Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Un’introduzione ai giochi differenziali lineari quadratici

Relatrice:
Prof.ssa Alessandra Buratto

Laureando: Nicolas Stecca
Matricola: 1226224

Anno Accademico 2022/2023

22/09/2023

Indice

Introduzione **4**

1 Teoria dei giochi **5**
- 1.1 Storia . . . 5
- 1.2 Aspetti fondamentali . . . 7
  - Definizioni . . . 7
  - Classificazioni . . . 8
  - Modelli di rappresentazione . . . 9
- 1.3 Equilibri . . . 10

2 Giochi differenziali **13**
- 2.1 Giochi differenziali . . . 13
- 2.2 Teoria del controllo ottimo . . . 14
  - Orizzonte infinito . . . 18
- 2.3 Equilibri nei giochi differenziali . . . 21

3 Giochi lineari quadratici **25**
- 3.1 Definizione del problema . . . 25
- 3.2 Ricerca di un equilibrio . . . 27
  - 3.2.1 Open-loop . . . 27
  - 3.2.2 Markoviano-perfetto . . . 32
- 3.3 Un caso un po' più generale - payoff spurio . . . 34

4 Un'applicazione: la conoscenza come bene pubblico **37**
- 4.1 Il problema . . . 37
- 4.2 Equilibri . . . 38
- 4.3 Confronto con la soluzione collusiva . . . 40

A Equazioni di Riccati **43**

Introduzione

In questo elaborato viene proposta una prima introduzione alla classe dei giochi lineari quadratici, sottoinsieme della più ampia categoria dei giochi differenziali, il ramo di studi probabilmente più esplorato al giorno d'oggi per quanto riguarda la teoria dei giochi.

Per quanto riguarda quest'ultima, viene fornita nel primo capitolo una breve introduzione storica ai momenti cardine dell'evoluzione che hanno attraversato le ricerche in questo ramo di studi, dalle prime lettere di fine Ottocento ai premi Nobel degli ultimi anni, passando per lo studioso a cui viene più spesso associato, John Nash. Successivamente si prosegue con un riassunto di quelli che sono gli assiomi e i concetti basilari della teoria dei giochi, sufficienti a descrivere la nozione successiva e più importante, ovvero gli equilibri.

Nel secondo capitolo si trova un approfondimento della classe dei giochi differenziali, partendo dalla definizione del problema. Una grande porzione di questo paragrafo è dedicata alla presentazione della teoria del controllo ottimo, i quali risultati sono applicabili, sebbene con qualche accortezza, proprio ai giochi differenziali. Infine, ricollegandosi al capitolo precedente, si presenta la definizione di equilibrio rielaborata a questa classe di giochi, fornendo poi gli adattamenti ai teoremi del controllo ottimo, tali per assicurare la presenza e la ricerca degli equilibri nei giochi differenziali.

Nel capitolo 3 è presente una discussione sulla classe dei giochi lineari quadratici, in particolare è mostrata l'analisi dei problemi tramite i metodi illustrati precedentemente, in modo da tracciare una linea guida, in generale, su come ricavare gli equilibri di tali giochi. In particolare a fine capitolo viene evidenziato un caso più difficoltoso, con l'obiettivo di anticipare l'applicazione trattata nell'ultimo capitolo.

Il quarto e ultimo capitolo è dedicato ad un esempio puramente applicativo di quanto discusso nel capitolo precedente. Viene esposto un modello di problema che trova riscontro in molti ambiti socio-economici, delineando un breve studio su quali siano gli equilibri del gioco, attraverso il calcolo esplicito della traiettoria di evoluzione di un capitale. Tale esempio è stato scelto soprattutto per l'interpretazione economica che ne scaturirà, per aiutare a comprendere come, quando si affrontano queste tipologie di problemi, la discussione matematica e quella economica siano strettamente legate e di uguale importanza.

Data la natura di questo elaborato, sono state omesse tutte le dimostrazioni dei teoremi riportati, eccezion fatta per qualche dimostrazione euristica presente nella parte riservata alla teoria del controllo ottimo. Sono tuttavia sempre presenti indicazioni atte a consigliare su quale riferimento bibliografico possano essere consultati tali risultati. La maggior parte dei testi riportati in bibliografia, oltre a contenere esempi di giochi LQ (Lineari Quadratici), propongono applicazioni di problemi che sconfinano da questa categoria, la quale è relativamente "limitata", ma si sviluppano in numerose altre classi di problemi (es. giochi lineari, esponenziali, etc...), tanto è vasta la ricerca nella teoria dei giochi al giorno d'oggi.

Capitolo 1

Teoria dei giochi

1.1 Storia

Negli ultimi 75 anni, la Teoria dei Giochi ha beneficiato di un continuo sviluppo scientifico, caratterizzato in questo arco temporale da un'incessante crescita sia nel numero di risultati teorici che nella varietà delle applicazioni possibili. Generalmente viene identificato come punto di partenza la pubblicazione nel 1947 de ***Theory of Games and Economic Behavior*** ad opera di **John von Neumann** (1903-1957) e **Oscar Morgenstern** (1902-1977), concentrato soprattutto sui giochi cooperativi e sul concetto di utilità. Tra i due, Neumann è considerato l'effettivo inventore della teoria dei giochi. In questa loro pubblicazione viene fornita una descrizione matematica dell'organizzazione sociale ed economica basata sulla teoria dei giochi, andando a rivoluzionare il sistema di procedere nell'analisi non solo dell'economia, ma anche di vari ambiti nel mondo reale. Viene focalizzata l'attenzione sul comportamento umano di un ente in circostanze di interazione con altri enti e sulle scelte intraprese da esso, affinché sia massimizzata la propria utilità, in modo tale che questo comportamento possa essere paragonato a quello di un giocatore che prende decisioni strategiche a seconda del proprio scopo. Ciò va a sottolineare come la nascita della teoria dei giochi sia legata al concetto di "gioco", infatti i primi risultati importanti a riguardo si ebbero in relazione allo studio di dinamiche relative alle carte da gioco o gli scacchi.

Le prime discussioni sulla teoria dei giochi risalgono ad una lettera dell'ambasciatore britannico James Waldegrave al matematico francese Pierre-Rémond de Montmort nel 1713, in cui viene proposta una risoluzione per un gioco di carte a due partecipanti. Oltre un secolo dopo, **Antoine-Augustin Cournot** (1801-1877) pubblica una prima teorizzazione, seppur semplicistica e generalizzata, della teoria dei giochi nel testo *'Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses'* in cui si trova la ricerca di un equilibrio che può essere considerato un'anticipazione di quello che verrà definito equilibrio di Nash.

Nei primi anni del ventesimo secolo vanno citati gli studi di **Alfredo Federico Damaso Pareto** (1848-1923), al quale si deve il concetto di ottimo paretiano, nonché il contributo di **Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo** (1871-1953) a cui si deve il primo teorema della Teoria dei giochi (Teorema di Zermelo), riguardante gli esiti possibili di una partita di scacchi. Successivamente **Frederick William Lanchester** (1868-1946) introdusse le equazioni differenziali di Lanchester, atte a simulare un modello di scontro tra due forze armate in un conflitto, modello che diede lo spunto per la teorizzazione dei giochi differenziali. Negli anni immediatamente successivi, **Félix Édouard Justine Émile Borel** (1871-1956) diede un contributo con la scrittura di diversi articoli, riguardanti soprattutto il concetto di minimax; di notevole importanza è la figura di **Heinrich Freiherr von Stackelberg**, che introdusse due concetti di grande rilevanza nella teoria dei giochi, ossia il *duopolio di Stackelberg* e il *gioco di Stackelberg.*

Giunti dunque alla metà del Novecento, l'opera di Neumann e Morgenstern, nella quale compaiono per la prima volta concetti fondamentali come il teorema del minimax o la rappresentazione in forma estesa di un gioco, apre la strada allo sviluppo inarrestabile degli studi riguardanti la teoria dei giochi, a partire principalmente dagli anni cinquanta. In questi anni viene formulato il noto "dilemma del prigioniero" proposto da **Albert William Tucker** (1905-1995). Quest'ultimo collaborò frequentemente con **Harold**

William Kuhn (1925-2014), il quale riformulò il concetto di gioco in forma estesa, in una definizione che ancora oggi rimane in vigore.

Tra i più famosi matematici ad essersi occupato della teoria dei giochi vi è **John Forbes Nash Jr.** (1928-2015), il quale sviluppò diversi aspetti relativi a questa disciplina: in vari articoli, tra cui "*Non-Cooperative Games*", egli studiò la teoria dei giochi non cooperativi e dimostrò l'esistenza in tale categoria di un equilibrio che fu denominato appunto equilibrio di Nash.

Dal 1954, a partire dalla risoluzione di problematiche di stampo militare, vennero cominciati a studiare i giochi differenziali, con le prime analisi ad opera di **Rufus Philip Isaacs** (1941-1981), sviluppandosi dalla categoria dei giochi dinamici e, come il nome suggerisce, si utilizzano equazioni differenziali per descriverne l'evoluzione temporale. Con il passare del tempo essi spaziarono in numerosi ambiti, dalla decisione dei prezzi e lo sforzo pubblicitario nel *marketing*, all'accumulazione e investimento di capitali, fino a comprendere ambiti apparentemente più lontani come innovazione tecnologica, estrazione di risorse e controllo dell'inquinamento.

Negli anni sessanta iniziarono a prendere spazio le applicazioni a problemi di *pricing* e assicurazioni. Importanti furono gli studi di **Reinhard Justus Reginald Selten** (1930-2016) e **John Charles Harsanyi** (1920-2000), futuri vincitori del Premio Nobel per l'economia assieme a John Nash. Successivamente vanno ricordati i lavori di **Yisrael Robert John Aumann** (1930-/) e di **Thomas Crombie Schelling**(1921-2016), anche loro premiati con il Nobel per questa disciplina; grazie a loro si deve il passaggio a ricondurre il comportamento di un ente razionale ad un insieme ristretto di regole e principi ad un approccio in cui il contesto seleziona gli elementi di tale insieme.

Dagli anni settanta si iniziarono a sviluppare le prime applicazioni in ambito biologico-evoluzionistico, grazie soprattutto al genetista **John Maynard Smith** (1920-2004). La biologia evoluzionistica si basa sul concetto che i geni di un organismo influenzano le caratteristiche osservabili di esso, quindi i suoi comportamenti in un ambiente e l'adattamento di un organismo in tale habitat comporta mutazioni genetiche visibili col tempo nei suoi discendenti. Tali comportamenti e caratteristiche vanno rapportate a quelli di altri organismi sia della medesima specie che a specie differenti: questo aspetto può essere studiato come un gioco in modo tale da ottenere delle previsioni attraverso gli *evolutionary games*. Negli anni più recenti gli studi si sono concentrati soprattutto su questo tipo di giochi e su una nuova categoria in costante crescita di attenzione, gli *environmental games*. Infatti, le problematiche correlate alla tutela dell'ambiente hanno assunto costantemente maggior importanza a livello economico, con la teoria dei giochi che risulta essere uno degli strumenti teorici maggiormente utilizzati per analizzare il comportamento di istituzioni pubbliche e private che puntano a minimizzare i danni per l'ambiente.

