

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI CIVITA"
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Il Modello Geometrico dell'Universo Relativistico

Relatore:
Prof. Paolo Rossi

Candidato: Matr. 1181598
Giovanna Dainese

21 febbraio 2020

A Ettore e Ada

Indice

1	Lo spaziotempo	11
1.1	Preliminari e notazioni	11
1.2	La struttura causale	13
1.3	Lo spaziotempo	18
1.4	Osservatori	18
1.5	Sistemi di Riferimento	21
2	Le equazioni di campo di Einstein	27
2.1	Il tensore stress - energia della distribuzione di materia	28
2.2	Il tensore stress - energia di un campo elettromagnetico . . .	33
2.3	Le equazioni di Einstein	36
2.4	Le geodetiche di tipo luce	37
3	Le soluzioni esatte	49
3.1	Preliminari e notazioni	49
3.2	Lo spaziotempo di Minkowski	50
3.2.1	Diagramma di Penrose dello soluzione di Minkowski .	51
3.3	Lo spaziotempo di Schwarzschild	55
3.3.1	Diagramma di Penrose della soluzione di Schwarzschild	65
3.4	Lo spaziotempo di Kerr	69
3.4.1	Diagramma di Penrose della soluzione di Kerr	78
3.5	Lo spaziotempo di Robertson-Walker	82
3.5.1	Diagrammi di Penrose della soluzione di Robertson- Walker	84
	Bibliografia	85

Ringraziamenti

Studiare è un privilegio e per questo sono immensamente grata di aver avuto questa possibilità.

Ringrazio il mio relatore, il Prof. Paolo Rossi, sia per avermi regalato un argomento di tesi a me tanto caro, sia per la professionalità e la disponibilità con cui mi ha seguito, anche in condizioni logisticamente poco favorevoli.

Ringrazio i professori e gli studenti che ho incontrato nel mio percorso per aver reso ancora più dolce la comune passione per la matematica, oltre ogni differenza di età, competenza e storia di vita. Un pensiero particolare al mio compagno di studi, Luca, senza il quale le difficoltà incontrate mi sarebbero sembrate insormontabili.

Ringrazio tutta la mia amatissima famiglia, perché con ogni possibile aiuto quotidiano ha reso realizzabile questo progetto.

Ringrazio mio fratello Nicola per essere esempio e faro per me, da quando ne ho ricordo.

Ringrazio la mia mamma e il mio papà, Gabriella e Paolo, perché sono sempre, senza esitazioni né riserve, il mio rifugio e la mia forza.

Ringrazio Daniele, l'uomo della mia vita, perché insieme a lui in questo periodo, come negli ultimi vent'anni, persino le paure e le fatiche diventano poesia e risate.

Ringrazio i miei figli, Ada e Ettore, perché sono "l'amor che move il sole e l'altre stelle".

Introduzione

La Relatività Generale è un tema largamente discusso sia a livello accademico sia in modo divulgativo. Indubbio è il fascino delle domande che nascono davanti a un cielo stellato e stupefacente è la forza immaginifica delle risposte offerte dalla teoria. Ma cosa vuol dire, davvero, "osservare le stelle"? La prima parte di questa tesi è dedicata alla costruzione del modello geometrico che permette di rispondere a questa domanda, apparentemente così naïf.

La chiave matematica del lavoro di Einstein, con l'indispensabile contributo di Tullio Levi-Civita, di Gregorio Ricci Curbastro e di Luigi Bianchi, è la metrica: strumento potente mediante cui descrivere, formalmente, sia lo spaziotempo, sia i principali attori che vi agiscono, osservatori e sistemi di riferimento.

Lo spaziotempo, così come in [1], è una varietà Lorentziana, quadridimensionale, orientata e orientata temporalmente, in cui ogni punto è dotato di un passato e di un futuro e in cui i vettori dello spazio tangente alla varietà in quel punto possono essere classificati, attraverso la metrica, dalla struttura causale.

Un osservatore, seppur fermo nello spazio tridimensionale, si trova comunque in moto nella componente temporale, pertanto la sua rappresentazione è data da una curva, di tipo tempo, rivolta verso il futuro, in cui ogni punto del dominio costituisce il *tempo proprio* dell'osservatore, cioè il tempo misurato da un orologio in quiete rispetto all'osservatore stesso [1]. A questo punto affrontiamo il primo aspetto spinoso della costruzione che stiamo seguendo: se si considerano due osservatori in moto relativo accelerato tra loro, come possiamo confrontare per esempio due vettori in due tempi diversi? Come vedremo si tratta della necessità di introdurre un nuovo concetto di trasporto parallelo e di connessione, quella di Fermi-Walker.

Nel secondo capitolo ci occupiamo di definire il modello di materia contenuta nello spaziotempo e di costruire il tensore stress-energia che la governa. A tale scopo consideriamo una definizione puramente formale del tensore in cui confluiscono i due contributi presenti nel nostro studio: quello determinato dalla distribuzione di materia e quello dovuto alle forze elettromagnetiche. Entrambi questi contributi vengono rappresentati attraverso gli strumenti della geometria differenziale, sfociando nelle equazioni di campo di Einstein.

Prima di concludere questo capitolo, siamo in grado di rispondere alla domanda iniziale. Le informazioni, che riceviamo dagli oggetti celesti, giungono a noi sotto forma di segnali luminosi, rappresentati da fotoni, che viaggiano lungo geodetiche di tipo luce. [1] Quello che vede un osservatore in un cielo stellato è la sua sfera celeste, definita come la collezione di tutte le direzioni spaziali da cui egli può vedere arrivare un fotone in un certo istante del suo tempo proprio. Ma quando effettua una misurazione su un fotone, deve in primo luogo considerare l'intera collezione delle sue sfere celesti al variare del tempo e identificarle tutte con una, attraverso la condizione di parallelismo di Fermi-Walker.

Per ricavare informazioni fisiche può indagare la composizione della radiazione "vicina" analizzando, attraverso una funzione di distribuzione, un certo numero di fotoni, in un determinato volume, con una determinata direzione e una specifica energia caratteristica. Questo si realizza mediante lo studio di una funzione, chiamata spettro elettromagnetico, la cui rappresentazione grafica presenta picchi di massimo e minimo locali, chiamati linee di spettro. L'analisi spettroscopica consente di individuare l'evento che ha provocato l'emissione di quei fotoni e le condizioni dello spaziotempo che hanno attraversato.

Il terzo capitolo è dedicato all'analisi di alcune delle soluzioni esatte delle equazioni di Einstein, con l'intenzione di capire cosa significhi trovare una metrica che soddisfi le equazioni e quali siano le caratteristiche dell'universo che tali metriche descrivono.

Inoltre, nella stretta correlazione tra caratteristiche fisiche e caratteristiche geometriche, lo scopo di questa ultima parte è quello di evidenziare come le singolarità della metrica possano rivestire significati fisici diversi a seconda del fatto che siano eludibili attraverso cambi di coordinate o, viceversa, rappresentino matematicamente quella particolare regione dello spaziotempo che si chiama buco nero.

In conclusione, la metrica racchiude nel formalismo matematico significati fisici profondi, portando alla luce previsioni teoriche che, in alcuni casi, hanno atteso decine di anni per ricevere conferma sperimentale. Appena un anno fa, veniva mostrata al mondo la rivoluzionaria fotografia dell'"ombra" del buco nero, nel cuore della galassia Messier87: non si può dimenticare lo stupore degli scienziati che hanno lavorato a quel progetto e, sebbene in minima parte, comprendere la genesi dei risultati teorici alla base di questa scoperta, ci rende partecipi di quella stessa meraviglia.

Capitolo 1

Lo spaziotempo

1.1 Preliminari e notazioni

In questa sezione ripercorriamo le notazioni con cui verranno indicati gli oggetti di base della geometria differenziale che saranno gli strumenti del nostro studio.

Sia M una varietà, indichiamo con $T_p M$ lo spazio tangente a M in p . Il fibrato tangente TM è $\{(p, X) | p \in M, X \in T_p M\}$ e indichiamo con T^*M il suo duale.

Considerando $T_p M$, lo spazio di vettori in p , e $T_p^* M$, lo spazio di 1-forme in p , indichiamo con $\mathcal{T}_s^r M$ lo spazio dei tensori di tipo $\binom{r}{s}$ su M :

$$\mathcal{T}_s^r M = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_r \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_s.$$

Siano $\phi : M \rightarrow N$ una mappa tra due varietà, allora $\phi_* : TM \rightarrow TN$ indica il differenziale e ϕ^* indica il pull-back.

Sia $\mathcal{T}_s^r M$ il fibrato dei tensori (r, s) su M e sia $\pi : \mathcal{T}_s^r M \rightarrow M$ la proiezione standard. Un campo tensoriale B di tipo (r, s) su $\mathcal{U} \subset M$ è una mappa $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$ tale che $\pi \circ B = \text{identità su } \mathcal{U}$.

Definizione 1.1.1. Una metrica Riemanniana su una varietà M è un campo tensoriale g di tipo $(0, 2)$ su M , simmetrico ($g_p(W, V) = g_p(V, W)$ per ogni $V, W \in T_p M$ e $p \in M$), e definito positivo ($g_p(V, V) > 0$ per ogni $V \neq 0_p$).

La coppia (M, g) è detta varietà Riemanniana.

Un campo tensoriale g di tipo $(0, 2)$ su M , simmetrico, non degenera ma non necessariamente definito positivo è detto metrica pseudo-Riemanniana.

Una metrica pseudo-Riemanniana ha segnatura (l, m) , se la massima dimensione di un sottospazio di $T_p M$ su cui g_p è definita positiva è l mentre su cui è definita negativa è m .

Una metrica pseudo-Riemanniana con segnatura $(n - 1, 1)$ è detta metrica Lorentziana.

Fissata una carta locale (\mathcal{U}, φ) , indichiamo con $\{x^1, \dots, x^n\}$ le corrispondenti coordinate locali. Sia $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ il corrispondente riferimento locale su TM e sia $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ il suo duale in T^*M . In questo modo possiamo esprimere in coordinate locali il campo tensoriale g su M come:

$$g = \sum_{h,k=1}^n g_{hk} dx^h \otimes dx^k \quad (1.1)$$

dove $(g_{hk}) = g(\partial_h, \partial_k)$, con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Definizione 1.1.2. Sia $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$, allora una mappa C^∞ , $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ è detta una curva su M .

Una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ è inestendibile se e solo se ogni altra curva $\xi : \mathcal{F} \rightarrow M$, che soddisfi $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ e $\xi|_{\mathcal{E}} = \gamma$, sia proprio la curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ stessa.

Definizione 1.1.3. Sia X un campo vettoriale su M , la curva integrale massimale di X uscente da $p \in M$ è l'unica curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tale che

- (i) $\gamma(0) = p$;
- (ii) $\gamma_*(u) = X(\gamma(u)) \quad \forall u \in (a, b)$;
- (iii) γ è inestendibile.

Definizione 1.1.4. La connessione di Levi-Civita ∇ su una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) è l'unica connessione ∇ , priva di torsione ($\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$) e compatibile con la metrica ($\nabla g = 0$).

I simboli di Christoffel, che determinano completamente la connessione, rispetto a un riferimento locale ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ sono dati da:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (1.2)$$

Definizione 1.1.5. Una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ è detta geodetica di (M, g) se e solo se è geodetica per ∇ su M , ovvero se e solo se il vettore tangente γ_* è parallelo lungo γ .

$$\nabla_{\gamma_*} \gamma_* = 0. \quad (1.3)$$

Definizione 1.1.6. Sia (M, g) una varietà Riemanniana (o pseudo Riemanniana) e sia $p \in M$ e indichiamo con $\mathcal{U}_p \subset T_p M$ un aperto dello spazio tangente alla varietà in p . [1]

La mappa esponenziale è definita da:

$$\exp_p : \mathcal{U}_p \rightarrow M$$

tale che:

- il vettore $0 \in T_p M$ appartiene a \mathcal{U}_p e $\exp_p(0) = p$
- $0 \neq X \in \mathcal{U}_p \Leftrightarrow \exists$ una geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$ e

$$\gamma_*(0) = X$$

- per ogni $0 \neq X \in \mathcal{U}_p$, γ è unica e $\exp_p X = \gamma(1)$

Definizione 1.1.7. Sia ∇ la connessione lineare su M . Dati $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, $h, k \in \mathbb{N}$, l'endomorfismo $C^\infty(M)$ -lineare in tutte le variabili, definito da

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{XY} &: \mathcal{T}_k^h(M) \rightarrow \mathcal{T}_k^h(M) \\ \mathbf{R}_{XY} &= \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \end{aligned}$$

è chiamato l'endomorfismo di curvatura della connessione ∇ .

Definizione 1.1.8. Il tensore di curvatura \mathbf{R} su una varietà (pseudo)Riemanniana (M, g) è il campo tensoriale $\mathbf{R} \in \mathcal{T}_3^1(M)$ dato da:

$$\mathbf{R}(X, Y, Z) = \mathbf{R}_{XY}Z.$$

Fissata una carta locale (\mathcal{U}, φ) , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, indichiamo con Γ_{jk}^i i simboli di Christoffel di ∇ rispetto a questa carta. Allora ponendo $R_{\partial_i \partial_j} = R_{ijk}^h \partial_h$, si ha:

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jl}^i - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^h - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^h. \quad (1.4)$$

Definizione 1.1.9. Il tensore di Ricci $\mathbf{Ric} \in \mathcal{T}_2^0(M)$ di una varietà (M, g) è la contrazione di \mathbf{R} . In coordinate locali, ponendo $R_{hij}^h = R_{ij}$ si ha:

$$\mathbf{Ric} = R_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

La curvatura scalare, detta anche lo scalare di Ricci, $S : M \rightarrow \mathbb{R}$, è la contrazione del campo tensoriale di tipo $(1, 1)$ fisicamente equivalente a \mathbf{Ric} .

$$S = g^{ij} R_{ij}.$$

Definizione 1.1.10. Il tensore di Einstein \mathbf{G} di (M, g) è il campo tensoriale di tipo $(0, 2)$, tale che:

$$\mathbf{G} = \mathbf{Ric} - \frac{1}{2} Sg.$$

1.2 La struttura causale

In questa sezione introduciamo i primi concetti fondamentali nella costruzione del modello di spaziotempo. Se consideriamo inizialmente uno spazio vettoriale Lorentziano (V, g) , dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e g il suo prodotto interno, possiamo classificare i sottospazi in cui la

forma bilineare g è definita positiva, negativa o nulla. Questa classificazione acquisisce un significato fondamentale quando consideriamo una varietà Lorentziana e il suo spazio tangente in ogni punto: essa permette di individuare le relazioni causali tra i punti della varietà, che rappresentano gli eventi nello spaziotempo. [1]

Definizione 1.2.1. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Lorentziano di dim n . Sia $W \subset V$ un suo sottospazio.

Il carattere causale di W è detto:

- di tipo spazio (o "spacelike") se e solo se g è definita positiva su W ;
- di tipo luce (o "lightlike") se e solo se g è semidefinita positiva, ma non è definita positiva su W
- di tipo tempo (o "timelike") altrimenti.

Il carattere causale di $v \in V$ è quello dello spazio $\langle v \rangle$ da lui generato. Un vettore si dice causale se non è di tipo spazio.[1]

Osservazione 1.2.2. Dalla definizione 1.2.1, si deduce immediatamente che il vettore 0 è di tipo spazio. Mentre un vettore $v \in V$, diverso dal vettore 0 , assume carattere di tipo spazio se $g(v, v)$ è positivo; di tipo luce se $g(v, v) = 0$; infine è di tipo tempo se $g(v, v)$ è negativo.

Inoltre un sottospazio W è di tipo spazio se e solo se tutti i vettori che contiene sono di tipo spazio; mentre risulta di tipo luce se e solo se contiene un vettore di tipo luce, ma nessuno di tipo tempo; dunque un sottospazio è di tipo tempo se e solo se contiene un vettore di tipo tempo.

Si può notare che nessuno dei vari tipi di sottospazio è vuoto.

Lemma 1.2.3. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Lorentziano e sia $z \in V$ un vettore di tipo tempo. Allora il vettore ortogonale al vettore z , è di tipo spazio.

Inoltre, se indichiamo con $z^\perp = \{v \in V | v \perp z\}$, z^\perp è uno spazio vettoriale prodotto interno e V è dato dalla somma diretta: $\mathbb{R}z \oplus z^\perp$. [13]

Dimostrazione. Consideriamo $u = \frac{z}{|z|}$. Allora il lemma stabilisce che esiste una base ortonormale $\{u, e_1, \dots, e_{n-1}\}$. poiché se $v \perp z \Rightarrow v \perp u$, allora v si può scrivere come combinazione lineare $v = b_1 e_1 + \dots + b_{n-1} e_{n-1}$.

Allora $\langle v, v \rangle = \sum b_i^2 \geq 0$, e l'uguaglianza qui implica che $v = 0$, così v è di tipo spazio.

Dunque u^\perp è il sottospazio generato da $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$, pertanto u^\perp è lo spazio prodotto interno, sotto il prodotto scalare di V . Quindi $V = \mathbb{R}z \oplus z^\perp$. \square

Proposizione 1.2.4. Sia $W \subset V$, sottospazio dello spazio vettoriale Lorentziano (V, g) . Indichiamo con $W^\perp = \{v \in M | g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$. Allora si ha, [1]:

- (i) W è di tipo tempo $\iff W^\perp$ è di tipo spazio
- (ii) W è di tipo spazio $\iff W^\perp$ è di tipo tempo
- (iii) W è di tipo luce $\iff W^\perp$ è di tipo luce $\iff W \cap W^\perp \neq \vec{0}$

In uno spazio vettoriale Lorentziano, sia \mathcal{L} l'insieme di tutti i vettori di tipo luce: si tratta di un doppio cono, *lightcone*, che separa i vettori di tipo tempo da quelli di tipo spazio, come in figura 1.1.

Lemma 1.2.5. *Il cono di luce \mathcal{L} ha due componenti \mathcal{L}^+ e \mathcal{L}^- , con $\mathcal{L}^- = -\mathcal{L}^+$. Ogni componente è un cono diffeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{S}^{n-2}$. [13]*

Dimostrazione. Sia $u = \frac{z}{|z|}$ un vettore di tipo tempo in V . Per il lemma 1.2.3, possiamo scrivere ogni vettore in V , in particolare sia v un vettore di tipo luce, come $v = au + x$, con $x \perp u$. Consideriamo \mathcal{L}^+ e \mathcal{L}^- in modo che il segno sia concorde con $a > 0$ e rispettivamente $a < 0$, con $a \neq 0$. Allora \mathcal{L}^+ e \mathcal{L}^- sono coni, tali che $\mathcal{L}^- = -\mathcal{L}^+$. Inoltre si ha che $|x|^2 = a^2$, dal momento che v è nullo.

Ora, ricordando che \mathbb{S}^{n-1} è la sfera unitaria in $u^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$, consideriamo un vettore $v \in \mathcal{L}^+$, $v = au + x$, allora $|x| = a$. Definiamo la mappa che manda $v \in \mathcal{L}^+$ nella coppia $(a, \frac{x}{a})$, con $v \mapsto \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-2}$.

Allora la mappa che associa la coppia (r, y) , che sta in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-2}$, al vettore $r(u + y) \in \mathcal{L}^+$, è proprio l'inversa della prima. \square

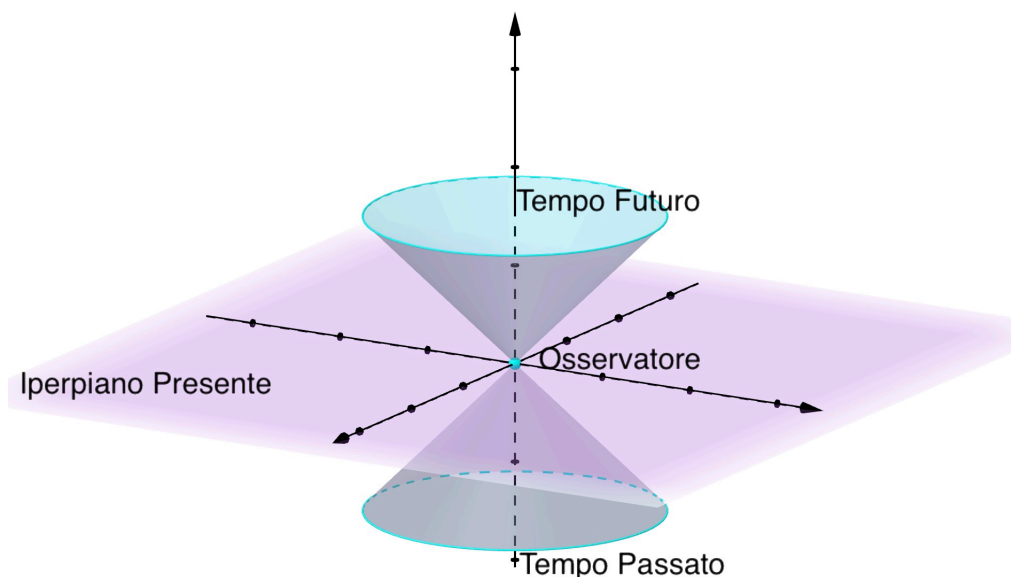


Figura 1.1: Il cono di luce

Proposizione 1.2.6. *Sia V uno spazio vettoriale Lorentziano. L'insieme $\mathcal{T} \in V$ di tutti i vettori di tipo tempo in V , chiamata cono di tempo ha una o due componenti \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- , ciascuna è un cono convesso aperto, tale che $\mathcal{T}^- = -\mathcal{T}^+$. Si indichi con $\partial\mathcal{T}^+$ il bordo del cono \mathcal{T}^+ ; allora, scegliendo opportunamente il segno, si ha: [13]*

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{T}^+ &= \mathcal{L}^+ \cup \{0\} \\ \partial\mathcal{T}^- &= \mathcal{L}^- \cup \{0\}\end{aligned}$$

Dopo aver rivisto alcune delle proprietà generali di uno spazio vettoriale Lorentziano, necessarie per la costruzione del modello che stiamo analizzando, ricordiamo che in una varietà Lorentziana M , lo spazio tangente a M in ogni punto $p \in M$, è uno spazio vettoriale Lorentziano: per questo motivo se è possibile distinguere nello spazio tangente T_pM , in ogni punto $p \in M$, due coni di tempo che discriminano il futuro dal passato, si dice che la varietà è orientabile temporalmente, come ora vedremo.

Definizione 1.2.7. *Una varietà è orientabile se ammette un atlante orientato. Un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ si dice orientato se ogni coppia di carte di \mathcal{A} è equiorientata. Due carte (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) sono equiorientate se il determinante del differenziale del cambiamento di coordinate $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ è positivo in tutti i punti di $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.*

Definizione 1.2.8. *Una varietà Lorentziana connessa (M, g) è orientabile temporalmente se e solo se \mathcal{T} ha due componenti connesse.*

Dalla definizione generale segue che in ogni spazio tangente alla varietà, T_pM , è possibile dividere tutti i vettori causali in due classi, l'una dei vettori causali rivolti verso il futuro, l'altra di quelli rivolti verso in passato, per ogni punto p della varietà M . [5] La distinzione che caratterizza le due classi è data dal seguente lemma.

Lemma 1.2.9. *Sia (M, g) una varietà Lorentziana connessa orientata temporalmente e siano u e v due vettori causali, (di tipo tempo o luce), nello stesso punto $p \in M$. Assumiamo che u sia rivolto verso il futuro, allora si hanno le seguenti tre possibilità:*

- $g(u, v) < 0 \Leftrightarrow v$ è rivolto verso il futuro;
- $g(u, v) > 0 \Leftrightarrow v$ è rivolto verso il passato;
- $g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u$ e v sono nulli e collineari.

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui u sia di tipo tempo e assumiamo che sia il vettore unitario: $g(u, u) = -1$. Sia dunque (u, e_1, \dots, e_{n-1}) una base ortonormale dello spazio tangente T_pM , con e_i vettori unitari di tipo spazio. Possiamo scrivere il vettore v come combinazione lineare dei vettori

di questa base, ottenendo: $v = v^0 u + v^i e_i$.

Se il coefficiente v^0 fosse uguale a zero, si avrebbe che il vettore $v = v^i e_i$ sarebbe di tipo spazio, in contraddizione con le ipotesi. Allora $v^0 \neq 0$ e inoltre l'orientazione temporale di v è la stessa di quella di u se $v^0 > 0$: $g(u, v) = -v^0$ conclude questa verifica.

Si dimostra con un procedimento analogo anche il caso in cui u sia di tipo luce, si veda per esempio [5]. \square

Definizione 1.2.10. *Nelle ipotesi del lemma precedente, definiamo:*

- $\mathcal{T}_p^+ := \{v \in T_p M | g(u, v) < 0\}$ la componente che chiamiamo futuro;
- $\mathcal{T}_p^- := \{v \in T_p M | g(u, v) > 0\}$ la componente che chiamiamo passato.

