



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La statistica dei fotoni della radiazione cosmica di
fondo

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Correlatore

Dr. Antonello Ortolan

Correlatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Marco Toffoli

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione	1
1 La radiazione cosmica di fondo a microonde	2
1.1 La metrica FLRW	3
1.2 L'origine della radiazione cosmica	4
1.2.1 Perché uno spettro di Planck?	5
2 I fotoni e le caratteristiche della radiazione termica	8
2.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico	8
2.1.1 Stati di Fock	11
2.2 Proprietà statistiche della radiazione termica	12
3 Correlazioni spaziali e temporali della CMB	14
3.1 Funzioni di correlazione classiche	15
3.2 Funzioni di correlazione quantistiche	16
3.3 Funzioni $g^{(1)}$ e $g^{(2)}$ per fotoni termici	17
3.3.1 Calcolo di $g^{(1)}$	17
3.3.2 Calcolo di $g^{(2)}$	19
4 Misura della funzione $g^{(2)}(\tau)$ per la CMB	21
4.1 Interferometria HBT	23
4.2 Rivelazione di singoli fotoni alle microonde	25
Conclusioni	27

Introduzione

La cosmologia, intesa in senso ampio come la riflessione umana sull'organizzazione, l'origine e la natura di tutto ciò che esiste, è vecchia quanto la storia dell'uomo. I primi reperti, che mostrano come la nostra specie si sia sempre interessata a tali questioni, risalgono a più di 20 mila anni fa. In questo contesto, la cosmologia non era tanto una scienza empirica quanto più una visione del mondo che cercava di dare significato all'esistenza umana e alla sua relazione con l'universo attraverso miti e leggende. Tuttavia, nel corso del tempo, questa ha evoluto il suo status da riflessione filosofica e religiosa a scienza vera e propria. L'emergere del metodo scientifico e l'avanzamento delle osservazioni astronomiche hanno consentito agli scienziati di sviluppare teorie più rigorose, basate sull'evidenza, per spiegare l'architettura dell'universo. La rivoluzione copernicana, con la teoria eliocentrica di Nicola Copernico, fu una pietra miliare nel passaggio della cosmologia da speculazione filosofica a disciplina scientifica.

Essa è rimasta una scienza descrittiva fino al secolo scorso, quando hanno cominciato a svilupparsi teorie rigorose e strumenti di misura sempre più precisi. Negli ultimi decenni i modelli hanno acquisito una marcata capacità predittiva e la mole di dati ottenuta dagli strumenti moderni è così grande che solo una parte di essi può essere analizzata.

Una delle scoperte più importanti è sicuramente stata la radiazione cosmica di fondo, CMB ("Cosmic Microwave Background"), grazie alla quale alcune idee, che prima potevano essere classificate solo come congetture, sono state promosse ad ipotesi scientifiche.

In questa tesi viene trattato un aspetto specifico di questa radiazione, ovvero le correlazioni che sussistono tra i fotoni che la compongono.

Il primo capitolo si concentra sulle caratteristiche principali della CMB quali la sua formazione, avvenuta durante i primi istanti della vita dell'universo, e il suo aspetto attuale, dopo che ha viaggiato per miliardi di anni attraversando l'intero spazio cosmico.

Il secondo capitolo mira a costruire un formalismo adatto alla sua descrizione: dopo aver ricavato l'Hamiltoniana che regola il comportamento del campo elettromagnetico, vengono studiate le proprietà statistiche di quella che è detta radiazione di corpo nero, che è la radiazione prodotta da un sistema in equilibrio termico.

Il terzo capitolo introduce le funzioni di correlazione di primo e secondo ordine, che rappresentano gli strumenti principali per poter esaminare come le correlazioni di questa radiazione varino nello spazio e nel tempo. Dopo aver presentato sia la loro formulazione classica che quella quantistica, quest'ultima viene calcolata specificamente per la CMB.

Infine, l'ultimo capitolo si propone di offrire un'idea di come tali funzioni possano essere misurate sperimentalmente e delle sfide che possono emergere quando il campo analizzato si colloca nella gamma delle microonde.

Capitolo 1

La radiazione cosmica di fondo a microonde

La radiazione cosmica di fondo è una radiazione elettromagnetica che permea l'intero spazio in maniera omogenea e quasi completamente isotropa, con una distribuzione in frequenze tipica di un corpo nero a temperatura $T_0 \simeq 2.7K$.

La scoperta è avvenuta diversi anni dopo la sua teorizzazione: nel 1948 Ralph Alpher, Robert Herman e George Gamow pubblicarono il famoso articolo " $\alpha - \beta - \gamma$ " sulla sintesi primordiale dei primi elementi, in cui ipotizzarono una radiazione cosmica di fondo che, secondo i loro calcoli, doveva avere lo spettro di un corpo nero ad una temperatura di 10 K [1]. Sempre nel 1948 Dicke raggiunge indipendentemente conclusioni simili assumendo un universo chiuso e oscillante. Nel 1953 Gamow raffinò i calcoli stimando una temperatura di 7 K [2]. Dal 1953 in poi altri scienziati pubblicarono stime simili, tutte comprese tra i 3 e i 50 K.

La prima rivelazione avvenne per caso nel 1965, quando Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson rivelarono un eccesso di rumore nell'antenna del proprio radiometro osservando ad una lunghezza d'onda di $7.35cm$. Tale rumore corrispondeva ad una temperatura di circa 3.3 K ed era uniforme in tutte le direzioni [3]. Successive analisi confermarono che si trattava della radiazione cosmica.

In realtà ci furono altre misurazioni prima di questa: Andrew McKellar nel 1940, osservando la popolazione di stati rotazionali eccitati delle molecole di cianogeno nelle linee di assorbimento interstellari, concluse che fossero coerenti con l'idea di un equilibrio termico a temperatura di 2.3 K [4]. Anche Walter Adams effettuò misurazioni simili nel 1941 [5]. Questi risultati non furono adeguatamente approfonditi sia a causa dell'inizio della seconda guerra mondiale, sia perché mancava ancora una solida base teorica per interpretarli. Nel 1955, Emile Le Roux effettuò una misurazione su tutta la sfera celeste ad una lunghezza d'onda di 33 cm, trovando un'emissione isotropa corrispondente ad una temperatura di corpo nero di $T = 3 \pm 2$ K [6]. Indipendentemente due anni dopo, T.A. Shmaonov osservò un segnale a $3.2cm$ corrispondente ad una temperatura di corpo nero di 4 ± 3 K [7]. Anche se probabilmente si trattava in entrambi i casi del fondo a microonde, questi risultati passarono pressochè inosservati.

Dalla scoperta ad oggi sono state fatte molte altre misurazioni che hanno permesso di arrivare ad una stima finale pari a $T_0 = 2.725 \pm 0.001$ K. COBE, WMAP e Planck sono le tre più importanti missioni spaziali che hanno permesso di mappare con sempre più grande precisione quelle che sono dette anisotropie, cioè le deviazioni da questa temperatura media in diverse direzioni spaziali. In Fig. 1.1 è riportata l'ultima mappatura effettuata dal satellite Planck, le deviazioni

da T_0 sono dell'ordine di $2.5\mu K$.

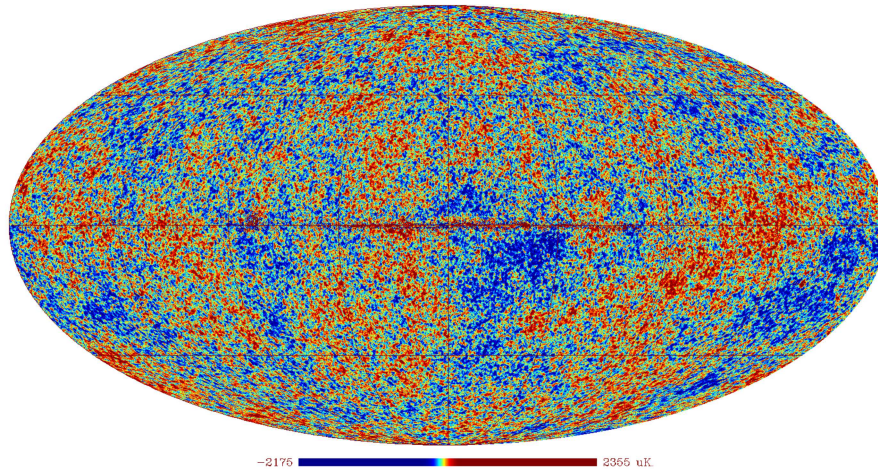


Figura 1.1: Mappatura delle anisotropie della radiazione cosmica a microonde effettuata dal satellite Planck [8]. La differenza di temperatura tra le zone rosse e quelle blu è inferiore a $5\mu K$. Crediti immagine: [9].

1.1 La metrica FLRW

Per comprendere l'origine e le caratteristiche di questa radiazione è necessario introdurre alcuni concetti chiave della cosmologia.

Il **principio copernicano** sostiene che non esista una posizione privilegiata nell'universo. Questo principio ha avuto un impatto profondo sulla nostra comprensione del cosmo in quanto rappresenta un cambio di paradigma rispetto a quello fornito dal sistema Tolemaico. Richiedendo in aggiunta l'isotropia dello spazio otteniamo quello è detto **principio cosmologico**: l'universo è omogeneo e isotropo, ovvero il suo aspetto generale non dipende dalla posizione dell'osservatore e dalla direzione di osservazione. Questo principio è considerato valido solo su grande scala, dell'ordine di 200-300Mpc, poiché a scale minori vediamo variazioni locali, come la distribuzione delle galassie in ammassi o filamenti.

L'**espansione dell'universo** è un elemento cardine della cosmologia moderna e implica che, in passato, l'universo fosse più piccolo e più denso. Questo effetto venne misurato da Edwin Hubble nel 1929 ed è quantitativamente espresso dalla legge di Hubble-Lemaitre che mette in relazione la velocità di allontanamento delle galassie con lo spostamento verso il rosso della loro frequenza di emissione. L'espansione sembra essere uniforme e questo permette di definire un **sistema di riferimento comovente** cioè un sistema in cui le sorgenti gravitazionali (materia ed energia) sono, in media, in quiete. I movimenti tra oggetti astronomici dovuti all'espansione dell'universo sono nulli in questo sistema e in esso si evidenziano solo gli spostamenti dovuti alle velocità peculiari dei singoli oggetti.

Queste considerazioni portano a concludere che lo spazio-tempo del nostro universo debba essere invariante per traslazioni e rotazioni spaziali. Si può dimostrare che l'unica metrica, soluzione delle equazioni di Einstein, che genera un tale spaziotempo è quella detta di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) rappresentata dal seguente elemento di linea:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right) \quad (1.1.1)$$

dove r è una coordinata spaziale adimensionale;

$d\Omega$ è l'elemento di angolo solido, definito come $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$;

$a(t)$ è detto fattore di scala, ha le dimensioni di una lunghezza ed è il parametro che tiene in considerazione la velocità di espansione dell'universo. E' legato al parametro di Hubble dall'equazione:

$$H_o = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.1.2)$$

mentre k è una costante che parametrizza la curvatura spaziale: a seconda del suo segno si parla di curvatura positiva o negativa, mentre se $k = 0$ ci si sta riferendo ad un universo piatto. La curvatura, se presente, ci dà informazioni anche sulla struttura globale dell'universo FLRW: $k > 0$ implica un universo chiuso (se si mostrasse che è anche semplicemente connesso si potrebbe concludere che tale universo sia omeomorfo ad una *3-sfera*), mentre se $k < 0$ l'universo dovrà essere necessariamente aperto.

