

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

TESI DI LAUREA TRIENNALE IN
INGEGNERIA MECCANICA E MECCATRONICA
CURRICULUM MECCANICO

ANALISI TRIDIMENSIONALE AGLI ELEMENTI FINITI DI UNA TRAVE CON SEZIONE AD 'I' SOGGETTA A FLESSIONE E TORSIONE

Relatore: Ch.mo Prof. Marino Quaresimin

Correlatore: Ing. Paolo Andrea Carraro

Laureando: Luca Pasqualini

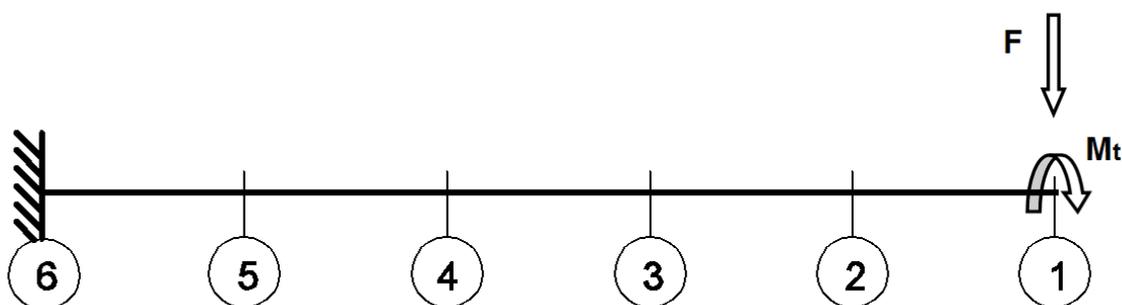
ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Sommario

Lo scopo di questa tesi è quello di analizzare, agli elementi finiti, una trave incastrata di lunghezza L con sezione ad 'I', soggetta prima ad una sollecitazione di flessione e poi ad una di torsione.

Per sei sezioni equispaziate lungo la lunghezza della trave si sono riportati, per una determinata condizione di carico e di vincolo:

- i contour plot sull'intera sezione delle componenti tensionali significative;
- i grafici relativi all'andamento delle stesse tensioni lungo i rispettivi path, confrontandole con i risultati delle formulazioni analitiche note;
- commento dei risultati ottenuti.



Per entrambe le sollecitazioni si sono confrontati inoltre i risultati delle prima due sezioni, ottenuti variando le condizioni di carico, e delle ultime due variando le condizioni di vincolo.

In particolare per quanto riguarda l'analisi della flessione si sono seguiti tre metodi differenti:

- 1° metodo: ripartizione carico sullo spigolo superiore della sezione e vincoli ALL DOF;
- 2° metodo: ripartizione carico sui bordi dell'anima e sui bordi superiore e inferiore delle ali vincolando la sezione 6 lungo y e z , ed un solo nodo lungo x ;
- 3° metodo: ripartizione come 2° metodo e vincolo sezione 6 lungo z , bordo inferiore dell'ala inferiore anche lungo y ed un solo nodo lungo x .

Per quanto riguarda l'analisi della torsione si sono seguiti due metodi differenti:

- 1° metodo: ripartizione carico sui bordi superiore e inferiore delle ali vincolando ALL DOF;
- 2° metodo: ripartizione carico sui bordi dell'anima e sui bordi superiore e inferiore delle ali vincolando la sezione 6 lungo x , bordo inferiore dell'ala inferiore anche lungo y e tre nodi lungo z .

Indice

1.	Analisi.....	7
1.1	Descrizione del componente.....	7
1.2	Metodo degli elementi finiti.....	8
1.3	Software ANSYS.....	8
1.4	Fase di Preprocessor.....	8
1.5	Fase di Solution e Postprocessor.....	11
2.	Ricapitolazione della teoria e delle formule utilizzate nell'analisi.....	13
2.1	Momento geometrico del primo ordine.....	13
2.2	Momento geometrico del secondo ordine.....	14
2.3	Teorema del trasporto (Teorema di Steiner).....	14
2.4	Equazione di Navier.....	15
2.5	Equazione di Jourawskj.....	18
2.6	Torsione in una trave a sezione non circolare.....	20
3.	Presentazione e analisi dei risultati: la flessione.....	23
3.1	Path verticale.....	23
3.2	Path orizzontale.....	41
4.	Presentazione e analisi dei risultati: la torsione.....	51
4.1	Path verticale.....	51
4.2	Path orizzontale.....	69
5.	Confronto flessione.....	79
5.1	Confronto modalità di ripartizione del carico.....	79
5.2	Confronto modalità di applicazione dei vincoli.....	87

6.	Confronto torsione.....	99
6.1	Confronto modalità di ripartizione del carico.....	99
6.2	Confronto modalità di applicazione dei vinco.....	107
7.	Conclusioni.....	115
8.	Bibliografia.....	117

1. Analisi

1.1 Descrizione del componente

Il componente preso in esame per questa tesi è una trave con sezione ad 'I' le cui dimensioni sono rappresentate in fig. 1.1:

Lunghezza della trave: $L = 700 \text{ mm}$

Altezza sezione: $B = 150 \text{ mm}$

Larghezza sezione: $A = 130 \text{ mm}$

Spessore ali e anima: $t = 8 \text{ mm}$

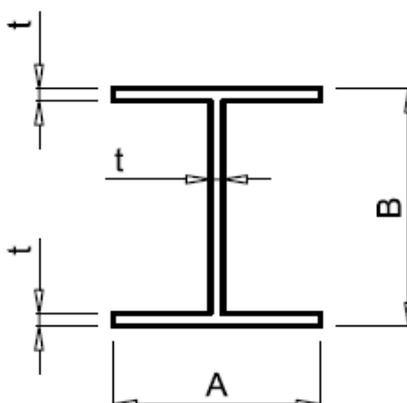


Fig. 1.1 Geometria del componente

1.2 Metodo degli elementi finiti (FEM)

Il metodo agli elementi finiti, detto anche FEM, è un metodo di tipo numerico che sta alla base di numerosi codici di calcolo. Viene usato per risolvere in modo approssimato problemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali riducendo queste ultime ad un sistema di equazioni algebriche. Questo metodo discretizza il dominio continuo di partenza in un dominio discreto, detto *mesh*. Per fare ciò usano delle primitive, che sono gli elementi finiti, per esempio di forma quadrilatera.

Su ciascun elemento dotato di questa forma elementare, la soluzione del problema è espressa dalla combinazione lineare di funzioni dette *funzioni forma* o *shape functions*. Maggiore è il numero degli elementi in cui il dominio viene diviso, maggiore è l'accuratezza del risultato finale.

1.3 Software Ansys

Il programma FEM (Finite Element Method) usato per analizzare le sei sezioni della trave è Ansys. Tale codice prevede di suddividere l'analisi del componente in tre fasi fondamentali che sono:

- *preprocessor*: prevede la scelta del tipo di elemento e della legge costitutiva da adottare per descrivere il comportamento del materiale. È la fase in cui si effettua la realizzazione fisica del modello, la sua discretizzazione, dove si applicano i carichi e le condizioni di vincolo;
- *solution*: fase in cui si procede con la soluzione del modello;
- *postprocessor*: prevede la visualizzazione e la raccolta dei risultati.

Di seguito verrà descritto il procedimento usato per l'analisi del componente con Ansys.

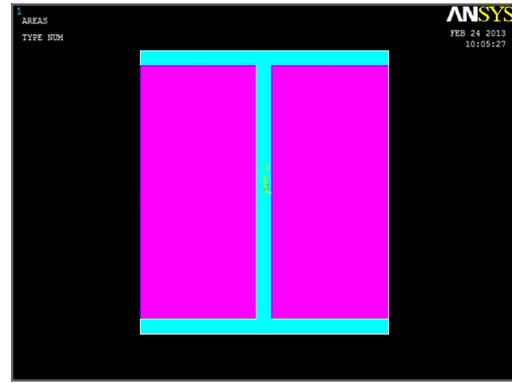
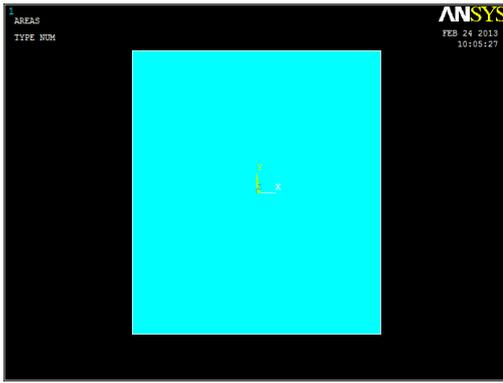
1.4 Fase di Preprocessor

Per prima cosa si definisce il tipo di elemento usato selezionando l'opzione *Solid-8node82*.

Successivamente si crea la geometria operando con aree rettangolari inserendo prima le coordinate dei vertici di una rettangolo avente lati A e B centrato nell'origine, poi quelle dei rettangoli da sottrarre a destra e sinistra dell'origine.

A questo punto il modello geometrico è finito e si procede con il definire le proprietà del materiale: *isotropo in campo lineare elastico* con valore del coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$ e modulo di Young $E = 206000$ MPa.

Vengono riportate di seguito le figure relative ad alcuni di questi passi.



A questo punto si procede con la creazione della mesh in modo manuale (quindi più preciso) usando la modalità *mapped*. Gli elementi risulteranno più fitti vicino all'intersezione tra anima ed ali in quanto è la zona di maggiore interesse.

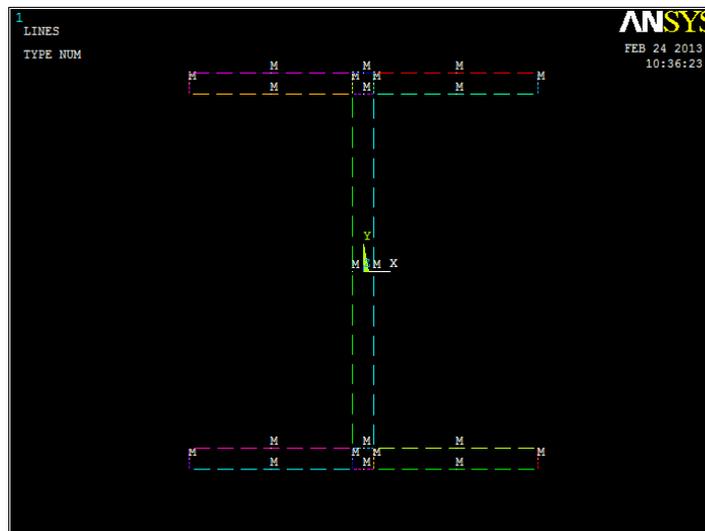


Fig. 1.3 Elementi della mesh

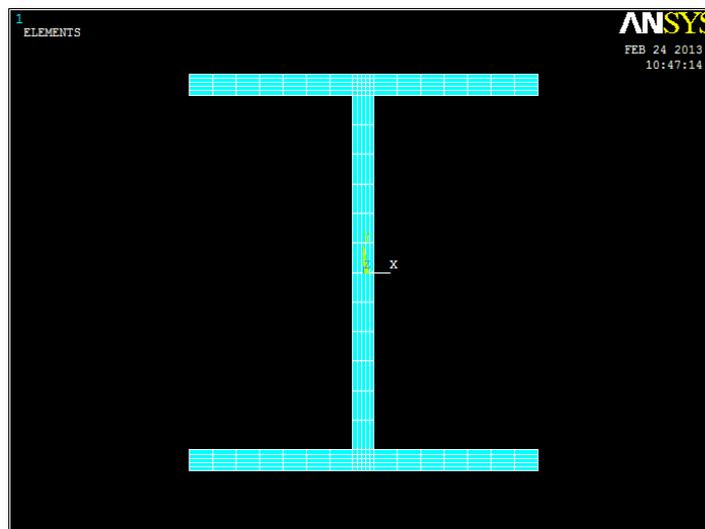


Fig. 1.4 Mesh del componente

Prima di estrarre la sezione creata si definisce il tipo di elemento usato selezionando l'opzione *Add-Brick20node186*, si definisce il numero di elementi in cui verrà suddivisa la lunghezza tramite *Element Extrude Options-No.Element Division* ed estrudo la sezione con l'opzione *Extrude-Areas*.

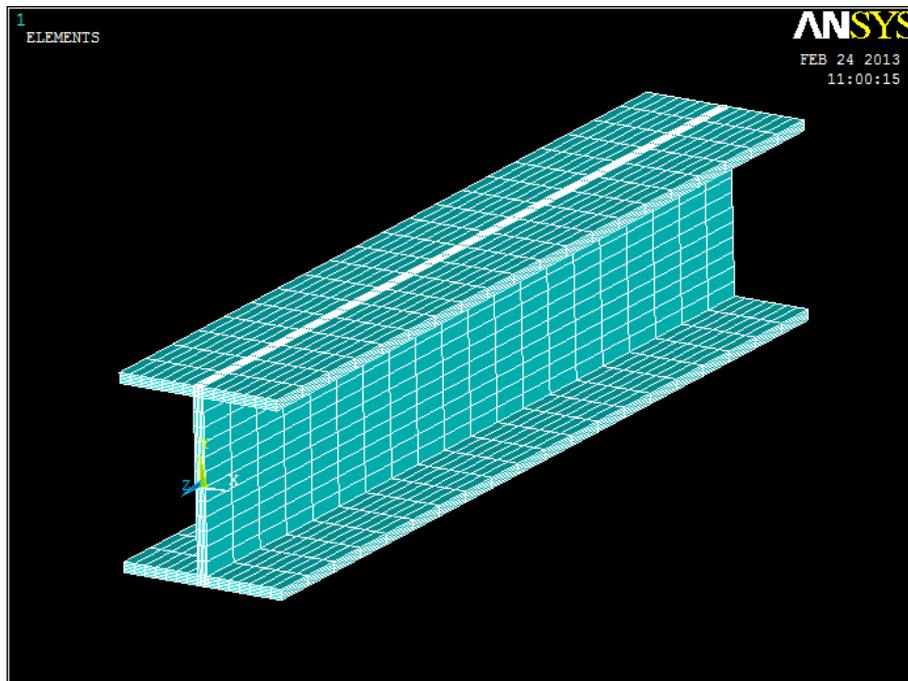


Fig. 1.5 Sezione estrusa

L'ultimo passo di questa fase è l'applicazione dei vincoli selezionando l'opzione *Define loads-Displacement* e dei carichi tramite *Define loads-Force/Moment*.



a

b

Figg. 1.6a-b Applicazione vincoli e carichi rispettivamente

1.5 Fase di Solution e Postprocessor

A questo punto si lancia la soluzione dell'elemento usando l'opzione *Solve* e specificando *Current Load Step*. Per visualizzare il risultato della soluzione devo prima specificare di quale sezione mi interessano determinati risultati e poi passare nella sezione di postprocessor selezionando *Plot result* e indicando che siamo interessati al risultato dello stress nella direzione z ad esempio. Nella figura seguente è riportata una soluzione dell'elemento.

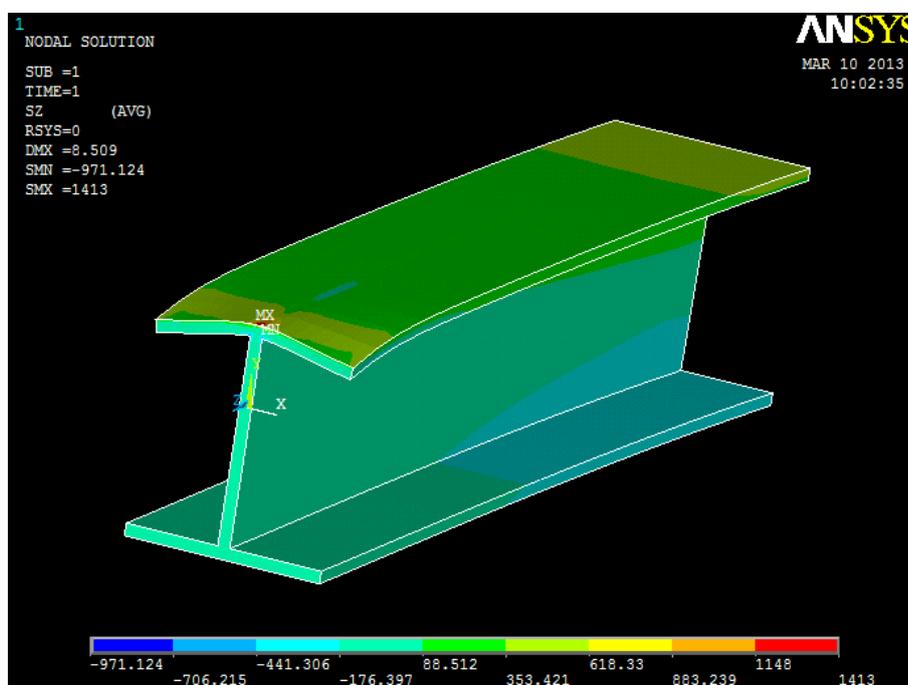


Fig. 1.7 Soluzione dell'elemento

A questo punto si può procedere con la valutazione dell'andamento delle tensioni su una zona di nostro interesse usando l'operazione di *Path* e definendo tale path selezionando ordinatamente, uno ad uno, i nodi che compongono il particolare percorso che vogliamo studiare. Usando poi la modalità *Plot path item* si può visualizzare l'elenco relativo all'andamento delle tensioni che verrà rappresentato in un grafico servendoci del software excel. Nello stesso grafico verrà sovrapposto l'andamento delle tensioni dato dalle formule analitiche e commentata tale comparazione.

2. Ricapitolazione della teoria e delle formule utilizzate nell'analisi

In questo capitolo verranno affrontati alcuni cenni di geometria delle aree e fatta una veloce panoramica sulle formule teoriche che saranno utilizzate per l'analisi delle tensioni su ciascuna sezione della trave.

2.1 Momento geometrico del primo ordine

Data una generica sezione di qualsiasi forma, e detti y e z due assi tra di loro ortogonali, i momenti geometrici del primo ordine rappresentano delle proprietà geometriche della sezione definite come:

$$S_{zz} = \int_A y \, dA \qquad S_{yy} = \int_A z \, dA$$

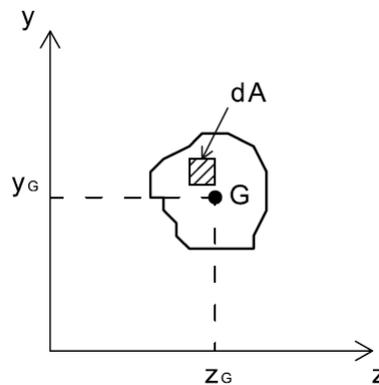


Fig. 2.1 Generica sezione

Le precedenti relazioni possono essere scritte anche come:

$$S_{zz} = A \left(\frac{1}{A} \int_A y \, dA \right) = A y_G \qquad S_{yy} = A \left(\frac{1}{A} \int_A z \, dA \right) = A z_G$$

dove:

$$y_G = \frac{1}{A} \int_A y \, dA \qquad z_G = \frac{1}{A} \int_A z \, dA$$

rappresentano le coordinate del baricentro della sezione rispetto all'origine del sistema di assi cartesiani scelto.

I momenti statici del primo ordine possono quindi essere scritti come prodotto tra l'area della sezione e le coordinate del baricentro della sezione.

2.2 Momento geometrico del secondo ordine

Data una generica sezione di qualsiasi forma, e detti y e z due assi tra di loro ortogonali, i momenti geometrici del secondo ordine rappresentano delle proprietà geometriche della sezione definite come:

$$J_{zz} = \int_A y^2 dA \qquad J_{yy} = \int_A z^2 dA \qquad J_P = \int_A r^2 dA = J_{zz} + J_{yy}$$

In aggiunta esiste anche un momento geometrico misto (o centrifugo) definito come:

$$J_{zy} = \int_A z \cdot y dA$$

Dalle definizioni appare chiaro che mentre i momenti J_{zz} , J_{yy} e J_P (momento polare) sono sempre positivi, il momento J_{zy} può essere positivo, negativo o nullo. Esso è nullo quando la sezione considerata presenta almeno un asse di simmetria geometrica.

2.3 Teorema del trasporto (Steiner)

Si consideri una generica sezione di area A . Per tale sezione il momento geometrico del secondo ordine rispetto ad un asse generico xx è uguale al momento valutato rispetto all'asse baricentrico zz della sezione sommato all'area della sezione moltiplicata per la distanza al quadrato tra i due assi:

$$J_{xx} = J_{zz} + A d_{xy}^2$$

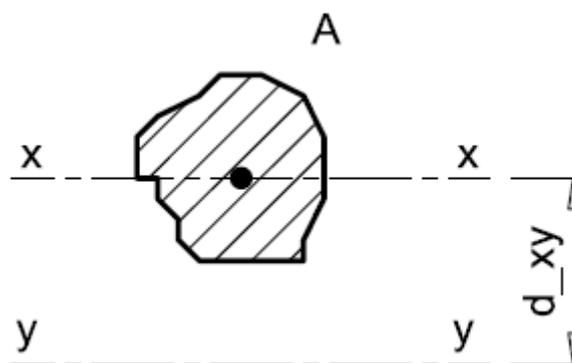


Fig. 2.2 Generica sezione

2.4 Equazione di Navier

Si consideri una generica trave soggetta a momento flettente. Consideriamo inoltre un concio infinitesimo di trave (di lunghezza $2 dx$) e adottiamo l'ipotesi che sezioni inizialmente piane, rimangano piane anche a deformazione avvenuta. Per poter rispettare questa ipotesi, le sezioni si possono deformare solamente "ruotando" rispetto ad un particolare asse che chiamiamo *asse neutro*, la cui posizione è per il momento ignota.

Supponiamo che il momento flettente applicato sia tale da far subire un allargamento alle fibre al di sotto dell'asse neutro, mentre le fibre al di sopra dell'asse neutro, perché compresse, si accorciano. Indichiamo con $abcd$ la configurazione infinitesima del concio e con $a'b'c'd'$ quella deformata. Essendo l'elemento considerato di lunghezza infinitesima è possibile trascurare nell'analisi la curvatura da esso subita durante la deformazione. Conseguentemente i tratti $c'd'$ e $a'b'$ sono rappresentati come dei segmenti rettilinei.

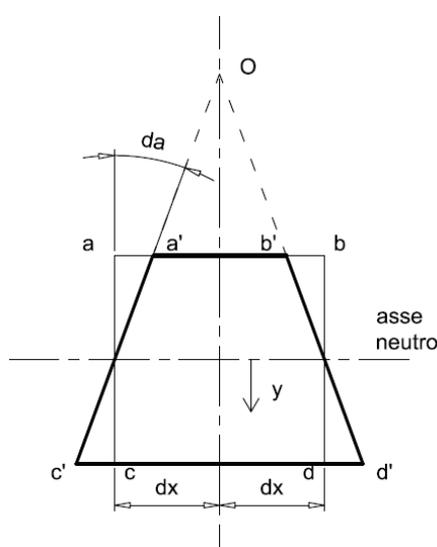


Fig. 2.3 Concio infinitesimo di trave

Le fibre che si trovano in corrispondenza dell'asse neutro rimangono al contrario indeformate.

Indichiamo con y la generica distanza dall'asse neutro, positivo se al di sopra dell'asse neutro, negativo al di sotto.

Con riferimento alla notazione riportata in figura 2.3, è chiaro che la generica fibra di lunghezza iniziale $2 dx$, subisce una variazione di lunghezza pari a: $-2 y da$.

La deformazione della fibra sarà dunque:

$$\varepsilon = \frac{-2 y da}{2 dx} = -y \frac{da}{dx}$$

e conseguentemente la tensione risultante sarà:

$$\sigma = E \varepsilon = -E y \frac{da}{dx}.$$

Ora, essendo il concio soggetto a un puro momento flettente (assenza di sforzo normale), dovrà essere:

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad \text{ovvero} \quad \int_A -E y \frac{da}{dx} dA = 0$$

Si noti come $\frac{da}{dx}$ sia una costante sull'intera sezione (sezioni piane rimangono infatti piane) ed è ragionevole assumere che per i materiali da costruzione tradizionali il modulo elastico sia uguale sia a trazione che a compressione (e quindi costante sull'intera sezione).

L'equazione precedente restituisce quindi:

$$\int_A y dA = 0$$

questo ci permette di concludere che l'asse neutro (che coincide con l'origine per y) passa per il baricentro della sezione.

Per equilibrio della generica sezione si ha inoltre che:

$$\int_A \sigma y dA = M$$

dove M è il momento flettente agente. Sostituendo l'espressione per σ in questa equazione si ha:

$$M = \int_A -E y \frac{da}{dx} y dA = -E \frac{da}{dx} \int_A y^2 dA = -E \frac{da}{dx} J_{xx}$$

dove $J_{xx} = \int_A y^2 dA$ è il momento geometrico di secondo ordine della sezione.

Infine sostituendo $-E \frac{da}{dx} = \frac{\sigma}{y}$ si ottiene: $M = \frac{\sigma J_{xx}}{y}$

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} y$$

L'equazione appena ottenuta prende il nome di equazione di Navier e permette di concludere che le tensioni dovute a flessione σ , che sono delle tensioni normali alla superficie:

- sono nulle sull'asse baricentrico;
- sono massime in modulo sulle superfici della trave più distanti dall'asse baricentrico;
- cambiano segno al di sopra o al di sotto dell'asse baricentrico.

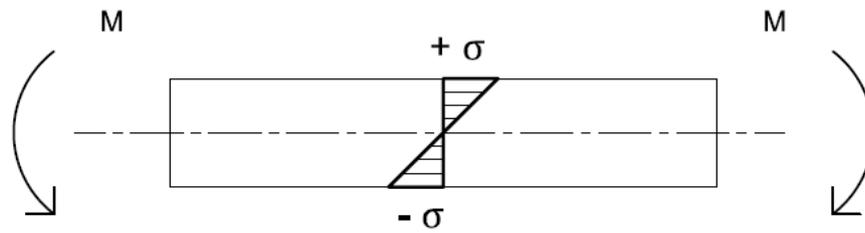


Fig. 2.4 Andamento delle tensioni dovute alla flessione

Di norma in progettazione si è interessati al valore massimo di tali tensioni:

$$\sigma_{MAX} = \frac{M}{J_{xx}} y_{MAX} = \frac{M_f}{W_f}$$

dove $W_f = \frac{J_{xx}}{y_{MAX}}$ è detto modulo di resistenza a flessione.

2.5 Equazione di Jourawskj

Si consideri una condizione in cui sia presente non solo momento flettente puro, ma anche una sollecitazione di taglio. L'esistenza del taglio è sempre associata ad una variazione del momento flettente lungo la trave. Si consideri inoltre inizialmente, per semplicità, che la trave sia dotata di una sezione rettangolare. Si supponga che il momento flettente sia tale da tendere le fibre al di sopra dell'asse neutro, e che il momento risulti crescente all'aumentare della coordinata x . Consideriamo quindi un concio di trave e isoliamo al suo interno un elemento infinitesimo di lunghezza dx e altezza $h/2 - y_0$, come in fig. 2.5.

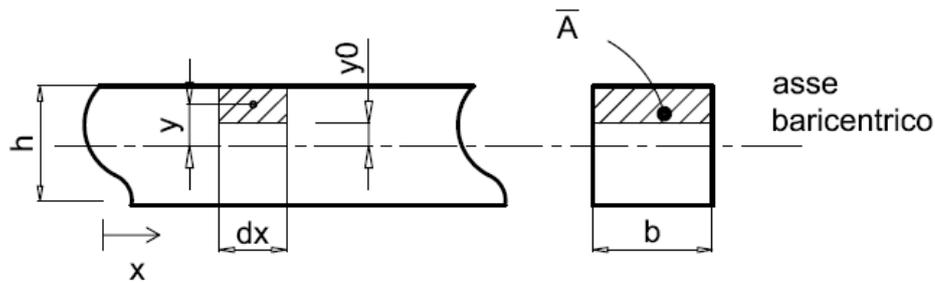


Fig. 2.5 Concio di trave

Indichiamo con y la generica distanza tra il baricentro dell'elemento considerato e l'asse baricentrico della sezione.

Per effetto della variazione del momento flettente, che indichiamo con dM , le facce di sinistra e di destra dell'elemento infinitesimo isolato sono soggette a delle tensioni normali σ di diversa intensità. In particolare:

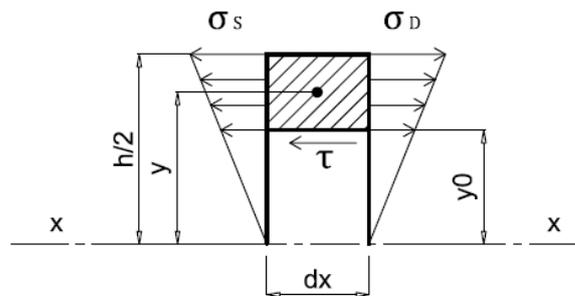


Fig. 2.6 Elemento infinitesimo del concio di trave

$$\sigma_S = \frac{M y}{J_{zz}} \quad e \quad \sigma_D = \frac{(M + dM) y}{J_{zz}}$$

rispettivamente a sinistra e a destra. Esse danno luogo alle seguenti forze sull'elemento:

$$F_S = \int_{\bar{A}} \sigma_S d\bar{A} = \int_{\bar{A}} \frac{M y}{J_{zz}} d\bar{A} \quad e \quad F_D = \int_{\bar{A}} \sigma_D d\bar{A} = \int_{\bar{A}} \frac{(M + dM) y}{J_{zz}} d\bar{A}$$

dove \bar{A} è la superficie dell'elemento su cui agiscono σ_S e σ_D .

È chiaro che se fossero presenti solamente le componenti di tensione σ dovute alla flessione l'elemento non sarebbe in equilibrio alla traslazione, in quanto vi sarebbe una forza in eccesso verso destra pari a:

$$\Delta F = F_D - F_S = \int_{\bar{A}} \frac{dM y}{J_{zz}} d\bar{A}$$

Poiché $T = \frac{dM}{dx} \rightarrow dM = T dx$, dove T è lo sforzo di taglio. Sostituendo si ha dunque:

$$\Delta F = \int_{\bar{A}} \frac{T dx y}{J_{zz}} d\bar{A} = \frac{T dx}{J_{zz}} \int_{\bar{A}} y d\bar{A}$$

È necessario quindi, per garantire l'equilibrio dell'elemento, che sulla sua faccia inferiore nascano delle componenti di tensione, parallele alla faccia stessa. Esse sono delle componenti di tensione tangenziali, e si indicano con la lettera greca τ_{ij} .

Come si può notare le τ_{ij} sono caratterizzate da doppio pedice:

- il primo pedice indica la normale al piano dove agiscono le tensioni;
- il secondo pedice indica la direzione delle tensioni.

Nel caso in esame si avranno quindi delle τ_{yx} .

È necessario, a questo punto, fare un'ipotesi molto importante, ovvero si assume che le tensioni di taglio siano uniformemente distribuite su tutta la larghezza b . La loro risultante sarà quindi:

$$F_\tau = \tau_{yx} b dx$$

che dovrà uguagliare ΔF per equilibrio. Quindi:

$$\frac{T dx}{J_{zz}} \int_{\bar{A}} y d\bar{A} = \tau_{yx} b dx \quad \rightarrow \quad \tau_{yx} = \frac{T \int_{\bar{A}} y d\bar{A}}{J_{zz} b}$$

$$\tau_{yx} = \frac{T S_{zz}}{J_{zz} b}$$

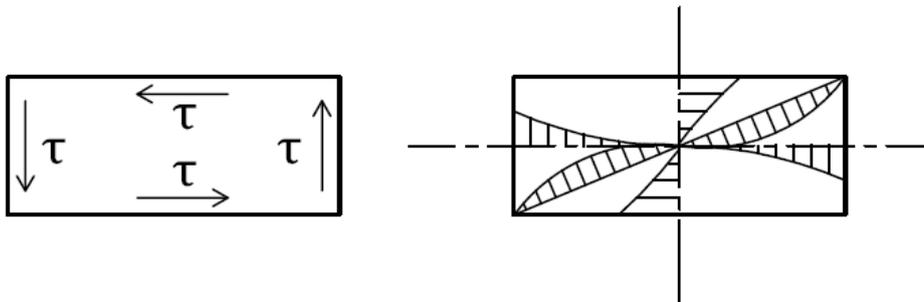
questa espressione prende il nome di equazione di Jourawsky.

S_{zz} rappresenta il momento statico del primo ordine dell'area dell'elemento considerato, ovvero \bar{A} .

2.6 Torsione in una trave a sezione non circolare

Il caso di una trave a sezione non circolare sottoposta a momento torcente è notevolmente più complicato rispetto al caso di una trave a sezione circolare e in generale non esiste una soluzione esatta in forma chiusa. Il problema è stato ampiamente studiato da *Saint-Venant* e risolto utilizzando strumenti matematici estremamente sofisticati (come sviluppi in serie infiniti). In seguito *Lord Kelvin* arrivò formalmente alle stesse equazioni di *Saint-Venant* utilizzando l'analogia idrodinamica, osservando che le linee di flusso delle tensioni dovute a torsione potevano essere interpretate anche come le linee di flusso di un fluido posto in rotazione all'interno della sezione.

Considerando una sezione rettangolare di base b e altezza t , la massima tensione di taglio τ_{max} dovuta alla sollecitazione di torsione M_t si manifesta in corrispondenza dei punti, appartenenti al perimetro della sezione, che si trovano più vicini al centro della sezione, mentre sugli spigoli la tensione è nulla essendo nulla la velocità del fluido.



In generale si può scrivere:

$$\tau_{max} = \beta \frac{M_t}{b t^2}$$

dove il valore della costante moltiplicativa β dipende dal rapporto tra i lati del rettangolo, come mostrato in tabella 2.1.

b/h	∞	10	5	3	2.5	2	1.5	1
β	3	3.2	3.44	3.74	3.86	4.06	4.33	4.80

Tab. 2.1 Valori del coefficiente β in funzione del rapporto tra i lati del rettangolo

Se $b \gg t$ (rettangolo molto sottile) la sezione può essere considerata a parete sottile ottenendo $\beta = 3$, da cui:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{J_t} t$$

dove

$$J_t = \frac{1}{3} b t^3$$

è il momento d'inerzia polare.

Nel caso di sezioni composte da un numero discreto di rettangoli si avrà semplicemente:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{J_t} t_{i,max}$$

dove:

$$J_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L_i t_i^3$$

dove L è la lunghezza della linea media di ogni rettangolo che compone la sezione.

Dalla penultima equazione si evince che la tensione di taglio, dovuta alla sollecitazione di torsione, è massima nel rettangolo di spessore maggiore.

3. Presentazione e analisi dei risultati: la flessione

3.1 Path verticale

Confrontiamo i risultati ottenuti lungo il path verticale (percorso evidenziato in figura 3.1) per le varie sezioni. Per ognuna di esse sono riportati i grafici rappresentanti l'andamento delle tensioni significative e le relative immagini dei contour plot. Sull'asse verticale di ciascun grafico sono rappresentati i valori di tensione in MPa, mentre sull'asse orizzontale è rappresentata la distanza y in mm del punto dall'asse baricentrico.

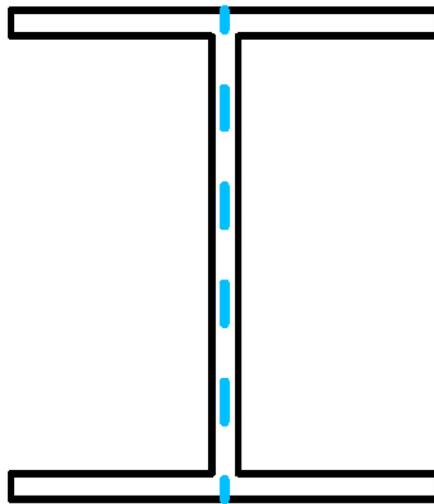
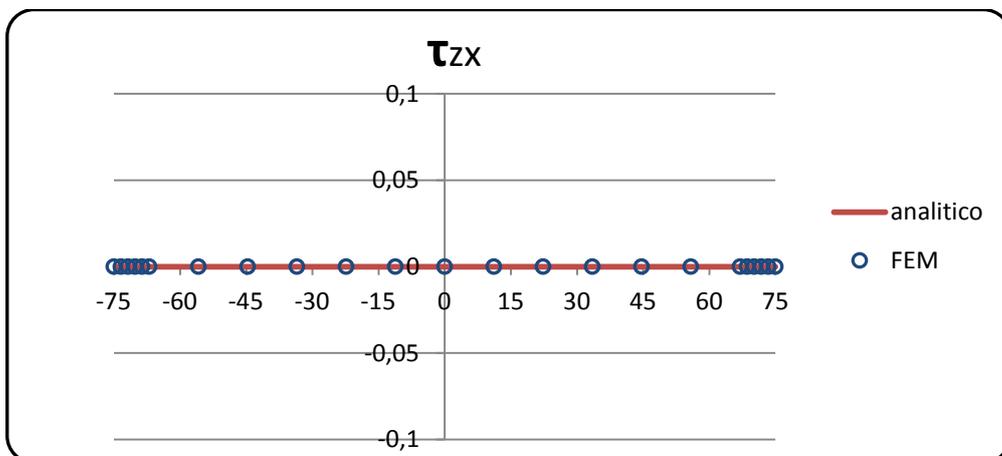
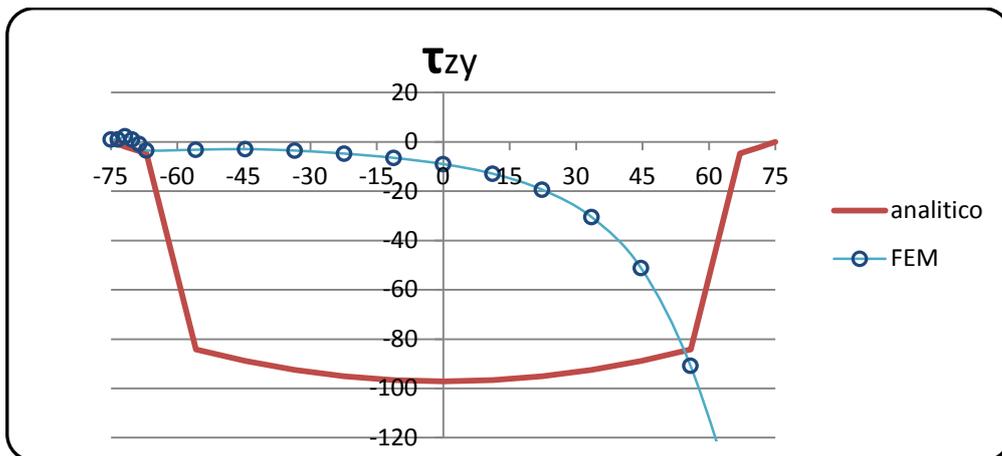
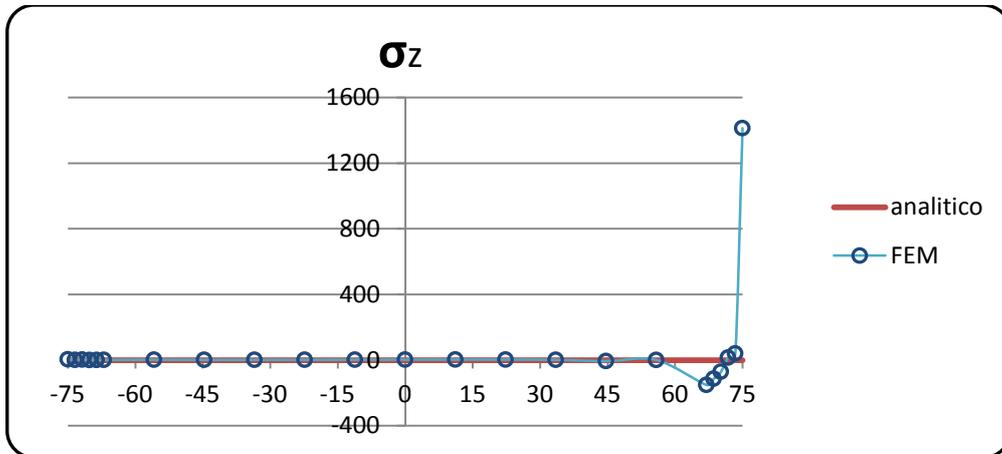
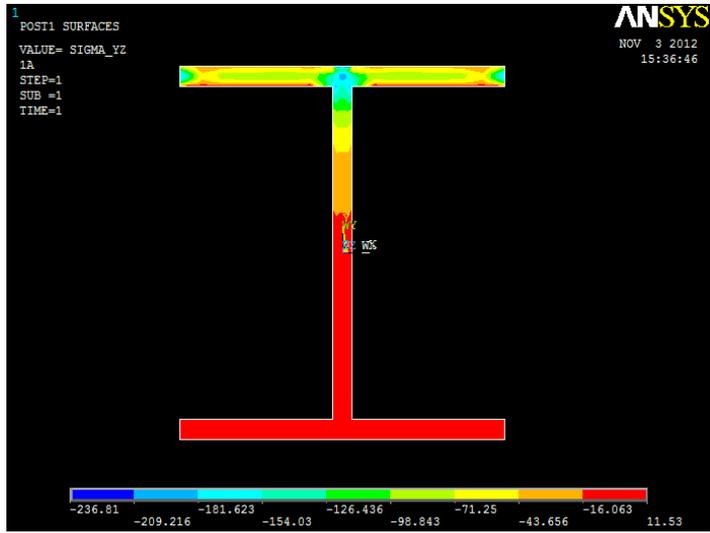


Fig. 3.1 Path verticale per la flessione

Sezione 1





La sezione 1 coincide con la faccia della trave sulla quale è stato applicato il carico allo spigolo superiore della sezione. Le formule analitiche che utilizziamo, come quella di Navier e di Jourawskj, possono essere utilizzate con una certa affidabilità solo in un punto abbastanza lontano da dove vengono applicati i carichi e i vincoli. Questa infatti è una delle condizioni sotto le quali le precedenti formule sono state ricavate. Vicino ai punti dove viene applicato un carico, sia esso concentrato o distribuito, si verificano infatti degli effetti locali che modificano la distribuzione delle tensioni, rendendola non più stimabile con queste formule analitiche. In questo caso, quindi, non ci troviamo in una zona ideale per applicare dette equazioni e perciò ci aspettiamo una diversa risposta per quanto riguarda i risultati analitici rispetto a quelli ottenuti con il FEM.

Dall'analisi analitica, fatta applicando la formula di Navier, le σ_z risultano tutte nulle anche nei punti del path che non si trovano sull'asse neutro in quanto la forza presenta braccio nullo e quindi non dà luogo a nessun momento flettente applicato.

L'analisi con il calcolatore conferma bene questo risultato: dal grafico e dal contour plot precedenti si può vedere che praticamente in ogni punto del path verticale la tensione registrata è inferiore di 5 MPa, ad eccezione del bordo superiore dove è applicata la forza infatti gli ultimi cinque nodi del path verticale hanno registrato tensioni che vanno da 100 a 1400 MPa, ma come detto possiamo imputare questa differenza agli effetti locali dovuti alla modalità di ripartizione del carico.