Ogni componente è diffeomorfa a \mathbb{R}^n . [1]

Proposizione 1.2.11. *Sia (M, g) varietà Lorentziana e sia $\phi : N \rightarrow M$ un'immersione di una varietà N . Se $\phi_*(T_x N) \subset T_{\phi(x)} M$ ha lo stesso carattere causale $\forall x \in N$, allora il carattere causale è assegnato all'immersione ϕ e alla sua immagine $\phi(N)$.*

Osservazione 1.2.12. *Analogamente a quanto visto, si possono applicare le corrispondenti definizioni alle curve su M o ai campi vettoriali su M .*

In particolare, un campo vettoriale X definito su $\mathcal{U} \subset M$ è di tipo tempo (rispettivamente di tipo spazio o di tipo luce) se e solo se $X(x)$ è di tipo tempo $\forall x \in \mathcal{U}$ (rispettivamente di tipo spazio o di tipo luce).

Mentre una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ è di tipo tempo (rispettivamente di tipo spazio o di tipo luce) se e solo se il vettore tangente è di tipo tempo in ogni punto della curva.

Osservazione 1.2.13. *L'insieme \mathcal{T}_p^+ , con $p \in M$, dei vettori in p di tipo tempo, rivolti al futuro, (analogamente a \mathcal{T}_p^-), gode delle seguenti proprietà:*

- (a) è aperto
- (b) i suoi bordi consistono nel vettore zero e nell'insieme \mathcal{L}_p^+
- (c) la chiusura di \mathcal{T}_p^+ interseca quella di \mathcal{T}_p^- solo nel vettore zero, e $\mathcal{T}_p^+ \cap \mathcal{T}_p^- = \emptyset$
- (d) se $X \in \mathcal{T}_p^+$ e $Y \in \mathcal{T}_p^+ \cup \mathcal{L}_p^+$, allora $X + Y \in \mathcal{T}_p^+$.

Esempio 1.2.14. *Consideriamo il cilindro $M = \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$, ottenuto da \mathbb{R}^2 identificando (u^1, u^2) con $(u^1, u^2 + \pi)$ e osserviamo come due differenti metriche Lorentziane su M portino a risultati differenti in termini di orientabilità temporale.*

Definiamo su \mathbb{R}^2 innanzitutto le 1-forme:

$$\omega = \cos(u^2) du^1 + \sin(u^2) du^2 \quad \eta = -\sin(u^2) du^1 + \cos(u^2) du^2$$

allora le seguenti due metriche, \hat{g}_1 e \hat{g}_2 sono Lorentziane su \mathbb{R}^2 e restano invariate sotto la mappa $(u^1, u^2) \rightarrow (u^1, u^2 + \pi)$:

$$\hat{g}_1 = \omega \otimes \omega - \eta \otimes \eta \quad \hat{g}_2 = du^1 \otimes du^1 - du^2 \otimes du^2$$

In questo modo entrambe determinano una metrica Lorentziana su M , che chiamiamo rispettivamente g_1 e g_2 .

Tuttavia (M, g_1) , pur essendo orientabile, non è orientabile temporalmente poiché non sono esattamente due e solo due le componenti connesse. Mentre (M, g_2) è orientabile temporalmente.

1.3 Lo spaziotempo

Definizione 1.3.1. Uno spaziotempo (M, g, ∇) è una varietà Lorentziana (M, g) , 4-dimensionale, connessa, orientata e orientata temporalmente, insieme con la connessione di Levi-Civita ∇ relativa a g su M .

Uno spaziotempo rappresenta un modello di una parte di storia di una porzione di universo, in cui tre coordinate costituiscono le tre coordinate spaziali e una quella temporale.

Possiamo supporre, dunque, di voler confrontare due spaziotempi diversi. Siano (M, g) e (N, h) due spaziotempi. Diremo che (N, h) contiene (M, g) se e solo se M è una sottovarietà aperta di N , $h|_M = g$, e (M, g) è dotato dell'orientazione e orientazione temporale indotta. Si può definire (M, g) massimale se e solo se ogni spaziotempo che contiene (M, g) è proprio (M, g) stesso.

Vale la seguente proposizione per la quale si stabilisce che uno spaziotempo è massimale se non è possibile da fuori osservare dentro o, da dentro, osservare fuori, sottolineando il ruolo fondamentale che occupano le geodetiche di tipo luce nell'analisi che stiamo presentando.

Proposizione 1.3.2. Supponiamo di avere due spaziotempi (M, g) , (N, h) , l'uno contenuto nell'altro, $(M, g) \subset (N, h)$. Se per ogni geodetica di tipo luce $\lambda: \mathcal{E} \rightarrow N$ tale che $(\lambda(\mathcal{E})) \cap M \neq \emptyset$, vale che $(\lambda(\mathcal{E})) \subset M$, allora $M = N$.

1.4 Osservatori

Definizione 1.4.1. Sia $\phi: N \rightarrow M$ una mappa C^∞ e sia $\mathcal{T}_s^r M$ il fibrato di tensori (r, s) su M , con la proiezione $P: \mathcal{T}_s^r M \rightarrow M$. Un campo tensoriale su ϕ è la mappa $\mathbf{A}: N \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$ tale che $P \circ \mathbf{A} = \phi$. Se ϕ è una curva $\gamma: \mathcal{E} \rightarrow M$ allora indichiamo con γ_* il campo vettoriale tangente di γ .

Definizione 1.4.2. Sia (M, g, ∇) uno spaziotempo e sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ una curva.

L'accelerazione \mathbf{A}_γ è il campo vettoriale su γ tale che $\mathbf{A}_\gamma = \nabla_{\gamma_*} \gamma_*$.

Osservazione 1.4.3. Si noti che γ è una geodetica se e solo se $\mathbf{A}_\gamma = 0$.

Ricordando che una curva è di tipo tempo se lo è il campo vettoriale tangente in ogni suo punto, diamo ora una delle definizioni chiave dell'analisi che stiamo costruendo.

Definizione 1.4.4. Sia (M, g, ∇) uno spaziotempo.

Un osservatore in M è una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ di tipo tempo, rivolta al futuro e tale che $|\gamma_*| = 1$.

Osservazione 1.4.5. La semplice definizione matematica racchiude i fondamentali aspetti che fisicamente caratterizzano un osservatore.

Un osservatore fisico si muove inesorabilmente nel futuro attraverso un "continuo di punti" nello spaziotempo, pertanto può essere rappresentato da una curva: assumendo che viaggi ad una velocità inferiore a quella della luce, tale curva deve essere di tipo tempo, come richiesto.

L'immagine del dominio $\gamma(\mathcal{E})$ rappresenta la storia dell'osservatore e viene chiamata la sua world line, linea universo.

Inoltre il singolo $u \in \mathcal{E}$ è il tempo proprio dell'osservatore: esso configura il tempo misurato da un orologio in quiete rispetto all'osservatore, ovvero la cui storia sia esattamente $\gamma(\mathcal{E})$. Può essere calcolato come una lunghezza d'arco:

$$\int_a^u |\gamma_* s| ds = \int_a^u ds = u - a.$$

Il campo vettoriale tangente alla curva, γ_* , corrisponde alla 4-velocità dell'osservatore e così $\mathbf{A}_\gamma = \nabla_{\gamma_*} \gamma_*$ è la sua 4-accelerazione.

Definizione 1.4.6. In uno spaziotempo (M, g, ∇) , un osservatore istantaneo è una coppia ordinata (z, Z) , dove $z \in M$, mentre Z è il versore di tipo tempo rivolto al futuro, $Z \in T_z M$ e $g(Z, Z) = -1$.

Definizione 1.4.7. Sia (z, Z) un osservatore istantaneo. Sia

$$\mathcal{O}^3 = \{\psi : T_z M \rightarrow T_z M \mid \psi(Z) = Z \text{ e } g(X, Y) = g(\psi(X), \psi(Y)) \quad \forall X, Y \in T_z M\}$$

\mathcal{O}^3 è isomorfo al gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^3 .

Per ogni $\psi \in \mathcal{O}^3$, sia $\psi_s^r : \mathcal{T}_s^r(T_z M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(T_z M)$ l'estensione di ψ .

Allora $A \in \mathcal{T}_s^r(T_z M)$ è chiamato spazialmente isotropo per (z, Z) se e solo se $\psi_s^r(A) = A, \forall \psi \in \mathcal{O}^3$.

Definizione 1.4.8. Sia $p : T_z M \rightarrow Z^\perp$ la proiezione ortogonale sullo spazio locale in quiete.

Allora $\forall X, Y \in T_z M$, il tensore di proiezione è:

$$h(X, Y) = g(pX, pY)$$

Proposizione 1.4.9. Sia $T \in \mathcal{T}_2^0(T_z M)$ e sia (z, Z) un osservatore istantaneo.

Allora T è spazialmente isotropo per (z, Z) se e solo se $T = a(gz) + bh$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ e h è il tensore proiezione.

Osservazione 1.4.10. Sia (z, Z) un osservatore istantaneo. Indichiamo con $\text{Span}Z = \langle Z \rangle$ il suo asse locale relativo alla coordinata tempo, ovvero un sottospazio di tipo tempo di $T_p M$ di dimensione 1. Indichiamo allora con Z^\perp il suo spazio locale in quiete. La somma diretta

$$T_p M = \langle Z \rangle \oplus Z^\perp$$

sarà la decomposizione ortogonale associata.

Definizione 1.4.11. Sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ la curva di tipo tempo che corrisponde a un osservatore, allora $(\gamma(u), \gamma_*(u))$ indica l'osservatore istantaneo.

$R_u := (\gamma_*(u))^\perp$ è il suo spazio locale in quiete, (o Rest-space) al tempo proprio u .

$T_u := \langle \gamma_*(u) \rangle$ è il suo asse locale temporale al tempo proprio u .

Esempio 1.4.12. Il primo importante problema che vogliamo chiarire è come un osservatore istantaneo (z, Z) misuri la velocità newtoniana di un altro osservatore rappresentato per esempio dalla curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$.

Innanzitutto occorre garantire che "si incontrino", ovvero la curva γ deve essere tale che esista u , con $\gamma(u) = z$ e $\gamma_*(u) = X$ con $X \in T_z M$.

Allora esiste un'unica scomposizione ortogonale del campo vettoriale tangente alla curva X di tipo tempo, rivolto al futuro:

$$X = \mathbf{e}Z + p, \quad \mathbf{e} \in \mathbb{R}, \quad p \in Z^\perp$$

$$\mathbf{e} = -g(X, Z), \quad \mathbf{e} > 0.$$

In riferimento all'osservazione 1.4.10, quel che si ottiene è una scomposizione di X in una parte che giace allo spazio locale in quiete di Z e una parte che appartiene all'asse locale relativo alla coordinata tempo di Z . Allora p/\mathbf{e} è la velocità newtoniana di X osservata da (z, Z) .

Osservazione 1.4.13. Supponiamo di voler calcolare l'angolo newtoniano θ misurato da un osservatore (z, Z) tra $X, Y \in T_z M$: utilizziamo $g|_{Z^\perp}$

determinando l'angolo θ tra le proiezioni pX e $pY \in Z^\perp$, ottenendo:

$$\cos \theta = \frac{g(pX, pY)}{[g(pX, pX)g(pY, pY)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{h(X, Y)}{[h(X, X)h(Y, Y)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Si noti che θ non dipende solo da X e Y , ma anche dall'osservatore Z : ciò diventa particolarmente interessante quando si considerano dei campi vettoriali di tipo non-spazio poiché riguarda fenomeni fisici come l'aberrazione della luce (o come la relatività della simultaneità.)

1.5 Sistemi di Riferimento

Questa sezione è dedicata alla costruzione dello strumento fondamentale per effettuare e analizzare qualsiasi tipo di osservazione o misura: i sistemi di riferimento.

Definizione 1.5.1. *In uno spaziotempo (M, g, ∇) , un sistema di riferimento \mathbf{Q} è un campo vettoriale le cui curve integrali sono una famiglia di osservatori: \mathbf{Q} è rivolto verso il futuro e $g(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = -1$.*

Osservazione 1.5.2. *Tutti gli osservatori in un sistema di riferimento geodetico \mathbf{Q} , ovvero tale che $\nabla_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q} = 0$, sono in caduta libera.*

Si pone ora il problema di valutare gli effetti di eventuali rotazioni arbitrarie (ovvero non dovute alla metrica stessa dello spaziotempo) di un sistema di riferimento.

Per esempio, supponiamo che un osservatore γ voglia stabilire se un particolare vettore unitario X , nel suo spazio locale in quiete, al tempo proprio u , abbia la stessa direzione spaziale di un vettore unitario \widehat{X} al tempo \widehat{u} .

Se l'osservatore si trova in caduta libera, si sta muovendo lungo una geodetica, dunque X e \widehat{X} hanno la stessa direzione spaziale se e solo se \widehat{X} è il trasporto parallelo di X lungo γ , relativo alla connessione di Levi-Civita ∇ . Tuttavia se γ non è in caduta libera, per esempio se è in accelerazione, occorre adattare la nozione di trasporto parallelo, attraverso la definizione di una nuova connessione.

Proposizione 1.5.3. *Siano (M, g, ∇) uno spaziotempo, $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore, γ^* il pull-back e $\gamma^*(\nabla)$ la connessione indotta sulla curva γ .*

Sia $T_{\gamma(u)}M = R_u \oplus T_u$ la scomposizione ortogonale associata all'osservatore istantaneo $(\gamma(u), \gamma_(u))$.*

Indichiamo con

$$p_u : T_{\gamma(u)}M \rightarrow R_u \quad q_u : T_{\gamma(u)}M \rightarrow T_u$$

rispettivamente la proiezione ortogonale sullo spazio locale in quiete e quella sull'asse locale temporale di γ .

Allora esiste un'unica connessione F su γ tale che:

$$F_Y X = \left(p_u(\gamma^*(\nabla))_Y p_u \right) (X(u)) + \left(q_u(\gamma^*(\nabla))_Y q_u \right) (X(u)) \quad (1.5)$$

\forall campo vettoriale Y su \mathcal{E} e \forall campo vettoriale X su γ .

La connessione F si chiama connessione di Fermi-Walker e viene indicata con F_{γ^*} .

Proposizione 1.5.4. *Sia (M, g, ∇) uno spaziotempo. Sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore.*

Siano X, Y due campi vettoriali su γ e \mathbf{A}_γ l'accelerazione dell'osservatore. Sia F_{γ^} la connessione di Fermi-Walker su γ . Allora valgono le seguenti:*

(i)

$$F_{\gamma^*} X = \nabla_{\gamma^*} X + g(\gamma^*, X) \mathbf{A}_\gamma - g(\mathbf{A}_\gamma, X) \gamma^*; \quad (1.6)$$

(ii)

$$\frac{d}{du} g(X, Y) = g(F_{\gamma^*} X, Y) + g(X, F_{\gamma^*} Y); \quad (1.7)$$

(iii)

$$F_{\gamma^*} \gamma^* = 0. \quad (1.8)$$

(iv) Se $X(u)$ e $Y(u) \in R_u \forall u \in \mathcal{E}$, allora

$$F_{\gamma^*} X \in R_u \text{ e } F_{\gamma^*} Y \in R_u \quad \forall u \in \mathcal{E}; \quad (1.9)$$

$$g(F_{\gamma^*} X, Y) = g(\nabla_{\gamma^*} X, Y). \quad (1.10)$$

Osservazione 1.5.5. *Si nota dalla (i) che se l'osservatore γ è in caduta libera, lungo una geodetica, $\mathbf{A}_\gamma = 0$, risulta immediatamente che $F_{\gamma^*} X = \nabla_{\gamma^*} X$, i.e. la connessione di Fermi-Walker corrisponde alla connessione lineare di Levi-Civita dello spaziotempo, di cui è la naturale estensione.*

Inoltre risulta che se trasportiamo una base ortonormale di $T_{\gamma(u)}M$ lungo γ in modo F-parallelo, ovvero tale che la derivata covariante rispetto alla

connessione di Fermi-Walker sia uguale a zero, quello che otteniamo è proprio una base ortonormale in ogni punto di $\gamma(u)$.

Infatti per la proposizione precedente 1.5.3, poiché F_{γ_*} è una connessione, preso $V \in T_{\gamma(u)}M$, esiste un unico campo vettoriale F -parallelo \bar{V} tale che $\bar{V}(u) = V$. Allora se $u_0 \in \mathcal{E}$ e $\{X_i\}$, con $i = 1, \dots, 4$, è una base dello spazio tangente $T_{\gamma(u_0)}M$, esiste un unico insieme di campi vettoriali F -trasportati su γ , $\{\bar{X}_i\}$, tali che $\bar{X}_i(u_0) = X_i$.

In particolare per la (ii) se gli $\{X_i\}$ sono ortonormali, anche gli $\bar{X}_i(u)$ sono ortonormali per ogni $u \in \mathcal{E}$. E dunque se poniamo $X_4 = \gamma_*(u_0)$, allora per la (iii) si ha che $\bar{X}_4 = \gamma_*$.

Possiamo interpretare $\bar{X}_j(u)$ come il vettore unitario al tempo proprio u lungo l'asse j -esimo trasportato da γ . Allora due vettori unitari, $X_1 \in R_{u_1}$ e $X_2 \in R_{u_2}$, avranno la stessa direzione spaziale se e solo se

$$X_1 = \sum_j a_j(\bar{X}_j(u_1)) \quad e \quad X_2 = \sum_j a_j(\bar{X}_j(u_2))$$

per qualche $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Consideriamo ora un sistema di riferimento \mathbf{Q} e la relativa 1-forma fisicamente equivalente, ω . Ci proponiamo di evidenziare come le proprietà geometriche di questa 1-forma siano collegate al tempo proprio dell'osservatore in \mathbf{Q} e come questo ci permetta di classificare i sistemi di riferimento. Ricordiamo che se $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ è un osservatore nel sistema di riferimento \mathbf{Q} , con $g(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = -1$ e \mathbf{Q} rivolto al futuro, allora ne consegue che

$$(\gamma^*(\omega))\left(\frac{d}{du}\right) = \omega(\gamma_*) = g(\mathbf{Q}, \gamma_*) = g(\gamma_*, \gamma_*) = -1 \quad \Rightarrow \quad du = -\gamma^*(\omega).$$

Definizione 1.5.6. Sia \mathbf{Q} un sistema di riferimento e sia ω la relativa 1-forma fisicamente equivalente ($\omega = g(\mathbf{Q}, \cdot)$).

Allora si dice che \mathbf{Q} è:

- localmente sincronizzabile $\iff \omega \wedge d\omega = 0$
- localmente sincronizzabile secondo il tempo proprio $\iff d\omega = 0$
- sincronizzabile \iff esistono due funzioni di classe \mathcal{C}^∞ , $h, t : M \rightarrow \mathbb{R}$, tali che $h > 0$ e $\omega = -h dt$
- sincronizzabile secondo il tempo proprio \iff esiste $t : M \rightarrow \mathbb{R}$, di classe \mathcal{C}^∞ , tale che $\omega = -dt$.

Proposizione 1.5.7. *Valgono le seguenti affermazioni:*

- (i) *Un sistema di riferimento sincronizzabile è localmente sincronizzabile.*
- (ii) *Un sistema di riferimento sincronizzabile secondo il tempo proprio è localmente sincronizzabile secondo il tempo proprio.*

Definizione 1.5.8. *Se \mathbf{Q} è sincronizzabile, allora ogni funzione $t : M \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $\exists h > 0$ e $\omega = -h dt$, si chiama funzione tempo.*

Se \mathbf{Q} è sincronizzabile secondo il tempo proprio, allora ogni funzione t si chiama funzione tempo proprio ed è tale che $du = \gamma^(dt)$ per ogni osservatore γ in \mathbf{Q} .*

Osservazione 1.5.9. *Osserviamo in particolare una significativa correlazione tra il fatto che \mathbf{Q} sia sincronizzabile e una caratteristica peculiare delle ipersuperfici di livello della funzione tempo t .*

Infatti se \mathbf{Q} è sincronizzabile, allora tutte le ipersuperfici di livello della funzione tempo t sono ortogonali a \mathbf{Q} e dunque sono ortogonali a tutti gli osservatori di \mathbf{Q} . D'altra parte, se consideriamo un arbitrario sistema di riferimento \mathbf{Q} su M e una funzione t su M , tale che dt non si annulli mai e tale che le ipersuperfici di livello di t siano ovunque ortogonali a \mathbf{Q} , allora \mathbf{Q} è sincronizzabile e $\pm t$ è la funzione tempo per \mathbf{Q} .

Dunque la procedura di sincronizzazione si può matematicamente tradurre in questo modo.

Se \mathbf{Q} è sincronizzabile secondo il tempo proprio, denotiamo con \mathcal{N}_a l'ipersuperficie di livello della funzione tempo proprio definita da $t = a$. Allora ogni osservatore in \mathbf{Q} può regolare il suo orologio atomico, \mathcal{E} , in modo tale che il suo tempo proprio sia uguale a 0 quando la sua linea-universo interseca l'ipersuperficie \mathcal{N}_0 . Infatti poiché $du = \gamma^(dt)$, quando il tempo proprio di ogni osservatore in \mathbf{Q} è uguale a a , la sua linea universo interseca l'ipersuperficie \mathcal{N}_a .*

Se \mathbf{Q} non è sincronizzabile secondo il tempo proprio, ma solo sincronizzabile, è possibile ricondursi ad una situazione in cui ogni osservatore opera una modifica del tempo e diventa conveniente considerare la comparazione tra osservatori.

Definizione 1.5.10. *Sia \mathbf{Q} un sistema di riferimento, sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore in \mathbf{Q} e sia p la proiezione sullo spazio locale in quiete definita nella proposizione 1.5.3.*

Un campo vettoriale \mathbf{W} su γ si dice vicino a γ in \mathbf{Q} se esiste un campo vettoriale \mathbf{W}' su γ , tale che

$$p(\mathbf{W}') = \mathbf{W} \quad e \quad L_{\mathbf{Q}}\mathbf{W}' = 0.$$

Definizione 1.5.11. *Sia F la connessione di Fermi-Walker su γ . Sia \mathbf{W} un campo vettoriale vicino a γ .*

Allora $F_{\gamma^}\mathbf{W}$ è detta la 3-velocità di \mathbf{W} relativa a γ .*

Mentre $F_{\gamma^}^2\mathbf{W} = F_{\gamma^*}F_{\gamma^*}\mathbf{W}$ è detta la 3-accelerazione di \mathbf{W} relativa a γ .*

Osservazione 1.5.12. *Si noti che $\forall u \in \mathcal{E}$ sia la 3-velocità $F_{\gamma_*} \mathbf{W}(u)$ che la 3-accelerazione $F_{\gamma_*}^2 \mathbf{W}(u)$ appartengono allo spazio locale in quiete dell'osservatore istantaneo $(\gamma(u), \gamma_*(u))$.*

Per portare a termine l'analisi sui sistemi di riferimento oggetto di questa sezione ci proponiamo di definire i sistemi di riferimento irrotazionali e rigidi.

L'idea è quella di esplicitare, matematicamente, il comportamento degli osservatori vicini ad un osservatore dato in un sistema di riferimento: rilevando una rotazione e verificandone le caratteristiche, potremo stabilire di che tipo di riferimento si tratti.

Sia (z, Z) un osservatore istantaneo e sia $T_z M = R \oplus T$ la scomposizione ortogonale ad esso associata. Sia \mathbf{R} il tensore di curvatura dello spaziotempo (M, g, ∇) .

Allora possiamo definire la trasformazione lineare dello spazio locale in se stesso $\psi_Z : R \rightarrow R$ con $\psi_Z(X) = \mathbf{R}_{ZX}Z$, per ogni $X \in R$.

Per la proprietà di antisimmetria del tensore di curvatura si ha che per ogni $X \in R$

$$g(\psi_Z(X), Z) = g(\mathbf{R}_{ZX}Z, Z) = 0 \implies \psi_Z(R) \subset R.$$

Osserviamo inoltre che ψ_Z è simmetrico rispetto a $g(z)|_Z$: infatti, per ogni $V, W \in R$,

$$\begin{aligned} g(\psi_Z(V), W) &= g(\mathbf{R}_{ZV}Z, W) = \widehat{\mathbf{R}}(W, Z, Z, V) \\ &= \widehat{\mathbf{R}}(V, Z, Z, W) = g(\mathbf{R}_{ZW}Z, V) \\ &= g(\psi_Z(W), V) \end{aligned}$$

dove con $\widehat{\mathbf{R}}$ si indica il tensore di tipo $(0, 4)$ fisicamente equivalente a \mathbf{R} .

Con gli strumenti che abbiamo definito, possiamo enunciare la seguente proposizione.

Proposizione 1.5.13. *Sia \mathbf{Q} un sistema di riferimento geodetico e sia \mathbf{W} un campo vettoriale vicino a un osservatore $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ in \mathbf{Q} .*

La 3-accelerazione di \mathbf{W} relativa a γ soddisfa la seguente relazione:

$$F_{\gamma_*(u)}^2 \mathbf{W}(u) = \psi_{\gamma_*(u)}(\mathbf{W}(u)) \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{E} \quad (1.11)$$

Osservazione 1.5.14. *Consideriamo un sistema di riferimento \mathbf{Q} .*

Sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore in \mathbf{Q} e R_u il suo spazio locale in quiete. Allora $A_{\mathbf{Q}} : R_u \rightarrow R_u$ definita da $A_{\mathbf{Q}}(X) = -\nabla_X \mathbf{Q}$ è una trasformazione lineare che associa ad ogni vicino di γ in \mathbf{Q} la sua 3-velocità negativa rispetto a γ .