E' importante osservare che introducendo una nuova coordinata η , detta **tempo conforme**, e definita dalla relazione:

$$a(\eta)d\eta = dt, \quad a(\eta) := a(t(\eta)), \quad (1.1.3)$$

possiamo riscrivere l'elemento di linea della metrica FLRW come:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(c^2 d\eta^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right) \right) \quad (1.1.4)$$

e vediamo che, nel caso di universo piatto ($k = 0$), vale la relazione:

$$ds_{FLRW}^2 = a^2(\eta) ds_M^2 \quad (1.1.5)$$

dove ds_M^2 è la metrica di Minkowski.

Questo tipo di trasformazione è detto **trasformazione conforme**. Le trasformazioni conformi modificano localmente la scala dello spazio-tempo e, di conseguenza, le distanze e i tempi propri tra due eventi cambiano. Tuttavia, gli angoli sono preservati e, in particolare, la relazione causale tra due eventi non viene modificata da una tale trasformazione. Questa proprietà è importante perchè ci permette di effettuare tutti i conti come se ci trovassimo in un universo statico e piatto, a patto poi di riscaldare ogni risultato mediante $a(\eta)$.

1.2 L'origine della radiazione cosmica

La nostra comprensione attuale dell'intera storia dell'universo è basata sulla teoria del Big Bang. Questa teoria, anche se presenta ancora alcune criticità, è ampiamente supportata da una vasta mole di dati osservativi e fornisce un quadro comprensivo dell'evoluzione dell'universo a partire da un punto in cui le energie coinvolte erano sufficientemente basse da consentire l'applicazione delle attuali conoscenze della fisica. È importante notare che la teoria del Big Bang non è stata

concepita per spiegare l'origine stessa dell'universo, ma piuttosto per delinearne l'evoluzione nel corso del tempo.

La materia barionica, costituita oggi da protoni e neutroni, si è formata in un periodo detto **bariogenesi**, circa 1 secondo dopo il Bang Bang; in questo periodo l'universo era così denso e la temperatura così alta che tutta la materia era in uno stato di plasma. Man mano che l'universo si espandeva la temperatura diminuiva, arrivando a $T = 3600K$ in un periodo detto **ricombinazione** quando l'universo aveva ormai 378000 anni. A questa temperatura i protoni erano in grado di catturare elettroni liberi per formare i primi atomi di idrogeno, ma i fotoni erano ancora abbastanza energetici da ri-ionizzarli. Anche se l'energia di dissociazione dell'idrogeno è di 13.6 eV, il **disaccoppiamento** della radiazione dalla materia non è avvenuto fino a quando l'energia media dei fotoni arrivò a 0.3 eV, ovvero quando la temperatura scese a 3000 K, in quanto l'elevata entropia dell'universo rendeva la velocità di cattura elettronica solo di poco superiore al tasso di ionizzazione. Da questo momento in poi i fotoni sono liberi di diffondersi senza mai più interagire.

1.2.1 Perché uno spettro di Planck?

Come precedentemente accennato la distribuzione in frequenze di questa radiazione è perfettamente compatibile con quella di un corpo nero a temperatura $T_0 = 2.725K$ come si può vedere in Fig. 1.2 dove le misure sperimentali effettuate sia da satelliti che a terra sono sovrapposte alla curva di equazione:

$$I(\nu) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T_0}} - 1} \quad (1.2.1)$$

dove $k_B \simeq 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ è la costante di Boltzmann.

Uno spettro di questo tipo viene prodotto da un sistema quando questo è in uno stato di equilibrio termico. Tuttavia, successivamente al disaccoppiamento, i fotoni non hanno più interagito e man mano che la radiazione ha viaggiato verso di noi l'universo si è espanso, modificandone le caratteristiche.

Assumendo valida la metrica FLRW si può dimostrare che la densità di radiazione evolve nel tempo proporzionalmente all'inverso della quarta potenza del fattore di scala $a(t)$ [10]:

$$\rho_{em} \propto \frac{1}{a^4(t)} \quad (1.2.2)$$

e siccome è noto che la densità di energia elettromagnetica totale è data dall'equazione:

$$\epsilon_{em} = \rho_{em} c^2 = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 \quad (1.2.3)$$

si ottiene immediatamente che

$$T \propto \frac{1}{a(t)}.$$

Dunque, siccome anche la frequenza dell'onda subisce un redshift proporzionale a $\frac{1}{a(t)}$, la distribuzione in frequenza dell'energia della radiazione:

$$\epsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (1.2.4)$$

mantiene la stessa forma all'avanzare del tempo, in quanto al denominatore compare solo il rapporto ν/T che è costante, mentre al numeratore ν^3 scala come l'inverso del volume. Dunque

la distribuzione iniziale a temperatura T_i evolve nel tempo come quella di un corpo nero a temperatura

$$T(t) = T_i \frac{a(t_i)}{a(t)}. \quad (1.2.5)$$

Questo permette di ricondurre lo spettro odierno di corpo nero a temperatura T_f ad un periodo precedente il disaccoppiamento, in cui materia e radiazione si trovavano in equilibrio termico a temperatura T_i .

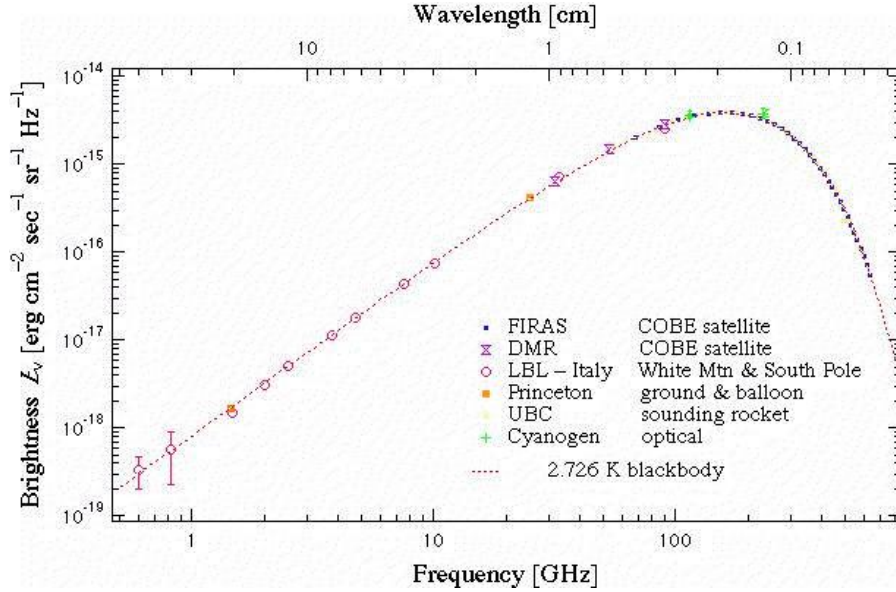


Figura 1.2: Spettro in frequenza dell'intensità della radiazione cosmica di fondo misurato attraverso esperimenti spaziali e terrestri. Sugli assi orizzontali sono riportate in scala logaritmica la frequenza ν e la lunghezza d'onda λ della radiazione, mentre in ordinata è visibile in scala logaritmica l'intensità, rappresentata come un'energia¹ per unità d'area, per secondo, per steradiante per Hz. Crediti immagine: [11].

Esistono tre principali processi attraverso i quali i fotoni interagivano con la materia nei periodi antecedenti il disaccoppiamento. La più semplice interazione tra materia e radiazione è lo scattering Compton di un singolo fotone su un elettrone libero:

$$\gamma + e^- \leftrightarrow \gamma + e^- \quad (1.2.6)$$

se l'elettrone è pressochè a riposo allora il fotone cede durante l'urto parte della propria energia e del proprio impulso; se però l'elettrone è relativistico può avvenire quello che è detto **scattering Compton inverso**: se v è la velocità dell'elettrone, ϑ_i l'angolo tra la direzione del fotone e quella dell'elettrone e $\beta = v/c$, allora nel sistema di riferimento di quest'ultimo (indicato con un apice):

$$E'_{\gamma_i} = \Gamma E_{\gamma}(1 - \beta \cos \vartheta_1) \quad (1.2.7)$$

con Γ il fattore di Lorentz. L'energia del fotone scatterato ad un angolo φ rispetto alla direzione di incidenza nel sistema dell'elettrone è data dall'equazione:

$$E'_{\gamma_f} = \frac{E'_{\gamma_i}}{1 + (E'_{\gamma_i}/m_e c^2)(1 - \cos \varphi)} \quad (1.2.8)$$

¹Dove 1 erg è equivalente a 10^{-7} J.

allora nell'approssimazione in cui $E'_{\gamma_i} \ll m_e c^2$ possiamo riscrivere l'energia del fotone emesso nel sistema del laboratorio come:

$$E_{\gamma_i} \sim \Gamma^2 E_{\gamma} (1 - \beta \cos \vartheta_1)(1 + \beta \cos \vartheta_2) \quad (1.2.9)$$

dove ϑ_2 è l'angolo osservato nel sistema dell'elettrone tra la direzione del fotone emesso e la direzione del sistema del laboratorio. Considerando i processi in cui $\vartheta_1 \sim \vartheta_2 \sim \frac{\pi}{2}$ troviamo che

$$E_{\gamma_f} \sim \Gamma^2 E_{\gamma_i} \quad (1.2.10)$$

pertanto, gli elettroni energetici possono trasferire energia in modo efficace ai fotoni.

La combinazione dei casi in cui il fotone cede energia all'elettrone e viceversa consente allo scattering Compton di portare il sistema all'equilibrio termico.

A temperature superiori a $1keV$ diventa rilevante anche il doppio scattering Compton:

$$\gamma + e^- \leftrightarrow \gamma + e^- + e^- \quad (1.2.11)$$

Infine, a temperature comprese tra $1eV$ e $90eV$ domina quella che è detta bremsstrahlung termica, il processo in cui il campo elettrico di un protone rallenta l'elettrone con conseguente emissione di un fotone:

$$p + e^- \leftrightarrow p + e^- \gamma \quad (1.2.12)$$

Tutti questi tre processi avvengono molto velocemente ed in entrambe le direzioni, consentendo al sistema di raggiungere localmente l'equilibrio termico.

Capitolo 2

I fotoni e le caratteristiche della radiazione termica

Questo capitolo mira ad introdurre il formalismo e le basi teoriche necessarie per poter affrontare da un punto di vista quantistico il problema delle correlazioni tra fotoni termici. Nel primo paragrafo viene ricavata l'Hamiltoniana quantistica del campo elettromagnetico, espressa come somma di oscillatori armonici, ciascuno dei quali è associato ad un modo del campo; successivamente viene introdotto il formalismo degli stati di Fock e viene usato per ricavare le caratteristiche della radiazione emessa da un sistema in equilibrio termico.