A testimonianza della validità di questo campo di studi, dagli anni novanta sono stati ben 10 gli studiosi a cui è stato riconosciuto il Premio Nobel per l'economia per i loro lavori nella teoria dei giochi:

- nel 1994, John Harsanyi, John Nash e Reinhard Selten, "per la loro analisi pionieristica degli equilibri nella teoria dei giochi non cooperativi"

- nel 2005, Robert Aumann e Thomas Schelling, "per aver accresciuto la nostra comprensione del conflitto e della cooperazione attraverso l'analisi della teoria dei giochi"

- nel 2007, Leonid Hurwicz, Eric Maskin e Roger Myerson, "per aver gettato le basi della teoria dei meccanismi di allocazione del mercato."

- nel 2012, Alvin Roth e Lloyd Shapley, "per la teoria delle allocazioni stabili e i loro studi sulla configurazione dei mercati"

In aggiunta a queste onorificenze va aggiunto il Premio Crafoord[1] del 1999 a John Maynard Smith (assieme a Ernst Mayr e G. Williams) "per aver sviluppato il concetto di biologia evoluzionistica".

[1]Il premio Crafoord è un premio annuale che ha lo scopo di promuovere ricerche di base a livello internazionale nei seguenti campi: astronomia, matematica, scienze geologiche, scienze biologiche (con particolare riguardo all'ecologia) e studi sulla poliartrite. Queste discipline sono state scelte tra quelle che non vengono premiate con il Nobel.

1.2 Aspetti fondamentali

La teoria dei giochi si occupa dello studio di situazioni che coinvolgono due o più parti le quali sono chiamate a prendere delle decisioni (es. individui, aziende, governi, ...). Ognuno di questi decisori è chiamato **giocatore**. In ciascuna di queste situazioni, chiamate appunto **giochi**, spesso i giocatori presentano interessi contrastanti e si trovano a dove prendere decisioni individualmente, o talvolta collettivamente, le quali vanno a influenzare sia le azioni future del giocatore stesso che ha preso la decisione, sia quelle degli altri partecipanti. Per questo motivo un aspetto fondamentale della teoria dei giochi è il fatto che ogni singolo giocatore, prima di compiere la propria decisione, presta particolare attenzione e tiene conto delle possibili scelte messe in atto dagli altri.

Sebbene l'appellativo "gioco" possa dare un'impressione prettamente ludica, queste circostanze appena descritte sono tipiche dell'ambito delle scienze economiche e gestionali principalmente, anche se lo spettro dei problemi o delle ricerche a cui può essere applicato il modello della teoria dei giochi è molto più ampio, arrivando a toccare problemi anche di carattere sociale o evolutivo. Alcuni esempi tipici di queste casistiche sono una competizione tra due imprese in un mercato, la relazione tra impresa produttrice e i propri consumatori, la scelta di un'adeguata campagna pubblicitaria per il lancio di un prodotto sul mercato.

Per poter affrontare i problemi della teoria dei giochi è necessario fare delle ipotesi sul comportamento che si assume abbiano i giocatori: essi sono razionali e pensano strategicamente. Per essere razionale si intende che ogni giocatore ha delle preferenze chiare, nell'ottica di massimizzare il proprio guadagno, le quali vengono espresse in termine quantitativo da una funzione payoff, che verrà definita matematicamente nella sezione successiva, ma soprattutto è cosciente del numero dei giocatori, delle preferenze di questi e dell'insieme delle loro possibili decisioni. In questo modo ogni giocatore può pensare strategicamente, ossia in situazioni di incertezza sulla strategia da attuare, esso può formulare delle idee su come possano agire i rivali in base alle loro preferenze e come questi possano influenzare il gioco. Il numero di giocatori e l'insieme delle loro strategie sono considerate le regole del gioco, la conoscenza basilare di ogni partecipante. Dunque ogni attore è consapevole di affrontare giocatori razionali e che pensano strategicamente. Queste assunzioni sono alquanto forti e in alcuni casi si distanziano molto dalle circostanze reali, ma essendo fissate per creare un modello semplificato di un problema, spesso sono sufficienti a ottenere delle previsioni accurate sugli sviluppi futuri del gioco.

Un'essenziale distinzione operata dagli studiosi della teoria dei giochi è quella tra giochi cooperativi e giochi non cooperativi. Si definisce un **gioco non cooperativo** quando l'ambiente in cui esso si sviluppa è caratterizzato dal fatto che ogni giocatore agisce nel proprio interesse, senza prendere in considerazione alcuna possibilità di stringere un accordo per agire congiuntamente agli altri, che sono dunque tutti rivali. Un aspetto fondamentale di queste situazioni è l'incertezza strategica, ossia ogni giocatore non è a conoscenza di come agiranno i rivali. Si parla invece di **gioco cooperativo** quando viene assunto che i giocatori realizzano di poter ottenere un guadagno tramite la coordinazione di azioni volte ad ottenere un beneficio comune; in questo modo compare un nuovo elemento rispetto ai giochi non cooperativi, ossia le strategie di gruppo. In questo elaborato verranno presi in considerazione solo casi di giochi non cooperativi, fuorché un breve accenno nell'ultimo capitolo.

Definizioni

Consideriamo un insieme di giocatori $I = \{1, \dots, N\}$ e elenchiamo una serie di definizioni fondamentali per la trattazione dei problemi che verranno affrontati.

Definizione 1. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \dots, N\}$, si definisce **controllo** (o **strategia**) del giocatore i-esimo la funzione*

$$u^i(\cdot) = [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$$

che associa ad ogni istante di gioco l'azione $u^i(t)$ scelta in quel dato istante t dal suddetto giocatore.

Quindi $u(t) = (u^i(t), \dots, u^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle azioni compiute da tutti i giocatori all'istante t, a cui solitamente viene assegnato il nominativo di **profilo d'azione**.

Definizione 2. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \dots, N\}$, si indica con U^i l'**insieme dei controlli ammissibili** che il giocatore i-esimo può attuare in ogni istante del gioco, ovvero deve valere che ogni strategia $u^i(t) \in U^i \ \ \forall t \in [0, T]$.*

Nel caso in cui un gioco non segua uno sviluppo in istanti consecutivi, le due definizioni appena trattate permangono omettendo le indicazioni temporali.
La nozione di profilo d'azione è fondamentale nella teoria dei giochi in quanto la strategia è una funzione che indica al giocatore come selezionare uno dei propri controlli ammissibili nel momento in cui debba compiere un'azione, a seconda di tutti i possibili eventi occorsi fino all'istante corrente. Risulta utile dunque quest'ulteriore definizione:

Definizione 3. *La **storia del gioco** fino al tempo t, indicata con h_i, è una sequenza dei profili d'azione $u(1), \dots, u(t-1)$, ove ciascuno di tali profili è un insieme di n azioni individuali attuate da tutti gli attori dell'insieme $I = \{1, \dots, N\}$ durante il gioco.*

Dunque, una strategia può essere vista come una mappa che va dall'insieme di tutte le possibili storie del gioco all'insieme dei controlli ammissibili. È importante notare come la strategia prescrive tutte le possibili scelte del giocatore per ogni possibile storia del gioco, anche per quelle che non verranno mai osservate, poiché i giocatori potrebbero scegliere azioni diverse da quelle che generano tali storie.

Definizione 4. *Sia data una funzione a valori reali $J^i : (U^1 \times U^2 \times \dots \times U^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ per ogni giocatore $i \in I$. Definiamo **payoff** del giocatore $i \in \mathbb{N}$ il valore $J^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$ se i giocatori usano le strategie $(u^1, u^2, \dots, u^n) \in (U^1 \times U^2 \times \dots \times U^N)$*

Il payoff per ogni giocatore rappresenta quindi il valore che esprime la valutazione del risultato ottenuto dallo stesso giocatore, a seguito delle strategie operate da tutti i giocatori coinvolti.

Classificazioni

Nell'ambito della teoria dei giochi possono essere effettuate numerose distinzioni a seconda del problema che si va ad affrontare.[2].
La prima differenza basilare è quella tra **gioco finito**, ossia quando il numero di giocatori coinvolti e il numero di controlli ammissibili è finito ($|I| < \infty$ e $|U^i| < \infty \ \ \forall i \in I$)[3], altrimenti si parla di **gioco infinito**, anche se solo una delle due cardinalità è infinita. Nel caso di gioco infinito, un'opportuna restrizione al caso finito riesce ad approssimarlo in maniera sufficientemente precisa, in modo tale da riuscire ad ottenere uno studio più semplice, anche se leggermente impreciso, del gioco iniziale, interpretando i giochi infiniti come limite dei corrispondenti giochi finiti.

Come già anticipato all'inizio della sezione, è presente una distinzione a seconda che l'approccio tra gli attori sia individuale o di gruppo. Si definisce **gioco cooperativo** quando la tendenza dei giocatori è quella di voler prendere, o essere costretti a prendere, decisioni di comune accordo con gli altri partecipanti, coordinando le strategie di ciascuno. Tale situazione si presenta ad esempio quando due enti (aziende all'interno di un mercato, organizzazioni o istituzioni politiche internazionali, . . .) agiscono per uno scopo comune.
Al contrario, si definisce **gioco non cooperativo** quando prevale la rivalità tra i giocatori e non viene trovato alcun accorso, agendo solamente in funzione dello scopo individuale. Un esempio tipico di questa categoria è la competizione in termini di sforzi pubblicitari per il lancio di un medesimo prodotto sul mercato tra due aziende rivali nel settore, in ottica di una massimizzazione del guadagno.

Un'altra suddivisione tra le tipologie di gioco riguarda i valori assunti dai payoff dei giocatori.
Un gioco si definisce **gioco a somma zero** quando

$$\sum_{i=1}^{n} J^i(u^1, u^2, \dots, u^n) = 0 \quad \forall (u^1, u^2, \dots, u^n) \in (U^1 \times U^2 \times \dots \times U^N)$$

[2]Verranno elencate solamente le categorie che abbiano una rilevanza per quanto riguarda questo elaborato. In particolare sono state omesse le definizioni di gioco gerarchico, gioco di Stackelberg, con i relativi concetti di *leader* e *follower*, gioco ripetuto, *one-shot game*, per i quali si invita a consultare [1],[4],[5], per una trattazione più accurata.

[3]$|A|$ sta ad indicare la cardinalità dell'insieme A.

In questa tipologia di problemi le vincite e le perdite dei giocatori sono perfettamente bilanciate. È un caso facilmente riscontrabile in partite di giochi a due rivali, come gli scacchi: supponendo che i tre risultati possibili siano rappresentati da (+1) per la vittoria, (0) per il pareggio e (-1) per la sconfitta, allora gli esiti possibili per le coppie di payoff dei giocatori al termine della partita possono essere (1,-1) in caso di vittoria del giocatore A, (0,0) in caso di pareggio, (-1,1) se vince il giocatore B. La somma dei valori dà chiaramente zero come si voleva.
Se invece in un gioco la somma descritta sopra non è nulla ma è pari a un numero costante qualsiasi, si parla di **gioco a somma costante**.
Infine un **gioco non a somma zero** si verifica quando la sommatoria dei payoff è diversa da zero almeno in un caso.