Definizione 1.5.15. *Sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore nel sistema di riferimento \mathbf{Q} .*

- \mathbf{Q} si dice irrotazionale in $x = \gamma(u)$ se e solo se $A_{\mathbf{Q}}$ è simmetrica rispetto a $g(x)|_{R_u}$.
- \mathbf{Q} si dice rigido in $x = \gamma(u)$ se e solo se $A_{\mathbf{Q}}$ è antisimmetrica rispetto a $g(x)|_{R_u}$.
- \mathbf{Q} si dice irrotazionale (o rigido) se e solo se lo è in ogni $x \in M$.

Osservazione 1.5.16. Dall'osservazione 1.5.14 si deduce che la trasformazione $A_{\mathbf{Q}} : R_u \rightarrow R_u$ è un oggetto algebrico che rende una descrizione completa in $\gamma(u) = x$ del comportamento degli osservatori vicini a γ in \mathbf{Q} , relativamente a γ stesso.

Per esempio, se supponiamo che \mathbf{Q} sia irrotazionale in x , allora la matrice di $A_{\mathbf{Q}}$, rispetto ad una base ortonormale opportuna di R_u sarà simmetrica, dunque, in un intorno sufficientemente piccolo di x , gli osservatori vicini a γ non esibiranno alcuna rotazione.

Supponiamo invece che la matrice di $A_{\mathbf{Q}}$, relativamente a una opportuna base ortonormale $\{X_1, X_2, X_3\}$, sia

$$\begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice rappresenta una rotazione di R_u attorno all'asse di X_3 . Pertanto gli osservatori vicini a γ in un intorno sufficientemente piccolo di x , ruoteranno rigidamente attorno a γ , senza allontanarsi o avvicinarsi e il riferimento \mathbf{Q} in oggetto sarà rigido in x .

Proposizione 1.5.17. Un sistema di riferimento è irrotazionale se e solo se è localmente sincronizzabile.

Dimostrazione. Sia \mathbf{Q} un sistema di riferimento e sia ω la 1-forma fisicamente equivalente a \mathbf{Q} . Siano X e Y campi vettoriali tali che $g(\mathbf{Q}, X) = g(\mathbf{Q}, Y)$ in un intorno sufficientemente piccolo. Allora per tutti tali X e Y in questo intorno:

$$\begin{aligned} \omega \wedge d\omega = 0 &\Leftrightarrow d\omega(X, Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega([X, Y]) = 0 \\ &\Leftrightarrow g(\mathbf{Q}, [X, Y]) = 0 \\ &\Leftrightarrow g(\nabla_X \mathbf{Q}, Y) = g(\nabla_Y \mathbf{Q}, X) \\ &\Leftrightarrow g(A_{\mathbf{Q}} X, Y) - g(X, A_{\mathbf{Q}} Y) = 0 \end{aligned}$$

□

Capitolo 2

Le equazioni di campo di Einstein

Questo capitolo è dedicato alla definizione degli oggetti che compongono la materia contenuta nello spaziotempo e all'analisi delle energie che ne influenzano il moto.

Il nostro scopo è arrivare alle equazioni che governano i campi di materia: tali equazioni saranno espresse attraverso relazioni tra tensori su M , in cui tutte le derivate sono covarianti rispetto alla connessione definita dalla metrica.

Infatti saremo in grado di esplicitare il ruolo fondamentale della metrica nelle equazioni di campo di Einstein, evidenziando come la metrica g racchiuda le informazioni essenziali sullo spazio, sul tempo e sulla gravità: il suo potere unificante e risolutivo è cruciale.

Per realizzare il nostro scopo, vogliamo costruire un "modello di materia", che rispetti le leggi fisiche note e che ci permetta, misurandone l'energia, di determinare matematicamente in modo univoco il tensore stress-energia T che la governa. Partendo da una definizione puramente formale di T , mostreremo come vi confluiscono i due contributi che vogliamo considerare: l'uno rappresentante della distribuzione di materia e l'altro rappresentante delle forze elettromagnetiche presenti. La costruzione di T ad ogni modo è tale da poter accomodare anche altri tipi di contributi per esempio legati a forze nucleari, che tuttavia non sono oggetto di questo lavoro.

Osservazione 2.0.1. Sia S un campo tensoriale di tipo $(0, 2)$ su M , $x \in M$, $X, Y \in T_x M$. Siano $\alpha, \beta \in T_x^*$ fisicamente equivalenti rispettivamente a X e a Y .

Indicheremo con \tilde{S} il campo tensoriale di tipo $(1, 1)$ fisicamente equivalente a S : $\tilde{S}(\alpha, Y) = S(X, Y)$.

Mentre sarà indicato con \hat{S} il campo tensoriale di tipo $(2, 0)$ fisicamente equivalente a S : $\hat{S}(\alpha, \beta) = S(X, Y)$.

Definizione 2.0.2. Il tensore stress-energia su uno spaziotempo M , è un campo tensoriale simmetrico di tipo $(2, 0)$, che indichiamo con \hat{T} , tale che

$\widehat{T}(\omega, \omega) \geq 0$ per ogni 1-forma causale, (i.e. non di tipo spazio), $\omega \in T_x M$, $\forall x \in M$.

Definizione 2.0.3. Sia (z, Z) un osservatore istantaneo. Sia \mathbb{T} il tensore di tipo $(0, 2)$ fisicamente equivalente al tensore stress energia \widehat{T} . Allora $\mathbb{T}(Z, Z)$ è definito come la densità di energia che (z, Z) misura nel suo spazio locale a riposo Z^\perp per \widehat{T} .

Proposizione 2.0.4. Siano \mathbb{T} e \mathbb{T}' campi tensoriali simmetrici di tipo $(0, 2)$ su M , tali che $\mathbb{T}(Z, Z) = \mathbb{T}'(Z, Z)$ per ogni osservatore istantaneo (z, Z) . Allora $\mathbb{T} = \mathbb{T}'$.

2.1 Il tensore stress - energia della distribuzione di materia

Definizione 2.1.1. Sia $m \in [0, \infty)$. Una particella di massa a riposo m è una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$, rivolta al futuro, tale che $g(\gamma_*, \gamma_*) = -m^2$.

La terminologia usata nell'osservazione 1.4.5, relativa agli osservatori, viene trasferita in questo modo anche alla rappresentazione delle particelle: per esempio, la lunghezza d'arco di γ è indicata come *tempo proprio*. Inoltre γ è una particella in caduta libera se e solo γ è una geodetica. Il vettore tangente γ_* è definito *energia - momento* della particella γ .

Osservazione 2.1.2. Sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ una particella di massa a riposo m . Sia (z, Z) un osservatore istantaneo con $z = \gamma(u)$, $u \in \mathcal{E}$.

Come nell'osservazione 1.4.10, evidenziamo la scomposizione ortogonale dell'energia - momento:

$$\gamma_*(u) = \mathbf{e}Z + p, \quad \mathbf{e} \in \mathbb{R}, \quad p \in Z^\perp.$$

$\mathbf{e} = -g(\gamma_*(u), Z)$, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}$ è definita come l'energia che (z, Z) misura per la particella γ in u : si noti che $\mathbf{e} > 0$, per definizione e per quanto visto nella 1.2.1, anche se la massa $m = 0$.

p è definito come il 3 - momento che (z, Z) misura per γ in u .

Prima di poter definire un flusso di particelle è necessario considerare alcune notazioni e strumenti preliminari che ci consentano di stabilire il numero di particelle che attraversa una sezione dello spazio, \mathcal{D} , o che si trovano in una regione chiusa dello spaziotempo, \mathcal{B} , che viene chiamata "causal box".

Innanzitutto sia M una varietà Lorentziana orientata, denotiamo con Ω , l'elemento di volume metrico su M , ovvero l'unica 4-forma su M , tale che se X_1, \dots, X_4 è una base ortonormale orientata di $T_x M$, allora si ha $\Omega(X_1, \dots, X_4) = (4!)^{-1}$, dove il fattoriale deriva dalla convenzione di Bishop-Goldberg.

Ricordiamo inoltre che dato un campo vettoriale X , il prodotto interno ι_X agisce su una q -forma ω restituendo una $(q-1)$ -forma $\iota_X\omega$ in questo modo:

$$\iota_X\omega(Z_1, \dots, Z_{q-1}) = q\omega(X, Z_1, \dots, Z_{q-1}) \text{ per ogni } Z_1, \dots, Z_{q-1} \text{ campi vettoriali}$$

In generale sappiamo che se ω è una p -forma e \mathcal{B} una varietà topologica, imbedded, compatta, orientata di dimensione $(p+1)$ con bordo $\partial\mathcal{B}$, per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\mathcal{B}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{B}} \omega$$

e dunque se $\int_{\partial\mathcal{B}} \omega = 0$, per ogni \mathcal{B} , allora ω è chiusa.

Allora possiamo definire una *causal box* \mathcal{B} di M come l'immagine del cilindro standard N_0 ¹ tramite un imbedding $\phi : N_0 \rightarrow M$ di tipo \mathcal{C}^∞ , che conserva l'orientazione, l'orientazione temporale e il carattere causale di ogni varietà di bordo $\partial\mathcal{B}$ di \mathcal{B} .

Procediamo ora con la definizione di flusso di particelle.

Definizione 2.1.3. *Un flusso di particelle di massa a riposo m è una coppia (\mathbf{P}, η) , dove la funzione $\eta : M \rightarrow [0, \infty)$, è chiamata densità dell'universo, e il campo vettoriale $\mathbf{P} : M \rightarrow TM$, è chiamato energia - momento ed è tale che ogni curva integrale di \mathbf{P} sia una particella di massa a riposo pari a m .*

Osservazione 2.1.4. *\mathbf{P} è un campo vettoriale di tipo tempo, puntato verso il futuro e tale che $g(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = -m^2$. Le curve integrali di \mathbf{P} sono particelle, dunque sono curve di tipo tempo: l'idea è quella di calcolare, in modo regolare attraverso la densità dell'universo η , quante siano le particelle presenti in pratica.*

Definizione 2.1.5. *Sia \mathcal{D} una space-section, e la 4-forma Ω sia l'elemento di volume metrico su M , allora il numero totale di particelle in \mathcal{D} corrisponde a :*

$$\int_{\mathcal{D}} \iota_{\eta\mathbf{P}}\Omega. \quad (2.1)$$

Proposizione 2.1.6. *Nel sistema di riferimento in quiete delle particelle stesse, il numero totale di particelle resta invariato senza creazione né distruzione, se e solo se:*

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \iota_{\eta\mathbf{P}}\Omega = 0 \text{ per tutte le causal box } \mathcal{B} \quad (2.2)$$

¹Il cilindro standard N_0 nello spazio di Minkowski è definito come $N_0 = \{(u^1, u^2, u^3, u^4) \mid \sum_{\nu=1}^3 u^\nu u^\nu \leq 1, |u^4| \leq 1\}$

ovvero la densità di particelle dell'universo η si conserva se e solo se

$$\operatorname{div}(\eta\mathbf{P}) = 0 \quad (2.3)$$

La seguente proposizione permette di stabilire il fatto che sia possibile individuare il flusso di particelle che si conserva conoscendo solo l'energia-momento \mathbf{P} e la densità iniziale η_0 .

Proposizione 2.1.7. *Sia (M, g) uno spaziotempo e sia \mathbf{P} il campo vettoriale di tipo tempo, rivolto al futuro, tale che $g(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = -m^2$, $m \in [0, \infty)$. Sia la funzione η_0 di classe \mathcal{C}^∞ , $\eta_0 : N \rightarrow [0, \infty)$.*

Sia $\phi : N \rightarrow M$ sia un imbedding di tipo spazio, con $\dim N = 3$.

Supponiamo che ogni curva integrale inestendibile $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ di \mathbf{P} intersechi $\phi(N)$ in un unico $u \in \mathcal{E}$.

Allora esiste al più una densità η , tale che il flusso di particelle (\mathbf{P}, η) soddisfi:

- $\operatorname{div}(\eta\mathbf{P}) = 0$;
- $\eta_0 = \eta \circ \phi$.

Definizione 2.1.8. *Sia (\mathbf{P}, η) un flusso di particelle nello spaziotempo M . Il tensore stress - energia di tipo $(2, 0)$ di (\mathbf{P}, η) è definito in questo modo:*

$$\widehat{\mathbf{T}} = \eta\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}. \quad (2.4)$$

Osservazione 2.1.9. *Notiamo che $\widehat{\mathbf{T}} = \eta\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$ è simmetrico e tale che $\forall \omega \in T_x^*M$:*

$$\widehat{\mathbf{T}}(\omega, \omega) = \eta(x)(\omega(\mathbf{P}))^2 \geq 0$$

dunque soddisfa la definizione 2.0.2 di tensore stress-energia.

Consideriamo il tensore di tipo $(0, 2)$ fisicamente equivalente a $\widehat{\mathbf{T}}$ e osserviamo che esso rappresenta la densità di energia misurata per ogni osservatore istantaneo (z, Z) . Infatti

$$\mathbf{T}(Z, Z) = \eta(z)[g(\mathbf{P}, Z)]^2.$$

Infatti possiamo calcolare la densità di energia anche come il numero di particelle in un determinato volume per l'energia di ogni singola particella: $\frac{N\mathbf{e}}{V}$, il tutto misurato dall'osservatore istantaneo (z, Z) .

Consideriamo allora $X_1, X_2, X_3 \in Z^\perp$, linearmente indipendenti e sia $K \subset Z^\perp$ il parallelepipedo da essi definito.

Se Ω è l'elemento di volume metrico, allora il 3-volume di K è

$$V = |\Omega(X_1, X_2, X_3, Z)|.$$

Il numero di particelle in K è $N = \eta(z)|\Omega(X_1, X_2, X_3, P)|$.

L'energia che l'osservatore (z, Z) misura per ogni particella è data da $\mathbf{e} =$

$-g(\mathbf{P}, Z) > 0$.

Allora, evidenziando la scomposizione $\mathbf{P}(z) = \mathbf{e}Z + p$, con $p \in Z^\perp$, si ottiene: per ogni osservatore istantaneo (z, Z)

$$\begin{aligned} \frac{N\mathbf{e}}{V} &= \frac{\eta(z)|\boldsymbol{\Omega}(X_1, X_2, X_3, P)|\mathbf{e}}{|\boldsymbol{\Omega}(X_1, X_2, X_3, Z)|} \\ &= \eta(z)\mathbf{e}^2 \\ &= \eta(z)[g(\mathbf{P}, Z)]^2 \\ &= \mathbf{T}(Z, Z). \end{aligned}$$

Per l'unicità vista nella proposizione 2.0.4, la definizione formale $\hat{\mathbf{T}} = \eta\bar{\mathbf{P}} \otimes \mathbf{P}$ di tensore stress-energia è ben motivata.

Definizione 2.1.10 (Modello di materia). Sia \mathcal{M} una collezione di N flussi di particelle su M , definita da $\mathcal{M} = \{(m_A, e_A, \mathbf{P}_A, \eta_A) | A = 1, \dots, N\}$, dove N è un numero intero non negativo, e_A e m_A sono rispettivamente la carica elettrica e la massa a riposo delle particelle dell' A -esimo flusso (\mathbf{P}_A, η_A) . \mathcal{M} si chiama modello di materia su M .

Esempio 2.1.11. La polvere

Indichiamo con il termine polvere il modello di materia $\mathcal{M} = (Z, \rho)$, dove Z è un sistema di riferimento su M definito comoving reference frame e $\rho: M \rightarrow (0, \infty)$ è una funzione \mathcal{C}^∞ , definita la densità di energia (comoving), tale che non siano presenti né collisioni né creazione, distruzione o decadimento di alcuna particella:

$$\text{div}(\rho Z) = 0$$

In questo caso possiamo esprimere il tensore stress-energia attraverso la seguente

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}. \quad (2.5)$$

Osservazione 2.1.12. Osserviamo che dato un flusso (\mathbf{P}, η) di particelle con mappa a riposo m , la polvere ad esso associata è (Z, ρ) , dove $Z = \frac{\mathbf{P}}{m}$ e $\rho = \frac{\eta}{m^2}$. Questo mostra come il modello di materia denominato "polvere" porti meno informazioni del modello di materia "flusso di particelle": non occorre specificare separatamente la densità e la massa a riposo, perché è sufficiente specificare solo $\rho = \frac{\eta}{m^2}$.

Ci proponiamo ora di capire se, dato un tensore stress-energia, sia possibile individuare un sistema di riferimento "privilegiato": vedremo che se il tensore stress-energia opportunamente applicato a un campo vettoriale causale, ovvero non di tipo spazio, restituisce un tensore timelike, allora esiste una direzione nel tempo, che individua quindi un sistema di riferimento in modo naturale.

Definizione 2.1.13. Sia $\widehat{\mathbf{T}}$ un tensore stress-energia su M .

Sia x un punto della varietà, $x \in M$.

$\widehat{\mathbf{T}}$ è detto normale in x se e solo se il tensore di tipo $(1,1)$ fisicamente equivalente, $\widetilde{\mathbf{T}}(X)$ è di tipo tempo per ogni X di tipo causale (non di tipo spazio) in $T_x M$.

$X \in T_x M$ è detto autovettore di $\widehat{\mathbf{T}}$ in x se e solo se

$$\widetilde{\mathbf{T}}(X) = aX, \text{ per qualche } a \in \mathbb{R}.$$

Proposizione 2.1.14. Se un tensore stress-energia $\widehat{\mathbf{T}}$ è normale in $x \in M$, allora $\widehat{\mathbf{T}}$ ha un unico autovettore di tipo tempo, a meno di multipli diversi da zero.

Definizione 2.1.15. Un tensore stress-energia $\widehat{\mathbf{T}}$ su M è detto normale se e solo è normale in ogni $x \in M$.

Un campo vettoriale X su M viene chiamato campo autovettoriale di $\widehat{\mathbf{T}}$ se e solo se esiste una funzione f su M , tale che

$$\widetilde{\mathbf{T}}(X) = fX \tag{2.6}$$

f viene chiamata autofunzione di $\widehat{\mathbf{T}}$ corrispondente a X .

Corollario 2.1.16. Un tensore stress-energia, normale, \mathbf{T} di tipo $(0,2)$ su M possiede un unico campo autovettoriale unitario, di tipo tempo e rivolto verso il futuro.

Esempio 2.1.17. Il fluido perfetto Sia $\widehat{\mathbf{T}}$ un tensore normale di tipo $(2,0)$ sullo spaziotempo M , spazialmente isotropo rispetto ad un osservatore (z, Z) . Sia tale che $\widehat{\mathbf{T}} = \sum_{A=1}^N \eta_A \mathbf{P}_A \otimes \mathbf{P}_A$, dove (\mathbf{P}_A, η_A) sono flussi di particelle. Allora $\widehat{\mathbf{T}}$ si può scrivere nella seguente forma:

$$\widehat{\mathbf{T}} = \rho \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} + p(\widehat{g} + \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}) \tag{2.7}$$

dove

- \mathbf{Z} è il sistema di riferimento che corrisponde a un campo autovettoriale di \mathbf{T} ;
- \widehat{g} è il campo tensoriale di tipo $(2,0)$, fisicamente equivalente a g ;
- ρ e p , rispettivamente la densità di energia e la pressione di \mathcal{M} , sono due funzioni su M , tali che $\rho > 0$ e $\rho \geq 3p \geq 0$;
- $\rho = 3p \Leftrightarrow m_A = 0$ per ogni A .

Infine se il tensore stress-energia $\widehat{\mathbf{T}}$ soddisfa l'equazione

$$\text{div} \widehat{\mathbf{T}} = 0 \tag{2.8}$$

risulta che il modello di materia, $\mathcal{M} = (Z, \rho, p)$, a cui esso è associato, è definito un fluido perfetto.

Osservazione 2.1.18. *Si noti che, per il corollario 2.1.16, $\widehat{\mathbf{T}}$ ha un unico campo autovettoriale \mathbf{Z} , tale che $Z = \mathbf{Z}(z)$ sia l'unico versore di tipo tempo rivolto verso il futuro.*

\mathbf{Z} è il comoving reference frame.

2.2 Il tensore stress - energia di un campo elettromagnetico

In questa sezione continueremo lo studio del tensore stress-energia nel caso più generale di particelle dotate di carica e : attraverso degli step analoghi a quelli che hanno portato alla definizione del tensore stress-energia "cinetico", dato cioè dal flusso di particelle prive di carica, arriveremo alla definizione di tensore stress-energia "elettromagnetico" [1].

Definizione 2.2.1. *Sia (m, e, \mathbf{P}, η) un flusso di particelle di massa m e carica e .*

La densità di corrente \mathbf{J} del flusso di particelle è data da:

$$\mathbf{J} = e\eta\mathbf{P}.$$

Definizione 2.2.2. *Un campo elettromagnetico \mathbf{F} su M è una 2-forma antisimmetrica su M .*

Osservazione 2.2.3. *Storicamente il concetto di campo elettromagnetico unifica due oggetti prerelativistici, il campo elettrico \vec{E} e il campo magnetico \vec{B} .*

Nella rappresentazione che stiamo costruendo si considerino il campo elettromagnetico \mathbf{F} su M e l'osservatore istantaneo (z, Z) . Secondo la notazione dell'osservazione 2.0.1, risulta che il tensore $\widetilde{\mathbf{F}}$, di tipo $(1, 1)$ fisicamente equivalente a \mathbf{F} , è tale che $\widetilde{\mathbf{F}}Z \in Z^\perp$, per l'antisimmetria di \mathbf{F} .

Dunque $E = \widetilde{\mathbf{F}}Z$ si definisce come il vettore elettrico misurato dall'osservatore (z, Z) per \mathbf{F} .

Ricordando che Ω è l'elemento di volume metrico su M , esiste un unico $B \in Z^\perp$, tale che $4!\Omega(X, Y, B, Z) = \mathbf{F}(X, Y)$, per ogni $X, Y \in Z^\perp$.

B viene detto il vettore magnetico che (z, Z) misura per \mathbf{F} [1].

Definizione 2.2.4. *Sia $\mathcal{M} = \{(m_A, e_A, \mathbf{P}_A, \eta_A) | A = 1, \dots, N\}$, una collezione di N flussi di particelle su M . [1]*

Allora $\widehat{\mathbf{T}} = \sum_{A=1}^N \eta_A \mathbf{P}_A \otimes \mathbf{P}_A$ è il tensore stress-energia di \mathcal{M} .

Inoltre $\mathbf{J} = \sum_{A=1}^N e_A \eta_A \mathbf{P}_A$ è la densità di corrente di \mathcal{M} .

Definizione 2.2.5. *Sia $(M, \mathcal{M}, \mathbf{F})$ un modello relativistico, in cui M è lo spaziotempo, \mathcal{M} è un modello di materia e \mathbf{F} è il campo elettromagnetico.*

Si dice che $(M, \mathcal{M}, \mathbf{F})$ soddisfa le equazioni di Maxwell se e solo se:

(i) \mathbf{F} è chiusa: $d\mathbf{F} = 0$;

(ii) $\text{div}\widehat{\mathbf{F}} = 4\pi\mathbf{J}$.

In particolare si può dire che \mathbf{J} è la sorgente di \mathbf{F} e che la terna $(M, \mathbf{F}, \mathbf{J})$ soddisfa le equazioni di Maxwell.

Proposizione 2.2.6. Sia \mathbf{J} un campo vettoriale su M , sia \mathbf{F} una 2-forma su M e sia Ω l'elemento di volume metrico su M [1].

$(M, \mathbf{F}, \mathbf{J})$ soddisfa le equazioni di Maxwell se e solo se:

(1)

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \iota_{\widehat{\mathbf{F}}}\Omega = 4\pi \int_{\mathcal{D}} \iota_{\mathbf{J}}\Omega$$

per ogni "space-section" \mathcal{D} .

(2)

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F} = 0$$

per ogni "space-section" \mathcal{D}

(3) In questo caso

$$\text{div}\mathbf{J} = 0 \text{ e equivalentemente } \sum_{\mu=1}^3 \int_{\mathcal{B}_\mu} \iota_{\mathbf{J}}\Omega = 0$$

per ogni "causal box".

Una delle leggi fondamentali nello studio della relatività è la legge sulla forza di Lorentz. Vogliamo capire ora quale sia la sua espressione nella rappresentazione che stiamo costruendo, [1].

Consideriamo una particella $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ e indichiamo con $\widetilde{\mathbf{F}}(\gamma_*)$ un campo vettoriale su γ , con $\widetilde{\mathbf{F}}(\gamma_*(u)) \in (\gamma_*(u))^\perp$ per ogni $u \in \mathcal{E}$.

Osservando anche che $\nabla_{\gamma_*}\gamma_*(u) \in (\gamma_*(u))^\perp$, possiamo enunciare la seguente definizione.