2.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico

E' noto dalla teoria classica dell'elettromagnetismo che il campo elettromagnetico può essere descritto attraverso un potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ che, nella gauge di Coulomb, deve soddisfare l'equazione delle onde

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.1)$$

e la condizione di divergenza nulla

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.1.2)$$

Per poter ottenere una soluzione formale di queste equazioni è conveniente esprimere $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in serie di Fourier,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.1.3)$$

dove $L^3 = V$ rappresenta il volume di un cubo di lato L in cui pensiamo sia contenuto il campo elettromagnetico, mentre ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. Chiaramente siamo interessati al caso in cui $L \rightarrow \infty$, ma è più conveniente svolgere i conti prima di passare al limite.

Imponendo le condizioni di annullamento al bordo troviamo che

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi \mathbf{n}}{L}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.4)$$

Allora l'equazione (2.1.2) può essere riscritta come¹

$$\frac{1}{\epsilon_0^{1/2} V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0; \quad (2.1.5)$$

¹dove con $\sum_{\mathbf{k}}$ si sottintende una sommatoria sugli indici interi n_i della forma $\sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3}$.

doendo quest'ultima essere vera per ogni \mathbf{r} , si riduce a

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0. \quad (2.1.6)$$

La condizione (2.1.1) impone che

$$\frac{1}{\epsilon_0^{1/2} V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0 \quad (2.1.7)$$

che anche in questo caso, dovendo valere per ogni \mathbf{r} , assume l'espressione più semplice

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0, \quad (2.1.8)$$

dove abbiamo definito la pulsazione $\omega := \omega_{\mathbf{k}} = ck$; essa è legata alla frequenza dell'onda dalla relazione $\omega = 2\pi\nu$. L'equazione (2.1.8) è un'equazione differenziale classica, la cui soluzione può essere scritta come somma di onde piane

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{c}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t} + \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega t} \quad (2.1.9)$$

e affinché sia soddisfatta anche l'equazione (2.1.6) possiamo decomporre $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ in una base di vettori ortogonali

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=1}^2 c_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \quad (2.1.10)$$

tali da soddisfare le seguenti condizioni:

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} = 0; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2} = \mathbf{k}/k. \quad (2.1.11)$$

I vettori di polarizzazione soddisfano queste condizioni. Di seguito indicheremo con $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ i due versori di base di una generica polarizzazione del modo \mathbf{k} .

Mettendo tutto assieme e definendo $u_{\mathbf{k}s}(t) := c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega t}$ possiamo riscrivere il potenziale vettore come

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left(u_{\mathbf{k}s}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + u_{\mathbf{k}s}^*(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (2.1.12)$$

A questo punto, ricordando che nella gauge di Coulomb il potenziale scalare è nullo, possiamo utilizzare le relazioni

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.13)$$

per esprimere i campi elettrico e magnetico, ottenendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega \left(u_{\mathbf{k}s}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - u_{\mathbf{k}s}^*(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right), \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left(u_{\mathbf{k}s}(t) (\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + u_{\mathbf{k}s}^*(t) (\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (2.1.15)$$

L'energia totale del sistema è espressa come

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] d^3\mathbf{r} \quad (2.1.16)$$

e usando la (2.1.14), la (2.1.15) e ricordando che:

$$\int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3r = V\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^3 \quad e \quad (\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*) \cdot (\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s'}) = |\mathbf{k}|^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s'} = k^2 \delta_{ss'}, \quad (2.1.17)$$

si ottiene per calcolo diretto

$$H = 2 \sum_{\mathbf{k},s} \omega^2 |u_{\mathbf{k}s}(t)|^2. \quad (2.1.18)$$

Per poter procedere alla quantizzazione è necessario riscrivere H in forma Hamiltoniana e per farlo si definiscono le variabili canoniche

$$q_{\mathbf{k}s}(t) := [u_{\mathbf{k}s}(t) + u_{\mathbf{k}s}^*(t)] \quad (2.1.19)$$

$$p_{\mathbf{k}s}(t) := -i\omega[u_{\mathbf{k}s}(t) - u_{\mathbf{k}s}^*(t)] \quad (2.1.20)$$

ottenendo per sostituzione

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} [p_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega^2 q_{\mathbf{k}s}^2(t)] \quad (2.1.21)$$

che non è altro che una somma di Hamiltoniane di singolo oscillatore armonico, uno per ogni \mathbf{k}, s -modo.

A questo punto si applica il procedimento di quantizzazione canonica sostituendo le variabili dinamiche $q_{\mathbf{k}s}(t)$ e $p_{\mathbf{k}s}(t)$ con gli operatori hermitiani $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$ e $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$, i quali soddisfano le relazioni di commutazione:

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0, \quad [\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0, \quad [\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta'_{ss'}. \quad (2.1.22)$$

Per una descrizione in termini di fotoni, è più vantaggioso esprimere l'Hamiltoniana in termini degli operatori, non hermitiani, di creazione e distruzione,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)] \quad \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)] \quad (2.1.23)$$

per i quali si ottengono facilmente le relazioni

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t)] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t)] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta'_{ss'}. \quad (2.1.24)$$

Sostituendo tutto in (2.1.21) si ottiene:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.1.25)$$

Qui è presente un evidente problema: la presenza del termine $\hbar\omega/2$ all'interno della sommatoria è una diretta conseguenza della non commutatività di $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$. Questo termine è presente anche quando ciascuno degli oscillatori è nello stato a minor energia e per questo viene detto **contributo di punto zero**. Il problema sorge nel momento in cui valutiamo l'energia totale del campo in quanto

$$\sum_{\mathbf{k},s} \frac{\hbar\omega}{2} \rightarrow \infty \quad (2.1.26)$$

Questo è un problema della Q.E.D. che non è ancora stato risolto in modo soddisfacente. In maniera un po' ingenua si può pensare che siccome l'energia di un sistema è sempre definita a meno di una costante additiva e che siccome ciò che si misura fisicamente sono sempre differenze

e mai valori assoluti, possiamo considerare l'energia di vuoto come una costante, trascurandola. Adottando quest'ottica, l'Hamiltoniana che utilizzeremo da qui in avanti sarà della forma

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega \hat{n}_{\mathbf{k},s} \quad (2.1.27)$$

dove abbiamo introdotto l'operatore hermitiano $\hat{n}_{\mathbf{k},s} := \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, il quale soddisfa le classiche relazioni di commutazione

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{n}_{\mathbf{k}'s'}] = \hat{a}_{\mathbf{k}s} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'}, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger, \hat{n}_{\mathbf{k}'s'}] = -\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'}, \quad (2.1.28)$$

mentre definendo $n_{\mathbf{k},s}$ e $|n_{\mathbf{k},s}\rangle$ come l'autovalore e l'autovettore dell'operatore $\hat{n}_{\mathbf{k},s}$ otteniamo immediatamente dalla teoria dell'oscillatore armonico

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger |n_{\mathbf{k},s}\rangle = (n_{\mathbf{k},s} + 1)^{1/2} |n_{\mathbf{k},s} + 1\rangle \quad \hat{a}_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k},s}\rangle = (n_{\mathbf{k},s})^{1/2} |n_{\mathbf{k},s} - 1\rangle \quad (2.1.29)$$

con le condizioni: $n_{\mathbf{k},s} \in \mathbb{N}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}s} |0_{\mathbf{k},s}\rangle = 0$.

2.1.1 Stati di Fock

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come è possibile ottenere una descrizione del campo elettromagnetico attraverso una Hamiltoniana di oscillatori armonici disaccoppiati. Nell'equazione (2.1.27) ciascun termine della sommatoria rappresenta l'energia associata ad uno specifico modo del campo. Questa energia è quantizzata e $n_{\mathbf{k},s}$ indica il numero di quanti di energia del modo con vettore d'onda \mathbf{k} e polarizzazione s . Tali eccitazioni del campo corrispondono a quelli che, con argomenti un po' più euristici, aveva introdotto Einstein nel 1905 sotto il nome di *quanti di luce* [12] e che successivamente vennero chiamati **fotoni**.

Siccome $\{\hat{n}_{\mathbf{k},s}\}_{\mathbf{k},s}$ costituisce un set completo di osservabili compatibili che agiscono su diversi sottospazi dello spazio di Hilbert del sistema, allora un generico stato del campo elettromagnetico potrà essere scritto come uno **stato di Fock**, cioè come prodotto tensore degli stati di ciascun modo:

$$|\{n\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} |\hat{n}_{\mathbf{k},s}\rangle, \quad (2.1.30)$$

dove è sottointesa la notazione

$$\prod_{\mathbf{k},s} |\hat{n}_{\mathbf{k},s}\rangle = |\hat{n}_{\mathbf{k}_1, s_1}\rangle \otimes |\hat{n}_{\mathbf{k}_2, s_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\hat{n}_{\mathbf{k}_N, s_N}\rangle.$$

Ovviamente $|\{n\}\rangle$ è autovettore di ciascun operatore della forma

$$\hat{n}_{\mathbf{k}_i, s_i} := \mathbb{1}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{i-1} \otimes \hat{n}_{\mathbf{k}_i, s_i} \otimes \mathbb{1}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_N,$$

questo ci permette di definire l'operatore **numero totale** che conta il numero complessivo di eccitazioni del campo:

$$\hat{n} := \sum_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k},s}, \quad \hat{n}|\{n\}\rangle = n|\{n\}\rangle, \quad (2.1.31)$$

mentre l'equazione agli autovalori per l'energia si potrà scrivere

$$\hat{H}|\{n\}\rangle = \left(\sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s} \hbar\omega \right) |\{n\}\rangle. \quad (2.1.32)$$

2.2 Proprietà statistiche della radiazione termica

In questo paragrafo ci concentreremo sulla radiazione emessa da un sistema in equilibrio termico utilizzando il formalismo appena introdotto per derivarne le principali caratteristiche.

