(x_0) + \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j)g_j\right] = D(f(x_0)) + \sum_{j=1}^n D[(x^j - x_0^j)g_j] \\ &= 0 + \sum_{j=1}^n [D(x^j - x_0^j)g_j(x_0) + (x^j - x_0^j)(x_0)D(g_j)] \\ &= \sum_{j=1}^n (D(x^j) - D(x_0^j))g_j(x_0) = \sum_{j=1}^n v^j g_j(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = i(v)(f). \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che $D = \iota(v)$.

(ii) Sia (U, φ) una carta locale in $p \in M$. Abbiamo già osservato nell'Esempio (2.22) che $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo tra varietà; si deduce allora che $d\varphi_p: T_pU = T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\varphi(U) \cong \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Quindi T_pM è uno spazio vettoriale di dimensione $n = \dim M$. Infine, le derivazioni $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ sono le immagini, tramite $(d\varphi_p)^{-1}$, dei vettori della base canonica di $T_{\varphi(p)}\varphi(U) \cong \mathbb{R}^n$, quindi sono una base di T_pM . \square

2.2 Fibrati

Abbiamo appena visto che ad ogni punto di una varietà n -dimensionale è possibile associare uno spazio vettoriale della stessa dimensione n , lo *spazio tangente*. Uno dei motivi per cui la struttura di varietà è così utile è che l'unione disgiunta degli spazi tangenti ad una varietà è, a sua volta, una varietà; questo è il primo esempio di una categoria di oggetti piuttosto importanti, a cui dedicheremo la prossima sezione: i fibrati vettoriali.

²⁹**Osservazione:** se $D \in T_pM$ è un vettore tangente ad una varietà M in un punto $p \in M$, allora $D(c) = 0$ per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, infatti:

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1),$$

per cui $D(1) = 0$ e quindi $D(c) = cD(1) = 0$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

2.2.1 Fibrati vettoriali

Definizione 2.34. *Un fibrato vettoriale (reale) di rango r su una varietà M (detta base del fibrato) è una funzione differenziabile suriettiva $\pi: E \rightarrow M$, dove E è una varietà (detta spazio totale del fibrato), soddisfacente le seguenti proprietà:*

(i) $\forall p \in M$, l'insieme $E_p = \pi^{-1}(p)$ (detto fibra di E sopra p) è uno spazio vettoriale (reale) di dimensione r ;

(ii) $\forall p \in M$, esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ di p e un diffeomorfismo $\chi: E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ (detto trivializzazione locale di E), tale che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} E|_U = \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\chi} & U \times \mathbb{R}^r \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U \end{array}$$

commuti (dove p_1 è la proiezione sulla prima coordinata), e tale che la restrizione di χ a ciascuna fibra, $\chi|_p: E_p = \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^r$, sia un isomorfismo di spazi vettoriali, $\forall p \in U$.

In altre parole, un fibrato vettoriale π è un modo differenziabile di associare, a ciascun punto p di una varietà M , uno spazio vettoriale $\pi^{-1}(p)$ ³⁰.

Esempio 2.35 (Fibrato triviale). *Se M è una varietà, allora $E = M \times \mathbb{R}^r$, con la proiezione $\pi: M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$ sulla prima coordinata, è un fibrato vettoriale di rango r , detto fibrato triviale.*

L'esempio successivo sarà fondamentale per definire *campi di vettori tangenti*, anche detti *campi vettoriali*, su una varietà M , cioè funzioni che, ad ogni punto p della varietà, associano un vettore $v \in T_p M$. Sappiamo però che spazi tangenti in punti distinti di una varietà, sebbene abbiano la stessa dimensione (pari a quella della varietà), sono diversi; abbiamo quindi bisogno di “raccolgerli” in un unico nuovo oggetto:

³⁰Se non c'è pericolo di confusione, useremo semplicemente lo spazio totale E per indicare un fibrato vettoriale $\pi: E \rightarrow M$, sottintendendo la proiezione π .

Esempio 2.36 (Fibrato tangente).³¹ Data una varietà M di dimensione n , poniamo

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M^{32} = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\},$$

con

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto p \end{aligned}$$

la proiezione. Vediamo che TM , con la mappa π , è un fibrato vettoriale (di rango n), detto fibrato tangente di M .

(i) Per ogni $p \in M$, la fibra di TM sopra p è

$$\pi^{-1}(p) = \{(p, v) \mid v \in T_p M\} \cong^{33} T_p M,$$

che sappiamo essere uno spazio vettoriale reale di dimensione n .

(ii) Sia (U, φ) una carta locale per M in p , $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$; essa determina, $\forall p \in U$, una base $\left\{ \partial_1|_p = \frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \partial_n|_p = \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \right\}$ di $T_p M^{34}$. L'esistenza di questa base permette di identificare³⁵ $T_p M$ con \mathbb{R}^n , $\forall p \in U$, infatti³⁶

$$\begin{aligned} T_p M &\xleftrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \\ v = v^i \partial_i|_p &\leftrightarrow (v^1, \dots, v^n). \end{aligned}$$

³¹In \mathbb{R}^n non esiste un analogo del fibrato tangente: se $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto, allora $T_p U \cong \mathbb{R}^n$, $\forall p \in U$; un campo di vettori tangenti su U è semplicemente una funzione avente per dominio U e per codominio \mathbb{R}^n .

³²Abbiamo bisogno di considerare l'unione *disgiunta* \bigsqcup perché vettori tangenti ad M in punti distinti sono considerati diversi in quanto appartenenti a spazi tangenti, benché isomorfi a \mathbb{R}^n , diversi.

³³Naturalmente, essendo il punto p fissato, i due insiemi si possono identificare \cong (non sono uguali perché il primo è un insieme di coppie, mentre il secondo ha per elementi dei vettori). Possiamo quindi immaginare il fibrato tangente come un'unione di fibre, una per ciascun punto della varietà.

³⁴Di conseguenza, un generico elemento dello spazio tangente $T_p M$ si scrive nella forma $\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1}|_p + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$; in questo caso, si potrebbe scrivere soltanto $(v^i) = (v^1, \dots, v^n)$, e questo è un "vettore" (vettore colonna).

³⁵Questa identificazione *non* è canonica, in quanto dipende dalla carta locale: scegliendo un'altra carta locale in p , cambiano le coordinate locali, e così anche la base dello spazio vettoriale $T_p M$; pertanto, allo stesso vettore v verranno associate coordinate diverse.

³⁶**Attenzione:** d'ora in poi useremo la *convenzione di Einstein* sugli indici ripetuti: se lo stesso indice appare due volte in una formula, una volta in basso e una volta in alto, supporremo sottintesa una sommatoria su tutti i possibili valori di quell'indice. In questo caso, $v = v^i \partial_i|_p$ sta per $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i|_p$.

Poiché quanto appena detto vale per ogni $p \in U$, possiamo estendere l'isomorfismo al fibrato tangente di M , ristretto all'aperto U :

$$\begin{aligned} \chi : TM|_U = \bigsqcup_{p \in U} T_p M &\xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n \\ (p, v = v^i \partial_i|_p) &\longrightarrow (p, (v^1, \dots, v^n)). \end{aligned}$$

Tale mappa soddisfa $p_1 \circ \chi = \pi$; inoltre, per la Proposizione (2.33),

$$\chi|_p : TM|_p = \pi^{-1}(p) \cong T_p M \xrightarrow{\sim} \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Infine, le identificazioni

$$TM|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

permettono di identificare $TM|_U$ con un aperto di \mathbb{R}^{2n} , e quindi definiscono delle carte locali su TM . Si può verificare che le funzioni di transizione associate a queste carte locali sono di classe C^∞ e pertanto, si ottiene una struttura di varietà differenziabile su TM , di dimensione $2n = 2 \dim M$.

Per quanto riguarda la proiezione $\pi : TM \rightarrow M$, localmente si ha

$$\begin{array}{ccc} TM|_U & \xrightarrow{\sim} & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow \pi & & \downarrow p_1 \\ M \supseteq U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n, \end{array}$$

da cui si deduce che $\pi : TM \rightarrow M$ è una funzione differenziabile tra varietà.

Ovviamente, tutte le operazioni che si possono fare sugli spazi vettoriali si possono estendere ai fibrati vettoriali: basta farle sulle fibre, che sono degli spazi vettoriali!

Esempio 2.37 (Fibrato duale). Dato un fibrato vettoriale E su una varietà M , il fibrato vettoriale duale E^* è

$$E^* = \bigsqcup_{p \in M} E_p^*, \quad \text{dove } E_p^* = \text{Hom}(E_p, \mathbb{R}).$$

Possiamo quindi definire il fibrato vettoriale duale del fibrato tangente:

Esempio 2.38 (Fibrato cotangente). *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . Il fibrato cotangente T^*M di M è il (fibrato vettoriale di rango n) duale del fibrato tangente TM di M ³⁷.*

Esso è definito ponendo

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \alpha) \mid p \in M, \alpha \in T_p^*M^{38} = \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R})\},$$

con la proiezione

$$\begin{aligned} \pi : T^*M &\longrightarrow M \\ (p, \alpha) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

*È noto che, data una carta locale (U, φ) per M in p , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, le derivazioni $\left\{ \partial_1|_p = \frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \partial_n|_p = \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \right\}$ costituiscono una base per T_pM , per ogni $p \in U$; indichiamo allora la base (duale) di T_p^*M con $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ ³⁹. Per definizione di base duale, abbiamo che:*

$$\begin{aligned} dx^i|_p : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x^j}|_p &\longmapsto dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p \right) = \left\langle dx^i|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \right\rangle = \delta_j^i. \end{aligned}$$

Osservazione 2.39. *Relativamente all'esempio precedente, verifichiamo che la base $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ di T_p^*M è esattamente la base duale della base $\left\{ \partial_1|_p = \frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \partial_n|_p = \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \right\}$ di T_pM . Sia*

$$\begin{aligned} x^i : M \supseteq U &\longrightarrow \mathbb{R} & 40 \\ p &\longmapsto x^i(p). \end{aligned}$$

³⁷Possiamo quindi associare ad una varietà differenziabile M due fibrati vettoriali, definiti entrambi in modo *canonico*: il fibrato tangente TM (poiché lo spazio tangente ad M in $p \in M$ è definito in modo canonico come $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ ed il fibrato cotangente T^*M (poiché il duale è definito in modo canonico).

³⁸ T_p^*M è detto *spazio cotangente* alla varietà M nel punto p .

³⁹Un generico elemento dello spazio cotangente T_p^*M si scrive pertanto nella forma $\alpha_i dx^i|_p = \alpha_1 dx^1|_p + \dots + \alpha_n dx^n|_p$, dove $\alpha_i \in \mathbb{R}$; in questo caso, si potrebbe scrivere solo $(\alpha_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, e questo è un “covettore” (vettore riga).

⁴⁰ x^i è l' i -esima coordinata di un sistema di coordinate locali dato da (U, φ) . Per abuso di notazione, indichiamo qui con x^i la funzione che, ad ogni punto dell'aperto U della varietà M , associa la sua i -esima coordinata o, meglio, $x^i(p) = x^i(\varphi(p))$, $\forall p \in U$.

Il differenziale in p di questa funzione è l'applicazione lineare

$$dx_p^i: T_p M = T_p U \rightarrow T_{x^i(p)} \mathbb{R} \cong {}^{41}\mathbb{R},$$

quindi $dx_p^i \in T_p^* M$; rimane da verificare che dx_p^i è un elemento della base duale di $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$. Dalla definizione di differenziale, abbiamo:

$$dx_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \circ (x^i)_p^* = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \Big|_p = \delta_j^i.$$

In conclusione, la funzione lineare $dx_p^i: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $dx_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i$. Pertanto, $\{dx_p^1, \dots, dx_p^n\}$ è la base di $T_p^* M$, duale della base $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$. Possiamo così unificare la notazione e porre:

$$dx^i|_p = dx_p^i.$$

2.2.2 Sezioni di fibrati e tensori

Per studiare un fibrato vettoriale risulta molto utile esaminare le applicazioni dalla base a valori nello spazio totale del fibrato, che associano ad ogni punto della base un elemento della fibra sopra quel punto.

Definizione 2.40. Sia $\pi: E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale su una varietà M . Una sezione di E è un'applicazione (differenziabile) $s: M \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = id_M$, cioè tale che $s(p) \in E_p, \forall p \in M$. Se $U \subseteq M$ è un aperto di M , un'applicazione (differenziabile) $s: U \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = id_U$ sarà chiamata sezione locale di E su U ⁴².

L'insieme⁴³ delle sezioni di E su M verrà indicato con $\mathcal{E}(M)$, mentre quello delle sezioni di E su un aperto U di M con $\mathcal{E}(U)$.

⁴¹L'isomorfismo è dato da

$$\begin{array}{ccc} T_{x^i(p)} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R} \\ \frac{d}{dt} \Big|_{x^i(p)} & \leftrightarrow & 1. \end{array}$$

⁴²Nella definizione appena data, $s(p) = (p, v)$, dove $v \in E_p$ per ogni $p \in M$; dal momento però che la prima componente di $s(p)$ è identicamente uguale a p , possiamo trascurarla e scrivere $s(p) = v \in E_p$. Quindi, una sezione di un fibrato è semplicemente un "campo di vettori", ossia una funzione che, ad ogni punto di M , associa un vettore.

⁴³Tale insieme ha una struttura di spazio vettoriale, infatti: se $s_1, s_2: M \rightarrow E$ sono due sezioni di E su M , con $s_1(p) = v_1$ e $s_2(p) = v_2$, allora possiamo definire la sezione somma $s_1 + s_2: M \rightarrow E$ ponendo $(s_1 + s_2)(p) = v_1 + v_2$; allo stesso modo, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la sezione $\lambda s_1: M \rightarrow E$ è definita ponendo $(\lambda s_1)(p) = \lambda v_1$.

Lo studio della Geometria Differenziale richiede non solo l'Algebra Lineare, ma anche nozioni di base di *Algebra Multilineare*, la branca della Matematica che studia la struttura e le proprietà delle applicazioni multilineari tra spazi vettoriali. Per questo motivo, abbandoneremo temporaneamente lo studio delle sezioni, per concentrarci su alcuni principali risultati di Algebra Multilineare.

Vogliamo costruire, a partire da due spazi vettoriali (reali) V e W , nuovi spazi vettoriali (per mezzo del *prodotto tensoriale*). Un primo modo (che già conosciamo dall'Algebra Lineare) è considerare il loro duale:

$$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{\varphi: V \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ lineare}\},$$

$$W^* = \text{Hom}(W, \mathbb{R}) = \{\psi: W \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi \text{ lineare}\}.$$

Possiamo anche considerare lo *spazio vettoriale* delle funzioni bilineari (lineari separatamente in ciascuna delle variabili), che indicheremo con

$$\text{Bilin}(V \times W) = \{g: V \times W \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ bilineare}\}.$$

Date $\varphi \in V^*$ e $\psi \in W^*$, la funzione

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi: V \times W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \varphi(v)\psi(w) \end{aligned}$$

è bilineare; possiamo così definire

Definizione 2.41. $V^* \otimes W^* = \text{Bilin}(V \times W) = \{g: V \times W \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ bilineare}\}^{44}$.