Abbiamo visto come, nelle prossimità dei bordi, il FEM non sia molto preciso a causa del fatto che le matrici di rigidità utilizzate per gli elementi solidi non sono esatte come quelle di un elemento trave, e vengono quindi commessi degli errori. In più i punti superiori del path verticale sono molto vicini ai nodi dove è stata applicata la forza, e questi effetti sono quindi così giustificati. Da una analisi precedente, dove era stata utilizzata una mesh meno fitta rispetto a quella utilizzata in questo momento, sono emersi risultati molto simili a questi, e questo dimostra come la mesh attuale, seppur decisamente più precisa, non porti ad un risultato significativamente migliore; non avrebbe quindi senso ripetere l'analisi con una mesh ancora più precisa di quella che è stata utilizzata.

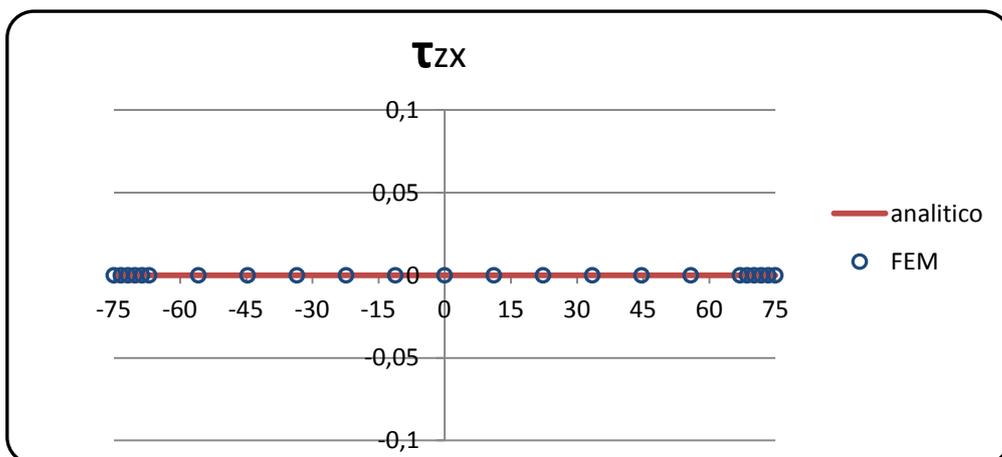
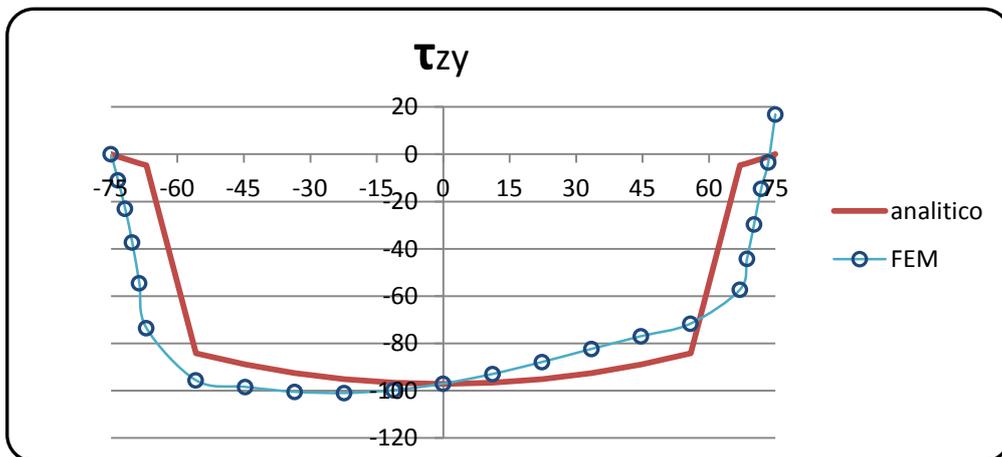
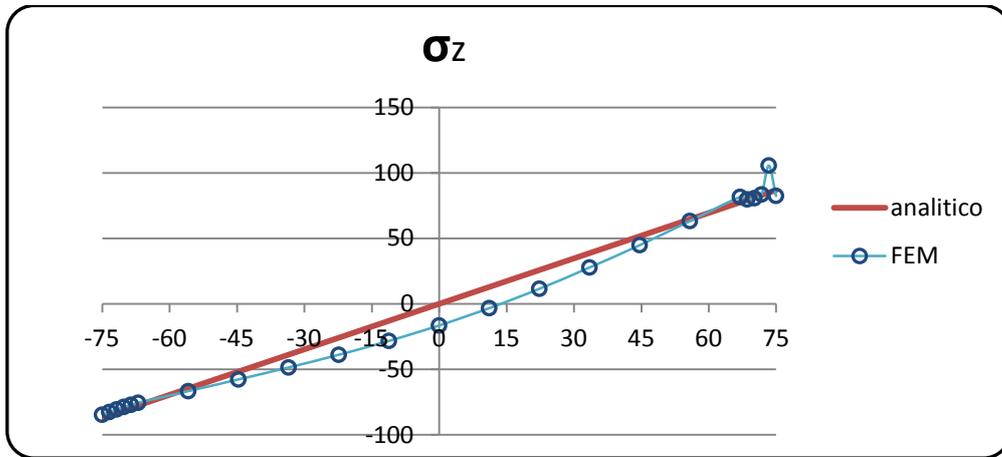
Dall'analisi delle τ_{zy} che si originano a causa del taglio ci si aspetta una discontinuità nel punto tra le "ali" superiore e inferiore e "l'anima" della trave, se utilizziamo la formula di Jourawskj per calcolarle. Il calcolo del momento statico infatti cambia passando dalla zona superiore a quella centrale fino poi a quella sottostante. Il grafico conferma infatti questa discontinuità nelle componenti tangenziali di tensione. Dall'analisi con il FEM invece questa discontinuità non viene rilevata e il modulo delle τ_{zy} ha un andamento che anche se non è lineare è comunque graduale senza discontinuità: notiamo che l'intensità aumenta progressivamente mano a mano che ci si avvicina al bordo superiore della trave dove è applicato il carico, mentre utilizzando Jourawskj avevamo ottenuto che le τ_{zy} hanno una maggiore intensità sull'anima e sulle ali non superano i 5 MPa. Bisogna anche sottolineare come ad esempio sull'anima siano registrati circa 70 MPa di differenza con i due metodi e come per tutta la lunghezza dell'anima i valori registrati siano nettamente diversi. Anche sull'ala superiore continuano le differenze, con il metodo analitico che ci suggerisce un andamento decrescente delle τ fino ad annullarsi al bordo superiore mentre il calcolatore evidenzia un andamento decisamente crescente (in modulo) delle tau verso il bordo superiore.

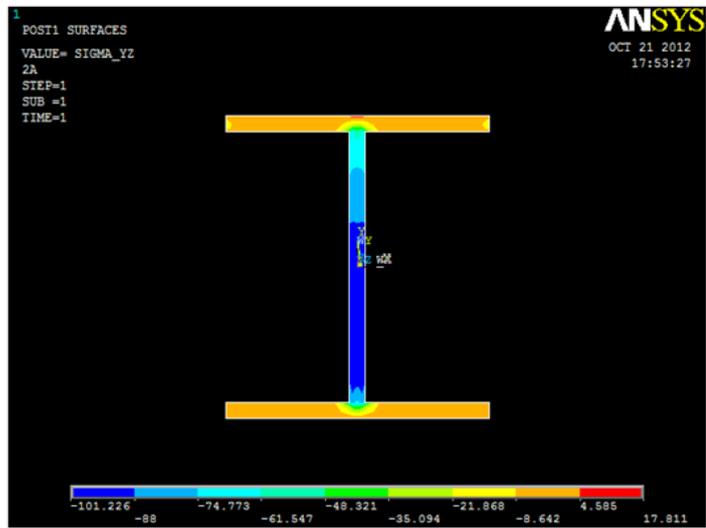
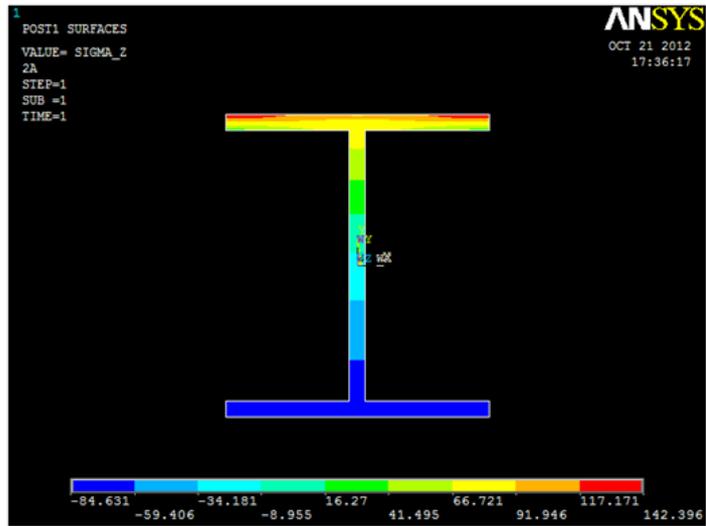
Dall'immagine del contour plot riguardante le τ_{zy} possiamo però vedere come queste ultime aumentino in modulo specialmente in tre zone ristrette situate nei due estremi superiori dell'ala e nell'intersezione tra ala

ed anima che presenta un aumento di intensità maggiore. Il path in esame infatti attraversa quest'ultima zona e registra infatti questo grande aumento in intensità.

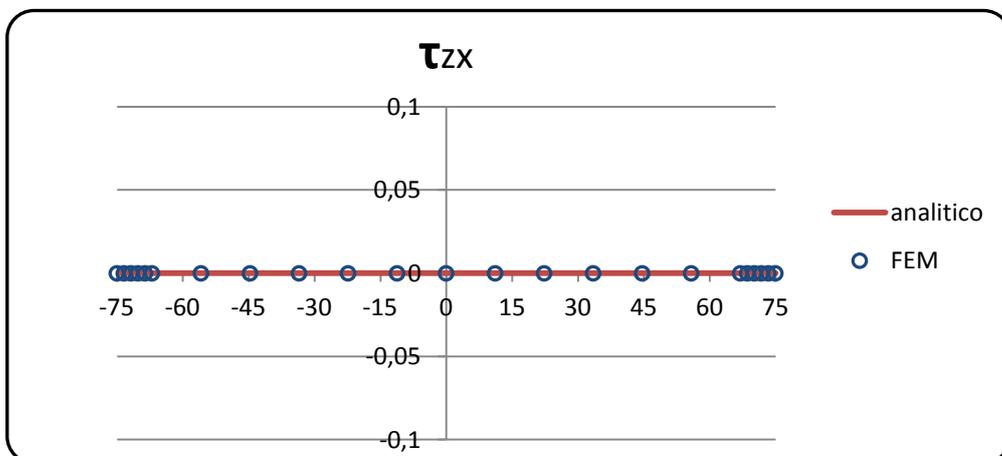
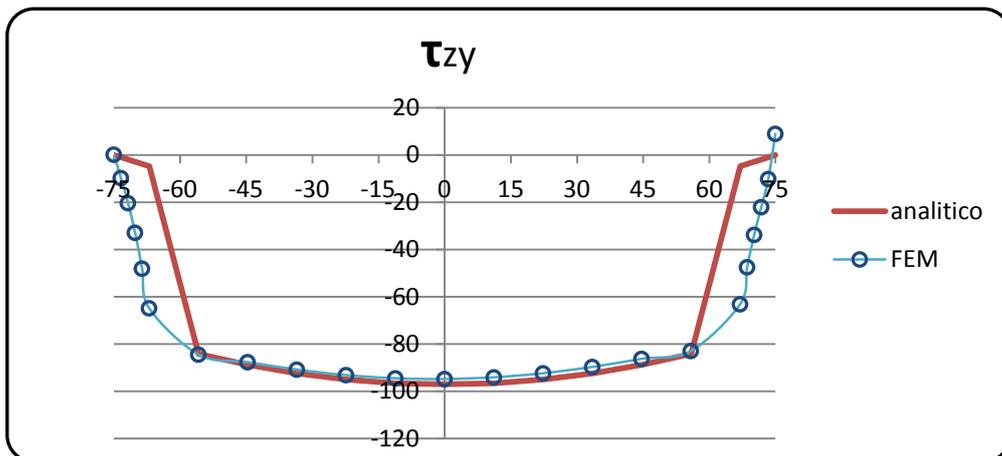
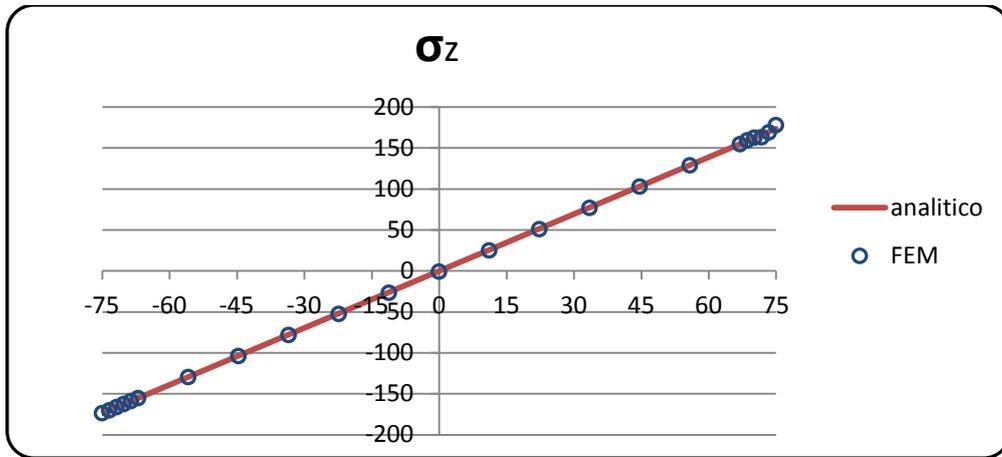
Sull'anima le τ_{zx} sono nulle secondo la teoria. Non ci sono infatti componenti di carico applicato lungo la direzione x . L'analisi con il FEM conferma quanto appena detto registrando valori di otto ordini di grandezza inferiori al MPa lungo questo path. Sulle ali invece è presente una componente lungo x delle tensioni tangenziali che si genera per equilibrare una componente lungo z di tensione come osservabile dall'immagine del relativo contour plot. Esse inoltre si concentrano ai bordi.

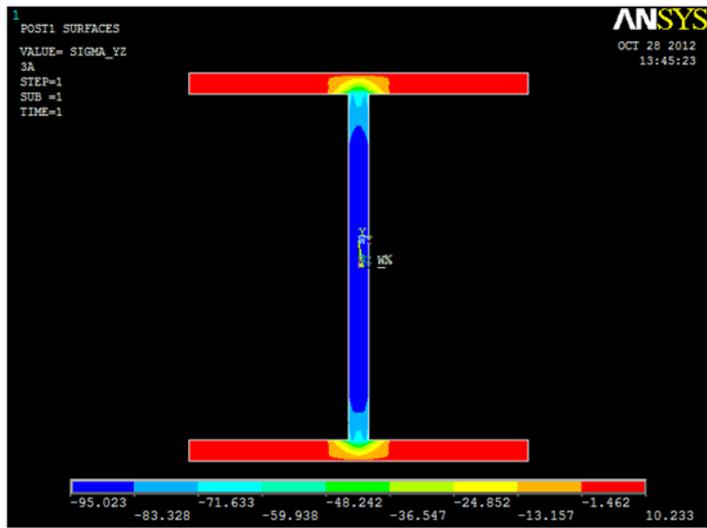
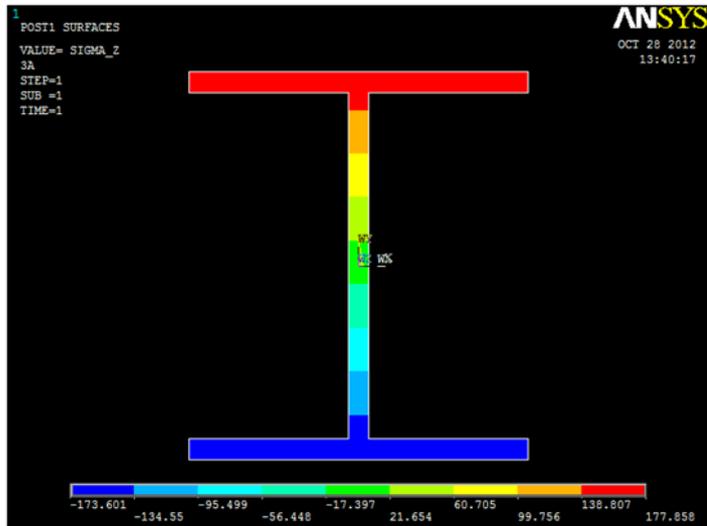
Sezione 2



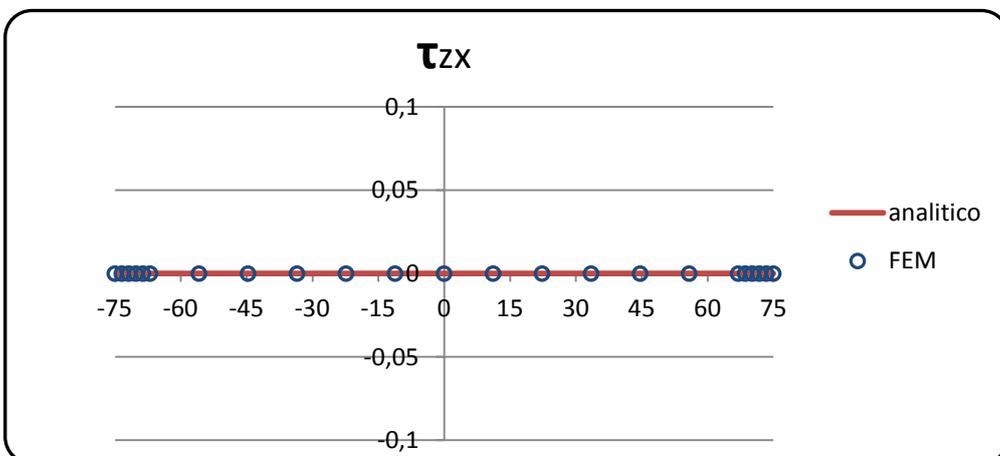
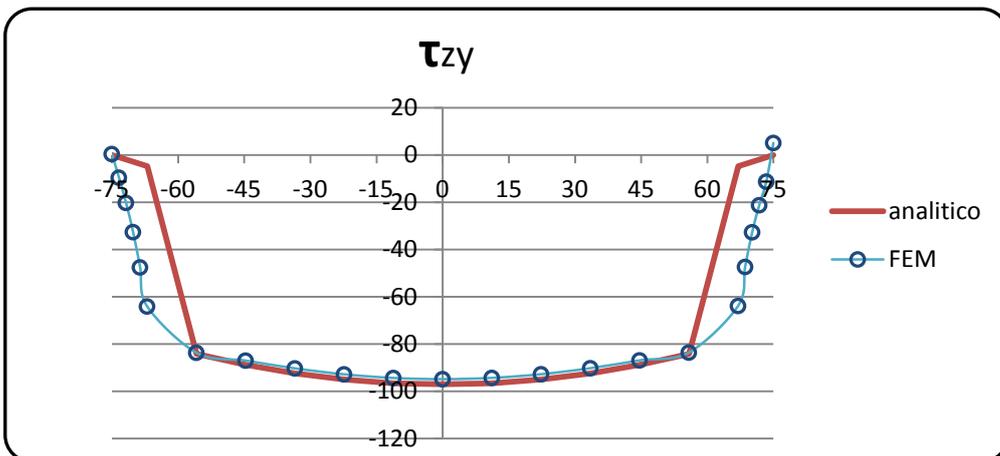
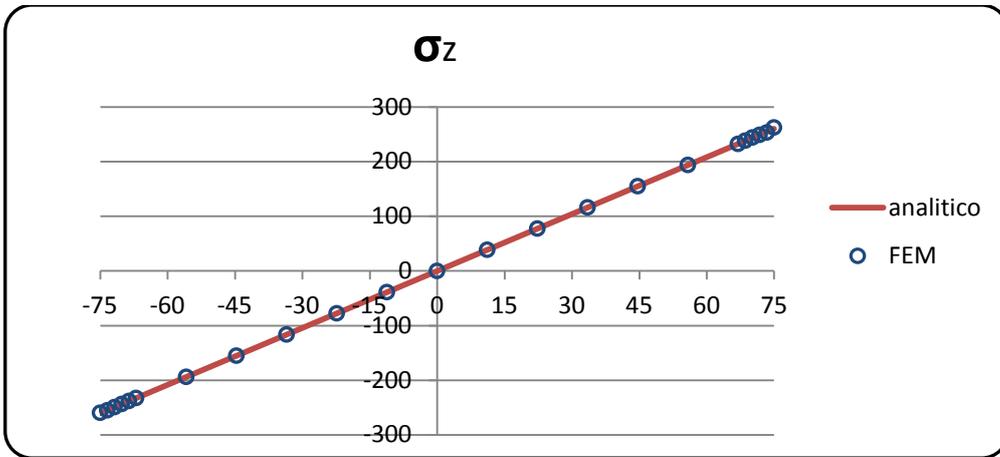


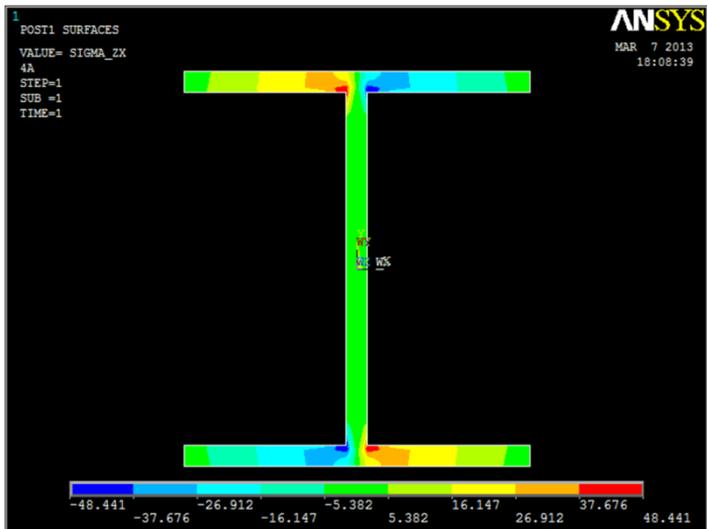
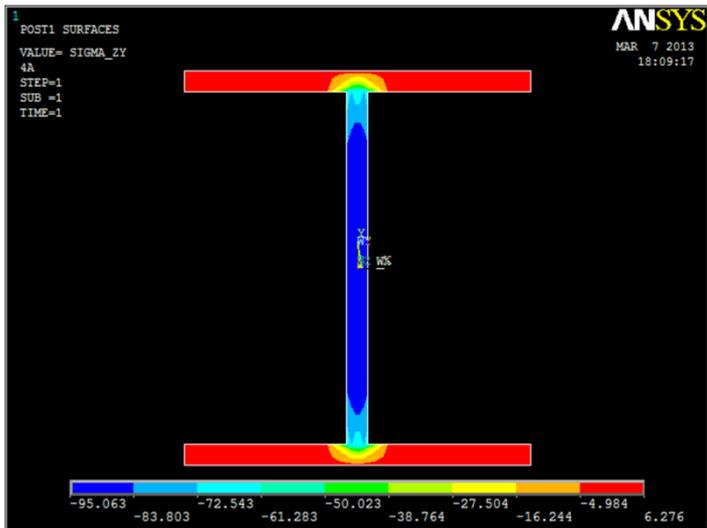
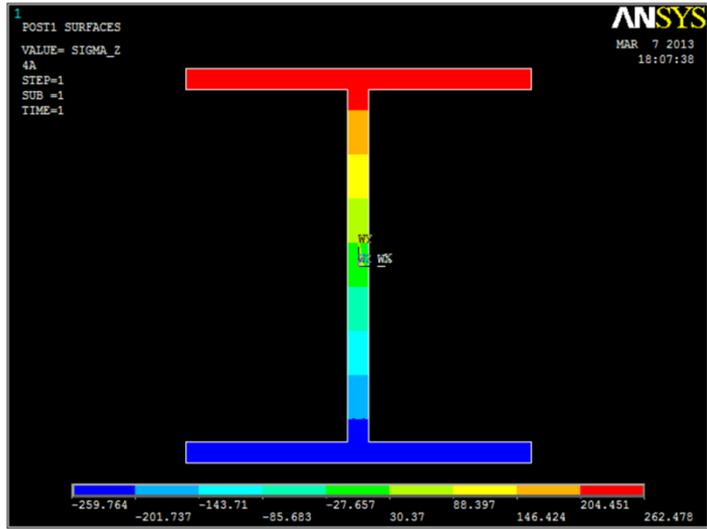
Sezione 3



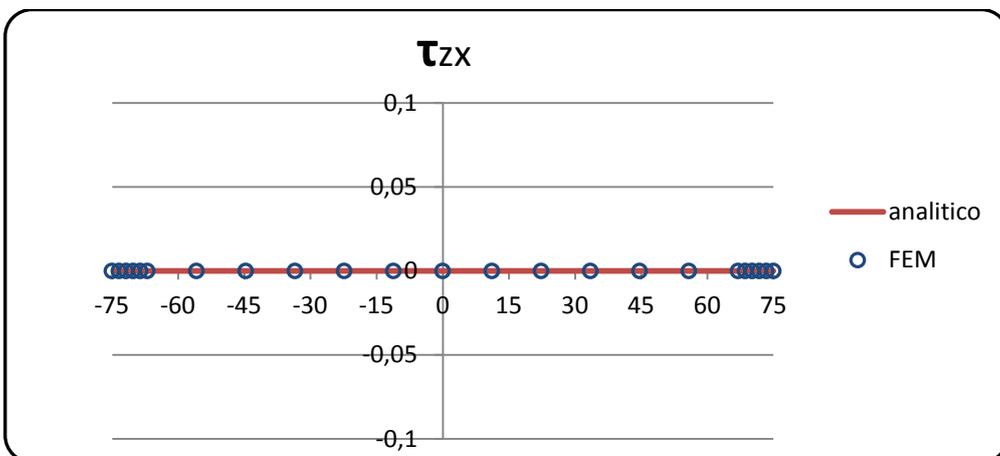
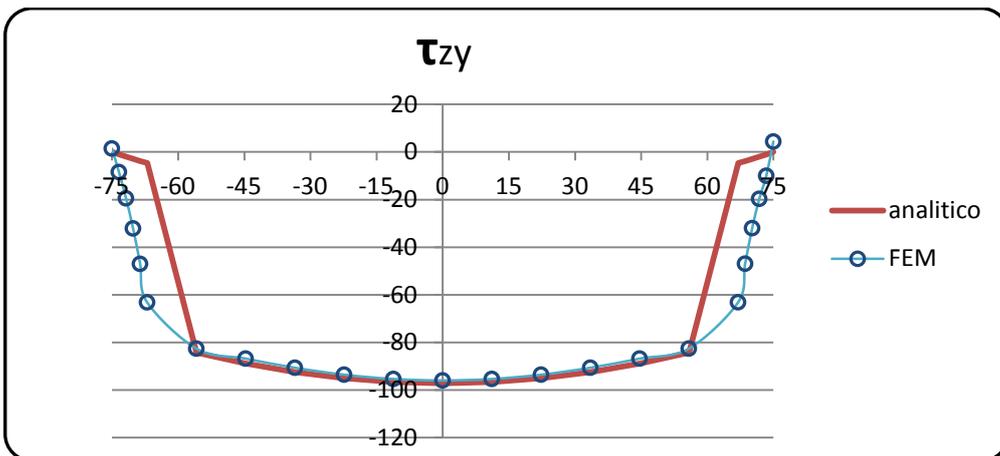
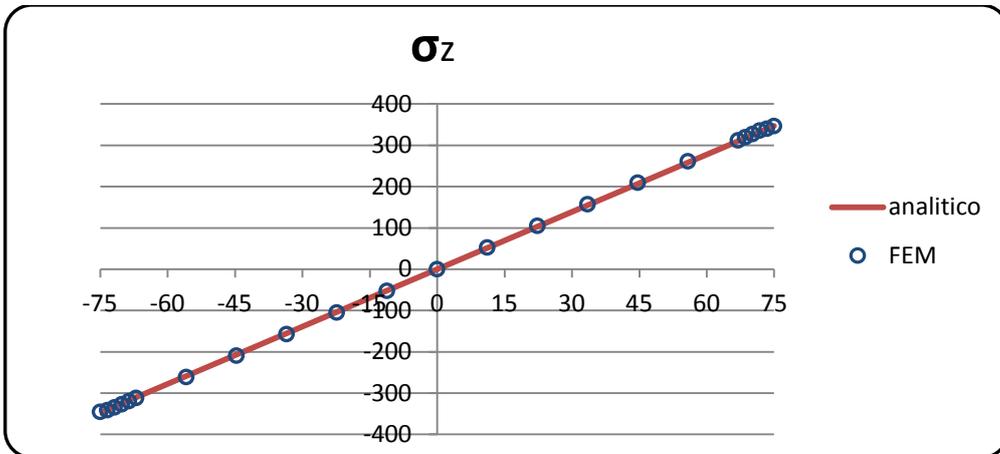


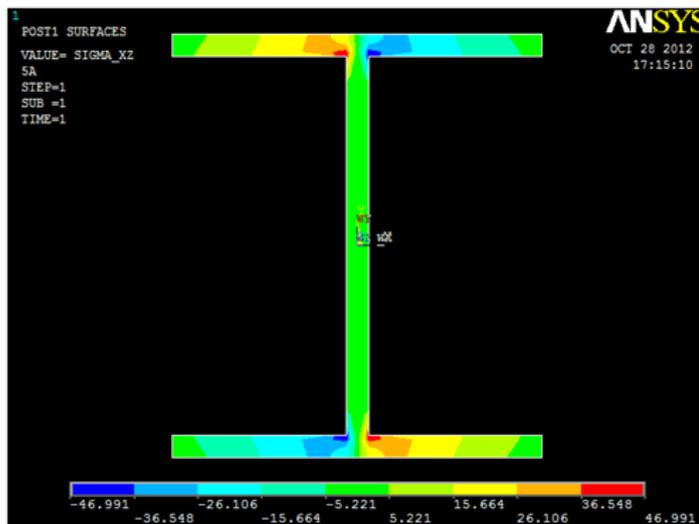
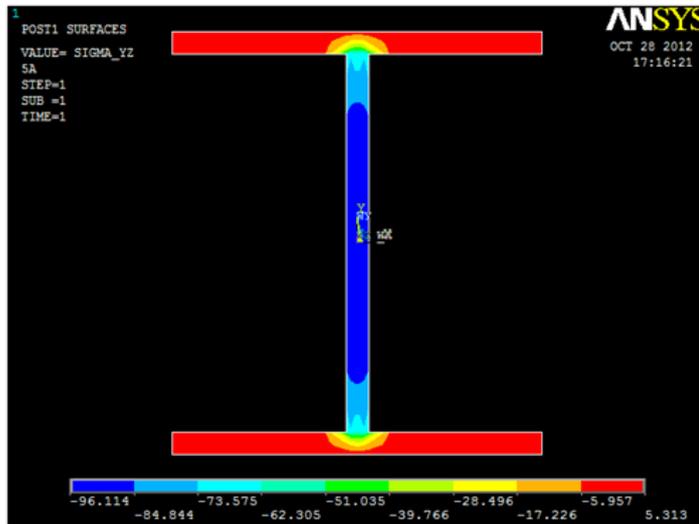
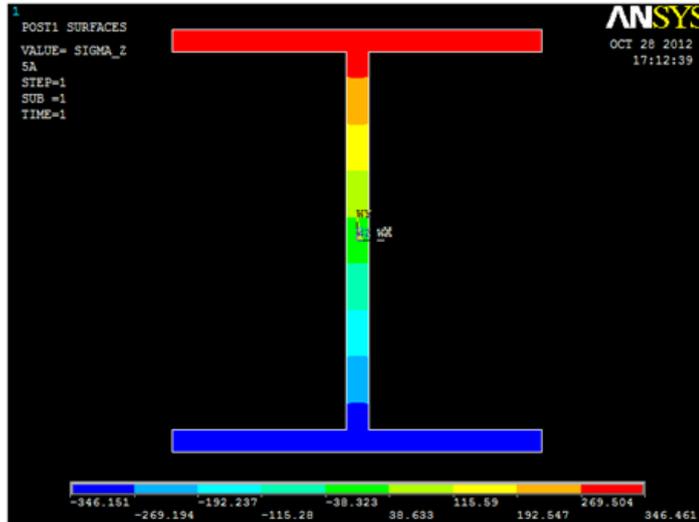
Sezione 4





Sezione 5





La sezione numero 2 si trova a 140 mm di distanza dai punti di applicazione del carico e la possiamo quindi ritenere abbastanza distante da non risentire degli effetti locali di tale ripartizione puntuale. Possiamo quindi immaginare che le linee di tensione lungo l'asse z siano parallele ad esso e distribuite in maniera uniforme. Siamo allora anche nelle condizioni di poter utilizzare le equazioni di Navier e di Jourawskj senza problemi e i risultati ottenuti con queste formule non dovrebbero differire di molto da quelli ottenuti con il calcolatore. Questo ragionamento vale anche per le sezioni che seguono ed è per questo che questa trattazione è stata inserita dopo i risultati della sezione 5 e prima della 6 dove invece valgono considerazioni analoghe alla sezione 1, relative però alle condizioni di vincolo.

Rispetto alla sezione 1 la forza ha un braccio e quindi genera un momento flettente M_f .

Secondo Navier le tensioni σ_z sono direttamente proporzionali al momento flettente applicato M_f e inversamente proporzionali al modulo di resistenza a flessione W_f , e la loro intensità dovrebbe quindi aumentare mano a mano che ci spostiamo dalla sezione 2 verso la sezione 5. L'andamento delle tensioni lungo il path è lineare: dipendono secondo Navier dalla distanza dall'asse neutro e sono di compressione sotto di esso e di trazione sopra. In corrispondenza dell'asse neutro non ci sono tensioni lungo z .

Come evidenziato in maniera immediata dai grafici riguardanti l'andamento delle σ_z , emerge subito che solo per la sezione 2 ci sono delle differenze fra le tensioni analitiche e quelle calcolate con il FEM: l'andamento è piuttosto lineare anche per le σ_z calcolate con il FEM le quali presentano valori che discostano leggermente da quelli ottenuti analiticamente; in particolare nel baricentro della sezione si ha uno scostamento di circa il 20% della tensione massima. Dai grafici emerge come la differenza fra i due risultati aumenta mano a mano che ci si avvicina al centro della sezione; in prossimità del bordo inferiore coincidono o si assomigliano di molto mentre al bordo superiore si verifica ancora una leggera proiezione degli effetti locali dovuta alla modalità di applicazione del carico.

Per le sezioni 3, 4 e 5 si ha una perfetta corrispondenza dei valori delle σ_z derivanti dal calcolo analitico e dal codice agli elementi finiti e delle τ_{zx} che si mantengono costantemente nulle; per le τ_{zy} calcolate al FEM si ha un'attenuazione degli effetti locali di applicazione del carico passando rispettivamente da 9 a 5 e 4 MPa sul bordo superiore.

Dall'analisi dell'immagine dei vari contour plot della σ_z possiamo rilevare anche un altro fatto di notevole interesse: le varie fasce colorate, che identificano una regione dove le σ_z hanno uguale intensità, sono orizzontali come sarebbe lecito aspettarsi. Secondo Navier infatti le σ_z dipendono dalla distanza dall'asse neutro; quindi su un ipotetico path orizzontale si dovrebbero avere punti sottoposti allo stesso stato tensionale. Questo vale per le sezioni 3,4 e 5 e solo in parte per la sezione 2 essendo che nel bordo superiore risente ancora degli effetti causati da un'applicazione puntuale del carico; tanto meno per la sezione 1 dove non riconosco fasce colorate orizzontali.

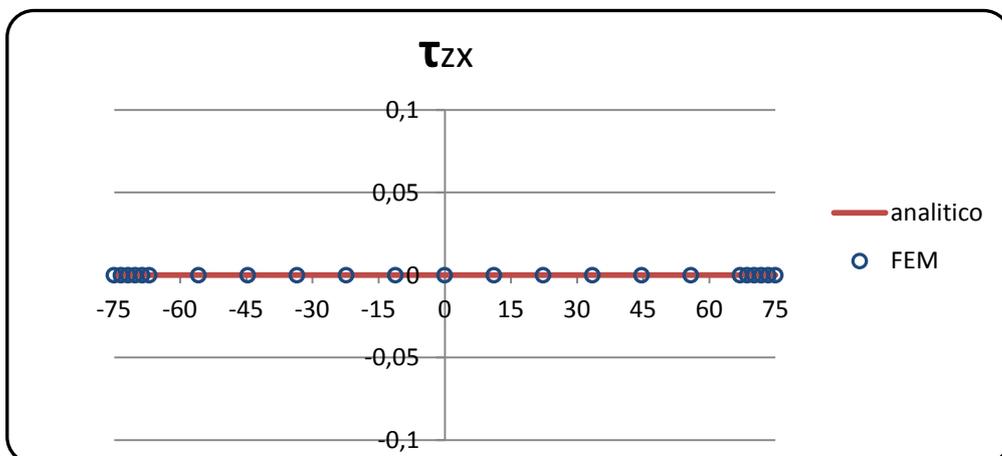
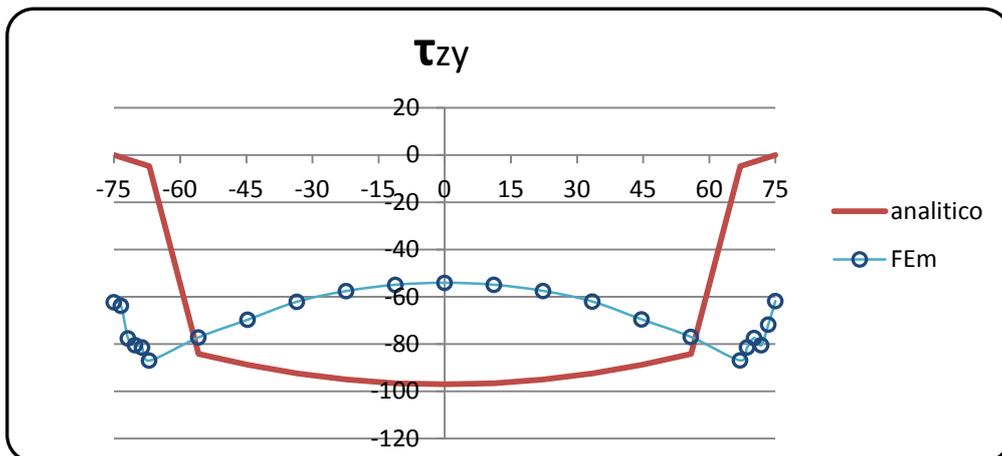
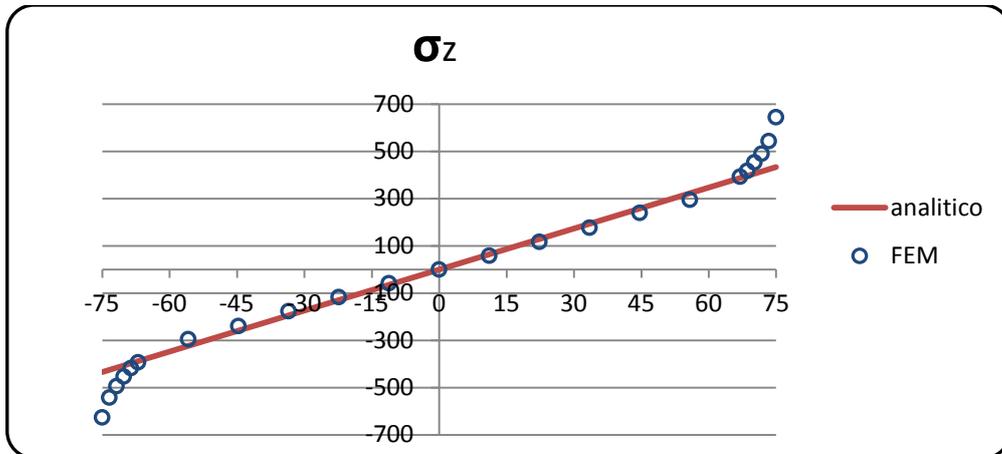
Notiamo anche che cambiando sezione e procedendo verso la numero 5 le fasce colorate nei contour plot tendono a disporsi orizzontalmente più di quanto non facciano nella sezione 2, e tendono quindi ad essere più coerenti con quanto si potrebbe ricavare ragionando con la trattazione di Navier. Questo concorda con quanto hanno evidenziato i grafici dei risultati: più ci si allontana dal punto di applicazione del carico e più i due risultati (FEM e analitico) tendono a coincidere.

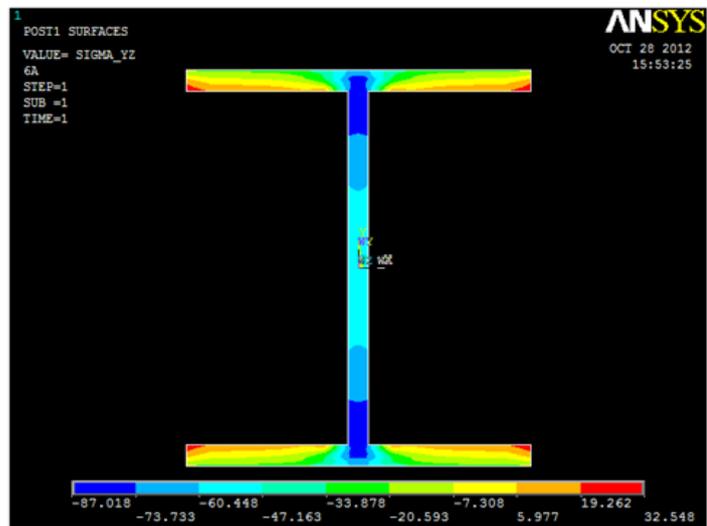
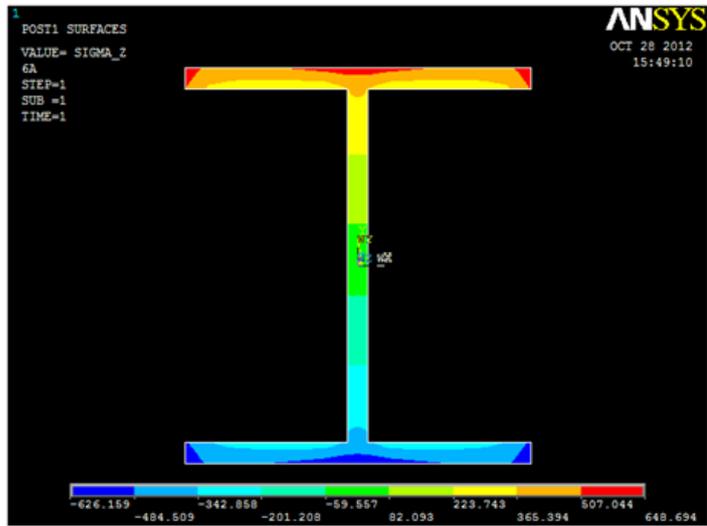
In breve: meno la sezione si deforma e più i risultati sono coerenti fra loro.