Dalla teoria della termodinamica statistica è noto che un sistema quantistico in equilibrio termico a temperatura T con energia associata all'operatore \hat{H} è descritto dall'operatore densità

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)]}. \quad (2.2.1)$$

Sostituendo ad \hat{H} l'espressione di equazione (2.1.25) e utilizzando la notazione più compatta $\beta := \beta_k = \hbar\omega/k_B T$ otteniamo

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\sum_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k}s} \beta)}{\text{Tr}[\exp(-\sum_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k}s} \beta)]}; \quad (2.2.2)$$

il denominatore si calcola facilmente:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\exp(-\sum_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k}s} \beta)] &= \text{Tr} \prod_{\mathbf{k},s} (e^{-\hat{n}_{\mathbf{k}s} \beta}) = \sum_{\{m\}} \langle m | \prod_{\mathbf{k},s} (e^{-\hat{n}_{\mathbf{k}s} \beta}) | m \rangle \\ &= \sum_{m_{\mathbf{k}s}} \prod_{\mathbf{k},s} (e^{-m_{\mathbf{k}s} \beta}) = \prod_{\mathbf{k},s} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta}} \right) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla convergenza della serie geometrica² e si ottiene immediatamente

$$\hat{\rho} = \prod_{\mathbf{k},s} (1 - e^{-\beta}) e^{-\hat{n}_{\mathbf{k}s} \beta} \quad (2.2.4)$$

A questo punto per ricavare la densità di occupazione dei vari modi si utilizza la rappresentazione di Fock in cui la matrice densità è diagonale e si sfrutta la relazione di completezza

$$\mathbb{1} = \sum_{\mathbf{k},s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle \langle n_{\mathbf{k}s}| \quad (2.2.5)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \prod_{\mathbf{k},s} (1 - e^{-\beta}) \sum_{\mathbf{k}',s'} e^{-\hat{n}_{\mathbf{k}s} \beta} |n_{\mathbf{k}'s'}\rangle \langle n_{\mathbf{k}'s'}| \\ &= \sum_{\{n\}} \prod_{\mathbf{k},s} (1 - e^{-\beta}) e^{-n_{\mathbf{k}s} \beta} |n_{\mathbf{k}s}\rangle \langle n_{\mathbf{k}s}| \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Il termine che compare a sinistra del proiettore sull'autospazio dell'operatore $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ è proprio la probabilità di occupazione dello stato $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$. Allora la probabilità congiunta:

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k},s} p(n_{\mathbf{k}s}) = \prod_{\mathbf{k},s} (1 - e^{-\beta}) e^{-n_{\mathbf{k}s} \beta}. \quad (2.2.7)$$

Per esprimere questa probabilità in funzione del numero medio di fotoni per ogni modo $\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle$ si può sfruttare la funzione generatrice dei momenti $F(\xi) = \langle (1 + \xi)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} \rangle$:

²La serie converge sempre in quanto $|e^{-\beta}| < 1$ per tutti i valori di $\beta > 0$.

$$\begin{aligned}
\langle (1 + \xi)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} \rangle &= \sum_{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} p(n_{\mathbf{k}s}) (1 + \xi)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} = \sum_{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} p(n_{\mathbf{k}s}) \sum_r \binom{\hat{n}_{\mathbf{k}s}}{r} \xi^r \\
&= \sum_r \frac{\xi^r}{r!} \sum_{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} p(n_{\mathbf{k}s}) \hat{n}_{\mathbf{k}s} (\hat{n}_{\mathbf{k}s} - 1) \dots (\hat{n}_{\mathbf{k}s} - r + 1) = \sum_r \frac{\xi^r \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^{(r)} \rangle}{r!}
\end{aligned} \quad (2.2.8)$$

dove $\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^{(r)} \rangle = \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} (\hat{n}_{\mathbf{k}s} - 1) \dots (\hat{n}_{\mathbf{k}s} - r + 1) \rangle$ è l'erresimo momento fattoriale. Allo stesso tempo:

$$\begin{aligned}
\langle (1 + \xi)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} \rangle &= \sum_{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} (1 + \xi)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} p(n_{\mathbf{k}s}) = \sum_{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} (1 + \xi)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} (1 - e^{-\beta}) e^{-\beta \hat{n}_{\mathbf{k}s}} \\
&= (1 - e^{-\beta}) \sum_{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} [(1 + \xi) e^{-\beta}]^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} = \frac{1}{1 - \frac{\xi}{e^{\beta} - 1}} = \sum_{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} \frac{\xi^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}}}{(e^{\beta} - 1)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}}},
\end{aligned} \quad (2.2.9)$$

allora confrontando il membro di destra dell'equazione (2.2.8) con quello dell'equazione (2.2.9) si ricavano le relazioni

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^{(r)} \rangle = \frac{r!}{(e^{\beta} - 1)^r} \implies e^{\beta} = \frac{1 + \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle}{\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle}. \quad (2.2.10)$$

Infine, utilizzando l'uguaglianza $\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle = \langle n_{\mathbf{k}s} \rangle$, possiamo riscrivere la probabilità (2.2.7) come:

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \frac{1}{[1 + \langle n_{\mathbf{k}s} \rangle][1 + 1/\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle]^{n_{\mathbf{k}s}}} \quad (2.2.11)$$

che ha la classica forma di un prodotto di distribuzioni di Bose-Einstein.

Un parametro fondamentale è dato dal valor medio dell'operatore associato al numero totale di fotoni. Ricordando il legame tra \mathbf{k} e \mathbf{n} ottenuto in (2.1.4) possiamo effettuare le sostituzioni³

$$\sum_{\mathbf{k},s} \equiv \sum_{\mathbf{n},s} \mapsto 2 \cdot \int d^3n \mapsto 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (2.2.12)$$

quindi, utilizzando le equazioni (2.1.31) e (2.2.10) si può scrivere che:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n} \rangle &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{\frac{\hbar c k}{k_B T}} - 1} k^2 dk d\Omega = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{e^y - 1} dy \\
&= 2V \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \frac{\zeta(3)}{\pi^2}
\end{aligned} \quad (2.2.13)$$

dove $\zeta(3) \simeq 1.202$ è la funzione zeta di Riemann⁴.

³equivalenti a non assumere una particolare polarizzazione e a considerare il volume V abbastanza elevato da poter approssimare il vettore d'onda \mathbf{k} ad una variabile continua.

⁴La funzione zeta di Riemann può scriversi come $\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$ dove $\Gamma(s)$ è la funzione gamma di Eulero.

Capitolo 3

Correlazioni spaziali e temporali della CMB

Come abbiamo visto, la radiazione cosmica è giunta fino a noi senza subire significative interazioni¹, portando con sé informazioni di fondamentale importanza per la comprensione degli eventi iniziali dell'universo. Come mostrato da Hanbury Brown e Twiss nel 1954 [13] la luce può trasportare molte più informazioni della sola intensità, spettro e polarizzazione; queste informazioni vengono codificate nella distribuzione dei fotoni e sono accessibili attraverso le misure di coerenza spaziale e temporale.

La coerenza temporale è una misura del grado di correlazione che vi è tra le fasi assunte da un'onda in due punti dello spazio disposti lungo la direzione di propagazione. È parametrizzata dal **tempo di coerenza** τ_c che fornisce un ordine di grandezza dell'intervallo temporale in cui la fase dell'onda in un punto evolve con una certa regolarità. La luce coerente, come può essere ad esempio un fascio di luce perfettamente monocromatico, ha idealmente un tempo di coerenza infinito: nota la fase $\phi(\mathbf{r}, t)$ in un punto dello spazio-tempo, possiamo predire il valore di $\phi(\mathbf{r}, t + \tau_c)$ per qualunque valore di τ_c , di conseguenza $\tau_c \rightarrow \infty$.

Una grandezza analoga utilizzata per quantificare la coerenza temporale è la **lunghezza di coerenza temporale** $l_c = c\tau_c$ che misura l'intervallo spaziale in cui la differenza di fase tra due punti posti lungo la direzione di propagazione è pressoché costante.

In generale la coerenza temporale quantifica la monocromaticità della radiazione ed è un requisito necessario per osservare frange di interferenza in un interferometro Michelson.

La coerenza spaziale invece è una misura della correlazione tra le fasi dell'onda in punti diversi disposti trasversalmente rispetto alla direzione di propagazione. Questa viene quantificata attraverso un parametro detto **lunghezza di coerenza longitudinale** e fornisce una misura dell'omogeneità del campo nello spazio. Questo è il fenomeno che viene utilizzato per generare pattern di interferenza in esperimenti come quello dei fori di Young.

¹A seguito della ricombinazione, c'è stato un altro momento nella storia dell'universo in cui la luce ha avuto un ruolo chiave, la **reionizzazione**. Questo, è il periodo in cui le prime strutture cosmiche hanno cominciato a formarsi. La luce emessa da questi sistemi era abbastanza energetica da reionizzare l'idrogeno neutro, rendendolo nuovamente interagente nei confronti della CMB. Tuttavia questo periodo si colloca centinaia di milioni di anni dopo il Big Bang, quando ormai la densità dell'idrogeno e dei fotoni era così bassa da permetterci di assumere, in prima approssimazione, che tali interazioni non abbiano avuto effetti sullo spettro della CMB. Lo studio di come il periodo di reionizzazione possa aver modificato le correlazioni tra i fotoni non è oggetto di questa tesi.

La presenza o meno di queste caratteristiche in un campo radiativo dipende principalmente dalla sua origine e dal mezzo attraversato, e può essere determinata attraverso quelle che sono dette **funzioni di correlazione**.

3.1 Funzioni di correlazione classiche

Le funzioni di correlazione sono delle funzioni statistiche, del tutto generali, che mostrano l'andamento della correlazione tra due variabili aleatorie in relazione alle loro coordinate spazio-temporali.

A titolo d'esempio, se consideriamo l'esperimento dei due fori di Young con luce coerente e indichiamo con $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t_i)$ il campo elettrico totale in \mathbf{r}_i al tempo t_i , è possibile dimostrare in approssimazione di campo lontano che il valore di aspettazione² dell'intensità nel punto (\mathbf{r}, t) è dato da [14]

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \epsilon_0 c \cdot \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{f(R)} \cdot (\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t - \frac{s_1}{c}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t - \frac{s_2}{c})|^2 \rangle) \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{f(R)} \cdot (\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle + \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle + \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle) \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{f(R)} \cdot (\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle + \langle I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle + 2 \cdot \Re \{ \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \}) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

dove \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono le posizioni dei fori, $t_i = t - s_i/c$, mentre $f(R)$ è una funzione che tiene in considerazione la dispersione dell'intensità all'aumentare della distanza $R \sim s_1 \sim s_2$ tra i fori e lo schermo. La funzione tra parentesi graffe è ciò che determina la presenza o meno delle frange di interferenza. Essa è un esempio di funzione di correlazione, in questo caso è detta del prim'ordine, e per due generici valori della coordinata radiale \mathbf{r} e \mathbf{r}' e di quella temporale t e t' viene indicata con:

$$G_{\mathbf{E}}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \rangle. \quad (3.1.2)$$

Queste funzioni vengono generalmente utilizzate nella loro forma normalizzata, inoltre è comodo esprimerle come funzioni della differenza spaziale $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ e temporale $\tau = t' - t$:

$$g_{\mathbf{E}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle}{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle}. \quad (3.1.3)$$

Analogamente si può costruire una funzione che misuri il grado di correlazione tra le intensità del campo invece che tra le ampiezze. Questa è detta funzione di correlazione del secondo ordine per il campo elettrico ed è definita come:

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{E}}^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \tau) &= \frac{\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle}{\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle} \\ &= \frac{\langle I(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle^2} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

²In questo contesto il valore di aspettazione è inteso come valor medio sull'ensamble costituito da tutte le configurazioni del campo. Se il processo è stazionario tale valore coincide con la media temporale fatta su un tempo T , dopo aver perso il limite $T \rightarrow \infty$.

dove nell'ultimo passaggio abbiamo assunto che la sorgente fosse stazionaria in senso lato (o debole) e omogenea, in modo che il valor medio dell'intensità sia costante nello spazio e nel tempo³, come è il caso della radiazione cosmica.