Allo stesso modo, dati U, V, W tre spazi vettoriali (reali) e i loro duali U^*, V^*, W^* , possiamo considerare lo *spazio vettoriale* delle funzioni trilineari

$$U^* \otimes V^* \otimes W^* = \{g: U \times V \times W \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ trilineare}\};$$

⁴⁴Così potremo scrivere che se $\varphi \in V^*, \psi \in W^*$, allora $\varphi \otimes \psi \in V^* \otimes W^*$. È possibile verificare che, se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ è una base di V^* e $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ è una base di W^* , allora $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ è una base di $V^* \otimes W^*$. Quindi, ogni elemento $g \in V^* \otimes W^*$ si scrive (in modo unico) nella forma

$$g = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} g^{ij} \varphi_i \otimes \psi_j, \quad g^{ij} \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\dim(V^* \otimes W^*) = (\dim V^*)(\dim W^*)$.

possiamo estendere questa costruzione ad un numero finito p di spazi vettoriali (reali) V_1, \dots, V_p , ottenendo ancora uno *spazio vettoriale*

$$V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^* = \{g: V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ multilineare}\}.$$

Dato uno spazio vettoriale (reale) V e il suo duale $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$, possiamo considerare il duale di V^* (biduale di V): $V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}(V^*, \mathbb{R})$; se V ha dimensione *finita*⁴⁵, esiste un isomorfismo *canonico* (cioè dipendente solo da V e non dalla scelta di una base)

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sim} V^{**} \\ v &\mapsto \alpha_v, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_v: V^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \alpha_v(\varphi) := \varphi(v) = \langle v, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Scambiando i ruoli di V e V^* e di W e W^* nelle costruzioni appena viste, notiamo che, dati $v \in V$ e $w \in W$, la funzione

$$\begin{aligned} v \otimes w: V^* \times W^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \langle v, \varphi \rangle \langle w, \psi \rangle = \varphi(v) \psi(w) \end{aligned}$$

è bilineare. Otteniamo così lo spazio vettoriale

Definizione 2.42.⁴⁶

$$\begin{aligned} V \otimes W &= \text{Bilin}(V^* \times W^*) \\ &= \{g: V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ bilineare}\}. \end{aligned}$$

Ovviamente, è lecito considerare anche prodotti tensoriali “misti”, ovvero $V \otimes W^*$, $U^* \otimes V^* \otimes W$, e così via.

Sono particolarmente utili alcuni spazi vettoriali ottenuti tramite prodotti tensoriali in cui i fattori sono tutti uguali ad un fissato spazio vettoriale V o al suo duale V^* . Diamo pertanto la seguente

⁴⁵Ricordiamo che stiamo lavorando *solo* con spazi vettoriali reali di dimensione *finita*!

⁴⁶È possibile verificare, esattamente come prima, che se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è una base di V e $\{w_1, \dots, w_n\}$ è una base di W , allora $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ è una base di $V \otimes W$. Quindi, ogni elemento di $V \otimes W$ si scrive (in modo unico) nella forma

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} a^{ij} v_i \otimes w_j, \quad a^{ij} \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.

Definizione 2.43. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Allora possiamo costruire i seguenti spazi vettoriali:

$$\begin{aligned} T_0^0(V) &= T_0(V) = T^0(V) = \mathbb{R}, & T^1(V) &= T_0^1(V) = V, \\ T^p(V) &= T_0^p(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ volte}}, & T_1(V) &= T_1^0(V) = V^*, \\ T_q(V) &= T_q^0(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q \text{ volte}}, & T_q^p(V) &= T^p(V) \otimes T_q(V), \\ T^\bullet(V) &= \bigoplus_{p \geq 0} T^p(V), & T_\bullet(V) &= \bigoplus_{q \geq 0} T_q(V), & T(V) &= \bigoplus_{p, q \geq 0} T_q^p(V). \end{aligned}$$

Chiaramente, $\dim T_q^p(V) = (\dim V)^{p+q}$, mentre $T(V)$ ha dimensione infinita. Un elemento di $T_q^p(V)$ è detto *tensore p -controvariante e q -covariante* o *tensore di tipo $\binom{p}{q}$* , mentre lo spazio $T(V)$ è detto *algebra tensoriale di V* ⁴⁷.

Osservazione 2.44. Un tensore $t \in T_q^p(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q \text{ volte}}$ è una funzione multilineare $t: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ volte}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e $\{v^1, \dots, v^n\}$ è la base duale di V^* , allora una base di $T_q^p(V)$ è data da

$$\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_q}\}_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}};$$

$t \in T_q^p(V)$ si scrive quindi nella forma

$$t = a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_q}, \quad a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{R}.$$

Se evitiamo di indicare esplicitamente gli elementi della base di $T_q^p(V)$, si potrà scrivere semplicemente

$$t = \left(a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right)^{48}.$$

Vogliamo ora definire su $T(V)$ un prodotto.

⁴⁷Si veda la prossima Definizione (2.45).

⁴⁸Questo spiega la posizione degli indici p e q nella scrittura $T_q^p(V)$.

Definizione 2.45. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Se $t_1 \in T_{q_1}^{p_1}(V)$ e $t_2 \in T_{q_2}^{p_2}(V)$, definiamo $t_1 \otimes t_2 \in T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}(V)$ ponendo

$$\begin{aligned} t_1 \otimes t_2(\eta^1, \dots, \eta^{p_1+p_2}, v_1, \dots, v_{q_1+q_2}) &= \\ &= t_1(\eta^1, \dots, \eta^{p_1}, v_1, \dots, v_{q_1}) t_2(\eta^{p_1+1}, \dots, \eta^{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \dots, v_{q_1+q_2}), \end{aligned}$$

$\forall \eta^1, \dots, \eta^{p_1+p_2} \in V^*, v_1, \dots, v_{q_1+q_2} \in V$.

Ricordando che ogni elemento di $T(V)$ ⁴⁹ è somma di un numero finito di tensori di tipo determinato, per distributività otteniamo il prodotto tensore (associativo)

$$\otimes: T(V) \times T(V) \rightarrow T(V),$$

rispetto al quale $(T(V), +, \otimes)$ è un anello; $(T(V), +, \lambda \cdot)$ è uno spazio vettoriale (reale) e, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $t, \tilde{t} \in T(V)$, abbiamo $\lambda(t \otimes \tilde{t}) = (\lambda t) \otimes \tilde{t} = t \otimes (\lambda \tilde{t})$. Pertanto $(T(V), +, \otimes, \lambda \cdot)$ è una \mathbb{R} -algebra.

Osservazione 2.46. Il prodotto tensore non è commutativo, infatti: consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{e_1, e_2\}$ e base duale $\{e^1, e^2\}$. I tensori $e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1 \in T_0^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$\begin{aligned} e_1 \otimes e_2: (\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (e^1, e^2) &\longmapsto \langle e_1, e^1 \rangle \langle e_2, e^2 \rangle = e^1(e_1) e^2(e_2) = 1, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} e_2 \otimes e_1: (\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (e^1, e^2) &\longmapsto \langle e_2, e^1 \rangle \langle e_1, e^2 \rangle = e^1(e_2) e^2(e_1) = 0. \end{aligned}$$

Dunque, $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$.

Definizione 2.47. La contrazione su $T_q^p(V)$ di tipo $\binom{r}{s}$, con $1 \leq r \leq p$ e $1 \leq s \leq q$ è l'applicazione lineare $C_s^r: T_q^p(V) \rightarrow T_{q-1}^{p-1}(V)$ definita ponendo⁵⁰

$$\begin{aligned} C_s^r(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_q}) &= \\ &= v^{j_s}(v_{i_r}) v_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}_{i_r} \otimes \dots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{v}^{j_s} \otimes \dots \otimes v^{j_q}, \end{aligned}$$

dove l'accento circonflesso indica elementi omissi nel prodotto tensore.

⁴⁹Ogni elemento t di $T(V)$ è una somma $t = \sum_{p,q} t_q^p$, ove $t_q^p \in T_q^p(V)$ e $t_q^p \neq 0$ solo per un numero finito di indici p e q .

⁵⁰È sufficiente definire tale funzione lineare sugli elementi della base di $T_q^p(V)$ (verrà poi estesa, per linearità, a tutti gli elementi di $T_q^p(V)$).

Consideriamo $T^p(V)$ (un discorso analogo si può fare per $T_q(V)$). Un tensore $t \in T^p(V)$ è una funzione multilineare $t: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V , allora $\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}\}_{i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}}$ è una base di $T^p(V)$; quindi $t = a^{i_1 \dots i_p} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}$, con $a^{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{R}$. Dunque,

$$t(\alpha^1, \dots, \alpha^p) = a^{i_1 \dots i_p} \alpha^1(v_{i_1}) \cdots \alpha^p(v_{i_p}),$$

dove $\alpha^j \in V^*$, $\forall j = 1, \dots, p$.

Tra tutte le funzioni multilineari, compresi i tensori, si possono mettere in evidenza quelle simmetriche oppure quelle antisimmetriche (o alternanti):

Definizione 2.48. Diciamo che $t \in T^p(V)$ è simmetrico se

$$t(\alpha^{\sigma(1)}, \dots, \alpha^{\sigma(p)}) = t(\alpha^1, \dots, \alpha^p),$$

per ogni permutazione σ di $\{1, \dots, p\}$ e per ogni $(\alpha^1, \dots, \alpha^p) \in \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ volte}}$;

indicheremo con $S^p(V) \subseteq T^p(V)$ il sottospazio dei tensori simmetrici p -controvarianti (con $S_p(V) \subseteq T_p(V)$ quello dei tensori simmetrici p -covarianti). Diciamo che t è alternante (o antisimmetrico) se

$$t(\alpha^{\sigma(1)}, \dots, \alpha^{\sigma(p)}) = \text{sgn}(\sigma)^{51} t(\alpha^1, \dots, \alpha^p),$$

per ogni permutazione σ di $\{1, \dots, p\}$ e per ogni $(\alpha^1, \dots, \alpha^p) \in \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ volte}}$;

indicheremo con $\Lambda^p(V) \subseteq T^p(V)$ il sottospazio dei tensori alternanti p -controvarianti (con $\Lambda_p(V) \subseteq T_p(V)$ quello dei tensori alternanti p -covarianti).

È possibile dimostrare che, se $\dim V = n \geq 1$, allora $\dim T^p(V) = n^p$, $\dim S^p(V) = \binom{n+p-1}{p}$ e $\dim \Lambda^p(V) = \begin{cases} \binom{n}{p}, & \text{se } 0 \leq p \leq n, \\ 0, & \text{se } p > n \end{cases}$.

⁵¹È noto che ogni permutazione σ del gruppo simmetrico su p elementi \mathcal{S}_p , si può scrivere (non in modo unico) come prodotto di trasposizioni, ma la *parità* del numero delle trasposizioni necessarie per scrivere σ lo è. In altre parole, se $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$ è una decomposizione di $\sigma \in \mathcal{S}_p$ come prodotto di trasposizioni, il segno $\text{sgn}(\sigma)$ di σ , dato da $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^r \in \{\pm 1\}$, è indipendente dalla particolare decomposizione di σ come prodotto di trasposizioni.

Osservazione 2.49. Se $p = 2$, allora $T^2(V) = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$, infatti: ponendo $p = 2$, si ottiene (da sopra) $\dim T^2(V) = \dim S^2(V) + \dim \Lambda^2(V)$; inoltre, ogni tensore $t \in T^2(V)$ si può scrivere (in modo unico) come somma di un tensore simmetrico e di uno antisimmetrico:

$$v \otimes w = \underbrace{\frac{v \otimes w + w \otimes v}{2}}_{\text{simmetrico}} + \underbrace{\frac{v \otimes w - w \otimes v}{2}}_{\text{antisimmetrico}}.$$

Se invece $p > 2$, è immediato vedere che $T^p(V) \neq S^p(V) \oplus \Lambda^p(V)$, in quanto non è soddisfatta la formula relativa alle dimensioni.

In generale, quindi, non è possibile decomporre un tensore qualunque come somma di un tensore simmetrico e di uno antisimmetrico; però, è sempre possibile associare ad esso le sue parti, simmetrica e antisimmetrica. Definiamo la funzione lineare⁵²

$$\begin{aligned} S : T^p(V) &\longrightarrow S^p(V) \\ v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} &\longmapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_p)}, \end{aligned}$$

detta *operatore di simmetrizzazione*, ed il *prodotto simmetrico*⁵³

$$\begin{aligned} \odot : S^p(V) \times S^q(V) &\longrightarrow S^{p+q}(V) \\ (t_1, t_2) &\longmapsto t_1 \odot t_2 := \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!} S(t_1 \otimes t_2). \end{aligned}$$

Lo spazio vettoriale $S(V) = \bigoplus_{p \geq 0} S^p(V)$, dotato del prodotto simmetrico \odot , è detto *algebra simmetrica di V* . Analogamente, definiamo la funzione lineare

$$\begin{aligned} A : T^p(V) &\longrightarrow \Lambda^p(V) \\ v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} &\longmapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_p)}, \end{aligned}$$

detta *operatore di antisimmetrizzazione*, ed il *prodotto esterno*⁵⁴

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) &\longrightarrow \Lambda^{p+q}(V) \\ (t_1, t_2) &\longmapsto t_1 \wedge t_2 := \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!} A(t_1 \otimes t_2). \end{aligned}$$

⁵²Come già fatto per la contrazione, definiamo la funzione sugli elementi della base.

⁵³Ad esempio, dati $v, w \in S^1(V) = V$, abbiamo $v \otimes w \in T^2(V)$; dunque, applicando l'operatore di simmetrizzazione, si ha $S(v \otimes w) = \frac{1}{2!}(v \otimes w + w \otimes v)$, da cui si ottiene $v \odot w = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \frac{1}{2!}(v \otimes w + w \otimes v) = v \otimes w + w \otimes v \in S^2(V)$. Si noti che \odot è *commutativo*.

⁵⁴Ad esempio, dati $v, w \in \Lambda^1(V) = V$, abbiamo $v \otimes w \in T^2(V)$; dunque, applicando l'operatore di antisimmetrizzazione, si ha $A(v \otimes w) = \frac{1}{2!}(v \otimes w - w \otimes v)$, da cui si ottiene $v \wedge w = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \frac{1}{2!}(v \otimes w - w \otimes v) = v \otimes w - w \otimes v \in \Lambda^2(V)$.

Lo spazio vettoriale $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(V)$, dotato del prodotto esterno \wedge , è detto *algebra esterna di V* .

L'osservazione cruciale è che *tutte* le costruzioni appena viste si possono estendere al caso di un fibrato vettoriale E su una varietà M (poiché basta farle sulle fibre E_p di E , $\forall p \in M$). Dunque, partendo da un fibrato vettoriale E , siamo in grado di costruire il fibrato duale E^* e i vari fibrati tensoriali

$$\begin{aligned} T_k^h(E) &= \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_h \otimes \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_k \\ &= \bigsqcup_{p \in M} \underbrace{E_p \otimes \cdots \otimes E_p}_h \otimes \underbrace{E_p^* \otimes \cdots \otimes E_p^*}_k \\ &= \bigsqcup_{p \in M} T_k^h(E_p) = \bigsqcup_{p \in M} T_k^h(E)_p, \end{aligned}$$

l'algebra tensoriale $T(E)$, quella simmetrica $S(E)$ e quella esterna $\Lambda(E)$. In particolare, saremo interessati al caso in cui $E = TM$, quindi $E^* = T^*M$, $T_k^h(TM) = \bigsqcup_{p \in M} T_k^h(T_pM)$, $T_k^h(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} T_k^h(T_p^*M)$, e così via.

Torniamo ora alle sezioni, perché quelle del fibrato tangente e, più in generale, dei fibrati tensoriali, hanno nomi particolari:

Definizione 2.50. *Un campo vettoriale su una varietà M è una sezione del fibrato tangente TM . Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali su M verrà indicato con $\mathcal{T}(M)$. Una k -forma differenziale su M è una sezione del fibrato $\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$ ⁵⁵. Lo spazio vettoriale delle k -forme differenziali su M verrà indicato con $A^k(M)$. Un campo tensoriale di tipo $\binom{r}{s}$ (o $\binom{r}{s}$ -tensore) su M è una sezione del fibrato $T_s^r(TM) = T_s^rM$. Lo spazio vettoriale dei tensori di tipo $\binom{r}{s}$ verrà indicato con $\mathcal{T}_s^r(M)$.*

Osservazione 2.51. *Data una carta locale (U, φ) per una varietà M in $p \in M$, con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, è noto che le derivazioni $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ costituiscono una base per T_pM , per ogni $p \in U$.*

⁵⁵Quindi, una k -forma differenziale su M è una funzione che associa, ad ogni punto $p \in M$, un tensore di ordine k , antisimmetrico, costruito su T_p^*M . In particolare, una 1-forma differenziale su M è una sezione di T^*M .