L'analisi delle τ_{zy} che si originano a causa del taglio evidenzia invece, nelle sezioni successive alla 1 un andamento simile tra i risultati del FEM e quelli analitici. Come detto prima secondo Jourawskj si evidenzia una discontinuità nel punto tra le ali superiori e inferiori e l'anima della trave. Discontinuità che non si può presentare in realtà, ma che deriva dalla semplificazione che dobbiamo adottare nel calcolo analitico. Dall'analisi con il FEM infatti questa discontinuità non viene rilevata: passando dalle ali all'anima i valori di tensione aumentano gradualmente e non improvvisamente come invece calcolato analiticamente. Ad eccezione di questi punti comunque, l'andamento fra i risultati è simile: sull'anima i valori sono pressoché coincidenti in tutte le sezioni, massimi al centro e decrescenti verso le ali in modulo. Solo sulle ali i valori presentano maggiori differenze, ma bisogna comunque dire che questi punti non subiscono la maggiore sollecitazione a taglio, che avviene invece nei punti centrali sull'anima, e l'approssimazione che si compie in queste zone usando il metodo analitico non è quindi così grave. Le immagini dei contour plot evidenziano come i punti più sollecitati a taglio siano appunto quelli sull'anima, in particolare quelli centrali e quindi più vicini al baricentro.

Sull'anima le τ_{zx} sono nulle secondo la teoria. Non ci sono infatti componenti di carico applicato lungo la direzione x . Anche sulle sezioni centrali l'analisi con il FEM conferma quanto detto registrando valori praticamente nulli lungo questo path. Sulle ali invece è presente una componente lungo x delle tensioni tangenziali che si genera per equilibrare una componente lungo z di tensione. Sulle ali si potrebbe impostare un valore di tensione tangenziale che deriva ancora dall'applicazione della formula di Jourawskj, ma che è possibile calcolare lungo un path orizzontale come vedremo analizzando il path seguente. La tensione infatti comincia ad aumentare man mano che si entra nelle ali e si raggiunge un massimo in prossimità della mezzera dove cambia istantaneamente di segno, per poi diminuire nuovamente in modulo fino ai bordi. Nell'analisi analitica di questo path si è quindi preferito considerare nulle le tensioni tangenziali τ_{zx} anche sulle ali. Il FEM rileva comunque su questi punti una tensione τ_{zx} massima non considerevole. Le immagini dei contour plot confermano che le tensioni tangenziali τ_{zx} sono praticamente nulle sull'anima e si concentrano invece sulle ali e in particolare sugli angoli interni.

Sezione 6





Per la sezione numero 6 si possono fare considerazioni analoghe alla sezione 1.

Trovandosi in questo caso dove è applicato il vincolo non ci aspettiamo dei risultati accettabili dalle formule di Navier e Jourawskj come peraltro era avvenuto nella sezione 1.

Dal grafico delle σ_z emerge comunque un buon confronto fra i risultati analitici e quelli con il FEM: nella zona centrale dell'anima le due rette si sovrappongono bene mentre nelle ali della sezione emergono delle differenze.

Nell'immagine del contour plot le linee che dividono le σ_z secondo la loro intensità sono praticamente orizzontali almeno nella parte centrale dell'anima, proprio come lo si otteneva nelle altre sezioni. Agli estremi invece invece le differenze si fanno decisamente più marcate.

Il comportamento delle τ_{zy} è completamente diverso. Analiticamente il comportamento è analogo alle altre sezioni analizzate: i punti più sollecitati sono quelli centrali dell'anima ed è presente la solita discontinuità. Il calcolatore ci dice invece che i punti più sollecitati a taglio sono quelli sulle ali, e quelli sull'anima sono molto meno soggetti al taglio. Il comportamento si è praticamente invertito come evidenzia anche l'immagine del contour plot: la linea colorata, che rappresenta l'elevata intensità della tensione, prima era molto ampia sull'anima mentre ora ne ho diverse e sono disposte orizzontalmente sull'anima con i punti più sollecitati che sono quelli nella zona di intersezione con le ali.

Lungo il path verticale, oltre ad esserci un andamento differente dei valori, non è presente ovviamente nessuna discontinuità.

Le τ_{zx} nella parte centrale sono praticamente nulle e questo è confermato dal FEM, che evidenzia però come esse aumentino in modulo su punti che sono all'interno delle ali. L'intensità in prossimità delle estremità delle ali raggiunge anche i 120 MPa mentre prima si aveva un valore massimo in prossimità del centro dell'ala che si annullano andando verso le sue estremità.

3.2 Path orizzontale

Confrontiamo i risultati ottenuti lungo il path orizzontale (percorso evidenziato in figura 3.2) per le varie sezioni. Per ognuna di esse sono riportati i grafici rappresentanti l'andamento delle tensioni significative e le relative immagini dei contour plot. Sull'asse verticale di ciascun grafico sono rappresentati i valori di tensione in MPa , mentre sull'asse orizzontale è rappresentata la distanza x in mm del punto dall'asse baricentrico.

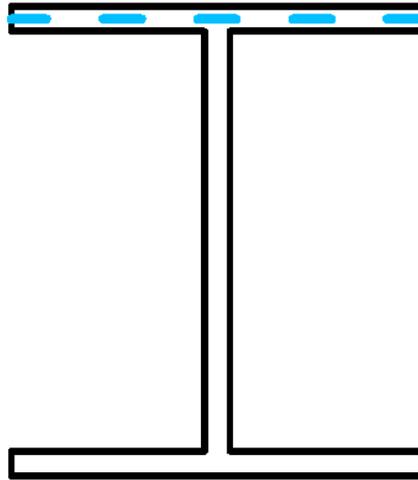
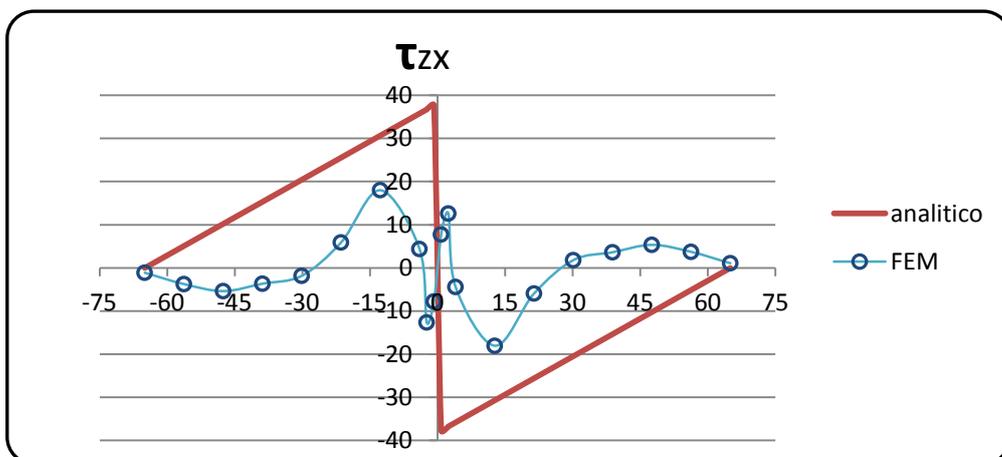
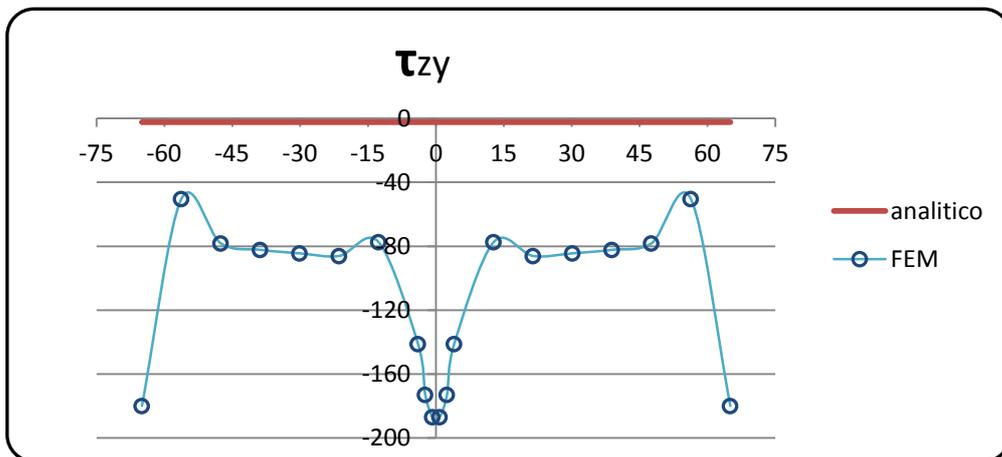
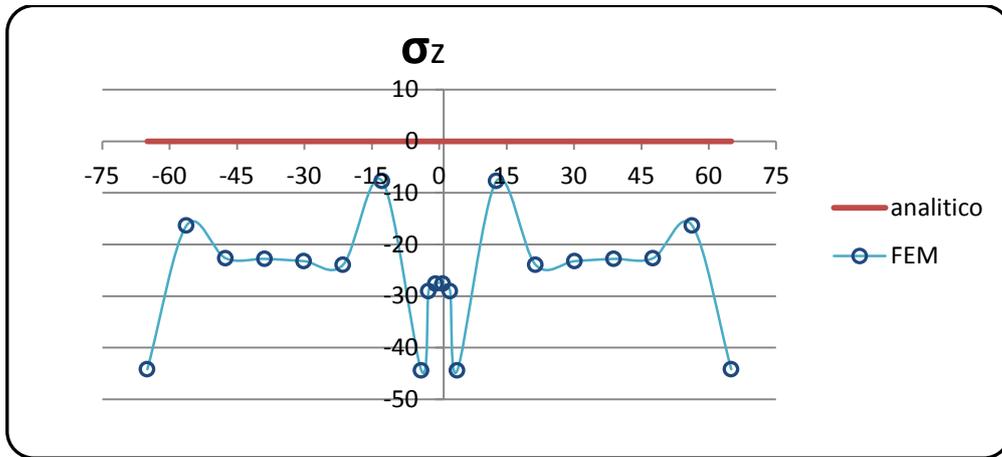


Fig. 3.2 Path orizzontale per la flessione

Sezione 1



La sezione 1 coincide con la faccia della trave sulla quale è stato applicato il carico. Sappiamo che le formule analitiche che utilizziamo, come quella di Navier e di Jourawskj, possono essere utilizzate con una certa affidabilità solo in un punto abbastanza lontano da dove vengono applicati i carichi e i vincoli. Questa infatti è una delle condizioni sotto le quali le precedenti formule sono state ricavate. Vicino ai punti dove viene applicato un carico o un vincolo si verificano infatti degli effetti locali che modificano il normale andamento delle tensioni, rendendole non più stimabili con queste formule analitiche. In questo caso non ci troviamo in una zona ideale per applicare Navier e Jourawskj essendoci posizionati per l'analisi proprio sul punto di applicazione del carico e ci aspettiamo quindi una diversa risposta per quanto riguarda i risultati analitici rispetto a quelli ottenuti con il FEM.

Sulla sezione 1 le σ_z dovrebbero risultare tutte nulle, visto che su questa prima sezione non agisce momento flettente M_f . L'analisi con il calcolatore non conferma questo risultato: dal grafico e dall'immagine del contour plot, mostrata per il path verticale precedente, si può vedere che in ogni punto del path orizzontale la tensione registrata non è affatto nulla. Nei punti centrali del percorso assume un valore variabile dai 30 ai 44 MPa di compressione, si stabilizza a 23 MPa prima di tornare a crescere raggiungendo nuovamente 44 MPa agli estremi dell'ala.

L'immagine del contour plot ci mostra come negli angoli superiori della sezione le tensioni raggiungano valori elevati di compressione. C'è da considerare comunque il fatto che più un punto si trova vicino ad uno spigolo e meno l'analisi del calcolatore è precisa. La presenza di queste σ_z può essere giustificata ancora una volta con il fatto che i punti del path sono abbastanza vicini ai nodi dove è stata ripartita la forza, e sicuramente risentono di questo effetto proprio per come è stato costruito il modello con il calcolatore.

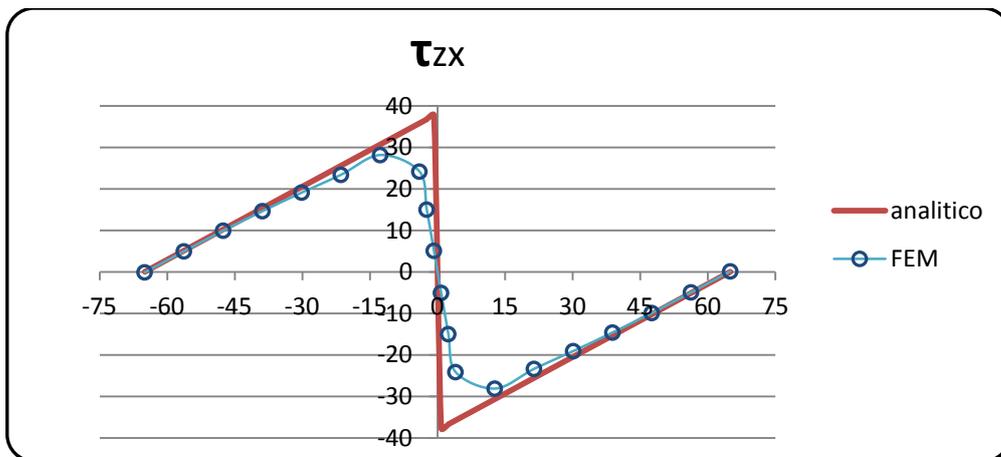
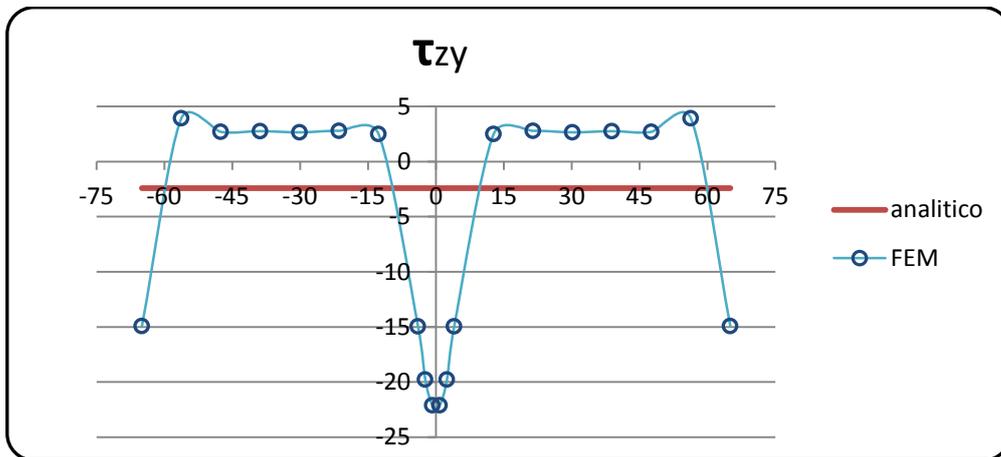
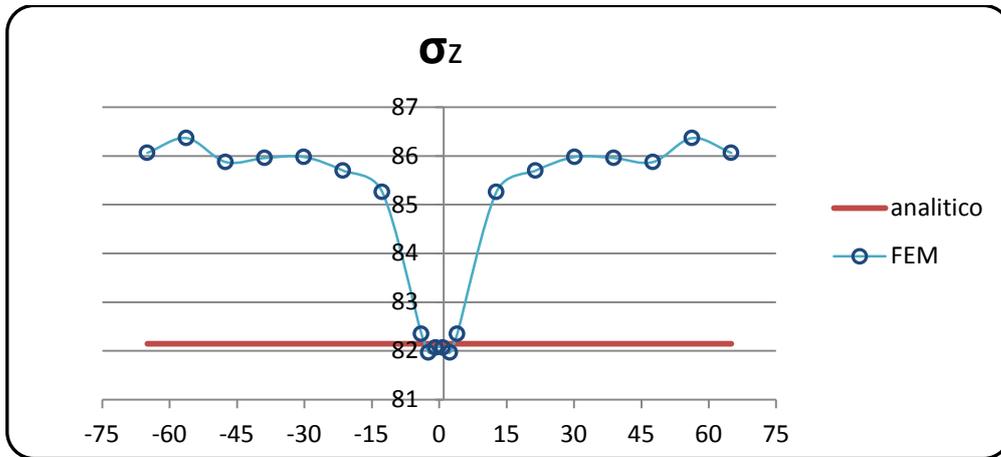
Le τ_{ZY} che si originano a causa del taglio dovrebbero assumere un valore costante lungo tutto il path visto che, essendo quest'ultimo orizzontale, non c'è variazione da punto a punto del momento statico S_{xx} di cui ci si serve per calcolare le tensioni tangenziali. Il FEM invece rileva un valore costante delle tensioni tau ZY solo nella zona centrale della semiala superiore, come avveniva con le tensioni σ_z . Agli estremi e nella zona che si trova sopra all'anima, la tensione aumenta in modulo fino ad un massimo di 180 MPa.

La formula di Jourawskj sottostima di molto in questo caso le tensioni, ma visto che la sezione analizzata è la numero 1, vicinissima ai punti di applicazione del carico, ci si aspettava una sostanziale differenza. L'immagine del contour plot (pag. 25) evidenzia come proprio nella parte superiore della sezione ci siano zone che sono sottoposte a tensioni di taglio maggiori.

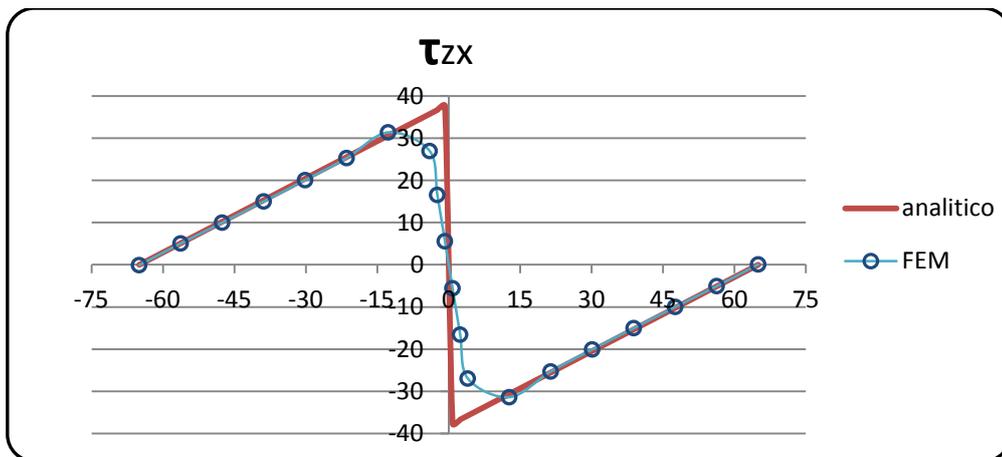
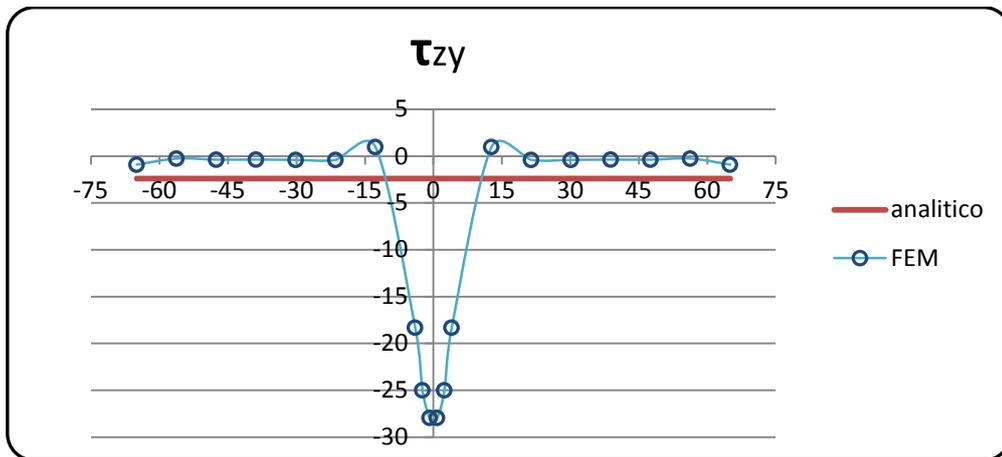
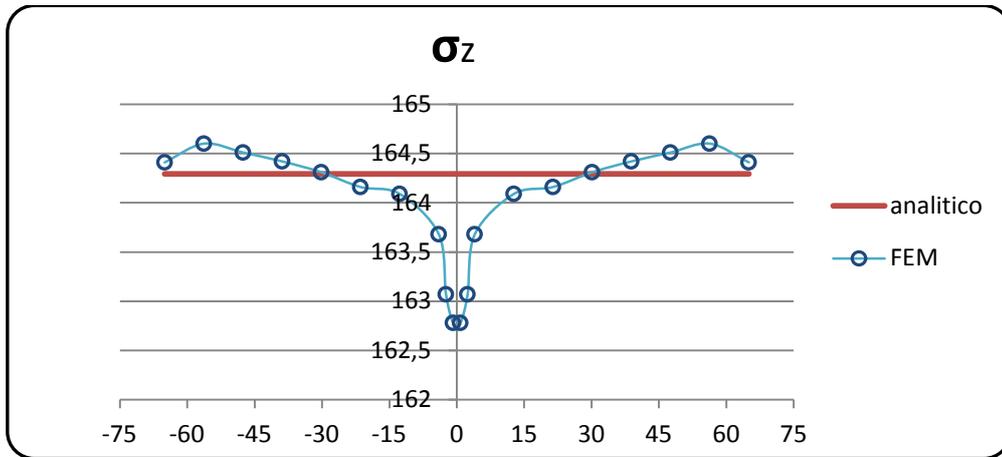
Anche le τ_{ZX} hanno un andamento molto diverso nei due metodi di calcolo. Analiticamente le tensioni sono nulle sui punti estremi del path per poi aumentare sino ad un valore massimo in mezzeria. L'andamento è perciò detto a farfalla. Queste tensioni sono state calcolate usando la formula di Jourawskj. L'andamento di queste tensioni secondo il FEM è piuttosto disordinato: non presenta un andamento lineare monotono nella due semiali e sottostima l'ampiezza massima della farfalla in mezzeria dell'ala sebbene registri valori nulli alle estremità. Presenta solo dei massimi relativi, seppur sempre sottostimati, in prossimità della mezzeria.

Dall'immagine del contour plot (pag. 25) si osservano i valori massimi assoluti di tensione sui bordi dell'ala ancora in prossimità dell'intersezione con l'anima.

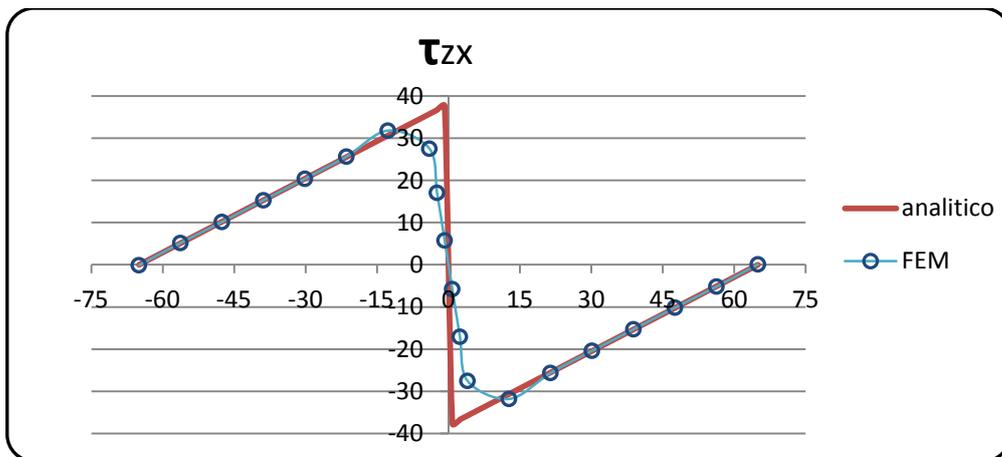
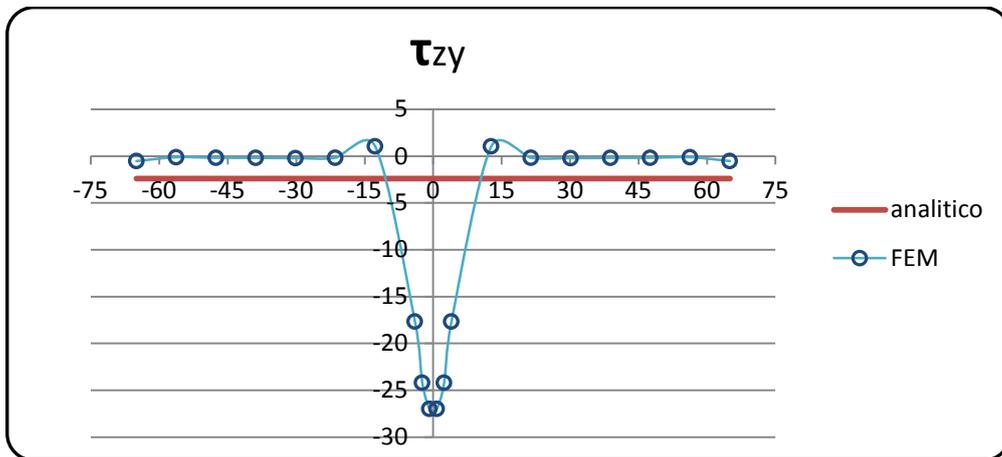
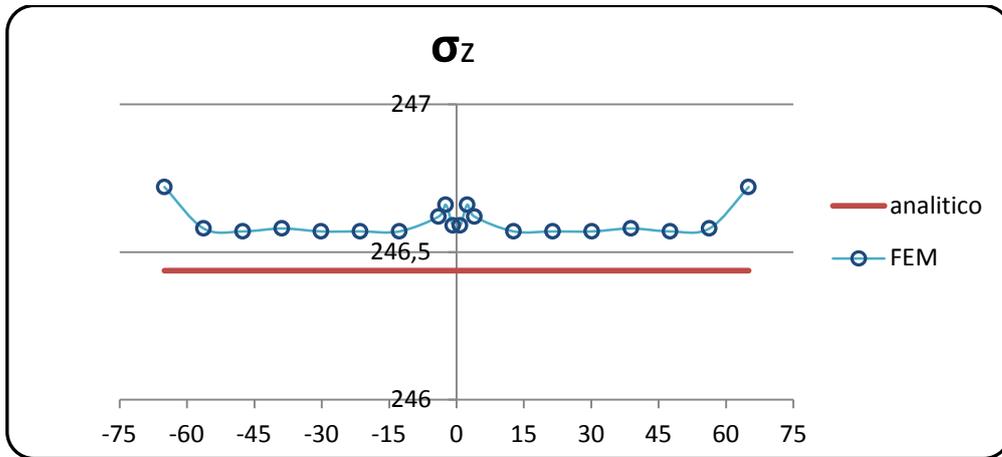
Sezione 2



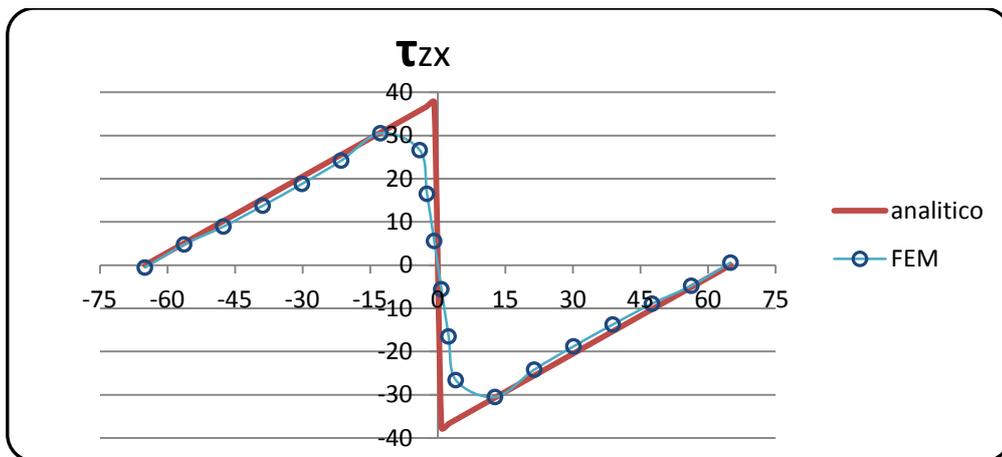
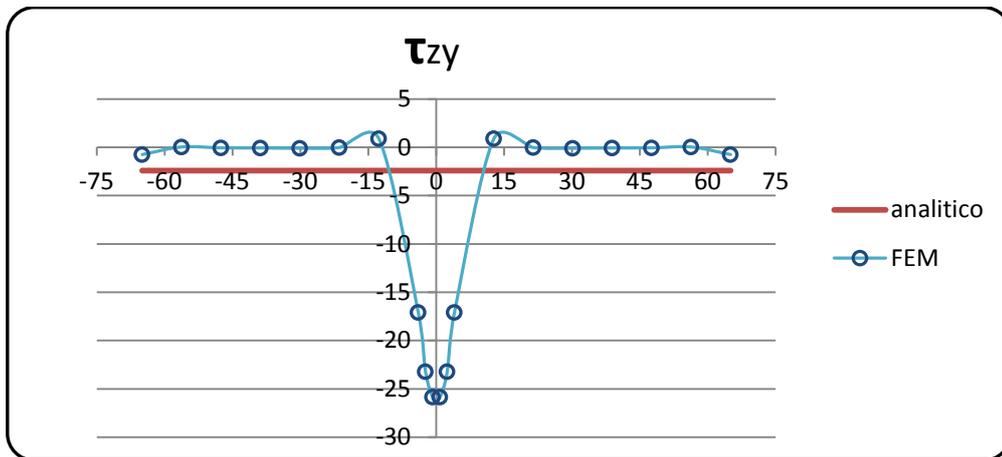
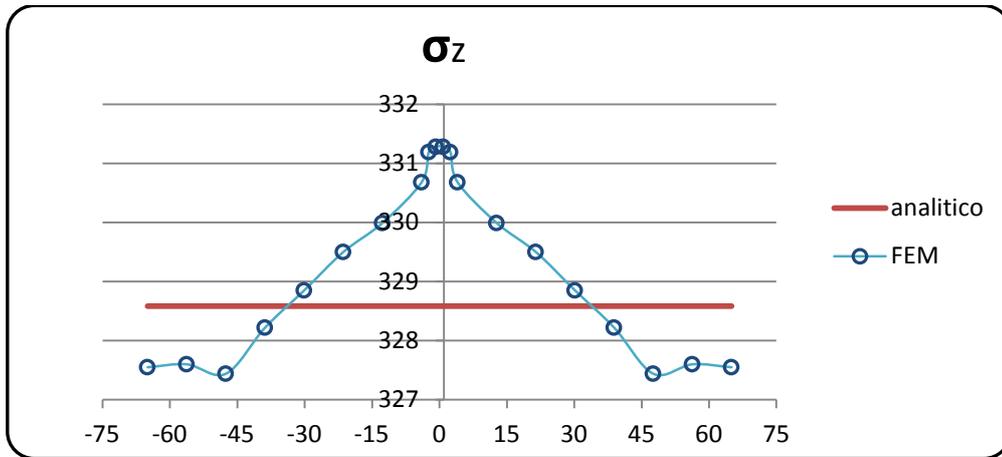
Sezione 3



Sezione 4



Sezione 5



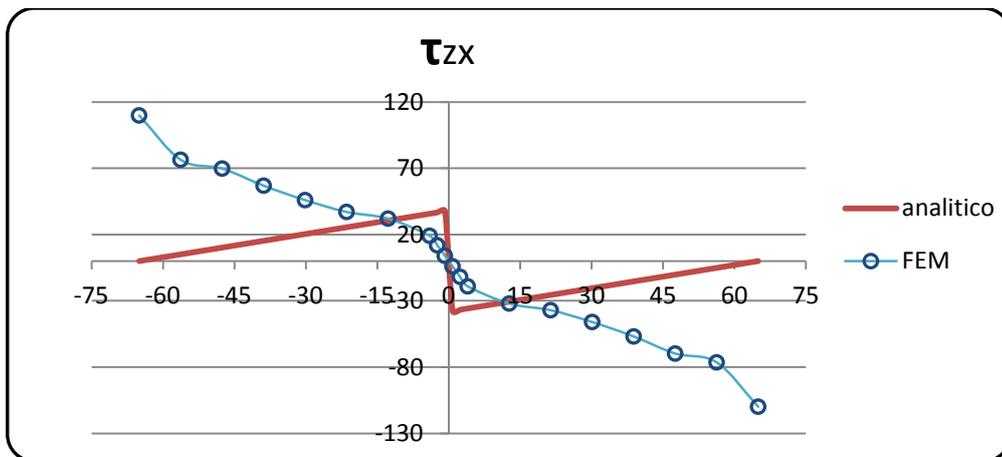
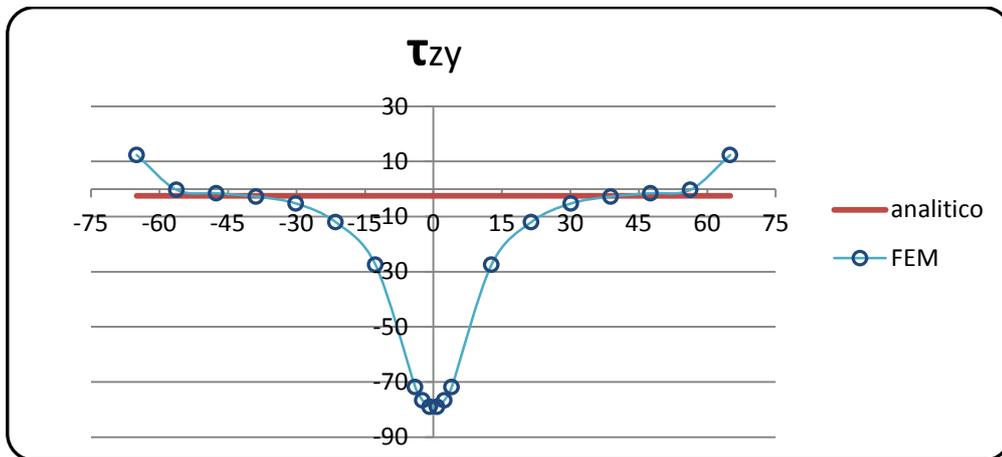
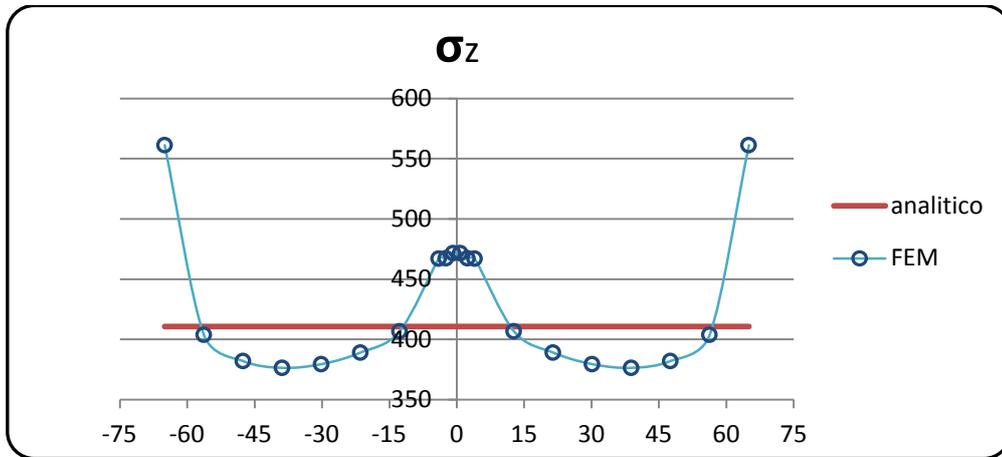
L'analisi delle sezioni centrali ci dovrebbe portare, come già visto per il primo path, ad una sostanziale congruenza fra i due risultati.

Secondo Navier le tensioni σ_z dovrebbero essere costanti lungo questo path visto che la distanza di ogni punto dall'asse neutro è la stessa, essendo il path orizzontale. Notiamo che questo si verifica soprattutto per le sezioni 3,4 e 5 mentre per la sezione 2 si hanno ancora leggeri effetti causati dalla ripartizione finita del carico dove si ha un leggero scostamento della registrazione del FEM di 4 MPa dalla tensione analitica che è di 82 MPa. Per tutte le altre sezioni si rimane dentro l'intervallo di due unità.

Come già detto per la sezione 1 le τ_{zy} dovrebbero essere costanti lungo tutto il path mentre nella zona centrale dell'ala il FEM non conferma questo andamento ma indica invece una tensione di 25 MPa, valore di molto ridotto se confrontato con la prima sezione ma comunque non congruente con quello analitico. Per la sezione 2 ai bordi si ha ancora un andamento che richiama quello osservato nella sezione 1. Per le altre sezioni si avvicina a quanto previsto dall'equazione di Navier.

Le τ_{zx} sono quelle che maggiormente trovano corrispondenza fra i due risultati. L'andamento a farfalla di queste tensioni è confermato dal FEM. Per quanto riguarda la parte centrale sappiamo bene che non è possibile un andamento discontinuo come quello presentato dall'analisi analitica: le tensioni non possono assumere un valore massimo positivo ad un valore massimo negativo nello stesso punto per poi diminuire gradualmente di intensità spostandosi verso le estremità. L'andamento è molto più graduale con attenuazione dell'ampiezza massima della farfalla, ma l'approssimazione analitica che si effettua non così rilevante, e come già detto i risultati in generale sono pressoché coincidenti. Dal contour plot è difficile rilevare un andamento a farfalla delle tensioni, tuttavia osservandolo in un secondo momento è possibile apprezzare che nella zona centrale esse sono più intense che agli estremi; inoltre, da un'analisi più attenta, si nota pure che hanno verso opposto.

Sezione 6



Sulla sezione 6 non ci si aspetta di trovare una conferma dei risultati analitici dai dati del FEM. La sezione è infatti una sezione critica per le formule analitiche visto che si trova proprio dove sono applicati i vincoli.

Le σ_z sono sovrastimate rispetto ai risultati del FEM nella zona centrale delle due semiali anche se l'andamento è pressoché costante, come ci si aspettava dalla teoria. Verso i bordi invece i risultati non coincidono visto che il FEM rileva un aumento del valore delle tensioni in queste zone. Anche l'immagine del contour plot (pag. 39) mostra nella parte superiore un incurvamento delle fasce colorate ad indicare che le tensioni sigma non rimangono costanti lungo un riferimento orizzontale ma anzi aumentano di intensità nella zona centrale e agli estremi dell'ala.

Anche l'andamento delle τ_{zy} non è costante come prevede la teoria, ma presenta una zona centrale dove le tensioni sono decisamente maggiori in modulo rispetto a quelle teoriche, e due zone estreme dove invece lo sono lievemente.

Le τ_{zx} rilevate sono totalmente diverse rispetto a quelle calcolate analiticamente: l'unica analogia riscontrata è che queste tensioni si annullano nel punto centrale del path. Per il resto il FEM ha registrato un andamento opposto a quello ipotizzato dalla teoria in quanto diminuiscono in modulo passando dagli estremi (dove assumono valore massimo di circa 110 MPa) alla zona centrale nella quale appunto si annullano, e con gradiente di tensione molto maggiore rispetto al caso teorico.

La causa di questa discordanza è sicuramente attribuibile alla modalità di applicazione dei vincoli in quanto in questo primo caso si sono bloccati tutti i gradi di libertà. Confronteremo i risultati ottenuti a quelli registrati imponendo altre condizioni di vincolo per determinare quella più veritiera.

4. Presentazione e analisi dei risultati: la torsione

4.1 Path verticale

Confrontiamo i risultati ottenuti lungo il path verticale (percorso evidenziato in figura 4.1) per le varie sezioni. Per ognuna di esse sono riportati i grafici rappresentanti l'andamento delle tensioni significative e le relative immagini dei contour plot. Sull'asse verticale di ciascun grafico sono rappresentati i valori di tensione in MPa, mentre sull'asse orizzontale è rappresentata la distanza y in mm del punto dall'asse baricentrico.