Un'ulteriore distinzione, che sarà utile nel capitolo successivo, è quella tra giochi statici e dinamici. Un **gioco statico** è caratterizzato dal fatto che i partecipanti attuano una strategia una sola volta, che andrà a coincidere dunque con la scelta di un controllo un'unica volta e per tutti i giocatori. In questa tipologia di giochi è assente una storia del gioco sulla quale i giocatori possono basare la propria scelta del controllo. Sempre rimanendo in ambito ludico, un classico esempio di questa classe è il gioco del pari e dispari. Si ha invece un **gioco dinamico** se anche solo un giocatore può attuare una strategia condizionata dalla storia del gioco stesso. Spesso la definizione di gioco dinamico si riferisce a un problema nel quale tutti i partecipanti sono a conoscenza di tutti i controlli attuati in precedenza dagli altri attori. Anche in questo caso può essere applicato l'esempio del gioco degli scacchi, in cui un giocatore compie una mossa basandosi sulle mosse fatte fino a quel determinato istante.

Si parla poi di **giochi simultanei** quando le scelte dei giocatori avvengono appunto simultaneamente, ove nessuno conosce le decisioni prese dagli altri nel momento dell'azione. Al contrario, se è presente un ordine d'azione tra i partecipanti al gioco si parla di **giochi sequenziali**.

L'ultima categorizzazione viene presentata a partire dalle caratteristiche dei giocatori stessi. Si parla di **gioco a informazione completa** un gioco nel quale ogni partecipante soddisfa le ipotesi di intelligenza e razionalità di cui si parlava all'inizio della sezione, mentre quando qualche elemento causa la caduta di queste ipotesi determinanti, si parla di **gioco a informazione incompleta**.

Modelli di rappresentazione

Nella teoria dei giochi non cooperativi si possono distinguere due tipi di modelli utilizzabili per la rappresentazione di un gioco: la forma estesa e la forma strategica.
La **forma strategica** è un modello che include una lista di tutte le possibili strategie attuabili da tutti i giocatori, ognuno dei quali si suppone debba scegliere uno dei controlli ammissibili prima di agire nel gioco indipendentemente dagli altri, senza poterci comunicare o cooperare, dunque senza informazione di alcun tipo sul comportamento che assumeranno i rivali. Questo modello è caratterizzato dalla totale assenza di riferimenti temporali, ma nonostante ciò può comunque rappresentare un gioco che si sviluppa lungo vari periodi di tempo. In questo caso un giocatore razionale è in grado di determinare in anticipo un piano possibile per le azioni che dovrà compiere per tutta la durata del gioco.
In questo tipo di caratterizzazione si è soliti usare una rappresentazione matriciale della situazione, detta **matrice dei payoff**.

Esempio 1. [7] Consideriamo un caso semplice di un gioco a due giocatori: è utile l'impiego di una bimatrice, nella quale righe e colonne sono rispettivamente intestate ai controlli che possono essere scelti dal giocatore A e dal giocatore B. Il primo può scegliere se attuare la strategia A o B, mentre il secondo sceglie tra C e D; otteniamo dunque la seguente bi-matrice:

Tabella 1.1: Bi-matrice di payoff per gioco a due giocatori

1/2	C	D
A	$(J_1(A,C), J_2(A,C))$	$(J_1(A,D), J_2(A,D))$
B	$(J_1(B,C), J_2(B,C))$	$(J_1(B,D), J_2(B,D))$

In questa bimatrice, ad esempio, il termine $(J_1(A,D), J_2(A,D))$ rappresenta la coppia formata dal payoff del primo e del secondo partecipante nel caso in cui il giocatore 1 giochi A e il giocatore 2 giochi D. Si suppone che la strategia venga scelta prima dell'inizio del gioco stesso e che ciò avvenga indipendentemente dagli altri attori. Il più delle volte tale forma viene assunta per raffigurare giochi simultanei. Essendo la tabella precedente una matrice dei payoff generale per il caso di un gioco a due, viene mostrato come potrebbe apparire nel caso siano definite delle precise funzioni per payoff e strategie:

Tabella 1.2: Esempio particolare di bi-matrice di payoff per gioco a due giocatori

1/2	C	D
A	$(4,5)$	$(-3,1)$
B	$(2,0)$	$(3,-1)$

Il caso di un modello di **forma estesa** riguarda soprattutto il caso di giochi sequenziali, in cui il gioco viene rappresentato tramite un diagramma ad albero detto **albero del gioco**. La forma estesa include una descrizione della sequenza con la quale i giocatori devono compiere le azioni, così come i momenti nei quali questi devono compiere una scelta, rappresentati dai nodi decisionali, mentre al termine di ogni possibile percorso della storia del gioco vi è un nodo terminale rappresentante il payoff associato ad esso.

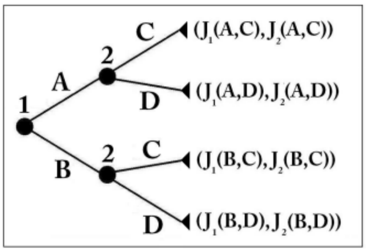

Figura 1.1: Albero di gioco generale per l'esempio 1.

Il giocatore 2 effettua una scelta tra i controlli C e D solo dopo che il giocatore 1 ha scelto tra le opzioni A e B. I nodi decisionali sono rappresentati dai cerchi, invece i terminali con dei triangoli.

La precedenza dell'azione o la simultaneità dev'essere invece premessa nella forma strategica che non fornisce indicazioni al riguardo. Dunque, come già detto sopra, a seconda del gioco in analisi viene scelto un modello rispetto ad un altro.

1.3 Equilibri

IL fulcro degli studi della teoria dei giochi è costituito dalla ricerca degli equilibri, in modo tale da poter prevedere il risultato e gli sviluppi della storia del gioco. Dando per assodate le ipotesi sui giocatori definite precedentemente, è necessario dare alcune definizioni fondamentali prima di arrivare al concetto principale di equilibrio di Nash[4].

Definizione 5. *Si definisce **strategia pura** per un giocatore $i \in I = \{1, \dots, n\}$ la strategia s^i_j da esso scelta prima dell'inizio del gioco nell'insieme delle strategie $S^i = \{s^i_1, \dots, s^i_{m^i}\}$, nel quale il giocatore stesso può effettuare la propria scelta (ovvero $j \in \{1, \dots, m^i\}$).*

[4] Verrà omessa la trattazione specifica di giochi con strategie miste e tutte le definizioni e teoremi relativi a queste ultime, in quanto non verranno considerati all'interno di questo elaborato casi di giochi in cui sono coinvolte decisioni di questo tipo (in [1], [2],[4], [7] sono presenti studi più approfonditi a riguardo). Si parla di strategie miste quando il gioco in analisi è caratterizzato da una distribuzione di probabilità definita sull'insieme di strategie pure di ogni giocatore.

Definizione 6. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce* ***equilibrio nell'ambito delle strategie pure*** *la combinazione di strategie pure*

$$(s_e^i, \ldots, s_e^n) \in S^1 \times \cdots \times S^n$$

se per nessuno dei giocatori è conveniente cambiare la propria strategia.

La tecnica più basilare per determinare equilibri nel caso in cui gli attori del gioco facciano utilizzo di strategie pure è associata al concetto di strategia dominata.

Definizione 7. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce* ***strategia dominata*** *per il giocatore $i \in I$ una strategia pura $s_j^i \in S^i$ tale che*

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) < J_i(s_*^i, s^{-i}), \quad \exists s_*^i \neq s_j^i, \;\; \forall s^{-i} \in S^{-i},$$

ove con s^{-i} si indicano le strategie scelte da tutti i giocatori meno l'i-esimo, ovvero

$$s^{-i} = (s^1, \ldots, s^{i-1}, s^{i+1}, \ldots, s^n) \in S^{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n.$$

A questa definizione accompagniamo anche le seguenti:

Definizione 8. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce* ***strategia debolmente dominata*** *per il giocatore $i \in I$ una strategia $s_j^i \in S^i$ tale che*

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) \leq J_i(s_*^i, s^{-i}), \quad \exists s_*^i \neq s_j^i, \;\; \forall s^{-i} \in S^{-i},$$

e tale che

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) < J_i(s_*^i, s^{-i}), \quad \exists s_*^i \neq s_j^i, \;\; \exists s^{-i} \in S^{-i},$$

Definizione 9. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce* ***strategia dominante*** *per il giocatore $i \in I$ una strategia pura $s_j^i \in S^i$ tale che*

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) > J_i(s_*^i, s^{-i}), \quad \forall s_*^i \neq s_j^i, \;\; \forall s^{-i} \in S^{-i},$$

Definizione 10. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce* ***strategia debolmente dominante*** *per il giocatore $i \in I$ una strategia $s_j^i \in S^i$ tale che*

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) \geq J_i(s_*^i, s^{-i}), \quad \forall s_*^i \neq s_j^i, \;\; \forall s^{-i} \in S^{-i},$$

e tale che

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) > J_i(s_*^i, s^{-i}), \quad \forall s_*^i \neq s_j^i, \;\; \exists s^{-i} \in S^{-i},$$

Applicando iterativamente la nozione di strategia dominante, siamo guidati ad un'unica scelta di strategia per ogni giocatore, questo però nel caso di giochi relativamente semplici. Una vasta classe di giochi che ammette un equilibrio tramite strategia dominante sono quelli della forma del dilemma del prigioniero [5].

Il concetto di strategia dominante è molto forte, ci si aspetta dunque che nella maggior parte dei giochi tali condizioni, richieste dalla definizione, possano risultare non soddisfatte per ogni giocatore. L'impossibilità di sfruttare questa nozione implica la necessità di adottare un concetto di equilibrio che, nonostante sia più debole, renda comunque possibile prevedere il risultato del gioco. Viene introdotto per questo motivo uno dei concetti più fondamentali della teoria dei giochi, l'equilibrio di Nash.

Definizione 11. *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$, indicando con U^i l'insieme delle strategie ammissibili per il giocatore i-esimo, si definisce* ***equilibrio di Nash*** *una combinazione di strategie*

$$(u_N^1, \ldots, u_N^n) \in U^1 \times \cdots \times U^n$$

tale che per ogni giocatore $i \in I$

$$J_i(u_N^1, \ldots, u_N^i, \ldots, u_N^n) \geq J_i(u_N^1, \ldots, u^i, \ldots, u_N^n) \quad \forall u^i \in U^i$$

[5] Per un migliore approfondimento su tale esempio, forse il più conosciuto riguardo la teoria dei giochi, si invita a consultare [5],[7]

Il significato della definizione appena data è il seguente: quando un giocatore si aspetta, razionalmente, che tutti i suoi rivali scelgano le loro strategie di equilibrio di Nash, tale giocatore non può far altro che scegliere la propria strategia di equilibrio di Nash. Essendo tutti gli attori razionali e consci della razionalità degli altri giocatori coinvolti, nessuno di questi è spinto a prendere una strategia diversa da quella che porta all'equilibrio di Nash, poiché ne ricaverebbe un payoff peggiore o quantomeno invariato. Dunque, se tutti i protagonisti prevedono un particolare equilibrio di Nash come risultato del gioco, è inevitabile che siano scelte come rispettive strategie quelle che conducono a tale equilibrio.