Possiamo quindi indicare con $\frac{\partial}{\partial x^i}$ la sezione di TM (cioè il campo di vettori)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} : U &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p; \end{aligned}$$

diremo che $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ sono un riferimento locale (o una base locale) di TM su U . Inoltre, sapendo che $\{dx_p^1, \dots, dx_p^n\}$ è la base di T_p^*M , duale della base $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$ di T_pM , per ogni $p \in U$, le sezioni $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ di T^*M

$$\begin{aligned} dx^i : U &\longrightarrow T^*M \\ p &\longmapsto dx_p^i \end{aligned}$$

sono un riferimento locale per T^*M su U ⁵⁶.

Esempio 2.52 (1-forma). Data una funzione differenziabile $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, $\forall p \in M$, quindi $df_p \in T_p^*M$. Il differenziale di f

$$\begin{aligned} df : M &\longrightarrow T^*M \\ p &\longmapsto (p, df_p) \end{aligned}$$

è una sezione del fibrato cotangente T^*M (una 1-forma differenziale su M). Se (U, φ) è una carta locale in p , $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, si ha $df_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) dx_p^j$, $\forall p \in U$. In particolare, se $v = v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in T_pM$, allora

$$df_p(v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) dx_p^j, v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right\rangle = v^i \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \left\langle dx_p^j, \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right\rangle = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

ossia troviamo la derivata direzionale di f nella direzione di v .

Concludiamo con alcune nozioni e risultati che utilizzeremo in seguito⁵⁷:

⁵⁶Le sezioni dx^i sono 1-forme differenziali su M . Deduciamo che un riferimento locale per il fibrato $\bigwedge^k(T^*M)$ è costituito dalle k -forme differenziali $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$; dunque, ogni k -forma differenziale, localmente, si scrive

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \exists a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U).$$

⁵⁷La prova dei prossimi risultati sarà omessa perché non particolarmente interessante o utile ai nostri fini. Per approfondimenti in merito, consigliamo la sezione 2.7 di [3].

Definizione 2.53. Sia M uno spazio topologico. Il supporto di una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ è l'insieme chiuso

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

Proposizione 2.54. Sia $K \subset M$ un sottoinsieme compatto di una varietà differenziabile M , e sia $V \supset K$ un intorno aperto di K . Allora esiste una funzione $g \in C^\infty(M)$ tale che $g|_K \equiv 1$ e $\text{supp}(g) \subset V$. In particolare, $g|_{M \setminus V} \equiv 0$.

Corollario 2.55. Siano M una varietà differenziabile, $p \in M$ e $V \subseteq M$ un intorno aperto di p . Allora esiste $h \in C^\infty(M)$ tale che $h(p) = 0$ e $h|_{M \setminus V} \equiv 1$.

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione (2.54), infatti: posto $K = \{p\}$, otteniamo $g \in C^\infty(M)$ tale che $g(p) = 1$ e $g|_{M \setminus V} \equiv 0$. Infine, poniamo $h = 1 - g$. \square

Siamo quindi in grado di estendere funzioni C^∞ definite solo su un compatto a funzioni C^∞ definite su tutta la varietà.

Definizione 2.56. Sia $S \subseteq M$ un sottoinsieme di una varietà M . Indichiamo con $C^\infty(S)$ l'insieme delle funzioni $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ continue, che ammettono un'estensione di classe C^∞ ad un intorno aperto U di S , cioè tali che esistano un intorno aperto U di S ed una funzione $\tilde{f} \in C^\infty(U)$, con $\tilde{f}|_S \equiv f$.

Corollario 2.57. Sia M una varietà, $K \subset M$ compatto, $f \in C^\infty(K)$, e $W \supset K$ un intorno aperto di K . Allora esiste una funzione $\hat{f} \in C^\infty(M)$ tale che $\hat{f}|_K \equiv f$ e $\text{supp}(\hat{f}) \subset W$. In particolare, $\hat{f}|_{M \setminus W} \equiv 0$.

Ci capiterà di dover incollare oggetti definiti solo localmente, al fine di ottenere un oggetto globale definito sull'intera varietà. Lo strumento principe per effettuare questo incollamento è dato dalle partizioni dell'unità.

Definizione 2.58. Un ricoprimento⁵⁸ di uno spazio topologico M è una famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ di sottoinsiemi di M tali che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Se tutti gli U_α sono aperti diremo che \mathcal{U} è un ricoprimento aperto. Un ricoprimento (non necessariamente aperto) è localmente finito se ogni $p \in M$ ha un intorno $U \subseteq M$ tale che $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ solo per un numero finito di indici α . Infine, un ricoprimento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_\beta$ è un raffinamento di $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ se $\forall \beta$ esiste α tale che $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

⁵⁸Chiaramente, se un ricoprimento di uno spazio topologico M è finito (ovvero costituito da una famiglia di sottoinsiemi U_α finita), è anche localmente finito.

Definizione 2.59. Una partizione dell'unità⁵⁹ su una varietà M è una famiglia di funzioni $\{\rho_\alpha\}_\alpha$, $\rho_\alpha \in C^\infty(M)$, tale che:

(a) $0 \leq \rho_\alpha(x) \leq 1$, $\forall x \in M, \forall \alpha$;

(b) $\{\text{supp}(\rho_\alpha)\}$ è un ricoprimento localmente finito di M ;

(c) $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$, $\forall x \in M$ ⁶⁰.

Diremo che la partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ è subordinata al ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ se $\text{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$, $\forall \alpha$.

Un risultato fondamentale è il seguente:

Teorema 2.60. Sia M una varietà differenziabile (di Hausdorff e a base numerabile). Allora ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ ammette una partizione dell'unità subordinata ad esso.

2.2.3 Parentesi di Lie

Finora abbiamo considerato solamente derivazioni in un punto p , ovvero applicazioni \mathbb{R} -lineari soddisfacenti Leibniz che, preso un germe in p , prima lo derivano, poi lo valutano in p , dando per risultato un numero *reale*.

Vogliamo ora parlare di derivazioni in un senso diverso, ovvero operatori che, data una funzione, restituiscono la derivata della funzione data.

Definizione 2.61. Sia A un'algebra commutativa su un campo \mathbb{K} (ad esempio, \mathbb{R} o \mathbb{C}). Una derivazione di A è un'applicazione \mathbb{K} -lineare $D: A \rightarrow A$ che soddisfa la regola di Leibniz:

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b, \quad \forall a, b \in A.$$

Poiché descrizioni diverse di uno stesso oggetto sono spesso convenienti, vediamo una caratterizzazione equivalente per i campi vettoriali:

Proposizione 2.62. Lo spazio vettoriale $\mathcal{T}(M)$ dei campi vettoriali su una varietà M è isomorfo allo spazio vettoriale delle derivazioni della \mathbb{R} -algebra $C^\infty(M)$ (intesa come nella Definizione (2.61)).

⁵⁹Attenzione: le partizioni dell'unità esistono solo su varietà di Hausdorff a base numerabile!

⁶⁰Tale somma è ben definita poiché, per (b), ha solo un numero *finito* di addendi non nulli.

Dimostrazione. Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su M , $X: M \rightarrow TM$, con $X(p) := X_p \in T_pM, \forall p \in M$. Per definizione, T_pM coincide con l'insieme $\mathcal{D}(C^\infty(p))$ di tutte le derivazioni in p . Vogliamo definire una derivazione $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$.

Sia $f \in C^\infty(M)$ ($f: M \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile); poniamo $X(f)(p) = X_p(f)$, dove $f = [(M, f)] \in C^\infty(p)$ è il germe di f in p . Per vedere se $X(f) \in C^\infty(M)$, scriviamo la sua espressione in coordinate locali: data (U, φ) una carta locale in p , $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, scrivendo $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, dove $X^i \in C^\infty(U)$, abbiamo $X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, e quindi $X(f) \in C^\infty(M)$, in quanto somma finita di prodotti di funzioni di classe C^∞ . Abbiamo così definito una funzione

$$\begin{aligned} X: C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto X(f); \end{aligned}$$

si verifica facilmente che tale funzione è una derivazione di $C^\infty(M)$ (ciò deriva dal fatto che, $\forall p \in M$, $X_p \in T_pM$ è una derivazione in p).

Viceversa, sia $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ una derivazione di $C^\infty(M)$. Per prima cosa, dimostriamo che se $f \in C^\infty(M)$ è nulla in un intorno U di p , allora $X(f)(p) = 0$: supponiamo $f|_U = 0$ e sia $h \in C^\infty(M)$ tale che $h(p) = 0$ e $h|_{M \setminus U} \equiv 1$ (una tale h esiste sempre per il Corollario (2.55)). Allora $hf \equiv f$, infatti: se $q \in U$, allora $hf(q) = h(q)f(q) = 0 = f(q)$, mentre se $q \notin U$, allora $hf(q) = h(q)f(q) = f(q)$, da cui

$$X(f)(p) = X(hf)(p) = h(p)X(f)(p) + f(p)X(h)(p) = 0.$$

Quindi, se f e g coincidono in un intorno di p , allora $X(f)(p) = X(g)(p)$. Sappiamo inoltre che ogni funzione C^∞ definita in un intorno di un punto può essere estesa ad una funzione C^∞ definita su tutta M (Corollario (2.57)); dunque, per ogni aperto $U \subseteq M$, X definisce una derivazione $X: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$, e per ogni $p \in M$, una derivazione $X_p: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$, definita ponendo

$$\begin{aligned} X_p: C^\infty(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f = [(U, f)] &\longmapsto X_p(f) := X(f)(p), \end{aligned} \quad 61$$

⁶¹ Si noti che tale mappa è ben definita in quanto, preso un altro rappresentante (U', f') di $f \in C^\infty(p)$, f ed f' coincidono in un aperto $W \subseteq U \cap U'$ contenente il punto p ; allora, per quanto appena visto, si ha $X(f)(p) = X(f')(p)$.

dove $X: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$. Pertanto, alla derivazione di $C^\infty(M)$, abbiamo associato una sezione di TM

$$\begin{aligned} X: M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p. \end{aligned}$$

Se (U, φ) è un carta locale, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, considerata $x^j \in C^\infty(U)$, la funzione che associa ad ogni punto dell'aperto U la sua j -esima coordinata, abbiamo $X(x^j) \in C^\infty(U)$; dunque si verifica che $X_p = X(x^j)(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$, quindi la funzione definita $p \mapsto X_p$ è di classe C^∞ . □

Definizione 2.63. *Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M . Dato $p \in M$, una curva $\sigma: I \rightarrow M$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo contenente l'origine, tale che $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(t) = X(\sigma(t))$, $\forall t \in I$, è detta curva integrale di X uscente da p .*

È possibile vedere⁶² che, dato un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ su una varietà differenziabile M , per ogni punto $p \in M$, esiste un'unica curva integrale θ^p (massimale) di X uscente da p definita, a partire da una funzione $\Theta: \mathcal{U} \rightarrow M$ di classe C^∞ , dove \mathcal{U} è un intorno aperto di $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \theta^p: \mathcal{U}^p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{U}\} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \theta^p(t) = \Theta(t, p) = \theta_t(p), \end{aligned}$$

dove $\theta_t: \mathcal{U}_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{U}\} \rightarrow M$.

L'interpretazione in (2.62) dei campi vettoriali come derivazioni dell'algebra delle funzioni differenziabili permette di introdurre una nuova operazione sullo spazio vettoriale dei campi vettoriali.

Se X e Y sono due campi vettoriali su una varietà M , possiamo considerare

$$\begin{aligned} X \circ Y: C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto X(Y(f)); \end{aligned}$$

quest'ultima *non* è però una derivazione (e quindi *non* è un campo vettoriale), infatti⁶³:

$$\begin{aligned} X \circ Y(fg) &= X(Y(fg)) = X(fY(g) + Y(f)g) = \\ &= fX(Y(g)) + [X(f)Y(g) + Y(f)X(g)] + X(Y(f))g, \end{aligned}$$

⁶²Per ulteriori approfondimenti, si veda la sezione 3.3 di [3].

⁶³Certamente $X \circ Y$ è \mathbb{R} -lineare, in quanto composizione di funzioni \mathbb{R} -lineari; ciò che non vale per $X \circ Y$ è, invece, la regola di Leibniz!

$\forall f, g \in C^\infty(M)$. Dal calcolo appena svolto notiamo che $X \circ Y - Y \circ X$ è una derivazione, infatti soddisfa la regola di Leibniz:

$$(X \circ Y - Y \circ X)(fg) = fX(Y(g)) + X(Y(f))g - fY(X(g)) - Y(X(f))g,$$

$\forall f, g \in C^\infty(M)$; deduciamo dunque che $X \circ Y - Y \circ X$ è un campo vettoriale.

Definizione 2.64. La parentesi di Lie di $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ è il campo vettoriale

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Due campi vettoriali $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ commutano se $[X, Y] \equiv 0$.

Proposizione 2.65 (Proprietà della parentesi di Lie). Se $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ sono campi vettoriali su una varietà M , $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$, allora:

(i) Anticommutatività: $[X, Y] = -[Y, X]$;

(ii) \mathbb{R} -Linearità:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \quad [X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z];$$

(iii) Identità di Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$;

(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$;

(v) Se, in coordinate locali, scriviamo $X = X^h \partial_h$ e $Y = Y^k \partial_k$, allora

$$[X, Y] = (X^h \partial_h Y^k - Y^h \partial_h X^k) \partial_k.$$

In particolare, $[\partial_h, \partial_k] = 0$.

Dimostrazione. (i) e (ii) sono ovvie; (iii) è un facile calcolo. Per la (iv), abbiamo:

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= (fX)(gY) - (gY)(fX) \\ &= fg(XY) + fX(g)Y - gf(YX) - gY(f)X \\ &= fg(XY - YX) + fX(g)Y - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X; \end{aligned}$$

in particolare, se $f \equiv 1$, abbiamo $[X, gY] = g[X, Y] + X(g)Y$, cioè

$$\begin{aligned} [X, \cdot] : \mathcal{T}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ Y &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

si comporta come una “derivazione”. Per ottenere (v), è sufficiente svolgere i conti in coordinate locali e usare il Teorema (1.60). \square

Dato $X \in \mathcal{T}(M)$ ed una funzione $f \in C^\infty(M)$, abbiamo

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto X(f), \end{aligned}$$

dove $X(f)$ è la derivata di f nella direzione specificata dal campo X . In coordinate locali, se $X = X^h \partial_h$, allora $X(f) = X^h \frac{\partial f}{\partial x^h}$, e quest'ultima è proprio la definizione di *derivata direzionale* di f nella direzione del vettore avente per componenti le X^h .

Vorremmo ora misurare la variazione di un campo vettoriale $Y \in \mathcal{T}(M)$ lungo le curve integrali di un altro campo $X \in \mathcal{T}(M)$, ossia calcolare la derivata del campo Y nella direzione data da X .

Partiamo dal caso più semplice di \mathbb{R}^n : se $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, un campo di vettori $Y \in \mathcal{T}(U)$ è una funzione

$$\begin{aligned} Y : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto Y(p) = (Y^1(p), \dots, Y^n(p)), \end{aligned}$$

dove le funzioni

$$\begin{aligned} Y^j : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto Y^j(p), \quad \forall j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

sono di classe C^∞ in U . In questo caso, allora, derivare il campo $Y \in \mathcal{T}(U)$ nella direzione specificata da un altro campo $X \in \mathcal{T}(U)$ significa considerare la derivata direzionale di ciascuna delle $Y^j \in C^\infty(U)$ nella direzione specificata dal campo X : $X(Y) = (X(Y^1), \dots, X(Y^n))$.