Si può dimostrare in maniera del tutto generale che per un sistema classico⁴ le funzioni $g^{(1)}$ e $g^{(2)}$ soddisfano le seguenti disuguaglianze [15]:

- (i) $|g^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \tau)|^2 \leq 1$;
- (ii) $g^{(2)}(\mathbf{0}, 0) \geq 1$;
- (iii) $g^{(2)}(\mathbf{0}, 0) \geq g^{(2)}(\mathbf{0}, \tau)$.

Alcuni sistemi quantistici possono essere preparati in modo tale da violare la (ii) e la (iii). Questi sono noti come stati **untibunched** e possiedono caratteristiche molto diverse dagli usuali stati classici. Possono essere pensati pittoricamente come sistemi in cui i fotoni sono ben equipazati, dando origine ad una statistica sub-Poissoniana⁵.

3.2 Funzioni di correlazione quantistiche

Per ottenere gli analoghi quantistici delle funzioni discusse sopra è necessario definire l'operatore associato al campo che viene misurato. Generalmente si utilizza l'operatore campo elettrico di equazione eq. (2.1.14), tuttavia in questa tesi ci concentreremo sulle correlazioni tra fotoni per cui, seguendo [16], faremo uso dell'operatore di campo di annichilazione

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}. \quad (3.2.1)$$

Infatti, indicando con $\hat{\mathbf{V}}^\dagger$ il suo complesso coniugato, possiamo mostrare che $\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}, t) := \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t)$ rappresenta l'operatore associato alla densità di fotoni. Integrando il suo valor medio sul volume otteniamo il numero totale di fotoni:

$$\begin{aligned} \int_V \langle \hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}, t) \rangle d^3r &= \frac{1}{V} \int_V d^3r \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\mathbf{k}', s'} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'} \rangle e^{i((\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} - (\omega_{k'} - \omega_k)t)} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'s'} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\mathbf{k}', s'} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'} \rangle \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'s'} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{s'} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s'} \rangle (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s'} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}) = \sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} \rangle = \sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle = n. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Allora, le funzioni di correlazione del primo e secondo ordine per un sistema stazionario in senso lato, descritto dalla matrice densità $\hat{\rho}$, sono definite come

³Un processo stocastico è detto strettamente stazionario se la distribuzione di probabilità congiunta è invariante per traslazioni temporali. Questa è una condizione forte, generalmente non rispettata dalla maggior parte dei processi fisici. Una condizione più debole è la stazionarietà in senso lato che è soddisfatta quando la media del processo e la sua autocorrelazione sono indipendenti dal tempo.

⁴Con sistema classico in questo contesto si intende un sistema che può essere descritto coerentemente attraverso la teoria classica dell'elettromagnetismo.

⁵Si dice che un sistema di fotoni segue una statistica Sub-Poissoniana se (nel formalismo degli stati di Fock) soddisfa $\Delta n^2 < n$.

$$g_{\hat{\mathbf{V}}}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\Re \left\{ \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}', t') \} \right\}}{\text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}, t) \}} \quad (3.2.3)$$

$$g_{\hat{\mathbf{V}}}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\Re \left\{ \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}', t') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}', t') \} \right\}}{(\text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}, t) \})^2} \quad (3.2.4)$$

dove si prende la parte reale in quanto l'operatore $\hat{\mathbf{V}}$ è stato espresso, per semplificare i conti, utilizzando la sua rappresentazione complessa. Ci si può convincere della correttezza di questa scelta pensando al fatto che la funzione di autocorrelazione $g^{(1)}$ è per definizione la trasformata di Fourier inversa dello spettro di potenza $S(\nu)$ del campo⁶. Tale spettro è certamente simmetrico nello scambio $\nu \rightarrow -\nu$ e la trasformata di Fourier di una funzione reale pari deve essere reale. Per non appesantire troppo la notazione, di seguito verrà indicata $g_{\hat{\mathbf{V}}}^{(i)}$ semplicemente con $g^{(i)}$, inoltre verranno svolti i conti pensando a $\hat{\mathbf{V}}$ come ad un campo reale e applicando solo alla fine la sostituzione

$$g^{(i)} \mapsto \Re \left\{ g^{(i)} \right\}. \quad (3.2.5)$$

3.3 Funzioni $g^{(1)}$ e $g^{(2)}$ per fotoni termici

In questa sezione, seguendo fedelmente quanto riportato in [17], effettueremo il calcolo esplicito delle due funzioni appena discusse nel caso in cui il campo considerato sia quello della radiazione cosmica di fondo. Per farlo utilizzeremo il formalismo sviluppato nel capitolo precedente, che assume implicitamente una metrica di Minkowski. Siamo giustificati a farlo in virtù dell'equazione (1.1.5).

Essendo lo spettro di tipo termico, tratteremo la CMB come un sistema descritto dalla matrice densità di equazione (2.2.4) e useremo la notazione $\langle \cdot \rangle_T$ per indicare che il valore di aspettazione è fatto su questo stato.

3.3.1 Calcolo di $g^{(1)}$

Per valutare la funzione $g^{(1)}$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}', t') \rangle_T &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\mathbf{k}', s'} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'} \rangle_T e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_{k'} t)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega_k t')} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega_k (t' - t))} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'} \rangle_T = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} \rangle_T \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^3 \delta_{s, s'}, \quad (3.3.2)$$

allora la funzione di correlazione

$$g^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{V}{\langle \hat{n} \rangle_T} \langle \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}', t') \rangle_T = \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle_T} \sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega_k (t' - t))} \quad (3.3.3)$$

⁶Per una dimostrazione di questa affermazione si veda ad esempio [16], Capitolo 2.

e per $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{0}$ e $\tau = t - t' = 0$ otteniamo

$$g^{(1)}(\mathbf{0}, 0) = \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle_T} \sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T = 1. \quad (3.3.4)$$

Per studiare l'andamento della funzione effettuiamo come in precedenza la sostituzione

$$\sum_{\mathbf{k}, s} \mapsto 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} d^3k,$$

allora, esprimendo l'elemento di volume in coordinate sferiche ed indicando con $\rho := |\boldsymbol{\rho}|$, abbiamo che

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \tau) &= \frac{2V}{(2\pi)^3 \langle \hat{n} \rangle_T} \int_0^{+\infty} d^3k \langle \hat{n}_k \rangle_T e^{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega\tau)} \\ &= \frac{V}{2\pi^2 \langle \hat{n} \rangle_T} \int_0^{+\infty} \langle \hat{n}_k \rangle_T k^2 e^{-ick\tau} dk \int_{-1}^1 e^{ik\rho \cos\vartheta} d(\cos\vartheta) \\ &= \frac{V}{2\pi^2 \langle \hat{n} \rangle_T} \int_0^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-ick\tau}}{e^{\frac{\hbar ck}{k_B T}} - 1} \cdot \frac{\sin(k\rho)}{k\rho} dk. \end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile: $y = (\hbar ck)/(k_B T)$ e definendo la distanza e il tempo caratteristici rispettivamente come $r_{ch} = (\hbar c)/(k_B T)$ e $t_{ch} = \hbar/(k_B T)$ possiamo riscrivere l'integrale precedente in modo più ordinato:

$$g^{(1)}(\rho, \tau) = \frac{1}{2\zeta(3)} \int_0^{+\infty} y^2 \cdot \frac{e^{-i\frac{\tau}{t_{ch}}y}}{e^y - 1} \cdot \frac{\sin(\frac{\rho}{r_{ch}}y)}{\frac{\rho}{r_{ch}}y} dy \quad (3.3.5)$$

dove abbiamo utilizzato il risultato ottenuto in (2.2.13) per esprimere il numero totale medio di fotoni. L'integrale (3.3.5) ha una soluzione analitica in termini della funzione zeta di Hurwitz⁷:

$$g^{(1)}(\rho, \tau) = \frac{i \left[\zeta\left(2, 1 + i\frac{\rho}{r_{ch}} - i\frac{\tau}{t_{ch}}\right) - \zeta\left(2, 1 - i\frac{\rho}{r_{ch}} - i\frac{\tau}{t_{ch}}\right) \right]}{4 \cdot \frac{\rho}{r_{ch}} \cdot \zeta(3)} \quad (3.3.6)$$

mentre per quanto riguarda i casi in cui $\rho = 0$ o $\tau = 0$ si ottengono le espressioni

$$g^{(1)}(\rho, 0) = -\frac{ir_{ch}}{4\rho} \cdot \frac{\zeta\left(2, 1 - i\frac{\rho}{r_{ch}}\right) - \zeta\left(2, 1 + i\frac{\rho}{r_{ch}}\right)}{\zeta(3)} \quad (3.3.7)$$

$$g^{(1)}(0, \tau) = -\frac{\zeta\left(3, 1 + i\frac{\tau}{t_{ch}}\right)}{\zeta(3)}. \quad (3.3.8)$$

L'andamento di queste funzioni, una volta applicata la sostituzione (3.2.5), è riportato in Fig. 3.1 e Fig. 3.2. Il valore assunto in corrispondenza della lunghezza e del tempo caratteristici $g^{(1)}(r_{ch}, 0) = g^{(1)}(0, t_{ch}) \simeq 0.33$, mentre la larghezza a metà altezza risulta essere $\text{FWHM}_\rho = 0.7225 \cdot r_{ch}$ e $\text{FWHM}_\tau = 0.7225 \cdot t_{ch}$.