Inizialmente ci si potrebbe aspettare che data l'unicità dell'equilibrio per le strategie strettamente dominanti, l'unicità dell'equilibrio di Nash possa non essere garantita, a causa della natura più debole della definizione. Nash riuscì a dimostrare che nel caso di un numero finito di giocatori $N < \infty$ e di strategie ($|U^i| < \infty$), ossia in un gioco finito, vale il seguente teorema

Teorema 1. *(Teorema di Nash) Ogni gioco finito ammette almeno un equilibrio di Nash.*

La dimostrazione di questo risultato fondamentale è omessa, si invita a consultare [9] per poterne ripercorrere i passi.

Capitolo 2

Giochi differenziali

In questo capitolo si andrà a definire la classe di giochi all'interno della quale ricadono i giochi lineari quadratici, una delle categorie di giochi che trova oggi numerose applicazioni in molteplici ambiti, ossia i giochi differenziali.
Prima di affrontare tale discussione, è necessario ripercorrere la distinzione tra giochi dinamici e giochi statici attuata nel capitolo precedente. Come definito in precedenza, un gioco dinamico è caratterizzato dal fatto che almeno un giocatore ha a disposizione una strategia condizionata dalla storia del gioco stesso, quindi sulle informazioni raccolte fino al momento dell'azione, mentre un gioco statico è privo di tale caratteristica, con gli attori che si muovono un'unica volta. I giochi differenziali ricadono nella categoria dei giochi dinamici, in quanto la storia del gioco è definita da delle particolari equazioni che andremo a vedere nelle sezioni successive.

2.1 Giochi differenziali

I **giochi differenziali** appartengono alla categoria dei giochi dinamici e sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

- un insieme di variabili che definiscono lo stato [1] del sistema dinamico [2] ad ogni istante di svolgimento del gioco del gioco
- l'evoluzione temporale delle variabili di stato è descritta da un insieme di equazioni differenziali.

Data la presenza di equazioni differenziali, da cui il nome di questa classe di giochi, si capisce come questa tipologia di problemi sia a tempo continuo.

La struttura generale di un gioco differenziale presenta delle caratteristiche peculiari che verranno ora analizzate. Un gioco differenziale può estendersi lungo un **orizzonte temporale** finito $[0.T]$ oppure infinito $[0, \infty)$. Per semplificare la costruzione in modo da trattare entrambi i casi simultaneamente, viene definito un intervallo temporale $[0, T\rangle$ ove $[0, T\rangle = [0.T]$ se $T < \infty$, altrimenti $[0, T\rangle = [0.\infty)$ se $T = \infty$. Lo stato del gioco a ogni istante $t \in [0, T\rangle$ è descritto da un **vettore di stato** $x(t) \in X$, con

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

dove $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è lo **spazio degli stati** del gioco, insieme contenente tutti i possibili stati del gioco. Lo stato iniziale del gioco è dato da una costante $x(0) = x_0 \in X$. Per ogni giocatore $i \in \{1, \ldots, N\}$, verrà denotata ogni variabile, funzione e parametro specifico ad esso con degli apici.
Ad ogni istante $t \in [0, T\rangle$, ogni attore sceglie una variabile di **controllo** $u^i(t)$ da un rispettivo insieme di **controlli ammissibili** $U^i \subseteq \mathbb{R}^{m^i}$. Generalmente, tale insieme dipende dal tempo t, dallo stato attuale

[1] Con stato del sistema indichiamo l'insieme dei valori che assumono le variabili, tipico di ogni istante t.

[2] Il significato di questa definizione è quello di poter associare la struttura del gioco a un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo di un insieme di variabili, seguendo determinate leggi che collegano lo stato presente del modello a quello futuro.

$x(t)$ e dal vettore $u^{-i}(t)$ (infatti verrà talvolta usata la notazione $U^i(x(t), u^{-i}(t), t)$ per richiamarlo) costituito da tutti i controlli dei rivali al tempo t, ossia

$$u^{-i} = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^{i-1}(t), u^{i+1}(t), \dots, u^N(t)).$$

La dinamica del gioco, ossia l'evoluzione del vettore di stato e delle variabili, è definita da un insieme di equazioni differenziali che vengono definite **traiettoria del gioco**, ovvero

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^1(t), \dots, u^N(t), t) \qquad x(0) = x_0$$

nella quale la funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è definita nell'insieme

$$\Omega = \Big\{(x, u^1, \dots, u^N, t) | x \in X, t \in [0, T\rangle, u^i \in U^i(x, u^{-i}, t), i = 1, \dots, N\Big\}$$

e assume valori in $\mathbb{R}^n$.
Ogni giocatore $i \in \{1, \dots, N\}$ punta a massimizzare il **funzionale obiettivo** (**payoff**) descritto da

$$J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^T e^{-r^i t} F^i(x(t), u^1(t), \dots, u^N(t), t) dt + e^{-r^i T} S^i(x(T)).$$

Nell'integrale soprastante, $F^i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è la **funzione di utilità** del giocatore i-esimo, r^i è il parametro di attualizzazione individuale, riferito al **fattore di attualizzazione** $e^{-r^i t}$; infine $S^i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione **scrap value**, la quale esprime l'utilità del valore finale dello stato, perciò risulta nulla ($S(x) = 0 \quad \forall x \in X$) nel caso in cui $T = \infty$.

Ciascun giocatore mira a massimizzare il proprio payoff tramite la scelta di un controllo nel rispettivo insieme dei controlli ammissibili. Si può avere a che fare con situazioni nelle quali ad esempio si punta a massimizzare un profitto o una risorsa, oppure nel minimizzare un costo. Nella seconda circostanza semplicemente si considera il problema nel quale viene massimizzato l'opposto dei costi. Dunque siamo giunti a formulare il seguente problema di controllo ottimo [3] per il giocatore i-esimo:

$$max \quad J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^T e^{-r^i t} F^i(x(t), u^1(t), \dots, u^N(t), t) dt + e^{-r^i T} S^i(x(T)) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \textit{soggetto a} \;\; & \dot{x}(t) = f(x(t), u^1(t), \dots, u^N(t), t) \\ & x(0) = x_0 \in X \\ & u^i(t) \in U^i(x(t), u^{-i}(t), t) \end{aligned}$$

2.2 Teoria del controllo ottimo

Come anticipato nella sezione precedente, per risolvere la questione della ricerca degli equilibri di Nash di un gioco differenziale dobbiamo rifarci alla teoria dei problemi di controllo ottimo. Più precisamente, risolvere un gioco differenziale a N giocatori equivale a risolvere N problemi di controllo ottimo interdipendenti tra loro. In questa sezione verranno fornite le due tecniche di risoluzione per tali problemi, ossia l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman e il principio del massimo di Pontryagin, seguendo la trattazione in [1], [2] e [6]. Inizialmente verranno affrontati entrambi gli approcci in un problema a tempo finito, mentre nell'ultima parte i risultati ottenuti verranno adattati al caso più generalizzato di un orizzonte temporale infinito.[4]

[3] Un problema di controllo ottimo è un problema che studia l'evoluzione di un sistema dinamico che evolve nel tempo sotto certe leggi cercando di massimizzare o minimizzare una determinata funzione

[4] Per semplicità e coerenza coi temi affrontati nei successivi capitoli, ci poniamo nel caso di funzioni di classe C^∞, ovvero lei cui derivate rispetto a ciascuna variabile e di ciascun ordine esistano con continuità.

Innanzitutto, ci si focalizza sulla risoluzione di un problema per un singolo giocatore, ipotizzando che tutte le azioni degli altri protagonisti siano fissate. Dunque stiamo osservando il seguente problema

$$max \quad J(u(\cdot)) = \int_0^T e^{-rt} F(x(t), u(t), t)dt + e^{-rT} S(x(T)) \tag{2.2}$$

$$soggetto \ a \ \ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{2.3}$$
$$x(0) = x_0 \in X \tag{2.4}$$
$$u(t) \in U(x(t), t) \tag{2.5}$$

Viene introdotta per questo problema la notazione $P(x_0, 0)$ per indicarne lo stato e il tempo iniziale. La prima tecnica di risoluzione prevede un approccio al problema mediante due principi detti "di comprensione" e "di ricorsione". Per il *principio di comprensione*, la soluzione finale viene ricavata risolvendo non solo il problema $P(x_0, 0)$, ma tutta la classe di problemi $\{P(x,t)|x \in X, \ t \in [0,T]\}$, ove $P(x,t)$ è il generico problema che inizia al tempo t con lo stato x, ossia

$$max \quad J(u(\cdot)) = \int_t^T e^{-r(s-t)} F(x(s), u(s), s)ds + e^{-r(T-t)} S(x(T)) \tag{2.6}$$

$$soggetto \ a \ \ \dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s)$$
$$x(t) = x$$
$$u(s) \in U(x(s), s)$$

Tale intuizione risulta particolarmente efficace se unita al *principio di ricorsione*, secondo il quale considerando l'intera famiglia di problemi, dovrà essere data precedenza alla risoluzione dei problemi "minori" ($P(x,T)$), per poi procedere fino a quelli "più grandi" ($P(x,0)$). Procedendo dunque dal primo, che ha inizio all'istante T, osserviamo che il payoff da massimizzare si riduce a

$$J(u(\cdot)) = \int_T^T e^{-r(s-T)} F(x(s), u(s), s)ds + e^{-r(T-T)} S(x(T)) = S(x(T)) = S(x)$$

Perciò, l'unico valore ammissibile, di conseguenza ottimo, del funzionale obiettivo sarà dato da

$$V(x,T) = S(x)$$

con $V(x,t)$ a indicare il valore ottimo del payoff per il problema $P(x,t)$.
Consideriamo ora il problema $P(x,t)$, mirando a trovare il relativo controllo ottimo $u^*(\cdot) : [t,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Ci si colloca in un futuro immediato $t + \Delta$, $\Delta \to 0$, in modo che qualsiasi controllo ammissibile $u(\cdot) : [t, t+\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ conduca dallo stato x allo stato $x(t+\Delta)$. Proseguendo in tal senso per il restante intervallo fino a T, il valore ottimo del funzionale sarà $V(x(t+\Delta), t+\Delta)$, dunque si ricava un'utilità del tipo

$$\int_t^{t+\Delta} e^{-r(s-t)} F(x(s), u(s), s)ds + e^{-r\Delta} V(x(t+\Delta), t+\Delta).$$

Scegliendo il controllo in maniera ottima, se ne trae il valore ottimo del payoff nell'intero intervallo temporale preso in considerazione in principio, massimizzando l'utilità sotto i vincoli iniziali $(2.3) - (2.5)$

$$V(x,t) = \max_{u \in U(x,t)} \left\{ \int_t^{t+\Delta} e^{-r(s-t)} F(x(s), u(s), s)ds + e^{-r\Delta} V(x(t+\Delta), t+\Delta) \right\}.$$

Sottraendo ambo i membri $V(x,t)$, dividendo successivamente per Δ, si ottiene:

$$0 = \max_{u \in U(x,t)} \left\{ \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} e^{-r(s-t)} F(x(s), u(s), s)ds + \frac{e^{-r\Delta} V(x(t+\Delta), t+\Delta) - V(x,t)}{\Delta} \right\}$$

Calcolando il limite per $\Delta \to 0$, si ricava dal primo addendo

$$F(x(t), u(t), t)$$

per il teorema della media integrale [5], mentre il secondo addendo restituisce

$$-rV(x(t), t) + V_x(x(t), t)\dot{x}(t) + V_t(x(t), t).$$

Essendo le considerazioni avvenute sotto le restrizioni dei vincoli (2.3) – (2.5), si sostituisce (2.3) a $\dot{x}$ e si inseriscono dunque i risultati dei due addendi all'interno dell'equazione. Inoltre, potendo il giocatore scegliere soltanto il controllo $u = u(t)$, si ottiene l'equazione

$$rV(x, t) - V_t(x, t) = \max\{F(x, u, t) + V_x(x, t)f(x, u, t)|u \in U(x, t)\}, \tag{2.7}$$

che è chiamata **equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman** (HJB).