In una varietà differenziabile M generica, le cose si fanno più complicate. Una prima idea per calcolare la derivata di $Y \in \mathcal{T}(M)$ lungo la direzione data dal campo $X \in \mathcal{T}(M)$ potrebbe essere quella di considerare $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(q) - Y(p)}{t}$, dove il punto q è ottenuto dal punto p per mezzo di uno spostamento “infinitesimo” lungo la curva integrale di X uscente da p . Poiché però $Y(q) \in T_q M$ e $Y(p) \in T_p M$, non ha senso farne la differenza! Ma allora, preso $Y(q)$ come sopra e “riportato indietro” lungo la curva integrale del campo X uscente da p per un tempo pari a t , otteniamo un elemento di $T_p M$, ed è così consentito farne la differenza con $Y(p)$! È naturale, quindi, la seguente

Definizione 2.66. Dati $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, la derivata di Lie di Y lungo X è il campo vettoriale $\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{T}(M)$ definito da⁶⁴

$$\mathcal{L}_X Y(p) = {}^{65} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y) - Y_p}{t}, \quad \forall p \in M.$$

Inoltre, vale

Proposizione 2.67. Se $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, allora $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Dimostrazione. Si veda la sezione 3.4 di [3]. □

2.3 Strutture su varietà

Finora abbiamo studiato la Geometria Differenziale delle varietà basandoci esclusivamente sulla struttura differenziale a disposizione, senza usare strutture ulteriori. In molte situazioni si trovano invece varietà dotate di una struttura aggiuntiva, e diventa perciò interessante studiare le conseguenze geometriche di questa struttura.

L'esempio più evidente di varietà con strutture aggiuntive è \mathbb{R}^n . Il *prodotto scalare canonico* permette di introdurre una struttura metrica su \mathbb{R}^n , con la possibilità di misurare la lunghezza dei vettori tangenti, la lunghezza di curve, e la distanza tra due punti. Una struttura meno evidente (correlata con il prodotto scalare canonico) è conseguenza del fatto che i campi vettoriali si possono identificare con lo spazio $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

La struttura indotta dal prodotto scalare canonico è un esempio di *metrica Riemanniana* su una varietà, mentre la derivazione di un campo vettoriale nella direzione data da un altro è un esempio di *connessione*.

Infine, su ogni varietà si possono definire infinite connessioni e infinite metriche Riemanniane, con il vantaggio di poter scegliere in ogni occasione quella più adeguata al problema specifico che si vuol risolvere.

⁶⁴

$$\begin{array}{ccc} \theta_{-t} : M & \longrightarrow & M \\ q & \longmapsto & p \end{array}$$

ricordando la definizione di differenziale, abbiamo

$$\begin{array}{ccc} d(\theta_{-t})_q : T_q M & \longrightarrow & T_{\theta_{-t}(q)} M = T_p M \\ Y(q) = Y_q & \longmapsto & d(\theta_{-t})_q(Y_q) = d(\theta_{-t})_q(Y). \end{array}$$

⁶⁵Se $\mathcal{L}_X Y \equiv 0$, il campo Y è costante lungo le curve integrali del campo X .

2.3.1 Connessioni

Dati due campi vettoriali $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ su una varietà differenziabile M , abbiamo già introdotto un oggetto che permette di calcolare la derivata di Y lungo X : la derivata di Lie. Ci poniamo la seguente domanda: “la derivata di Lie è l’analogo della derivata direzionale in \mathbb{R}^n ?”. Per rispondere a questa domanda, andiamo ad elencare tutte le proprietà della derivata direzionale in \mathbb{R}^n , per poi vedere se sono interamente soddisfatte dalla derivata di Lie, e quindi stabilire se i due oggetti si “comportano” esattamente allo stesso modo o meno.

Sia $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e consideriamo $X, Y \in \mathcal{T}(U)$. Poiché $\forall p \in U, T_p U = T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, X e Y possono essere pensati come funzioni $X, Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ . Dunque, possiamo dire che, $\forall p \in U$, la “derivata di Y lungo X ” coincide con la derivata direzionale della funzione $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nella direzione data dal vettore $X(p) = X_p \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial_X Y|_p := \partial_{X_p} Y|_p.$$

∂_X è una derivazione, infatti:

- (i) $\partial_X(Y_1 + Y_2) = \partial_X Y_1 + \partial_X Y_2, \quad \forall X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{T}(U)$;
- (ii) $\partial_X(fY) = X(f)Y + f\partial_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}(U), f \in C^\infty(U)$;

inoltre si ha:

- (iii) $\partial_{X_1+X_2} Y = \partial_{X_1} Y + \partial_{X_2} Y, \quad \forall X_1, X_2, Y \in \mathcal{T}(U)$;
- (iv) $\partial_{fX} Y = f\partial_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}(U), f \in C^\infty(U)$ ⁶⁶.

La derivata di Lie $\mathcal{L}_X Y$ soddisfa certamente le proprietà (i), (ii) (poiché è una derivazione) e (iii) (per la linearità delle parentesi di Lie), ma *non* soddisfa (iv), infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX} Y &= [fX, Y] = -[Y, fX] = -\mathcal{L}_Y(fX) = \\ &= -Y(f)X - f\mathcal{L}_Y X = -Y(f)X + f\mathcal{L}_X Y. \end{aligned}$$

Quindi, la derivata di Lie, pur essendo una generalizzazione del concetto di derivata direzionale, *non* ha esattamente *tutte* le proprietà delle classiche de-

⁶⁶Le proprietà (i)-(iv) dicono che l’operatore $\partial_X Y$ è $C^\infty(U)$ -lineare in X , ma solamente \mathbb{R} -lineare in Y .

rivate direzionali in \mathbb{R}^n !⁶⁷

Data una varietà M , ci poniamo il problema di definire la derivata lungo un campo di vettori $X \in \mathcal{T}(M)$ di un campo vettoriale $Y \in \mathcal{T}(M)$ o, più in generale, la derivata lungo X di una sezione s di un fibrato vettoriale E su M . Sia $\pi: E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale su una varietà differenziabile M , e sia $X \in \mathcal{T}(M)$; sia poi $s: U \rightarrow E$ una sezione locale di E su un aperto $U \subseteq M$. “Come definire la derivata di s lungo X ?”

Un primo tentativo potrebbe essere il seguente: dato $p \in U$, sia γ la curva integrale di X uscente da p . La “derivata di s lungo X ” nel punto p dovrebbe essere

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))}{t},$$

ma la differenza $s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))$ è priva di significato: $s(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$, mentre $s(\gamma(0)) \in E_{\gamma(0)}$ e i due spazi vettoriali, benché isomorfi (in quanto aventi la stessa dimensione, pari al rango del fibrato E), sono diversi.

Un altro approccio potrebbe essere quello di sfruttare la trivializzazione locale di un fibrato vettoriale, per definire la derivata di s lungo X *localmente*, su ogni aperto U_i che trivializza il fibrato, derivando, nella direzione del campo X , le rappresentazioni locali \tilde{s}_i di s ; anche questo secondo tentativo fallisce, poiché nell’intersezione di due aperti U_i e U_j che trivializzano il fibrato, viene meno la compatibilità tra le derivazioni delle rappresentazioni locali \tilde{s}_i e \tilde{s}_j della sezione s .

In conclusione, *non* esiste, in generale, alcun modo *intrinseco* di definire la derivata di una sezione di un fibrato vettoriale lungo un campo di vettori. Per fare ciò dobbiamo introdurre una struttura aggiuntiva:

Definizione 2.68. ⁶⁸ Sia $\pi: E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale su una varietà M .

⁶⁷La derivata di Lie si comporta in modo diverso dalla classica derivata direzionale; tale osservazione ci porta alla ricerca di una nuova costruzione che sia, in qualche modo, l’esatta estensione della derivata direzionale in \mathbb{R}^n . Questa ricerca è quindi essenziale per due motivi: la derivata di Lie non soddisfa (iv) e, sebbene essa si possa estendere a campi tensoriali, non è possibile definirla per fibrati vettoriali qualunque: dato un campo di vettori $X \in \mathcal{T}(M)$ ed una sezione s di E su M , la derivata di Lie di s nella direzione del campo X *non* è definita!

⁶⁸Questo da noi scelto non è l’unico modo disponibile per definire il concetto di connessione; ne esistono diversi altri, tutti equivalenti, ognuno con i propri vantaggi e svantaggi. Per approfondire, invitiamo alla lettura delle sezioni 6.3-6.4 di [3].

Una connessione su E è una funzione

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) &\longrightarrow \mathcal{E}(M) \\ (X, s) &\longmapsto \nabla_X s, \end{aligned}$$

tale che⁶⁹

(a) $\nabla_X s$ è $C^\infty(M)$ -lineare in X :

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s,$$

$\forall X_1, X_2 \in \mathcal{T}(M), f_1, f_2 \in C^\infty(M), s \in \mathcal{E}(M)$;

(b) $\nabla_X s$ è \mathbb{R} -lineare in s :

$$\nabla_X (a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2,$$

$\forall X \in \mathcal{T}(M), s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M), a_1, a_2 \in \mathbb{R}$;

(c) ∇ soddisfa la regola di Leibniz:

$$\nabla_X (fs) = f \nabla_X s + X(f)s,$$

$\forall X \in \mathcal{T}(M), s \in \mathcal{E}(M), f \in C^\infty(M)$.

La sezione $\nabla_X s$ ⁷⁰ è detta derivata covariante di s lungo X .

Infine, una connessione su $E = TM$ è detta connessione lineare su M .

Esempio 2.69 (Connessione piatta). Su un fibrato vettoriale triviale (Esempio (2.35)) $E = M \times \mathbb{R}^r$ esiste una connessione canonica, detta connessione piatta, infatti:

Una sezione $s \in \mathcal{E}(M)$ è data da

$$\begin{aligned} s : M &\longrightarrow M \times \mathbb{R}^r \\ p &\longmapsto (p, (s^1(p), \dots, s^r(p))), \end{aligned}$$

dove $s^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ sono di classe C^∞ , $\forall i = 1, \dots, r$.

Se $X \in \mathcal{T}(M)$, possiamo definire la connessione $\nabla_X s$ ponendo

$$\begin{aligned} \nabla_X s : M &\longrightarrow M \times \mathbb{R}^r \\ p &\longmapsto (p, ((X s^1)(p), \dots, (X s^r)(p))). \end{aligned}$$

⁶⁹Chiediamo esplicitamente che questo operatore soddisfi analoghe proprietà della classica derivata direzionale in \mathbb{R}^n .

⁷⁰Tale scrittura va intesa come la derivata della sezione s nella direzione del campo X .

Poiché questi oggetti sono stati introdotti in modo assiomatico, sorge spontaneo chiedersi se esistono oppure no.

Proposizione 2.70. *Ogni fibrato vettoriale $\pi: E \rightarrow M$ ammette una connessione.*

Dimostrazione. ⁷¹ Sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ un atlante di M che trivializza il fibrato vettoriale E e sia $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_\alpha$ (esiste per il Teorema (2.60)). Sul fibrato triviale $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ c'è una connessione canonica ∇^0 (appena visto); l'identificazione χ_α di $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ con $E|_{U_\alpha}$ permette di definire una connessione ∇^α su $E|_{U_\alpha}$. Se s è una sezione di $E|_{U_\alpha}$, poniamo $\nabla_X^\alpha s := \chi_\alpha^{-1}(\nabla_X^0(\chi_\alpha \circ s))$ ⁷². Dato che $\rho_\alpha \equiv 0$ su $M \setminus U_\alpha$, il prodotto $\rho_\alpha \nabla_X^\alpha$ è definito sull'intera varietà M .

Poniamo, per ogni sezione s di E su M :

$$\nabla_X s := \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha (s|_{U_\alpha}).$$

Le proprietà (a) e (b) della Definizione (2.68) sono chiaramente soddisfatte (segue dal fatto che ∇^α è una connessione); verifichiamo (c):

$$\begin{aligned} \nabla_X(fs) &= \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha (fs|_{U_\alpha}) \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha \left(f \nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha (s|_{U_\alpha}) + X(f)s|_{U_\alpha} \right) \\ &= f \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla_{X|_{U_\alpha}}^\alpha (s|_{U_\alpha}) + \left(\sum_\alpha \rho_\alpha \right) X(f)s \\ &= f \nabla_X s + X(f)s, \end{aligned}$$

dunque ∇ è una connessione su E . □

In \mathbb{R}^n , la derivata direzionale in un punto dipende solamente dalla direzione in quel punto e dal comportamento locale dell'oggetto che si vuol

⁷¹Si noti che se M è una varietà complessa, ovvero ogni suo punto possiede un intorno aperto identificabile con un aperto di \mathbb{C}^n , le partizioni dell'unità *non* esistono, e quindi tale dimostrazione non funziona. Inoltre, l'enunciato è falso: esistono cioè fibrati vettoriali su varietà complesse che non ammettono alcuna connessione!

⁷² ∇^α è una connessione, in quanto definita a partire dalla connessione ∇^0 , ma *non* è canonica, poiché dipende dall'indice α ; inoltre, essa non è definita sull'intera varietà M , ma solamente sull'aperto U_α .

derivare. È possibile dimostrare che $(\nabla_X s)(p)$ dipende solo dal valore di X in p , ossia dal vettore tangente $X(p) = X_p \in T_p M$ (che fornisce la direzione lungo la quale calcolare la derivata) e dal comportamento di s in un intorno di p ⁷³: questa ulteriore considerazione porta alla conferma che le connessioni hanno a tutti gli effetti il diritto di essere considerate *derivazioni di sezioni di un fibrato vettoriale*.

Osservazione 2.71.⁷⁴ Nella sezione (2.2.3), avevamo introdotto un altro genere di derivazione di un campo vettoriale $Y \in \mathcal{T}(M)$ lungo un altro campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$: la derivata di Lie. Anch'essa, come le connessioni lineari, può essere pensata come un'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \mathcal{L}_X Y = [X, Y]. \end{aligned}$$

Tuttavia, la derivata di Lie non è una connessione lineare⁷⁵; infatti, pur soddisfacendo le condizioni (b) e (c) della Definizione (2.68), non soddisfa la condizione (a), come già notato all'inizio di questa sezione.

Vediamo ora qual è l'espressione locale di una connessione, scegliendo coordinate locali e un riferimento locale: sia (U, φ) una carta locale su M che trivializza E (cioè $\chi: E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^r$). I vettori della base canonica di \mathbb{R}^r determinano una base locale per $E|_U$, cioè delle sezioni

$$\begin{aligned} e_j : U &\longrightarrow E|_U \\ p &\longmapsto \chi^{-1}(p, (0, \dots, 1, \dots, 0)), \end{aligned}$$

tali che $\{e_1(p), \dots, e_r(p)\}$ è una base della fibra E_p , $\forall p \in U$.

La carta locale (U, φ) determina anche una base locale di TM su U data da $\{\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Allora:

$$\nabla_{\partial_j} e_h = \Gamma_{jh}^k \partial_k, \quad \exists \Gamma_{jh}^k \in C^\infty(U), \quad \text{con } j = 1, \dots, n; \quad h, k = 1, \dots, r.$$

⁷³In realtà, è possibile dimostrare ancora di più: $(\nabla_X s)(p)$ dipende solo da $X(p) \in T_p M$ e dal comportamento di s ristretto ad una curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tangente a $X(p)$ in p , cioè tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$. *Attenzione*: non basta conoscere il valore di s nel punto p , altrimenti staremmo derivando una costante!

⁷⁴La derivata di Lie ha il vantaggio di essere definita in modo canonico (essa è un commutatore)! D'altra parte, la connessione ha delle proprietà migliori, ma non è definita in modo canonico. Sappiamo che ogni fibrato vettoriale ammette una connessione, ma non abbiamo alcun risultato sull'unicità. Vedremo successivamente quale connessione privilegiare tra tutte le infinite possibili.

⁷⁵Infatti, è possibile vedere che $(\mathcal{L}_X Y)(p)$ dipende dal comportamento di X in tutto un intorno del punto p (e non soltanto in p)!

Definizione 2.72. Per un fibrato vettoriale E qualunque, le funzioni Γ_{jh}^k sono dette coefficienti della connessione. Nel caso in cui $E = TM$, vengono chiamate simboli di Christoffel della connessione.