Definizione 2.2.7. Sia γ una particella di massa m e carica e su M .

Allora (γ, m, e) soddisfa la legge sulla forza di Lorentz, rispetto al campo elettromagnetico \mathbf{F} se e solo se

$$e\widetilde{\mathbf{F}}(\gamma_*) = \nabla_{\gamma_*}\gamma_*. \quad (2.9)$$

Osservazione 2.2.8. La semplice espressione matematica collega gli effetti delle forze elettriche e magnetiche a quelli gravitazionali presenti in modo intrinseco nella connessione ∇ .

Come abbiamo visto precedentemente $g(\gamma_*, \gamma_*) = -m^2$, ma se per semplicità

consideriamo $m = 1$, allora γ rappresenta un osservatore che si muove con accelerazione di universo $\nabla_{\gamma_*}\gamma_*$. Dunque, in modo immediato, si deduce che se $e = 0$, la particella si trova in caduta libera. Inoltre l'osservatore istantaneo $(\gamma(u), \gamma_*(u))$ misura il vettore elettrico pari a $E = \tilde{\mathbf{F}}(\gamma_*(u))$ per ogni $u \in \mathcal{E}$.

Definiamo a questo punto il tensore stress-energia di un campo elettromagnetico \mathbf{F} .

Definizione 2.2.9. Sia \mathbf{F} il campo elettromagnetico di un flusso di particelle (m, e, \mathbf{P}, η) .

Il tensore \mathbf{E} , di tipo $(0, 2)$, è il tensore stress-energia associato al campo elettromagnetico \mathbf{F} su M , le cui componenti sono date da:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{4\pi}(F_{im}F_j^m - \frac{1}{4}g_{ij}F^{mn}F_{mn}). \quad (2.10)$$

Proposizione 2.2.10. Valgono le seguenti proprietà:

- $\hat{\mathbf{E}}$ è simmetrico e $\text{tr}\hat{\mathbf{E}} = 0$.
- $\hat{\mathbf{E}}(\omega, \omega) \geq 0$ per ogni 1-forma causale ω .
- Se $(M, \mathbf{F}, \mathbf{J})$ soddisfa le equazioni di Maxwell, allora $\text{div}\hat{\mathbf{E}} = -\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{J}$.

In conclusione il modello relativistico che stiamo analizzando $(M, \mathcal{M}, \mathbf{F})$, dove

$\mathcal{M} = (m_A, e_A, \mathbf{P}_A, \eta_A | A = 1, \dots, N)$ è una collezione finita di flussi di particelle, deve soddisfare due equazioni, che si dicono *equazioni di materia semplici*. [1]

La prima esprime l'influenza tra l'elettromagnetismo e la materia e dunque riguarda la legge di Lorentz: poiché ogni curva integrale di \mathbf{P}_A è una particella che soddisfa tale legge, si ha:

$$\nabla_{\mathbf{P}_A}\mathbf{P}_A = e_A\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{P}_A \quad \forall A = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

La seconda riguarda l'influenza della materia sulla materia stessa e esprime la conservazione del flusso A -esimo. Senza che siano presenti collisioni, distruzione o creazione di alcuna particella, si ha:

$$\text{div}(\eta_A\mathbf{P}_A) = 0 \quad \forall A = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

Proposizione 2.2.11. Sia $(M, \mathcal{M}, \mathbf{F})$ un modello relativistico che soddisfa le equazioni di materia semplici e le equazioni di Maxwell. Allora vale:

$$\text{div}(\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{E}}) = 0. \quad (2.13)$$

Dimostrazione. [1]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \widehat{\mathbf{E}} &= -\widetilde{\mathbf{F}}\mathbf{J} && \text{soddisfa eq. di Maxwell} \\ &= -\widetilde{\mathbf{F}} \sum_{A=1}^N e_A \eta_A \mathbf{P}_A && \text{per definizione di } \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Inoltre si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \widehat{\mathbf{T}} &= \operatorname{div} \left(\sum_{A=1}^N \eta_A \mathbf{P}_A \otimes \mathbf{P}_A \right) && \text{per definizione di } \widehat{\mathbf{T}} \\ &= \sum \{ [\operatorname{div}(\eta_A \mathbf{P}_A)] \mathbf{P}_A + \eta_A \nabla_{\mathbf{P}_A} \mathbf{P}_A \} && \text{per le proprietà di } \nabla \\ &= 0 + \sum \eta_A e_A \widetilde{\mathbf{F}} \mathbf{P}_A && \text{soddisfa le eq. (2.12) e (2.11)}. \end{aligned}$$

Dunque $\operatorname{div}(\widehat{\mathbf{T}} + \widehat{\mathbf{E}}) = 0$. □

2.3 Le equazioni di Einstein

I noti postulati di Einstein, alla base della teoria della relatività generale, conducono necessariamente a un'uguaglianza tra tensori: da una parte troviamo la gravitazione, manifestata nelle caratteristiche geometriche dello spaziotempo, racchiuse nella curvatura; dall'altra si trovano le caratteristiche fisiche, espresse attraverso densità di massa-energia, momento e stress, e le leggi di conservazione che governano la materia. [2]

Definizione 2.3.1. *Un modello relativistico $(M, \mathcal{M}, \mathbf{F})$ soddisfa le equazioni di Einstein se e solo se: [1]*

$$\mathbf{G} = \mathbf{T} + \mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Prima di introdurre nel prossimo capitolo alcune delle soluzioni esatte alle equazioni di Einstein, ci proponiamo di analizzare alcune informazioni che derivano direttamente dall'equazioni stesse e che ne evidenziano le conseguenze fisiche cui portano. [1] e [2]

Definizione 2.3.2. *Sia $(M, \mathcal{M}, \mathbf{F})$ un modello relativistico che soddisfa le equazioni di Einstein. Lo spaziotempo M si dice Ricci flat se $\mathbf{Ric} = 0$.*

In questo caso $\mathbf{T} = 0 = \mathbf{F}$.

Osservazione 2.3.3. *La condizione $\mathbf{Ric} = 0$, in cui il tensore di Ricci è identicamente nullo, corrisponde al modello di vuoto, ovvero indica una regione dello spaziotempo in cui il tensore stress-energia svanisce e non vi è alcuna influenza della materia e del campo elettromagnetico sullo spaziotempo.*

2.4 Le geodetiche di tipo luce

Dedichiamo questa sezione al tipo di geodetiche che riveste un ruolo fondamentale nello studio dello spaziotempo, dal momento che ogni informazione, che riceviamo sugli oggetti celesti e sulle loro relazioni causali, viaggia sotto forma di segnale luminoso lungo geodetiche di tipo luce (o geodetiche nulle). Rivedremo nel dettaglio come vengano preservate le relazioni causali tra eventi tra loro collegati, attraverso lo studio delle proprietà geometriche delle geodetiche.

Successivamente dalla definizione di fotone e di segnale luminoso si cercherà di arrivare alla comprensione del modello più semplificato su cui si basano le moderne osservazioni astrofisiche.[1]

Definizione 2.4.1. *Sia (M, g) uno spaziotempo.*

Si dice che una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ va da x a y , con $x \in M$, $y \in M$, se e solo se $\mathcal{E} = [a, b]$, e valgono $x = \gamma(a)$ e $y = \gamma(b)$.

Definizione 2.4.2. *Dati due punti $x \in M$ e $z \in M$, si dice che x precede cronologicamente z , e si indica con $x \ll z$, se e solo se esiste una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ di tipo tempo, rivolta verso il futuro, che va da x a z .*

Si dice che x precede causalmente z , e si indica con $x \prec z$, se e solo se esiste una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ di tipo causale (non di tipo spazio), rivolta verso il futuro, che va da x a z .

Definizione 2.4.3. *Dato $x \in M$, l'insieme di tutti i punti che precedono cronologicamente (o causalmente) x si chiama il passato cronologico, (o passato causale).*

Le definizioni di futuro cronologico e futuro causale sono duali.

Osservazione 2.4.4 (Remark). *Sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ una geodetica e sia $\tilde{\gamma} : \mathcal{F} \rightarrow M$ una sua riparametrizzazione affine positiva, cioè tale che esiste una mappa affine positiva $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ con $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \alpha$. Allora risulta che $\tilde{\gamma}$ sia una geodetica.*

Questo suggerisce di considerare la corrispondente relazione di equivalenza e di indicare con $[\gamma]$ la classe di equivalenza delle geodetiche rappresentate da γ .

Ricordiamo che se $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ è una geodetica causale inestendibile allora valgono le seguenti affermazioni:

- γ_* non si annulla.
- $g(\gamma_*, \gamma_*) = \text{costante}$.
- Se $\phi : M \rightarrow M$ è un'isometria di M in sè, allora $\phi \circ \gamma$ è una geodetica inestendibile.
- Dato $u \in \mathcal{E}$, γ è univocamente determinata dai dati iniziali $(\gamma(u), \gamma_*(u))$.

- Se $\phi : M \rightarrow M$ è un'isometria tale che

$$\phi(\gamma(u), \gamma_*(u)) = (\phi(\gamma(u)), \phi(\gamma_*(u))) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \phi \circ \gamma.$$

Definizione 2.4.5. Un intorno aperto \mathcal{U}_0 dell'origine nello spazio tangente $T_x M$ ad un punto $x \in M$ è detto normale se e solo se:

- la mappa esponenziale $\exp_x|_{\mathcal{U}_0}$ è un diffeomorfismo sull'immagine;
- per ogni $X \in \mathcal{U}_0$ si ha che $tX \in \mathcal{U}_0$ con $0 \leq t \leq 1$.

Definizione 2.4.6. Un insieme aperto non vuoto, $\mathcal{U} \subset M$ si dice intorno semplicemente convesso se per ogni $x \in \mathcal{U}$ si ha che $\mathcal{U} = \exp_x(\mathcal{U}_0)$ per qualche intorno normale $\mathcal{U}_0 \subset T_x M$.

Osservazione 2.4.7. Si noti che in generale se un intorno \mathcal{U} è semplicemente convesso, allora dati due punti x e z appartenenti a \mathcal{U} , dalle definizioni appena viste e dalla definizione 1.1.6 di mappa esponenziale, segue che esiste un'unica geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ che va da x a z .

Proposizione 2.4.8. Sia \mathcal{U} semplicemente convesso, con $\mathcal{U} \subset M$, e sia \mathcal{U}_0 normale, con $\mathcal{U}_0 \subset T_x M$.

Indichiamo con $\phi_x : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_0$ la mappa inversa del diffeomorfismo \exp_x .

Sia \mathcal{U}^\S l'aperto contenuto nel fibrato tangente $\mathcal{T}\mathcal{U}$, definito da

$$\mathcal{U}^\S = \{(x, \phi_x(z)) \mid x, z \in \mathcal{U}\}.$$

Sia infine

$$\begin{aligned} K : \mathcal{T}\mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, X) &\mapsto K(x, X) = g(X, X). \end{aligned}$$

Allora la funzione

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{U}^\S &\rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{U} \\ (x, X) &\mapsto \exp(x, X) = (x, \exp_x X) \end{aligned}$$

è un diffeomorfismo. Inoltre la funzione $\Phi = K \circ (\exp)^{-1} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe \mathcal{C}^∞ , con $\Phi(x, x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{U}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}^\S & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \\ \downarrow K & \swarrow & \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\Phi = K \circ (\exp)^{-1}} & \end{array}$$

Definizione 2.4.9. La funzione $\Phi = K \circ (\exp)^{-1} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama funzione geometrica dell'energia.

Proposizione 2.4.10. Siano x, z due punti distinti in \mathcal{U} , intorno semplicemente convesso in M . Allora valgono le seguenti:

- (a) Esiste un'unica geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ che va da x a z .
- (b) $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$.
- (c)
 - $\Phi(x, z) > 0$ se γ è di tipo spazio.
 - $\Phi(x, z) = 0$ se γ è di tipo luce.
 - $\Phi(x, z) < 0$ se γ è di tipo tempo.

Dimostrazione. [1] (a) e (c) derivano dalle definizioni stesse.

(b) $\Phi(x, z) = g(\phi_x(z), \phi_x(z)) = \int_0^1 g(\gamma_*(u), \gamma_*(u))du = \Phi(z, x)$ □

Vediamo ora un importante lemma sulle relazioni causali tra eventi: anche facendo riferimento all'osservazione 1.2.13, sembra intuitivo il fatto che due eventi possano tra loro solo se l'uno si trova nel cono di luce dell'altro, ovvero solo se esiste una geodetica causale che collega i due punti dello spaziotempo.

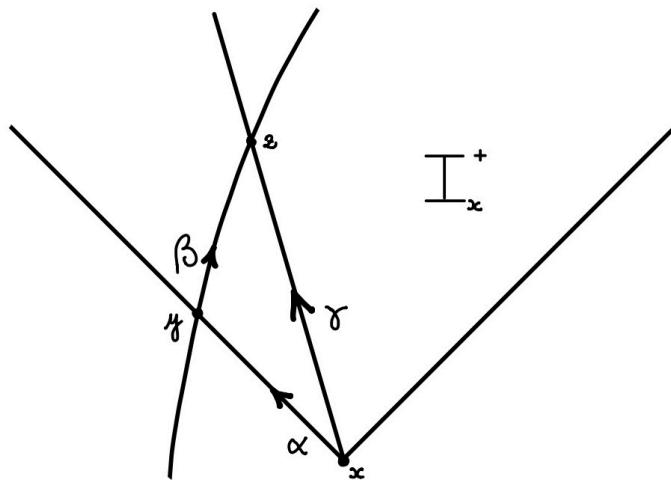


Figura 2.1: Il cammino unico

Lemma 2.4.11. *Sia (\mathcal{U}, g) uno spaziotempo geodeticamente convesso.*

Indichiamo con $I_x^+ = \exp_x(\mathcal{T}_x^+ \cap \phi_x(\mathcal{U}))$ il futuro cronologico di x .

Sia $\beta : (a, c) \rightarrow \mathcal{U}$ una curva, di tipo tempo, ricolta verso il futuro, la cui immagine non contiene x e sia $y = \beta(b)$, con b che appartiene all'intervallo (a, c) . [1]

Allora valgono:

- (a) *y si trova sul bordo del futuro cronologico di x , I_x^+ , se e solo se l'unica geodetica $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ che va da x a y è di tipo luce, rivolta verso il futuro.*

(b) Se tale y esiste, allora per ogni $u \in (b, c)$ si trova un $z = \beta(u)$, che appartenga al futuro cronologico di x , $z \in I_x^+$, ovvero tale che l'unica geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ che va da x a z è di tipo tempo, rivolta verso il futuro.

(c) Allora y e b sono unici.

La situazione può essere raffigurata come nella figura 2.1. Per la dimostrazione si veda [1, par 5.0.6].

Definizione 2.4.12. Sia $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow M$ una particella di tipo luce. Allora γ si chiama fotone.

Osservazione 2.4.13. Si noti che il fotone λ è una particella di luce con massa a riposo uguale a 0 e carica elettrica uguale a 0.

Un fotone rappresentato da una curva geodetica è in caduta libera.

Come nell'osservazione 1.4.10 e nell'esempio 1.4.12 vogliamo ora rendere esplicito cosa misura un osservatore istantaneo (z, Z) riguardo a un fotone $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow M$: seguendo lo stesso ragionamento avremo una scomposizione del vettore tangente λ_* in una parte spaziale e in una parte temporale.[1]

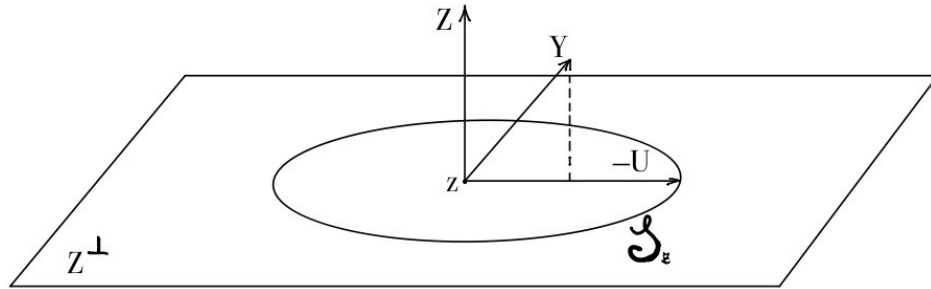


Figura 2.2: Direzione spaziale

Osservazione 2.4.14. Sia $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow M$ un fotone e indichiamo con $Y = \lambda_*(u)$ il valore del suo energia-momento in $x = \lambda(u)$. Dato un osservatore istantaneo (z, Z) , consideriamo il suo asse temporale $\langle Z \rangle$ e il suo rest-space Z^\perp .

Allora risulta che la direzione spaziale che (z, Z) misura per Y , ovvero la direzione dalla quale l'osservatore vede arrivare il fotone, è data da $U \in Z^\perp$, definita da:

$$Y = \mathbf{e}(Z - U) \quad \text{con} \quad \mathbf{e} = -g(Y, Z) > 0$$

con \mathbf{e} uguale all'energia che l'osservatore misura per il fotone.

Definizione 2.4.15. Sia (z, Z) un osservatore istantaneo. Si definisce sfera celeste dell'osservatore la collezione di tutte le direzioni spaziali da cui può veder arrivare un fotone.

$$\mathcal{S}_Z = \{U \in Z^\perp | g(U, U) = 1\}.$$

Definizione 2.4.16. Sia h la costante universale di Planck e sia (z, Z) un osservatore istantaneo.

La frequenza misurata da (z, Z) per $Y = \lambda_*(u)$ è data da

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{e}}{h}. \quad (2.15)$$

La lunghezza d'onda misurata da (z, Z) è data, come di consueto, da

$$\lambda = \mathbf{f}^{-1}. \quad (2.16)$$

Esempio 2.4.17. Usualmente ad ogni tipo di radiazione elettromagnetica corrisponde un particolare range di frequenza, vediamo indicativamente i dati nella tabella:

onde radio	$\mathbf{f} < 3 \times 10^9 \text{sec}^{-1}$
microonde	$3 \times 10^9 \text{sec}^{-1} < \mathbf{f} < 3 \times 10^{14} \text{sec}^{-1}$
luce visibile	$3 \times 10^{14} \text{sec}^{-1} < \mathbf{f} < 3 \times 10^{15} \text{sec}^{-1}$
raggi X	$3 \times 10^{15} \text{sec}^{-1} < \mathbf{f} < 3 \times 10^{18} \text{sec}^{-1}$
raggi γ	$3 \times 10^{18} \text{sec}^{-1} < \mathbf{f} < 3 \times 10^{20} \text{sec}^{-1}$

Tuttavia nella costruzione che stiamo facendo, potremmo sempre trovare un altro osservatore istantaneo in z che misuri un frequenza diversa da quella che misura (z, Z) , a seconda per esempio di come si stanno muovendo tra loro i due osservatori: se (z, Z) vede λ di colore blu, per un altro osservatore in z , la frequenza di λ potrebbe corrispondere al colore rosso.

Per risolvere questo problema, occorre supporre che Y' sia puntato verso il futuro e sia tale che $\langle Y' \rangle = \langle Y \rangle$. Allora quello che resta invariato per tutti gli osservatori istantanei in z è il rapporto $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}'}$: in questo modo per tutti gli osservatori sarà possibile ottenere lo stesso confronto, per esempio $\mathbf{f} > \mathbf{f}'$, e dedurre che Y è più blu di Y' .

Infine ricordando quanto visto in merito alla connessione di Fermi-Walker, occorre tenere presente che per confrontare due misure effettuate in due punti diversi della stessa world-line, cioè in due diversi tempi propri, è necessario usare proprio il trasporto parallelo di Fermi-Walker.

Per esempio per stabilire che tipo di informazioni ricavare dai fotoni inviati da una stella pulsar a proposito del suo moto, un osservatore $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ deve seguire la seguente procedura: [1]

(1) considerare l'intera collezione delle sue sfere celesti:

$$\{\mathcal{S}_{\gamma_*(u)} \subset (\gamma_*(u))^\perp | u \in \mathcal{E}\};$$

- (2) identificarle tutte attraverso la condizione di parallelismo di Fermi-Walker con una singola copia \mathcal{S}_γ ;
- (3) correlare i tempi propri di arrivo dei fotoni con la loro direzione ;
- (4) ricavare finalmente una curva su \mathcal{S}_γ che rappresenterà il moto della stella.

Definizione 2.4.18. Un segnale luminoso è una classe di equivalenza $[\lambda]$ di fotoni in caduta libera.

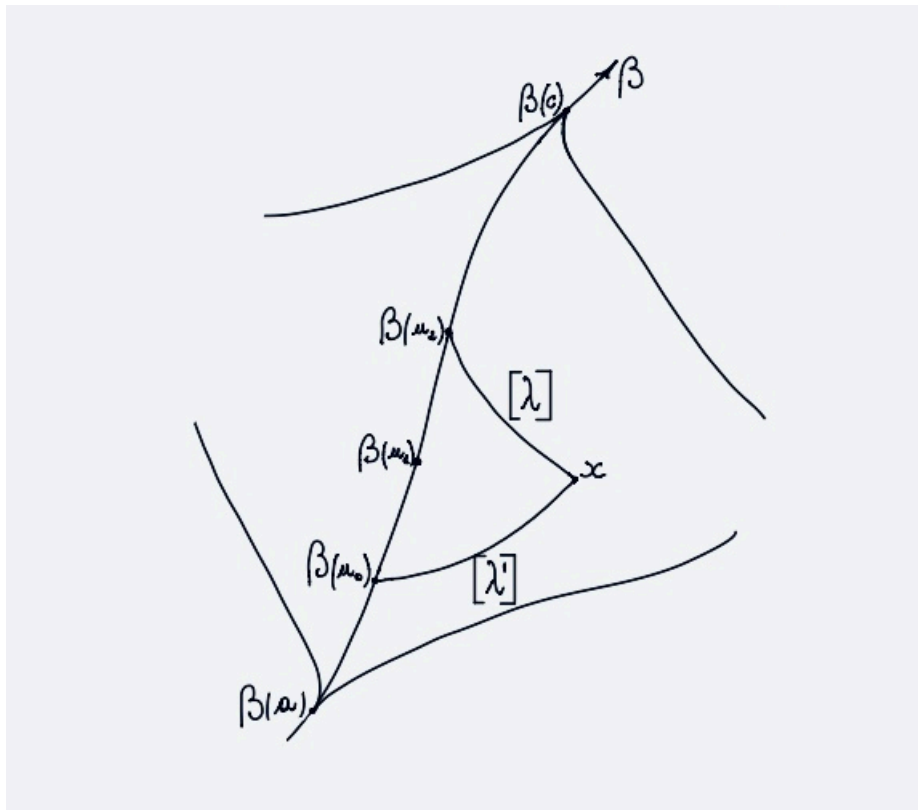


Figura 2.3: Rappresentazione locale di ricezione e invio di segnali luminosi

Proposizione 2.4.19. Sia (M, g) uno spaziotempo, e sia $[\lambda]$ un segnale luminoso.[1]

Sia $\beta : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore nello spaziotempo M .

Dato $u_1 \in \mathcal{E}$, allora esiste un intervallo aperto $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, contenente u_1 e un intorno aperto \mathcal{W} di $\beta(u_1)$, tale che $\forall x \in \mathcal{W} - \beta(\mathcal{F})$ valgono:

- (i) esistono u_0 e u_2 , appartenenti a \mathcal{F} , esiste un segnale luminoso $[\lambda]$, che va da x a $\beta(u_2)$, e un segnale luminoso $[\lambda']$, che va da $\beta(u_0)$ a x ;

(ii) u_0 e u_2 , $[\lambda]$ e $[\lambda']$ sono unici.

Dimostrazione. Preso un intorno aperto semplicemente convesso di $\beta(u_1)$, \mathcal{U} , sia $[a, c]$ un intervallo in \mathcal{E} contenente al suo interno u_1 , tale che $\beta([a, c]) \subset \mathcal{U}$.

Sia \mathcal{W} l'intersezione tra il futuro cronologico di $\beta(a)$ e il passato cronologico di $\beta(c)$,

$$\mathcal{W} = I_{\beta(a)}^+ \cap I_{\beta(c)}^-$$

allora \mathcal{W} è un intorno aperto di $\beta(u_1)$.

Possiamo definire $\mathcal{F} = (a, c)$ e supporre $x \in \mathcal{W} - \beta(\mathcal{F})$.

$x \in I_{\beta(c)}^-$ per costruzione, allora poiché non si scappa dal proprio futuro, necessariamente $\beta(c)$ deve stare nel futuro cronologico di x . Analogamente $\beta(a) \in I_x^-$ e $\beta(a)$ non appartiene alla chiusura del futuro cronologico di x .

Per il lemma 2.4.11, esiste un unico $u_2 \in (a, c)$ tale che la geodetica $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ da x a $\beta(u_2)$ sia di tipo luce, puntata verso il futuro.