Permane la problematica della differenziabilità della funzione $V(x, t)$ e la conseguente risoluzione dell'equazione (2.7). Il seguente teorema garantisce l'ottimalità assumendo $V(x, t)$ infinitamente differenziabile.

Teorema 2. ***(Hamilton-Jacobi-Bellman)*** *Sia $V : X \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ che soddisfa l'equazione HJB*

$$rV(x, t) - V_t(x, t) = \max\{F(x, u, t) + V_x(x, t)f(x, u, t)|u \in U(x, t)\}$$

e la condizione finale

$$V(x, T) = S(x)$$

per ogni $(x, t) \in X \times [0, T]$. Sia $\Phi(x, t)$ l'insieme dei controlli $u \in U(x, t)$ massimizzanti il membro destro dell'equazione HJB. Se $u^*(\cdot)$ è un controllo ammissibile con corrispondente traiettoria di stato $x^*(\cdot)$ e se $u^*(\cdot) \in \Phi(x(t), t)$ per quasi ogni $t \in [0, T]$, allora $u^*(\cdot)$ è un controllo ottimo. Inoltre, $V(x, t)$ è il valore ottimo del problema $P(x, t)$.

Si riprenda l'equazione (2.7) appena introdotta, ricordando che per il teorema (2) i controlli ammissibili massimizzanti il membro destro

$$\max\{F(x, u, t) + V_x(x, t)f(x, u, t)|u \in U(x, t)\} \tag{2.8}$$

risultano essere ottimi. Partendo da questa informazione, si può costruire un metodo di risoluzione alternativo al procedimento di Hamilton-Jacobi-Bellman. Necessarie per lo sviluppo di tale procedimento sono le definizioni che seguono:

Definizione 12. *Definiamo **funzione Hamiltoniana** associata al problema di controllo ottimo una funzione*

$$H : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R},$$

ove $\Gamma = \{(x, u, \lambda, t)|x \in X, u \in U(x, t), \lambda \in \mathbb{R}^m, t \in [0, T]\}$, definita come segue:

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda f(x, u, t),$$

*ove F è la funzione integranda del funzionale obiettivo, f è la funzione rappresentante la dinamica del problema e λ è la **variabile aggiunta** (o di **co-stato**) associata allo stato x.*

[5] [10] *Teorema della media integrale*: Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora si ha

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Nel caso f sia funzione continua, allora $\exists x \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x).$$

La variabile aggiunta viene introdotta in maniera strumentale, in quanto sarà ricollegabile ad una funzione associata ad ogni variabile di stato, in modo tale da soddisfare le condizioni del principio per ottenere il controllo ottimo.

Definizione 13. *Chiamiamo* ***funzione Hamiltoniana massimizzata*** *associata al problema di controllo ottimo una funzione*

$$H^* : X \times \mathbb{R}^n \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$H^*(x,\lambda,t) = \max\{H(x,u,\lambda,t) | u \in U(x,t)\}.$$

Si supponga il massimo di (2.8) corrisponda alla scelta di $\hat{u}(t) \in U(x(t),t)$, allora per la definizione di Hamiltoniana massimizzata è possibile riformulare l'equazione (2.7) sostituendo $V_x(x,t)$ alla variabile aggiunta

$$rV(x,t) - V_t(x,t) = H^*(x, V_x(x,t), t)$$

e derivando rispetto allo stato otteniamo

$$rV_x(x,t) - V_{t,x}(x,t) = H^*_x(x, V_x(x,t), t) + V_{x,x}(x,t) H^*_{V_x}(x, V_x(x,t), t).$$

Sono necessarie a questo punto due osservazioni:

- $H^*_{V_x}(x, V_x(x,t), t) = H_{V_x}(x, \hat{u}(t), V_x(x,t), t)$
- $H_{V_x}(x, \hat{u}(t), V_x(x,t), t) = f(x, \hat{u}(t), t)$ per la definizione di Hamiltoniana

per le quali si ottiene la (2.7) nella forma

$$rV_x(x,t) - V_{t,x}(x,t) = H^*_x(x, V_x(x,t), t) + V_{x,x}(x,t) f(x, \hat{u}(t), t). \tag{2.9}$$

Si prenda in considerazione una coppia controllo-stato ottima $(u^*(t), x^*(t))$ e si definisca la variabile di costato $\lambda : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, come $\lambda(t) = V_x(x^*(t), t)$. Avendo assunto l'ottimalità, questa coppia dovrà essere tale da massimizzare l'equazione (2.7), dunque si avrà $u^*(t) = \hat{u}(t)\ \ \forall t$. È immediato dedurre che $H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda(t), t)$ per quasi ogni $t \in [0,T]$. Di conseguenza, data una tripletta $(x^*(t), \lambda(t), t)$, il controllo ottimo scelto nell'insieme dei controlli ammissibili massimizza l'Hamiltoniana. Questa è la prima condizione che caratterizzerà l'enunciato del principio di Pontryagin.
Al fine di ottenere un ulteriore requisito per l'ottimalità, si differenzia $\lambda(t) = V_x(x^*(t), t)$ rispetto al tempo t, determinando

$$\dot{\lambda}(t) = V_{x,x}(x^*(t), t) f(x^*(t), \hat{u}(t), t) + V_{x,t}(x^*(t), t)$$

tramite sostituzione con l'equazione di stato e la relazione $u^*(t) = \hat{u}(t)$.
A questo punto, assemblando l'uguaglianza appena sviluppata con la (2.9) valutata in $x^*(t)$ e sfruttando il fatto che $V_{x,t}(x^*(t), t) = V_{t,x}(x^*(t), t)$ lavorando con funzioni sufficientemente derivabili, si giunge all'equazione

$$\dot{\lambda}(t) = rV_x(x^*, t) - H^*_x(x^*, V_x(x^*, t), t) = r\lambda(t) - H^*_x(x^*, \lambda, t),$$

che prende il nome di **equazione aggiunta** del problema in analisi.
Infine come ultimo passo, si prenda la condizione della sezione precedente $V(x,T) = S(x)$ valutata nella traiettoria di stato ottima e differenziata rispetto a x, così da ottenere

$$V_x(x^*, T) = S_x(x^*)$$

che, unita alla definizione di $\lambda(\cdot)$ definisce la condizione di trasversalità

$$\lambda(T) = S_x(x^*) = S'(x^*(T)).$$

Si hanno dunque tutte gli strumenti necessari per enunciare le condizioni sufficienti del **Principio del massimo di Pontryagin** (PMP), le quali sono corrispondono alle tre condizioni del seguente teorema:

Teorema 3. ***(Teorema di Arrow)*** *Siano dati il problema di controllo ottimo per il singolo giocatore formulato precedentemente, le funzioni Hamiltoniana H e Hamiltoniana H^* massimizzata associate a questo, definite come sopra.*
Si assuma che lo spazio X degli stati sia un insieme convesso e che la funzione scrap value S sia infinitamente differenziabile e concava. Sia $u^*(\cdot)$ un controllo ammissibile con corrispondente traiettoria di stato $x^*(\cdot)$.
Se esiste una funzione assolutamente continua[6] $\lambda(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che vengano soddisfatte

1. *la condizione di massimo $H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda(t), t)$*
2. *l'equazione aggiunta $\dot{\lambda}(t) = r\lambda(t) - H^*_x(x^*, \lambda, t)$ q.o.*
3. *la condizione di trasversalità $\lambda(T) = S'(x^*(T))$*

e tale che la funzione $x^* \longrightarrow H^*(x^*, \lambda(t), t)$ sia concava e infinitamente differenziabile rispetto a x^* $\forall t \in [0,T]$, allora $u^*(\cdot)$ è un controllo ottimo.

Da notare come la discussione antecedente al teorema (3) abbia un'importante interpretazione economica sulla variabile aggiunta λ, infatti è stato osservato che $\lambda(t) = V_x(x^*(t), t)$, con V funzione valore ottimo del problema. Dunque, $\lambda(t)$ indica l'utilità marginale dello stato al tempo t lungo la traiettoria di ottimo. Riformulando quest'ultima frase, $\lambda(t)$ rappresenta il più alto prezzo ipotetico che un decisore razionale è spinto a pagare per un aumento infinitesimo dell'unità della variabile di stato al tempo t. Da tale interpretazione discende il nome con cui spesso ci si riferisce alla variabile aggiunta, ovvero il *prezzo ombra* di x.

Orizzonte infinito

Si passa ora a trattare la casistica in cui l'intervallo di programmazione è dato da $[0, +\infty]$. L'obiettivo è quello di ripercorrere la discussione nelle due sottosezioni precedenti, adattandolo alla situazione in cui $T = +\infty$. Si riformula il problema per il singolo giocatore come segue:

$$max \quad J(u(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} F(x(t), u(t), t) dt$$

$$\begin{aligned} soggetto\ a\ \ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ x(0) &= x_0 \in X \\ u(t) &\in U(x(t), t) \end{aligned}$$

Sostanzialmente si affronta un problema molto simile al precedente caso finito, con la differenza che la funzione scrap value in questo caso risulta essere nulla, in quanto non ha senso la presenza di una funzione che esprima il valore terminale del payoff. La nuova problematica, che sorge da ostacolo all'analisi del problema, risulta essere che l'integrale diverga a $+\infty$, non garantendo la convergenza a un numero reale, ovvero l'integrabilità della funzione integranda.
Per risolvere tale difficoltà, è necessario ricorrere ad alcune definizioni utili:

Definizione 14. *Si consideri un problema di controllo ottimo in cui il funzionale obiettivo è dato da*

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} F(x(t), u(t), t) dt. \tag{2.10}$$

Si definisce il ***T-troncamento*** *$J_T(u(\cdot))$ del funzionale obiettivo come*

$$J_T(u(\cdot)) = \int_0^{T} e^{-rt} F(x(t), u(t), t) dt.$$

Un controllo ammissibile $u^*(\cdot)$ è detto

[6] [11] Una funzione $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$ per ogni famiglia di intervalli aperti $(a_j, b_j) \subset [a,b], j = 1, \ldots, k$ a due a due disgiunti tali che $\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j) < \delta$.