Osservazione 2.73. I coefficienti Γ_{jh}^k determinano completamente la connessione, infatti: se $X \in \mathcal{T}(U)$ e $s \in \mathcal{E}(U)$, allora $X = X^j \partial_j$ e $s = s^h e_h$, con $X^j, s^h \in C^\infty(U)$. Quindi:

$$\begin{aligned} \nabla_X s &= \nabla_X (s^h e_h) = [X(s^h) e_h + s^h \nabla_X e_h] = [X(s^h) e_h + s^h \nabla_{X^j \partial_j} e_h] \\ &= [X(s^h) e_h + s^h X^j \nabla_{\partial_j} e_h] = [X(s^h) e_h + s^h X^j \Gamma_{jh}^k e_k] \\ &= [X(s^k) e_k + s^h X^j \Gamma_{jh}^k e_k] = [X(s^k) + \Gamma_{jh}^k X^j s^h] e_k. \end{aligned}$$

Se tralasciamo di indicare le sezioni di base e_k , si ottiene la formula

$$\nabla_X (s^k) = X(s^k) + \Gamma_{jh}^k X^j s^h.$$

In particolare, i coefficienti Γ_{jh}^k della connessione piatta su un fibrato triviale sono identicamente nulli.

2.3.2 Connessione indotta sui fibrati tensoriali

Lavoreremo quasi esclusivamente con connessioni lineari, cioè definite sul fibrato tangente TM . Una delle proprietà caratteristiche delle connessioni lineari è che inducono una connessione su ciascun fibrato tensoriale:

Proposizione 2.74. Sia ∇ una connessione su TM . Allora esiste un unico modo di definire, $\forall p, q \in \mathbb{N}$, una connessione su $T_q^p M$, ancora indicata con ∇ , che soddisfi le seguenti condizioni:

- (i) su TM , ∇ coincide con la connessione lineare data;
- (ii) su $T^0 M = C^\infty(M)$, si ha $\nabla_X(f) = X(f)$;
- (iii) se $t_j \in \mathcal{T}_{q_j}^{p_j}(M)$, per $j = 1, 2$, e $X \in \mathcal{T}(M)$, si ha

$$\nabla_X(t_1 \otimes t_2) = (\nabla_X t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\nabla_X t_2);$$

- (iv) ∇ commuta con le contrazioni. Inoltre, se $\eta \in A^1(M) = \mathcal{T}_1(M)$ e $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, si ha

$$(\nabla_X \eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y).$$

Dimostrazione. Cominciamo col verificare l'unicità. Se ∇ soddisfa le proprietà (i)-(iv), allora per ogni $\eta \in A^1(M)$ e $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ abbiamo⁷⁶:

$$\begin{aligned} X(\eta(Y)) &= \nabla_X(\eta(Y)) = \nabla_X(C_1^1(Y \otimes \eta)) = C_1^1(\nabla_X(Y \otimes \eta)) = \\ &= C_1^1[(\nabla_X Y) \otimes \eta + Y \otimes (\nabla_X \eta)] = C_1^1[(\nabla_X Y) \otimes \eta] + C_1^1[Y \otimes (\nabla_X \eta)] \\ &= \eta(\nabla_X Y) + (\nabla_X \eta)(Y), \end{aligned}$$

da cui si ricava la formula del punto (iv) per $(\nabla_X \eta)(Y)$. Questo significa che la connessione ∇ su T^*M è univocamente determinata da (i)-(iv); poiché la conosciamo anche su TM e su $C^\infty(M)$, (iii) implica che ∇ è univocamente determinata su qualsiasi $T_q^p M$, infatti⁷⁷:

$$\begin{aligned} X(t(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)) &= \nabla_X(t(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)) \\ &= (\nabla_X t)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) + \sum_{h=1}^p t(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^h, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) + \\ &+ \sum_{k=1}^q t(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, \nabla_X Y_k, \dots, Y_q), \end{aligned}$$

da cui si ricava un'espressione esplicita per $(\nabla_X t)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)$. Per l'esistenza, definiamo ∇ su T^*M come sopra. Si verifica subito che questa è una connessione. Successivamente, definiamo ∇ su $T_q^p M$ usando la formula precedente; anche in questo caso si verifica che è una connessione. \square

Esempio 2.75. Sia (U, φ) una carta locale per una varietà differenziabile M , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, e sia ∇ una connessione su TM ; allora $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ è un riferimento locale per TM sull'aperto U .

Poniamo $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^h \partial_h$, dove Γ_{ij}^h sono i simboli di Christoffel della connessione. Vogliamo trovare formule esplicite per calcolare la derivata covariante (o connessione) di un tensore qualunque.

⁷⁶Data $\eta \in A^1(M) = \mathcal{T}_1(M)$ e $Y \in \mathcal{T}(M) = \mathcal{T}^1(M)$, abbiamo $\eta(Y) := \langle \eta, Y \rangle \in C^\infty(M)$, infatti:

$$\begin{aligned} \eta(Y) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \eta(Y)(p) := \eta_p(Y_p), \end{aligned}$$

dove $\eta(p) = \eta_p \in T_p^* M = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R})$ e $Y(p) = Y_p \in T_p M$.

⁷⁷Dato $t \in \mathcal{T}_q^p(M)$ e date $\omega^h \in A^1(M), \forall h = 1, \dots, p$ e $Y_k \in \mathcal{T}(M), \forall k = 1, \dots, q$, allora $t(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) \in C^\infty(M)$ (questo giustifica il primo passaggio del calcolo seguente); per quanto riguarda il secondo, si ricordi che, qualunque sia l'estensione di ∇ , essa deve soddisfare la regola di Leibniz.

- Dato $Y \in \mathcal{T}(M)$, $Y = Y^j \partial_j$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_i}(Y) &= \nabla_{\partial_i}(Y^j \partial_j) = (\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \\ &= (\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^h \partial_h = (\partial_i Y^h) \partial_h + Y^j \Gamma_{ij}^h \partial_h \\ &= (\partial_i Y^h + \Gamma_{ij}^h Y^j) \partial_h,\end{aligned}$$

$$\text{da cui } \nabla_{\partial_i}(Y^h) = \partial_i Y^h + \Gamma_{ij}^h Y^j.$$

- Sia $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ un riferimento locale per T^*M su U ; allora

$$\nabla_{\partial_i} dx^j = \tilde{\Gamma}_{ih}^j dx^h.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}0 &= \partial_i \delta_h^j = \partial_i \langle dx^j, \partial_h \rangle = \nabla_{\partial_i} \langle dx^j, \partial_h \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_i} dx^j, \partial_h \rangle + \langle dx^j, \nabla_{\partial_i} \partial_h \rangle \\ &= \langle \tilde{\Gamma}_{ih}^j dx^l, \partial_h \rangle + \langle dx^j, \Gamma_{ih}^k \partial_k \rangle \\ &= \tilde{\Gamma}_{ih}^j \langle dx^l, \partial_h \rangle + \Gamma_{ih}^k \langle dx^j, \partial_k \rangle \\ &= \tilde{\Gamma}_{ih}^j + \Gamma_{ih}^j,\end{aligned}$$

$$\text{da cui } \tilde{\Gamma}_{ih}^j = -\Gamma_{ih}^j, \text{ quindi } \nabla_{\partial_i} dx^j = -\Gamma_{ih}^j dx^h.$$

- Data $\omega \in \mathcal{T}_1(M) = A^1(M)$, $\omega = \omega_j dx^j$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_i} \omega &= \nabla_{\partial_i}(\omega_j dx^j) = (\partial_i \omega_j) dx^j + \omega_j \nabla_{\partial_i} dx^j \\ &= (\partial_i \omega_j) dx^j + \omega_j (-\Gamma_{ih}^j dx^h) = (\partial_i \omega_h - \Gamma_{ih}^j \omega_j) dx^h,\end{aligned}$$

$$\text{da cui } \nabla_{\partial_i}(\omega_h) = \partial_i \omega_h - \Gamma_{ih}^j \omega_j.$$

- Dato $t \in \mathcal{T}_1^1(M)$, $t = t_k^h \partial_h \otimes dx^k$, con $t_k^h \in C^\infty(U)$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_i} t &= \nabla_{\partial_i}(t_k^h \partial_h \otimes dx^k) \\ &= (\partial_i t_k^h) \partial_h \otimes dx^k + t_k^h (\nabla_{\partial_i} \partial_h) \otimes dx^k + t_k^h \partial_h \otimes (\nabla_{\partial_i} dx^k) \\ &= (\partial_i t_k^h) \partial_h \otimes dx^k + t_k^h \Gamma_{ih}^l \partial_l \otimes dx^k + t_k^h \partial_h \otimes (-\Gamma_{ih}^k dx^l) \\ &= (\partial_i t_k^h) \partial_h \otimes dx^k + \Gamma_{ih}^l t_k^l \partial_h \otimes dx^k - \Gamma_{ik}^l t_k^h \partial_h \otimes dx^l \\ &= (\partial_i t_k^h + \Gamma_{ih}^l t_k^l - \Gamma_{ik}^l t_k^h) \partial_h \otimes dx^k,\end{aligned}$$

$$\text{da cui } \nabla_{\partial_i}(t_k^h) = \partial_i t_k^h + \Gamma_{ih}^l t_k^l - \Gamma_{ik}^l t_k^h.$$

- In modo del tutto simile, si possono trovare formule esplicite per la derivata covariante di tensori di tipo $\binom{p}{q}$: dato $t \in \mathcal{T}_q^p(M)$,

$$t = t_{k_1 \dots k_q}^{h_1 \dots h_p} \partial_{h_1} \otimes \dots \otimes \partial_{h_p} \otimes dx^{k_1} \otimes \dots \otimes dx^{k_q},$$

con $h_1, \dots, h_p, k_1, \dots, k_q \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} (t_{k_1 \dots k_q}^{h_1 \dots h_p}) &= \partial_i (t_{k_1 \dots k_q}^{h_1 \dots h_p}) + \Gamma_{il}^{h_1} t_{k_1 \dots k_q}^{h_2 \dots h_p} + \Gamma_{il}^{h_2} t_{k_1 \dots k_q}^{h_1 l h_3 \dots h_p} + \dots + \Gamma_{il}^{h_p} t_{k_1 \dots k_q}^{h_1 \dots h_{p-1} l} - \\ &- \Gamma_{ik_1}^l t_{lk_2 \dots k_q}^{h_1 \dots h_p} - \Gamma_{ik_2}^l t_{k_1 l k_3 \dots k_q}^{h_1 \dots h_p} - \dots - \Gamma_{ik_q}^l t_{k_1 \dots k_{q-1} l}^{h_1 \dots h_p}. \end{aligned}$$

Definizione 2.76. Sia ∇ una connessione lineare su M . Dato $t \in \mathcal{T}_q^p(M)$, il campo tensoriale $\nabla t \in \mathcal{T}_{q+1}^p(M)$ definito ponendo

$$(\nabla t)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q, Y_{q+1}) := (\nabla_{Y_{q+1}} t)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)$$

è detto derivata covariante totale di t .

Se $\nabla t \equiv 0$, diremo che t è parallelo.

2.3.3 Varietà Riemanniane

Definizione 2.77. Una metrica Riemanniana su una varietà M è un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simmetrico (cioè $g_p(w, v) = g_p(v, w)$, $\forall v, w \in T_p M$, $\forall p \in M$) e definito positivo (cioè $g_p(v, v) > 0$, $\forall v \neq 0, v \in T_p M$)⁷⁸.

La coppia (M, g) è detta varietà Riemanniana.

In altre parole, una metrica Riemanniana associa ad ogni punto $p \in M$ un prodotto scalare (definito positivo) $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, che dipende in modo C^∞ dal punto p .

Ci sono però alcune situazioni (per esempio nello studio della relatività generale) in cui è utile studiare varietà dotate di un campo tensoriale con proprietà simili a quelle di una metrica Riemanniana, ma non necessariamente definito positivo.

⁷⁸Useremo anche la notazione $\langle v, w \rangle_p$ al posto di $g_p(v, w)$, e indicheremo con $\|\cdot\|_p$ la norma su $T_p M$ indotta dal prodotto scalare g_p . In questo modo possiamo misurare la lunghezza di vettori tangenti ad una varietà ($\forall v \in T_p M$, $\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}$), l'angolo θ tra due vettori $v, w \in T_p M$ ($\cos \theta = \frac{g_p(v, w)}{\|v\|_p \cdot \|w\|_p}$), ma anche la lunghezza di curve, e introdurre la distanza tra due punti (in analogia con quanto visto per la prima forma fondamentale nel capitolo precedente).

Definizione 2.78. ⁷⁹ Una metrica pseudo-Riemanniana su una varietà M è un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simmetrico, non degenere⁸⁰ (cioè tale che $g_p(v, w) = 0 \forall w \in T_p M \iff v = 0$), ma non necessariamente definito positivo. La coppia (M, g) è detta varietà pseudo-Riemanniana.

Se g è una metrica pseudo-Riemanniana su una varietà n -dimensionale M connessa, diremo che g ha segnatura (r, s) , con $r, s \in \mathbb{N}$, se r è la massima dimensione di un sottospazio di $T_p M$ su cui g è definito positivo e s è la massima dimensione di un sottospazio di $T_p M$ sul quale g è definito negativo. Inoltre, $r + s = n$ e, per continuità, la segnatura di g non dipende dal punto $p \in M$ usato per calcolarla.

Una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(1, n - 1)$ è detta metrica di Lorentz⁸¹.

Troviamo l'espressione del campo tensoriale simmetrico $g \in \mathcal{T}_2(M)$ in coordinate locali:

se (U, φ) è una carta locale per M , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, un riferimento locale per TM su U è dato da $\{\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Allora

$$g = g_{hk} dx^h \otimes dx^k, \quad \text{con} \quad g_{hk} = g(\partial_h, \partial_k) \in C^\infty(U), \quad ^{82}$$

dove la matrice (g_{hk}) ⁸³ è simmetrica, non degenere se e solo se g è non degenere, e definita positiva se e solo se g è definita positiva.

Esempio 2.79 (\mathbb{R}^n con la metrica piatta). Identificando $T_p \mathbb{R}^n$ con \mathbb{R}^n , per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, possiamo mettere su ciascuno spazio tangente il prodotto scalare

⁷⁹Diversi risultati riguardanti le metriche Riemanniane, ad esempio la costruzione della connessione di Levi-Civita che vedremo tra poco, sono validi anche per le metriche pseudo-Riemanniane; indicheremo esplicitamente i casi più significativi.

⁸⁰Si noti che mentre l'essere simmetrico non è indispensabile, l'essere non degenere lo è, in quanto poi vorremo invertire la matrice che lo rappresenta.

⁸¹Questa metrica è propria della relatività generale.

⁸²Poiché g è un campo tensoriale simmetrico, possiamo anche scrivere $g = g_{hk} dx^h \odot dx^k$ o, più semplicemente, $g = g_{hk} dx^h dx^k$; inoltre, spesso si trova $ds^2 = g_{hk} dx^h dx^k$.

⁸³La matrice (g_{hk}) è sicuramente invertibile poiché, in un caso (quello Riemanniano) è definita positiva, nell'altro (quello pseudo-Riemanniano) è non degenere. Per convenzione, quindi, la matrice inversa di (g_{hk}) sarà indicata con (g^{hk}) , in modo che

$$g_{hj} g^{jk} = g^{kj} g_{jh} = \delta_h^k.$$

canonico. In questo modo otteniamo una metrica Riemanniana su \mathbb{R}^n , detta metrica euclidea o metrica piatta su \mathbb{R}^n , data da

$$g = \delta_{hk} dx^h \otimes dx^k = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n.$$

Proposizione 2.80. *Ogni varietà differenziabile M ammette una metrica Riemanniana.*

Dimostrazione. ⁸⁴ Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ un atlante di M e sia $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_\alpha$. Su ciascun aperto U_α introduciamo la metrica g^α indotta dalla metrica piatta su \mathbb{R}^n : se $\varphi_\alpha = (x^1, \dots, x^n)$, $p \in U_\alpha$ e $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \in T_p M$, poniamo

$$\begin{aligned} g_p^\alpha(X, Y) &= g_p^\alpha\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p\right) = X^i Y^j g_p^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p\right) \\ &= X^i Y^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n X^i Y^i. \end{aligned}$$

⁸⁵ Definiamo allora un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ ponendo

$$g_p = \sum_{\alpha} \rho_\alpha(p) g_p^\alpha, \quad \forall p \in M;$$

tale somma è ben definita perché, per ogni $p \in M$, solo un numero finito di $\rho_\alpha(p)$ è diverso da zero. Poiché la somma di campi tensoriali simmetrici e definiti positivi è ancora un campo tensoriale simmetrico definito positivo, e dato che $\rho_\alpha \geq 0$, g è una metrica Riemanniana su M . \square

2.3.4 La connessione di Levi-Civita

Una delle proprietà cruciali della metrica piatta di \mathbb{R}^n è che la matrice che la rappresenta è costante (è la matrice identica), indipendente dal punto

⁸⁴Tale dimostrazione funziona solamente per costruire metriche definite positive (o definite negative) su M , ma *non* funziona per costruire metriche pseudo-Riemanniane di segnatura (r, s) data. Infatti, anche se tutte le g^α , definite sugli aperti U_α , avessero tutte la stessa segnatura, non è detto che la g risultante abbia ancora la stessa segnatura (potrebbe anche essere degenere).