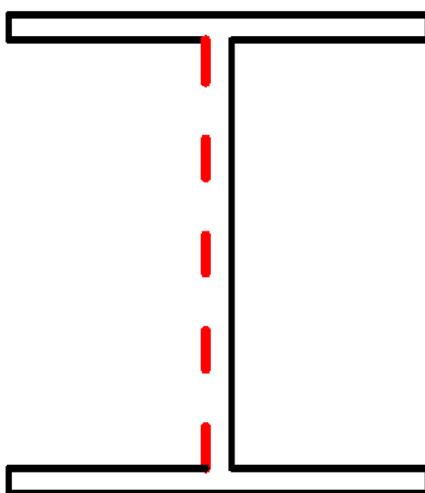
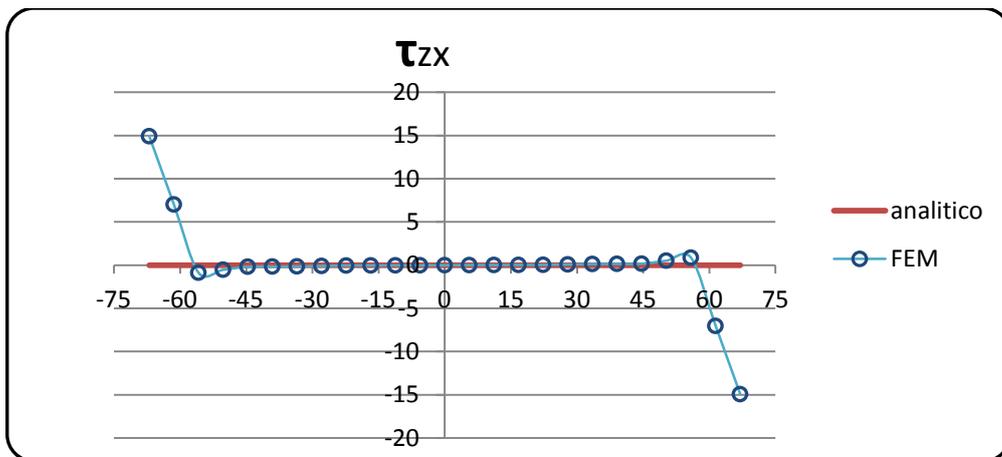
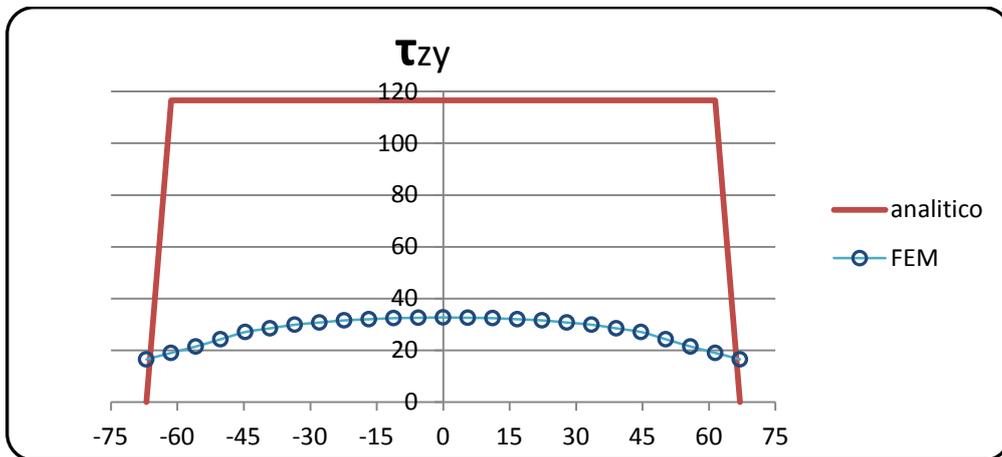
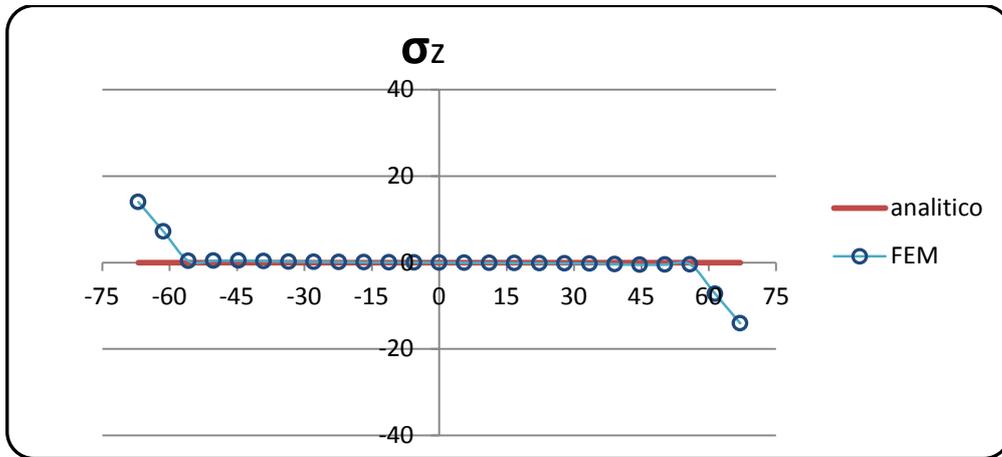
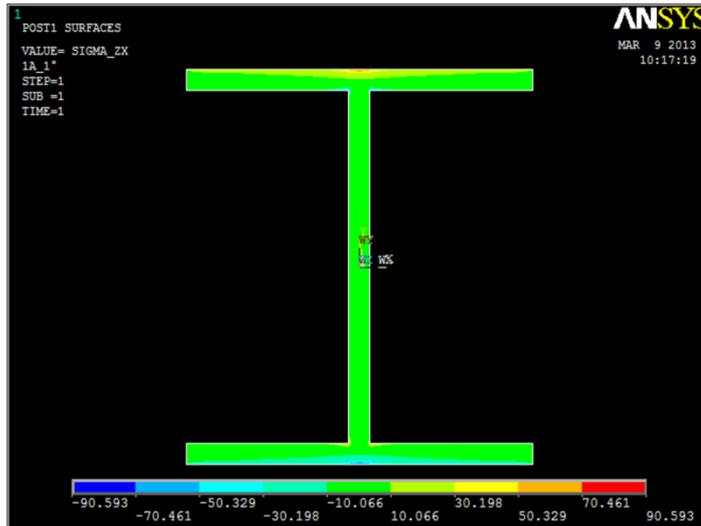


Fig. 4.1 Path verticale per la torsione

Sezione 1





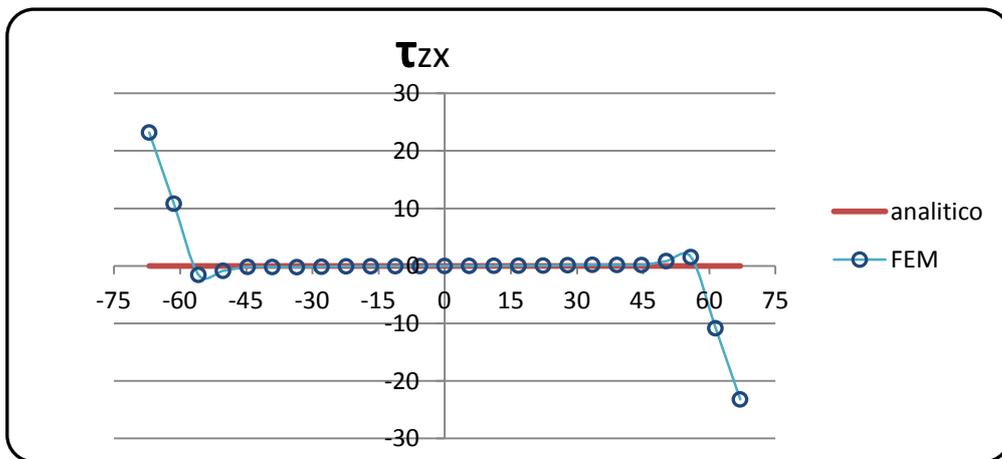
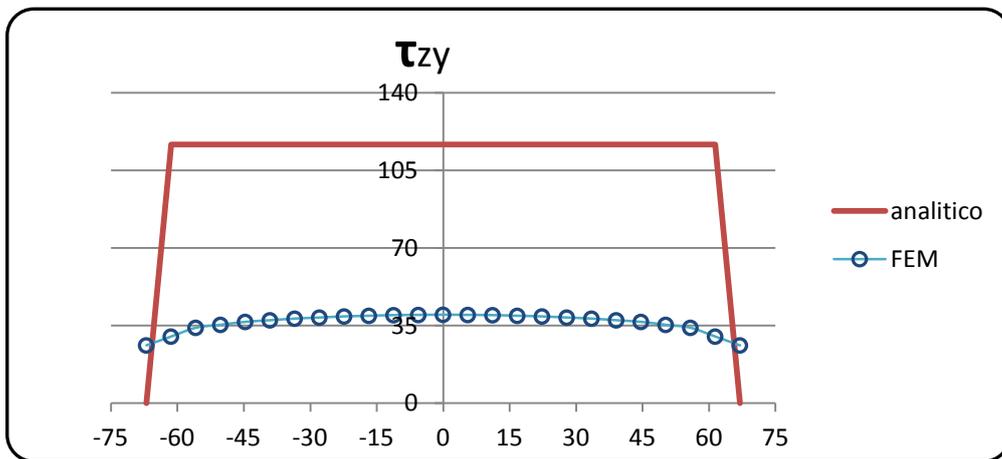
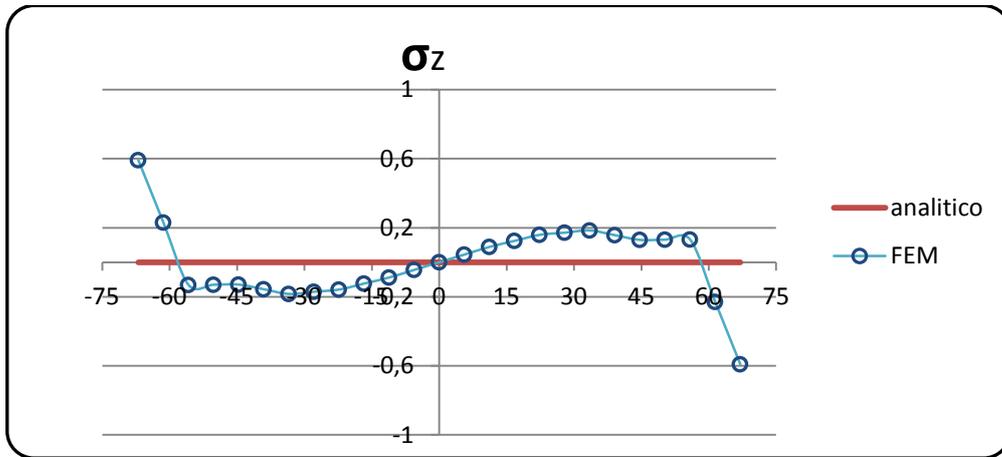
Come per la flessione anche sulla sezione 1 e 6 che sono quelle dove è applicato il carico e i vincoli, non ci si aspettano buone congruenze tra il risultato analitico e quello del calcolatore.

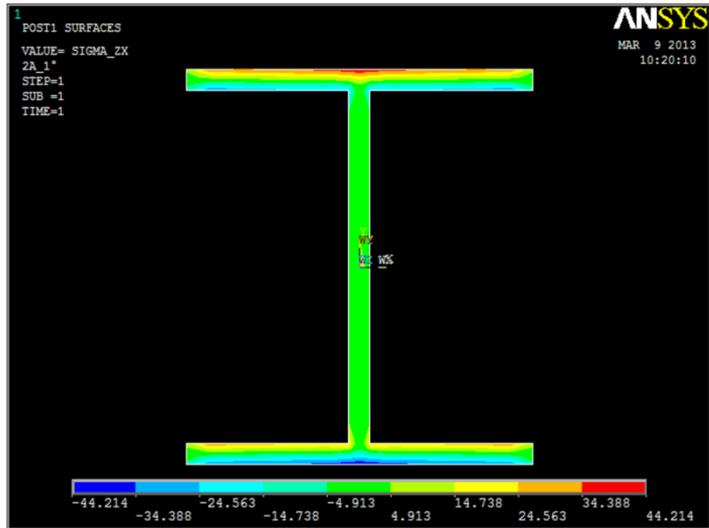
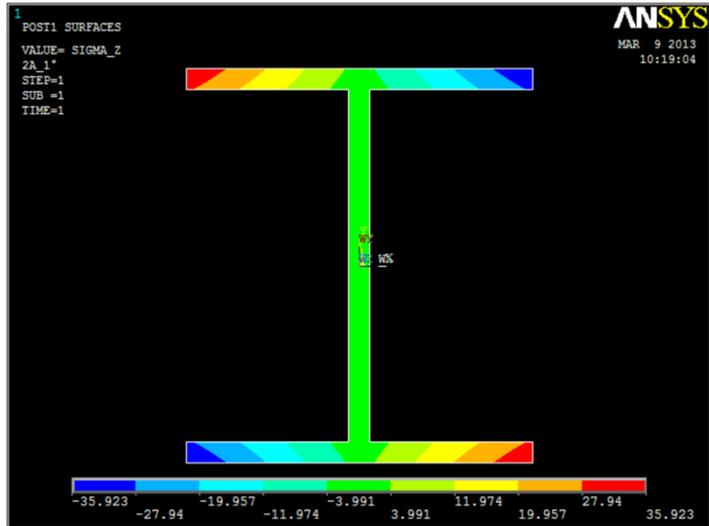
Come è stato illustrato nell'introduzione teorica non sono presenti tensioni σ_z su una qualsiasi sezione della trave visto che la deformazione di quest'ultima è associata ad uno scorrimento, di cui sono responsabili solo tensioni tangenziali tau. Il FEM conferma quanto esposto dalla teoria, fatta eccezione per i punti ai due estremi del path dove sono registrati valori di trazione e compressione di 14 MPa ma questi risultati possono derivare dal tipo di mesh utilizzata, che non può essere ai bordi così fitta come richiederebbe un'analisi puntuale e specifica per queste zone della trave.

Le componenti di tensione τ_{zy} rilevate dal FEM, che si originano a causa della torsione, non trovano conferme nel risultato teorico. Come si è visto prima, la teoria dell'analogia idrodinamica e la relativa formula per il calcolo delle tensioni, forniscono solo una stima del valore della tensione e servono per capire principalmente il verso delle tensioni più che il valore dell'intensità da loro assunto. Questo valore però non può essere molto preciso, è più che altro una stima. Dal grafico vediamo infatti che nella zona centrale del path le tensioni assumo teoricamente un valore costante che non trova però riscontro nell'analisi del calcolatore. Da notare anche che la formula utilizzata sovrastima di quasi quattro volte il valore rilevato dal FEM. Agli angoli, sempre secondo l'analogia idrodinamica, non sono presenti tensioni visto che agli angoli un ipotetico fluido messo in rotazione all'interno della sezione non avrebbe velocità, mentre il FEM rileva valori diversi dallo zero, in particolare 16 MPa. Dall'immagine del contour plot si vede come l'intensità delle tensioni tangenziali si concentri all'interno di una fascia di valori per quasi tutta la sezione: l'analogia idrodinamica, che prevede appunto un'uniformità delle tensioni, ci da quindi una indicazione abbastanza corretta seppur di molto sovrastimata, anche se una analisi più accurata utilizzando il path ha evidenziato i suoi limiti.

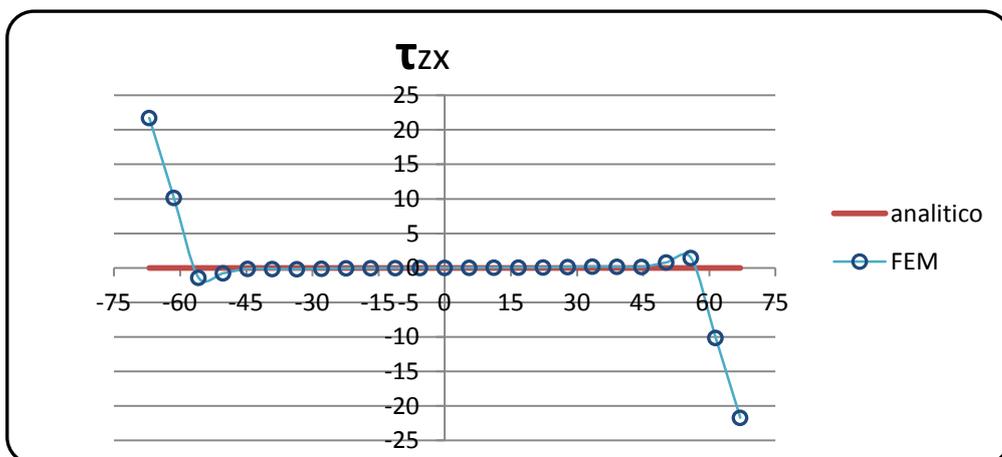
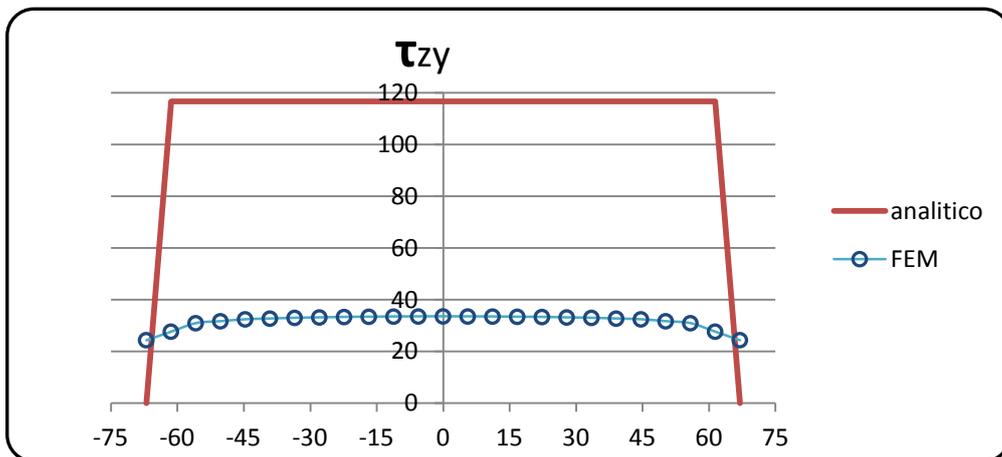
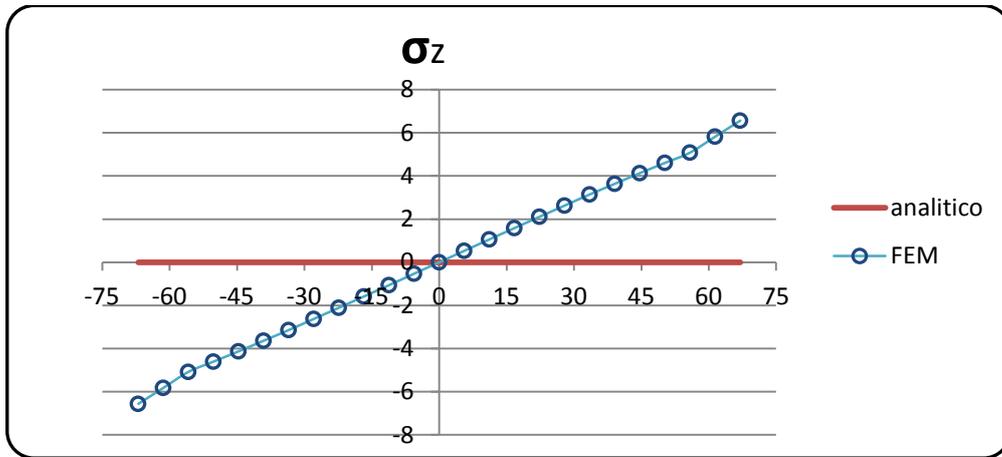
L'analisi con il calcolatore delle τ_{zx} conferma che lungo questo path verticale non ci sono componenti orizzontali di tensione tangenziale. Solo sui bordi la risposta è decisamente diversa, per i motivi evidenziati già in precedenza: la scarsa precisione di questo tipo di mesh in prossimità degli angoli e il fatto che le tensioni non possono cambiare direzione in modo istantaneo.

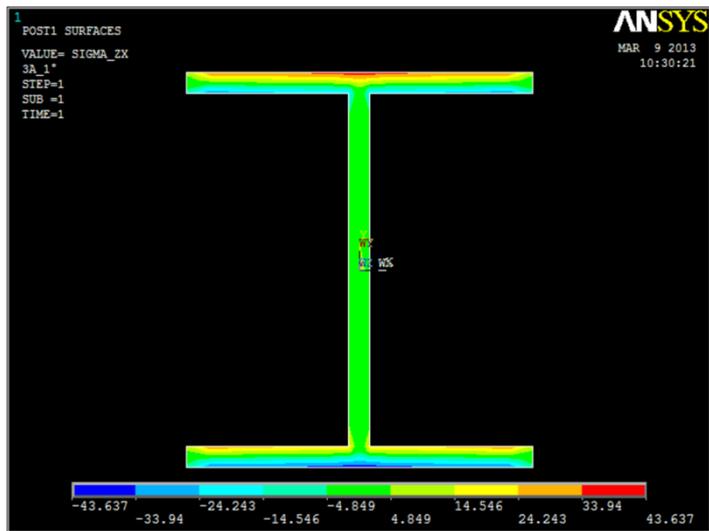
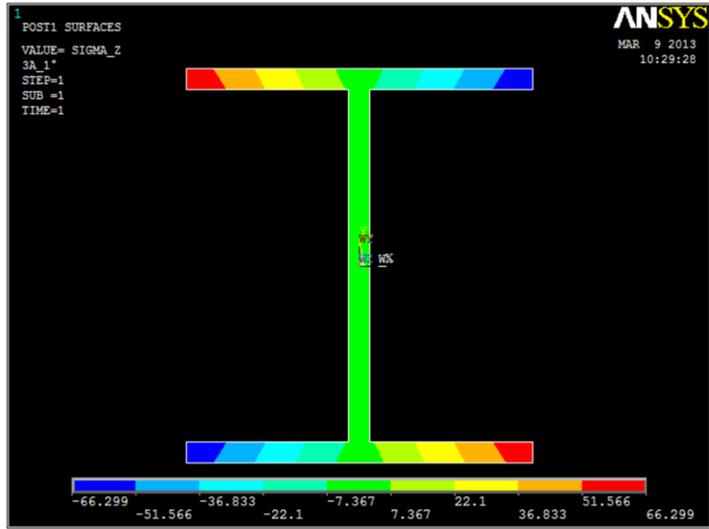
Sezione 2



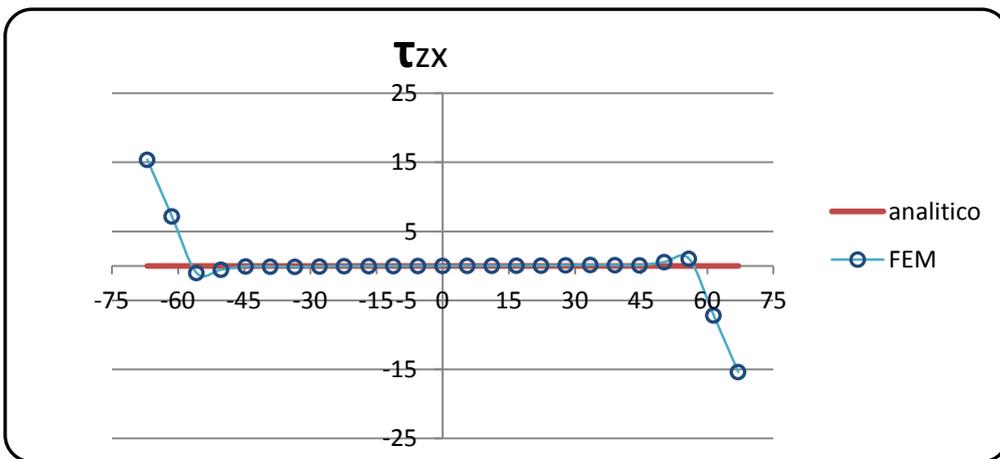
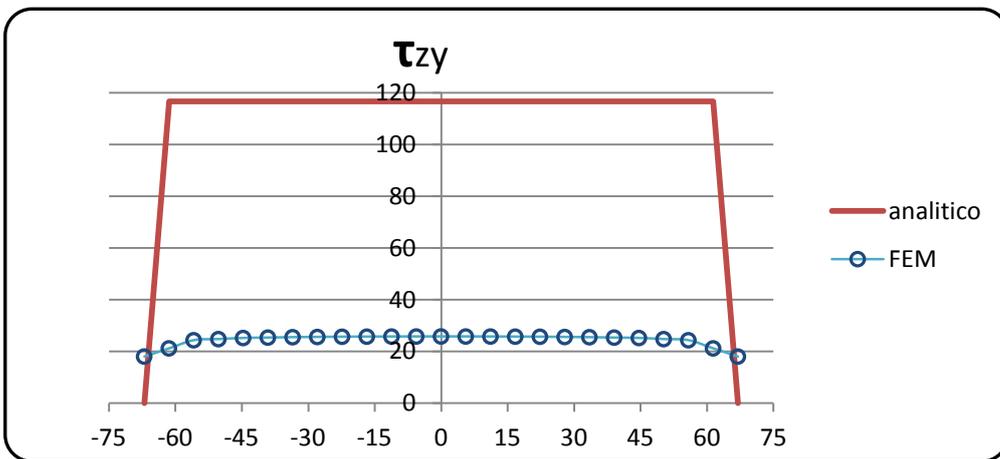
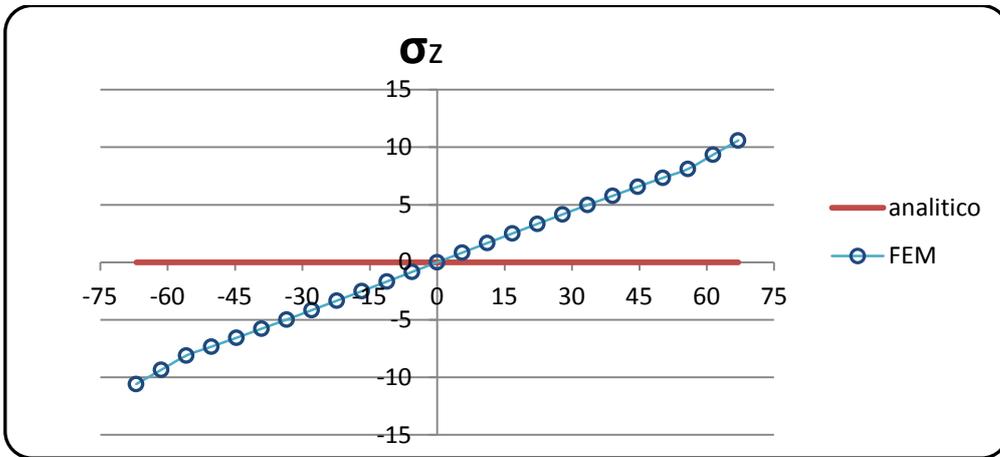


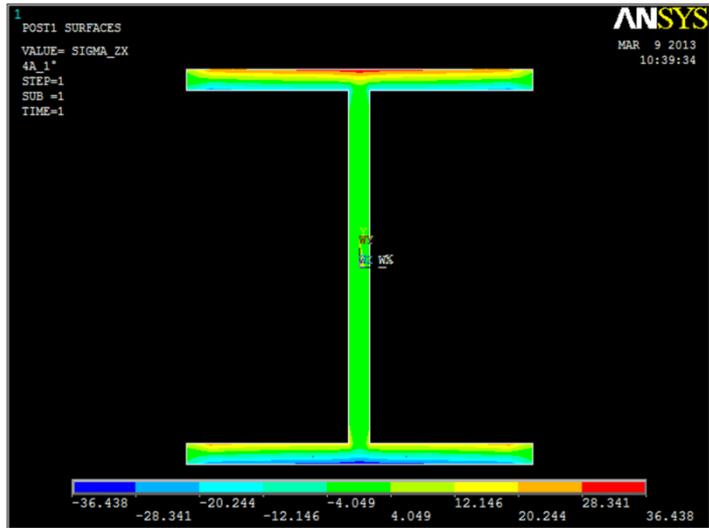
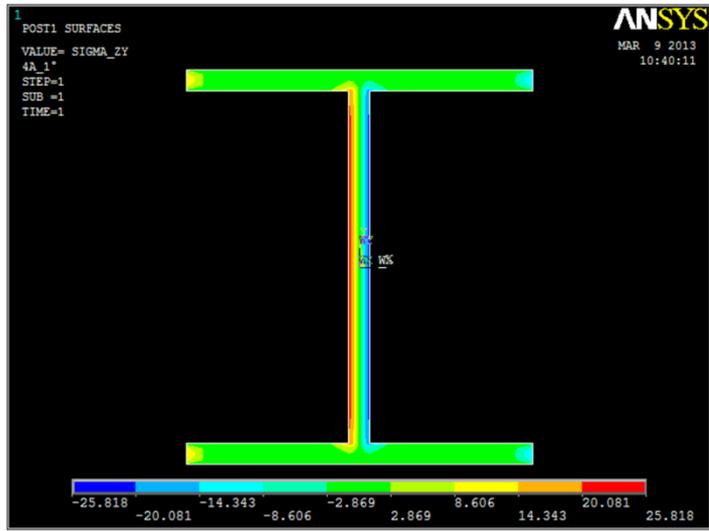
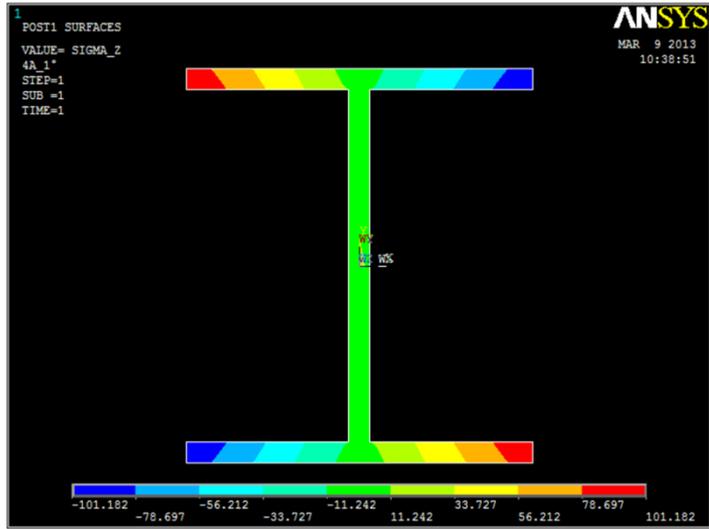
Sezione 3



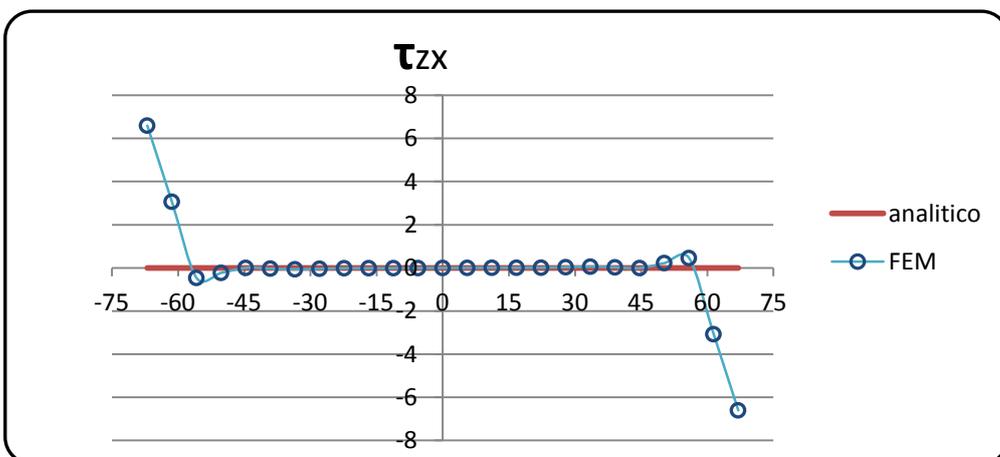
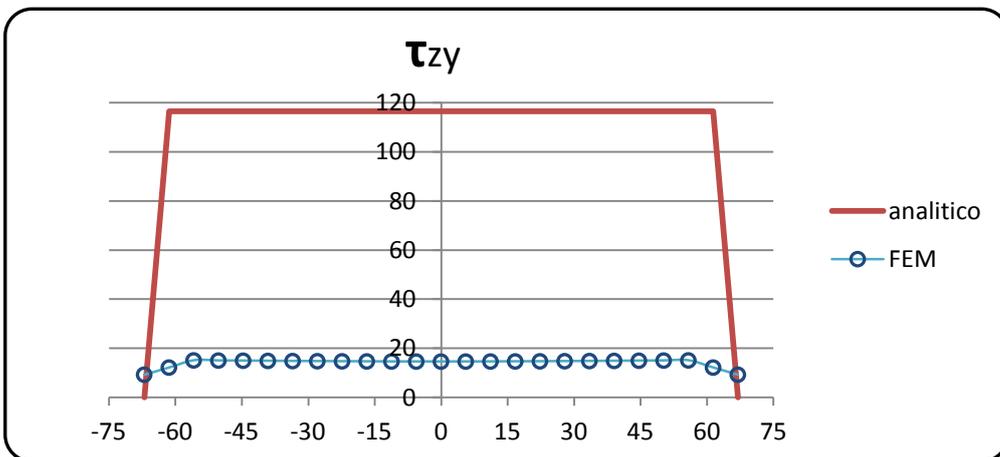
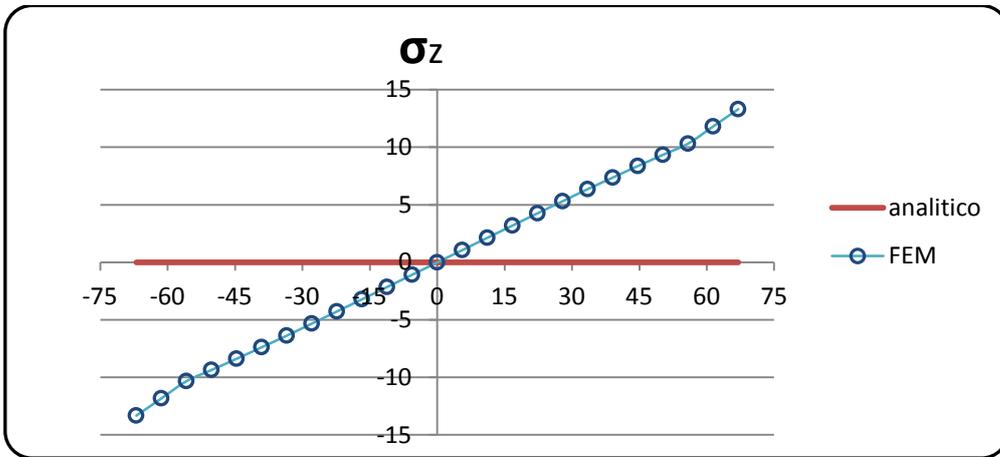


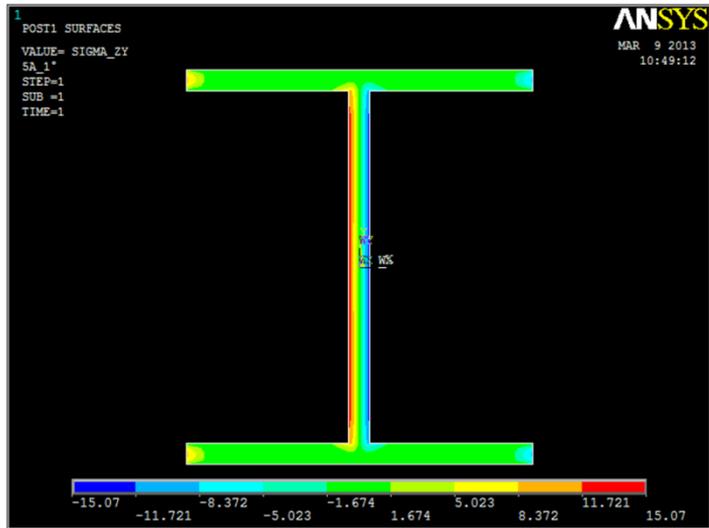
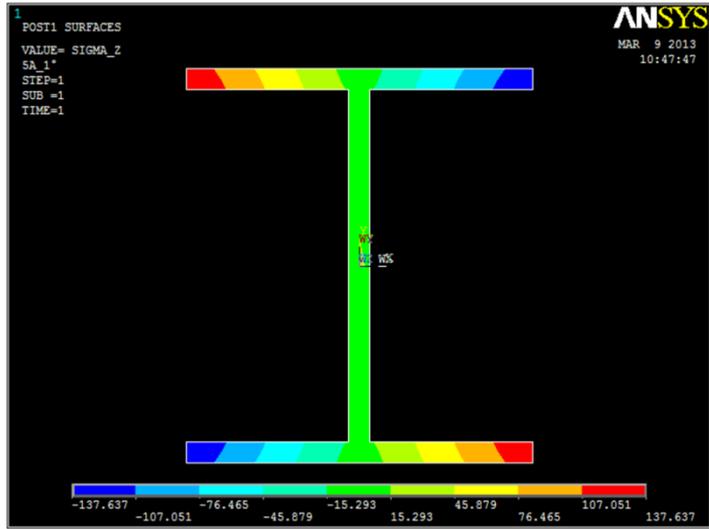
Sezione 4





Sezione 5



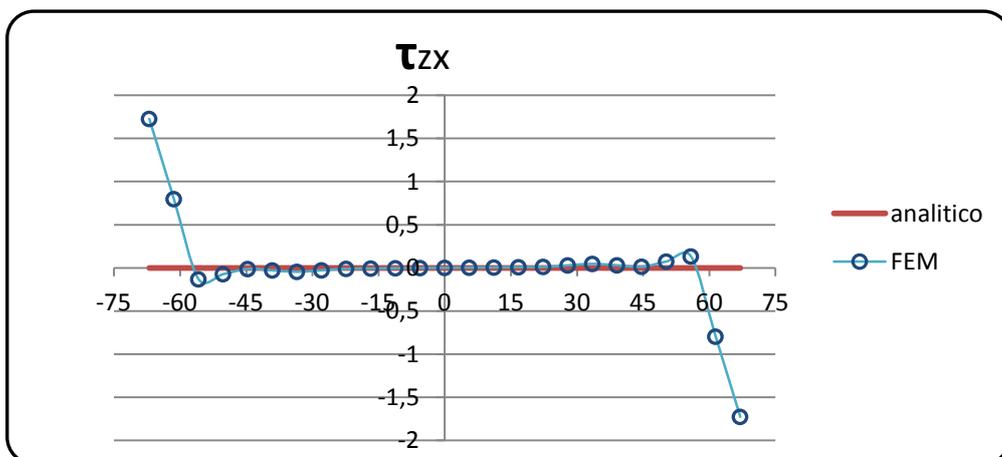
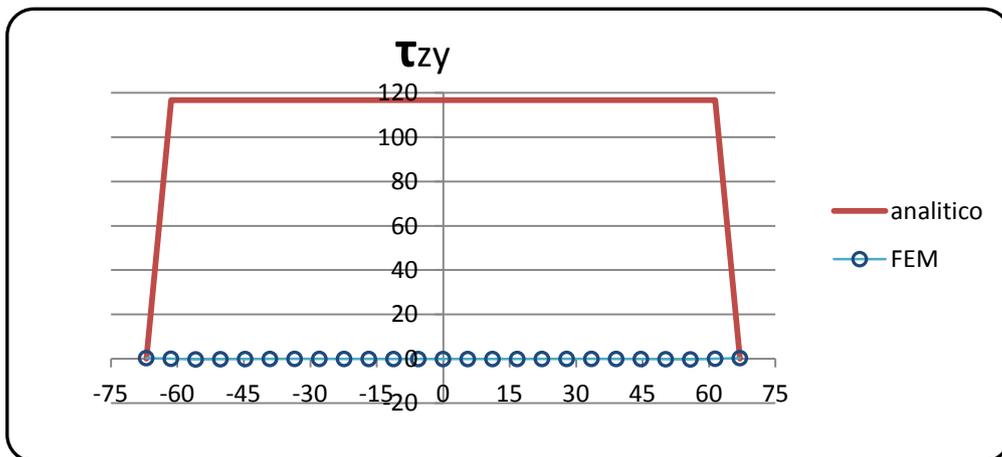
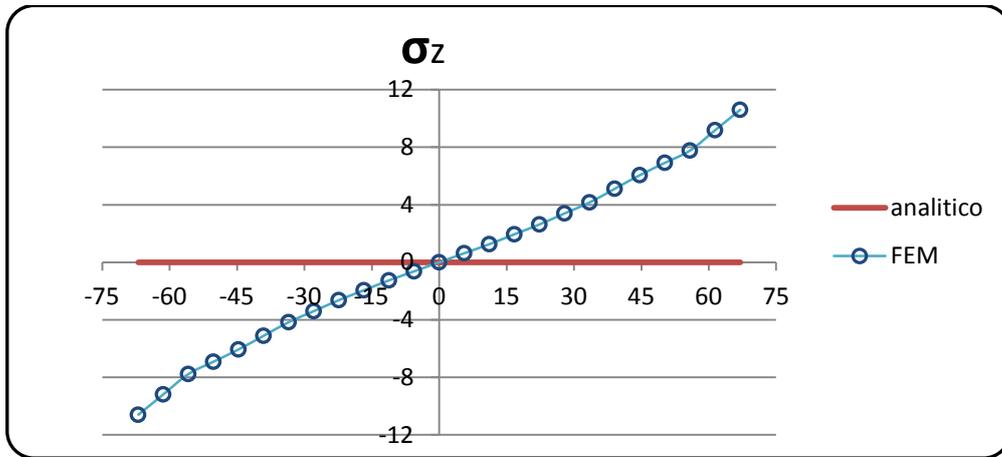


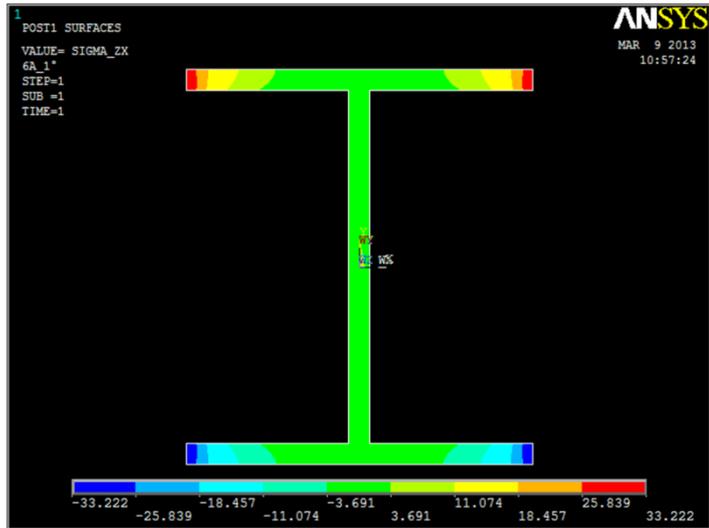
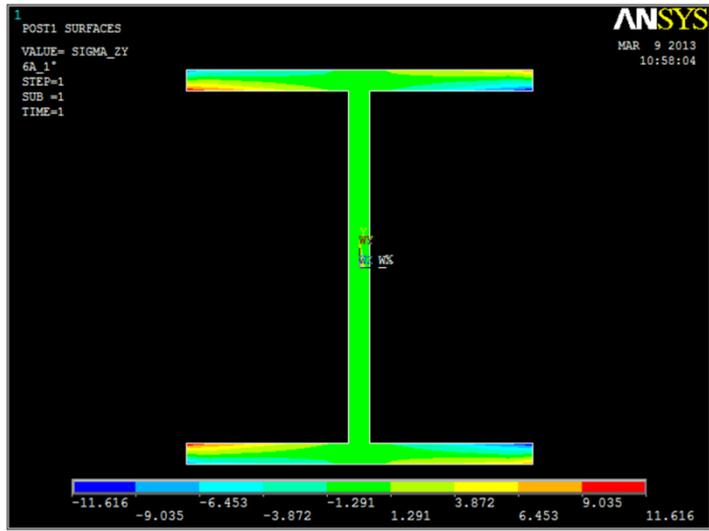
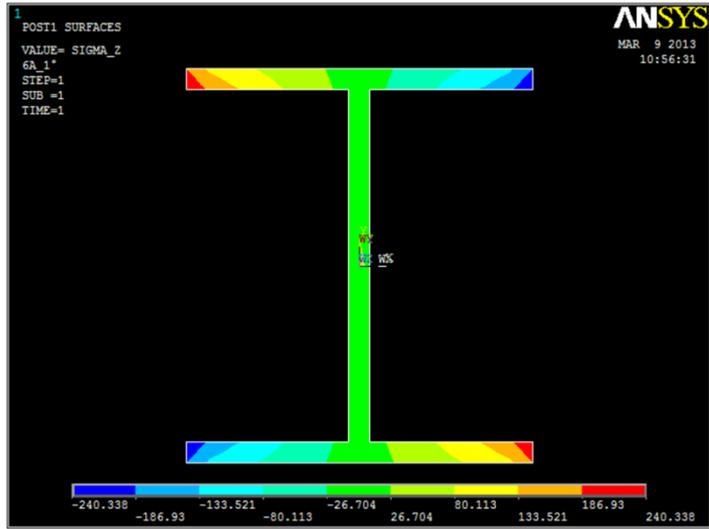
Sulle sezioni centrali si vede subito che ci sono dei problemi per quanto riguarda la σ_z : il FEM rileva infatti in ogni sezione delle componenti normali di tensione, che secondo la teoria invece non dovrebbero esserci. Nella sezione 5 esse sfiorano anche i 15 MPa. Possiamo probabilmente imputare questo effetto al fatto che il momento torcente è stato applicato grazie a due forze distribuite sui nodi superiori ed inferiori della prima sezione della trave e che quindi, probabilmente, producono un effetto che non è perfettamente equivalente a quello di un momento torcente puramente teorico. Come vedremo, distribuendo in maniera più o meno uniforme le forze su più nodi della sezione non limitiamo questo effetto. Per questa analisi comunque può andare bene il metodo che è stato usato. Da rilevare che la tensione sigma, su punti non compresi dal path in analisi, raggiunge tensioni considerevoli, ad esempio in prossimità della zone estreme delle alette abbiamo circa 30 MPa per la sezione 2 mentre troviamo anche un ulteriore aumento di 100 MPa nella sezione 5.