Si procede con ragionamento duale per dimostrare esistenza e unicità di λ' e di u_0 . \square

Abbiamo visto che un osservatore può osservare un fotone, misurarne l'energia, assegnargli una frequenza, dalla cui analisi ricavare informazioni circa la sua provenienza. Le osservazioni degli astronomi in generale sono ovviamente molto più complesse, sia perché riguardano un numero molto più elevato di fotoni, sia perché questi possono provenire da sorgenti molto più estese o perfino sconosciute.

A conclusione di questo capitolo vogliamo presentare il modello più semplice su cui si basano le osservazioni astronomiche, che riguarda come un osservatore istantaneo possa analizzare un certo numero di fotoni "vicini". [1] Sostanzialmente l'idea è quella di indagare come sia composta la radiazione che riceviamo, ovvero analizzare, attraverso la funzione di distribuzione, un certo numero di fotoni in un determinato volume, con una determinata direzione e con una specifica energia caratteristica, arrivando così a definire lo strumento tipico delle osservazioni astronomiche, lo spettro elettromagnetico.

Ricordando che \mathcal{L}_z^+ è il cono di luce rivolto verso il futuro in, $T_z M$, indichiamo, usualmente, con Z^\perp lo spazio a riposo dell'osservatore istantaneo (z, Z) e con \mathcal{S}_Z la sua sfera celeste.

Come abbiamo visto in 2.4.14, l'osservatore misura un'energia $\mathbf{e} = -g(Y, Z)$ e una direzione spaziale $U \in \mathcal{S}_Z$, per ciascun fotone di energia-momento $Y \in \mathcal{L}_z^+$.

Definizione 2.4.20. Sia $P_Z = \mathcal{S}_Z \times (0, \infty)$ lo spazio energia-direzione dell'osservatore (z, Z) .

Osservazione 2.4.21. *Dal momento che $P_Z = \mathcal{S}_Z \times (0, \infty)$, possiamo indicare con la medesima \mathbf{e} la proiezione sul secondo fattore.*

$$\mathbf{e} : P_Z \rightarrow (0, \infty)$$

Definizione 2.4.22. *Sia \mathcal{S}_Z la sfera celeste dell'osservatore (z, Z) .*

*Sia $K \subset \mathcal{S}_Z$ una regione di integrazione.*²

Sia ξ l'elemento di volume di \mathcal{S}_Z , ottenuto considerando $(Z^\perp, g|_{Z^\perp})$ come uno spazio euclideo di dimensione 3.

L'elemento di volume naturale sullo spazio delle direzioni di energia P_Z è dato da

$$\pi_Z = \xi \wedge \mathbf{e}^2 d\mathbf{e}$$

Osservazione 2.4.23. *Per analizzare i fotoni "vicini", un osservatore (z, Z) può considerare una sfera solida \mathcal{B} , sufficientemente piccola da essere vista come un sottoinsieme di M , centrata nell'origine di Z^\perp .*

Se la worldline di un fotone λ interseca la sfera, il vettore tangente $Y = \lambda_(z)$ può essere visto come un vettore dello spazio tangente $T_z M$ e quindi appartenere al cono di luce rivolto al futuro \mathcal{L}_z^+ .*

In questo modo, l'osservatore (z, Z) può associare al fotone una coppia (U, \mathbf{e}) , cioè può determinare un punto dello spazio delle direzioni energia P_Z .

Allora, scelto un intervallo $[a, b] \subset (0, \infty)$ e una regione K di integrazione sulla proprio sfera celeste \mathcal{S}_Z , con $K \times [a, b] \subset P_Z$, l'osservatore può contare il numero di fotoni entranti con una determinata direzione spaziale U in K e con una certa energia \mathbf{e} compresa nell'intervallo $[a, b]$.

In generale è possibile estendere il ragionamento a tutti gli intervalli $[a, b]$ e a tutti le regioni di integrazione, tuttavia potrebbe essere preferibile sostituire questa procedura con l'introduzione di una funzione di distribuzione regolare.

Definizione 2.4.24. *La funzione*

$$F_Z : P_Z \rightarrow [0, \infty) \tag{2.17}$$

si definisce la funzione di distribuzione dei fotoni per l'osservatore (z, Z) .

Allora $\mathbf{e}^2 F_Z$ rappresenta il numero di fotoni per unità di intervallo di energia, per unità di volume spaziale e per unità di angolo solido (si veda nota 2.4.22).

Definizione 2.4.25. *Sia $K \subset \mathcal{S}_Z$ una regione di integrazione. Considerato un range di energia $[a, b]$, indichiamo con \mathcal{H} il sottoinsieme di P_Z dato da*

$$\mathcal{H} = K \times [a, b]$$

²Una regione di integrazione K è un sottoinsieme compatto, non vuoto, tale che K e ∂K siano \mathcal{C}^∞ a tratti. Si definisce inoltre *angolo solido* l'area Ω di K data da $\Omega = \int_K \xi$, dove ξ è l'elemento di volume naturale.

Si definisce il numero di fotoni che (z, Z) misura per unità di volume spaziale con energia \mathbf{e} misurata nel range $[a, b]$ e direzione spaziale misurata nella regione K della propria sfera celeste:

$$\mathbf{n} = \int_{\mathcal{H}} \pi_Z F_Z. \quad (2.18)$$

Osservazione 2.4.26. Si noti che ad ogni osservatore (z, Z) corrisponde un'unica $F_Z \cdot [1]$

Definizione 2.4.27. Sia \mathcal{S}_Z la sfera celeste dell'osservatore (z, Z) . Per ogni intervallo di energia $[a, b] \subset [0, +\infty)$ definiamo $\mathbf{u}[a, b]$ la densità di energia dei fotoni con distribuzione F_Z , relativamente al range $[a, b]$, misurata da (z, Z) :

$$\mathbf{u}[a, b] = \int_{\mathcal{S}_Z \times [a, b]} \mathbf{e} \pi_Z F_Z = \int_{\mathcal{S}_Z} \xi \int_{[a, b]} \mathbf{e}^3 F_Z d\mathbf{e} \quad (2.19)$$

dove $\pi_Z = \xi \wedge \mathbf{e}^2 d\mathbf{e}$.

Dal momento che $F_Z > 0$ per definizione, definiamo \mathbf{u} la densità di energia totale dei fotoni con distribuzione F_Z :

$$\mathbf{u} = \lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow +\infty} \mathbf{u}[a, b]. \quad (2.20)$$

Giungiamo finalmente alla definizione della funzione che permette di dare la consueta interpretazione fisica delle osservazioni degli oggetti nel cosmo. Ricordando dalla (2.15) che vale

$$\mathbf{e} = hf$$

dove h è la costante di Planck e f la frequenza, possiamo indicare con I l'intensità specifica dei fotoni misurata dall'osservatore:

$$I = \mathbf{e}^3 F_Z = h^3 f^3 F_Z \quad (2.21)$$

con $F_Z = F_Z(U, \mathbf{e}) = F_Z(U, hf)$.

Definizione 2.4.28. Sia \mathcal{S}_Z la sfera celeste dell'osservatore (z, Z) . Fissata una direzione spaziale misurata U , la funzione S :

$$\begin{aligned} S : (0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ f &\mapsto S(f) \end{aligned}$$

si chiama lo spettro di energia che l'osservatore (z, Z) misura nella direzione U ed è definita da:

$$S(f) = hI = h\mathbf{e}^3 F_Z = h^4 f^3 F_Z. \quad (2.22)$$

Osservazione 2.4.29. Nella rappresentazione grafica della funzione spettro di energia, S , misurata da un'osservatore (z, Z) , si possono trovare diversi picchi di massimo e minimo locale, che comunemente vengono chiamati linee di spettro, come in figura 2.4.

L'analisi delle linee spettrali dei fotoni che arrivano all'osservatore con una certa direzione spaziale e una certa frequenza, permette di individuare sia quei fenomeni fisici, che ne hanno provocato l'emissione, sia quelle specifiche condizioni dello spaziotempo attraversato per raggiungere l'osservatore.

E' proprio in questo modo che si ottengono le informazioni fisiche sugli oggetti celesti.

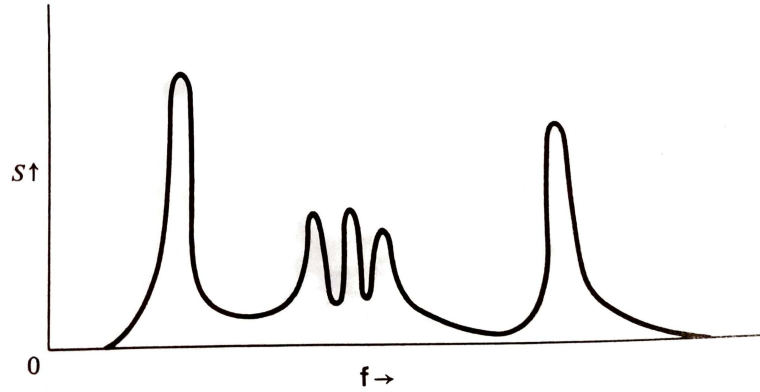


Figura 2.4: La funzione "spettro di energia" [1, Fig. par. 5.5.3]

Esempio 2.4.30. Supponiamo che l'osservatore (z, Z) osservi una galassia vicina, dalla quale riceve quindi un segnale luminoso di fotoni in caduta libera che indichiamo con $[\lambda]$.

La frequenza misurata da (z, Z) sarà:

$$f = \frac{e}{h} = -\frac{g(Y, Z)}{h} = -\frac{g(\lambda_*(z), Z)}{h}.$$

La frequenza misurata da un ipotetico osservatore posto al centro della galassia e in quiete rispetto a essa, sarà data da

$$f_0 = -\frac{g(\lambda_*(z_0), Z_0)}{h}.$$

Possiamo indicare con r quello che viene definito come il rapporto tra frequenza emessa e frequenza osservata, [1]:

$$r = \frac{f_0}{f} = \frac{g(\lambda_*(z_0), Z_0)}{g(\lambda_*(z), Z)}. \quad (2.23)$$

Una delle assunzioni importanti che spesso si fanno implicitamente è quella di considerare le leggi fisiche presenti "qui e ora" uguali a quelle presenti, per esempio, nell'altra galassia.

La procedura che spesso si segue per verificare in particolare questo tipo di assunzione è la seguente:

- (1) Si assegna un rapporto di frequenza empirico r alla galassia vicina.*
- (2) Si misura lo spettro S per U nella direzione rivolta verso il centro della galassia e se ne deducono i particolari fenomeni fisici che possono aver prodotto quella configurazione di linee spettrali.*
- (3) Si deduce quale frequenza f_0 l'ipotetico osservatore sulla galassia avrebbe misurato per quei fotoni*
- (4) Si misura la frequenza f osservata da (z, Z) ricavando il rapporto di frequenza $r' = \frac{f_0}{f}$.*

La buona corrispondenza tra i valori di r e di r' permette di verificare anche il fatto che il rapporto coincida per tutti i fotoni di uno stesso segnale luminoso.

Capitolo 3

Le soluzioni esatte

Una soluzione esatta alle equazioni di Einstein corrisponde a uno spaziotempo (M, g) che soddisfa la (2.3.1)

$$Ric_{ab} - \frac{1}{2}Sg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

in cui il tensore stress-energia totale T_{ab} descriva le leggi che governano un particolare modello di materia, rispettando il postulato di causalità locale e una determinata condizione di energia. Si tratta dunque di un'idealizzazione, definita da una metrica e caratterizzata da una particolare distribuzione di materia-energia.

In questo capitolo presenteremo tre soluzioni note: la più semplice, ovvero lo spaziotempo vuoto di Minkowski, su cui si basa lo studio della Relatività Speciale [1]; successivamente la soluzione di Schwarzschild, relativa ai buchi neri e ai cosiddetti buchi bianchi; infine quella di Kerr, che riguarda i buchi neri rotanti.

3.1 Preliminari e notazioni

All'inizio di questa sezione vediamo alcune definizioni delle quali avremo bisogno per la presentazioni dei teoremi relativi alla completezza.

Definizione 3.1.1. *Una varietà Riemanniana (o pseudo Riemanniana) (M, g) si dice geodeticamente completa se una qualsiasi geodetica $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ può essere estesa a una geodetica $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$.*

Teorema 3.1.2 (Hopf-Rinow). *Data una varietà Riemanniana (o pseudo Riemanniana) (M, g) ,*

- *Se per $x \in M$ la mappa esponenziale exp_x è definita su tutto $T_x M$, allora per ogni $y \in M$ esiste una geodetica minimale da x a y .*

- Se la mappa esponenziale \exp è definita su tutto TM , per ogni coppia $x, y \in M$ esiste una geodetica minimale che li congiunge.

Definizione 3.1.3. Sia (M, g) uno spaziotempo. Sia \mathcal{S} una superficie di tipo spazio di dimensione 3.[2]

Indichiamo con $\mathcal{D}^+(\mathcal{S})$ lo sviluppo futuro di Cauchy, ovvero l'insieme di tutti i punti $q \in M$ tali che ogni curva causale, (non di tipo spazio), passante per q , inestendibile, rivolta al passato intersechi \mathcal{S} . Analogamente sia $\mathcal{D}^-(\mathcal{S})$ lo sviluppo passato.

\mathcal{S} si dice superficie di Cauchy se viene intersecata da ogni curva inestendibile, di tipo luce o di tipo tempo, in M , e cioè se l'unione dello sviluppo futuro e di quello passato di \mathcal{S} corrisponde a tutta M : $\mathcal{D}^+(\mathcal{S}) \cup \mathcal{D}^-(\mathcal{S}) = M$

3.2 Lo spaziotempo di Minkowski

In questa sezione presentiamo la soluzione più semplice di spaziotempo vuoto, in cui il campo gravitazionale è triviale. Lo studio di questo spaziotempo ci permette di indagare la struttura causale all'infinito, ovvero il comportamento globale e asintotico delle geodetiche, attraverso la loro rappresentazione grafica nei *Diagrammi di Penrose*.

Definizione 3.2.1. In \mathbb{R}^4 , sia $\{dx^1, dx^2, dx^3, dx^4\}$ una base di 1-forme e sia $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ la base duale. Si definisce

$$g = \sum_{\mu=1}^3 dx^\mu \otimes dx^\mu - dx^4 \otimes dx^4.$$

(\mathbb{R}^4, g) è orientato temporalmente da ∂_4 e orientato da $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$. La connessione di Levi-Civita di g è univocamente determinata da $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, 4$.

Lo spaziotempo $(\mathbb{R}^4, g, \nabla)$ si chiama spaziotempo di Minkowski.[1]

Considerando le usuali coordinate polari (t, r, θ, ϕ) :

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \sin \phi \\ x^2 = r \sin \theta \cos \phi \\ x^3 = r \cos \theta \\ x^4 = t \end{cases}$$

la metrica

$$ds^2 = -(dx^4)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (3.1)$$

può essere espressa nel seguente modo:

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dr)^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.2)$$

Si noti che $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ corrisponde alla metrica standard sulla 2-sfera unitaria, per questo in alcuni testi è indicata con $d\Omega^2$ o con $g_{\mathbb{S}^2(\theta,\phi)}$. [18]

Osservazione 3.2.2. Consideriamo la metrica nella forma espressa in (3.1) e calcoliamo le equazioni delle geodetiche in termini delle coordinate naturali x^1, x^2, x^3, x^4 di \mathbb{R}^4 .

In questo caso, l'annullamento dei simboli di Christoffel, dati dalla (3.17), comporta che l'equazione delle geodetiche (1.3) risulti:

$$\ddot{x}^k(t) = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3, 4 ,$$

le cui soluzioni hanno la forma:

$$x^k(t) = b^k t + c^k \quad \text{con } b^k \text{ e } c^k \text{ costanti.}$$

Rispetto alla base dello spazio tangente, $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$, con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, un vettore $X \in T_p M$ si scrive $X = X^j \partial_j$, e dunque si ha:

$$x^k(\exp_p X) = X^k + x^k(p).$$

Allora la mappa \exp è un diffeomorfismo tra $T_p M$ e M ed è definita su tutto $T_p M$.

Per il teorema di Hopf-Rinow, 3.1.2, lo spaziotempo di Minkowski (M, g) è geodeticamente completo.

3.2.1 Diagramma di Penrose dello soluzione di Minkowski

La costruzione dei diagrammi di Penrose permette, attraverso una serie di cambiamenti di coordinate opportuni, di ottenere una raffigurazione "compattificata" dello spaziotempo, che non comprometta le informazioni sulle relazioni causali tra gli eventi.

Lo scopo di questa costruzione è dunque quello di avere una visione il più completa possibile dello spaziotempo e delle sue singolarità, non apparenti, lasciando invariati i coni di luce, ovvero mantenendo invariato il comportamento delle geodetiche di tipo luce.

Dal momento che il maggiore interesse è dedicato a ciò che accade fisicamente all'infinito o in prossimità delle singolarità, occorre prestare attenzione ai range di definizione delle variabili e alle loro variazioni relative a ciascun cambiamento di coordinate.

Osservazione 3.2.3. La metrica in (3.2), espressa in coordinate (t, r, θ, ϕ) ,

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dr)^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.3)$$

pur evidenziando la simmetria sferica, presenta delle singolarità apparenti in $r = 0$ e $\sin\theta = 0$. I range di definizione sono infatti:

$$\begin{aligned} t &\in (-\infty, +\infty) & r &\in (0, +\infty) \\ \theta &\in (0, \pi) & \phi &\in (0, +2\pi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Consideriamo la geodetica di tipo tempo $\alpha(t) = (t, 0, 0, 0)$. Siano C_τ^+ e C_τ^- i due coni di luce diretti verso il futuro e verso il passato, con vertice in $\alpha(\tau)$:

$$\begin{aligned} C_\tau^+ &= \{(t, r, \theta, \phi) : t - r = \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}\}, \\ C_\tau^- &= \{(t, r, \theta, \phi) : t + r = \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Pertanto risulta conveniente usare un sistema di coordinate nulle, (tali che $g(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}) = 0$) definito da:

$$\begin{cases} v := t + r \\ w := t - r \end{cases} \quad (3.5)$$

tramite il quale la metrica assume la seguente forma:

$$ds^2 = -dvdw + \frac{1}{4}(v - w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.6)$$

Si noti che $r = \frac{1}{2}(v - w) > 0$ e pertanto $v > w$ con $v, w \in \mathbb{R}$, con l'uguaglianza solo per $r = 0$.

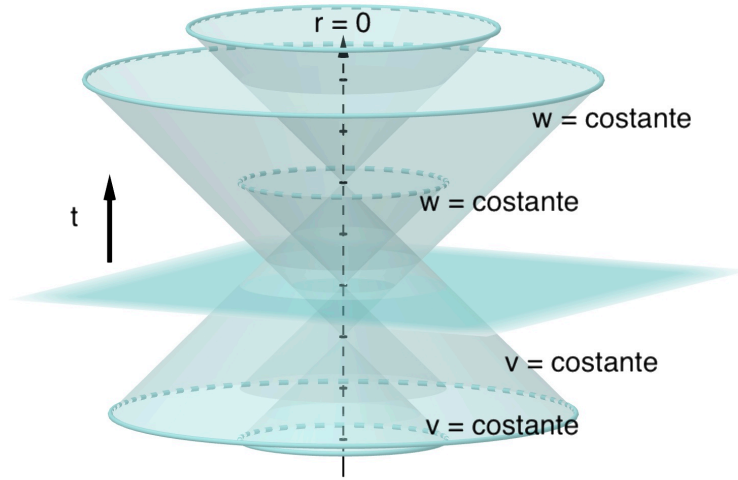


Figura 3.1: Lo spaziotempo di Minkowski

L'assenza di termini in dv^2 e in dw^2 corrisponde al fatto che le superfici $\{v = \text{cost}\}$ e $\{w = \text{cost}\}$ siano nulle, ovvero di tipo luce:[2]

$$\partial_{v_a} \partial_{v_b} g^{ab} = 0 = \partial_{w_a} \partial_{w_b} g^{ab}$$

In altre parole si osserva proprio che ∂_v è tangente alle geodetiche di tipo luce del cono di luce C_τ^+ . Analogamente, ∂_w è tangente rispetto alle geodetiche di tipo luce di C_τ^- .

Esempio 3.2.4 (Diagramma di Penrose). *Come abbiamo detto, lo scopo della costruzione grafica è quello di riuscire a descrivere, in modo bidimensionale, il comportamento asintotico delle geodetiche, rispettandone la struttura causale.*

Per portare i punti all'infinito a una distanza finita compattifichiamo le due variabili separatamente, introducendo altre due coordinate, sempre nulle, attraverso cui esprimere la (3.6).

Siano:

$$\begin{cases} \tan p = v \\ \tan q = w \end{cases} \quad (3.7)$$

il cui range di definizione diventa:

$$p \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad q \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{con } p > q \quad (3.8)$$

La metrica che si ottiene è:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 p \cos^2 q} \left(-dpdq + \frac{1}{4} \sin^2(p-q)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (3.9)$$

Nella (3.9) il primo termine esplose quando p e q annullano il denominatore. [2] A questo punto si noti che tralasciare il fattore iniziale $\frac{1}{\cos^2 p \cos^2 q}$ non modifica i coni di luce e ha l'effetto di produrre la metrica conforma seguente:

$$d\hat{s}^2 = -4dpdq + \sin^2(p-q)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.10)$$

Infine riduciamo questa metrica ad una forma più usuale, ritornando a coordinate di tipo spazio e di tipo tempo:

$$\begin{cases} T = p + q \\ X = p - q, \end{cases} \quad (3.11)$$

con

$$-\pi < T + X < \pi, \quad -\pi < T - X < \pi, \quad r' \geq 0. \quad (3.12)$$

Risulta che

$$\begin{aligned} T &= p + q, & 2q &= T - X, \\ X &= p - q, & 2p &= T + X. \end{aligned}$$

da cui $4dpdq = -(dT)^2 + (dX)^2$, che porta infine dalla (3.10) alla metrica seguente:

$$d\hat{s}^2 = -(dT)^2 + (dX)^2 + \sin^2 X (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.13)$$

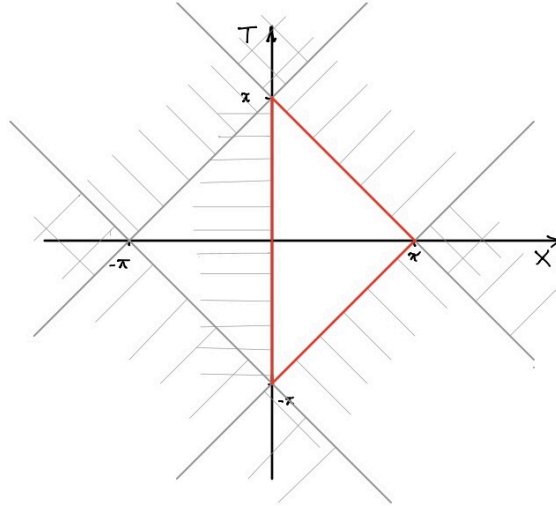


Figura 3.2: Raffigurazione della porzione di spaziotempo di Minkowski limitata dai range espressi nella (3.12)

Si noti che le coordinate t e r della metrica espressa in (3.2) si ricavano con:

$$\begin{aligned} 2t &= \tan\left(\frac{1}{2}(T + X)\right) + \tan\left(\frac{1}{2}(T - X)\right), \\ 2r &= \tan\left(\frac{1}{2}(T + X)\right) - \tan\left(\frac{1}{2}(T - X)\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

A questo punto, sopprimendo le due coordinate θ e ϕ , è possibile rappresentare graficamente la metrica ottenuta in un diagramma (T, X) , nel quale evidenziare i diversi range di definizione delle coordinate, dati dalla (3.12), come in figura 3.3.

I bordi di tale regione definiscono gli infiniti causali dello spaziotempo di Minkowski:

- \mathcal{I}^+ := l'infinito di tipo luce rivolto verso il futuro, corrispondente alla superficie di tipo luce $\{p = \frac{\pi}{2}\}$;
- \mathcal{I}^- := l'infinito di tipo luce rivolto verso il passato, corrispondente alla superficie di tipo luce $\{q = -\frac{\pi}{2}\}$;

- i^+ := l'infinito di tipo tempo *rivolto verso il futuro*, corrispondente al punto $(p, q) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ovvero $(T, X) = (\pi, 0)$;
- i^- := l'infinito di tipo tempo *rivolto verso il passato*, corrispondente al punto $(p, q) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, ovvero $(T, X) = (-\pi, 0)$;
- i^0 := l'infinito di tipo spazio, corrispondente al punto $(p, q) = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, ovvero $(T, X) = (0, \pi)$.