⁸⁵ g_p^α è ovviamente simmetrica e definita positiva, in quanto costruita a partire dal prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n .

$p \in \mathbb{R}^n$. Questo permette di scrivere la derivata del prodotto scalare di due campi vettoriali tramite prodotti scalari dei campi vettoriali con le loro derivate covarianti (rispetto alla metrica piatta): se $g \in \mathcal{T}_2(\mathbb{R}^n)$ è la metrica piatta su \mathbb{R}^n , presi due campi vettoriali $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$g(X^i \partial_i, Y^j \partial_j) = X^i Y^j g(\partial_i, \partial_j) = X^i Y^j g_{ij} = X^i Y^j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^n X^j Y^j;$$

derivando ambo i membri rispetto ad una variabile x^h , si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x^h} \sum_{j=1}^n X^j Y^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial x^h} Y^j + \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial Y^j}{\partial x^h}.$$

È possibile scrivere in modo più compatto tale formula come

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \quad (2.2)$$

dove ∇ è la connessione piatta su \mathbb{R}^n e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è la metrica piatta su \mathbb{R}^n .

Possiamo interpretare (2.2) come una formula di *compatibilità* tra la metrica piatta e la connessione piatta di \mathbb{R}^n . Ciò che permette di studiare la geometria delle varietà Riemanniane è che ad *ogni* metrica (pseudo)Riemanniana è possibile associare *in modo canonico* una connessione *compatibile* con essa. Obiettivo di questa sezione è costruire esattamente questa connessione. Vediamo innanzitutto di definire la proprietà di compatibilità che ci interessa.

Definizione 2.81. *Sia (M, g) una varietà (pseudo)Riemanniana. Una connessione lineare su M è compatibile con la metrica g se*

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M),$$

dove $\langle Y, Z \rangle = g(Y, Z)$.

Proposizione 2.82. *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà (pseudo)Riemanniana (M, g) . Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) ∇ è compatibile con g ;
- (ii) $\nabla g \equiv 0$, cioè la metrica g è parallela rispetto a ∇ ;
- (iii) in un qualunque sistema di coordinate locali si ha

$$\partial_k g_{ij} = g_{lj} \Gamma_{ki}^l + g_{il} \Gamma_{kj}^l.$$

⁸⁶Tale compatibilità può essere vista come una regola di Leibniz applicata al prodotto scalare (tra due campi di vettori). Il membro di sinistra nella formula coincide con $X(\langle Y, Z \rangle)$, perché $\langle Y, Z \rangle \in C^\infty(M)$.

Dimostrazione. (i) \iff (ii): ricordando la definizione di derivata covariante totale (2.76) e che una connessione deve soddisfare la formula di Leibniz, abbiamo $\nabla_X(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, cioè $(\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(\langle Y, Z \rangle) - \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, quindi:

$$(\nabla g)(Y, Z, X) = (\nabla_X g)(Y, Z) = X(\langle Y, Z \rangle) - \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

da cui $\nabla g \equiv 0$ se e solo se ∇ è compatibile con g .

(ii) \iff (iii): fissato un sistema di coordinate locali, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla g(\partial_i, \partial_j, \partial_k) &= \nabla_{\partial_k} g(\partial_i, \partial_j) = \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle - \langle \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle - \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle \\ &= \partial_k g_{ij} - g_{lj} \Gamma_{ki}^l - g_{il} \Gamma_{kj}^l, \end{aligned}$$

da cui si ottiene quanto richiesto. \square

La compatibilità con la metrica non basta però ad identificare univocamente una connessione. Infatti, si può dimostrare che se ∇ è una connessione compatibile con la metrica su una varietà (pseudo)Riemanniana (M, g) , e $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ è tale che

$$\langle A(X, Y), Z \rangle = -\langle A(X, Z), Y \rangle, \quad (2.3)$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$, allora $\widetilde{\nabla} := \nabla + A$ è ancora una connessione compatibile con la metrica⁸⁷. Dall'uguaglianza (2.3) si deduce che l'operatore $A(X, \cdot)$ è antisimmetrico, $\forall X \in \mathcal{T}(M)$. Questa osservazione ci porta a sospettare che una connessione compatibile con la metrica che sia simmetrica in un senso opportuno, se esiste, dovrebbe essere unica. Il concetto "giusto" di simmetria è rivelato dal:

Lemma 2.83. *Data una connessione lineare ∇ su una varietà M , definiamo*

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

⁸⁷In primo luogo bisognerebbe verificare che $\widetilde{\nabla}$ è una connessione su TM ; essa è compatibile con la metrica, in quanto:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X Z \rangle &= \langle \nabla_X Y + A(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z + A(X, Z) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle A(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, A(X, Z) \rangle \\ &= X(\langle Y, Z \rangle) = \widetilde{\nabla}_X(\langle Y, Z \rangle), \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M). \end{aligned}$$

Allora $\tau \in \mathcal{T}_2^1(M)$.⁸⁸

Dimostrazione. Poiché $\tau(X, Y) = -\tau(Y, X)$, è sufficiente vedere che τ è $C^\infty(M)$ -lineare nel primo argomento:

$$\begin{aligned}\tau(fX, Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y] \\ &= f\nabla_XY - f\nabla_YX - Y(f)X - f[X, Y] + Y(f)X \\ &= f[\nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y]] = f\tau(X, Y).\end{aligned}$$

□

Definizione 2.84. La torsione di una connessione lineare ∇ su una varietà M è il campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}_2^1(M)$ definito sopra. La connessione ∇ è detta simmetrica (o priva di torsione) se $\tau \equiv 0$.

Lemma 2.85. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M . Le seguenti due condizioni sono equivalenti:

- (i) ∇ è simmetrica;
- (ii) i simboli di Christoffel rispetto ad un qualsiasi sistema di coordinate locali sono simmetrici, ossia $\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h$.

Dimostrazione. Fissato un sistema di coordinate locali, scriviamo $X = X^h\partial_h$, $Y = Y^k\partial_k \in \mathcal{T}(M)$. Per l'Osservazione (2.73), abbiamo

$$\nabla_XY = (X(Y^k) + \Gamma_{jh}^k X^j Y^h)\partial_k.$$

Allora

$$\begin{aligned}\tau(X, Y) &= (X(Y^k) + \Gamma_{jh}^k X^j Y^h)\partial_k - (Y(X^k) + \Gamma_{jh}^k Y^j X^h)\partial_k - [X, Y] \\ &= (X(Y^k)\partial_k - Y(X^k)\partial_k - [X, Y]) + X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k \\ &= X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k,\end{aligned}$$

da cui $\tau(X, Y) \equiv 0, \forall X, Y \in \mathcal{T}(M) \iff \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \forall i, j, k$.

□

Il prossimo risultato permette alla geometria Riemanniana di prendere vita:

⁸⁸Sebbene ∇ non sia un tensore (perché $C^\infty(M)$ -lineare solamente rispetto all'argomento X , ma non rispetto a Y), l'operatore τ , definito a partire da ∇ è un tensore (ovvero $C^\infty(M)$ -lineare in entrambi gli argomenti)!

Teorema 2.86 (Levi-Civita). *Su ogni varietà (pseudo)Riemanniana (M, g) esiste un'unica connessione ∇ simmetrica e compatibile con la metrica.*

Tale ∇ soddisfa

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \right. \\ \left. + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$. In particolare, se $\{E_1, \dots, E_n\}$ è un riferimento locale ortonormale per TM , si ha

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle [E_i, E_j], E_k \rangle - \langle [E_j, E_k], E_i \rangle + \langle [E_k, E_i], E_j \rangle \right). \quad (2.5)$$

I simboli di Christoffel di ∇ sono dati da

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'unicità.

Se ∇ è una connessione compatibile con la metrica g e simmetrica, allora

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle \\ &+ \langle Z, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle 2\nabla_X Y - [X, Y], Z \rangle \\ &= -\langle [Z, X], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle, \end{aligned}$$

quindi ∇ è data da (2.4).

Per l'esistenza, definiamo

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tramite (2.4), $\forall Z \in \mathcal{T}(M)$; dobbiamo verificare che in questo modo si ottiene una connessione simmetrica compatibile con la metrica g .

Iniziamo dimostrando che il secondo membro di (2.4) è $C^\infty(M)$ -lineare in Z :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, fZ \rangle &= \frac{1}{2} \left(X \langle Y, fZ \rangle + Y \langle fZ, X \rangle - fZ \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], fZ \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle [Y, fZ], X \rangle + \langle [fZ, X], Y \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(X(f) \langle Y, Z \rangle + fX \langle Y, Z \rangle + Y(f) \langle Z, X \rangle + fY \langle Z, X \rangle \right. \\
&\quad - fZ \langle X, Y \rangle + f \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y(f)Z, X \rangle - \langle f[Y, Z], X \rangle \\
&\quad \left. + f \langle [Z, X], Y \rangle - \langle X(f)Z, Y \rangle \right) \\
&= f \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \frac{1}{2} \left(X(f) \langle Y, Z \rangle + Y(f) \langle Z, X \rangle - Y(f) \langle Z, X \rangle \right. \\
&\quad \left. - X(f) \langle Z, Y \rangle \right) \\
&= f \langle \nabla_X Y, Z \rangle + 0 = f \langle \nabla_X Y, Z \rangle,
\end{aligned}$$

quindi $\langle \nabla_X Y, \cdot \rangle$ è una 1-forma e, di conseguenza, $\nabla_X Y \in \mathcal{T}(M)$.

Con un calcolo analogo si verifica che ∇ è $C^\infty(M)$ -lineare nel primo argomento, cioè $\langle \nabla_{fX} Y, Z \rangle = \langle f \nabla_X Y, Z \rangle$, $\forall Z \in \mathcal{T}(M)$.

In modo analogo si verifica che vale la formula di Leibniz. E queste verifiche dimostrano che ∇ è effettivamente una connessione.

A questo punto, con calcoli piuttosto semplici, si verificano la compatibilità con la metrica e la simmetria ed abbiamo così ottenuto anche l'esistenza.

La (2.4) chiaramente implica la (2.5). Calcoliamo, infine, i simboli di Christoffel di una tale ∇ . Ovviamente, $[\partial_h, \partial_k] = 0$, $\forall h, k = 1, \dots, n$ e

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \langle \Gamma_{ij}^k \partial_k, \partial_l \rangle = \Gamma_{ij}^k \langle \partial_k, \partial_l \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl}$$

e, per mezzo di (2.4), abbiamo anche

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle &= \frac{1}{2} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),
\end{aligned}$$

da cui si ricava la formula (2.6). □

Definizione 2.87. *Sia M una varietà (pseudo)Riemanniana. L'unica connessione lineare ∇ simmetrica e compatibile con la metrica è detta la connessione di Levi-Civita di M .*

2.4 Curvatura

Come possiamo definire la curvatura di una varietà Riemanniana?

In dimensione 2, non c'è dubbio che il concetto “giusto” di curvatura è quello di *curvatura Gaussiana*⁸⁹; infatti, il Teorema egregium di Gauss (1.77) afferma che la curvatura Gaussiana di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ dipende esclusivamente dalla metrica indotta sulla superficie dalla metrica piatta di \mathbb{R}^3 : per la precisione, abbiamo che la curvatura Gaussiana K di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è data dalla formula

$$K = \frac{1}{G} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} + (\Gamma_{22}^s \Gamma_{1s}^1 - \Gamma_{12}^s \Gamma_{2s}^1) \right], \quad (2.7)$$

dove i Γ_{ij}^k sono i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita della metrica indotta su S dalla metrica piatta di \mathbb{R}^3 , calcolati rispetto a una carta locale $\varphi = (x_1, x_2)$, e $G = \|\partial_2\|^2$.

Per definire il concetto di curvatura su una varietà Riemanniana qualsiasi, procederemo per via analitica, piuttosto che geometrica. Osserviamo che, poiché (2.7) contiene i simboli di Christoffel, la curvatura dev'essere legata alla connessione di Levi-Civita; inoltre, la forma di (2.7) suggerisce di considerare derivate della connessione (per la presenza delle derivate dei simboli di Christoffel), e di pensare a qualcosa di antisimmetrico (scambiando qualche indice si ottiene un cambio di segno). Proviamo allora a definire la curvatura di una connessione come segue:

Definizione 2.88. *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M .*

Dati $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, definiamo un operatore

$$R_{XY} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} : \begin{array}{l} \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M) \\ Z \longmapsto \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{array}$$

Con un calcolo diretto si verifica che $R_{XY}(Z)$ è $C^\infty(M)$ -lineare rispetto a tutte le variabili; ciò significa che R è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{3}$, cioè $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$.

⁸⁹Poiché tale curvatura Gaussiana è legata alla curvatura delle curve (sezioni normali) passanti per un determinato punto della superficie, un'idea potrebbe essere quella di misurare, in ogni punto della varietà differenziabile M , la curvatura Gaussiana di particolari superfici contenute in M . Questo tipo di curvatura è detta *curvatura sezionale*, ed è possibile vedere che essa determina completamente il tensore di curvatura; viceversa, il tensore di curvatura (definito tramite la connessione di Levi-Civita) permette di calcolare la curvatura sezionale definita geometricamente.

Definizione 2.89. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M . Il tensore di curvatura (di Riemann) di ∇ è il campo tensoriale $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$ dato da

$$R(X, Y, Z) = R_{XY}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \in \mathcal{T}(M),$$

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$.

Se ∇ è la connessione di Levi-Civita di una varietà (pseudo)Riemanniana (M, g) , diremo che R è il tensore di curvatura della varietà (M, g) , e considereremo anche il campo tensoriale $\tilde{R} \in \mathcal{T}_4^0(M)$ definito ponendo

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = \langle R_{XY}Z, W \rangle.$$

Il tensore di curvatura possiede diverse proprietà di simmetria:

Proposizione 2.90. Sia $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$ il tensore di curvatura di una connessione lineare simmetrica ∇ su una varietà M , e siano $X, Y, Z, W \in \mathcal{T}(M)$. Allora:

(i) $R_{XY} = -R_{YX}$; in particolare, $R_{XX} = 0$;

(ii) $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$ (prima identità di Bianchi).

Inoltre,

se ∇ è la connessione di Levi-Civita di una varietà (pseudo)Riemanniana:

(iii) $\langle R_{XY}Z, W \rangle = -\langle Z, R_{XY}W \rangle$; in particolare, $\langle R_{XY}Z, Z \rangle = 0$;

(iv) $\langle R_{XY}Z, W \rangle = \langle R_{ZW}X, Y \rangle$.

Dimostrazione. (i) è ovvia, per come R_{XY} è stato definito.

(ii) si ottiene usando la simmetria della connessione e l'identità di Jacobi.