- *ottimo di tipo* ***overtaking*** *se per ogni controllo ammissibile* $u(\cdot)$ *esiste un numero finito* τ *tale che*

$$J_T(u^*(\cdot)) - J_T(u(\cdot)) \geq 0$$

vale $\forall T \in [\tau, +\infty)$*;*

- *ottimo di tipo* ***catching up*** *se*

$$\liminf_{T\to+\infty} [J_T(u^*(\cdot)) - J_T(u(\cdot))] \geq 0;$$

ottimo di tipo ***sporadically catching up*** *se*

$$\limsup_{T\to+\infty} [J_T(u^*(\cdot)) - J_T(u(\cdot))] \geq 0.$$

Queste definizioni sono classificate in ordine decrescente di forza, ossia ogni controllo overtaking è catching up, ogni controllo catching up è anche sporadically catching up, mentre le implicazioni inverse generalmente non valgono.

Si procede ora a considerare come i teoremi enunciati in precedenza devono essere modificati in modo da essere applicati al problema con orizzonte infinito. La condizione di trasversalità perde il suo senso, sia per il teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman, sia per il Principio del Massimo di Pontryagin, in quanto è assente la funzione scrap value, ovvero è posta nulla. La tentazione a questo punto sarebbe di sostituire tali condizioni con $\lim_{T\to+\infty} V(x,T) = 0$ e $\lim_{T\to+\infty} \lambda(t) = 0$ rispettivamente. Tuttavia tali condizioni risultano essere dei requisiti eccessivamente forti, nella maggior parte dei problemi, per una sufficiente condizione di ottimalità.

L'alternativa viene fornita osservando le due relazioni seguenti

$$\begin{aligned} J_T(u*(\cdot)) - J_T(u(\cdot)) &\geq e^{-rT}[V(x(T),T) - V(x^*(T),T)] \\ J_T(u*(\cdot)) - J_T(u(\cdot)) &\geq e^{-rT}\lambda(T)[x(T) - x^*(T)], \end{aligned}$$

ove $u(\cdot)$ è un controllo ammissibile arbitrario, mentre $u^*(\cdot)$ è un controllo ammissibile che soddisfa $u(t) \in \Phi(x(t),t)$ per il teorema (2), oppure soddisfa la condizione di massimo e l'equazione aggiunta per il teorema (3). Unendo queste condizioni alle definizioni enunciate sopra, si ottiene il seguente teorema di sufficienza per problemi a intervalli illimitati.

Teorema 4. *Si consideri il problema di controllo ottimo a orizzonte temporale infinito definito all'inizio della sezione.*

1. *Se l'ottimalità è considerata nel senso di un criterio overtaking, allora il teorema per l'equazione HJB (teorema 2) rimane valido, con la differenza che la condizione di trasversalità è sostituita dall'assunzione che per ogni controllo ammissibile* $u(\cdot)$ *esiste un numero finito* τ *tale che*

$$V(x(T),T) - V(x^*(T),T) \geq 0$$

vale per ogni $T \in [\tau, +\infty)$*.*
Allo stesso modo il teorema 3 per il PMP rimane valido nel senso di criterio overtaking se la condizione di trasversalità rispettiva è rimpiazzata dall'assunzione che per ogni controllo ammissibile $u(\cdot)$ *esiste un numero finito* τ *tale che*

$$\lambda(T)[x(T) - x^*(T)] \geq 0$$

vale per ogni $T \in [\tau, +\infty)$*.*

2. *Il teorema sull'equazione HJB e il principio del massimo di Pontryagin rimangono validi nella considerazione di ottimalità per criterio catching up, se le condizioni di trasversalità dei teoremi sono sostituiti da*

$$\liminf_{T\to+\infty} e^{-rT}[V(x(T),T) - V(x^*(T),T)] \geq 0$$

per HJB, e per il PMP da

$$\liminf_{T\to+\infty} e^{-rT}\lambda(T)[x(T) - x^*(T)] \geq 0$$

3. *Il teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman e il Principio del Massimo di Pontryagin rimangono validi nella considerazione di ottimalità per criterio sporadically catching up, se le condizioni di trasversalità dei teoremi sono sostituiti da*

$$\limsup_{T\to+\infty} e^{-rT}[V(x(T),T) - V(x^*(T),T)] \geq 0$$

per HJB, e per il PMP da

$$\limsup_{T\to+\infty} e^{-rT}\lambda(T)[x(T) - x^*(T)] \geq 0.$$

Tutte le condizioni elencate nel teorema soprastante sono solitamente complicate da verificare perché devono valere per ogni controllo ammissibile. I casi più banali in cui queste sono verificate è il caso di una funzione valore V limitata e $r > 0$, oppure nel caso ogni traiettoria di stato ammissibile rimanga limitata (insieme degli stati X limitato) e $\lim_{T\to+\infty} e^{-rT}\lambda(T) = 0$.

Si consideri ora un problema di controllo ottimo nel quale $X = \mathbb{R}^n$, V non sia limitata inferiormente e vi siano delle traiettorie di stato ammissibili $x(\cdot)$ crescenti ad una velocità arbitrariamente alta. In questo caso il teorema precedente risulta inapplicabile perché non può essere garantito che $\lim_{T\to+\infty} e^{-rT}\lambda(T)x(T) = -\infty$ o $\lim_{T\to+\infty} e^{-rT}V(x(T),T) = -\infty$. Questa situazione è tipica in problemi di controllo ottimo lineari quadratici, che vedremo nei capitoli successivi, con uno spazio degli stati illimitato, i quali trovano riscontro in applicazioni molto frequenti nella realtà. Questi modelli di problemi possono essere risolti tramite un'approssimazione ad orizzonte finito, riassumibile nel seguente teorema.

Teorema 5. *Si consideri il problema di controllo ottimo a orizzonte temporale infinito costruito ad inizio della sezione. Operiamo le seguenti assunzioni.*

1. *Per tempi $T > 0$ sufficientemente grandi esiste una funzione infinitamente differenziabile $V(\cdot,\cdot;T) : X \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ che risolve l'equazione di HJB*

$$rV(x,t;T) - V_t(x,t;T) = \max\{F(x,u,t) + V_x(x,t;T)f(x,u,t) | u \in U(x,t)\}$$

e condizione terminale

$$V(x,T;T) = 0.$$

Descriviamo con $\Phi(x,t;T)$ l'insieme dei controlli $u \in U(x,t)$ massimizzanti il membro destro dell'equazione HJB.

2. *Per tutti gli $(x,t) \in X \times [0,+\infty)$ il limite $V(x,t) = lim_{Tto+\infty} V(x,t;T)$ esiste, è finito, ed è una funzione infinitamente differenziabile $V : X \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ che sorve l'equazione HJB*

$$rV(x,t) - V_t(x,t) = \max\{F(x,u,t) + V_x(x,t)f(x,u,t) | u \in U(x,t)\}.$$

Denotiamo $\Phi(x,t)$ l'insieme dei controlli $u \in U(x,t)$ massimizzanti il membro destro di quest'equazione.

3. *Per tempi T sufficientemente grandi esiste un controllo $u_T^*(\cdot)$ e una corrispondente traiettoria di stato $x_T(\cdot)$ soddisfacenti i vincoli del problema e la condizione $u_T^*(t) \in \Phi(x_T(t),t;T)$ per ogni $t \in [0,T]$. Analogamente, esiste un controllo $u^*(\cdot)$ e una corrispondente traiettoria di stato $x(\cdot)$ soddisfacenti i vincoli del problema e la condizione $u^*(t) \in \Phi(x(t),t)$ per ogni $t \in [0,+\infty)$.*

4. *Vale $\limsup_{T\to+\infty} e^{-rT}V(x(T),T) \leq 0$.*

Allora il controllo $u^*(\cdot)$ è ottimo di tipo catching up.

2.3 Equilibri nei giochi differenziali

Si dedica quest'ultima sezione del capitolo all'analisi dei giochi differenziali, applicando il concetto di equilibrio di Nash introdotto nel primo capitolo. La scelta di ogni giocatore tra gli N partecipanti, nell'ottica di massimizzare il proprio payoff, influenza l'evoluzione dello stato del gioco così come il funzionale obiettivo dei rivali. Ogni giocatore si trova dunque a fronteggiare un problema di controllo ottimo di quelli discussi finora, con le azioni dei rivali che diventano parametri del problema, ovvero si sta riconsiderando il sistema definito alla fine della sezione (2.1)

$$max \quad J^i(u^i(\cdot)) = \int_0^T e^{-r^i t} F^i(x(t), u^1(t), \dots, u^N(t), t)dt + e^{-r^i T} S^i(x(T)) \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} soggetto\ a\ \ \dot{x}(t) &= f(x(t), u^1(t), \dots, u^N(t), t) \\ x(0) &= x_0 \in X \\ u^i(t) &\in U^i(x(t), u^{-i}(t), t) \end{aligned}$$

Determinante è l'assunzione fatta a priori secondo la quale ogni giocatore prende la propria decisione contemporaneamente a quelle altrui, in seguito alla quale si può procedere con la formulazione dell'analisi.

Definizione 15. *Dato un insieme di giocatori $i \in \{1, \dots, N\}$, si definisce*

- ***controllo Markoviano*** *per il giocatore $i \in I$ la funzione $\phi^i(\cdot) : [0, T\rangle \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$ che associa ad ogni istante t e ad ogni $x(t)$ il controllo scelto in quell'istante. Se la funzione risulta continua in t e uniformemente Lipschitziana[7] in x per ogni t, allora è detto* ***controllo feedback****;*
- ***controllo open-loop*** *per il giocatore $i \in I$ la funzione $\phi^i(\cdot) : [0, T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$ che associa ad ogni istante t il controllo scelto in quell'istante. In questo caso il controllo deve dipendere anche dallo stato iniziale x_0.*

Entrambi questi due controlli dunque non sono condizionati dalla storia del gioco, ma la differenza sostanziale tra i due sta nel fatto che la strategia Markoviana è influenzata dalle conseguenze della storia del gioco $x(t)$, oltre che dall'istante t stesso, mentre il controllo open-loop fa riferimento solamente al tempo e allo stato iniziale. Riprendendo il concetto di equilibrio di Nash dato nella sezione (1.3), vengono date le prime definizioni per gli equilibri dei giochi differenziali.