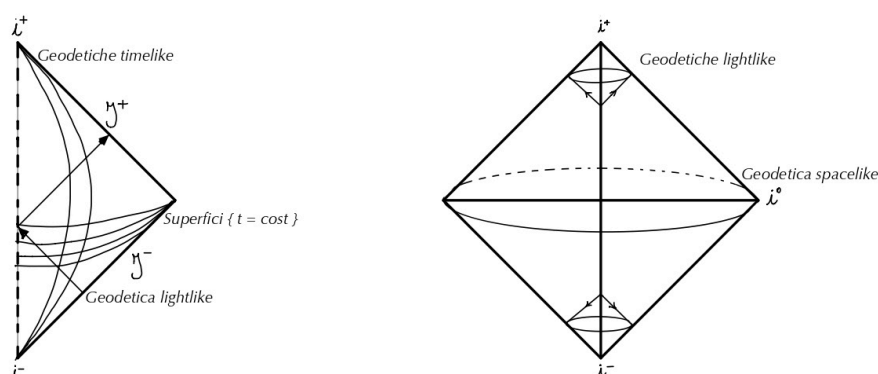


Figura 3.3: Il diagramma di Penrose dello spaziotempo di Minkowski

Ogni curva geodetica di tipo tempo rivolta al futuro parte da i^- e arriva a i^+ , così le curve geodetiche di tipo luce andranno da \mathcal{I}^- verso \mathcal{I}^+ , con un'inclinazione di $\pm 45^\circ$. Mentre i^0 è il punto iniziale e finale di tutte le geodetiche di tipo spazio.

Ogni punto rappresenta una 2-sfera e la retta corrispondente a $r = 0$ costituisce un'irremovibile singolarità della metrica.

3.3 Lo spaziotempo di Schwarzschild

La soluzione di Schwarzschild rappresenta lo spaziotempo vuoto, statico, con simmetria sferica, esterno a un corpo massivo sfericamente simmetrico.[2] Quello che ci proponiamo in questa sezione non è tanto di capire come Schwarzschild sia arrivato a questa soluzione imponendo le condizioni di simmetria richieste, quanto approfondire le caratteristiche matematiche e fisiche che emergono dallo studio della metrica stessa, espressa inizialmente nelle coordinate omonime (di Schwarzschild) e successivamente in altre coordinate, il cui nome deriva dagli scienziati che le hanno introdotte, ovvero le

coordinate di Eddington-Finkelstein e di Kruskal. Questi cambi di coordinate permettono di stabilire l'esistenza di singolarità effettive o apparenti e forniscono la descrizione dello spaziotempo in loro prossimità.

Definizione 3.3.1. *La metrica dello spaziotempo di Schwarzschild, espressa nelle coordinate di Schwarzschild, è:*

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi\right), \quad (3.15)$$

dove m rappresenta la massa gravitazionale.

I range di definizione delle coordinate di Schwarzschild (t, r, θ, φ) sono:

$$\begin{aligned} t &\in (-\infty, +\infty), & r &\in (0, 2m) \cup (2m, +\infty), \\ \theta &\in (0, \pi), & \varphi &\in (0, +2\pi). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Osservazione 3.3.2. *Si noti che la metrica (3.15) presenta due singolarità in $r = 0$ e in $r = 2m$.*

Tuttavia si può verificare che la curvatura in $r = 2m$ non diverge, e questo suggerisce che non si tratti di una singolarità fisica, ma soltanto apparente dovuta a una cattiva scelta di coordinate.[2].

I coefficienti di Christoffel non nulli, calcolati con la formula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (3.17)$$

risultano:

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{m(r-2m)}{r^3}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{m}{r(2m-r)}, \quad (3.18)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = 2m-r, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \sin^2 \theta (2m-r), \quad (3.19)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{m}{r(r-2m)} = \Gamma_{rt}^t, \quad (3.20)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} = \Gamma_{\theta r}^\theta, \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} = \Gamma_{\varphi r}^\varphi, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi. \quad (3.22)$$

Attraverso il calcolo del tensore di curvatura nella (1.4), si ricava il valore dello scalare di Kretschmann $K = R_{ijhk} R^{ijhk}$. Il fatto che questo scalare non dipenda dal sistema di riferimento scelto, mostra che se diverge per un certo valore di r in determinate coordinate, allora diverge qualsiasi siano le coordinate scelte e pertanto a quel valore di r corrisponde una singolarità

della curvatura.

In questo caso lo scalare di Kretschmann corrisponde a :

$$K = R_{ijhk}R^{ijhk} = \frac{48m^2}{r^6} \quad (3.23)$$

valore che tende a infinito per $r \rightarrow 0$, ma non per $r = 2m$. [17]

Esempio 3.3.3 (Geodetiche radiali di tipo luce). *Come abbiamo visto nella precedente osservazione, per capire cosa accade fisicamente, non solo matematicamente, in quello che viene chiamato raggio di Schwarzschild, $r = 2m$, concentriamo il nostro studio sul moto di un fotone in caduta libera lungo una geodetica radiale. [20]*

Trattandosi di una geodetica nulla, dato un fotone λ , si ha che $g(\lambda_*, \lambda_*) = 0$, ovvero che:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2\right) = 0. \quad (3.24)$$

poiché θ e φ sono costanti e quindi $d\theta = 0 = d\varphi$, l'equazione del moto è la seguente:

$$\frac{d}{dt} \left(\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right) = 0 \Rightarrow \left(\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right) = K, \quad (3.25)$$

con $K = \text{costante}$.

Dalle equazioni (3.24) e (3.25) risulta

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{K^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = 0,$$

da cui $\dot{r}^2 = K^2$, e dunque

$$\dot{r} = \pm K, \quad r(\alpha) = \pm K\alpha. \quad (3.26)$$

Allora si ha:

$$t(\alpha) := t\left(\frac{r}{K}\right) \quad (3.27)$$

e dunque, nel caso in cui $\dot{r} = +K$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{K}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \frac{1}{K} = \frac{r}{r - 2m}. \quad (3.28)$$

Integrando si ottiene l'equazione delle geodetiche nulle uscenti o *outgoing null geodesics*, con $u = \text{cost.}$:

$$t(r) = r + 2m \log |r - 2m| + w. \quad (3.29)$$

Nel caso in cui $\dot{r} = -K$, si ottiene l'equazione delle geodetiche nulle entranti o ingoing null geodesics, con $v = \text{cost.}$:

$$t(r) = -r - 2m \log |r - 2m| + v. \quad (3.30)$$

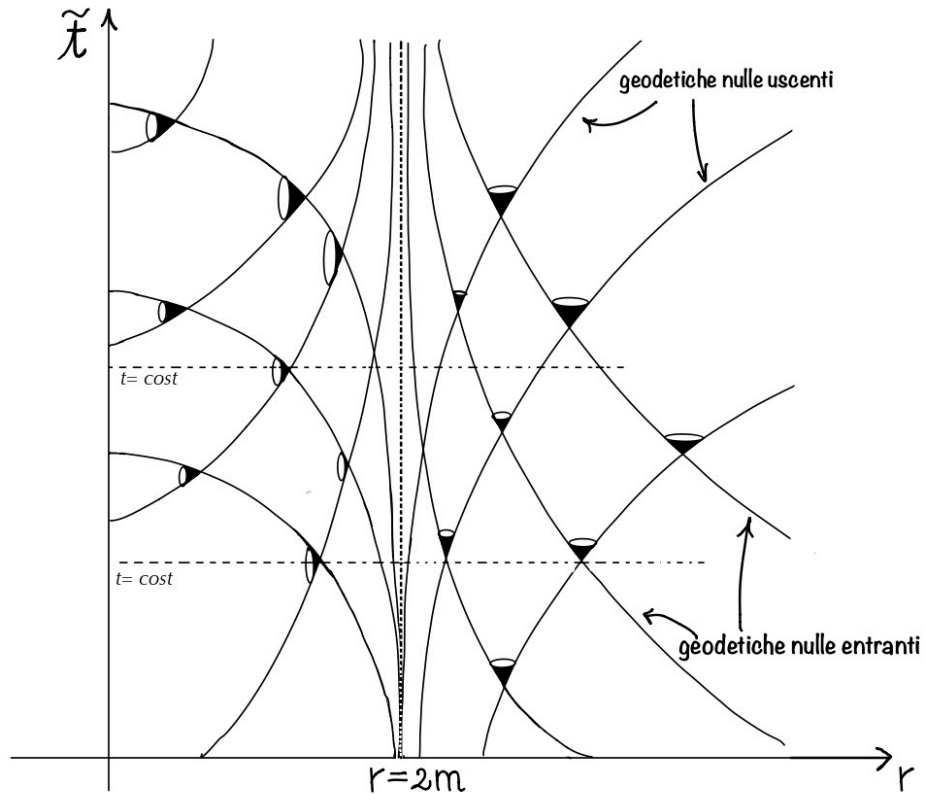


Figura 3.4: Lo spaziotempo di Schwarzschild nelle coordinate di Schwarzschild

Come si può osservare dalla figura 3.4, il comportamento delle geodetiche nulle, entranti o uscenti, è quello di avvicinarsi asintoticamente a $r = 2m$, che rappresenta evidentemente una singolarità in queste coordinate.

Eliminando la superficie $r = 2m$ dalla varietà M si ottengono due componenti disconnesse, per $0 < r < 2m$ e $2m < r < \infty$. poiché lo spaziotempo deve essere una varietà connessa, occorre trovare una più efficace scelta di coordinate, che descrivano una varietà M' , nella quale M sia immersa e una metrica Lorentziana g' su M' che coincida con g sull'immagine di M . [2]

Si noti come in questo caso sia particolarmente interessante il rapporto tra

la realtà e la rappresentazione matematica che costruiamo: occorre indagare ogni aspetto della relazione tra l'oggetto reale e la sua rappresentazione per capire quale sia la potenza e la fragilità della rappresentazione stessa.

Osservazione 3.3.4 (Le coordinate di Eddington-Finkelstein). *L'idea è di usare delle coordinate nelle quali le geodetiche nulle entranti siano rappresentate da rette con pendenza pari a -1 . [20]*

Il parametro v , introdotto nell'equazione (3.30), identifica ognuna di queste curve: i valori (v, θ, φ) che restano costanti lungo queste geodetiche radiali nulle entranti, sono sufficienti a determinarle.

Esplicitando v

$$v := t + r + 2m \log |r - 2m|, \quad (3.31)$$

possiamo definire (v, r, θ, φ) come le coordinate di Eddington-Finkelstein per le geodetiche nulle entranti, con:

$$\begin{cases} v = t + r + 2m \log |r - 2m|, \\ r = r, \\ \theta = \theta, \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

La matrice del cambiamento di coordinate è l'inversa di A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \frac{2m}{r-2m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 - \frac{2m}{r-2m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sostanzialmente con l'unico calcolo:

$$g_{\theta r} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{2m}{r-2m}\right) = \frac{r^2 - 2rm + 2rm - 2rm + 4m^2 - 4m^2}{r(r-2m)} = 1,$$

la quale trasforma la matrice della metrica (3.15) nella seguente matrice:

$$g_{EF} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

che rappresenta la soluzione di Schwarzschild nelle coordinate di Eddington-Finkelstein nel caso di geodetiche nulle entranti:

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv^2 + (dv \otimes dr + dr \otimes dv) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.32)$$

Sia

$$\tilde{t} = t + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|. \quad (3.33)$$

Allora dalla (3.31) e dalla (3.33), si ottiene l'equazione delle geodetiche radiali nulle entranti nelle coordinate $(\tilde{t}, r, \theta, \varphi)$:

$$\tilde{t} = -r + v \quad (3.34)$$

dove v è il parametro che identifica la geodetica ($v = \text{cost.}$).[5]

Possiamo procedere in modo analogo nel caso di geodetiche nulle uscenti. Consideriamo infatti la coordinata nulla ritardata definita da:

$$w := t - r - 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|. \quad (3.35)$$

Possiamo ricavare le equazioni delle geodetiche radiali nulle uscenti mettendo insieme la (3.35) e la (3.33), ottenendo:

$$\tilde{t} = r + 4m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| + w, \quad (3.36)$$

dove w identifica la geodetica ($w = \text{cost.}$). [5]

La superficie in $r = 2m$ è descritta come una membrana semipermeabile nello spaziotempo, cioè una superficie il cui attraversamento è consentito in una sola direzione, caratterizzata dall'aver i vettori tangenti di tipo luce, o nulli, in ogni punto.[8]

Una tale superficie, di dimensione 2, compatta si chiama orizzonte degli eventi.

Nella figura 3.5 a sinistra è rappresentata la soluzione di Schwarzschild nelle coordinate entranti di Eddington-Finkelstein $(\tilde{t}, r, \theta, \varphi)$: i fotoni entranti, ovvero le curve di tipo luce rivolte verso il futuro, rappresentate graficamente dalle rette inclinate a -45° , attraversano l'orizzonte degli eventi terminando nella singolarità effettiva corrispondente a $r = 0$. Nessuna curva può uscire dalla regione $r < 2m$: nessuna particella nemmeno la luce, può evadere dalla singolarità, che per questo motivo si chiama buco nero. Nella figura a destra viene rappresentato nelle coordinate uscenti quello che viene chiamato buco bianco: tutti i fotoni uscenti emergono dalla singolarità, attraversano l'orizzonte degli eventi e si propagano verso l'infinito.

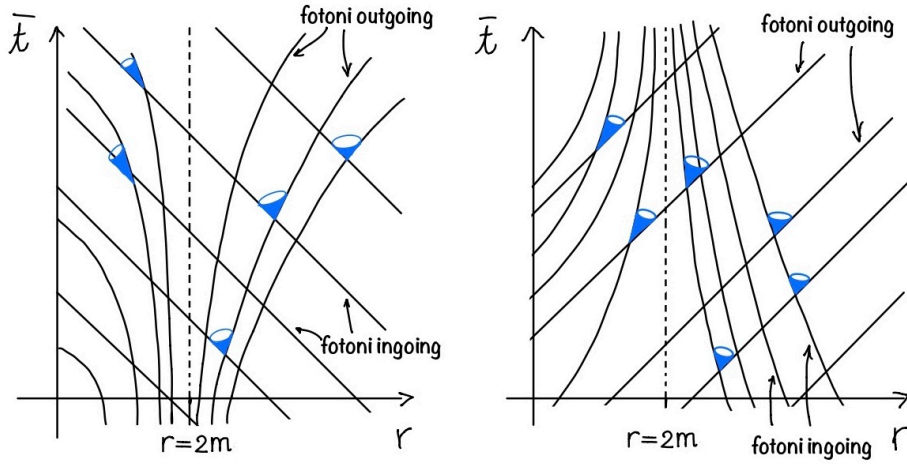


Figura 3.5: Lo spaziotempo di Schwarzschild nelle coordinate di Eddington-Finkelstein, entranti nella figura a sinistra e uscenti nella figura a destra

Osservazione 3.3.5 (Le coordinate di Kruskal). *Kruskal propose di effettuare entrambe le estensioni simultaneamente, esprimendo la metrica dello spazio tempo di Schwarzschild nelle coordinate (v, w, θ, φ) :*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv dw + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.37)$$

Se riscriviamo le coordinate raccogliendo il termine $2m$ in modo da averne il rapporto, e trascurando la costante $\log 2m$ che ne risulta, si ottiene, per $r > 2m$, [21]:

$$\begin{cases} v := t + r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right), \\ w := t - r - 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right). \end{cases} \quad (3.38)$$

Da cui

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \Rightarrow \frac{v - w}{4m} = \frac{r}{2m} + \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right).$$

Ovvero

$$\frac{v - w}{4m} - \frac{r}{2m} = \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \Rightarrow \left(\frac{r}{2m} - 1\right) = e^{\frac{v-w}{4m}} \frac{1}{e^{\frac{r}{2m}}}.$$

In questo modo possiamo definire $r := r(v, w)$ dalla seguente:

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} = e^{\frac{v-w}{4m}}. \quad (3.39)$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri della (3.39) per $\frac{2m}{r}$, otteniamo:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \frac{2m}{r} e^{-\frac{r}{2m}} e^{\frac{v-w}{4m}} \quad (3.40)$$

che, sostituendo nella (3.37), porta alla seguente espressione della metrica

$$ds^2 = -\frac{2m}{r} e^{-\frac{r}{2m}} e^{\frac{v-w}{4m}} dv dw + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.41)$$

A questo punto si effettua il seguente cambio di coordinate:[2]

$$\begin{cases} V = e^{\frac{v}{4m}} \\ W = -e^{-\frac{w}{4m}} \end{cases} \quad (3.42)$$

con

$$V \in (0, +\infty) \quad e \quad W \in (-\infty, 0). \quad (3.43)$$

Quindi

$$\begin{cases} \frac{dV}{dv} = \frac{1}{4m} e^{\frac{v}{4m}} \\ \frac{dW}{dw} = \frac{1}{4m} e^{-\frac{w}{4m}} \end{cases} \quad (3.44)$$

e pertanto si trova che la metrica diventa:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{2m}{r} e^{-\frac{r}{2m}} 16m^2 dV dW + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= -\frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dV dW + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Si noti che r , nella metrica espressa in queste coordinate, è funzione di V e di W e attraverso la (3.39) si ottiene:

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} = e^{\frac{v-w}{4m}} = -VW. \quad (3.46)$$

Concludiamo con l'ultimo cambio di coordinate definito in questo modo: [2]

$$\begin{cases} X = \frac{V-W}{2}, \\ T = \frac{V+W}{2}, \end{cases} \quad (3.47)$$

da cui

$$\begin{cases} W = T - X, \\ V = T + X \end{cases} \quad (3.48)$$

e pertanto

$$dVdW = (dT - dX)(dT + dX) = dT^2 - dX^2.$$

La forma finale della metrica nelle coordinate di Kruskal (T, X, θ, φ) per la soluzione di Schwarzschild diventa la seguente:

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.49)$$

Innanzitutto si noti che, applicando la (3.39) e la (3.46), possiamo definire $r := r(T, X)$ da

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} = -VW = X^2 - T^2. \quad (3.50)$$

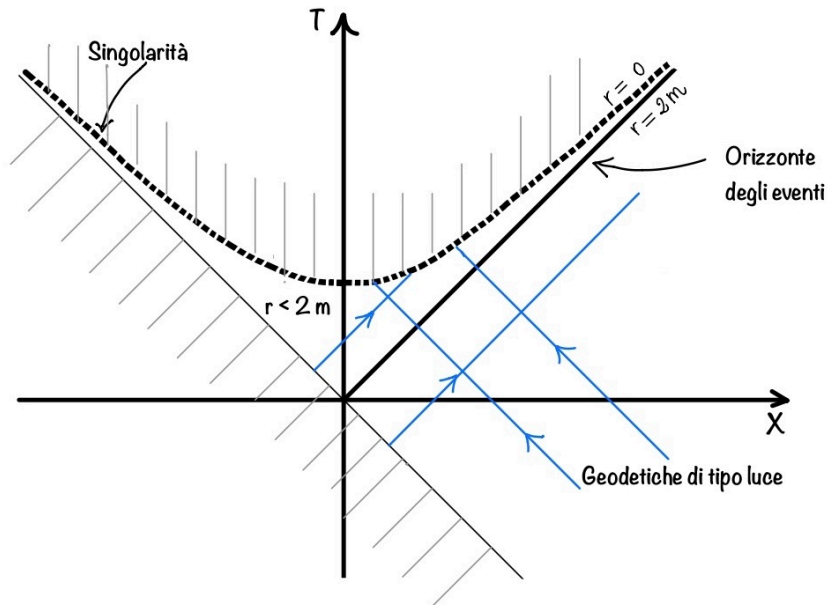


Figura 3.6: Rappresentazione della porzione di spaziotempo di Schwarzschild limitata dai range espressi nella (3.53)

Avvicinandosi alla singolarità $r = 0$ si può osservare che l'equazione (3.50) diventa:

$$r \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad X^2 - T^2 \rightarrow -1. \quad (3.51)$$

La singolarità $r = 0$ è rappresentata nel piano TX dall'iperbole $X^2 - T^2 = -1$, i cui asintoti corrispondono proprio alle rette che si ottengono quando r tende al valore $2m$, cioè all'orizzonte degli eventi:

$$r \rightarrow 2m \quad \Rightarrow \quad X^2 - T^2 \rightarrow 0. \quad (3.52)$$

Dalla definizione di X e di T nella (3.47) e dal range di definizione di V e W nella (3.43), si ottiene che le coordinate X e T sono definite nel range seguente: [5]

$$-X < T < \sqrt{X^2 + 1}, \quad X \in \mathbb{R} \quad (3.53)$$

Tuttavia è possibile estendere la metrica attraverso la seguente trasformazione che lascia invariato l'elemento della metrica in (3.49):[5]

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (T, X) &\mapsto (-T, -X) \end{aligned} \quad (3.54)$$

In questo modo lo spaziotempo è definito sull'aperto di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$:

$$M = \{p \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2, \text{ t. c. } T^2(p) - X^2(p) < 1\} \quad (3.55)$$

La figura seguente, 3.7, mostra pertanto la massima estensione dello spaziotempo di Schwarzschild nelle coordinate (X, T) .

Se i raggi di luce, che sono rappresentati da linee rette con pendenza di $\pm 45^\circ$, attraversano l'orizzonte degli eventi, cadono inesorabilmente nella singolarità.

La costruzione presenta due regioni separate, indicate con "I" e "III": nessun osservatore, che si trovi nell'una, può vedere o essere visto, da nessun osservatore che si trovi nell'altra; non esiste nessuna curva causale che può collegare due eventi qualsiasi che si trovino nelle due regioni.

La regione "II" è la porzione di spaziotempo del buco nero: superato l'orizzonte degli eventi non è possibile fuggire dalla singolarità.

Come nella 3.5, anche in questa figura è presente quello che viene chiamato "buco bianco", con la relativa regione indicata con "IV": come emerge dalla rappresentazione, questa singolarità viene così chiamata perché si tratta di un confine da cui i raggi luminosi possono solo uscire, un passato da cui possiamo solo ricevere informazioni, ma non possiamo in alcun modo influenzare, poiché nessuna curva causale rivolta verso il futuro può entrare in questa zona.

Tuttavia in questo caso si tratta solo di una rappresentazione matematica: nella realtà lo spaziotempo di Schwarzschild è un ottimo modello per rappresentare ciò che accade all'esterno di una stella che sta collassando, dando origine a un buco nero. La regione "IV" corrisponde alla regione occupata dalla stella in collasso gravitazionale, che non è descritta dalla soluzione di Schwarzschild, soluzione che analizza uno spaziotempo vuoto, privo di materia.

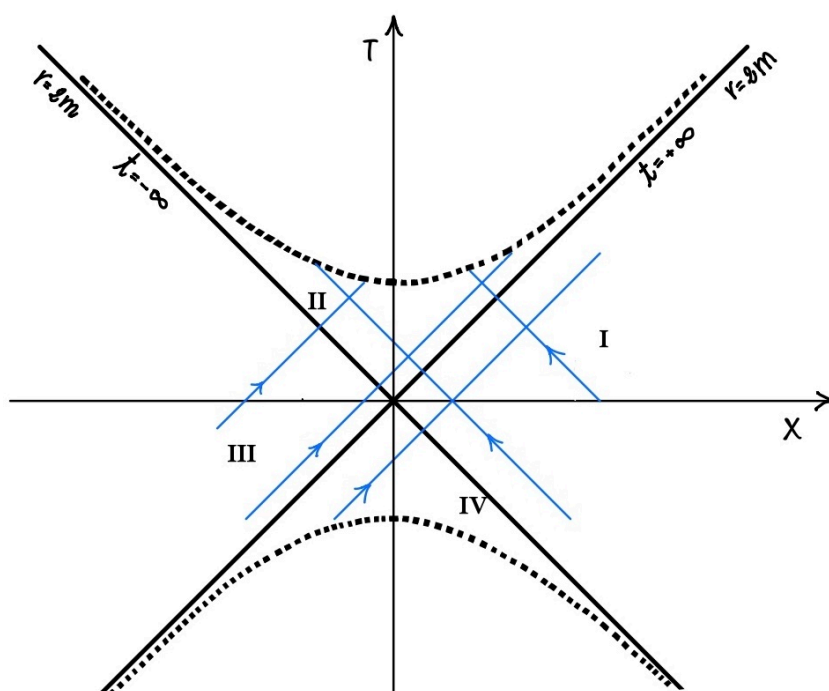


Figura 3.7: Rappresentazione della porzione di spaziotempo di Schwarzschild limitata dai range espressi nella (3.53)

3.3.1 Diagramma di Penrose della soluzione di Schwarzschild

Come nella costruzione del diagramma di Penrose per lo spaziotempo di Minkowski, cerchiamo di compattificare le variabili che definiscono la soluzione di Schwarzschild, in modo da ottenere una rappresentazione delle curve geodetiche, in particolare dei punti all'infinito, senza compromettere le relazioni causali tra i diversi punti.