Per ottenere (iii), basta vedere che $\langle R_{XY}Z, Z \rangle = 0, \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$; infatti, se ciò è vero, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R_{XY}(Z + W), Z + W \rangle \\ &= \langle R_{XY}Z, Z \rangle + \langle R_{XY}Z, W \rangle + \langle R_{XY}W, Z \rangle + \langle R_{XY}W, W \rangle, \end{aligned}$$

da cui la tesi $\langle R_{XY}Z, W \rangle = -\langle Z, R_{XY}W \rangle$.

La compatibilità con la metrica dà

$$Y(\|Z\|^2) = Y(\langle Z, Z \rangle) = \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle Z, \nabla_Y Z \rangle = 2\langle \nabla_Y Z, Z \rangle,$$

quindi

$$XY(\|Z\|^2) = 2X(\langle \nabla_Y Z, Z \rangle) = 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + 2\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle.$$

Analogamente si trova

$$\begin{aligned} YX(\|Z\|^2) &= 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ [X, Y](\|Z\|^2) &= 2\langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle. \end{aligned}$$

Sottraendo le ultime due dalla prima, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= (XY - YX - [X, Y])(\|Z\|^2) \\ &= 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle - 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - 2\langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= 2\langle R_{XY} Z, Z \rangle. \end{aligned}$$

Per ottenere (iv), scriviamo la prima identità di Bianchi quattro volte, permutando ciclicamente gli argomenti

$$\begin{aligned} \langle R_{XY} Z, W \rangle + \langle R_{YZ} X, W \rangle + \langle R_{ZX} Y, W \rangle &= 0, \\ \langle R_{YZ} W, X \rangle + \langle R_{ZW} Y, X \rangle + \langle R_{WY} Z, X \rangle &= 0, \\ \langle R_{ZX} X, Y \rangle + \langle R_{WX} Z, Y \rangle + \langle R_{XZ} W, Y \rangle &= 0, \\ \langle R_{WX} Y, Z \rangle + \langle R_{XY} W, Z \rangle + \langle R_{YW} X, Z \rangle &= 0, \end{aligned}$$

e sommiamo. Per (iii) le prime due colonne si cancellano; applicando (i) e (iii) all'ultima colonna

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R_{ZX} Y, W \rangle + \langle R_{WY} Z, X \rangle + \langle R_{XZ} W, Y \rangle + \langle R_{YW} X, Z \rangle \\ &= -\langle R_{XZ} Y, W \rangle - \langle R_{YW} Z, X \rangle + \langle R_{XZ} W, Y \rangle + \langle R_{YW} X, Z \rangle \\ &= +\langle R_{XZ} W, Y \rangle + \langle R_{YW} X, Z \rangle + \langle R_{XZ} W, Y \rangle + \langle R_{YW} X, Z \rangle, \end{aligned}$$

quindi $\langle R_{XZ} W, Y \rangle = -\langle R_{YW} X, Z \rangle = \langle R_{WY} X, Z \rangle$. \square

Osservazione 2.91 (Tensore di curvatura in coordinate locali). *Fissata una carta locale (U, φ) di M , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, il tensore di curvatura R si scrive nelle forma*

$$R = R_{ijh}^k dx^i \otimes dx^j \otimes dx^h \otimes \partial_k.$$

Se tralasciamo di scrivere i vettori di base, possiamo anche scrivere

$$R = (R_{ijh}^k);$$

infatti, se $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_h$, si ha

$$R(X, Y, Z) = R_{ijh}^k \langle dx^i, \partial_i \rangle \langle dx^j, \partial_j \rangle \langle dx^h, \partial_h \rangle \partial_k = R_{ijh}^k \partial_k \in \mathcal{T}(M),$$

quindi scriveremo $R_{\partial_i \partial_j} \partial_h = R_{ijh}^k \partial_k$.

$$\begin{aligned}
R_{ijh}^k \partial_k &= R_{\partial_i \partial_j} \partial_h = \nabla_{\partial_i}(\nabla_{\partial_j} \partial_h) - \nabla_{\partial_j}(\nabla_{\partial_i} \partial_h) - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} \partial_h \\
&= \nabla_{\partial_i}(\Gamma_{jh}^l \partial_l) - \nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ih}^l \partial_l) \\
&= \partial_i(\Gamma_{jh}^l) \partial_l + \Gamma_{jh}^l \nabla_{\partial_i} \partial_l - \partial_j(\Gamma_{ih}^l) \partial_l - \Gamma_{ih}^l \nabla_{\partial_j} \partial_l \\
&= \partial_i(\Gamma_{jh}^k) \partial_k + \Gamma_{jh}^l \Gamma_{il}^k \partial_k - \partial_j(\Gamma_{ih}^k) \partial_k - \Gamma_{ih}^l \Gamma_{jl}^k \partial_k \\
&= [\partial_i \Gamma_{jh}^k - \partial_j \Gamma_{ih}^k + \Gamma_{jh}^l \Gamma_{il}^k - \Gamma_{ih}^l \Gamma_{jl}^k] \partial_k,
\end{aligned}$$

da cui $R_{ijh}^k = \partial_i \Gamma_{jh}^k - \partial_j \Gamma_{ih}^k + \Gamma_{jh}^l \Gamma_{il}^k - \Gamma_{ih}^l \Gamma_{jl}^k$.

Inoltre, le proprietà di simmetria viste nella Proposizione (2.90) si possono esprimere come proprietà di simmetria dei simboli R_{ijh}^k . Osserviamo prima qual è la scrittura di $\tilde{R} \in \mathcal{T}_4^0(M)$ in coordinate locali:

$$\tilde{R} = \tilde{R}_{ijhk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^h \otimes dx^k,$$

dunque ricaviamo le relazioni tra i coefficienti di \tilde{R} e quelli di R :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{ijhk} &= \tilde{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_h, \partial_k) = \langle R(\partial_i, \partial_j, \partial_h), \partial_k \rangle \\
&= \langle R_{\partial_i \partial_j} \partial_h, \partial_k \rangle = \langle R_{ijh}^l \partial_l, \partial_k \rangle \\
&= R_{ijh}^l \langle \partial_l, \partial_k \rangle = R_{ijh}^l g_{lk}.
\end{aligned}$$

⁹⁰ È possibile verificare che le proprietà (i)-(iv) della Proposizione (2.90) sono equivalenti alle seguenti:

- (i) $\tilde{R}_{ijhk} = -\tilde{R}_{jihk}$;
- (ii) $\tilde{R}_{ijhk} + \tilde{R}_{jhik} + \tilde{R}_{hijk} = 0$;
- (iii) $\tilde{R}_{ijhk} = -\tilde{R}_{ikhj}$;
- (iv) $\tilde{R}_{ijhk} = \tilde{R}_{hki j}$.

Il tensore di curvatura permette di ottenere altri tipi di curvatures:

Definizione 2.92. Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R . Il tensore di Ricci $Ric \in \mathcal{T}_2^0(M)$ è definito dicendo che $Ric(X, Y)$ è la traccia dell'operatore lineare $Z \mapsto R_{ZX}Y$, cioè è ottenuto “contraendo” l'indice in alto del tensore di curvatura R_{ijh}^k con il primo indice in basso:

$$R_{ij} = R_{hij}^h.$$

⁹⁰In altre parole, \tilde{R}_{ijhk} è ottenuto a partire da R_{ijh}^k “abbassando” l'indice k per mezzo della metrica g .

In coordinate locali, il tensore di Ricci è quindi $Ric = R_{ij}dx^i \otimes dx^j$, con $R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j)$. Il tensore di Ricci è *simmetrico*, infatti:

$$R_{ij} = R_{hij}^h = \widetilde{R}_{hijk}g^{kh} = \widetilde{R}_{jkhi}g^{kh} = \widetilde{R}_{kjih}g^{hk} = R_{kji}^k = R_{ji}.$$

Definizione 2.93. *Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R . La curvatura di Ricci è la forma quadratica associata al tensore di Ricci*

$$Ric(X) := Ric(X, X), \quad \forall X \in \mathcal{T}(M).$$

L'operatore di Ricci è l'unico operatore lineare simmetrico $\mathcal{R} \in \mathcal{T}_1^1(M)$ tale che

$$Ric(X, Y) = \langle \mathcal{R}(X), Y \rangle.$$

Infine, la curvatura scalare $S \in C^\infty(M)$ è la traccia dell'operatore di Ricci.

In coordinate locali, $\mathcal{R} = R_i^j dx^i \otimes \partial_j$, con $\mathcal{R}(\partial_i) = R_i^j(\partial_j)$. Quindi, oltre a $R_{ij} = R_{hij}^h$, abbiamo

$$\begin{aligned} R_{ih} &= Ric(\partial_i, \partial_h) = \langle \mathcal{R}(\partial_i), \partial_h \rangle \\ &= \langle R_i^j \partial_j, \partial_h \rangle = R_i^j \langle \partial_j, \partial_h \rangle = R_i^j g_{jh}, \end{aligned}$$

da cui $R_i^j = g^{jh} R_{ih} = g^{jh} R_{kih}^k$ e $S = R_i^i = g^{ih} R_{ih} = g^{ih} R_{kih}^k$.

Concludiamo con la seguente

Definizione 2.94. *Una varietà Riemanniana (M, g) è detta di Einstein, e la metrica g è detta di Einstein, se esiste una funzione $\lambda \in C^\infty(M)$ tale che*

$$Ric = \lambda g.$$

Se (M, g) è di Einstein, allora l'operatore di Ricci è λid ; calcolando la traccia, troviamo $\lambda = \frac{1}{n}S$, dove n è la dimensione di M . Deduciamo pertanto che g è di Einstein se e solo se $Ric = \frac{1}{n}Sg$ ⁹¹.

⁹¹In realtà si può dimostrare che la curvatura scalare di una varietà di Einstein di dimensione $n \geq 3$ è costante, perciò Ric risulta essere un multiplo costante della metrica.

Capitolo 3

Applicazioni alla Relatività Generale

La Relatività Generale è l'attuale teoria relativistica della gravitazione, pubblicata da Einstein nel 1916.

Dai tempi di Newton con i suoi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), la gravità era interpretata come una forza conservativa di attrazione a distanza tra due corpi dotati di massa, direttamente proporzionale alle loro masse m_1 ed m_2 , ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza r :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

dove G è la costante di gravitazione universale.

L'avvento della Relatività Generale portò invece ad interpretare la gravità non più come una forza, ma come un effetto dovuto alla curvatura dello spazio-tempo.

Sia (M, g) una varietà (pseudo)Riemanniana n -dimensionale. Il tensore di curvatura $\tilde{R}_{ijhk} = {}^1R_{ijhk}$ ha n^4 componenti, ma *non* sono tutte *indipendenti*: le relazioni di simmetria (rispetto allo scambio di due coppie di indici), di antisimmetria (rispetto allo scambio dei primi due o degli ultimi due indici) e la prima identità di Bianchi (ovvero le proprietà (i)-(iv) della Proposizione (2.90) scritte in termini dei coefficienti R_{ijhk}), riducono questo

¹*Notazione:* d'ora in poi, viste le precedenti relazioni, identificheremo R con \tilde{R} e indicheremo la curvatura scalare S con R , poiché sarà chiaro dal contesto ciò che si intende. Inoltre, al posto degli indici latini, utilizzeremo le lettere μ, ν, \dots

numero a $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ componenti indipendenti.

Ciò significa che in dimensione 1, 2, 3, 4, ..., il numero di componenti indipendenti è 0, 1, 6, 20, ... rispettivamente.

Per spazio-tempo intendiamo la struttura dell'Universo: è una varietà differenziabile di dimensione 4, dotata di una metrica pseudo-Riemanniana g , di segnatura (1, 3) (metrica di Lorentz).

Nello spazio vuoto (in assenza di massa-energia), la metrica è quella di Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3,$$

dove la velocità della luce c è posta uguale a 1.

3.1 L'equazione di campo di Einstein

Scopo di questa sezione è illustrare l'equazione fondamentale della Relatività Generale, che descrive come la metrica si modifica in presenza di massa-energia (e quantità di moto). Tale equazione, conosciuta come *equazione di campo di Einstein*, dev'essere *postulata e verificata* sperimentalmente (e non derivata da qualche principio base); tuttavia è possibile motivarla.

3.1.1 La prima formulazione

Avendo a disposizione il calcolo tensoriale, vogliamo ora esaminare la gravità come descritta dalla Relatività Generale, quindi capire come il campo gravitazionale influenza il comportamento della materia e come la materia determina il campo gravitazionale. Nella gravità di Newton, abbiamo le espressioni $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$ per l'accelerazione di un corpo e l'equazione di Poisson per il potenziale gravitazionale Φ in termini della densità di materia ρ e della costante gravitazionale di Newton G :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (3.1)$$

In Relatività Generale, analoghe dichiarazioni descriveranno come la curvatura dello spazio-tempo agisce sulla materia manifestandosi come gravità, e

come l'energia e la quantità di moto influenzano lo spazio-tempo curvandolo. Ci proponiamo dunque di trovare un'equazione che sostituisca (3.1), dove $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ è il Laplaciano in spazio. Quali caratteristiche deve avere la nostra equazione?²

Osservando (3.1), a sinistra abbiamo un operatore differenziale del secondo ordine che agisce sul potenziale gravitazionale, mentre a destra compare una misura della distribuzione di massa. La generalizzazione (in termini tensoriali) della densità di massa è costituita dal tensore energia-quantità di moto (o tensore energia-impulso) $T_{\mu\nu}$, mentre il potenziale gravitazionale Φ dev'essere sostituito dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$, cioè

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}.^3$$

Ci accorgiamo di avere già a disposizione un oggetto non nullo costruito a partire dalle derivate seconde (e dalle derivate prime) della metrica, infatti: il tensore di curvatura Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ è costruito a partire dai simboli di Christoffel e dalle loro derivate prime, e i simboli di Christoffel, a loro volta, sono espressioni della metrica e delle sue derivate prime; pertanto, $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ contiene le derivate seconde di $g_{\mu\nu}$. Non è però esattamente l'oggetto che stavamo cercando, in quanto non è un tensore di tipo $\binom{0}{2}$; ma se gli applichiamo una contrazione, otteniamo il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ che è, in effetti, simmetrico di tipo $\binom{0}{2}$. A questo punto proviamo ad "indovinare" l'equazione del campo gravitazionale cercata, ponendo

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \exists \kappa \in \mathbb{R}; \quad (3.2)$$

in effetti, anche lo stesso Einstein aveva proposto, in un certo momento, tale equazione, che presenta però un problema: se richiediamo (come in effetti dovrebbe essere) che vengano conservate l'energia e la quantità di moto (ossia $T_{\mu\nu}$ sia conservato), segue che anche il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ è conservato, e ciò, in generale, non è vero!⁴

²Percorriamo velocemente l'idea di base per arrivare al risultato finale, evitando di spiegare i passaggi intermedi in modo dettagliato. Per ulteriori informazioni a riguardo, si consiglia il testo [5].

³Si noti che il membro di sinistra è semplicemente una notazione per ricordare che stiamo cercando un tensore simmetrico di tipo $\binom{0}{2}$ nelle derivate seconde della metrica g .

⁴Richiedendo cioè $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, dove $\nabla^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\nu$ e $\nabla_\nu = \nabla_{\partial_\nu}$, da (3.2) segue immediatamente che $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$, che non è valido in generale, infatti: la seconda identità di

Definiamo così il *tensore di Einstein*⁵

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

come il tensore simmetrico di tipo $\binom{0}{2}$ ottenuto a partire dal tensore di Ricci (tale tensore è, in effetti, conservato)! La nostra proposta è allora la seguente

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \text{cioè} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Osserviamo che l'equazione (3.4) soddisfa tutte le richieste: il membro di destra è un'espressione covariante della densità di energia e quantità di moto nella forma di un tensore $\binom{0}{2}$ simmetrico⁷ e conservato, e il membro di sinistra è anch'esso un tensore di tipo $\binom{0}{2}$ simmetrico e conservato, costruito a partire dalla metrica e dalle sue derivate prime e seconde.

Rimane quindi solamente da fissare la costante di proporzionalità κ e da verificare che l'equazione trovata riproduce effettivamente la gravità, così come la conosciamo.