Definizione 16. *La N-upla $(\phi^1, \dots, \phi^N)$ di funzioni $\phi^i : X \times [0, T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, è chiamata* ***equilibrio di Nash Markoviano*** *se, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, esiste un controllo ottimo $u^i(\cdot)$ del problema ed è dato dalla strategia Markoviana $u^i(t) = \phi^i(x(t), t)$.*

Definizione 17. *La N-upla $(\phi^1, \dots, \phi^N)$ di funzioni $\phi^i : [0, T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, è chiamata* ***equilibrio di Nash open-loop*** *se, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, esiste un controllo ottimo $u^i(\cdot)$ del problema ed è dato dalla strategia open-loop $u^i(t) = \phi^i(t)$.*

Tali definizioni mostrano che trovare un equilibrio di Nash, Markoviano o open-loop che sia, per un problema a N giocatori, corrisponde a risolvere N problemi di controllo ottimo interdipendenti tra loro, perciò torneranno utili i metodi affrontati nella sezione (2.2). Nel caso di orizzonte infinito, $T = +\infty$ l'ottimalità open-loop esiste nel senso di overtaking, mentre per il Markoviano parliamo di criterio catching up.

È doveroso osservare che vi è una grossa differenza tra le soluzioni di un problema di controllo ottimo e quelle di un gioco differenziale. Infatti, se le soluzioni di un controllo ottimo possono essere rappresentate da diverse strategie, per un gioco differenziale diverse rappresentazioni dello stesso controllo conducono

[7] [11] Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice Lipschitziana se esiste una costante L tale che

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

a un differente problema di ottimizzazione per il giocatore in considerazione. In generale, l'insieme di equilibri open-loop si differenzia dall'insieme di equilibri Markoviani, tuttavia ogni strategia open-loop è per definizione una strategia Markoviana (degenere). Ne consegue che l'insieme di equilibri di Nash open-loop è di fatto un sottoinsieme, solitamente proprio, dell'insieme degli equilibri di Nash Markoviani.

Prima di discutere le condizioni di equilibrio dei giochi differenziali, è bene affrontare brevemente[8] la problematica della consistenza nel tempo di queste soluzioni. Per ogni coppia $(x,t) \in X \times [0,T\rangle$ si definisce il sottogioco $\Gamma(x,t)$ rimpiazzando funzionale obiettivo e dinamiche del sistema del giocatore i con

$$max \quad J^i(u(\cdot)) = \int_t^T e^{-r^i(s-t)} F^i(x(s), u^1(s), \ldots, u^N(s), s) ds + e^{-r^i(T-t)} S^i(x(T))$$

$$\begin{aligned} soggetto \;\; a \;\; \dot{x}(s) &= f(x(s), u^1(s), \ldots, u^N(s), s) \\ x(t) &= x \end{aligned}$$

Definizione 18. *Sia $(\phi^1, \ldots, \phi^N)$ un equilibrio di Nash Markoviano per il gioco $\Gamma(x_0, 0)$ e sia $x(\cdot)$ la traiettoria di stato unica generata da esso. L'equilibrio è detto **consistente nel tempo** se, per ogni $t \in [0,T\rangle$, il sottogioco $\Gamma(x(t),t)$ ammette un equilibrio di Nash Markoviano $(\psi^1, \ldots, \psi^N)$ tale che valga $\psi^i(y,s) = \phi^i(y,s)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$ e per ogni $(y,s) \in X \times [t,T\rangle$.*

In altre parole, un equilibrio di Nash Markoviano è consistente nel tempo se è un equilibrio di Nash Markoviano anche per ogni sottogioco lungo la traiettoria di equilibrio originaria $x(\cdot)$.

Teorema 6. *In un gioco differenziale, ogni equilibrio di Nash Markoviano è consistente nel tempo.[1]*

La consistenza nel tempo potrebbe essere ritenuto un requisito minimo per garantire la credibilità di una strategia. A questo proposito viene introdotto un più appropriato criterio di credibilità, cosicché le strategie ϕ^i rappresentino un comportamento ottimale anche al di fuori della traiettoria di stato dell'equilibrio.

Definizione 19. *Sia $(\phi^1, \ldots, \phi^N)$ un equilibrio di Nash Markoviano per il gioco $\Gamma(x_0, 0)$ e sia $x(\cdot)$ la traiettoria di stato unica generata da esso. L'equilibrio è detto **perfetto nei sottogiochi** se, per ogni $(x,t) \in x \times [0,T\rangle$, il sottogioco $\Gamma(x,t)$ ammette un equilibrio di Nash Markoviano $(\psi^1, \ldots, \psi^N)$ tale che valga $\psi^i(y,s) = \phi^i(y,s)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$ e per ogni $(y,s) \in X \times [t,T\rangle$. Un equilibrio di Nash Markoviano che è perfetto nei sottogiochi viene detto **equilibrio di Nash Markoviano perfetto**.*

Condizioni di equilibrio

Verranno qui di seguito elencati i principali teoremi ([1],[8]) necessari all'analisi delle condizioni di equilibrio in un gioco differenziale, derivanti dalla discussione sui metodi per il controllo ottimo, le cui dimostrazioni possono essere consultate in [1]. I seguenti teoremi non elencano esplicitamente la particolare casistica delle soluzioni open-loop, tuttavia sono facilmente intuibili le semplificazioni che incorrono in tali circostanze.

Teorema 7. *Sia $(\phi^1(t), \ldots, \phi^N(t))$ una N-upla di funzioni $\phi^i : X \times [0,T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$ e si operino le seguenti assunzioni:*

- *esiste un'unica soluzione assolutamente continua $x : [0,T\rangle \longrightarrow X$ del problema del valore iniziale*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \phi^1(x(t),t), \ldots, \phi^N(x(t),t)), \quad x(0) = x_0;$$

- *per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$ esiste una funzione infinitamente differenziabile $V^i : X \times [0,T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che le equazioni HJB*

$$r^i V^i(x,t) - V^i_t(x,t) = \max\{F^i_{\phi^{-i}}(x,u^i,t) + V^i_x(x,t) f^i_{\phi^{-i}}(x,u^i,t) | u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x,t)\}.^9$$

  sono soddisfatte per ogni $(x,t) \in X \times [0,T\rangle$;

[8] Per una trattazione più accurata di tale argomento si invita a consultare [8].

[9] La notazione con ϕ^{-i} al pedice delle funzioni sta ad indicare la scelta di una strategia Markoviana anche per gli altri N-1 giocatori.

- *se* $T < +\infty$, *allora* $V^i(x,T) = S^i(x)$ *per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e* $x \in X$;
- *se* $T = +\infty$, *allora per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$, *o* V^i *è una funzione limitata e* $r^i > 0$, *o* V^i *è inferiormente limitata,* $r^i > 0$ *e* $\limsup_{t\to+\infty} e^{-r^i t}V^i(x(t),t) \le 0$.

Si denoti con $\Phi^i(x,t)$ *l'insieme di tutti gli* $u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x,t)$ *che massimizzano il membro destro della HJB. Se* $\phi^i(x(t),t) \in \Phi^i(x(t),t)$ *vale per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e quasi ogni* $t \in [0,T\rangle$, *allora* $(\phi^1(t),\dots,\phi^N(t))$ *è un equilibrio di Nash Markoviano. Se* $T = +\infty$ *l'equilibrio è inteso nel senso di ottimalità catching up.*

Teorema 8. *Sia* $(\phi^1(t),\dots,\phi^N(t))$ *una N-upla di funzioni* $\phi^i : X \times [0,T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$ *e valga la prima assunzione del teorema* (7). *Siano definite per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *le funzioni Hamiltoniane*
$H^i_{\phi^{-i}} : X \times \mathbb{R}^{m^i} \times \mathbb{R}^n \times [0,T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ *come segue*

$$H^i_{\phi^{-i}}(x,u^i,\lambda^i,t) = F^i_{\phi^{-i}}(x,u^i,t) + \lambda^i f^i_{\phi^{-i}}(x,u^i,t)$$

e le funzioni Hamiltoniane massimizzate $H^{i*}_{\phi^{-i}} : X \times \mathbb{R}^n \times [0,T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ *da*

$$H^{i*}_{\phi^{-i}}(x,\lambda^i,t) = \max\Big\{H^i_{\phi^{-i}}(x,u^i,\lambda^i,t) | u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x,t)\Big\}.$$

Si assuma che lo spazio degli stati X *sia convesso, la funzione scrap value* S^i *sia infinitamente differenziabile e concava, e che esistano* N *funzioni assolutamente continue* $\lambda^i : [0,T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tali che*

- *la condizione di massimalità* $H^i_{\phi^{-i}}(x,\phi^i,\lambda^i,t) = H^{i*}_{\phi^{-i}}(x,\lambda^i,t)$ *valga per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e quasi ogni* $t \in [0,t\rangle$,
- *l'equazione aggiunta* $\dot\lambda^i(t) = r^i\lambda^i(t) - \partial_x H^{i*}_{\phi^{-i}}(x^*,\lambda,t)$ *valga per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e quasi ogni* $t \in [0,t\rangle$,
- *se* $T < +\infty$, *allora* $\lambda^i(T) = S^i_x(x(T))$ *valga per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$,
- *se* $T = +\infty$, *allora o* $\lim_{t\to+\infty} e^{-r^i t}\lambda^i(t)x(t) = 0$ *valga per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e per tutte le traiettorie di stato ammissibili* $x(\cdot)$, *oppure esista un vettore* $a \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $x \ge a$ *per ogni* $x \in X$, $\lambda^i(t) \ge 0$ *per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e ogni tempo sufficientemente grande* t, *e* $\limsup_{t\to+\infty} e^{-r^i t}\lambda^i(t)[x(t)-a] \le 0$,
- *la funzione* $x \longrightarrow H^{i*}_{\phi^{-i}}(x,\lambda^i,t)$ *sia infinitamente differenziabile e concava per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e ogni* $t \in [0,T\rangle$.

Allora $(\phi^1(t),\dots,\phi^N(t))$ *è un equilibrio di Nash Markoviano. Se* $T = +\infty$, *l'ottimalità è intesa nel senso catching up.*

Teorema 9. *Sia* $(\phi^1(t),\dots,\phi^N(t))$ *una N-upla di funzioni* $\phi^i : X \times [0,T\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^{m^i}$ *e si operino le seguenti assunzioni:*

- *per ogni coppia* $(y,s) \in X \times [0,T\rangle$ *esiste un'unica soluzione assolutamente continua* $x_{y,s} : [s,T\rangle \longrightarrow X$ *del problema del valore iniziale*

$$\dot x(t) = f(x(t),\phi^1(x(t),t),\dots,\phi^N(x(t),t)), \quad x(s) = y;$$

- *seconda, terza e quarta condizione del teorema* (7) *siano soddisfatte con un requisito addizionale che consiste nel fatto che, nell'ultima condizione, se* V^i *non è superiormente limitata,* $\limsup_{t\to+\infty} e^{-r^i t}V^i(x_{y,s}(t),t) \le 0$ *debba valere per ogni* $(y,s) \in X \times [0,T\rangle$.