Esempio 3.3.6 (Costruzione del diagramma). *Riprendiamo la metrica espressa in questo modo: [5]*

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dV dW + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.56)$$

con

$$\begin{cases} V = T + X \\ W = T - X \\ T^2 - X^2 < 1 \end{cases} \quad (3.57)$$

e poiché $T^2 - X^2 = VW$ si ha che il range di definizione di (W, V) corrisponde, nella massima estensione dello spaziotempo di Schwarzschild, a:

$$(W, V) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tali che } WV < 1 \quad (3.58)$$

Introduciamo a questo punto le coordinate che possono compattificare i range di definizione:[5]

$$W = \tan \widehat{W} \quad e \quad V = \tan \widehat{V} \quad (3.59)$$

da cui

$$\widehat{W} = \arctan W \quad e \quad \widehat{V} = \arctan V \quad (3.60)$$

Allora risulta $(\widehat{W}, \widehat{V}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per tali valori sia $\cos \widehat{W} > 0$, sia $\cos \widehat{V} > 0$ sono entrambi positivi. Pertanto segue dalla (3.58) la seguente:

$$\begin{aligned} WV < 1 &\Rightarrow \tan \widehat{W} \tan \widehat{V} < 1 \\ &\Rightarrow \frac{\sin \widehat{W} \sin \widehat{V}}{\cos \widehat{W} \cos \widehat{V}} < 1 \\ &\Rightarrow \sin \widehat{W} \sin \widehat{V} < \cos \widehat{W} \cos \widehat{V} \\ &\Rightarrow -\cos(\widehat{W} + \widehat{V}) < 0 \\ &\Rightarrow \cos(\widehat{W} + \widehat{V}) > 0 \end{aligned}$$

che stabilisce il nuovo range di definizione:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \widehat{W} + \widehat{V} < \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{\pi}{2} < \widehat{W} < \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{\pi}{2} < \widehat{V} < \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (3.61)$$

La metrica espressa nelle coordinate $(\widehat{W}, \widehat{V}, \theta, \varphi)$ diventa:

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} \frac{1}{\cos^2 \widehat{W}} \frac{1}{\cos^2 \widehat{V}} d\widehat{W} d\widehat{V} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.62)$$

L'ultima trasformazione finalmente ci conduce a una coordinata di tipo tempo e una di tipo spazio, entrambe compattificate. Siano: [5]

$$\begin{cases} \widehat{T} = \widehat{V} + \widehat{W} \\ \widehat{X} = \widehat{V} - \widehat{W} \end{cases} \quad (3.63)$$

da cui

$$\begin{cases} \widehat{W} = \frac{1}{2}(\widehat{T} - \widehat{X}) \\ \widehat{V} = \frac{1}{2}(\widehat{T} + \widehat{X}) \end{cases} \quad (3.64)$$

Dalla (3.61) si ricavano le seguenti condizioni che stabiliscono il range di definizione di $(\widehat{T}, \widehat{X})$:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \widehat{T} < \frac{\pi}{2}; \\ -\widehat{T} - \pi < \widehat{X} < -\widehat{T} + \pi; \\ +\widehat{T} - \pi < \widehat{X} < +\widehat{T} + \pi. \end{cases} \quad (3.65)$$

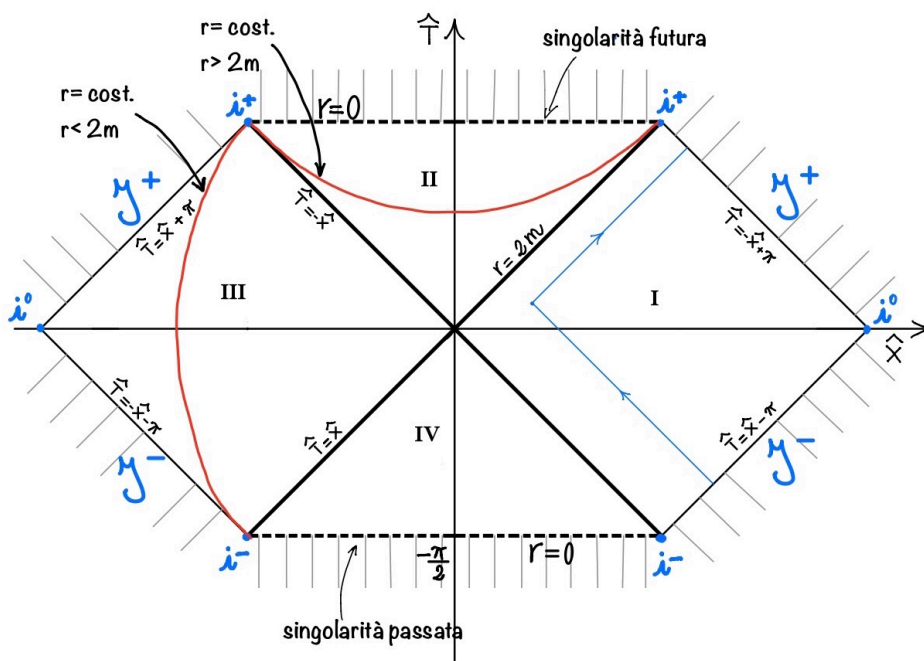


Figura 3.8: Rappresentazione della porzione di spaziotempo di Schwarzschild limitata dai range espressi nella (3.53)

Si noti che dalla (3.50) risulta

$$\left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{\frac{r}{2m}} = -\tan \widehat{V} \tan \widehat{W} \quad (3.66)$$

Allora per $r \rightarrow 0$ si ha che $(\tan \widehat{V} \tan \widehat{W}) \rightarrow 1$, così la singolarità $r = 0$ è rappresentata dalle porzioni delle due rette delimitate dai range di definizione e si distingue in:

- singolarità futura, descritta da $\widehat{T} = +\frac{\pi}{2}$

- singolarità passata, descritta da $\widehat{T} = -\frac{\pi}{2}$

Mentre per $r \rightarrow 2m$ si ha che $(\tan \widehat{V} \tan \widehat{W}) \rightarrow 0$.

Si ricavano così le equazioni che rappresentano gli orizzonti degli eventi raffigurati nel diagramma dalle rette corrispondenti a $\widehat{V} = 0$ ovvero $\widehat{T} = -\widehat{X}$ e a $\widehat{W} = 0$ ovvero $\widehat{T} = \widehat{X}$, sempre delimitate dagli intervalli di definizione.

I bordi della figura rappresentano gli infiniti causali, come accade nella rappresentazione di Minkowski:

\mathcal{I}^+ := l'infinito di tipo luce rivolto verso il futuro, corrispondente alle due superfici di tipo luce definite da:

$$\widehat{W} = \frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow W = +\infty) \quad \Rightarrow \quad \widehat{T} = \widehat{X} + \pi$$

$$\widehat{V} = \frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow V = +\infty) \quad \Rightarrow \quad \widehat{T} = -\widehat{X} + \pi$$

\mathcal{I}^- := l'infinito di tipo luce rivolto verso il passato, corrispondente alle due superfici di tipo luce definite da:

$$\widehat{W} = -\frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow W = -\infty) \quad \Rightarrow \quad \widehat{T} = \widehat{X} - \pi$$

$$\widehat{V} = -\frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow V = -\infty) \quad \Rightarrow \quad \widehat{T} = -\widehat{X} - \pi$$

i^+ := l'infinito di tipo tempo rivolto verso il futuro, corrispondente ai punti

$$\left(\widehat{W}, \widehat{V}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\Rightarrow (W, V) = (0, +\infty)) \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{T}, \widehat{X}\right) = \left(+\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\widehat{W}, \widehat{V}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad (\Rightarrow (W, V) = (+\infty, 0)) \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{T}, \widehat{X}\right) = \left(+\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

i^- := l'infinito di tipo tempo rivolto verso il passato, corrispondente a

$$\left(\widehat{W}, \widehat{V}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad (\Rightarrow (W, V) = (-\infty, 0)) \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{T}, \widehat{X}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\widehat{W}, \widehat{V}\right) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right) \quad (\Rightarrow (W, V) = (0, -\infty)) \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{T}, \widehat{X}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

i^0 := l'infinito di tipo spazio, corrispondente a

$$\left(\widehat{W}, \widehat{V}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\Rightarrow (W, V) = (-\infty, +\infty)) \quad \Rightarrow \left(\widehat{T}, \widehat{X}\right) = (0, \pi)$$

$$\left(\widehat{W}, \widehat{V}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \quad (\Rightarrow (W, V) = (+\infty, -\infty)) \quad \Rightarrow \left(\widehat{T}, \widehat{X}\right) = (0, -\pi)$$

Osservazione 3.3.7 (Wormhole). *Nel 1916 il fisico Ludwig Flamm ha dimostrato che una ipersuperficie di tipo spazio nelle coordinate (t, r, θ, φ) definita da $t = t_0 = \text{costante}$, embedded nello spazio euclideo corrisponde a un paraboloide di rotazione, in cui il raggio r decresce fino al valore $2m$ e poi ricomincia a crescere, come in figura.*

Si tratta del Einstein-Rosen Bridge, corrispondente ad un collegamento tra le due zone esterne, separate dagli orizzonti degli eventi. Tuttavia, questo ponte, che viene chiamato anche Wormhole di Schwarzschild, non è attraversabile: come si evince dal diagramma di Penrose, infatti, non esiste alcuna possibilità di comunicazione tra le due regioni se non si supera la velocità della luce.

[5]

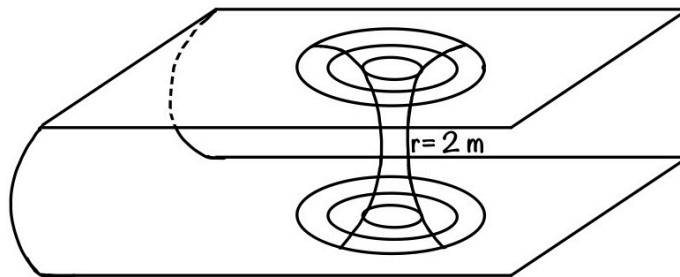


Figura 3.9: Rappresentazione di un Einstein-Rosen Bridge

3.4 Lo spaziotempo di Kerr

Questa sezione è dedicata alla soluzione che descrive lo spaziotempo esterno ad un corpo di massa m che ruota con momento angolare $J = ma$ misurato all'infinito. Vedremo che le caratteristiche della metrica stabiliscono che si tratti di una soluzione stazionaria, simmetrica rispetto all'asse e asintoticamente piatta. Prevedono inoltre che sia presente un effetto di trascinamento

(frame dragging) dello spaziotempo stesso, causando la partecipazione alla rotazione di qualsiasi oggetto transiti entro una determinata zona, fino alla caduta all'interno della singolarità, il buco nero rotante.

Definizione 3.4.1. *La soluzione di Kerr, espressa nelle coordinate di Boyer e Lindquist (t, r, θ, φ) , assume la seguente forma:*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4amr}{\rho^2} \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (r^2 + a^2 + 2a2mr \sin^2 \theta) d\varphi^2 \quad (3.67)$$

con

$$\begin{cases} \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Delta = r^2 - 2mr + a^2 \end{cases} \quad (3.68)$$

In forma matriciale diventa:

$$(g)_{tr\theta\varphi} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{2amr}{\rho^2} \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2amr}{\rho^2} \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (r^2 + a^2 + 2a^2mr \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Osservazione 3.4.2 (Determinante e matrice inversa). *Il determinante della matrice in (3.69) è:*

$$\det(g)_{tr\theta\varphi} = -\rho^2 \sin^2 \theta. \quad (3.70)$$

Per calcolare la matrice inversa $g^{tr\theta\varphi}$ iniziamo con il calcolo dell'inversa del blocco $(g)_{t\varphi}$, perché per il blocco $(g)_{r\theta}$ il calcolo è triviale.[16]

$$(\tilde{g})_{t\varphi} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) & -\frac{2amr}{\rho^2} \sin^2 \theta \\ -\frac{2amr}{\rho^2} \sin^2 \theta & \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (r^2 + a^2 + 2a^2mr \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Il determinante di questa matrice si calcola:

$$\det(\tilde{g}_{t\varphi}) = -\Delta \sin^2 \theta \quad (3.72)$$

Mettendo insieme i vari calcoli si ottiene la matrice inversa della metrica di Kerr:

$$(g)^{tr\theta\varphi} = \begin{pmatrix} g^{tt} & 0 & 0 & g^{t\varphi} \\ 0 & \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ g^{\varphi t} & 0 & 0 & g^{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

dove risulta:

$$g^{tt} = -\frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right) \quad (3.74)$$

$$g^{t\varphi} = -\frac{2mra}{\Delta\rho^2} = g^{\varphi t} \quad (3.75)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta\rho^2 \sin^2 \theta} \quad (3.76)$$

Osservazione 3.4.3 (Caratteristiche della metrica). Possiamo notare che per $r \rightarrow \infty$ la metrica si riduce alla metrica di Schwarzschild in coordinate polari, pertanto lo spaziotempo di Kerr risulta asintoticamente piatto. [5]

Inoltre lo spaziotempo di Kerr dipende dai parametri m e a , che ci permettono di classificare la soluzione in tre categorie: "slow Kerr" se $0 < a^2 < m^2$; "extreme Kerr" se $a^2 = m^2$; "fast Kerr" se $a^2 > m^2$. [12]

Nel primo caso, l'unico oggetto di analisi in questo lavoro, se $a \rightarrow 0$, la metrica si riconduce nuovamente alla quella di Schwarzschild.

Osserviamo inoltre che tutte le componenti sono indipendenti dalla variabile tempo t , da cui si deduce che è stazionario, e sono indipendenti dalla variabile φ , pertanto risulta simmetrico rispetto all'asse.

Infine è invariante per trasformazioni simultanee date da $t \rightarrow -t$ e $\varphi \rightarrow -\varphi$, ma non lo è per tali trasformazioni prese singolarmente. In particolare dunque non è statico, per $a \neq 0$: invertendo il tempo di un oggetto rotante si produce una rotazione in senso opposto [2].

Osservazione 3.4.4 (Le singolarità). Le componenti della metrica presentano due situazioni critiche, una in $\rho = 0$ e una in $\Delta = 0$, dallo studio delle quali emergono altre peculiarità geometriche e fisiche che descrivono lo spaziotempo di Kerr.

Innanzitutto si noti che

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.77)$$

In questo caso si può verificare che si tratta di una effettiva singolarità della curvatura perché lo scalare di Kretschmann $K := R_{abcd}R^{abcd}$ per questi valori diverge: [5]

$$K := R_{abcd}R^{abcd} = 48 \frac{m^2}{\rho^{12}} (r^6 - 15r^4 a^2 \cos^2 \theta - a^6 \cos^6 \theta) \quad (3.78)$$

che per $\theta = \frac{\pi}{2}$ vale $K = \frac{48m^2}{r^6}$, pertanto diverge per $r \rightarrow 0$.

Invece, nel caso in cui $\Delta = 0$, si può verificare che si tratta di una singolarità apparente, determinata dalla scelta delle coordinate.[16] Il valore determinato da

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (3.79)$$

corrisponde a due ipersuperfici

$$r = r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \quad e \quad r = r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2} \quad (3.80)$$

Possiamo descrivere, dunque, lo spaziotempo di Kerr M , nelle coordinate (t, r, θ, φ) , suddividendolo in tre blocchi caratteristici, per ogni $p \in M$:

$$M = I \cup II \cup III \text{ dove } \begin{cases} I = \mathbb{R} \times (r_+, +\infty) \times \mathbb{S}^2 \\ II = \mathbb{R} \times (r_-, r_+) \times \mathbb{S}^2 \\ III = \mathbb{R} \times (-\infty, r_-) \times \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{R} \end{cases} \quad (3.81)$$

con

$$\mathcal{R} = \{p \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 \text{ tali che } r(p) = 0 \text{ e } \theta(p) = \frac{\pi}{2}\} \quad (3.82)$$

\mathcal{R} viene chiamato Ring singularity dello spaziotempo di Kerr: deve questo nome al fatto che le sezioni date da $t = \text{cost.}$ di $\mathcal{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ sono dei cerchi. Nella figura viene rappresentata proprio una sezione $t = \text{cost.}$ di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ nelle coordinate (e^r, θ, φ) , in modo da comprendere anche la regione $r \rightarrow -\infty$, che non risulta esclusa dai range di definizione, raffigurandola in un singolo punto al centro delle sfere. La rappresentazione si basa su un'idea di O'Neill [13].

Analizziamo ora la situazione determinata dalla condizione $\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0$. Per capire cosa rappresentano fisicamente le ipersuperfici $r = r_+$ e $r = r_-$, consideriamo il vettore normale $N = (0, 1, 0, 0)$ a una generica ipersuperficie $r = \text{cost.}$, e indichiamo con n_μ la componente μ -esima rispetto alla base $(\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi)$. [16]

Allora, considerando la matrice inversa nella (3.73), vale:

$$n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2} \quad (3.83)$$

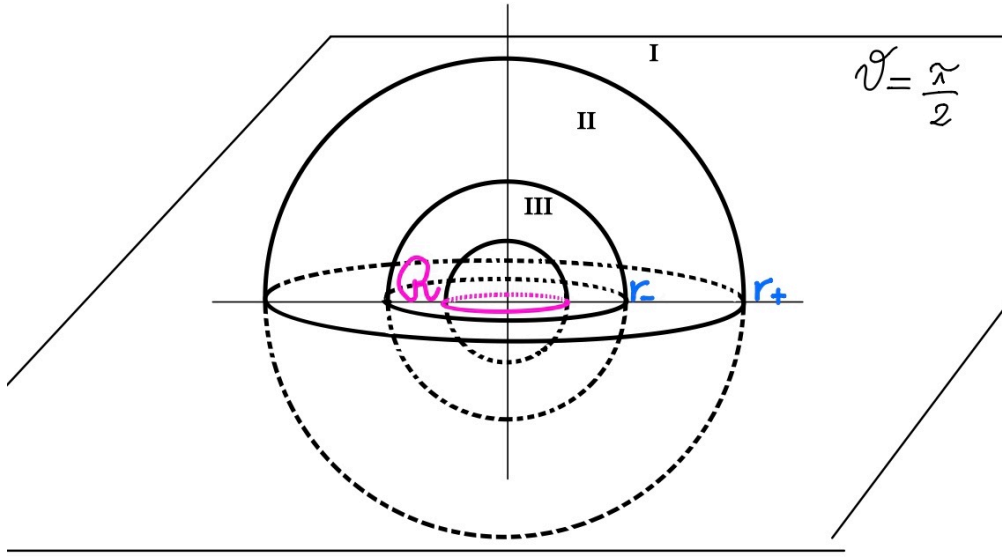


Figura 3.10: Raffigurazione dello spaziotempo di Kerr [13]

Da cui risulta che il vettore normale è nullo per $r = r_+$ e $r = r_-$: pertanto sono due ipersuperfici nulle e rappresentano due orizzonti, detti rispettivamente outer horizon e inner horizon.

Inoltre evidenziamo il carattere particolare che assume il vettore normale alle ipersuperfici $r = \text{cost}$ al variare di r . Avremo infatti tre casi, a seconda del blocco nel quale ci troviamo:

$$I: \Delta = (r - r_+)(r - r_-) > 0 \Rightarrow r > r_+ \Rightarrow g^{rr} > 0$$

Avremo dunque che il carattere causale del vettore normale è di tipo spazio e, in base alla proposizione (1.2.4), questo implica che l'ipersuperficie sia di tipo di tipo tempo. Pertanto in questa regione i vettori causali possono attraversare le ipersuperfici con $r = \text{cost}$ in entrambe le direzioni, cadendo verso il buco nero o allontanandosene.

$$II: \Delta = (r - r_+)(r - r_-) < 0 \Rightarrow r_- < r < r_+ \Rightarrow g^{rr} < 0$$

In questo blocco, con ragionamento analogo al precedente, si ricava che le ipersuperfici $r = \text{cost}$ sono di tipo spazio. Un particella che supera l'orizzonte esterno e entra in questa regione è destinata a non poterne uscire tornando indietro, poiché le ipersuperfici di tipo spazio sono attraversabili in un solo verso.

$$III: \Delta = (r - r_+)(r - r_-) > 0 \Rightarrow r < r_- \Rightarrow g^{rr} > 0$$

Le ipersuperfici $r = \text{cost}$ sono di nuovo di tipo tempo, permettendo di evitare la singolarità, come vedremo nel diagramma di Penrose.

Esempio 3.4.5 (Ergosfera). Abbiamo visto che una particella che supera l'orizzonte esterno è destinata a restare intrappolata. Quello che ci proponiamo di verificare è se l'orizzonte esterno sia proprio il limite stazionario, cioè se si tratti della superficie limite in cui una particella che si muove su una curva di tipo tempo, possa restare in quiete rispetto all'infinito. Indichiamo allora con

$$X(t) = (t, r_0, \theta_0, \varphi_0)$$

la worldline di una particella "ferma" in un punto dello spazio, rispetto a un osservatore all'infinito. [14]

Sia V il vettore tangente alla worldline:

$$V = \frac{dX(t)}{dt} = (1, 0, 0, 0)$$

Allora, affinché si tratti proprio della traiettoria di una particella, deve essere di tipo tempo, ovvero:

$$g(V, V) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = g_{tt} = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) < 0$$

Ricordando che $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ si ottiene:

$$g_{tt} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta > 0 \quad (3.84)$$

Si ricavano altri due valori notevoli di r :

$$r_E^+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.85)$$

$$r_E^- = m - \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.86)$$

Confrontando con r_\pm si ottiene:

$$r_E^-(\theta) \leq r_- \leq r_+ \leq r_E^+(\theta) \quad (3.87)$$

Si noti che per $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, valori che corrispondono all'asse di rotazione, si ha l'uguaglianza.

La superficie r_E^+ corrisponde dunque al limite stazionario nel caso della soluzione di Kerr e non coincide con l'orizzonte degli eventi, tranne in due punti. Si tratta di una superficie di tipo tempo, tranne nei due punti dell'asse, dove è nulla e coincide con $r = r_+$.

Le particelle che si trovino nella regione compresa tra r_E^+ e r_+ , che viene chiamata ergosfera, possono ancora scappare verso l'infinito, pur venendo in parte trascinate nel moto di rotazione del buco nero, come descriveremo nel prossimo esempio.

Mentre, dopo aver attraversato l'orizzonte degli eventi $r = r_+$, restano intrappolate.

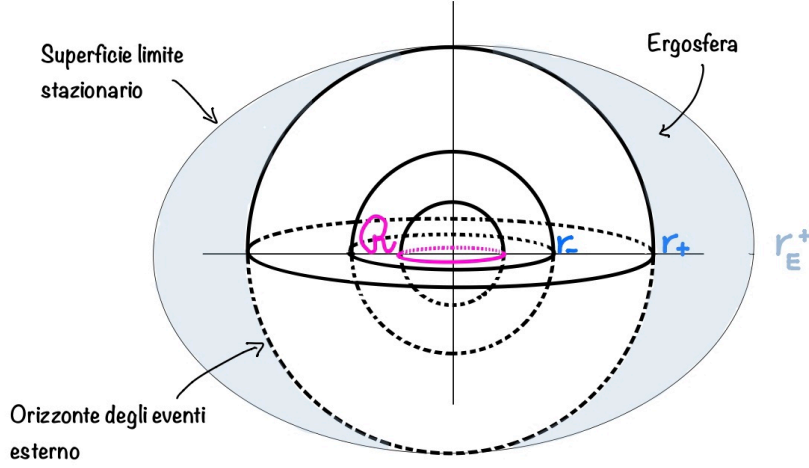


Figura 3.11: Rappresentazione della Ergosfera

Esempio 3.4.6 (Frame dragging). *Un oggetto che si muove all'interno della ergosfera subisce un effetto di trascinamento dovuto al "vortice" gravitazionale causato dalla rotazione del buco nero. È importante notare che si tratta di una condizione presente nello spaziotempo, cioè legata alle caratteristiche intrinseche della metrica di Kerr, non una proprietà peculiare dell'oggetto in movimento.*

Si consideri, per esempio, un moto con r e θ fissati, dunque $dr = 0 = d\theta$. Denotiamo con $\tilde{g} \in GL_{r=c_1, \theta=c_2}$, la metrica definita da:

$$\tilde{g} = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2. \quad (3.88)$$

A questo punto, se scegliamo una particella la cui linea di universo sia indicata con $\gamma : (t, \varphi) \mapsto (t, \varphi(t))$, possiamo calcolare $\tilde{g}(\gamma_*, \gamma_*)$ attraverso la (3.88). Infatti ponendo $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, si ha che $\gamma_* = (1, \omega)$ e pertanto risulta:

$$\tilde{g}(\gamma_*, \gamma_*) = (1, \omega) \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{\varphi t} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} = g_{tt} + 2g_{t\varphi}\omega + g_{\varphi\varphi}\omega^2 \quad (3.89)$$

Ricordando che la linea di universo di una particella deve essere una curva di tipo tempo, si ricava una condizione sui valori della velocità angolare ω : [15]

$$\omega_- < \omega < \omega_+ \quad (3.90)$$

$$\omega_{\pm} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \quad (3.91)$$

Nella ergosfera, con $r < r_E^+$ e $\Delta > 0$, si ha che $\omega > 0$ e pertanto tutti i corpi co-ruotano con il buco nero nella stessa direzione: per verificarlo, esplicitiamo il valore di ω nel caso di un osservatore che cada lungo una geodetica radiale con momento angolare nullo rispetto ad un osservatore distante.

Indichiamo con $(u^t, u^r, u^\theta, u^\varphi)$ la sua quadrivelocità all'infinito e con $L = u_\varphi$ il suo momento angolare. [16].