Ciò che si verifica è che il tutto è soddisfatto se si sceglie $\kappa = 8\pi G$.

Si trova così l'equazione di campo di Einstein⁸:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3,$$

esprimibile anche nella forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

Bianchi afferma che $\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$; contraendola due volte abbiamo

$$0 = g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu},$$

da cui $2\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \nabla_\rho R$, cioè $\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_\rho R$.

⁵È possibile verificare dalla seconda identità di Bianchi che si ha proprio

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0.$$

⁶Qui R è la curvatura scalare.

⁷È possibile verificare che il tensore energia-impulso è un tensore simmetrico.

⁸Attenzione: abbiamo sempre supposto $c = 1$; l'equazione "completa" invece è

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

dove $G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein, $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, R è la curvatura scalare ($R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$), $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso e G è la costante di gravitazione universale.

L'equazione di campo di Einstein⁹ può essere scritta anche in una forma leggermente diversa: contraendo entrambi i membri dell'equazione (3.4), si ha

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \iff g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} 4R = \kappa T \iff R = -\kappa T,$$

e riscrivendo (3.4) si ha $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(-\kappa T)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, ossia

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)}.$$

Poiché si è spesso interessati allo spazio vuoto, cioè dove $T_{\mu\nu} = 0$ (ad esempio, al di fuori di una stella o di un pianeta), da quest'ultima formulazione dell'equazione di Einstein abbiamo $R_{\mu\nu} = 0$. Deduciamo dunque che l'equazione di Einstein nel vuoto è data semplicemente da

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.5)$$

3.1.2 Proprietà

L'equazione di campo di Einstein¹⁰

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

può essere pensata come un insieme di 16 *equazioni differenziali del secondo ordine* nel tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

Poiché i tensori coinvolti nell'equazione (3.6) sono tensori a due indici *tutti* simmetrici, in realtà vi sono solamente 10 equazioni indipendenti. Tuttavia, la *seconda identità di Bianchi*

$$\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

⁹Potremmo chiamarle "equazioni di campo di Einstein" al plurale perché, in effetti, sono 16 equazioni differenziali del second'ordine per il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ (non tutte indipendenti); forniscono informazioni relative al modo in cui la curvatura dello spazio-tempo reagisce alla presenza di energia-quantità di moto.

¹⁰Il membro di sinistra dell'equazione (3.6) è relativo alla metrica dello spazio-tempo, mentre quello di destra tratta le influenze gravitazionali per effetto di materia, energia e quantità di moto.

si traduce nelle seguenti quattro equazioni

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0,$$

che riducono a 6 il numero di equazioni effettivamente *indipendenti*.

Queste equazioni di campo sono però estremamente complicate: la curvatura scalare R e il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ sono contrazioni del tensore di curvatura di Riemann, il quale coinvolge derivate (prime) e prodotti dei simboli di Christoffel, che a loro volta coinvolgono la metrica inversa e le derivate (prime) della metrica. Inoltre, il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ coinvolge (generalmente) anch'esso la metrica.

Tali equazioni (3.6) sono *non lineari*: date quindi due soluzioni, la somma delle due non è più, generalmente, una soluzione!

In generale, risulta quindi molto difficile risolvere l'equazione di Einstein, ed è solitamente necessario fare alcune ipotesi di semplificazione; anche nel vuoto, dove il tensore energia-impulso è nullo, l'equazione di campo (3.5) può essere piuttosto difficile da risolvere!

3.1.3 La seconda formulazione

Nel 1917, subito dopo aver formulato la Relatività Generale, Einstein cercò di trovare un modello cosmologico (dell'Universo) *statico*, poiché era esattamente quello che le osservazioni astronomiche del tempo sembravano sostenere. Affinché però questa cosmologia statica risolvesse l'equazione di campo con una fonte qualunque di materia-energia, era necessario aggiungere un nuovo termine, detto *costante cosmologica* Λ ¹¹; la nuova proposta fu allora¹²:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3,$$

esprimibile anche nella forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$

Circa dieci anni più tardi, le osservazioni di Hubble confermarono l'*espansione dell'Universo* ed il termine Λ venne così omissis; lo stesso Einstein giudicò

¹¹La costante cosmologica Λ venne introdotta ad hoc da Einstein per permettere un Universo *statico*, in quanto la sua teoria prevedeva invece un Universo dinamico (in contrazione oppure in espansione), inconcepibile a quel tempo.

¹²Ricordiamo che stiamo assumendo sempre $c = 1$.

l'introduzione della costante cosmologica come “stabilizzatore dell'Universo” il suo più grave errore.

Anche i modelli di espansione possono però includere una costante cosmologica: osservazioni successive hanno mostrato che l'Universo è in *accelerazione*, indicando la presenza di una costante cosmologica positiva attribuita oggi ad un'energia oscura¹³, il cui significato fisico è ipoteticamente associato all'*energia del vuoto*.

A differenza della costante cosmologica, l'ipotetico contributo della *densità di energia del vuoto* ρ_{vac} è espresso da

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \rho_{\text{vac}}g_{\mu\nu}),$$

ossia

$$G_{\mu\nu} + 8\pi G\rho_{\text{vac}}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

quindi $\Lambda = 8\pi G\rho_{\text{vac}}$, cioè $\rho_{\text{vac}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Il valore positivo osservato per l'energia del vuoto (circa 10^{-120}) è enormemente più piccolo di quello che ci si aspetterebbe, ma è sufficiente a fornire una possibile spiegazione dell'espansione accelerata dell'Universo¹⁴.

Va detto che l'equazione di campo indicata da Einstein *non* è l'unica possibile, ma si distingue dalle altre per la semplicità dell'accoppiamento tra materia-energia e curvatura.

Osservazione 3.1. *Semplificando molto, elenchiamo i passaggi per determinare i percorsi lungo i quali si muovono gli “oggetti” nello spazio tempo:*

- *Dalla distribuzione di massa ed energia nello spazio-tempo, si ricava il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$;*
- *Risolvendo l'equazione di Einstein si ricava la metrica $g_{\mu\nu}$;*
- *Nota la metrica $g_{\mu\nu}$, è possibile determinare i coefficienti $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ della connessione di Levi-Civita ∇ ;*

¹³Si tratta di una *ipotetica* forma di energia, non direttamente rilevabile, diffusa in modo omogeneo nello spazio e che potrebbe giustificare l'espansione accelerata dell'Universo.

¹⁴I termini “costante cosmologica” e “energia del vuoto” sono, perciò, essenzialmente interscambiabili: possiamo quindi immaginare la costante cosmologica come una densità di energia costante che riempie in modo omogeneo lo spazio, fisicamente equivalente all'energia del vuoto.

- Nota la connessione, si determinano infine le curve geodetiche σ , ossia le curve σ contenute nello spazio-tempo con la proprietà che il vettore tangente σ' rimane parallelo lungo σ .

3.2 La soluzione di Schwarzschild

L'applicazione della teoria della gravità ad un campo gravitazionale a simmetria sferica porta alla descrizione del campo gravitazionale creato dalla Terra o dal Sole, con una buona approssimazione. Esaminiamo in questa sezione il caso delle soluzioni nel *vuoto* con perfetta *simmetria sferica*¹⁵.

3.2.1 La metrica di Schwarzschild

Abbiamo già osservato che le equazioni di Einstein, in generale, sono troppo complicate per essere risolte. Per semplificare la situazione, cerchiamo delle soluzioni che abbiano una *simmetria sferica*.

Usiamo le coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , con $r \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \phi \\ x^2 = r \sin \theta \sin \phi \\ x^3 = r \cos \theta \end{cases},$$

e così abbiamo

$$\begin{cases} dx^1 = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dx^2 = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dx^3 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{cases},$$

da cui

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)^{16} = dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Al posto delle coordinate (x^0, x^1, x^2, x^3) , useremo le coordinate (t, r, θ, ϕ) ¹⁷;

¹⁵Si ipotizza anche che il corpo non ruoti e sia privo di carica.

¹⁶Poiché siamo nell'ipotesi di simmetria sferica, non ci interessa la dipendenza esplicita dalle coordinate angolari θ e ϕ , dunque poniamo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

¹⁷Per l'ipotesi di simmetria sferica, sappiamo già che la metrica *non* potrà dipendere da tutte le quattro coordinate, ma che dipenderà soltanto dalla distanza r dal centro e dalla coordinata temporale t . Inoltre ricordiamo che stiamo sfruttando ancora l'ipotesi $c = 1$.

è possibile dimostrare che una metrica soddisfacente la richiesta di “simmetria sferica” è della seguente forma

$$ds^2 = m(t, r)dt^2 + n(t, r)dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

dove $m(t, r)$ e $n(t, r)$ sono funzioni incognite¹⁸ determinabili attraverso il seguente procedimento:

- dall’espressione della metrica ds^2 , si ricavano le espressioni di tutti i simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ della connessione di Levi-Civita ∇ ;
- a partire dai simboli di Christoffel appena ricavati, si calcolano tutte le componenti $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ del tensore di curvatura di Riemann e le componenti $R_{\mu\nu}$ del tensore di Ricci;
- si inserisce il tutto nell’equazione di campo di Einstein *nel vuoto*¹⁹ (3.5);
- infine, si risolvono le equazioni trovate e si determinano le funzioni $m(t, r)$ ed $n(t, r)$.

Sviluppando i calcoli, la metrica che si trova ha la seguente espressione:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.7)$$

dove G è la costante di gravitazione universale ed M è una costante interpretabile come la massa del corpo che produce il campo gravitazionale.

In Relatività Generale, tale metrica è l’*unica*²⁰ soluzione nel *vuoto a simmetria sferica*, ed è chiamata *metrica di Schwarzschild*.

In particolare, se andiamo ad inserire la costante c (che avevamo posto uguale a 1), l’espressione della metrica è

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.8)$$

¹⁸Dal momento che la metrica è di Lorentz, una tra le due funzioni $m(t, r)$ ed $n(t, r)$ dev’essere negativa; attenzione però che tale scelta non è arbitraria!

¹⁹Prendiamo in considerazione l’equazione di Einstein *nel vuoto* $R_{\mu\nu} = 0$ perché siamo interessati alla soluzione *al di fuori* di un corpo sferico.

²⁰Esiste un risultato per dimostrarne l’unicità, noto come Teorema di Birkhoff; per ulteriori dettagli, consultare [5].

3.2.2 Singolarità e buchi neri

Dall'espressione trovata (3.8) per ds^2 , si nota che ci sono dei problemi per $r = 0$ e per $r = \frac{2GM}{c^2}$.

Prima di esaminare entrambi i casi, facciamo la seguente osservazione: i coefficienti della metrica sono quantità dipendenti dalle coordinate scelte; inoltre, la curvatura è espressa dal tensore di Riemann, che però, essendo un tensore (e quindi le sue componenti dipendono dalle coordinate) è difficile dire quando “va all'infinito”. Però, a partire dal tensore di Riemann, possiamo costruire molte quantità scalari (basta fare uso della contrazione), e sappiamo dire quando esse “vanno all'infinito”. Il caso più semplice è quello della curvatura scalare $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, ma anche altri come $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$, e così via. Se uno tra questi scalari (non necessariamente tutti) tende all'infinito quando ci avviciniamo ad un dato punto, possiamo considerare quel punto una singolarità per la curvatura, e quindi per la metrica²¹.

- Il caso $r = 0$ costituisce una *vera* singolarità per la metrica: è infatti possibile vedere che $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx \frac{1}{r^6}$. Tuttavia, abbiamo che la soluzione trovata sicuramente *non* vale per $r = 0$, dato che è stata ottenuta risolvendo le equazioni di Einstein *nel vuoto* (invece, per $r = 0$ non ci troviamo nel vuoto, bensì all'interno del corpo di massa M che genera il campo gravitazionale!).
- La singolarità che si ottiene per $r = \frac{2GM}{c^2}$ è solo *apparente*: scegliendo un altro sistema di coordinate (ovvero, utilizzando un'altra carta locale), è possibile vedere che tale singolarità “scompare”.

Vale la pena osservare che, generalmente, anche in quest'ultimo caso ($r = \frac{2GM}{c^2}$) ci si trova ampiamente all'interno del corpo che genera il campo gravitazionale; quindi, la soluzione trovata *non* è valida!

La distanza $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ è detta *raggio di Schwarzschild*²² (o *raggio gravitazionale*).

Esempio 3.2. Per il Sole, abbiamo $r_S \approx 3$ km, mentre il raggio del Sole è di circa 7×10^5 km.

Nel caso della Terra, abbiamo $r_S \approx 9$ mm, mentre il raggio della Terra è di circa 6400 km.

²¹Non è una condizione necessaria, ma è sufficiente.

²²È un raggio caratteristico associato ad ogni corpo di massa M , direttamente proporzionale alla sua massa.

Esistono però degli oggetti il cui raggio è minore rispetto a quello di Schwarzschild: i buchi neri.

Il significato fisico del raggio gravitazionale $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ presente nella metrica di Schwarzschild fu compreso pienamente solo molto tempo dopo la scoperta della suddetta metrica.

La superficie sferica di raggio r_S è detta *orizzonte degli eventi* e costituisce un limite invalicabile per la materia e la luce che si trovano al suo interno: esse *non* possono uscirne²³. Ma allora “esistono corpi contenuti completamente all’interno del proprio orizzonte degli eventi?”.

La risposta è affermativa (Oppenheimer, Snyder, 1939) e tali corpi si chiamano *buchi neri*, proprio perché non emettono luce. Una stella sufficientemente massiccia, terminato l’idrogeno che ne costituisce il carburante nucleare, muore, cioè entra in una fase complessa caratterizzata da numerose trasformazioni. Nell’ultima fase, durante il collasso gravitazionale, se la sua massa è sufficientemente grande, la materia della stella viene a trovarsi all’interno dell’orizzonte degli eventi e nasce così un buco nero²⁴.

Infine, avendo l’espressione esplicita della metrica ds^2 , si determina la connessione di Levi-Civita ∇ e si ricavano così le geodetiche; quindi

Esempio 3.3. *È possibile, ad esempio, determinare l’orbita di un pianeta²⁵ attorno al Sole (essa è una geodetica). Si scopre allora che l’orbita non è esattamente un’ellisse avente il Sole in uno dei due fuochi (come previsto dalla teoria di Newton)!*

I dati osservativi confermarono l’esattezza della teoria di Einstein, e non quella di Newton.

²³La materia e luce possono solo entrare all’interno dell’orizzonte degli eventi senza però più uscirne!

²⁴I buchi neri possono essere ruotanti e dotati di campo elettrico e magnetico, per cui le loro metriche risultano più complesse di quella di Schwarzschild. Inoltre, raggiungendosi densità enormi, in un buco nero la meccanica quantistica (che descrive il comportamento delle particelle), diventa non più trascurabile e l’equazione di campo di Einstein non più sufficiente a descrivere la realtà delle cose. Addirittura, a causa degli effetti quantistici, un buco nero dovrebbe emettere (Hawking, 1974), anche se lentamente, materia ed energia.

²⁵Possibilmente, prendiamo in considerazione un pianeta di massa piccola rispetto a quella del Sole perché, nel ricavare la metrica di Schwarzschild, abbiamo supposto che all’esterno del corpo ci fosse il vuoto. Tipica è la scelta del Sole come corpo che produce il campo gravitazionale, e Mercurio.

Bibliografia

- [1] P. G. Fré, (2018), *A Conceptual History of Space and Symmetry. From Plato to the Superworld*, Springer Nature Switzerland AG

- [2] M. Abate, F. Tovena, (2012), *Curves and Surfaces*, Springer-Verlag Italia

- [3] M. Abate, F. Tovena, (2011), *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag Italia

- [4] A. M. Naveira, (2005), *The Riemann Curvature Through History*,
<http://www.rac.es/ficheros/doc/00175.pdf>

- [5] S. M. Carroll, (2004), *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*, Pearson Education, San Francisco

- [6] A. Amadori, L. Lussardi, (2010), *Relatività Generale*,
<https://www.matematicamente.it/staticfiles/relativita/AmadoriLussardi-relativita-cap4.pdf>