⁷La funzione zeta di Hurwitz è una generalizzazione della funzione zeta di Riemann ed è definita dalla seguente serie: $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$, con $\text{Re}(s) > 1$, $\text{Re}(a) > 0$ e $a \neq 0, -1, -2, \dots$

3.3.2 Calcolo di $g^{(2)}$

Per quanto riguarda $g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ dobbiamo valutare la quantità:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}', t') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}', t') \rangle_T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{k}_1, s_1} \sum_{\mathbf{k}_2, s_2} \sum_{\mathbf{k}_3, s_3} \sum_{\mathbf{k}_4, s_4} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1 s_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2 s_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3 s_3} \hat{a}_{\mathbf{k}_4 s_4} \rangle_T \\ &\quad \cdot e^{-i(\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r} - \omega_{k_4} t)} e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega_{k_3} t')} e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}' - \omega_{k_2} t')} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}' - \omega_{k_1} t')} \\ &\quad \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_4 s_4} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_3 s_3} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_2 s_2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1 s_1} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Per poter eseguire più agevolmente questo calcolo si utilizza il **teorema di Wick**, il quale permette (nel caso di sistemi descritti da Hamiltoniane quadratiche) di riscrivere il valor medio del prodotto di quattro operatori come la somma di tutte le contrazioni a coppie [18]. Nel nostro caso specifico possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1 s_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2 s_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3 s_3} \hat{a}_{\mathbf{k}_4 s_4} \rangle_T &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_4 s_4}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3 s_3} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_2 s_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_1 s_1} \rangle + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_4 s_4}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_1 s_1} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_2 s_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3 s_3} \rangle + \\ &\quad - \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_4 s_4}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2 s_2}^\dagger \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_3 s_3} \hat{a}_{\mathbf{k}_1 s_1} \rangle \\ &= \langle \hat{n}_{\mathbf{k}_3 s_3} \rangle \langle \hat{n}_{\mathbf{k}_1 s_1} \rangle \delta_{\mathbf{k}_4 \mathbf{k}_3}^3 \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1}^3 \delta_{s_4 s_3} \delta_{s_2 s_1} + \langle \hat{n}_{\mathbf{k}_1 s_1} \rangle \langle \hat{n}_{\mathbf{k}_3 s_3} \rangle \delta_{\mathbf{k}_4 \mathbf{k}_1}^3 \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^3 \delta_{s_4 s_1} \delta_{s_2 s_3} \end{aligned}$$

dove per ottenere l'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato la relazione (3.3.2) e il fatto che

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \rangle = 0 = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}s} \hat{a}_{\mathbf{k}'s'} \rangle.$$

Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \frac{V^2}{\langle \hat{n} \rangle_T^2} \langle \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}', t') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}', t') \rangle_T \\ &= \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle_T^2} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\mathbf{k}', s'} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T \langle \hat{n}_{\mathbf{k}'s'} \rangle_T \left(1 + e^{i[(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - (\omega_{k'} - \omega_k)(t - t')]} \right) \\ &= \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle_T^2} \left[\sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T \sum_{\mathbf{k}', s'} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}'s'} \rangle_T + \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\mathbf{k}', s'} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T \langle \hat{n}_{\mathbf{k}'s'} \rangle_T e^{i[(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - (\omega_{k'} - \omega_k)(t - t')]} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle_T^2} \left(\sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega_k(t - t')]} \right) \left(\sum_{\mathbf{k}', s'} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}'s'} \rangle_T e^{-i[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega_{k'}(t - t')]} \right) \\ &= 1 + \left| \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle_T} \sum_{\mathbf{k}, s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle_T e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega_k(t - t')]} \right|^2 \\ &= 1 + \left| g^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \right|^2. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Quindi, una volta nota $g^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ si ricava facilmente l'andamento di $g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \tau)$. In Fig. 3.1 e Fig. 3.2 sono riportati i grafici di $g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ e $g^{(2)}(0, \tau)$.

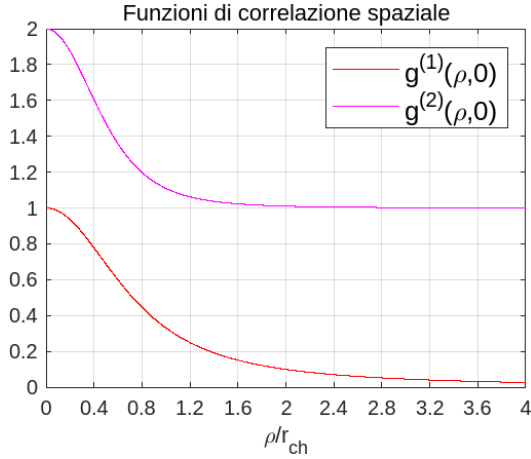


Figura 3.1: Andamento delle funzioni $g^{(1)}(\rho, 0)$ (in viola) e $g^{(2)}(\rho, 0)$ (in rosso) ottenuto plottando la funzione (3.3.7), a seguito della sostituzione (3.2.5).

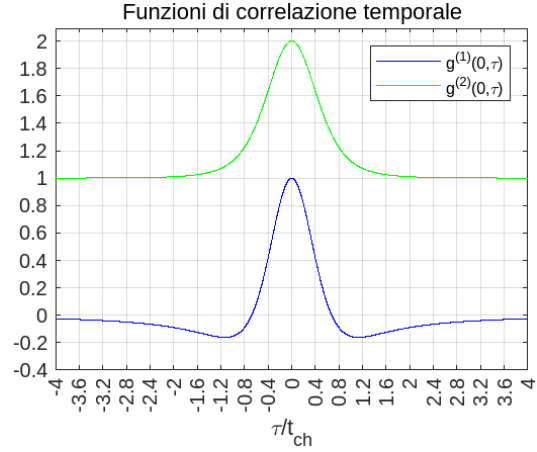


Figura 3.2: Andamento delle funzioni $g^{(1)}(0, \tau)$ (in blu) e $g^{(2)}(0, \tau)$ (in verde) ottenuto plottando la funzione (3.3.8), a seguito della sostituzione (3.2.5).

I risultati fin qui ottenuti ci permettono di fare alcune affermazioni generali sulla radiazione termica.

Il fatto che $|g^{(1)}| > 0$ indica che la radiazione sia parzialmente coerente, con un tempo e una lunghezza di coerenza dell'ordine di t_{ch} e r_{ch} . Mentre la condizione $g^{(2)} > 1$ porta a concludere che il campo si trovi in uno stato detto **bunched**, ovvero in cui i fotoni che lo compongono hanno maggiore probabilità di trovarsi raggruppati.

Osserviamo inoltre che per definizione la funzione $g^{(2)}(0, 0)$ non è altro che la varianza della densità di fotoni normalizzata al valore medio e otteniamo nel nostro caso che $\text{Var}[\mathcal{N}] = 2 \cdot \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle$.

Capitolo 4

Misura della funzione $g^{(2)}(\tau)$ per la CMB

Nel caso della radiazione cosmica la lunghezza e il tempo caratteristici assumono i valori:

$$r_{ch} = 8.41 \cdot 10^{-4} m \quad t_{ch} = 2.80 \cdot 10^{-12} s. \quad (4.0.1)$$

Tuttavia, con gli strumenti ad oggi disponibili, la misura delle correlazioni spaziali risulta molto più difficile rispetto a quelle temporali¹. Una lunghezza pari a r_{ch} sulla superficie di ultimo scattering richiederebbe una altissima risoluzione angolare per essere osservata. Inoltre il valore riportato nell'espressione (4.0.1) è calcolato per la radiazione che arriva a noi oggi, ma le correlazioni si sono formate quando la temperatura era dell'ordine di $3000K$ rimanendo quindi ad una scala $\tilde{r}_{ch} = r_{ch}/z \simeq 7.65 \cdot 10^{-7} m$. In tal caso la risoluzione necessaria sarebbe dell'ordine di

$$\Theta \simeq \frac{\tilde{r}_{ch}}{d} \simeq 2 \cdot 10^{-17} rad, \quad (4.0.2)$$

dove $d = 41Gly$ è la distanza dalla superficie di ultimo scattering.

Per questi motivi il seguito della tesi si concentra sulla misura sperimentale delle correlazioni temporali e, in particolare, sulla misura della funzione $g^{(2)}(0, \tau)$, alla quale ci riferiremo semplicemente con $g^{(2)}(\tau)$.

Da un punto di vista sperimentale non è possibile effettuare queste misure raccogliendo fotoni in tutto lo spettro della radiazione cosmica, quello che generalmente si fa è selezionare una banda più o meno ristretta di rivelazione. Inoltre, il detector non verrà colpito dalla radiazione proveniente da tutte le direzioni, ma solo da quella contenuta all'interno di un angolo solido $\Omega = \Delta\vartheta\Delta\varphi$, il cui valore è definito dalle caratteristiche geometriche dello strumento. Per tenere in considerazione questi fatti va ricalcolata la densità di fotoni tra le due frequenze scelte, quindi seguendo quanto fatto in (2.2.13) abbiamo che

¹Inoltre, i valori fin qui calcolati, sono associati ad un sistema più semplice rispetto a quello reale. A questa scala, per la radiazione della CMB, ci si aspetta che la maggior parte delle correlazioni sia stata distrutta a seguito di quello che è chiamato **diffusion dumping**, un fenomeno di diffusione per il quale i fotoni emessi dalle zone più dense e calde hanno la tendenza ad occupare le regioni meno dense. Il risultato netto è che le correlazioni, così come le anisotropie, alle scale comparabili o inferiori a quelle del cammino libero medio dei fotoni, vengono smorzate.

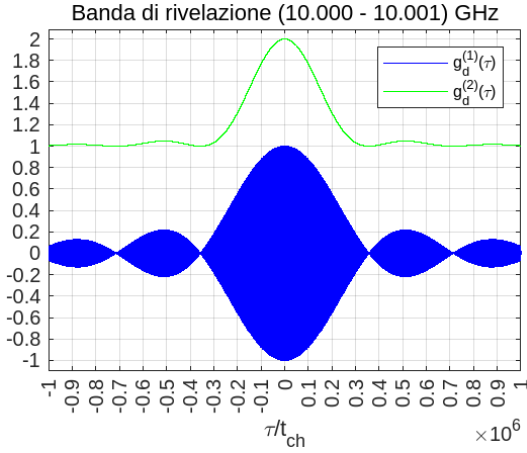


Figura 4.1: Andamento delle funzioni $g_d^{(1)}(\tau)$ (in blu) e $g_d^{(2)}(\tau)$ (in verde) ottenuto integrando numericamente l'equazione eq. (4.0.4) tra le frequenze $\nu_{min} = 10.000GHz$ e $\nu_{max} = 10.001GHz$. La funzione $g^{(1)}$ oscilla con una frequenza abbastanza grande da non permetterne la corretta visualizzazione.

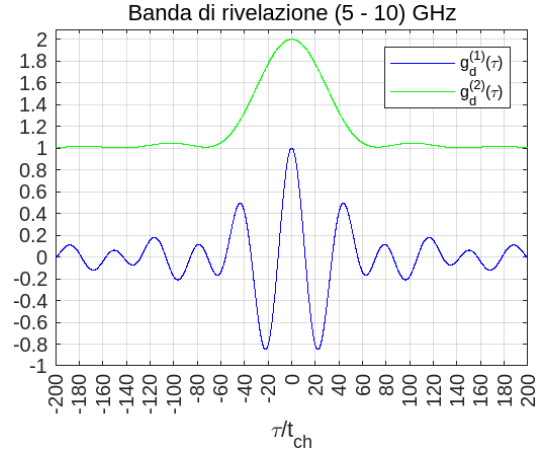


Figura 4.2: Andamento delle funzioni $g_d^{(1)}(\tau)$ (in blu) e $g_d^{(2)}(\tau)$ (in giallo) ottenuto integrando numericamente l'equazione eq. (4.0.4) tra le frequenze $\nu_{min} = 5GHz$ e $\nu_{max} = 10GHz$.

$$\langle \hat{n} \rangle_d = \frac{2 \cdot V \cdot \Omega}{c^3} \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \frac{\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (4.0.3)$$

dove il pedice d sta per *detectable*. L'integrale che compare in (4.0.3) ha una soluzione analitica molto complessa e per questo è più conveniente calcolarlo numericamente per le frequenze desiderate. Anche l'espressione di $g^{(1)}(\tau)$ va modificata

$$g_d^{(1)}(0, \tau) = \frac{2 \cdot V \cdot \Omega}{\langle \hat{n} \rangle_d} \cdot \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^2 \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{y^2}{e^y - 1} \cdot e^{-i \frac{\tau}{\tau_c} y} dy \quad (4.0.4)$$

dove $y_{min} = (h\nu_{min})/(k_B T)$ e $y_{max} = (h\nu_{max})/(k_B T)$. La relazione (3.3.10) che lega le due funzioni di correlazione continua a rimanere valida anche modificando il range di valori assunti dalle componenti di \mathbf{k} .