L'analisi delle τ_{ZY} conferma almeno in parte quanto è già stato detto per la sezione 1. L'andamento è piuttosto costante lungo il path ma l'intensità non può passare dal valore nullo al valore massimo improvvisamente. L'intensità aumenta comunque gradualmente dall'intersezione con le ali verso il centro dell'anima, ma non raggiunge mai il valore stimato analiticamente, a confermare come la formula utilizzata serva più per fare una stima che non per conoscere il valore esatto della tensione. Dai grafici si può vedere anche come il valore massimo della tensione sia maggiore nelle prime sezioni, in prossimità dell'applicazione del carico, e poi tenda a diminuire in modulo, mentre secondo la teoria il modulo delle tensioni è sempre uguale in ogni sezione della trave. Più ci si sposta verso la sezione dove ci sono i vincoli e più l'intensità delle tensioni risulta costante lungo il path, proprio come previsto dalla teoria, anche se come detto il valore registrato è molto inferiore a quello stimato teoricamente. Le immagini dei contour plot evidenziano bene l'andamento delle tensioni lungo i tratti verticali dell'anima, ma si può notare un'altra differenza con la teoria: secondo l'analogia idrodinamica per sezioni in parete sottile a profilo aperto come questa, la tensione dovrebbe essere costante in modulo lungo tutto lo spessore del tratto in questione e cambiare solo in verso; il FEM invece rileva sui bordi esterni componenti più elevate di tensione (zone rosse e blu) rispetto ai bordi interni (zone verdi).

La componente delle tensioni lungo l'asse x, le τ_{zx} , sono invece nulle lungo un tratto verticale come quello di questo path, sempre secondo la teoria idrodinamica. L'ipotetico fluido messo in rotazione dentro la sezione tenderà infatti a scorrere seguendo i lati e non perpendicolarmente ad essi, almeno sulle zone centrali di ogni lato. Il FEM conferma bene la teoria in ogni sezione considerata. Ovviamente si registrano degli effetti di bordo (che vanno via via diminuendo all'aumentare della distanza dalla ripartizione del carico e quindi passando rispettivamente dalle sezioni 2, 3, 4 e 5) sia perché come detto la tensione non può passare da un valore nullo in questo caso ad un valore massimo quando cambia di direzione, sia perché l'analisi ai bordi, con questa mesh, non può essere molto precisa. Anche in questo caso le immagini dei contour plot evidenziano bene l'andamento delle τ lungo i lati orizzontali della trave, con lo stesso problema evidenziato sulle τ_{ZY} per quanto riguarda l'intensità sull'intero spessore.

Sezione 6





Sull'ultima sezione l'analisi non porta a ottimi riscontri: le differenze fra i risultati sono molto evidenti.

Sono presenti componenti di σ_z in tutta la sezione mentre il valore di questa componente di tensione dovrebbe essere sempre nullo secondo la teoria.

Anche in questo caso comunque le motivazioni possono essere quelle descritte in precedenza a riguardo della disposizione del vincolo. Dall'immagine del contour plot si vede che le distorsioni maggiori si trovano alle estremità delle alette, che subiscono un'azione di trazione e di compressione.

Le τ_{zy} rilevate dal FEM hanno un andamento costante su questo path e di modulo inferiore all'unità. Dal grafico comunque si nota che anche per questa sezione la formula analitica utilizzata sovrastima sensibilmente i valori di tensione, come avveniva sulle altre sezioni. Anche dall'immagine della distribuzione delle tensioni non si nota più la netta distribuzione delle τ_{zy} lungo l'anima attraverso fasce colorate verticali come avveniva in precedenza. Su questa sezione quindi la teoria idrodinamica si discosta ancor di più dalla realtà che in precedenza.

Stesso discorso vale anche per le τ_{zx} : già dalla rappresentazione del contour plot non si nota più la classica distribuzione orizzontale dei colori rappresentanti l'intensità di queste tensioni lungo le ali come avveniva per le sezioni precedenti. Il grafico invece mostra la solita incongruenza all'intersezione con le ali mantenendo tuttavia lo stesso andamento decrescente di questo effetto di bordo passando da 23 MPa della sezione 2 ai 21, 15 e 6 MPa delle sezioni 3, 4 e 5 per scendere quindi sotto ai 2 MPa nella sezione 6.

In questa sezione, come avveniva per le τ_{zx} in flessione nel path verticale, si ha una buona previsione dell'andamento reale delle stesse.

4.2 Path orizzontale

Confrontiamo i risultati ottenuti lungo il path orizzontale (percorso evidenziato in figura 4.2) per le varie sezioni. Per ognuna di esse sono riportati i grafici rappresentanti l'andamento delle tensioni significative e le relative immagini dei contour plot. Sull'asse verticale di ciascun grafico sono rappresentati i valori di tensione in MPa, mentre sull'asse orizzontale è rappresentata la distanza x in mm del punto dall'asse baricentrico.

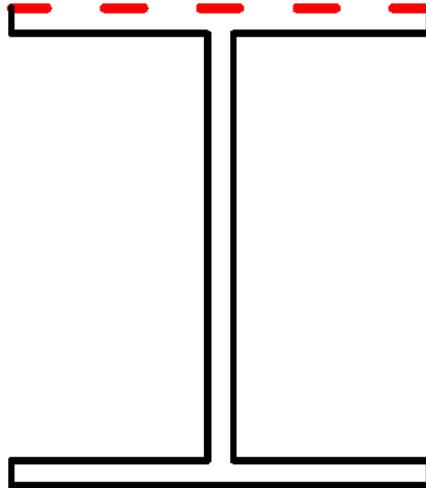
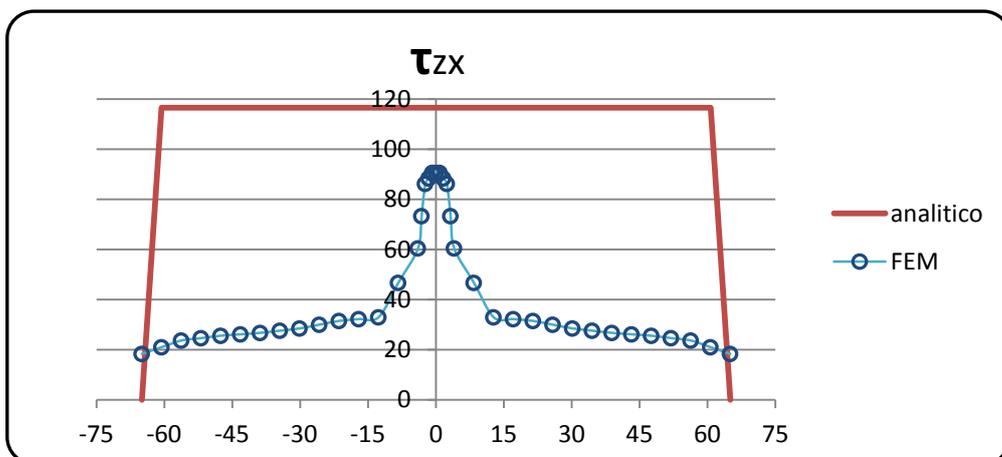
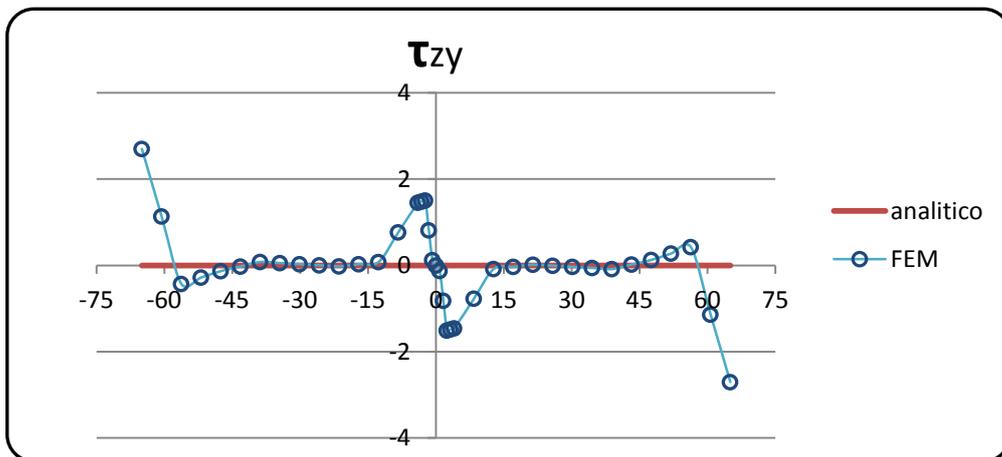
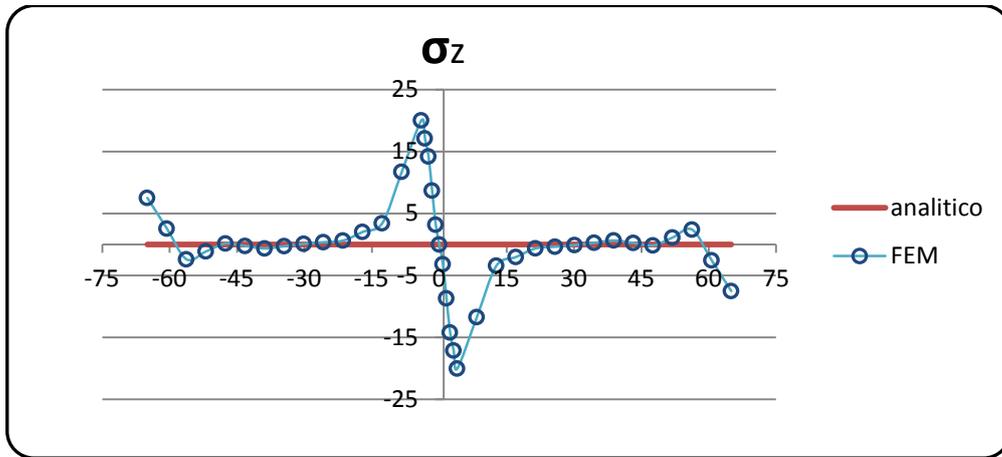


Fig. 4.2 Path orizzontale per la tensione

Sezione 1



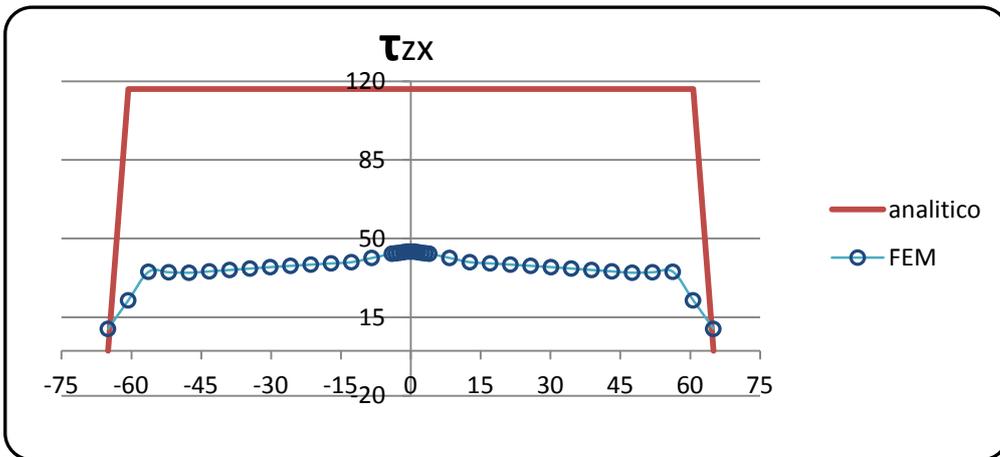
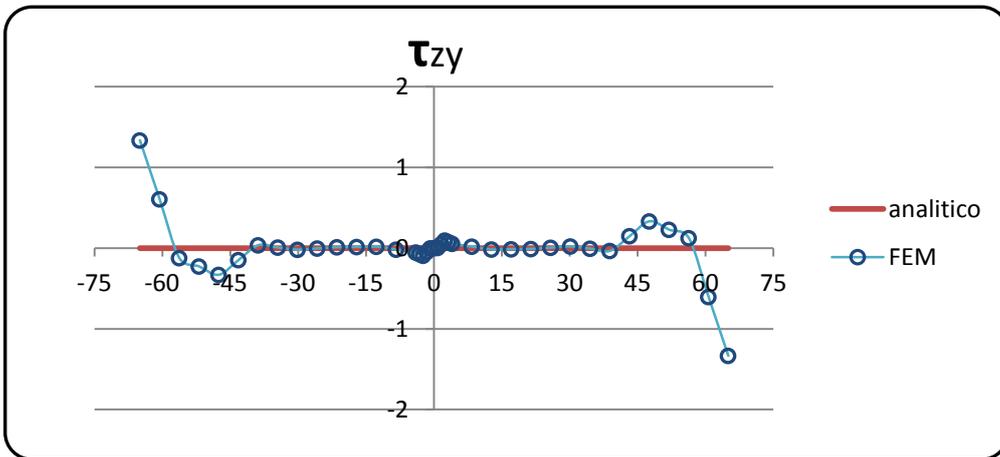
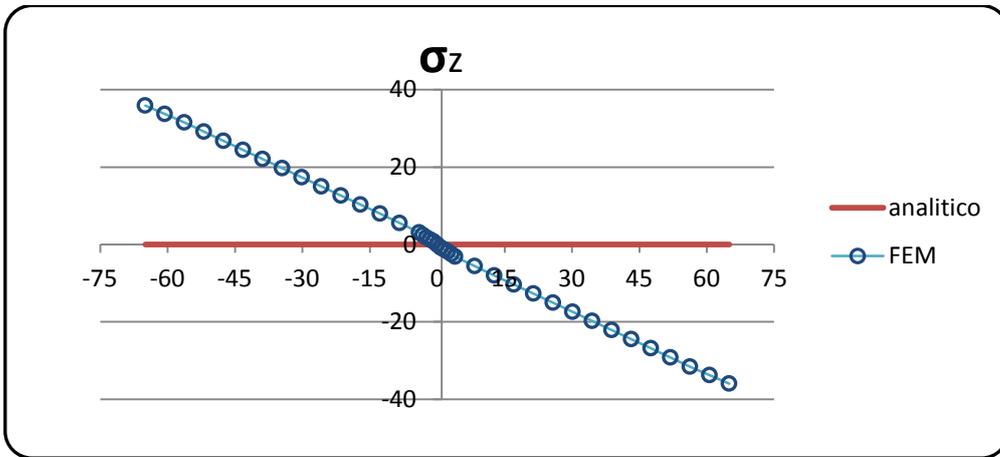
Su questo tratto orizzontale della sezione ci si aspettano risultati simili a quanto visto per il path precedente, dove le considerazioni fatte prima per le τ_{ZY} ora varranno per le τ_{ZX} e viceversa, mentre per la tensione lungo z le considerazioni sono proprio le stesse.

L'analisi delle tensioni σ_z sulla sezione 1 produce dei risultati abbastanza buoni nel senso che il FEM conferma almeno in parte la teoria: le tensioni lungo z sono praticamente nulle ad eccezione delle zone in prossimità della mezzeria dell'ala, dove sono presenti dei picchi di circa 20 MPa, e un effetto alle estremità del path, ma questa non è una cosa sorprendente a causa degli effetti di bordo di cui abbiamo più volte detto.

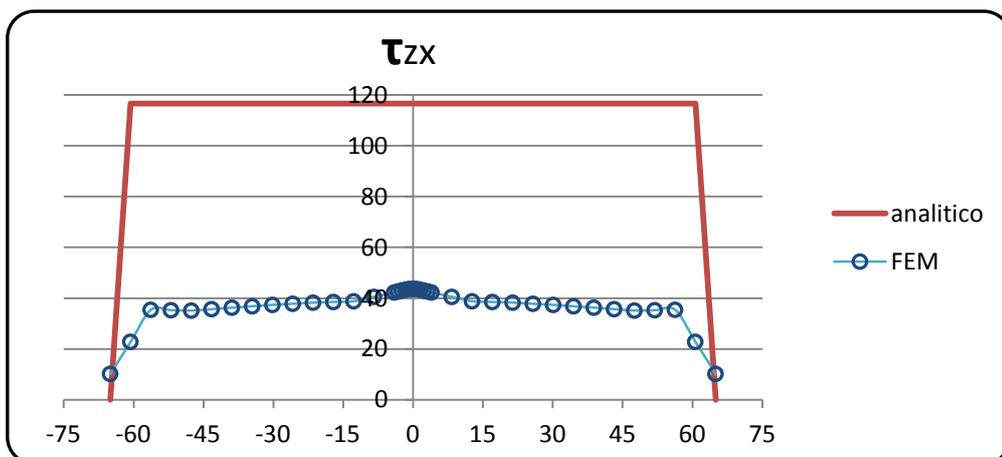
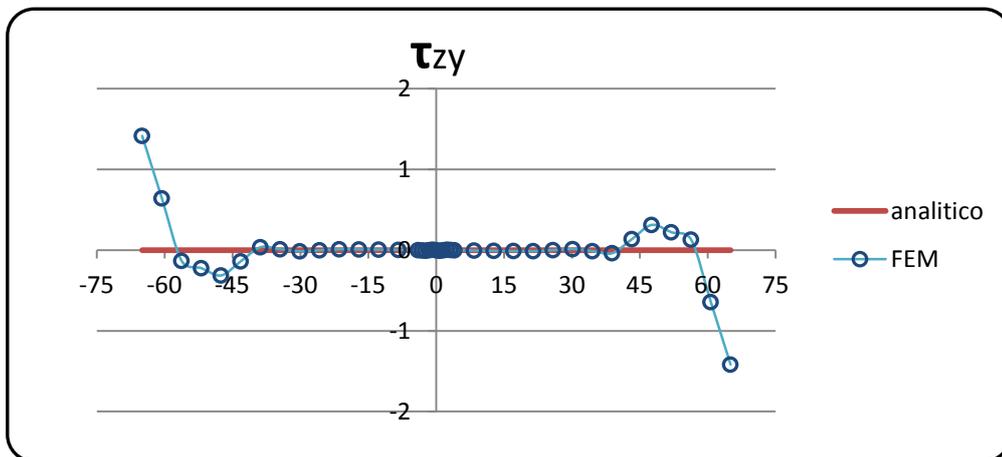
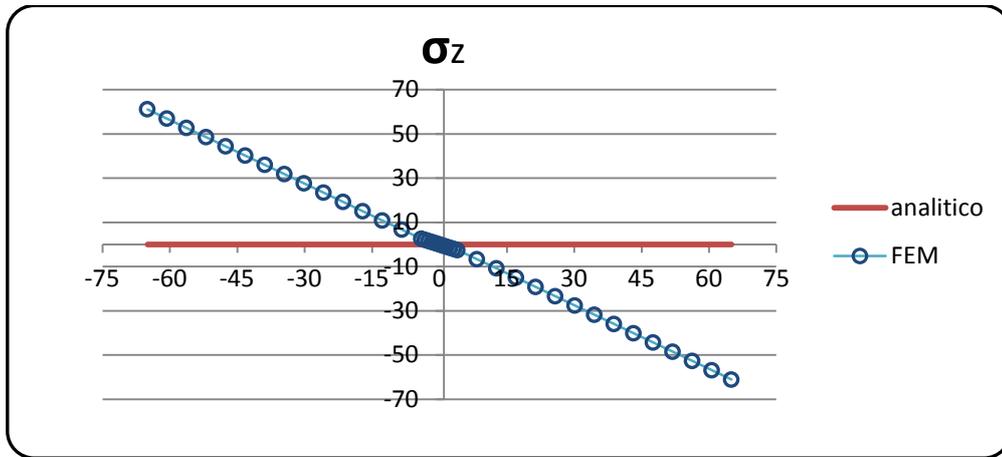
Secondo l'analogia idrodinamica l'ipotetico fluido messo in rotazione avrà ora una componente di velocità orizzontale nella direzione del path analizzato, e quindi anche le tensioni tangenziali saranno dirette orizzontalmente. Non ci dovrebbero quindi essere in questi punti componenti di tensione τ_{ZY} e in effetti il FEM conferma l'analisi teorica registrando lievi discordanze sempre in prossimità dell'intersezione con l'anima. È presente la solita componente non nulla ai bordi che invece non dovrebbe essere presente trattandosi di due zone dove la tensione cambia di direzione, anche con il precedente path avevamo rilevato questa incongruenza.

Le τ_{ZX} hanno un andamento che non è costante come invece vuole l'analogia idrodinamica: come nell'analisi precedente la formula utilizzata sovrastima le tensioni. Dall'immagine del contour plot si vedono già in questa sezione delle zone dove le tensioni hanno maggiore intensità ossia in prossimità dei bordi esterni delle ali.

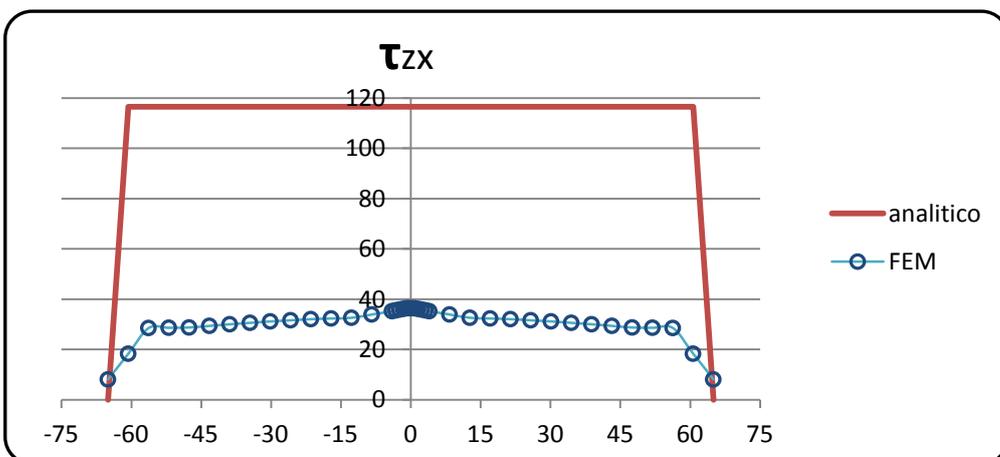
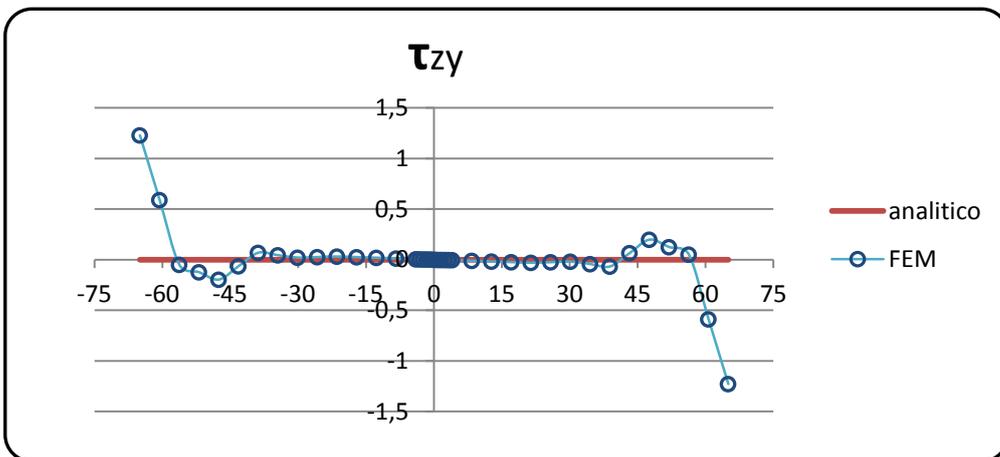
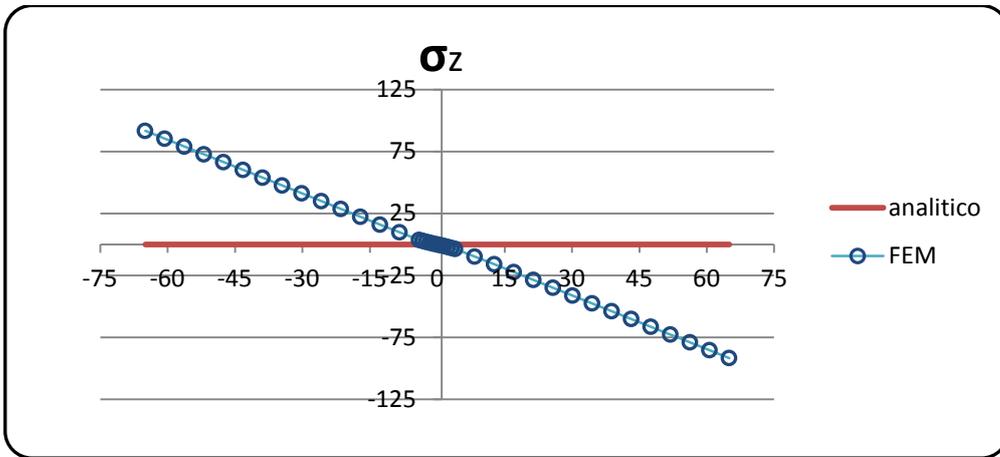
Sezione 2



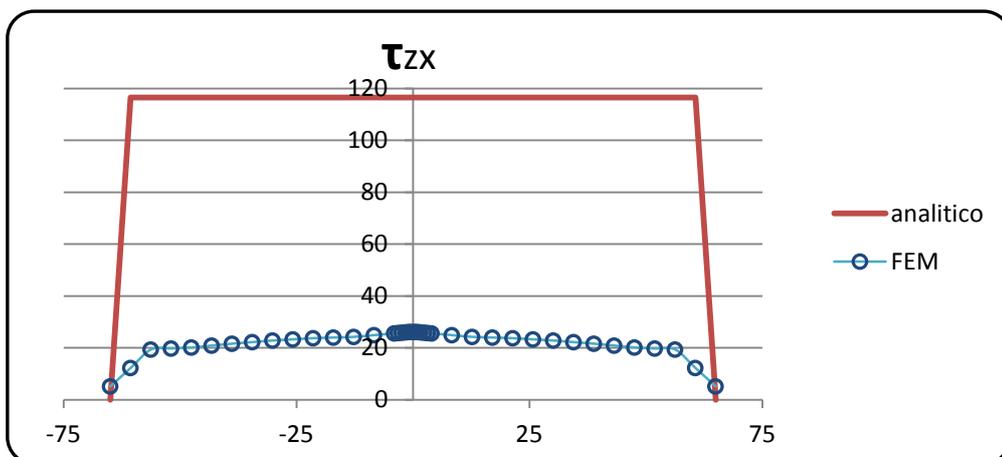
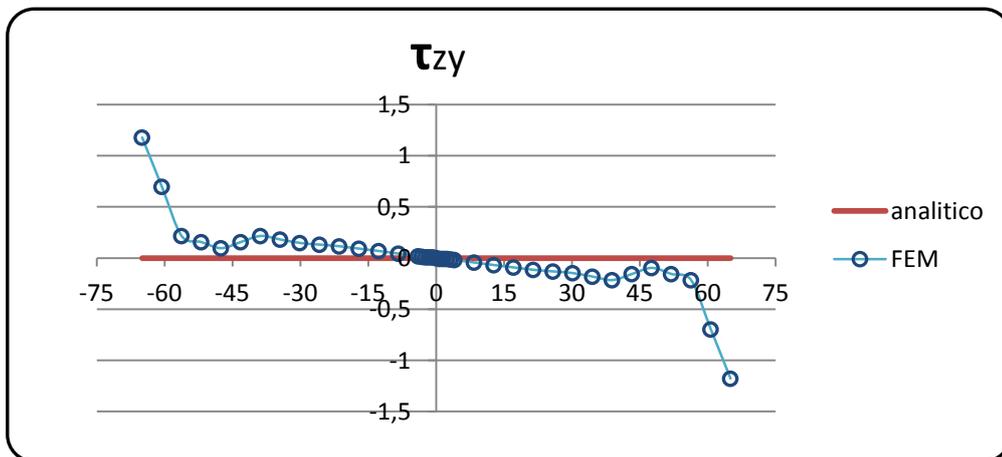
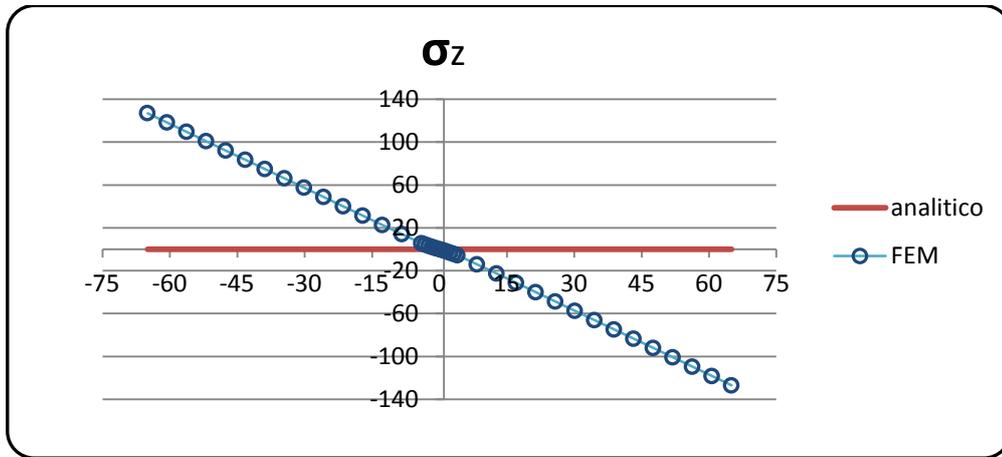
Sezione 3



Sezione 4



Sezione 5



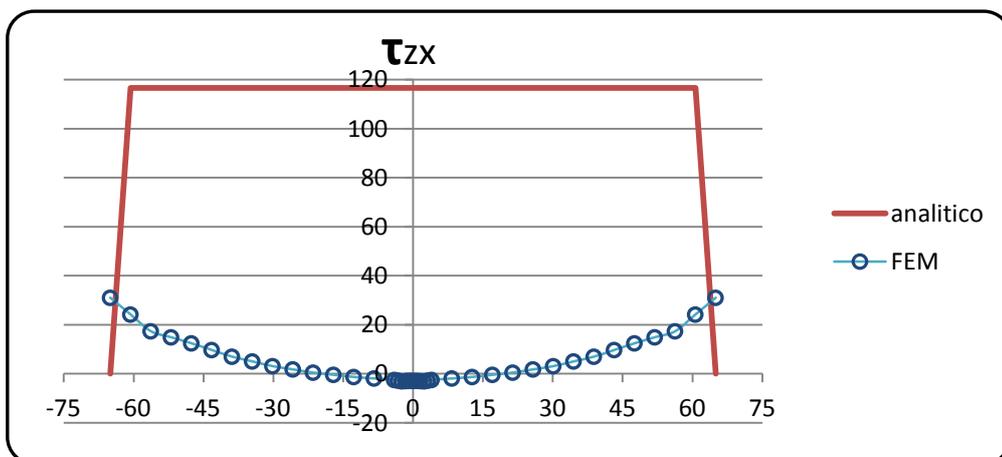
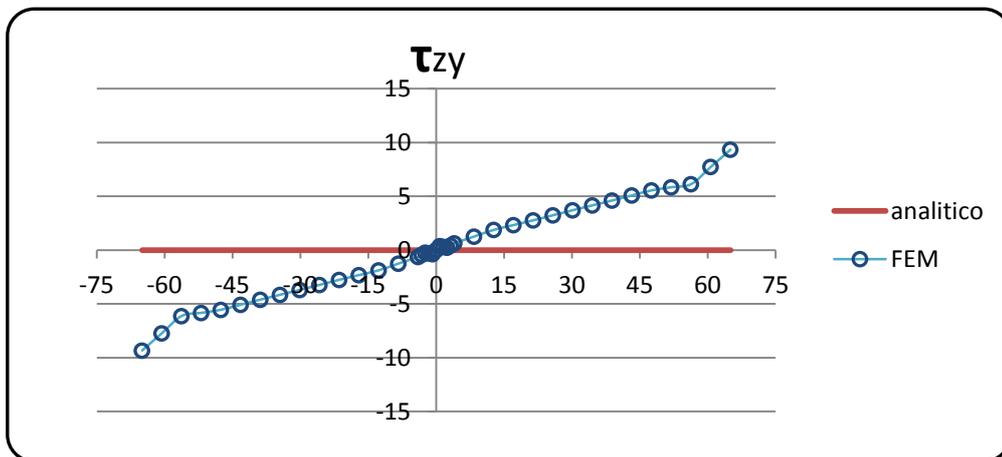
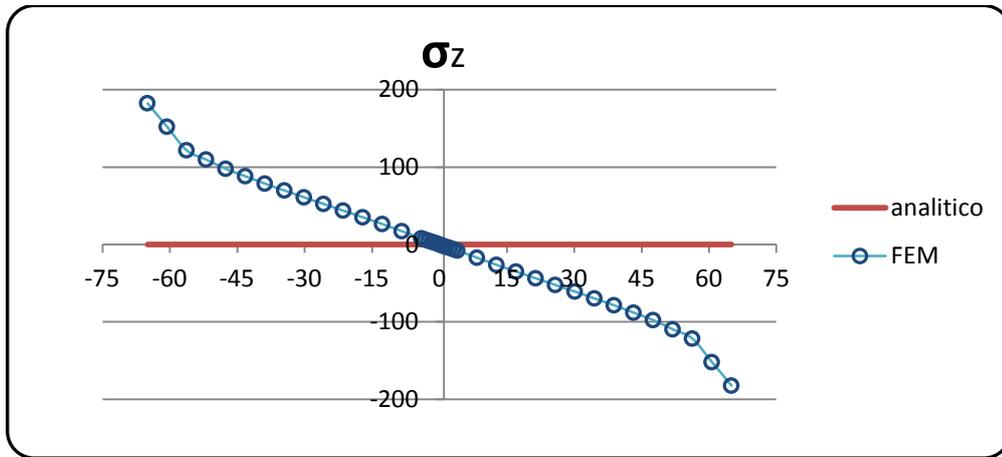
Anche su questo secondo path, per le sezioni centrali, ci sono dei problemi per quanto riguarda la σ_z : il FEM rileva infatti in ogni sezione delle componenti sigma di tensione, che secondo la teoria invece non dovrebbero esserci, come abbiamo detto prima. I valori non sono trascurabili proprio come in precedenza infatti nella sezione 5 raggiungono i 120 MPa. Inoltre osservando i contour plot noto che, ad eccezione della sezione 2, le tensioni di trazione e compressione sulle ali agiscono nel bordo interno su una zona più ampia rispetto al bordo esterno sul quale si è scelto di fare questa analisi.

La componenti di tensione τ_{zy} dovrebbero essere sempre nulle visto che il fluido ipotetico avrebbe componenti di velocità solamente orizzontali lungo questo path e il FEM conferma pienamente quanto appena detto. A parte i soliti effetti di bordo, comunque limitati, anche il calcolatore non rileva componenti lungo y di tensione tangenziale e questo vale per ogni sezione dalla numero 2 alla numero 5.

Dalle immagini del contour plot si può invece notare un'altra analogia con la teoria che nel path precedente invece non era emersa: il fatto che sia sul bordo esterno che sul bordo interno, sono presenti componenti di tensione tangenziale τ_{zx} che hanno stessa direzione, pressappoco uguale intensità e verso opposto; proprio come evidenziato dalla analogia idrodinamica. Cosa che invece non era presente sui tratti verticali dell'anima.

La teoria inoltre spiega che su tratti che hanno lo stesso spessore, l'intensità delle tensioni dovrebbe essere la stessa: questo accade per le sezioni 2, 3, 4, e 5 anche se con lievi differenze; non è invece verificato per la prima ed ultima sezione.

Sezione 6



Sull'ultima sezione, come era avvenuto per il path verticale, non c'è praticamente nessuna analogia tra i risultati per quanto riguarda le tensioni σ_z , τ_{zx} e τ_{zy} .

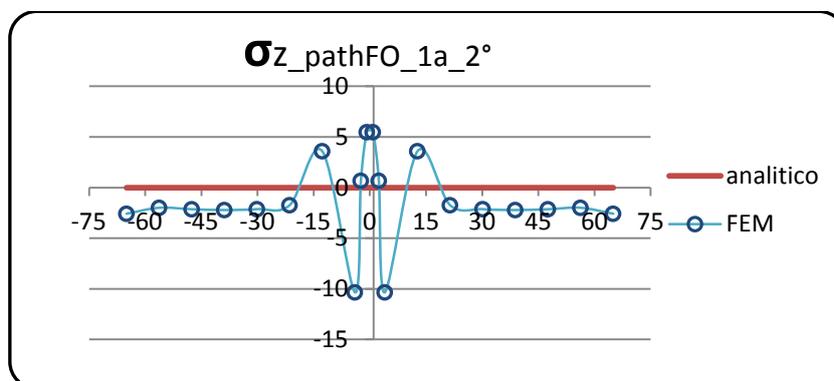
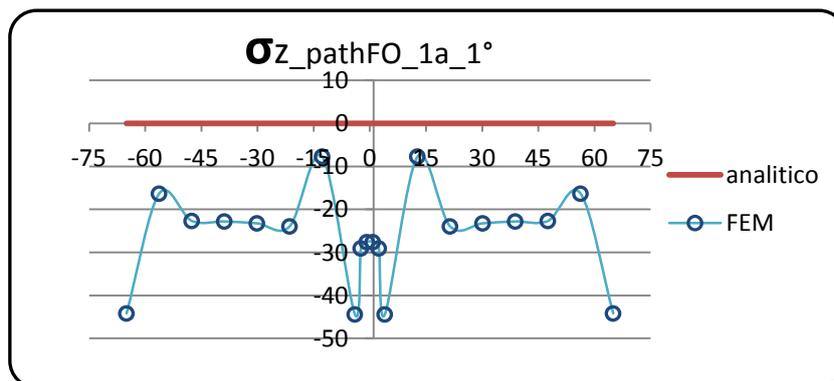
Sono infatti presenti tensioni lungo z anche di rilevante intensità, sfiorando i 200 MPa, che non dovrebbero esserci e l'analogia idrodinamica definisce un comportamento delle tensioni tangenziali che è ben lontano da quello reale evidenziato dal FEM. Dalle immagini della distribuzione delle tensioni non si può più apprezzare un andamento delle tensioni lungo il path orizzontale che possano ricondursi alla velocità di un fluido in rotazione, e anche le componenti verticali di tensione, che teoricamente non dovrebbero essere presenti, non si annullano.

5. Confronto flessione

5.1 Confronto modalità di ripartizione del carico

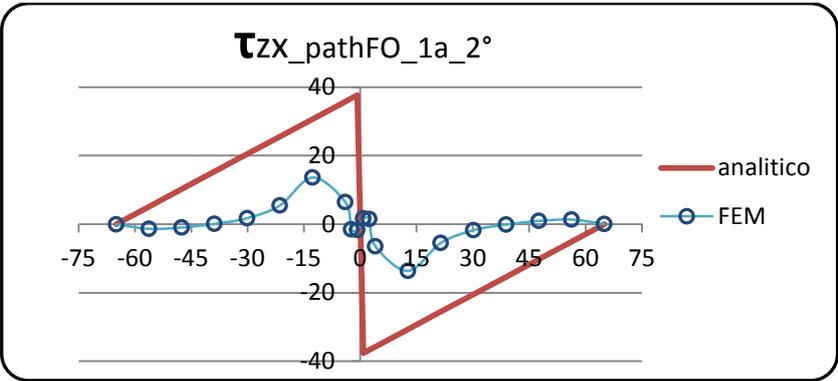
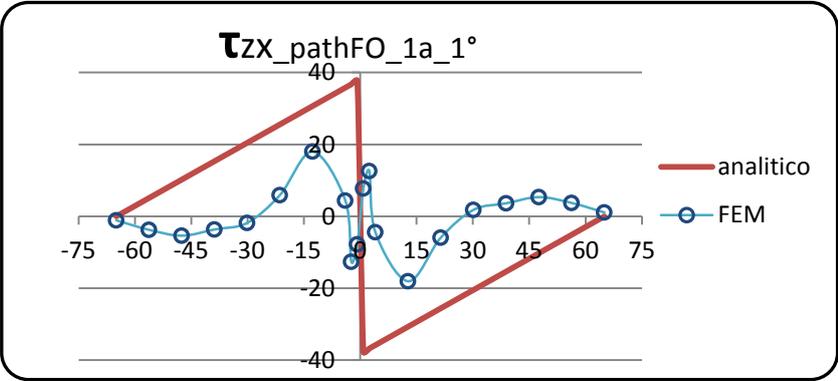
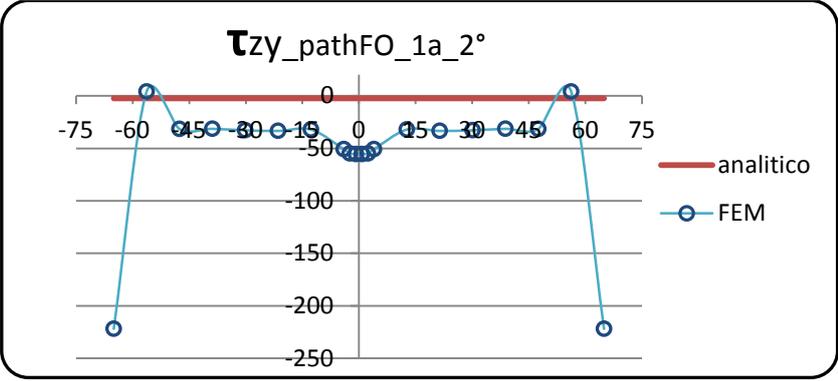
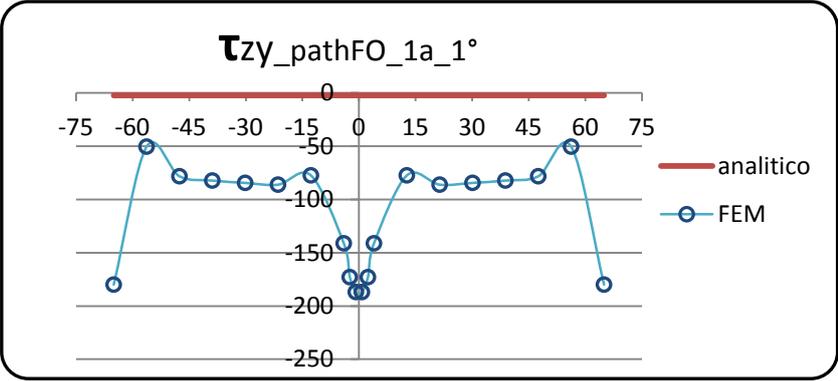
5.1.1 Path orizzontale

Sezione 1

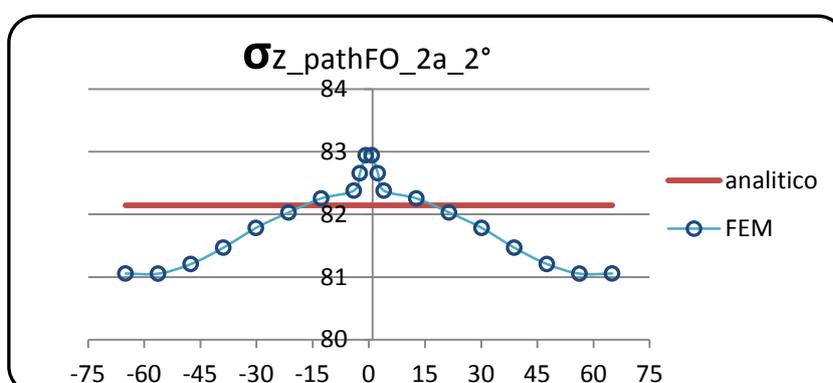
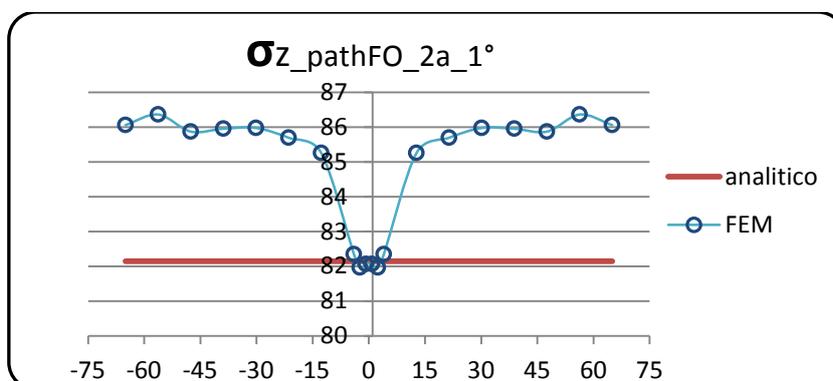


Per quanto riguarda la prima sezione vediamo che i valori delle tensioni σ_z registrati dal FEM con il secondo metodo, il quale comporta una distribuzione puntuale del carico più uniforme rispetto al primo, presentano minori scostamenti dalla trattazione analitica se confrontati con quelli prodotti da una ripartizione limitata. Il secondo, infatti, presenta un andamento più lineare delle tensioni e un intervallo di valori di 15 MPa mentre il secondo ha un andamento più variabile con intervallo più ampio di circa 40 MPa.

Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di taglio sulla prima sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come il secondo metodo sia più conforme alla trattazione teorica per quanto riguardano le τ_{zy} , pur registrando valori anomali agli estremi dell'ala, mentre per le τ_{zx} non si evidenziano particolari variazioni.

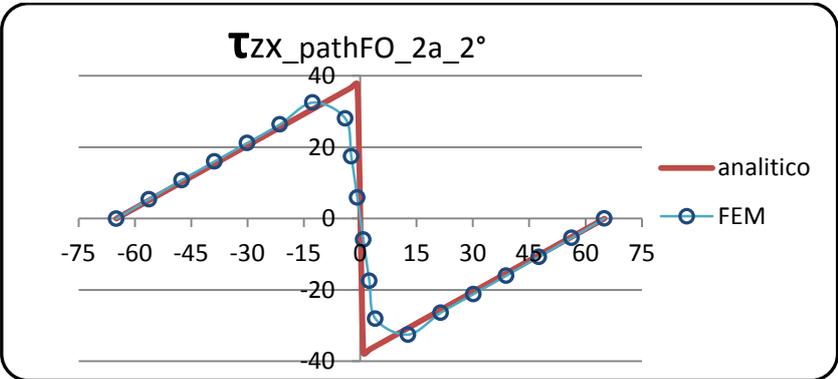
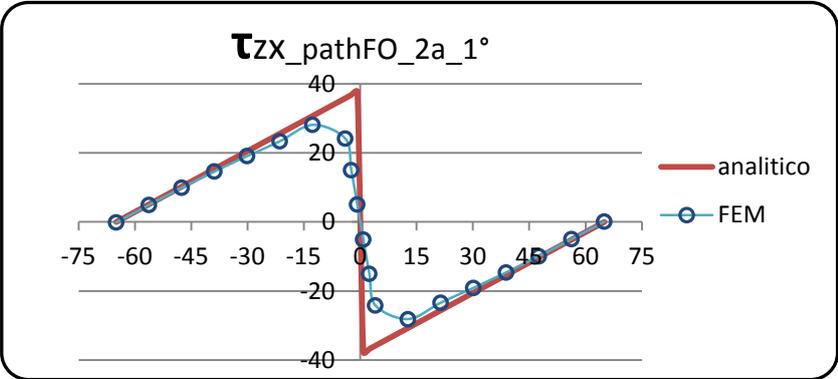
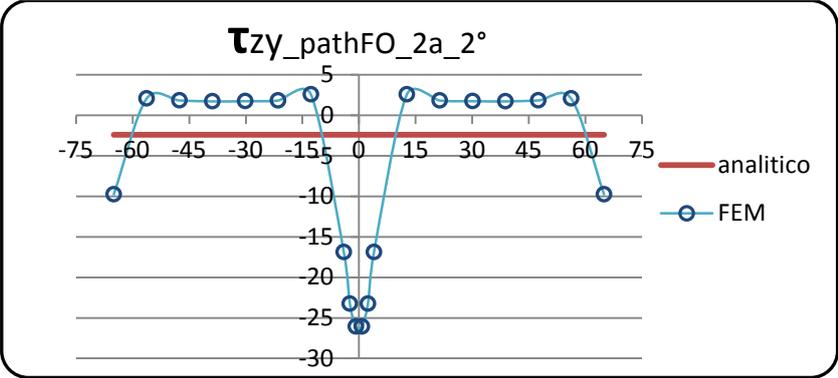
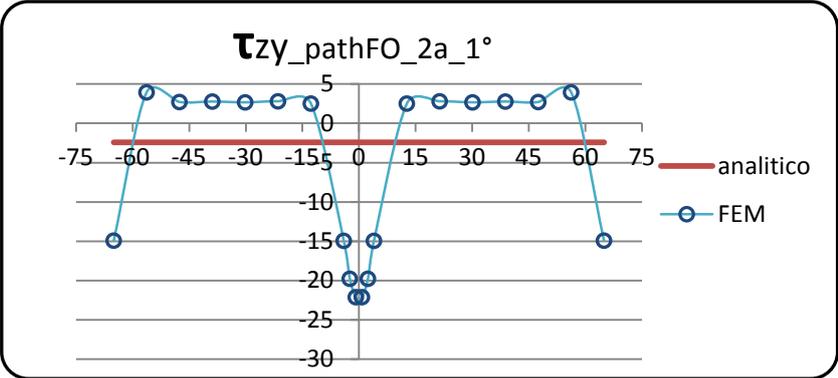


Sezione 2



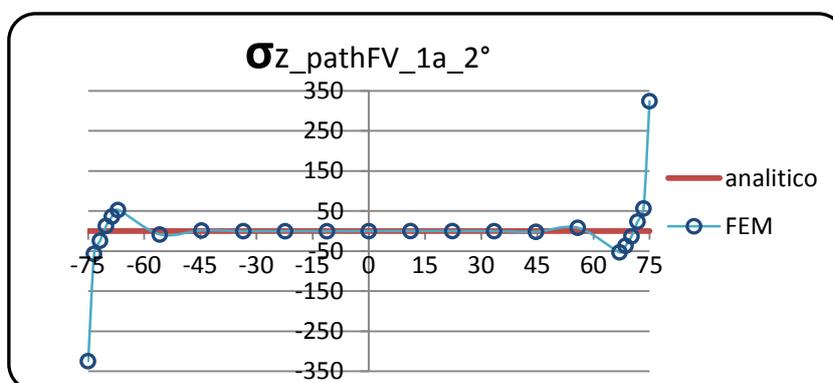
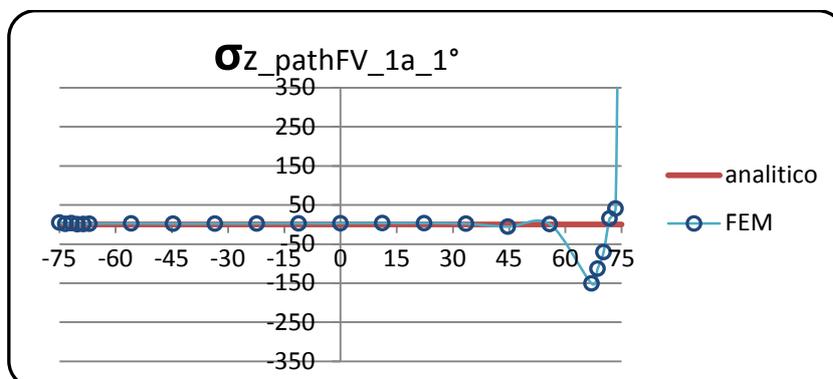
Nell'osservare i risultati ottenuti, sempre lungo il path orizzontale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo con il secondo metodo siano maggiormente congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto si discostano di solo ± 1 MPa dal valore costante di circa 82 MPa. Per quanto riguarda il primo metodo si hanno intensità che differenziano da detto valore teorico di 4 MPa. Per entrambi i metodi, ovviamente, si ha un notevole miglioramento della compatibilità dei risultati registrati rispetto a quelli ottenuti per la sezione 1 in quanto ci si è spostati dalla zona di applicazione del carico e le ipotesi secondo cui sono state ricavate le formula analitiche diventano più veritiere.

Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di taglio sulla prima sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come il secondo metodo, pur presentando l'anomalia in corrispondenza dell'intersezione con l'anima, riduce leggermente gli effetti agli estremi delle ali per quanto riguardano le τ_{zy} , mentre per le τ_{zx} non si evidenziano particolari variazioni se non una minore attenuazione della differenza che il primo metodo di ripartizione del carico comporta nell'ampiezza massima della farfalla confrontandola con quella analitica.



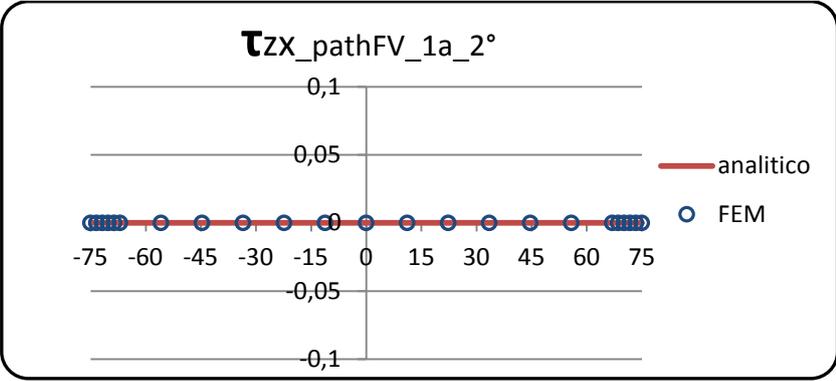
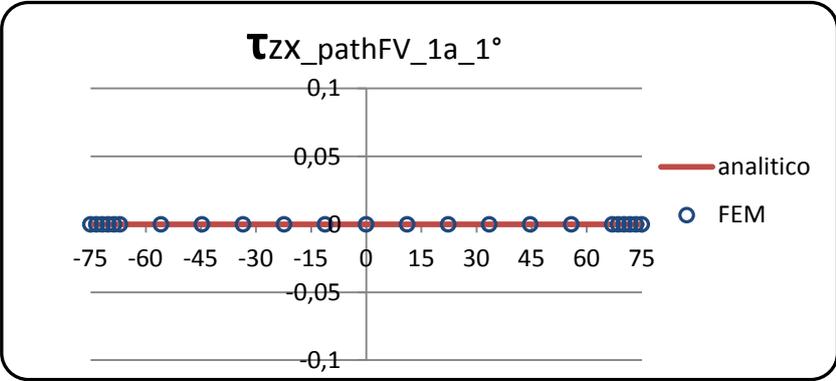
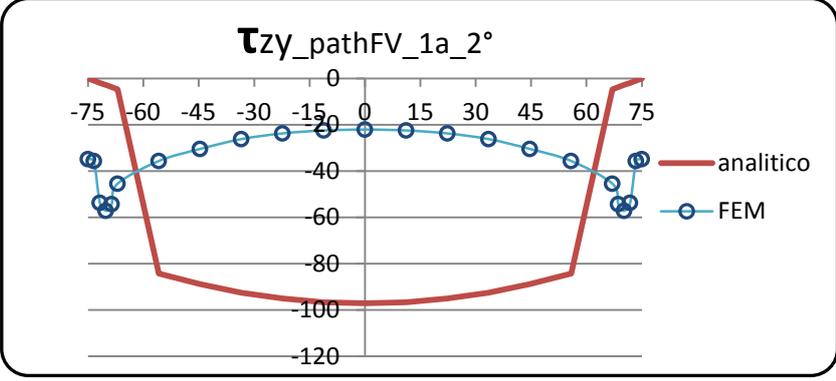
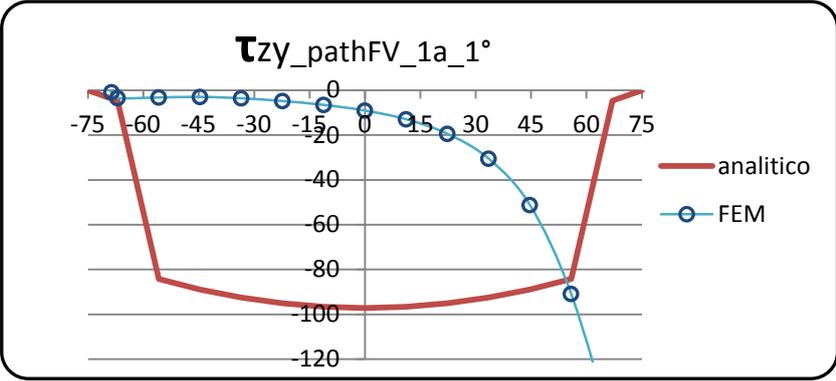
5.1.2 Path verticale

Sezione 1

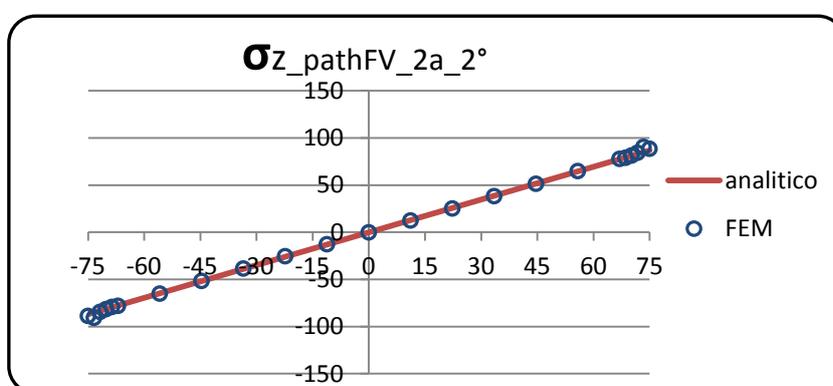
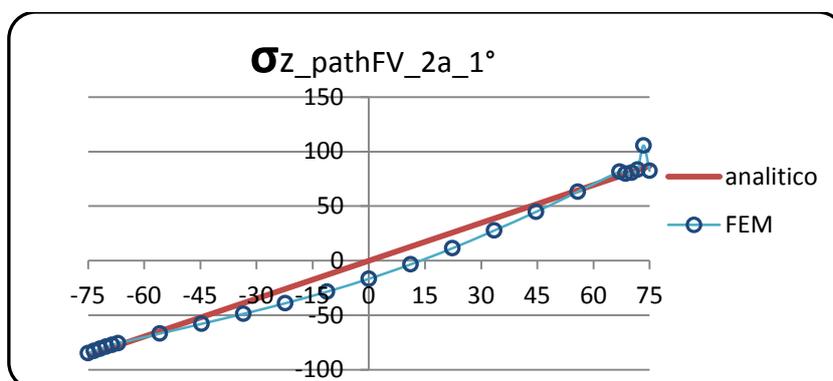


Per quanto riguarda la prima sezione vediamo che i valori delle tensioni σ_z registrati dal FEM con il secondo metodo, il quale comporta una distribuzione puntuale del carico più uniforme rispetto al primo, presentano scostamenti dalla trattazione analitica solo nei punti del path che si trovano nelle ali e questo effetto è dovuto al fatto che il carico è stato ripartito sul perimetro della sezione e quindi anche sullo spigolo inferiore della sezione, oltre che su quello superiore. Il primo metodo, infatti, presenta un'anomalia solo sullo spigolo superiore in quanto l'applicazione del carico la si è effettuata limitandosi ai punti chi gli appartengono. Le singole forze puntuali risultano così maggiori comportando un maggiore scostamento dalla tensione nulla; si raggiungono perciò i 1400 MPa contro i 350 MPa registrati con il secondo metodo.

Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di taglio sulla prima sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come entrambi i metodi siano totalmente incongruenti con la trattazione teorica per quanto riguardano le τ_{zy} , e come siano invece equivalenti per le τ_{zx} senza evidenziare alcuna variazione. Evidentemente, trattandosi della sezione sulla quale si è applicato il carico, sappiamo sicuramente a quale fattore imputare la causa di questa anomalia.

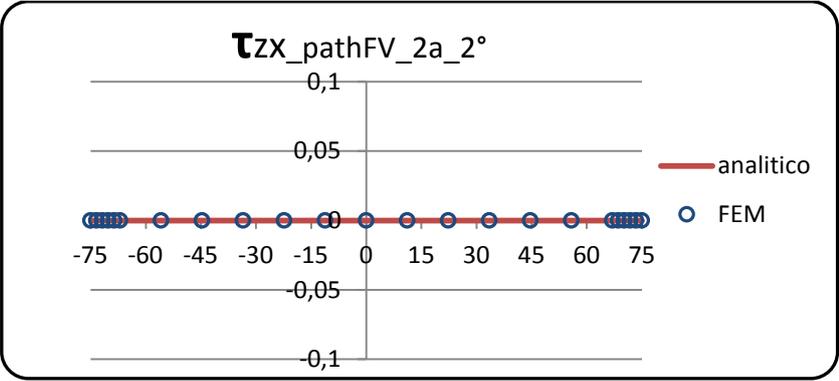
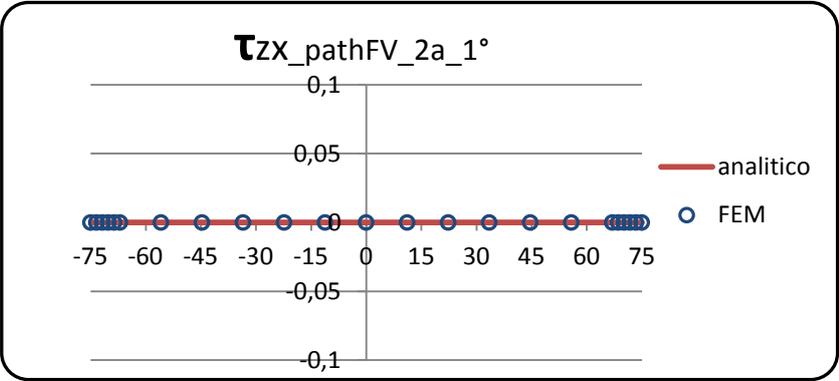
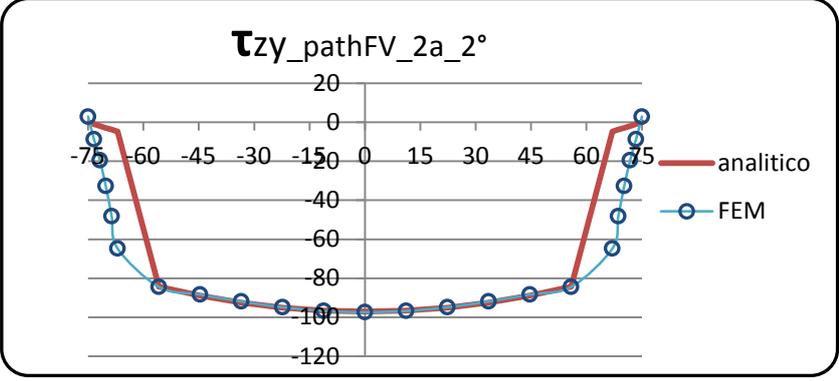
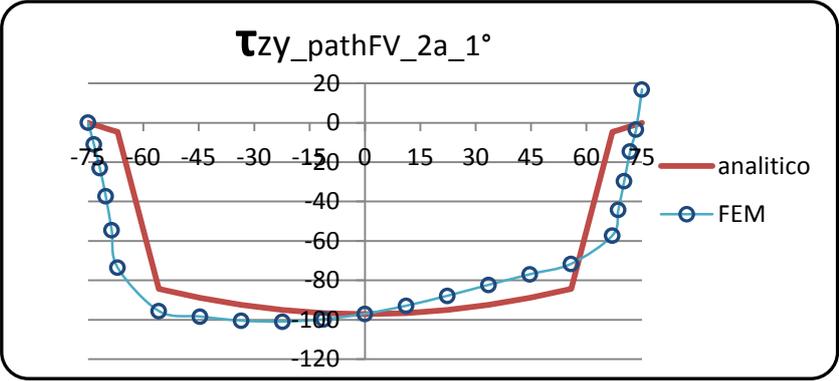


Sezione 2



Nell'osservare i risultati ottenuti, sempre lungo il path verticale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo con il secondo metodo siano maggiormente congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto non si apprezzano scostamenti rilevanti e l'andamento lineare delle tensioni normali alla sezione è ben rappresentato. Per quanto riguarda il primo metodo, si hanno leggere incongruenze nella zona centrale dell'anima; tuttavia è comunque riconoscibile l'andamento a farfalla. Per entrambi i metodi, ovviamente, si ha un notevole miglioramento della compatibilità dei risultati registrati rispetto a quelli ottenuti per la sezione 1 in quanto ci si è spostati dalla zona di applicazione del carico e le ipotesi secondo cui sono state ricavate le formule analitiche diventano più veritiere.

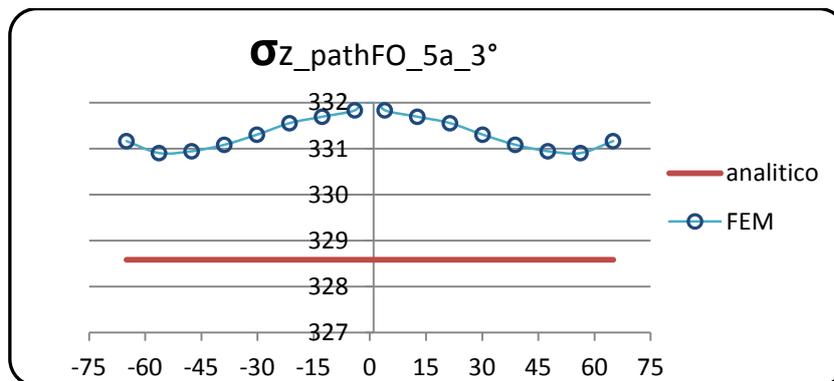
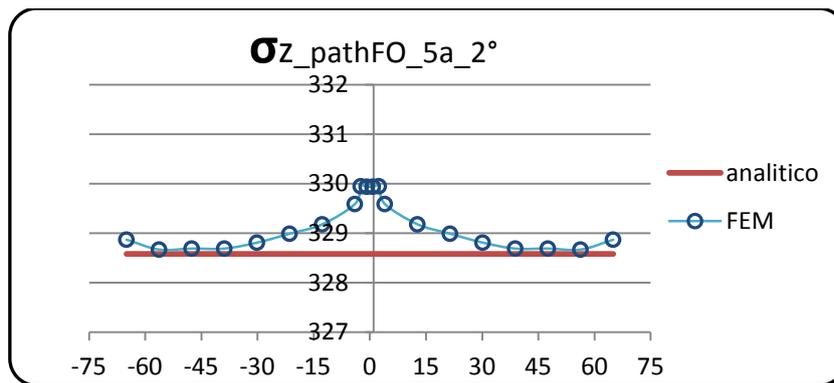
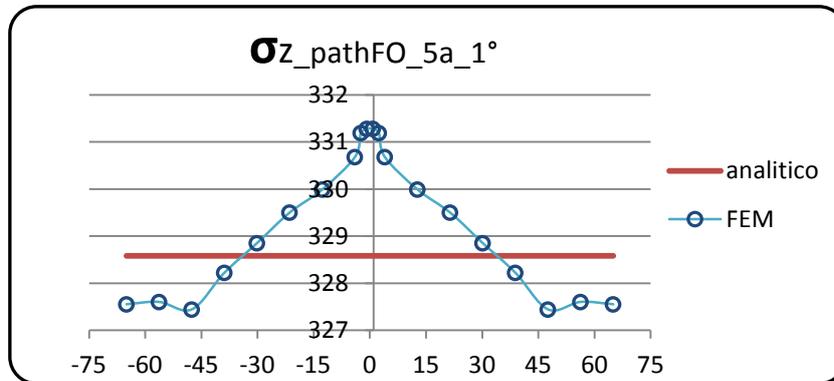
Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di taglio sulla prima sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come il secondo metodo riproduce le tensioni τ_{zy} più fedelmente di quanto faccia il primo, sebbene entrambi siano molto più congruenti alla teoria di quanto lo erano per la sezione 1; mentre per le tensioni τ_{zx} , le registrazioni sono equivalenti a quelle per la sezione 1.



5.2 Confronto modalità di applicazione dei vincoli

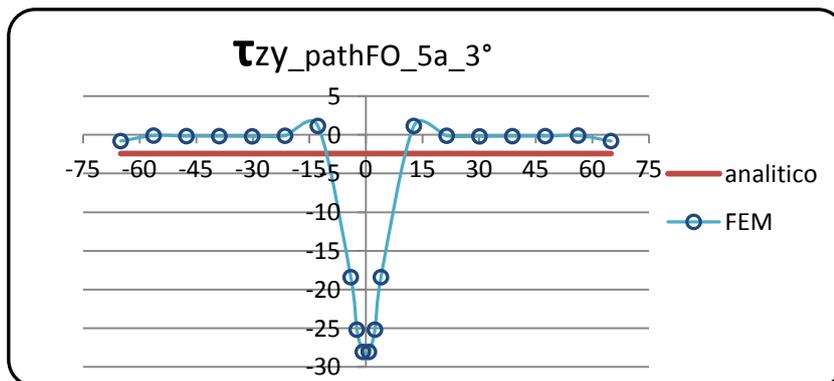
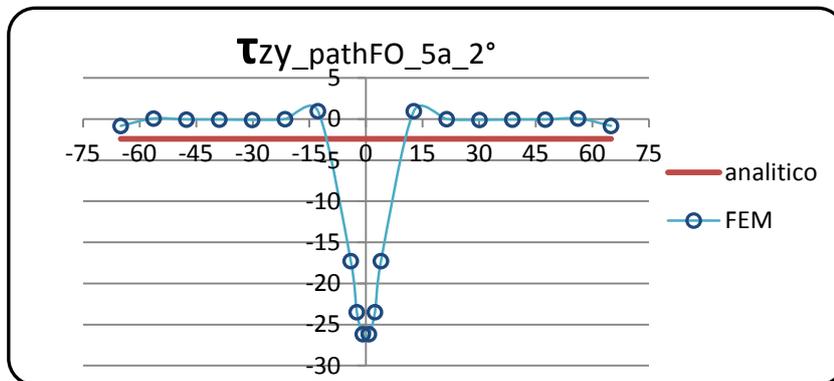
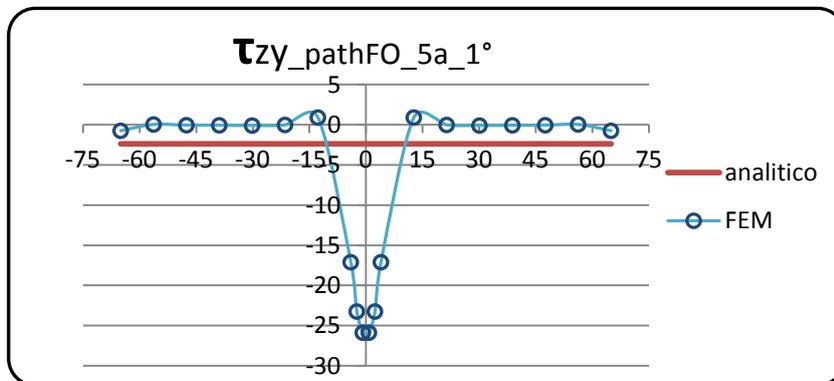
5.2.1 Path orizzontale

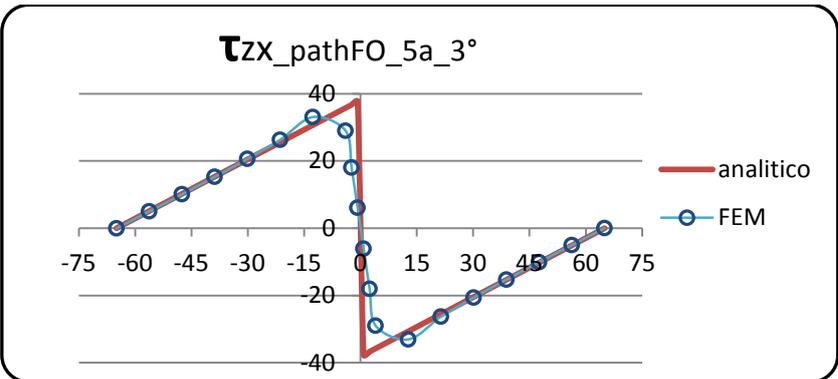
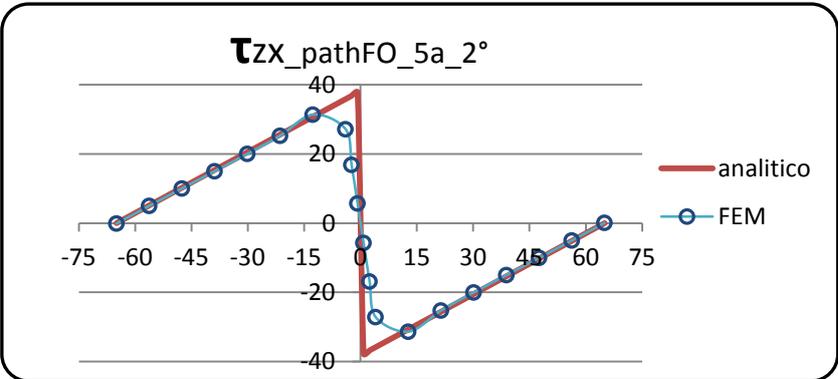
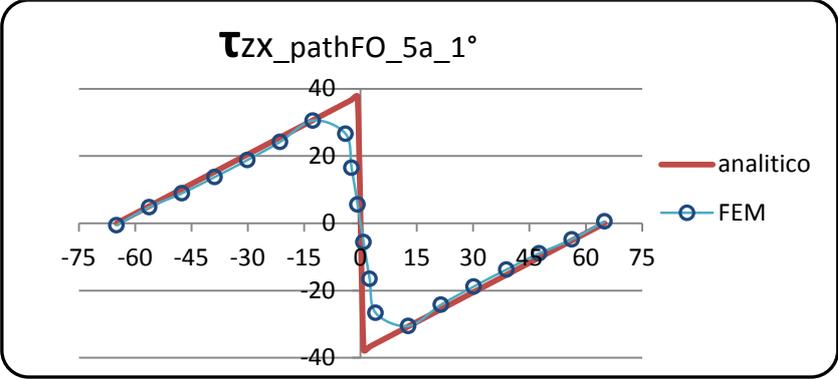
Sezione 5

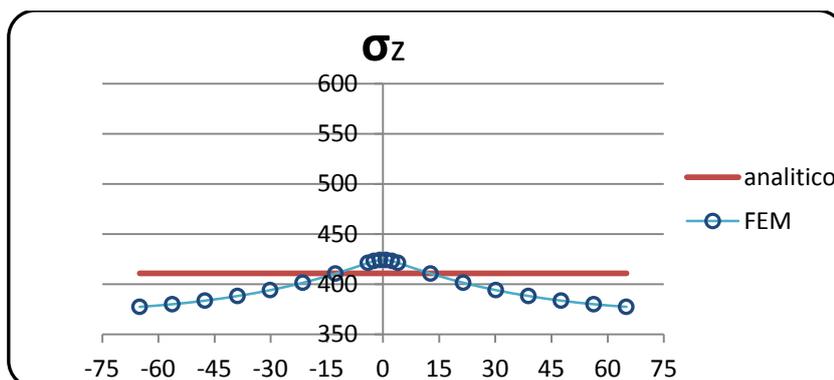
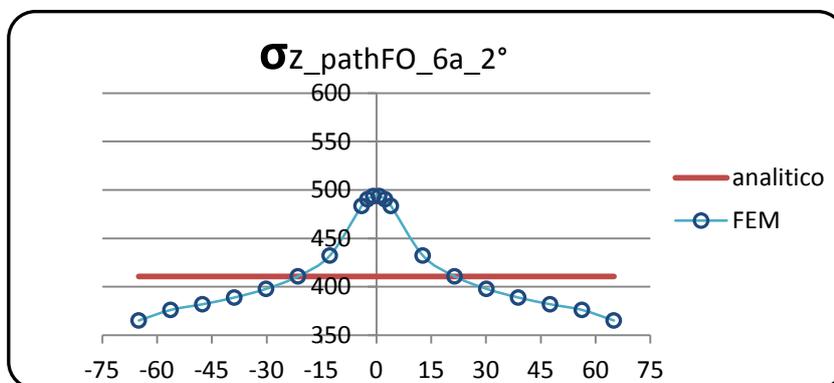
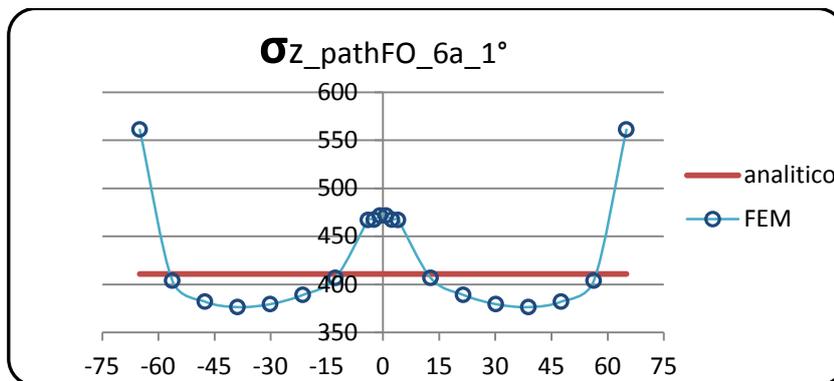


Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path orizzontale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo con il secondo metodo siano maggiormente congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto si discostano di solo 1 MPa dal valore costante di circa 329 MPa. Per quanto riguarda il primo metodo si hanno intensità che differenziano da detto valore teorico di ± 2 MPa presentando andamento piuttosto variabile. Per il terzo metodo invece torno ad avere andamento piuttosto rettilineo ma con intensità delle tensioni aumentata di 3 MPa rispetto al valore teorico. Tra i tre metodi quindi è preferibile il secondo, ottenuto bloccando deformazioni lungo l'asse y e z lasciando invece la sezione libera di deformarsi lungo l'asse x a meno di un nodo.

Nelle immagini seguenti è mostrato l'andamento delle tensioni di taglio sulla quinta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x. Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come entrambi i metodi portano agli stessi risultati e come sia indifferente, per queste tensioni di taglio, il fatto di aver lasciato l'asse x come direzione libera di deformazione per la quasi totalità dei nodi della sezione 6 avendone bloccato uno solo per il secondo metodo; y per il terzo metodo avendo vincolato solo lo spigolo inferiore della sezione 6.

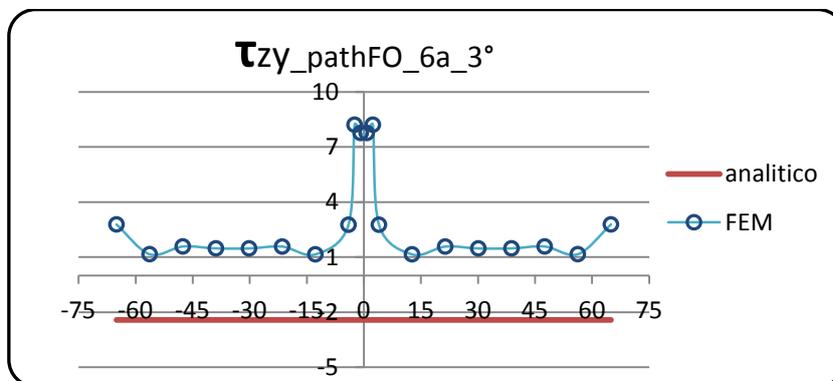
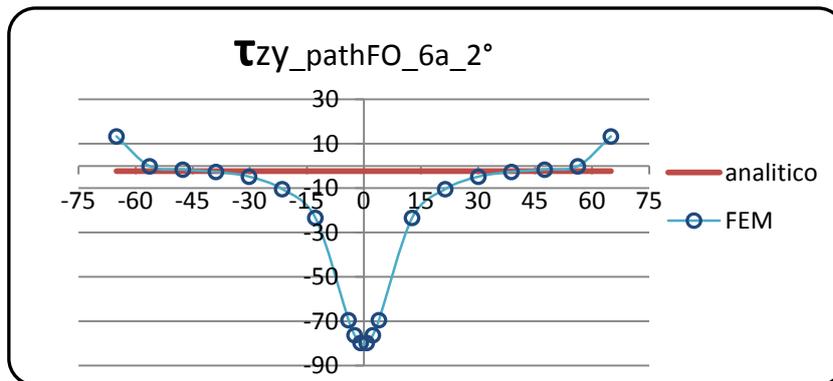
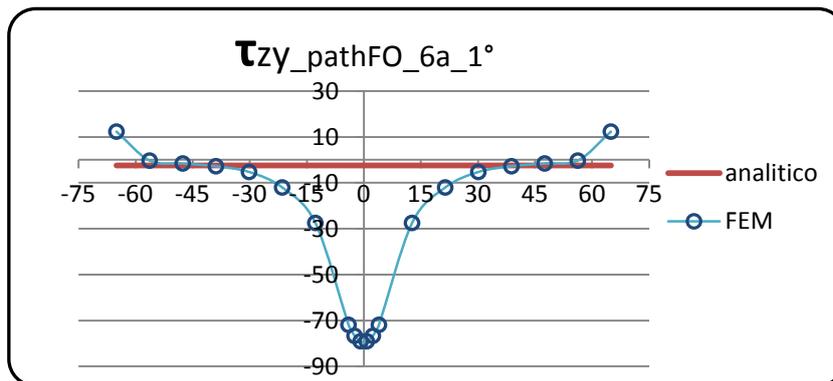


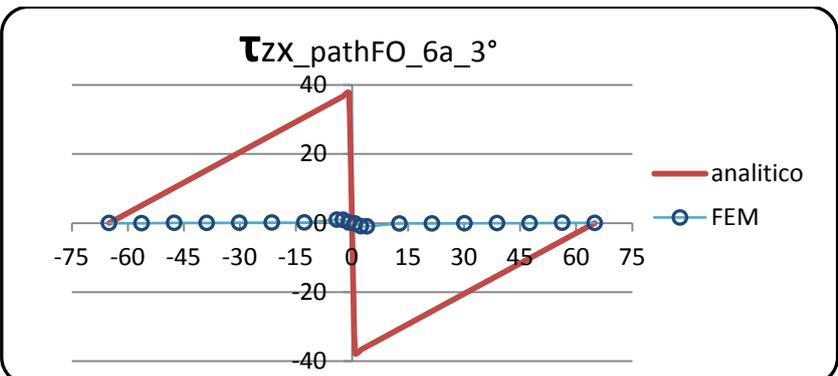
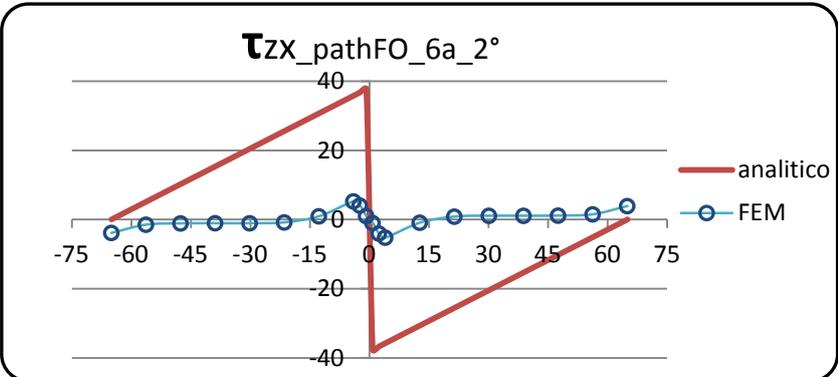
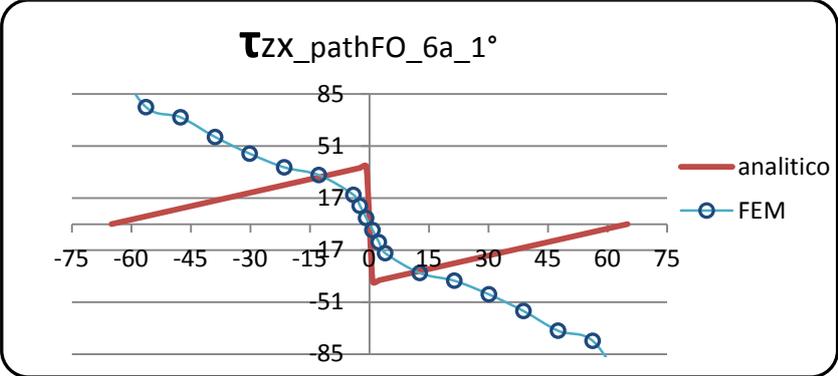




Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path orizzontale, appare evidente come con il terzo metodo siano limitati gli effetti di aumento delle tensioni alle estremità delle ali in quanto non si raggiungono più i 550 MPa e all'intersezione con l'anima avendo registrato valori di σ_z di circa 430 MPa. Possiamo affermare che i valori registrati dal FEM in media coincidono con quelli teorici. Si ha una leggera sovrastima dell'intensità delle σ_z attraverso il terzo metodo ma nonostante ciò è il più congruente con le ipotesi teoriche.