Rispetto alla metrica della matrice (3.69) si deduce dunque che:

$$0 = L = u_\varphi = g_{\varphi\varphi}u^\varphi + g_{\varphi t}u^t \quad (3.92)$$

Allora la velocità angolare dell'osservatore con momento angolare uguale a zero (chiamato Zamo zero angular moment observers [15]) corrisponde a

$$\begin{aligned} \omega_{Zamo} &= \frac{u^\varphi}{u^t} = -\frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} = \\ &= +\frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\rho^2}{\sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2mra}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Ricordando che $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$, si noti che

$$(r^2 + a^2)^2 > a^2 \sin^2 \theta (r^2 - 2mr + a^2) \quad (3.94)$$

Allora $\frac{\omega}{ma} > 0$ ovvero velocità angolare dell'osservatore e momento angolare del buco nero hanno lo stesso segno, dunque ruotano concordemente. [16]

Infine osserviamo che per $r = r_+$ e $\Delta = 0$ la velocità angolare ottenuta è costante. Per questo motivo si dice che il buco nero ruota rigidamente con velocità angolare Ω_{BH} .

$$\omega = \frac{2mr_+a}{((r_+)^2 + a^2)^2} = \Omega_{BH} \quad (3.95)$$

Allora, dalla (3.80):

$$(r - m)^2 = m^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad 2mr_+ = r_+^2 + a^2$$

e quindi:

$$\Omega_{BH} = \frac{a}{(r_+)^2 + a^2} \quad (3.96)$$

Esempio 3.4.7 (Oltre la singolarità). Ci proponiamo ora di analizzare matematicamente quel che potrebbe risultare in questa metrica superando la singolarità, passando nel mezzo dell'anello che la rappresenta, ovvero per valori di r che possono tendere a $-\infty$.

Per farlo utilizziamo le coordinate (\bar{t}, x, y, z) che si chiamano coordinate di Kerr-Schild. In queste coordinate la metrica assume la seguente forma:[2]

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -d\bar{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \\
 & + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left(\frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\bar{t} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{3.97}$$

dove r è definito implicitamente dalla seguente:

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0
 \tag{3.98}$$

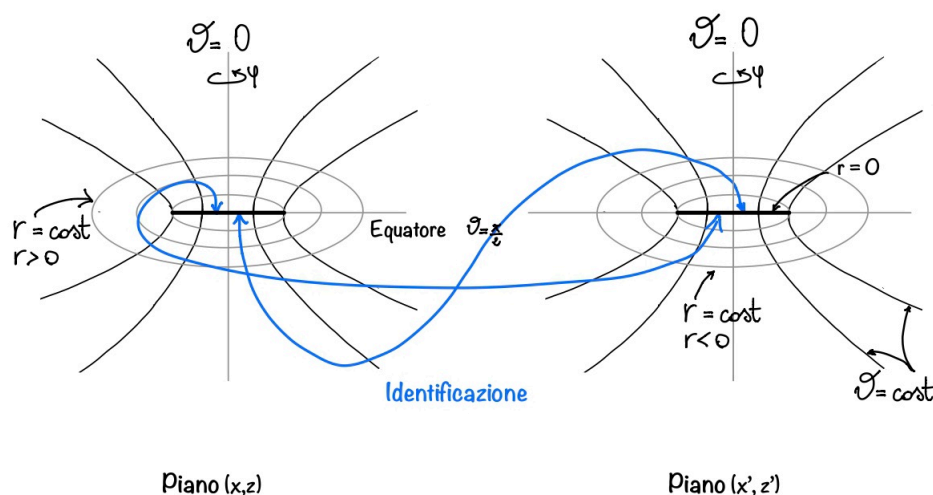


Figura 3.12: La figura rappresenta le sezioni $y = 0$ e $y' = 0$ dei due piani (x, y, z) e (x', y', z')

Allora per $r \neq 0$ le superfici $r = cost$ sono ellissoidi cofocali nel piano (x, y, z) .

Mentre la metrica degenera in $r = 0$ e l'anello

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad z = 0
 \tag{3.99}$$

rappresenta la singolarità effettiva della curvatura.

Tuttavia si può notare che la funzione r non presenta restrizioni matematiche per valori negativi all'interno del disco, $x^2 + y^2 < a^2$, $z = 0$, il cui bordo,

esclusivamente, è la singolarità.

Allora l'idea è quella di "incollare" un altro piano nelle coordinate (x', y', z') , identificando ogni punto della parte inferiore del disco nel piano (x, y, z) con il corrispondente punto della parte superiore del disco in (x', y', z') e viceversa. La metrica "estesa" risulta ancora nella forma espressa in (3.69) ma con valori sia positivi che negativi di r .

Come in [9], vogliamo sottolineare che questo secondo piano non ha nulla a che vedere con quello presente all'uscita del ponte di Einstein-Rosen: non si tratta di un possibile altro universo, ma di una costruzione matematica che potrebbe descrivere per $r \rightarrow -\infty$ il comportamento in caso di massa "negativa". Mentre i due fogli che rappresentano i due universi, collegati dal wormhole, essendo isometrici, descrivono entrambi la geometria nel caso di massa positiva.

3.4.1 Diagramma di Penrose della soluzione di Kerr

Attraverso una serie di trasformazioni di coordinate, che portano alla loro compattificazione, è possibile costruire la rappresentazione nel diagramma di Penrose della massima estensione della soluzione di Kerr, si veda [9], con un procedimento analogo a quello esaminato per la soluzione di Minkowski e per quella di Schwarzschild.

Presentiamo un'analisi qualitativa del risultato finale, come in [8], osservando che la richiesta di estendere tutte le geodetiche causali, che non colpiscono la singolarità, comporti il fatto che sia necessario incollare un numero infinito di copie dello spaziotempo di Kerr.

La prima trasformazione riguarda le coordinate di Eddington-Finkelstein, analogamente al caso della metrica di Schwarzschild:

$$\begin{cases} v := t + r + \sigma_+ \log |r - r_+| - \sigma_- \log |r - r_-|, \\ u := t - r - \sigma_+ \log |r - r_+| + \sigma_- \log |r - r_-|, \end{cases} \quad (3.100)$$

dove, seguendo la notazione in [9], i valori σ_{\pm} sono dati da:

$$\sigma_{\pm} = \frac{r_{\pm}^2 + a^2}{r_+ - r_-} = \frac{mr_{\pm}}{\sqrt{m^2 - a^2}} \quad (3.101)$$

A questo punto occorre riscalarare per superare le singolarità apparenti in $r = r_+$ e in r_- : a differenza della soluzione di Schwarzschild, in questo caso gli orizzonti sono due e pertanto si avranno due differenti trasformazioni:

- Nel primo caso, regolarizzando rispetto a r_+ , si usa il seguente cambio:

$$\begin{cases} \tilde{v} := \exp\left(\frac{v}{2\sigma_+}\right) = \frac{|r-r_+|^{\frac{1}{2}}}{|r-r_-|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{r+t}{2\sigma_+}}, \\ \tilde{u} := -\exp\left(-\frac{u}{2\sigma_+}\right) = -\frac{|r-r_+|^{\frac{1}{2}}}{|r-r_-|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{r-t}{2\sigma_+}}, \end{cases} \quad (3.102)$$

dove

$$\nu = \frac{\sigma_-}{\sigma_+} = \frac{r_-}{r_+} > 1. \quad (3.103)$$

Infine, reintroducendo le coordinate relative al tempo e allo spazio, si ottiene:

$$\begin{cases} \tilde{t} = \frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u}) \\ \tilde{r} = \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u}) \end{cases} \quad (3.104)$$

che porta a

$$\tilde{r}^2 - \tilde{t}^2 = \tilde{v}\tilde{u} = \frac{|r-r_+|}{|r-r_-|^\nu} e^{\frac{r}{\sigma_+}} \quad (3.105)$$

- Nel secondo caso si opera in modo simile rispetto a r_- , usando:

$$\begin{cases} \tilde{v} := -\exp\left(-\frac{v}{2\sigma_-}\right), \\ \tilde{u} := \exp\left(\frac{u}{2\sigma_-}\right) \end{cases} \quad (3.106)$$

si ottiene

$$(\tilde{r})^2 - (\tilde{t})^2 = \frac{|r-r_-|}{|r-r_+|^{\frac{1}{\nu}}} e^{-\frac{r}{\sigma_-}} \quad (3.107)$$

Si osservi che nella fig. 3.13 le regioni *I*, *II* e *III* sono assemblate a dare la rappresentazione nel caso di un buco nero; si noti che le geodetiche nulle entranti sono complete, ma non lo sono le geodetiche nulle uscenti. Viceversa nella fig. 3.14, dove risultano complete quelle uscenti ma non quelle entranti: questo assemblaggio raffigura il caso di un buco bianco.

Incollandolo infinite volte fra loro queste rappresentazioni, si ottiene la massima estensione analitica dello spaziotempo di Kerr in fig. 3.15.

Le curve di tipo luce sono anche qui rappresentate con linee a $\pm 45^\circ$. Le ipersuperfici $r = \text{cost.}$ sono disegnate con curve iperboliche tratteggiate,

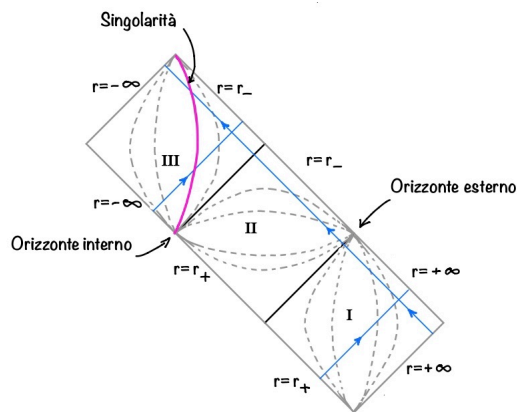


Figura 3.13: Rappresentazione della soluzione di Kerr nel caso di buco nero

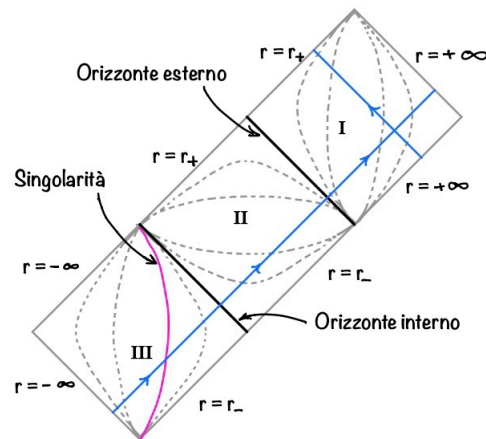


Figura 3.14: Rappresentazione della soluzione di Kerr nel caso di buco bianco

tranne nei casi particolari, sono di tipo tempo nelle regioni *I* e *III*, mentre sono di tipo spazio in *II*.

Si noti che, nella rappresentazione complessiva, raffigurata in fig. 3.15, un osservatore proveniente dalla regione *I*, che superi la regione *II* e giunga nella regione *III*, oltre la singolarità, potrebbe raggiungere lo spaziotempo asintoticamente piatto verso valori di $r \rightarrow -\infty$ o potrebbe, attraverso una copia della regione *II*, raggiungere un'altra copia della regione *I*, isometrica a quella di partenza e asintoticamente piatta per $r \rightarrow \infty$. Questo procedimento si potrebbe reiterare infinite volte. Tuttavia la descrizione equivale alle condizioni che si potrebbero avere in un buco nero "eterno", che non ha significato da un punto di vista astronomico, ossia per un buco nero creato da un collasso gravitazionale.

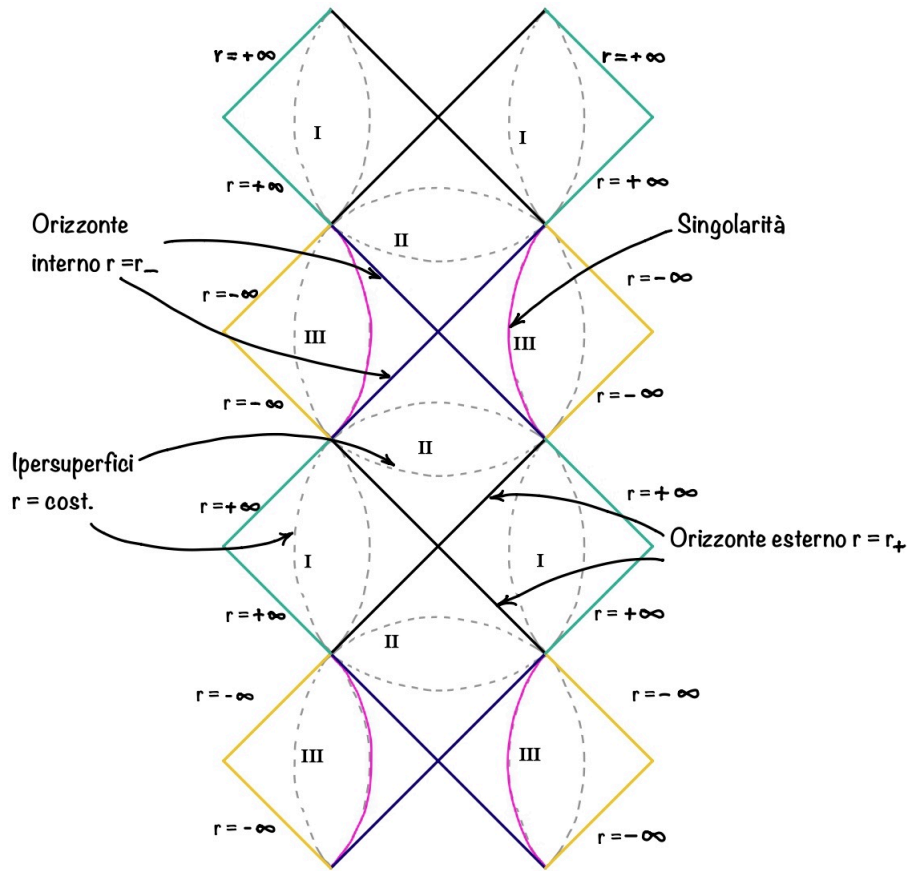


Figura 3.15: La massima estensione analitica della soluzione di Kerr

Osservazione 3.4.8 (Carter time machine). Consideriamo il vettore $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ e osserviamo quale carattere causale assume al variare di r .
Calcolando

$$g(\partial_\varphi, \partial_\varphi) = g_{\varphi\varphi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta \quad (3.108)$$

si verifica facilmente che si tratta di un valore positivo, dunque di un vettore di tipo spazio sulle regioni I e II dello spaziotempo di Kerr.

Tuttavia per piccoli valori di r , negativi, vicini alla singolarità, può assumere carattere di tipo tempo. In questo modo i cerchi ($t = \text{cost}, r = \text{cost}, \theta = \text{cost}$) potrebbero essere curve di tipo tempo chiuse, [2], infatti per:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ e per } r < 0 \text{ t.c. } 2a^2m|r| > r^2(r^2 + a^2) \Rightarrow g_{\varphi\varphi} < 0 \quad (3.109)$$

La regione entro cui si realizza questa possibilità si chiama Carter time machine proprio per il fatto che, basandosi sull'esistenza di una curva di

tipo tempo rivolta verso il futuro che va dall'evento p all'evento q , e dunque di un'altra curva di tipo tempo dall'evento q all'evento p , permetterebbe di "tornare indietro nel tempo".

3.5 Lo spaziotempo di Robertson-Walker

Tra le soluzioni esatte alle equazioni di campo di Einstein dedichiamo questa ultima sezione alla metrica di Robertson-Walker che fornisce le basi per lo studio della cosmologia moderna, poiché costituisce una prima rappresentazione delle proprietà su larga scala dell'universo osservabile.

Osservazione 3.5.1. *Per poter costruire un modello cosmologico su larga scala, occorre partire da due assunzioni sulle caratteristiche dell'universo, una supportata dalle evidenze sperimentali basate sulle osservazioni della radiazione cosmica di fondo, l'isotropia, l'altra strettamente collegata alla prima, l'omogeneità. [2]*

- *L'isotropia: L'universo risulta uguale in qualunque direzione lo si osservi, come si deduce dalla definizione 1.4.7.*
- *L'omogeneità spaziale: ogni punto dell'universo su larga scala risulta equivalente a ogni altro punto, cioè esiste un gruppo di isometrie che agisce in modo transitivo e le superfici di transitività sono 3-superfici di tipo spazio.*

Definizione 3.5.2. *La metrica che descrive un universo spazialmente omogeneo e ammette un gruppo di isometrie le cui superfici di transitività sono 3-superfici di tipo spazio a curvatura costante, si chiama metrica di Robertson-Walker.*

Sia $d\sigma^2$ la metrica di un 3-spazio a curvatura costante e indipendente dal tempo, allora la metrica di Robertson-Walker assume la seguente forma: [2]

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)d\sigma^2. \quad (3.110)$$

Osservazione 3.5.3. *Il fatto che le 3-superfici abbiano curvatura positiva, negativa o nulla, determina tre diversi scenari che possono essere espressi, attraverso opportuni riscalamanti della funzione S che normalizzino la curvatura del 3-spazio K , nel seguente modo:*

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \left(d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right) \quad (3.111)$$

dove,

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin^2 \chi & \text{se } K = 1 \\ \chi^2 & \text{se } K = 0 \\ \sinh^2 \chi & \text{se } K = -1. \end{cases}$$

Nel primo caso la metrica delle 3-superfici corrisponde alla metrica su \mathbb{S}^3 , nel secondo caso alla metrica Euclidea piatta, nell'ultimo caso a quella su un iperboloide.

Osservazione 3.5.4. Nelle usuali coordinate (t, r, θ, φ) possiamo riscrivere la metrica come:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(dr^2 + \Sigma_K^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (3.112)$$

con

$$\Sigma_K(r) = \begin{cases} \sin r & \text{se } K = 1 \\ r & \text{se } K = 0 \\ \sinh r & \text{se } K = -1. \end{cases}$$

Abbiamo indicato con $a(t)$ quello che viene comunemente chiamato il fattore di scala e che indica quanto è "spessa" la fetta spaziale Σ al tempo t . [19]

Considerando il tempo conforme τ , definito implicitamente da

$$d\tau = \frac{dt}{a}, \quad (3.113)$$

si trova l'espressione della metrica conforme allo spaziotempo statico con curvatura costante: [10]

$$ds^2 = a^2(\tau) \left(-d\tau^2 + dr^2 + \Sigma_K^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \quad (3.114)$$

Osservazione 3.5.5 (Le singolarità). Lo studio delle singolarità nella soluzione di Robertson-Walker conduce all'analisi delle possibili sorti cosmologiche dell'universo. A partire da una fase di singolarità iniziale chiamata Big Bang si ipotizzano diversi finali: quello che viene chiamato Big Rip è relativo all'ipotesi di un universo che stia accelerando la sua velocità di espansione; mentre la fase di singolarità che viene chiamata Big Crunch è relativa all'ipotesi in cui l'universo raggiunga un punto di massima espansione per poi collassare su sè stesso.

La simmetria della soluzione di Robertson-Walker porta al fatto che il tensore energia momento abbia la forma di un fluido perfetto, pensato come approssimazione liscia della materia dell'universo con densità ρ e pressione p funzioni del tempo. [2] Se definiamo il parametro di Hubble con

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.115)$$

allora possiamo scrivere l'equazione della conservazione dell'energia in questo modo:

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho)H = 0. \quad (3.116)$$

Mentre l'equazione di Friedmann può essere scritta nella forma seguente:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{K}{a^2}. \quad (3.117)$$

A questo punto scegliamo come equazione di stato, la relazione tra p e ρ a cui obbediscono prevalentemente tutti i fluidi perfetti rilevanti per la cosmologia, data da: [19]

$$p = \omega\rho \quad (3.118)$$

e integriamo l'equazione (3.116), ottenendo:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}. \quad (3.119)$$

Allora possiamo riscrivere la (3.117):

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)} - \frac{K}{a^2} \quad (3.120)$$

Ne risulta che le singolarità sono di due tipi e determinate dai seguenti valori:

- (A1) t si avvicina a un qualche valore finito da sopra, per il quale $a \rightarrow 0$, $|\rho| \rightarrow \infty$ e $H \rightarrow \infty$: singolarità corrispondente al Big Bang.
- (A2) t si avvicina a un qualche valore finito da sotto, per il quale $a \rightarrow 0$, $|\rho| \rightarrow \infty$ e $H \rightarrow \infty$: singolarità corrispondente al Big Crunch.
- (B1) t si avvicina a un qualche valore finito da sopra, per il quale $a \rightarrow \infty$, $|\rho| \rightarrow \infty$ e $H \rightarrow \infty$: singolarità corrispondente al Big Rip nel futuro.
- (B2) t si avvicina a un qualche valore finito da sotto, per il quale $a \rightarrow \infty$, $|\rho| \rightarrow \infty$ e $H \rightarrow \infty$: singolarità corrispondente al Big Rip nel passato.

3.5.1 Diagrammi di Penrose della soluzione di Robertson-Walker

Lo studio dei diagrammi di Penrose per questa soluzione presenta diverse rappresentazioni a seconda delle assunzioni che si possono fare sui parametri che ne descrivono la metrica. Per esempio, nel caso $K = -1$, la metrica può essere scritta nella forma:

$$ds^2 = a^2(\tau) \frac{-d\tau'^2 + dr'^2 + \sin^2 r' d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}{\cos(r' + \tau') \cos(r' - \tau')}, \quad (3.121)$$

dove

$$\begin{cases} \tan \tau' = \frac{\sinh \tau}{\cosh r} \\ \tan r' = \frac{\sinh r}{\cosh \tau} \end{cases}$$

e la figura seguente rappresenta il caso di $\omega > -\frac{1}{3}$.

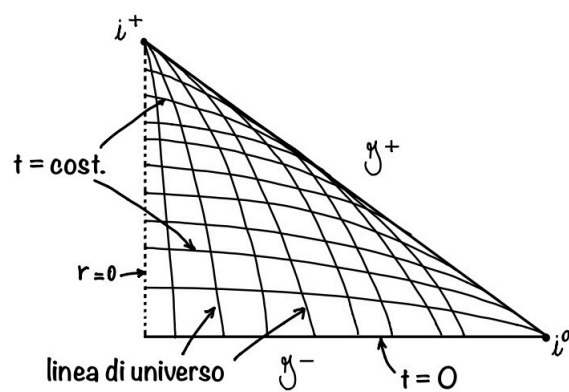


Figura 3.16: Il diagramma di Penrose per la soluzione di Robertson Walker

Bibliografia

- [1] SACHS, R.K. e WU, H. (1977). *General Relativity for Mathematicians*. Springer-Verlag.
- [2] HAWKING, S.W. e ELLIS, G.F.R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press.
- [3] DE FELICE, F. e CLARKE, C.J.S. (1992). *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge University Press.
- [4] MISNER, C.W. e THORNE, K.S. e WHEELER J.A.(1970). *Gravitation*. W.H. Freeman and Company.
- [5] GOURGOULHON, E. (2020). *Geometry and Physics of Black Holes*. Université Paris Sciences et Lettres.
- [6] SCHUTZ, B. F. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press.
- [7] WALDYR ALVES RODRIGUES, Jr. e CAPELAS DE OLIVEIRA, E. (2007). *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equation*. Springer.
- [8] HEINICKE, C. e HEHL, F. W. (2015). *Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation - an introduction-*. Published Int. J. Mod. Phys. D 24 (2015), DOI: 10.1142/S0218271815300062.
- [9] BOYER, R. H. e LINDQUIST, R. W. (1967). *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric*. Published Journal Math. Phys. 8, 265 (1967), DOI: 10.1063/1.1705193.
- [10] HARADA, T. e CARR, B. J. e IGATA, T. (2018). *Complete conformal classification of the FLRW solution with a linear equation of state*. arXiv:1801.01966v2.
- [11] ANDERSSON, L. e BÄCKDAHL, T. e BLUE, P. (2016). *Geometry of Black Hole Spacetimes*. arXiv:1610.03540v1.

-
- [12] HOANG, A.T.N. (2017). *Geometry of The Kerr Black Holes*. University of Chicago.
- [13] O'NEILL, B. (1995). *The Geometry of The Kerr Black Holes*. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts.
- [14] VISSER, M. (2007). *The Kerr Spacetime: A brief Introduction*. arXiv:0706.0622v3.
- [15] FROLOV, V. NOVIKOV, I. D. (1997). *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Springer.
- [16] GUALTIERI, L. e FERRARI, V. (2011). *Black Holes in General Relativity*. Università degli studi di Roma "Sapienza".
- [17] STROMINGER, A. (2015). *Black Holes from A to Z*. Lecture notes from Professor Andrew Strominger's course given in Spring 2015, at Harvard University.
- [18] *Lecture Note on General Relativity*. (2013). Lecture notes from course given in January 2013, at Columbia University.
- [19] *Lecture Notes on General Relativity*. (1997). Lectures from Sean M. Carroll available online at <https://ned.ipac.caltech.edu>.
- [20] *Lectures on Black Holes*. (2015). Lectures from WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light, available online at <https://youtu.be/7VJzouE9rNE>.
- [21] *Lectures on Schwarzschild Black Hole*. (2017). Lectures from Professor Neil Turok's course, available online at <https://youtu.be/4PI4jI6sxb8>.