In Fig. 4.1 e Fig. 4.2 sono riportate le integrazioni numeriche dell'equazione (4.0.4) nei casi in cui si sia scelta una banda di rivelazione compresa tra $10.000GHz$ e $10.001GHz$ oppure tra $5GHz$ e $10GHz$. Come si può notare osservando la scala dei tempi, restringendo la banda la radiazione risulta più monocromatica, quindi maggiormente coerente, e le correlazioni permangono per un tempo molto superiore al tempo caratteristico ottenuto eseguendo i calcoli a tutto spettro.

Si poteva giungere alla stessa conclusione pensando a $g_d^{(1)}$ come all'antitrasformata di Fourier del prodotto tra lo spettro di potenza di $\hat{\mathbf{V}}$ e una funzione rettangolare $\Pi(\frac{\nu}{\Delta\nu})$ rappresentativa del filtro. Allora, usando il **teorema di convoluzione**, si può scrivere la $g_d^{(1)}$ come prodotto di convoluzione tra la $g^{(1)}$ originaria e l'antitrasformata del filtro $\mathcal{F}^{-1}(\Pi)$.

4.1 Interferometria HBT

Per effettuare la misurazione sperimentale della funzione di correlazione $g^{(2)}(\tau)$, si può fare ricorso ad un metodo noto come interferometria HBT, dal nome degli inventori Hambury Brown e Twiss. Questo metodo di misura fu introdotto per la prima volta nel 1956 con l'obiettivo di superare le limitazioni sulla precisione imposte dalla strumentazione dell'epoca nella valutazione del diametro angolare di oggetti celesti luminosi. Fino a quel momento, l'approccio predominante per condurre osservazioni di questo genere si basava sull'interferometria Michelson. In questo metodo la luce proveniente dalla sorgente veniva raccolta in due punti distinti, separati da una distanza d ; successivamente, i due fasci luminosi venivano fatti interferire attraverso un sistema di specchi, così che da una misurazione della variazione della visibilità delle frange in funzione della separazione d era possibile dedurre, una volta nota la distanza, il diametro della sorgente.

Con questa tecnica Michelson fu in grado di stimare nel 1891 le dimensioni delle lune di giove [19], mentre Shwartzschild nel 1895 riuscì a determinare la distanza tra due stelle appartenenti ad un sistema binario [20]. Tuttavia la risoluzione di questo metodo di interferometria ad ampiezza è limitata dalla separazione su cui è possibile confrontare le ampiezze. Minore è la dimensione angolare della sorgente e maggiore deve essere la distanza dei detector, arrivando, con le tecnologie dell'epoca, a migliaia di chilometri per le stelle più vicine a noi.

Per delineare sinteticamente le caratteristiche dell'interferometro HBT si può fare riferimento alla Fig. 4.3 in cui è schematizzato l'esperimento originale di Brown e Twiss: un fascio di luce prodotto da una lampada al mercurio viene filtrato in modo tale che solo la componente a 435.8nm incida su un beam splitter. Qui viene divisa in due fasci di intensità uguale e inviata a due fotomoltiplicatori. Questi producono una corrente proporzionale all'intensità del fascio, che viene prima filtrata in modo da eliminare la componente continua e poi amplificata. All'uscita di uno solo dei due amplificatori è posto un ritardatore in modo che le correnti $i(t)$ e $i(t + \tau)$ arrivino contemporaneamente ad un correlatore il quale le moltiplica e successivamente integra il segnale nel tempo.

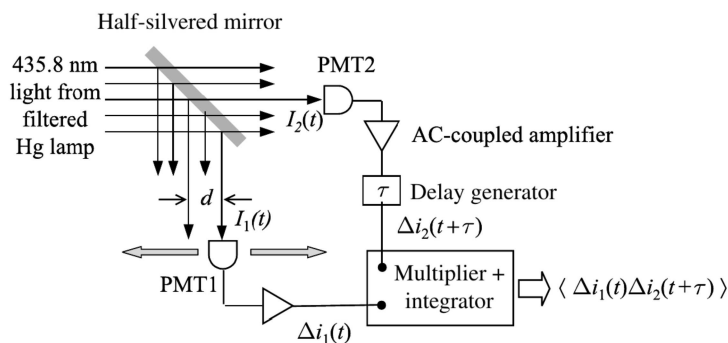


Figura 4.3: Schema dell'esperimento originale di Brown e Twiss. La luce di una lampada al mercurio viene filtrata e divisa da un beam splitter in due fasci di intensità uguale, $I_1(t)$ e $I_2(t)$, che incidono su due detector producendo le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Dopo aver eliminato la componente continua, i segnali $\Delta i_1(t)$ e $\Delta i_2(t + \tau)$ (quest'ultimo ottenuto facendo passare $\Delta i_2(t)$ attraverso un ritardatore) vengono inviati ad un correlatore, il quale produce in uscita un segnale proporzionale al valor medio del prodotto delle due correnti. Crediti immagine: [15].

Questo metodo di interferometria si è sviluppato molto negli anni successivi alla sua invenzione e oggi viene utilizzato in campi molto diversi da quello originario, come ad esempio in fisica

nucleare e delle alte energie. La sua evoluzione prevede l'utilizzo di rivelatori capaci di misurare singole particelle, mentre il ritardatore e il correlatore sono sostituiti da un sistema elettronico atto a produrre un istogramma relativo alla probabilità condizionata di rilevare una particella al tempo $t + \tau$ a seguito di una rivelazione al tempo t .

Per capire come questo avvenga nel caso di sistemi di fotoni si può fare riferimento alla Fig. 4.4: il flusso incide sul beam splitter in modo tale che ogni fotone abbia uguale probabilità di venire rilevato da uno dei due detector D1 e D2. Se viene misurato da D1, scatta un timer che smette di registrare il tempo solo quando un altro fotone viene rilevato da D2; a questo punto un contatore associa un evento all'intervallo temporale registrato. Questo processo si ripete ad ogni reset del timer, producendo man mano un istogramma come quello in Fig. 4.4.

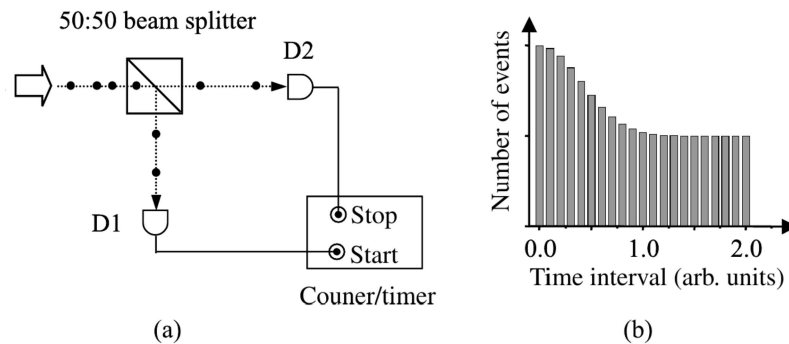


Figura 4.4: (a) Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale utilizzato per misurare la funzione $g^{(2)}(\tau)$. Ogni fotone che incide sul beam splitter ha uguale probabilità di colpire uno dei detector, D_1 e D_2 . Se D_1 registra un segnale, un timer inizia a registrare il tempo. Il timer si interrompe al tempo τ solo a seguito di una successiva rivelazione da parte di D_2 ; a questo punto un contatore associa al ritardo temporale τ un evento. (b) Esempio di istogramma ottenuto con questo tipo di esperimento: in ascissa è rappresentato il ritardo temporale τ tra la rivelazione di D_1 e la successiva ottenuta attraverso D_2 , mentre in ordinata è riportato il numero di eventi. Il fatto che il numero di eventi sia maggiore a tempi prossimi allo zero indica che la probabilità che i fotoni arrivino a gruppi è maggiore. Crediti immagine: [15].

L'interferometria HBT per la radiazione elettromagnetica è stata ampiamente studiata e utilizzata nel range delle frequenze ottiche, mentre solo nell'ultimo decennio è stata testata per la radiazione a microonde.

Nel 2004 è stato pubblicato il primo studio sulle correlazioni tra fotoni termici emessi da una resistenza posta a diverse temperature, comprese tra i 20 milli-Kelvin e qualche Kelvin [21]. In questo esperimento la radiazione emessa dalla resistenza è stata prima filtrata, selezionando una banda centrata a 1.72GHz , di larghezza 0.17GHz , poi inviata ad un beam splitter. I due fasci ottenuti sono stati amplificati utilizzando amplificatori lineari fase-indipendenti e poi inviati ai rivelatori che generano un segnale proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo, e quindi all'intensità dei fotoni. Infine un analizzatore spettrale ha calcolato sia l'autocorrelazione delle correnti che la correlazione incrociata.

I risultati ottenuti da questo esperimento confermano le previsioni teoriche e mostrano per la prima volta, nelle frequenze delle microonde, come il rumore termico sia associato ad una statistica super-Poissoniana, caratteristica di una distribuzione di Bose-Einstein.

4.2 Rivelazione di singoli fotoni alle microonde

Quanto discusso fin ora è il principio di base di questo tipo di misurazioni, tuttavia possono sorgere diversi problemi sperimentali a seconda delle circostanze.

Nel caso della CMB, visti i valori aspettati del tempo di coerenza, sono necessarie misure con elevata risoluzione temporale e detector che possano discriminare i singoli fotoni. La precisione e l'accuratezza di questi rivelatori di radiazione sono determinate, tra le altre cose, da due parametri fondamentali: il tasso di **dark counts**, definito come il numero di false rivelazioni nell'unità di tempo, e l'**efficienza quantistica** di rivelazione, ovvero il rapporto tra l'intensità rilevata e quella incidente (o analogamente tra il numero di rivelazioni e il numero di fotoni incidenti).

I dark counts sono segnali spuri, dovuti ad esempio al rumore ambientale o più intrinsecamente a processi termici che portano alla produzione stocastica di coppie elettrone-lacuna nei semiconduttori dei detector. Possono diventare un problema quando il loro tasso è confrontabile con quello dei fotoni incidenti. In questo caso la statistica del campo si mescola con quella dei dark counts rendendo meno precise le misure. Essendo noto che tale processo segue una statistica Poissoniana è possibile tenerne conto e sottrarlo in fase di analisi dati come mostrato in [22]. L'efficienza quantistica, invece, non modifica l'aspetto delle funzioni di correlazione² e quindi il suo unico effetto è quello di ridurre il tasso di rivelazioni rendendo necessario aumentare il tempo di integrazione del segnale.