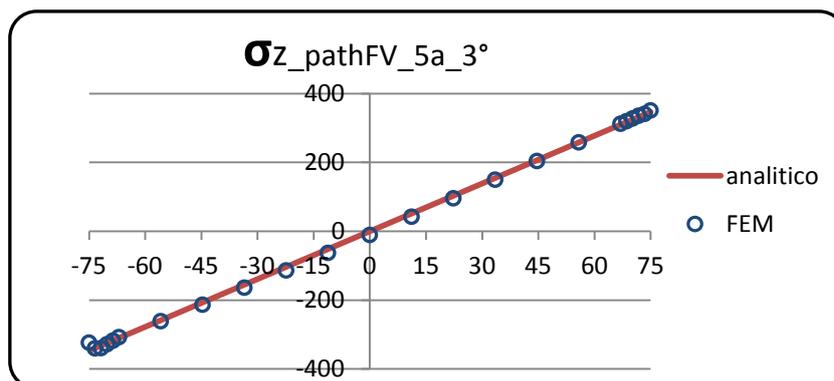
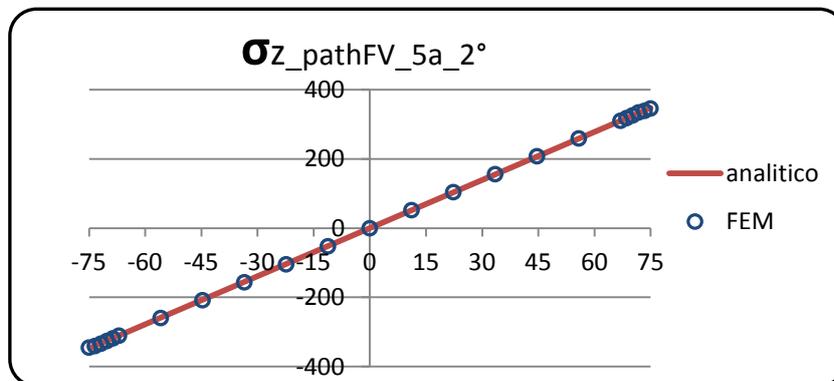
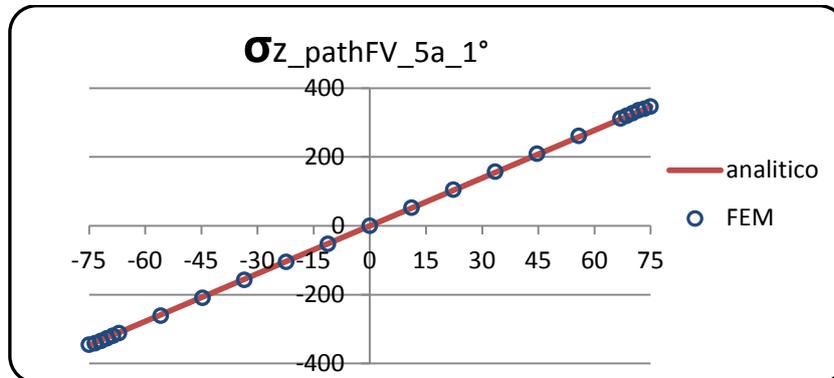
Nelle immagini seguenti è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di taglio sulla sesta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x. Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come i primi due metodi portano agli stessi risultati per quanto riguardano le τ_{ZY} e come invece il terzo si presenti ancora il più congruente tra i tre confrontati anche se sovrastimati di 4 MPa e con verso opposto da quanto ipotizzato dalla teoria. Questo andamento è dovuto al fatto che la sezione è libera di deformarsi lungo l'asse y e non incontrando vincoli che si oppongono non si hanno le tensioni registrate invece con i primi due metodi.





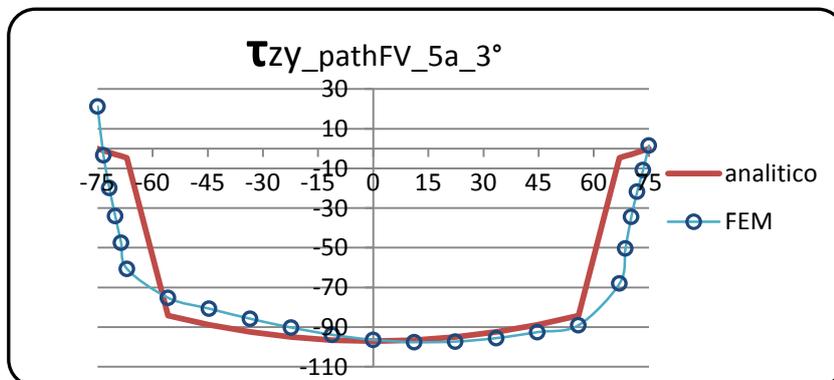
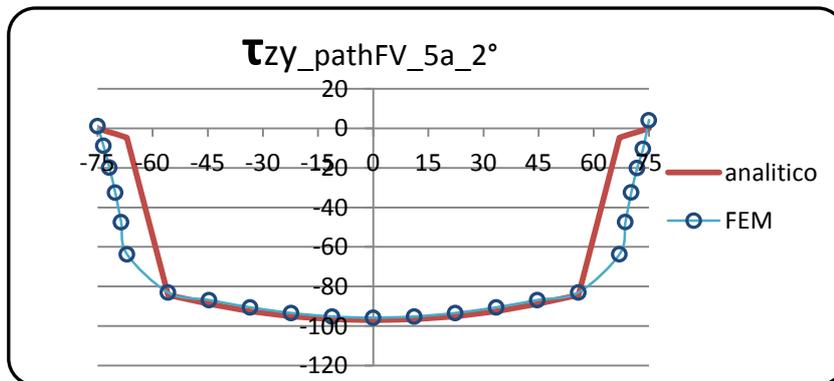
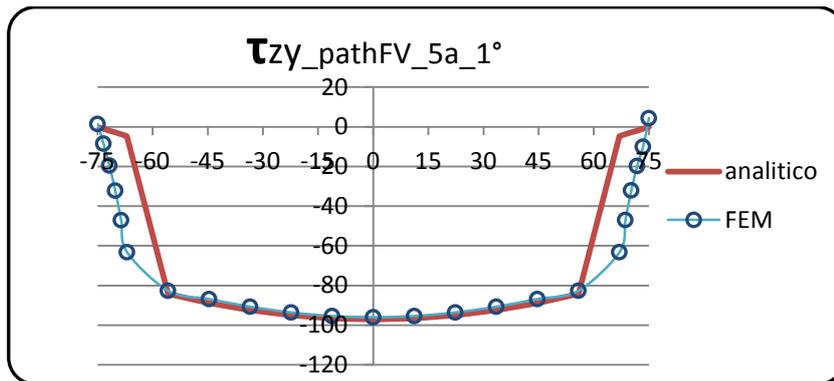
5.2.2 Path verticale

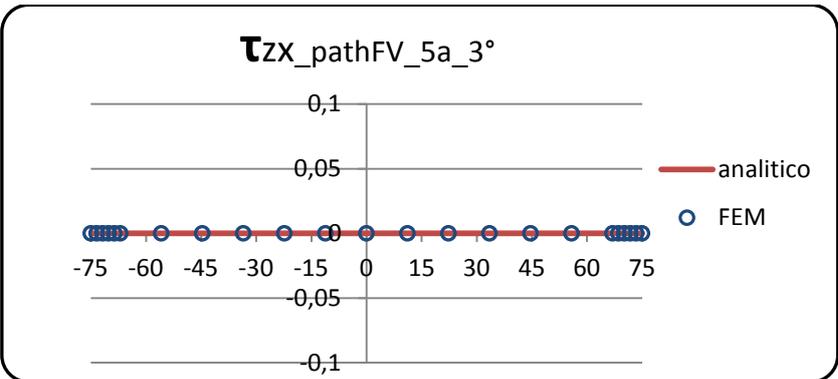
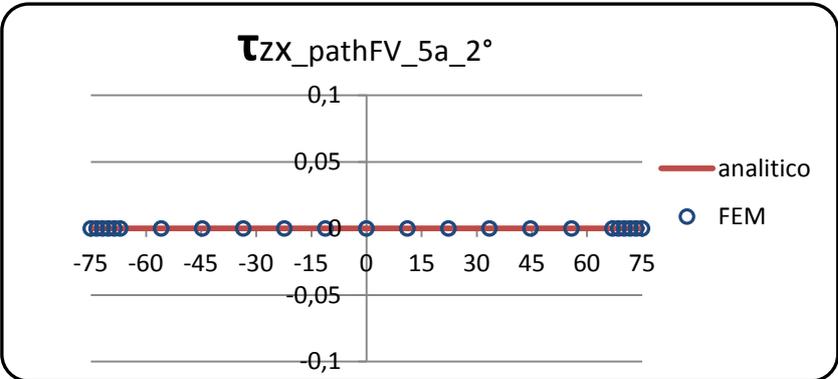
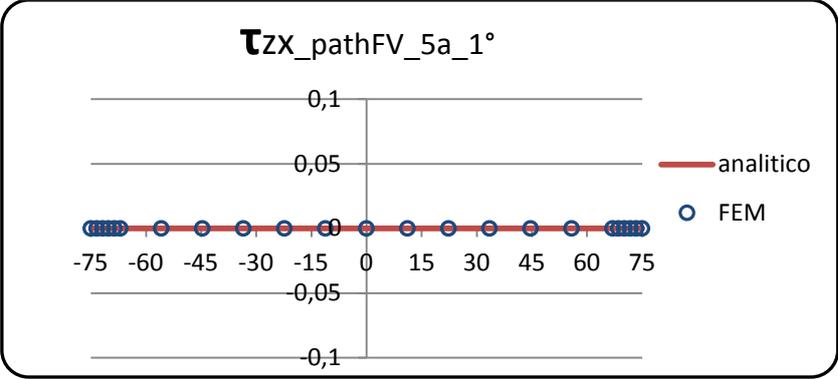
Sezione 5

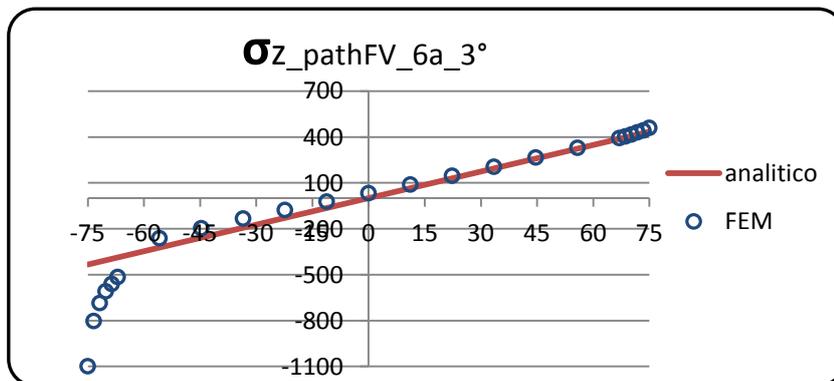
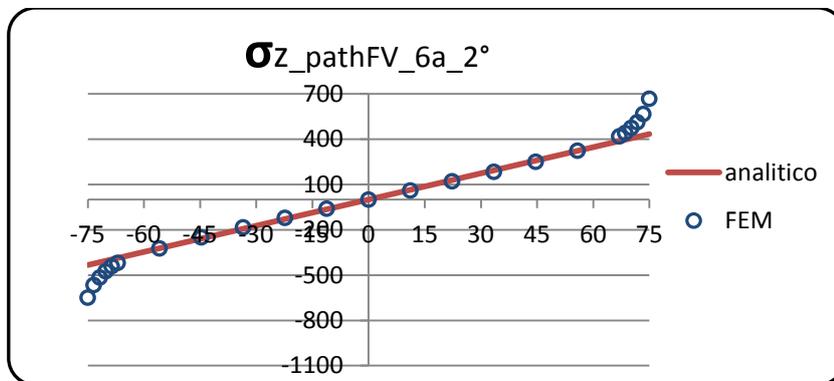
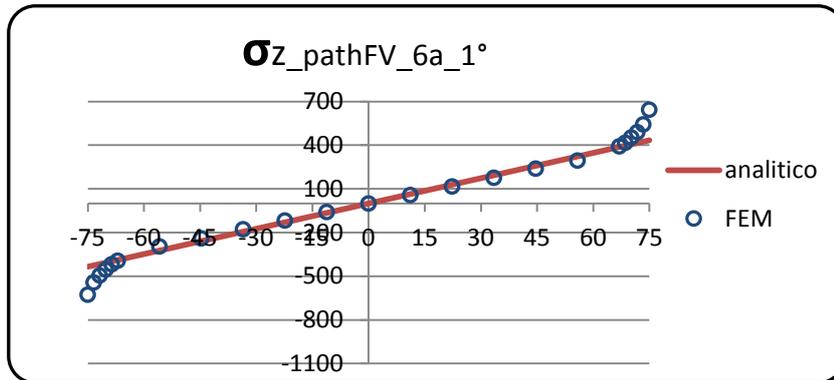


Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path verticale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo siano perfettamente congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto non si apprezzano scostamenti rilevanti e l'andamento lineare delle tensioni normali alla sezione è ben rappresentato. Per entrambi i metodi si ha un leggero miglioramento della compatibilità dei risultati registrati all'intersezione con le ali rispetto a quelli ottenuti per la sezione 2 in quanto ci si è spostati di molto dalla zona di applicazione del carico. Per il terzo metodo si ha una leggera anomalia sullo spigolo inferiore della sezione 5 avendolo vincolato lungo z e y.

Nelle immagini seguenti è mostrato l'andamento delle tensioni di taglio sulla quinta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x. Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come tutti i metodi riproducano le tensioni τ_{ZY} e τ_{ZX} nello stesso modo. Questo sta a significare che ad una certa distanza dalla zona di ripartizione del carico (560 mm per la sezione 5) e da quella di applicazione del vincolo (140 mm), i risultati registrati dal FEM sono indifferenti dalle modalità con cui si sono variate le condizioni di sollecitazione e possibilità di deformazione. Una leggera differenza si ha con il terzo metodo il quale registra un aumento delle tensioni relative alla linea inferiore della sezione avendo bloccato per esse, nella sezione 6, la deformazione lungo y e z.

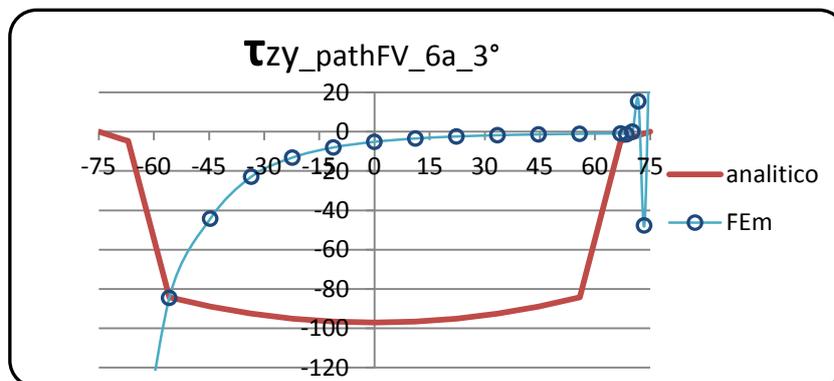
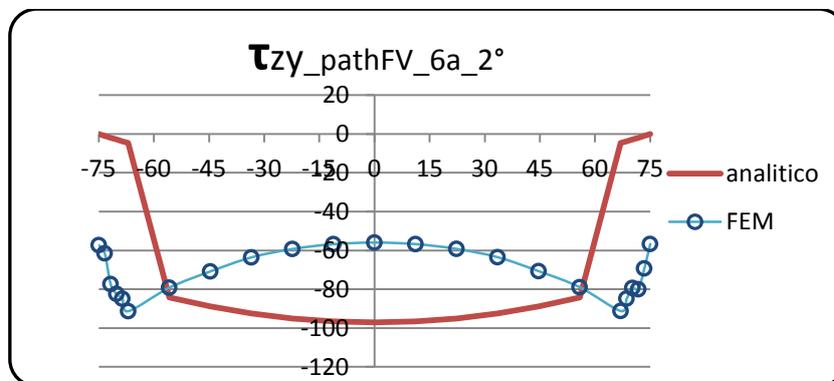
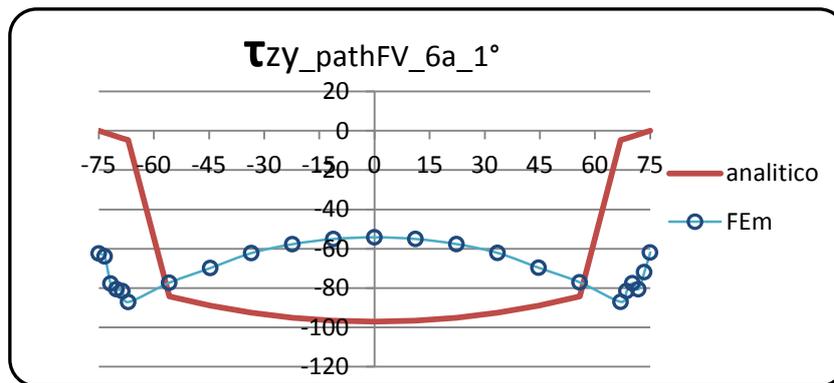


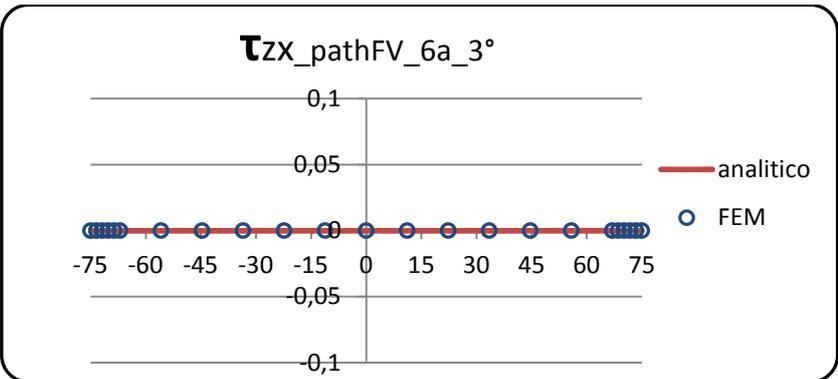
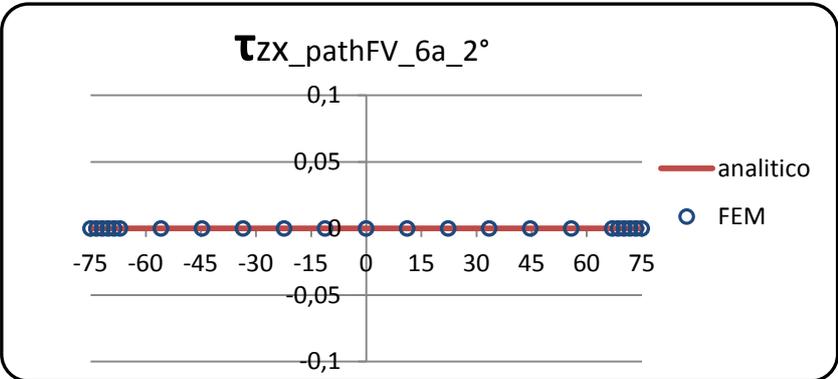
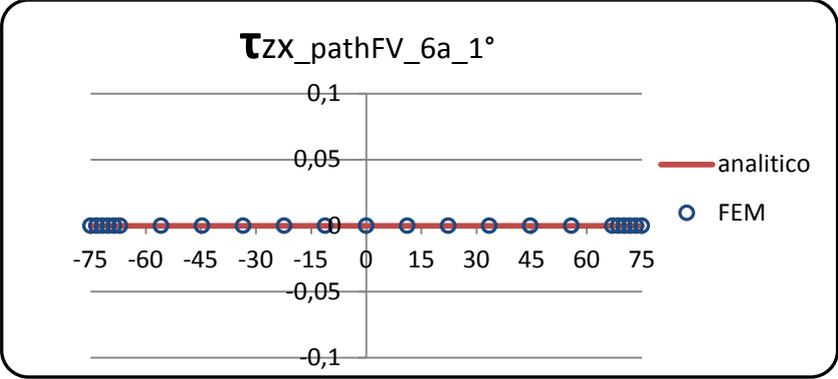




Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path verticale, appare evidente come i primi due metodi portano agli stessi effetti di aumento delle tensioni all'intersezione con le ali in quanto si raggiungono i 700 MPa e possiamo affermare che i valori registrati dal FEM lungo l'anima coincidono con quelli teorici. Lavorando secondo il terzo metodo invece si migliorano notevolmente i risultati all'intersezione con l'ala superiore, mentre il fatto di aver vincolato lo spigolo inferiore della sezione lungo y e z comporta un aumento considerevole (circa 400 MPa) del valore assunto dalla tensioni σ_z sul punto del path che giace su detto spigolo.

Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di taglio sulla sesta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x. Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come tutti i metodi portano a risultati delle τ_{ZY} che comunque non coincidono con valori teorici trovandosi esattamente sulla sezione vincolata. Ancora, il fatto di aver vincolato la deformazione della trave lungo y solo per lo spigolo inferiore di questa sezione ha comportato un aumento notevole del valore assunto da queste tensioni di taglio per quanto riguardano i punti dell'anima che si trovano nella zona di intersezione con l'ala inferiore. Sono invece perfettamente sovrapposte le registrazioni per le τ_{ZX} le quali hanno valore nullo. Come ci si aspettava, il fatto di aver lasciato libera deformazione lungo l'asse x della sezione 6 non ha portato alcuna modifica all'andamento delle tensioni τ_{ZX} in quanto queste lungo x sono molto ridotte; il confronto tra i metodi 2 e 3 con il primo lo mostrano quanto appena affermato.



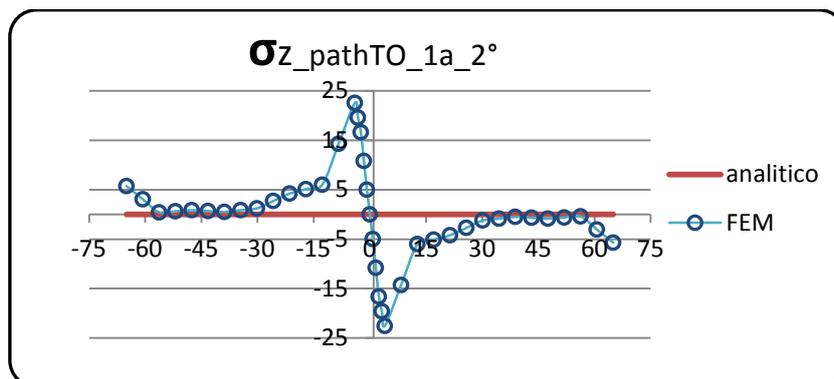
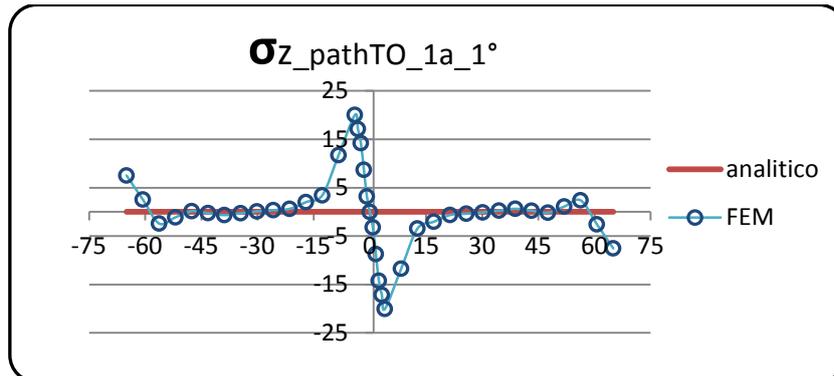


6. Confronto torsione

6.1 Confronto modalità di ripartizione del carico

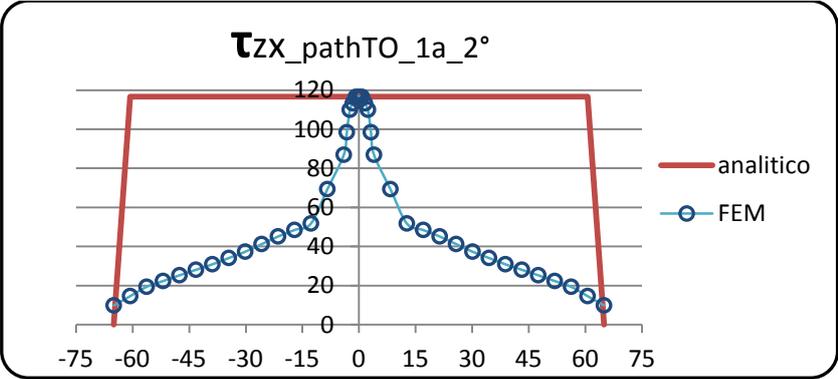
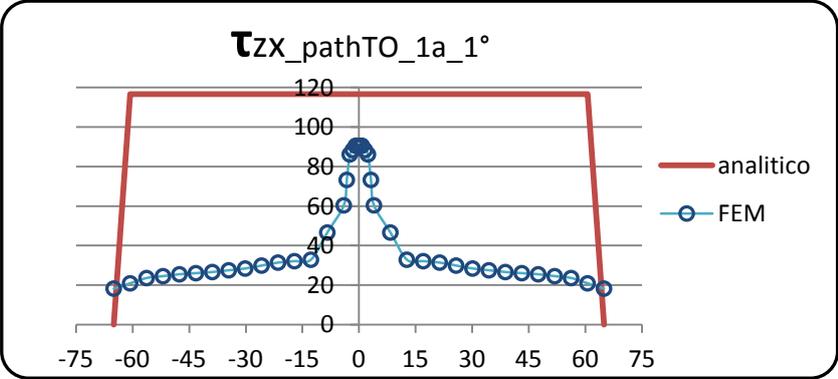
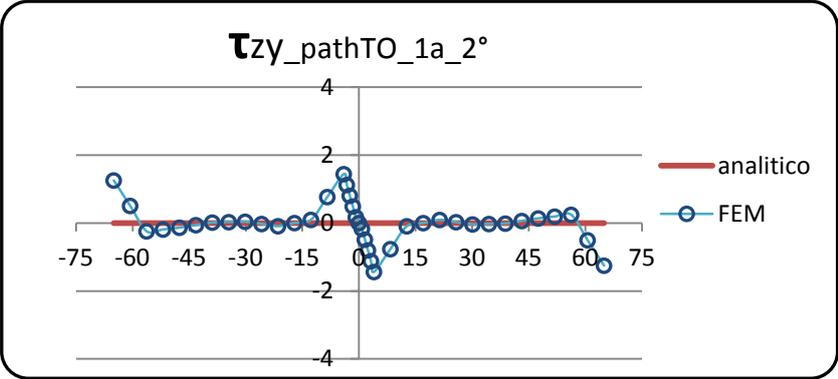
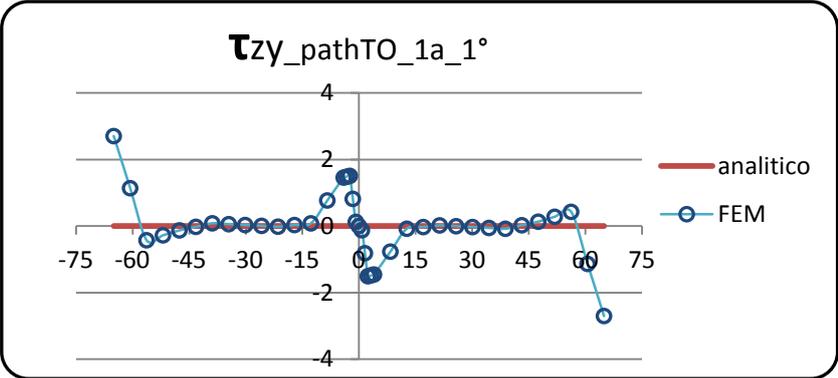
6.1.1 Path orizzontale

Sezione 1

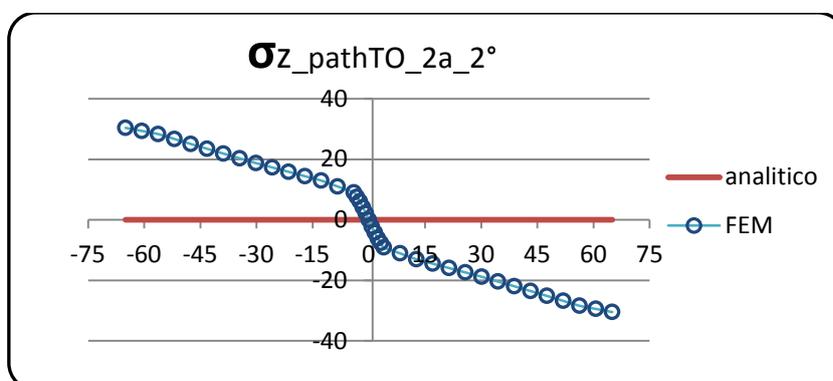
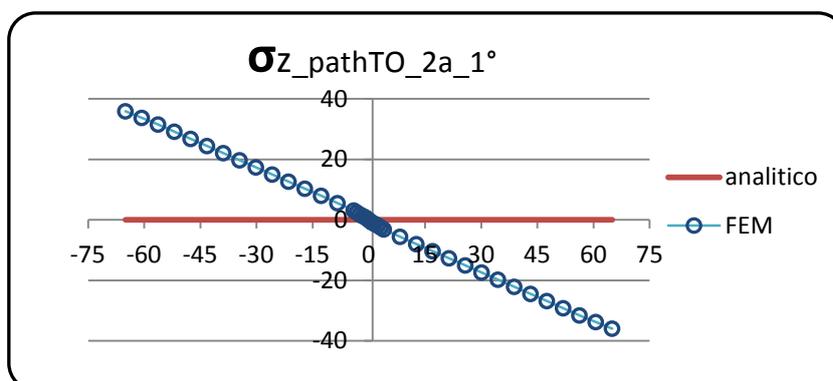


Per quanto riguarda la prima sezione vediamo che i valori delle tensioni σ_z registrati dal FEM con il secondo metodo, il quale comporta una distribuzione puntuale del carico più uniforme rispetto al primo, presentano un leggero aumento dell'intensità di queste tensioni in prossimità dell'intersezione con l'anima; mentre il primo registra lo stesso effetto alle estremità dell'ala. Trattandosi della prima sezione ci si aspettava una discordanza con quanto ipotizzato dalla teoria, tuttavia l'aver distribuito maggiormente il carico non ha portato miglioramenti. Entrambi i metodi presentano comunque lo stesso andamento e registrano tensioni dello stesso ordine di grandezza.

Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di torsione sulla prima sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come il secondo metodo attenui gli effetti di bordo che si verificano alle estremità delle ali e sia per questo più conforme alla trattazione teorica per quanto riguardano le τ_{zy} . Per le τ_{zx} , il secondo metodo risulta migliore in quanto al centro dell'ala i valori coincidono con quelli stimati dalla teoria; vanno via via diminuendo avvicinandosi agli estremi.

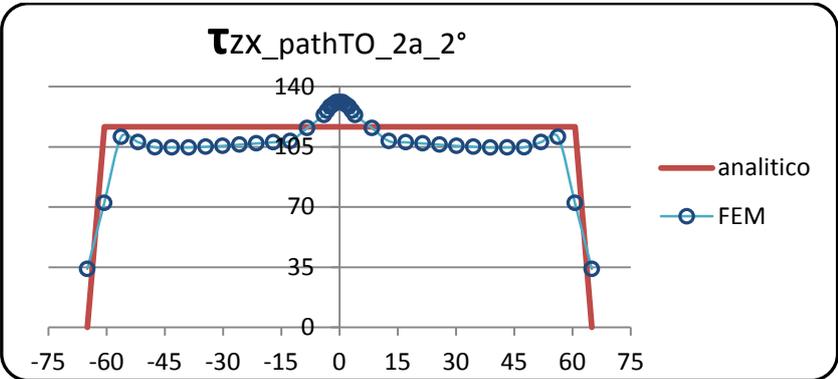
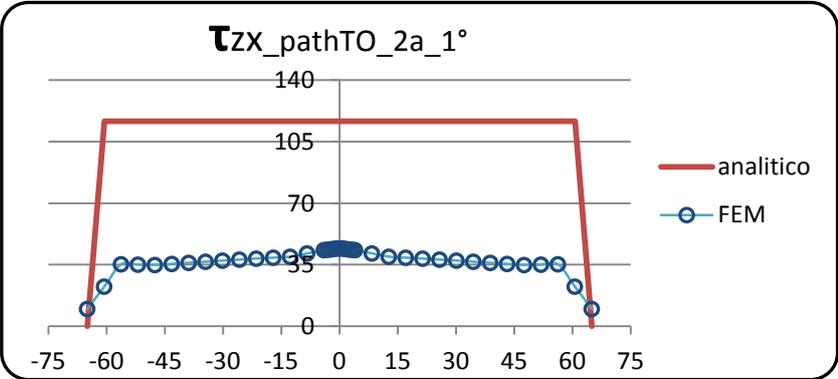
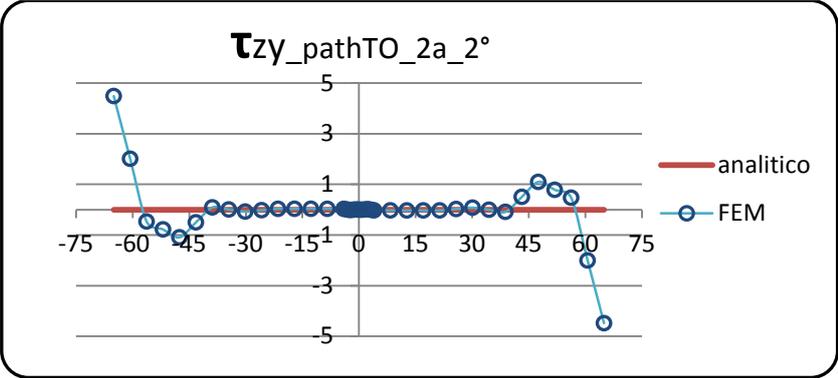
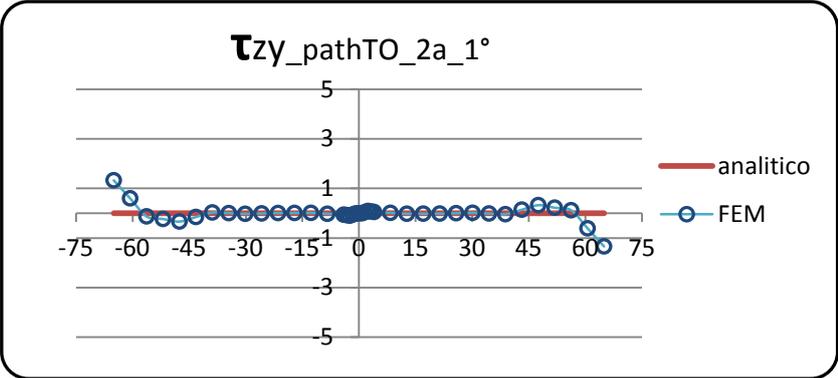


Sezione 2



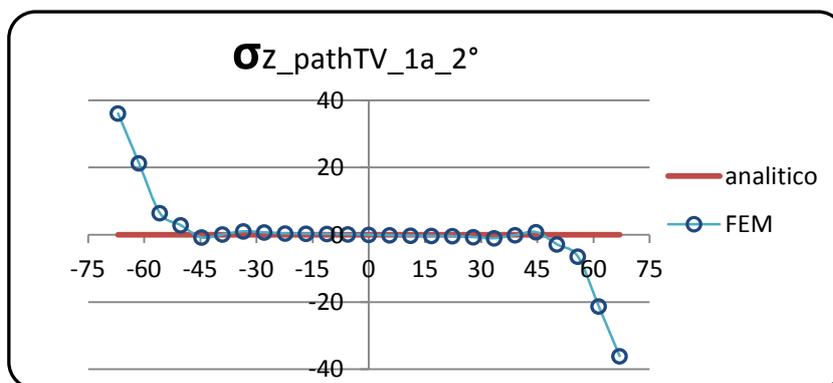
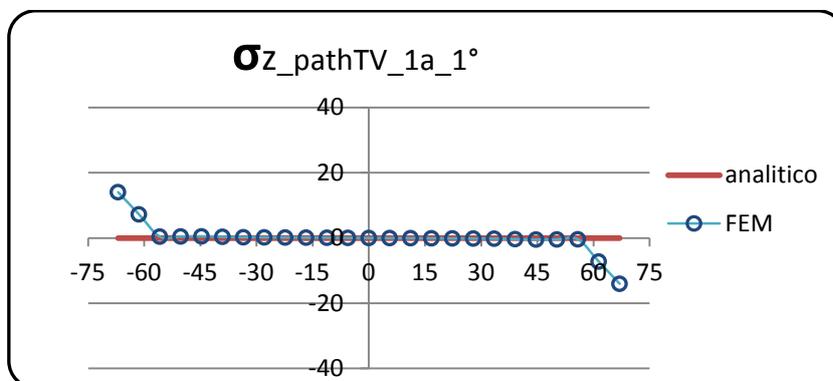
Per quanto riguarda la seconda sezione vediamo che i valori delle tensioni σ_z registrati dal FEM con entrambi i metodi sono molto diversi da quanto previsto dalla teoria. Il secondo metodo presenta in prossimità dell'intersezione con l'anima un cambio di pendenza dell'andamento delle tensioni dovuto al fatto di aver ripartito il carico anche sui lati verticali della prima sezione e non solo sul lato superiore ed inferiore della stessa. Probabilmente entrambi i metodi presentano circa lo stesso andamento e registrano tensioni non nulle perché questa distribuzione puntuale del carico non è perfettamente equivalente ad un momento torcente.

Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di torsione sulla seconda sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come il secondo metodo amplifichi gli effetti di bordo che si verificano alle estremità delle ali e sia per questo meno conforme alla trattazione teorica per quanto riguardano le τ_{zy} . Per le τ_{zx} , il secondo metodo risulta migliore in quanto per gran parte della lunghezza dell'ala i valori coincidono con quelli stimati dalla teoria; leggermente aumentati nella zona di intersezione con l'anima e vanno via via diminuendo avvicinandosi agli estremi proprio come stimato dalla trattazione teorica. Non vanno tuttavia ad annullarsi per l'impossibilità fisica di essere un istante a valore massimo ed un istante dopo a valore nullo come vorrebbe l'analogia idrodinamica negli angoli di una sezione con parete sottile a profilo aperto.



6.1.1 Path verticale

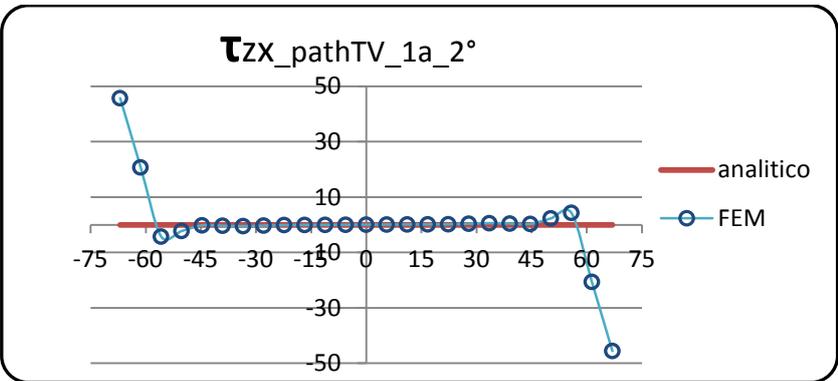
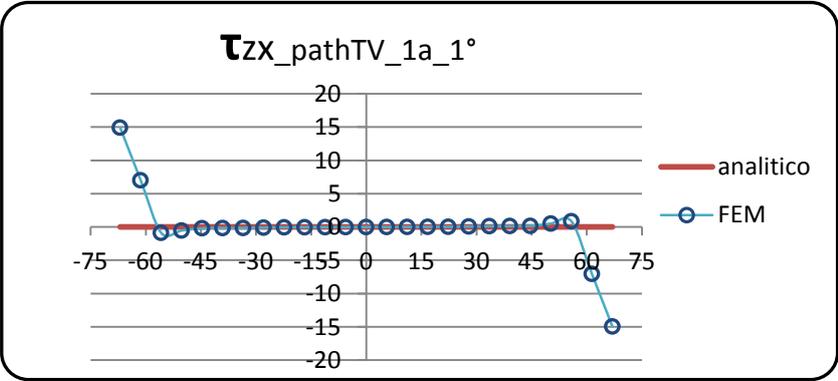
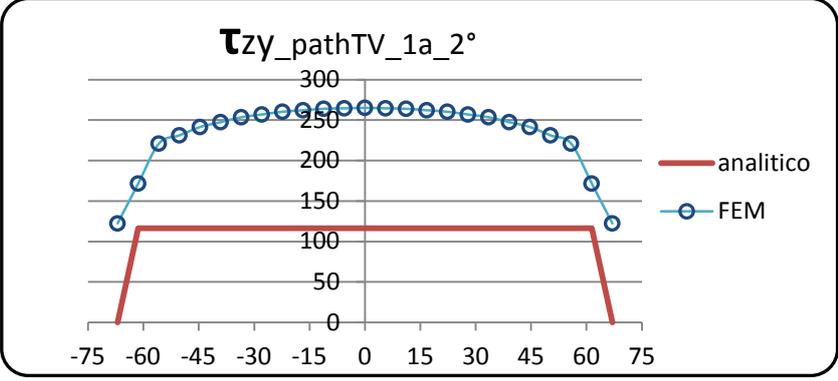
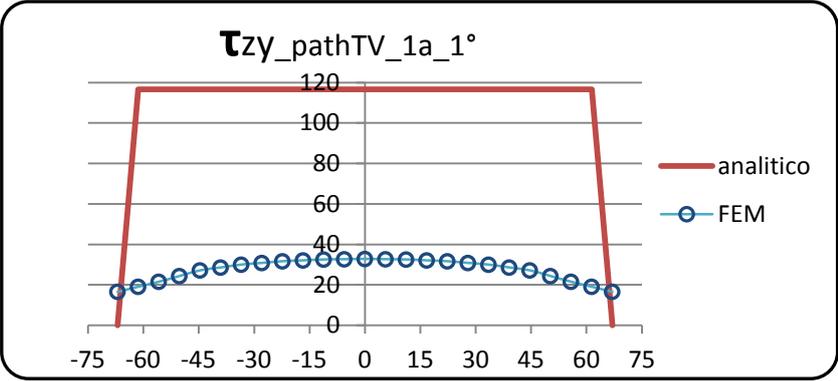
Sezione 1



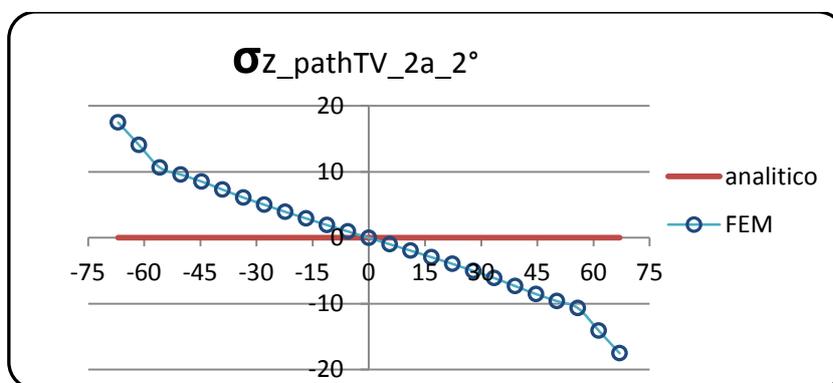
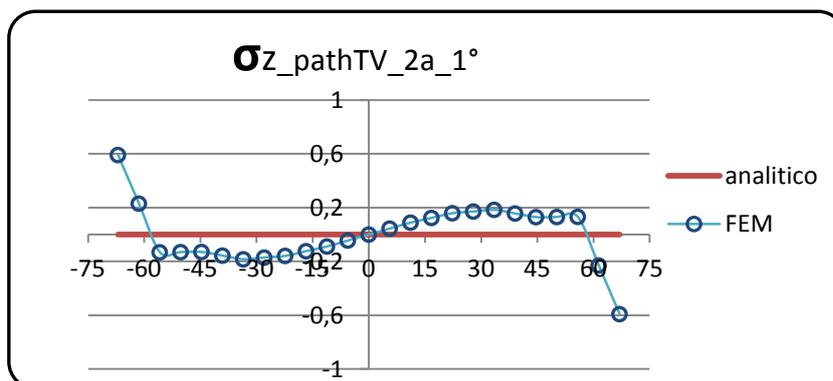
Per quanto riguarda la prima sezione vediamo che i valori delle tensioni σ_z registrati dal FEM con il secondo metodo, il quale comporta una distribuzione puntuale del carico più uniforme rispetto al primo, presentano un notevole aumento dell'intensità di queste tensioni in prossimità delle estremità dell'anima; mentre il primo registra lo stesso andamento ma con valori più attenuati. Trattandosi della prima sezione ci si aspettava una discordanza con quanto ipotizzato dalla teoria, tuttavia l'aver distribuito maggiormente il carico ha portato a generare tensioni maggiori. Entrambi i metodi presentano comunque lo stesso andamento e registrano tensioni dello stesso ordine di grandezza.

Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di torsione sulla prima sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come il secondo metodo registri tensioni τ_{zy} molto maggiori di quanto lo siano quelle previste dalla teoria; in particolare agli estremi dell'anima presenta valori minimi delle stesse che sono circa i massimi stimati con l'analisi idrodinamica. Per le τ_{zx} , il primo metodo risulta migliore in quanto limita effetti di bordo agli estremi dell'anima.

Per quanto riguarda questo percorso verticale, il primo metodo appare più conforme del secondo alla trattazione analitica.

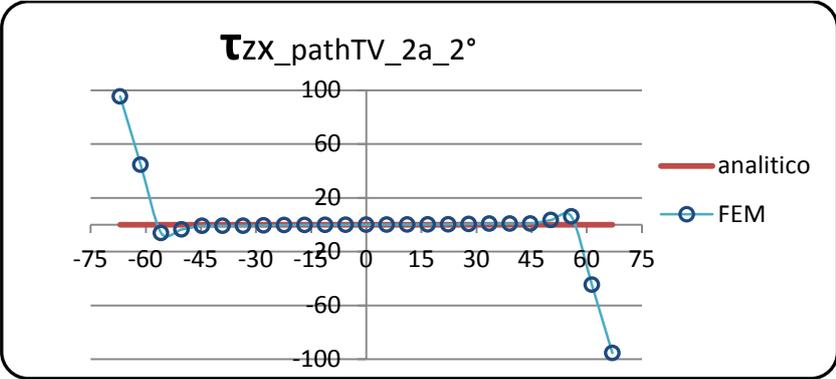
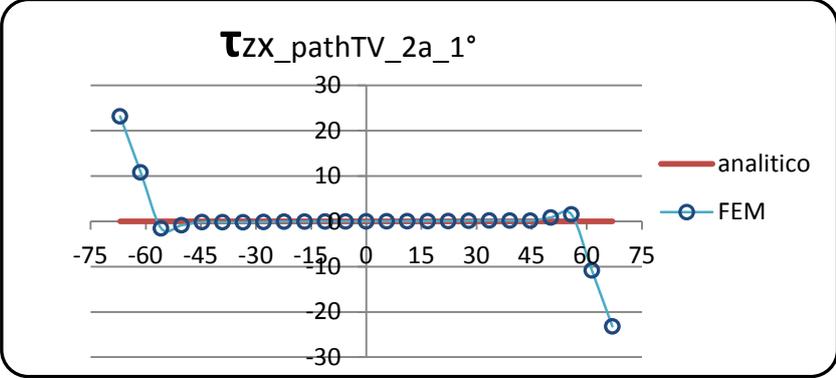
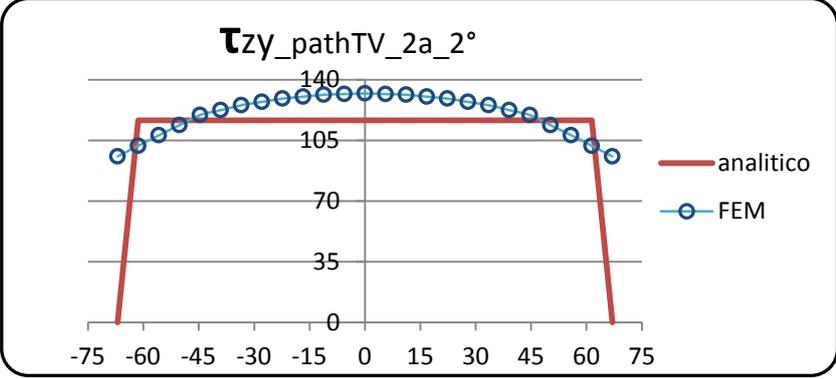
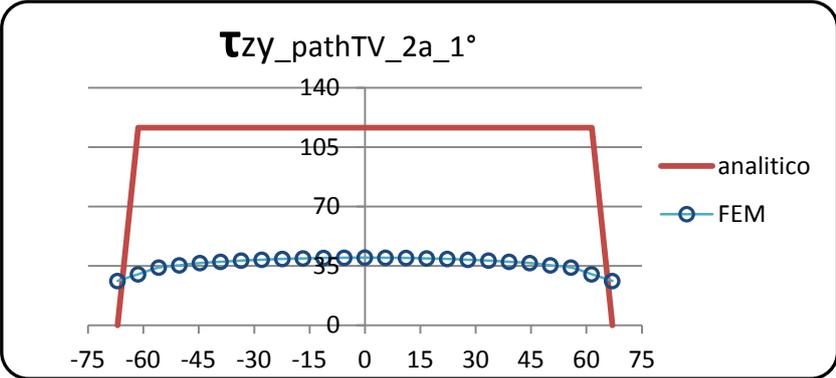


Sezione 2



Per quanto riguarda la seconda sezione vediamo che i valori delle tensioni σ_z registrati dal FEM con il secondo metodo sono molto diversi da quanto previsto dalla teoria. Si ha un andamento a farfalla sicuramente imputabile al modo secondo cui si è scelto di generare un momento torcente che evidentemente genera un leggero effetto di momento flettente avendo tutte le forze un braccio di 140 mm. In particolare possiamo ritenere responsabile di questa sollecitazione indesiderata le forze disposte in direzione verticale sui nodi dei bordi dell'anima. Il primo metodo invece si avvicina molto a quanto ipotizzato in un'analisi teorica.

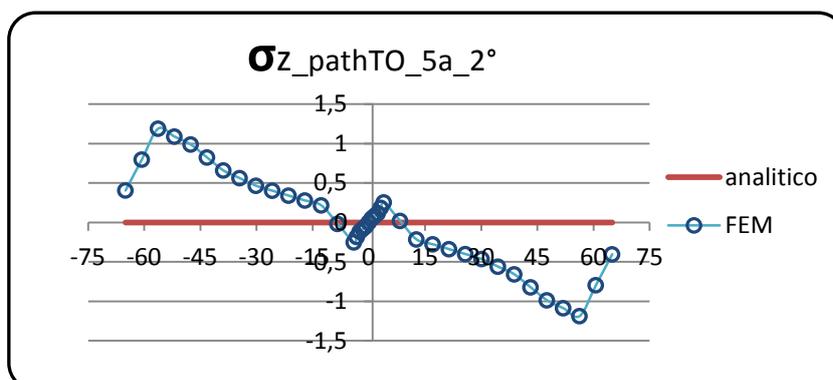
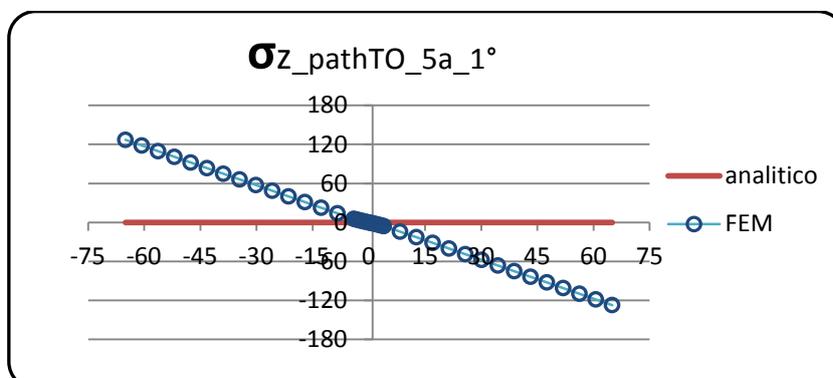
Nella pagina seguente è mostrato in figura l'andamento delle tensioni di torsione sulla seconda sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come il secondo metodo amplifichi gli effetti di bordo che si verificano alle estremità dell'anima (sfiorando persino i 100 MPa contro i 40 MPa registrati dal primo metodo) e sia per questo meno conforme alla trattazione teorica per quanto riguardano le τ_{zx} . Per le τ_{zy} , il secondo metodo conferisce maggior validità alla stima consigliata dall'analogia idrodinamica; registra valori leggermente superiori nella zona centrale dell'anima che comunque vanno via via diminuendo avvicinandosi agli estremi proprio come stimato dalla trattazione teorica. Non vanno tuttavia ad annullarsi per l'impossibilità fisica di essere un istante a valore massimo ed un istante dopo a valore nullo come vorrebbe l'analogia idrodinamica negli angoli di una sezione con parete sottile a profilo aperto. In media possiamo affermare un'assoluta equivalenza tra modello analitico e agli elementi finiti in questa seconda sezione della trave per quanto riguarda i valori assunti dalle τ_{zy} .



6.2 Confronto modalità di applicazione dei vincoli

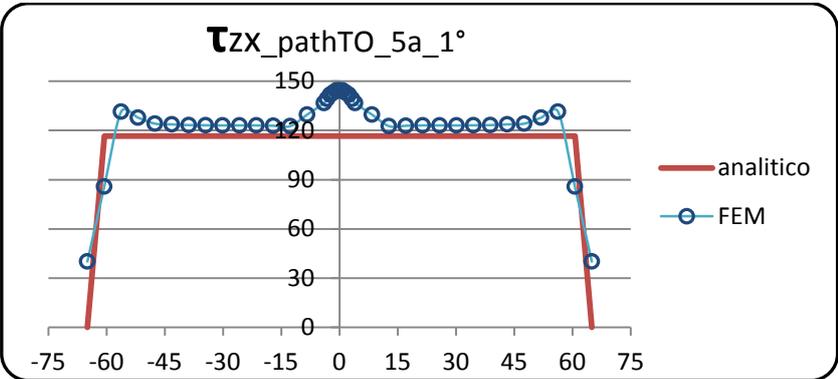
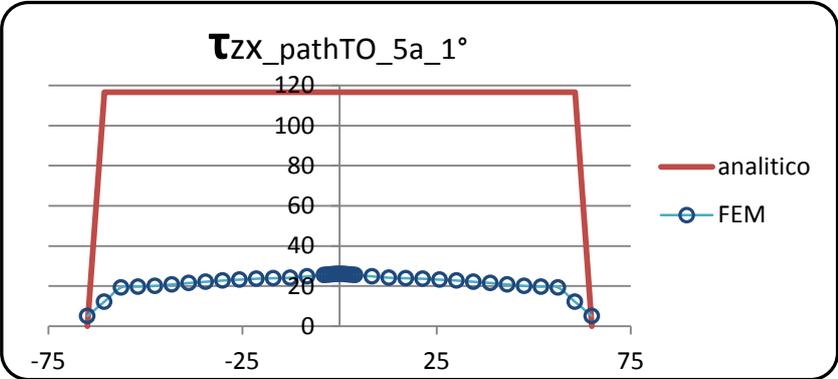
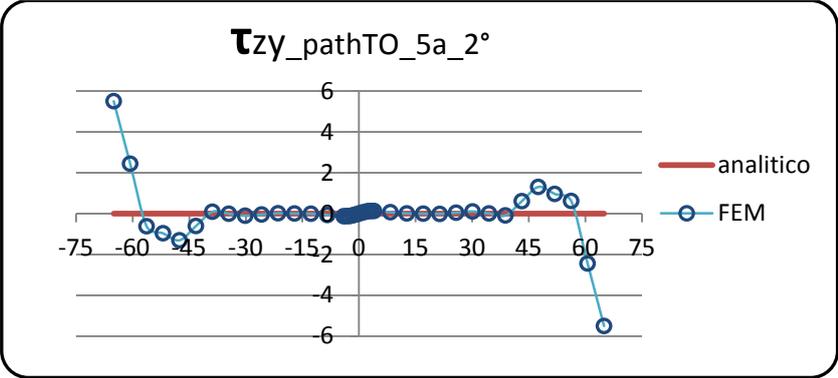
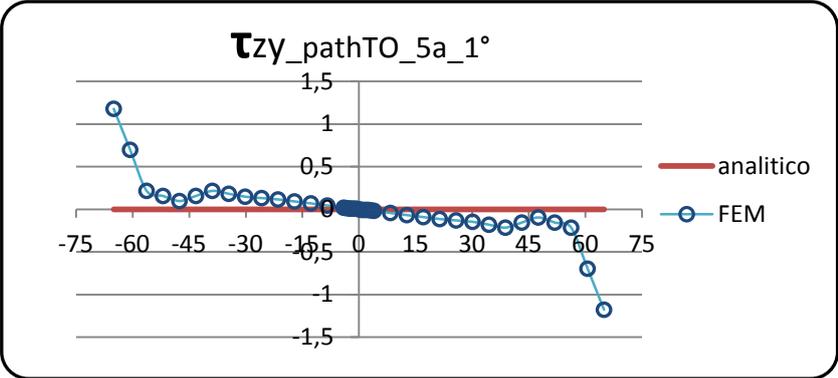
6.2.1 Path orizzontale

Sezione 5

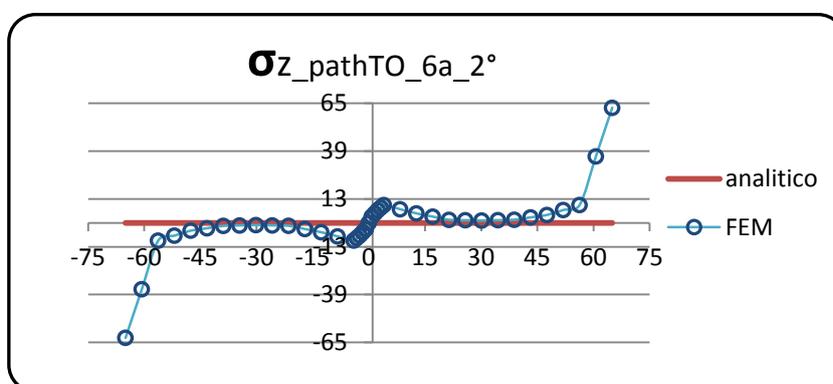
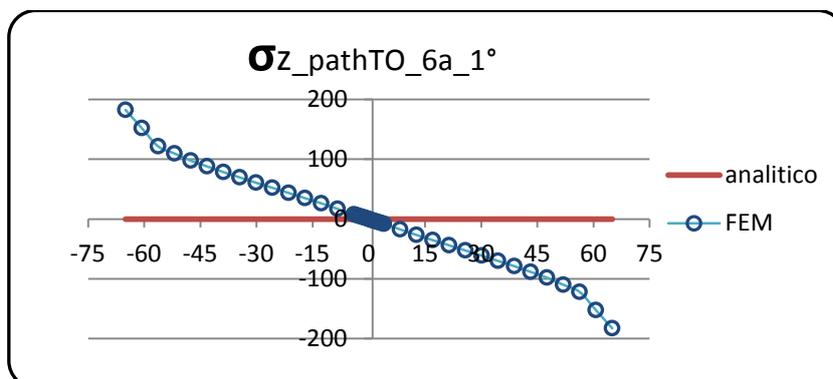


Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path orizzontale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo con il secondo metodo siano maggiormente congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto si discostano di solo ± 1 MPa dal valore costante nullo. Per quanto riguarda il primo metodo si hanno intensità che differenziano da detto valore teorico in modo evidente presentando un andamento a farfalla. Con il primo metodo infatti si sono bloccati tutti i gradi di libertà, mentre con il secondo si è lasciato libero quello lungo z a meno di tre nodi. Questo lascia la trave libera di contrarsi e allungarsi in tale direzione riducendo così l'intensità delle tensioni che verrebbero a crearsi nel caso in cui non gli siano concesse tali deformazioni.

Nelle immagini seguenti è mostrato l'andamento delle tensioni di taglio sulla quinta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come, con il secondo metodo, lungo la direzione y siano amplificati gli effetti di bordo che si hanno alle estremità delle ali e come per il primo metodo invece sia più congruo con la trattazione teorica. Per quanto riguarda le tensioni τ_{zx} è sempre il secondo metodo, per il percorso orizzontale, a dare maggior conferma alla stima consigliata dall'analogia idrodinamica presentando una leggera sovrastima dei valori registrati all'intersezione con l'anima ed abbassando le tensioni ai suoi estremi come si era verificato per la sezione 2 seppur non fino ad annullarsi.

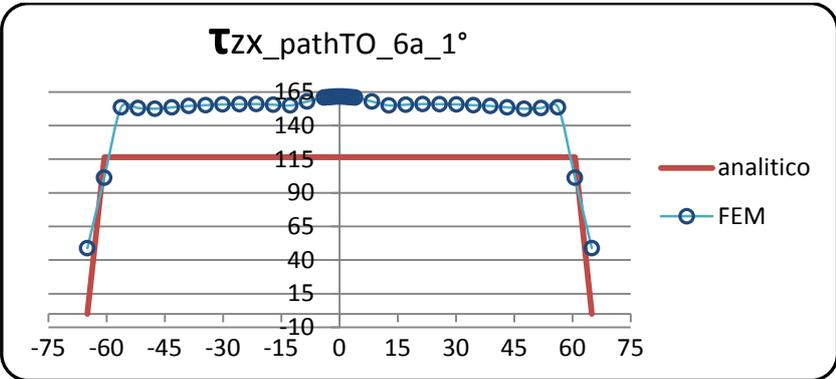
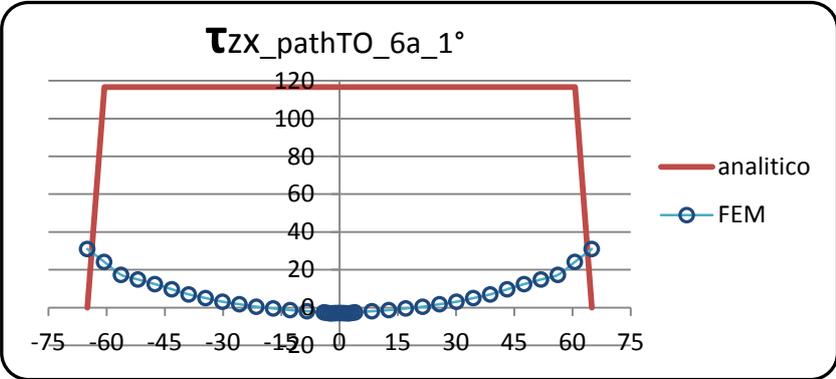
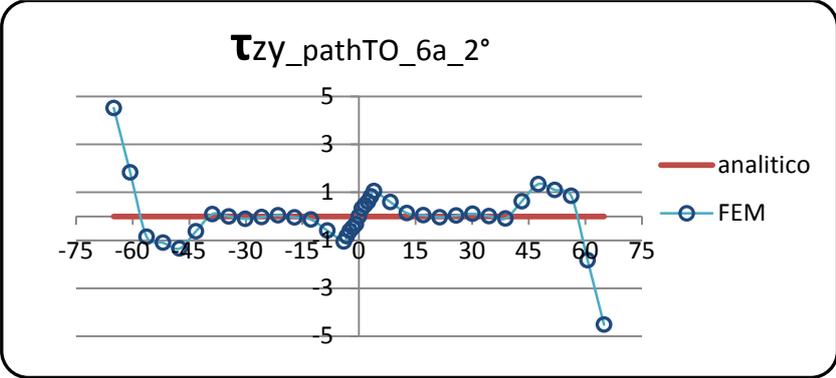
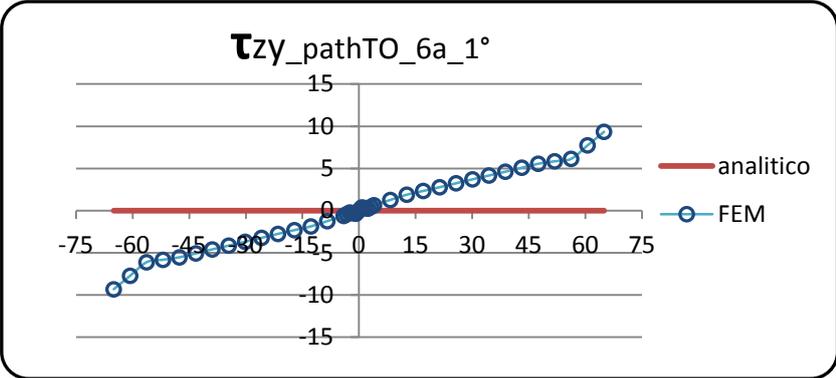


Sezione 6



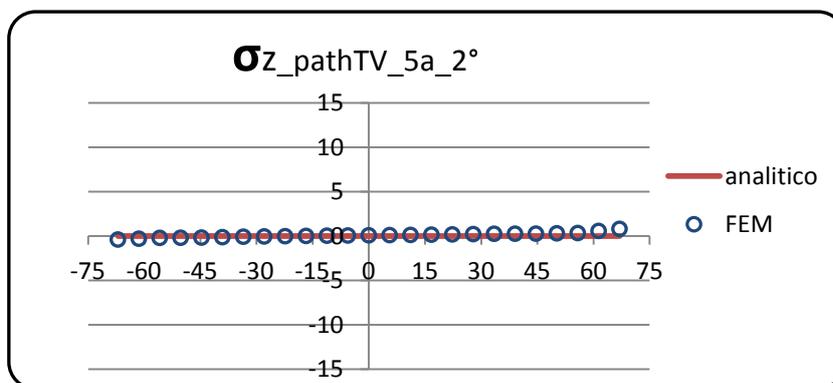
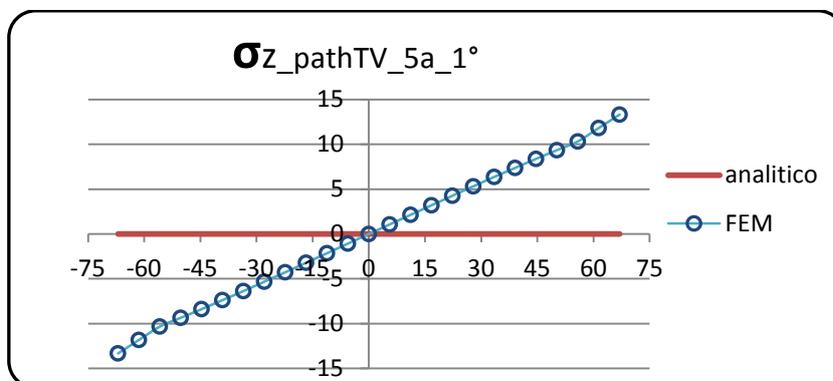
Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path orizzontale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo con il secondo metodo siano in media leggermente più congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto si avvicinano al valore costante nullo pur presentando rilevanti effetti di bordo. Per quanto riguarda il primo metodo si hanno intensità che differenziano da detto valore teorico in modo evidente presentando un andamento a farfalla. Con il primo metodo infatti si sono bloccati tutti i gradi di libertà, mentre con il secondo si è lasciato libero quello lungo z a meno di tre nodi. Questo lascia la trave libera di contrarsi e allungarsi in tale direzione riducendo così l'intensità delle tensioni che verrebbero a crearsi nel caso in cui non gli siano concesse tali deformazioni; si ha in queste zone un andamento non previsto dalla teoria.

Nelle immagini seguenti è mostrato l'andamento delle tensioni di taglio sulla sesta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come, con il secondo metodo, lungo la direzione y sia più congruo con la trattazione teorica anche se molto variabile ma presentando comunque intensità agli estremi delle ali minori di quanto registrato con il primo metodo. Per quanto riguarda le tensioni τ_{zx} è sempre il secondo metodo, per il percorso orizzontale, a dare maggior conferma alla stima consigliata dall'analogia idrodinamica presentando nuovamente una leggera sovrastima dei valori registrati all'intersezione con l'anima che si mantengono poi molto costanti lungo questo path avendo vincolato tutti i nodi in modo da non permettere spostamenti lungo l'asse x .



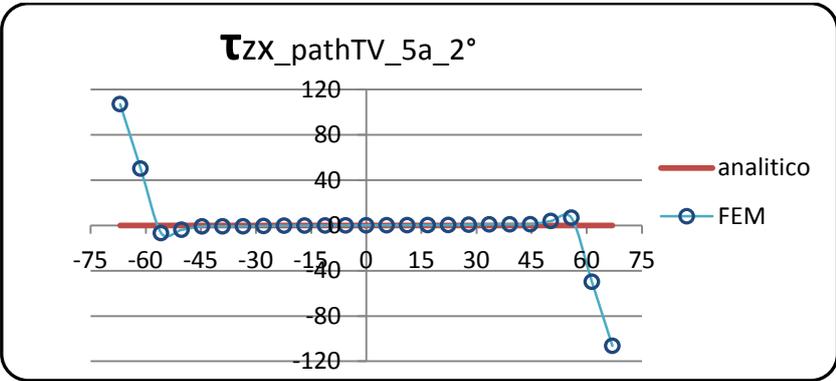
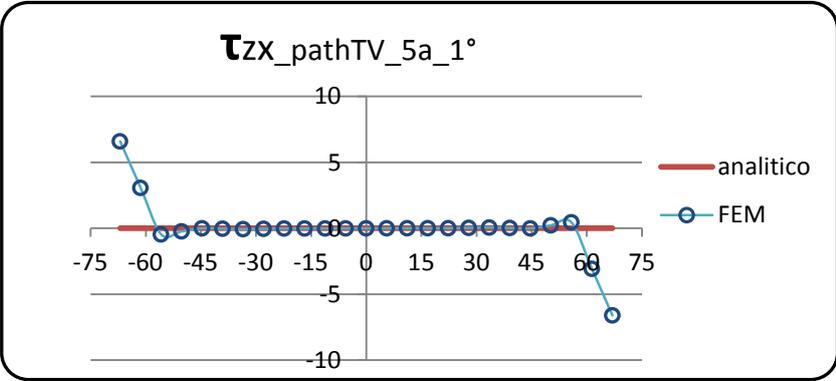
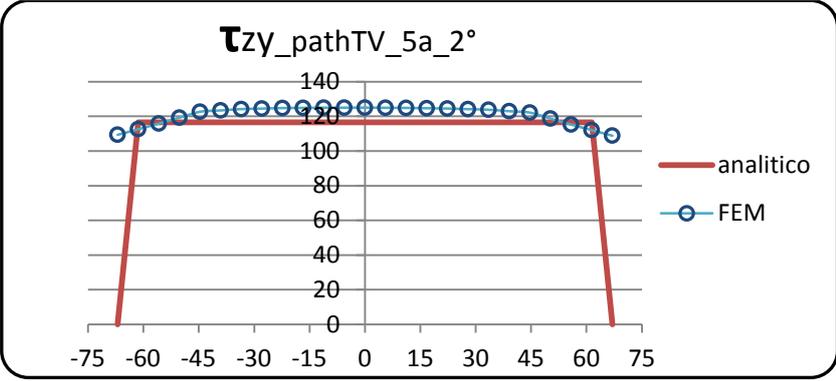
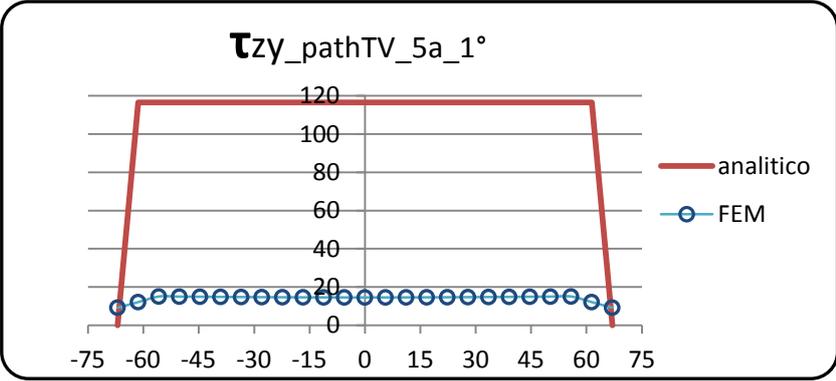
6.2.2 Path verticale

Sezione 5

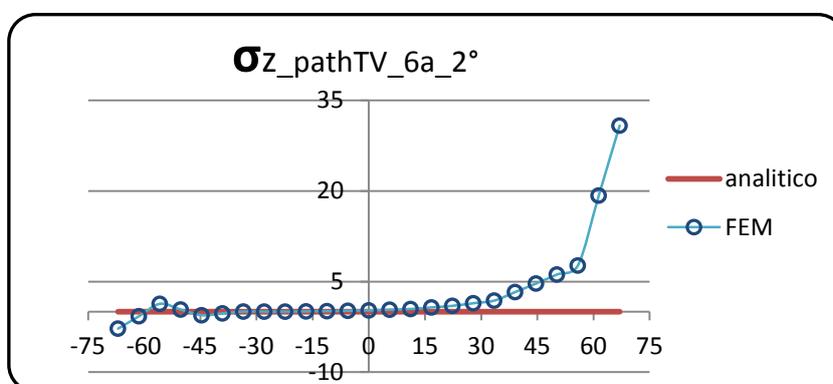
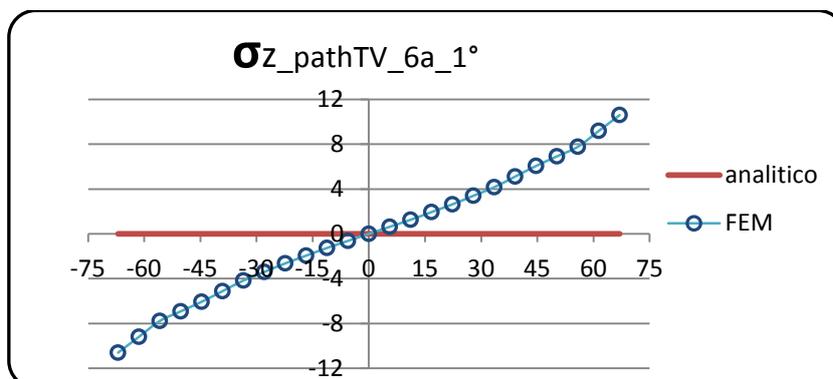


Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path verticale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo con il secondo metodo siano maggiormente congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto si discostano dal valore nullo di meno di 1 MPa. Per quanto riguarda il primo metodo si hanno intensità che differenziano da detto valore teorico in modo evidente presentando un andamento a farfalla. Con il primo metodo infatti si sono bloccati tutti i gradi di libertà, mentre con il secondo si è lasciato libero quello lungo z a meno di tre nodi. Questo lascia la trave libera di contrarsi e allungarsi in tale direzione riducendo così l'intensità delle tensioni che verrebbero a crearsi nel caso in cui non gli siano concesse tali deformazioni.

Nelle immagini seguenti è mostrato l'andamento delle tensioni di taglio sulla quinta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x. Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come, con il secondo metodo, lungo la direzione x siano amplificati gli effetti di bordo che si hanno alle estremità dell'anima e come per il primo metodo invece sia più congruo con la trattazione teorica limitando questo aumento di intensità ai 7 MPa. Per quanto riguarda le tensioni τ_{zy} è sempre il secondo metodo, per il percorso verticale, a dare maggior conferma alla stima consigliata dall'analogia idrodinamica presentando una lieve sovrastima dei valori registrati all'intersezione con le ali e mantenendo un andamento costante delle tensioni fino ai suoi estremi.

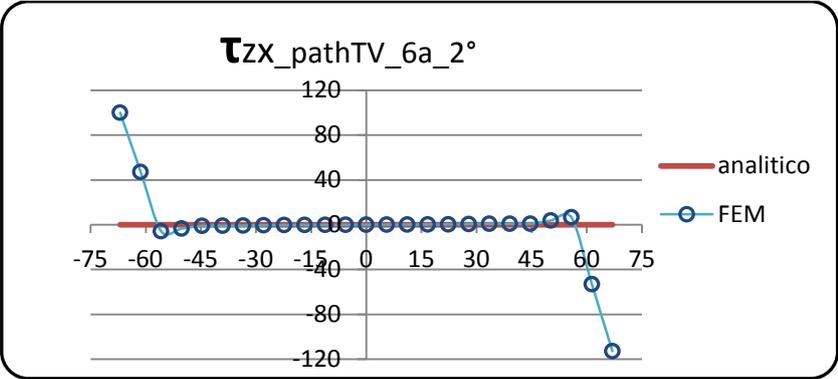
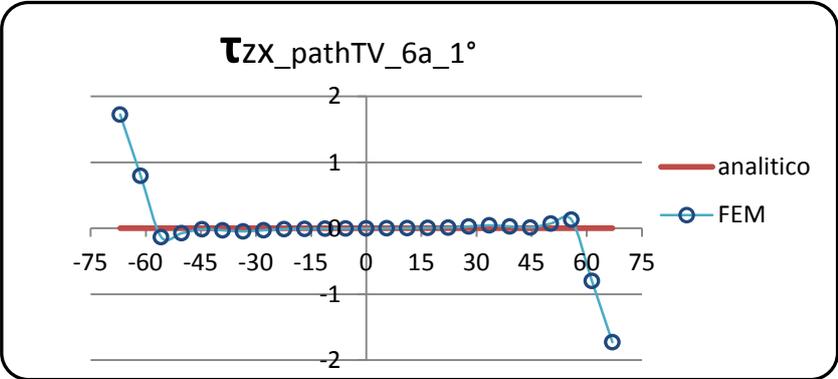
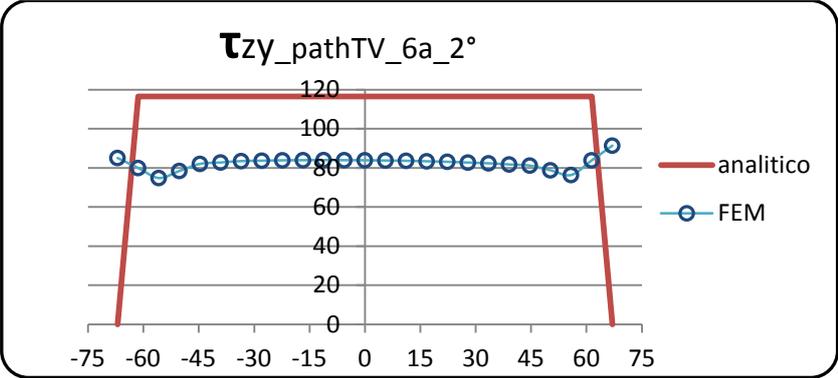
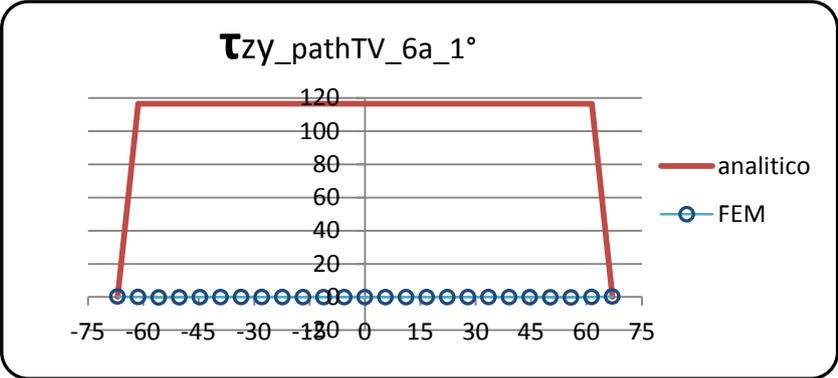


Sezione 6



Nell'osservare i risultati ottenuti lungo il path verticale, appare evidente come i valori delle tensioni σ_z registrati dal codice di calcolo con il secondo metodo siano in media molto più congruenti con quanto predetto dalla teoria in quanto si avvicinano al valore costante nullo pur presentando rilevanti effetti di bordo soprattutto sullo spigolo superiore della sezione 6. Per quanto riguarda il primo metodo si hanno intensità che differenziano da detto valore teorico in modo evidente presentando un andamento a farfalla seppur con intensità massima lievemente diminuita rispetto alla sezione precedente. Con il primo metodo infatti si sono bloccati tutti i gradi di libertà, mentre con il secondo si è lasciato libero quello lungo z a meno di tre nodi. Questo lascia la trave libera di contrarsi e allungarsi in tale direzione riducendo così l'intensità delle tensioni che verrebbero a crearsi nel caso in cui non gli siano concesse tali deformazioni; si ha in queste zone un andamento non previsto dalla teoria.

Nelle immagini seguenti è mostrato l'andamento delle tensioni di taglio sulla sesta sezione, normale all'asse longitudinale della trave z e dirette prima lungo y e poi lungo x . Dalle immagini rappresentanti l'andamento delle stesse si nota come, con il secondo metodo, lungo la direzione y sia più congruo con la trattazione teorica anche se molto inferiore a quanto stimato dall'analogia idrodinamica; nonostante ciò presenta comunque andamento costante lungo il bordo dell'anima. Per quanto riguarda le tensioni τ_{zx} è sempre il secondo metodo, per il percorso verticale, a registrare maggiori effetti di bordo per la solita impossibilità fisica che queste tensioni siano nulle lungo tutta l'anima ed improvvisamente siano ad un valore notevolmente maggiore un istante dopo in quanto si è entrati nell'ala.



7. Conclusioni

Confrontando i risultati ottenuti nelle prime due sezioni della trave, andando a variare la ripartizione del carico per creare la sollecitazione di flessione, possiamo affermare che l'andamento delle σ_z si avvicina molto ai risultati ricavati con la trattazione teorica. Questo effetto lo si riscontra sia per il path orizzontale che per quello verticale nel quale, per la seconda sezione, si ha perfetta coincidenza dell'andamento di queste tensioni.

Per quanto riguarda le tensioni di taglio in direzione x , non si evidenzia alcuna differenza delle registrazioni effettuate per entrambi i path e con i due metodi di ripartizione del carico.

Confrontando l'andamento delle tensioni di taglio τ_{zy} non si osservano particolari variazioni dei risultati registrati con i due metodi se non una leggera attenuazione degli effetti anomali non previsti dalla teoria causati ovviamente dalla modalità di ripartizione del carico sulla prima sezione.

Confrontando i risultati ottenuti nelle ultime due sezioni della trave, andando a variare la ripartizione dei vincoli per creare diverse modalità di incastro, non possiamo trarre conclusioni generali per quanto riguarda l'andamento delle σ_z . Seguendo il path orizzontale, per la sezione 5 si ha una migliore previsione con il secondo metodo mentre per la sezione 6 lo si ha con il terzo; analizzando il path verticale, per la sezione 5 non si notano differenze rilevanti mentre per la sezione 6 possiamo dire che con il terzo metodo scompare l'effetto Poisson causato da una deformazione non consentita lungo la direzione y per i primi due metodi dal fatto che il secondo, pur consentendo la deformazione lungo x , registra lo stesso andamento del primo. Tuttavia con il terzo metodo si sviluppa un problema numerico nella semi sezione inferiore che si manifesta in modo evidente nell'ala inferiore: è sicuramente imputabile al fatto di aver ripartito puntualmente le singole condizioni di vincolo e questo porta a risultati simili a quelli ottenuti nella ripartizione locale del carico che si manifestavano principalmente nella prima sezione.

Per quanto riguarda le tensioni di taglio τ_{zy} si ha un andamento non congruente con quanto ipotizzato dalla teoria per la sezione 5 lungo il path orizzontale e questo si verifica con tutti e tre i metodi; sempre lungo lo stesso path, invece, con il terzo metodo ci si avvicina di molto alla previsione analitica per la sezione 6. Lungo il path verticale i primi due metodi registrano andamenti coincidenti tra loro e congruenti con la teoria mentre il terzo risente degli effetti dovuti alla ripartizione puntuale del vincolo anche se in modo limitato trattandosi della sezione 5 e trovandosi comunque ad una certa distanza dalla sezione di incastro; per la sezione 6, con il terzo metodo, si hanno i problemi numerici evidenziati precedentemente presentando l'andamento delle σ_z ; con i primi due metodi si ottengono valori equivalente ma del tutto non conformi a quanto previsto dall'analisi analitica.

Confrontando i risultati ottenuti nelle prime due sezioni della trave, andando a variare la ripartizione del carico per creare la sollecitazione di torsione, possiamo affermare che l'andamento delle σ_z lungo il path orizzontale risulta totalmente incongruente con la teoria sia per la sezione 1 che per la 2; lungo il path verticale è il primo metodo a plottare risultati più coerenti.

Per quanto riguarda le tensioni di taglio τ_{zy} in generale lungo il path orizzontale, per entrambe le sezioni, possiamo ritenere entrambi i metodi adeguati anche se presentano alcune discordanze con la teoria; lungo il path verticale invece, si ha un andamento che ricorda quello analitico solo che sottostimato con il primo metodo e sovrastimato rispetto alla teoria con il secondo metodo.

Confrontando l'andamento delle tensioni di taglio τ_{zx} nella sezione 1 con entrambi i metodi non si hanno i valori stimati dall'analogia idrodinamica mentre nella sezione 2 è il secondo metodo a registrare un andamento delle tensioni molto congruo con l'andamento teorico. Passando al path verticale è evidente dai grafici come siano migliori i risultati mostrati con il secondo metodo per entrambe le sezioni.

Confrontando i risultati ottenuti nelle ultime due sezioni della trave, andando a variare la ripartizione dei vincoli per creare diverse modalità di incastro, possiamo affermare che per quanto riguarda l'andamento delle σ_z in generale è preferibile il secondo metodo per entrambe le sezioni ed entrambi i path. Unico scostamento lo si nota nel path verticale della sezione 6 dove si ha un aumento rilevante dell'intensità di tali tensioni in prossimità dell'intersezione con l'ala superiore.

Per quanto riguarda le τ_{zy} non si riesce estrapolare delle conclusioni di carattere generale.

Diverso il caso delle τ_{zx} dove si può affermare come per il path orizzontale entrambe le sezioni presentano i migliori andamenti vincolando la sezione con il secondo metodo; mentre per il path verticale è preferibile un blocco delle deformazioni e spostamenti come effettuati con il primo metodo.

8. Bibliografia

Quaresimin M. e Zappalorto M.,

Lezioni ed Esercizi di Costruzione di Macchine e Laboratorio, 2012.