Detectors

Il secondo problema riguarda l'energia dei fotoni della CMB. Per avere un'idea, un singolo fotone ad una frequenza di $\sim 10GHz$ ha un'energia di circa $400\mu eV$ quando lo stesso fotone nel range del visibile ha invece un'energia pari a circa $2eV$, quasi 5 ordini di grandezza più grande. Fino a pochi anni fa non esistevano detector che permettevano di risolvere singoli fotoni ad energie così basse, ma ora, grazie anche allo sviluppo di branche come la crittografia quantistica, sono stati sviluppati gli SMDPs, "Single Microwave Photon Detectors" che raggiungono questo limite.

Alla base di questo tipo di rivelatori vengono utilizzati quelli che sono detti **transmon qubit**, ovvero dei sistemi quantistici costituiti da due giunzioni Josephson ciascuna delle quali è formata da due superconduttori separati da una sottile barriera isolante. La particolarità di questi sistemi è che, come gli atomi, sono caratterizzati da uno spettro energetico quantizzato e con le opportune manipolazioni è possibile vincolare tutta la loro dinamica ai primi due livelli energetici $|g\rangle$ e $|e\rangle$. La transizione dallo stato di base a quello eccitato avviene generalmente attraverso l'interazione con un campo magnetico o a microonde. Uno schema di funzionamento di un SMDP è riportato in Fig. 4.5. In questo caso il fotone da rilevare incide con frequenza ω_b in una cavità risonante detta **buffer** in cui viene combinato con un campo interno di frequenza ω_p (detto di pompaggio); in questo modo vengono prodotti due nuovi fotoni, uno a frequenza ω_q , tale da portare il qubit nello stato eccitato, e uno a frequenza ω_w che invece viene inviato in una seconda cavità, detta di scarto.

²Come mostrato in [16] la correlazione tra le fotocorrenti prodotte da i due detector è della forma $\langle \Delta J_1(t) \Delta J_2(t + \tau) \rangle \propto \eta_1 \eta_2 \langle I_1 \rangle \langle I_1 \rangle |g^{(1)}(\tau)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(t') k(t' + \tau) dt'$ dove $k(t)$ è l'impulso di corrente prodotto a seguito di una rivelazione, I_i è l'intensità del campo incidente sull' i -esimo detector, mentre η_i è la sua efficienza quantistica. Allora si vede facilmente che a seguito della normalizzazione di questa funzione la dipendenza da η_1 e η_2 svanisce.

Il processo di misura puo essere diviso in tre step:

Rivelazione. Come già accenato viene applicato per tutto il tempo di rivelazione un impulso elettromagnetico al qubit, alla frequenza ω_p . Se un fotone della lunghezza d'onda giusta entra nel buffer, il processo di mixing a quattro onde eccita il qubit con conseguente dissipazione di un fotone nella seconda cavità.

Misurazione. Lo stato del qubit viene letto attraverso quella che è detta **lettura dispersiva**, un tipo di misura che non ne altera lo stato. In pratica il qubit è accoppiato alla cavità di scarto e il passaggio da $|g\rangle$ a $|e\rangle$ induce una modifica nelle proprietà di quest'ultima, come la variazione della sua frequenza di risonanza. Questo permette di dedurre lo stato del qubit indirettamente d una misura delle proprietà della cavità.

Reset. Se a seguito della lettura il qubit viene trovato nello stato di base, il ciclo si ripete, se altrimenti si trova nello stato eccitato vengono alternati impulsi a microonde (detti π -pulse) e fasi di lettura fino a quando non torna nello stato di base.

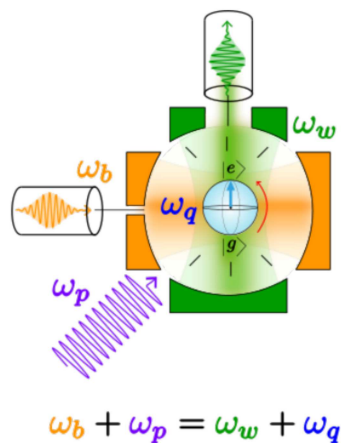


Figura 4.5: Principio di funzionamento di un SMDP. Il fotone incidente entra nella prima cavità, detta buffer (arancione in figura), con frequenza ω_b e viene mescolato con una radiazione di pompaggio a frequenza ω_p (in viola). Questo processo produce in uscita un terzo fotone, con frequenza ω_q , capace di eccitare il qubit allo stato $|e\rangle$, e contemporaneamente un quarto, a frequenza ω_w , che modifica le caratteristiche di una seconda cavità, accoppiata con il qubit (in verde), in modo da poterne misurare lo stato valutando le proprietà di quest'ultima. Crediti immagine: [23].

In [23] viene presentato un rivelatore di questo tipo che opera a temperature dell'ordine delle decine di mK . In tal caso viene raggiunta un'efficienza quantistica $\eta = 0.43$ per fotoni a $(7 \pm 0.2)GHz$ con un tasso di dark counts $\alpha = 85Hz$. Questi parametri determinano un NEQ³ ("noise equivalent power") pari a

$$S = 10^{-22} \frac{W}{\sqrt{Hz}},$$

più di un ordine di grandezza inferiore rispetto ai precedenti sistemi di rivelazione nella stessa banda di frequenze. Il tempo caratteristico della fase di rivelazione è $T_d = 10\mu s$ mentre quello di misura $T_m = 0.5\mu s$. Il processo di reset non è deterministico e in media impiega $T_r = 0.5\mu s$; in generale ogni ciclo impiega un tempo $T_c = 11.9\mu s$ permettendo di eseguire più di 80000 cicli al secondo.

³Questo parametro viene utilizzato per definire la sensibilità del rivelatore ed è calcolato come $S = \frac{\hbar\omega\sqrt{\alpha}}{\eta}$.

Conclusioni

Nel corso di questa tesi è stata data una descrizione qualitativa di una delle scoperte più importanti della cosmologia, la radiazione cosmica di fondo a microonde, ponendo maggiore attenzione sui fenomeni che l'hanno generata. Dopo aver sviluppato gli strumenti matematici necessari, sono state descritte due funzioni statistiche, atte a sottolineare alcune caratteristiche di questa radiazione. L'analisi della funzione $g^{(1)}$ ha mostrato come, nonostante la radiazione sia composta da varie frequenze, siano comunque presenti delle correlazioni tra i valori del campo. Tali correlazioni permangono per tempi $t \lesssim t_{ch}$ e distanze $r \lesssim r_{ch}$, dove si è calcolato che $t_{ch} = 2.80 \cdot 10^{-12}s$ e $r_{ch} = 8.41 \cdot 10^{-4}m$. La funzione $g^{(2)}$ ha evidenziato la natura bosonica dei fotoni, mostrando come questi, quando emessi da una sorgente termica, siano più propensi a "viaggiare" in gruppo. Nell'ultimo capitolo sono state discusse le modifiche da apportare alle stime precedenti per tenere in considerazione l'azione di un detector, il quale è impossibilitato a raccogliere la radiazione a tutte le frequenze e da tutte le direzioni. Queste modifiche hanno mostrato come riducendo la finestra di frequenze analizzate dal detector, la scala di coerenza temporale aumenti sensibilmente, passando da $\sim 25t_{ch}$ per l'intervallo $(5 - 10)GHz$, a $\sim 1.5 \cdot 10^5 t_{ch}$ per l'intervallo $(10.000 - 10.001)GHz$.

Infine, dopo aver descritto un metodo strumentale per la determinazione della funzione $g^{(2)}(\tau)$, sono state considerate le difficoltà associate ad una misura di questo tipo per il caso specifico della radiazione cosmica: i dark counts e l'efficienza di rivelazione giocano un ruolo fondamentale nella precisione e nell'accuratezza delle misure, mentre l'utilizzo di un detector a singolo fotone aumenta la sensibilità. Per questo motivo, è stato descritto qualitativamente il funzionamento di una tipologia recente di detector, detti SMDPs, che possono risultare particolarmente comodi per esperimenti di questo tipo.

Bibliografia

- [1] R. A. Alpher e R. C. Herman, “On the Relative Abundance of the Elements,” *Phys. Rev.*, vol. 74, pp. 1737–1742, 1948.
- [2] G. K. Gamow, “Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.,” vol. 27, n. Paper 10, p. 15, 1953.
- [3] A. Penzias e R. Wilson, “A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s,” *Astrophysical Journal*, vol. 142, pp. 419–421, 1965.
- [4] A. McKellar, “Proc. Ast. Soc. Pac.,” vol. 52, p. 187, 1940.
- [5] W. S. Adams, *Astrophys. J.*, vol. 93, p. 11, 1941.
- [6] J. F. Denisse, E. Le Roux e J. C. Steinberg, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, vol. 244, p. 3030, 1957.
- [7] A. S. Sharov e I. D. Novikov, *Edwin Hubble, the Discoverer of the Big Bang Universe*. 1993, p. 148.
- [8] P. A. R. Ade e et al. (Planck Collaboration), “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 571, A1, 2014.
- [9] California Institute of Technology, *COM_CompMap_CMB-nilc_2048_R1.20.fits*, URL: https://irsa.ipac.caltech.edu/data/Planck/release_1/all-sky-maps/previews/COM_CompMap_CMB-nilc_2048_R1.20/index.html, 2013.
- [10] A. Liddle, *An Introduction to the Modern Cosmology*. London: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [11] Cern, *Introduction to Cosmology*, URL: https://cds.cern.ch/record/906981/files/RTN2005_003.pdf, 2005.
- [12] A. Einstein, “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt,” *Annalen der Physik*, vol. 322, pp. 132–148, 1905.
- [13] R. Hanbury Brown e R. Twiss, “A new type of interferometer for use in radio astronomy,” *Philosophical Magazine*, vol. 45, n. 366, pp. 663–682, 1954.
- [14] Y. Shih, in *An Introduction to Quantum Optics: Photon and Biphoton Physics*. CRC Press, 2020, cap. 7.
- [15] M. Fox, *Quantum Optics: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- [16] L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [17] L. Salasnich, “Averages and correlations of thermal photons,” Padua University, Internal Report, 2023.
- [18] A. Hoffmann, “Spatiotemporal Formation of the Kondo Cloud,” Tesi magistrale, Università di Monaco, 2012, cap. 7.
- [19] A. Michelson, “Measurement of Jupiter’s Satellites by Interference,” *Nature*, vol. 45, pp. 160–161, 1891.
- [20] K. Schwarzschild, “Über Messung von Doppelsternen durch Interferenzen,” *Astronomische Nachrichten*, vol. 139, n. 23, p. 353, 1900.

-
- [21] J. Gabelli, L.-H. Reydellet, G. Fève et al., “Hanbury Brown–Twiss Correlations to Probe the Population Statistics of GHz Photons Emitted by Conductors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93(5), 056801, lug. 2004.
- [22] J. Sperling, W. Vogel e G. S. Agarwal, “True photocounting statistics of multiple on-off detectors,” *Physical Review A*, vol. 85, 2012.
- [23] L. Balembois, J. Travesedo, L. Pallegoix et al., *Practical Single Microwave Photon Counter with 10^{-22} W/ $\sqrt{\text{Hz}}$ sensitivity*, 2023. arXiv: 2307.03614 [quant-ph].