Si denoti con $\Phi^i(x,t)$ *l'insieme di tutti gli* $u^i \in U^i_{\phi^{-i}}(x,t)$ *che massimizzano il membro destro della HJB. Se* $\phi^i(x,t) \in \Phi^i(x,t)$ *vale per ogni* $i \in \{1,\dots,N\}$ *e ogni* $(x,t) \in X \times [0,T\rangle$, *allora* $(\phi^1(t),\dots,\phi^N(t))$ *è un equilibrio di Nash Markoviano perfetto. Se* $T = +\infty$ *l'equilibrio è inteso nel senso di ottimalità catching up.*

Capitolo 3

Giochi lineari quadratici

In questo capitolo ci si concentra sull'analisi di una particolare struttura di giochi differenziali, principale soggetto di questo elaborato: i giochi lineari quadratici. Più specificatamente, verrà derivata la caratterizzazione analitica degli equilibri di Nash open-loop e Markoviani. È necessario sottolineare la trattazione analitica di questa struttura particolare in quanto le soluzioni analitiche evidenziano le proprietà quantitative generali degli equilibri.

La classe dei giochi lineari quadratici è caratterizzata da un sistema lineare di equazioni di stato e da un funzionale obiettivo quadratico, da cui appunto il nome con cui vengono categorizzati. Questa classe di problemi ha guadagnato popolarità non solo tra gli studiosi teorici dei giochi dinamici, ma anche tra gli esperti di economia e management, applicandoli a questioni di coordinamento politico, politiche di stabilizzazione e di preferenza di un prodotto.

3.1 Definizione del problema

Per l'analisi di questa classe di giochi differenziali ci si è affidati alla discussione nei testi [1], [4], nei quali sono presenti numerose applicazioni pratiche di queste strutture, una delle quali sarà riportata nel capitolo (4).

Si consideri un gioco differenziale a due giocatori in cui il giocatore 1 minimizza il funzionale quadratico dei costi

$$\frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}\{g_1 x(t)^2 + g_2[u^1(t)]^2\}dt$$

e il giocatore 2 minimizza

$$\frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}\{m_1 x(t)^2 + m_2[u^2(t)]^2\}dt.$$

L'equazione di stato è definita da

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu^1(t) + cu^2(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{3.1}$$

In questo modello g_i, m_i, a, b, c e r sono costanti, $x(t)$ è la singola variabile di stato, $u^i(t)$ è la variabile scalare di controllo del giocatore i, e T è un orizzonte di tempo finito oppure infinito. Dato che le caratteristiche di questo gioco sono un'equazione di stato lineare e una funzione obiettivo quadratica, la letteratura si riferisce a questo come un **gioco lineare quadratico**.

Discutiamo dunque i vari approcci volti all'analisi di questo gioco, i quali possono essere applicati a problemi con la stessa struttura ma più generali. Ad esempio, si potrebbe includere la presenza di un valore di recupero quadratico in un gioco a orizzonte finito di tempo, si possono considerare giochi con più di due giocatori, con più variabili di stato o più variabili di controllo ciascuno, o anche permettere la presenza di forme quadratiche più generali dipendenti dalle variabili $x(t), u^1(t)$ e $u^2(t)$. È inoltre possibile adottare gli stessi procedimenti a giochi non stazionari, ovvero casistiche in cui g_i, m_i, a, b, c e r sono funzioni dipendenti dal tempo invece che costanti. I risultati possono essere ugualmente estesi a situazioni nelle quali i giocatori utilizzano diversi fattori di sconto. Presentare le soluzioni per le circostanze sopraelencate non guida ad alcuna considerazione nuova rispetto al modello definito, ma renderebbe solo le derivazioni analitiche più complicate[1].

Il gioco differenziale determinato in precedenza si presenta nella formulazione più frequente nelle applicazioni economiche. Ciò significa che spesso questi modelli descrivono situazioni in cui l'obiettivo dei giocatori è quello di minimizzare il valore attuale dei costi futuri. Dato che i procedimenti di risoluzione definiti nel capitolo precedente riguardano problemi di massimizzazione, occorre riformulare i funzionali al negativo, ottenendo dunque le nuove forme

$$J_1 = -\frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}\{g_1 x(t)^2 + g_2[u^1(t)]^2\}dt, \tag{3.2}$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}\{m_1 x(t)^2 + m_2[u^2(t)]^2\}dt. \tag{3.3}$$

I giocatori vogliono massimizzare questi funzionali sottostanti a (3.1).

Si possono fornire numerose interpretazioni economiche per i giochi lineari differenziali quadratici, le quali differiscono a seconda dell'identità del giocatore. La caratteristica comune di ogni interpretazione è che le variabili di stato (in un certo senso anche le variabili di controllo) descrivono delle deviazioni di certi indicatori economici dal valore a cui tendono o dai loro livelli naturali sul lungo periodo. Queste deviazioni impattano sul decisore tramite dei costi espressi dalle funzioni quadratiche, dunque l'obiettivo è quello di minimizzare tali deviazioni. Tale modello può risultare utile a descrivere le seguenti situazioni:

- [1] *Politiche di stabilizzazione in un'economia chiusa con più autorità politiche.*

  Questo è primo esempio è tratto dal testo di Dockner, Jorgensen, al capitolo (7), nel quale vengono trattati molti altri esempi, anche numerici, di questa struttura di giochi.
  Consideriamo come giocatore 1 il governo, mentre il giocatore 2 è la banca centrale. Entrambi presentano funzioni di costo quadratiche date dal tasso di disoccupazione o dall'inflazione. Gli strumenti a disposizione del governo sono le spese pubbliche, un deficit nel bilancio, oppure una nuova politica fiscale, nella quale la riserva di denaro è sotto il controllo della banca centrale. Altre applicazioni invece definiscono come controllo i tassi di crescita di queste variabili. Tali obiettivi e strumenti sono associati attraverso un modello macroeconomico lineare contenente, ad esempio, condizioni di equilibrio nel mercato tra denaro e produzione, oppure una curva di Phillips.[2] Una dinamica con equazione del tipo (3.1) potrebbe presentarsi nel caso le aspettative sull'inflazione siano formate in modo adattivo, ossia tenendo conto non solo dello stato del sistema, ma anche di tutti i parametri che caratterizzano l'efficacia del controllo.

- [1],[5] *R&S, ricerca e sviluppo.*

  Nel testo di Dockner, Jorgensen, il capitolo (10) viene interamente dedicato a questa tipologia di problemi, mentre nel testo di Basar, Zaccour, è presente un'analisi più accurata nel capitolo (18), sezione 5, con esempi applicativi ritrovabili anche in altre sezioni. In entrambi i testi sono forniti numerosi riferimenti bibliografici a testi, anche di carattere più economico, che trattano quest'argomento più approfonditamente.
  Con Ricerca e Sviluppo generalmente si indica quella componente di un'impresa industriale (persone, mezzi e risorse finanziarie), che viene dedicata allo studio di innovazione tecnologica da utilizzare per migliorare i propri prodotti, crearne di nuovi, o migliorare i processi di produzione. L'approccio teoretico a *R&S* solitamente vede le innovazioni svilupparsi in un ambiente competitivo: spesso le attività *R&S* vengono immaginate come una gara nella quale ogni impresa coinvolta punta ad arrivare alla svolta tecnologica per prima. In questi giochi, gli sforzi e le risorse messe in campo

[1] Nella sezione (3.3) è dedicato un breve approfondimento, senza entrare nei particolari di calcoli troppo ingombranti, sulla discussione del problema nel caso la funzione sia quadratica spuria.

[2] In [12] è riportato l'articolo in cui Alban William Phillips per la prima volta introdusse questo concetto nel 1958, pubblicando un articolo nel giornale accademico *Economica*. Si può sintetizzare per una comprensione efficace del significato che, in macroeconomia, la curva di Phillips è una relazione inversa tra il tasso di inflazione e il tasso di disoccupazione. Tale curva assume che se vi è un aumento dell'inflazione, l'inflazione prevista crescerà a sua volta, e la curva si muoverà verso l'alto in modo tale da ottenere una previsione concreta sull'aumento degli stipendi in ciascun settore di lavoro.

da ogni ente giocano un'influenza fondamentale nella probabilità di successo di uno rispetto agli altri. Una volta che tale vincitore è stato definito, di norma l'assunzione più frequente è che tale impresa assuma una posizione di monopolio, cosicché i rivali siano estromessi dal mercato. In questi problemi, l'idea di base è che il profitto derivante dall'essere primo spinge le attività imprenditoriali e porta avanti un flusso di nuovi prodotti, processi e tecnologie. Importanti sono le considerazioni a priori che vengono fatte in questi modelli, ossia: nessun giocatore conosce in partenza quanto spendere al fine di sviluppare le innovazioni; ci sono vari possibili percorsi che portano ad un successo nel giungere a tale progresso; infine, le attività di *R&S* hanno un costo sostenuto ma guidano a un incremento nelle competenze, che ha un'influenza nella probabilità di vittoria finale. Sotto certi aspetti, il capitolo (4) di questo elaborato può essere riconducibile a un problema di questa sottocategoria di giochi differenziali.

3.2 Ricerca di un equilibrio

3.2.1 Open-loop

Nella derivazione dell'equilibrio per un gioco lineare quadratico consideriamo per primo l'equilibrio open-loop del modello definito in precedenza. Si assume che entrambi i giocatori si impegnino a dei certi piani d'azione per l'intero periodo di programmazione, dai quali non possono deviare seppure possa essere di loro interesse. L'unica informazione sulla quale si basano le strategie di equilibrio è il calendario temporale insieme ai parametri del modello, i quali sono supposti come conoscenza comune. Al fine di garantire un'interpretazione pratica, si può immaginare $x(t)$ sia la deviazione di una variabile del sistema dal suo livello ideale (che si considera sia politicamente necessario e sostenibile nel lungo periodo). Le variabili di controllo $u^1(t)$ e $u^2(t)$ indicano le azioni dei giocatori 1 e 2 rispettivamente, che influenzano $x(t)$ tramite

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu^1(t) + cu^2(t), \qquad x(0) = x_0,$$

apportando però dei costi per essere utilizzate dal decisore. Nella maggior parte delle applicazioni economiche è sensato assumere g_1, m_1, g_2 e m_2 strettamente positive e un parametro di attualizzazione r non negativo. I parametri b e c possono essere o positivi o negativi, mentre a in molti casi è negativo in modo tale che il sistema senza controllo sia stabile (anche se tale aspetto non sarà richiesto nell'analisi immediatamente successiva, bensì più avanti nella discussione).

Sia $(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$ un equilibrio di Nash open-loop. Le funzioni Hamiltoniane (teorema (3)) dei rispettivi giocatori sono

$$H_1(x, u^1, p^1, t) = F^1(x, u^1, t) + p^1 f^1(x, u^1, t) = -\frac{1}{2}[g_1 x^2 + g_2(u^1)^2] + p^1[ax + bu^1 + cu^2(t)],$$
$$H_2(x, u^2, p^2, t) = F^2(x, u^2, t) + p^2 f^2(x, u^2, t) = -\frac{1}{2}[m_1 x^2 + m_2(u^2)^2] + p^2[ax + bu^1(t) + cu^2],$$

ove $p^i, i = 1, 2$, denotano le variabili di costato del giocatore i.

Se non sono presenti né un controllo né restrizioni sullo stato, massimizzare le Hamiltoniane secondo le variabili di controllo risulta in

$$u^1(t) = \left(\frac{b}{g_2}\right)p^1(t) \tag{3.4}$$

e

$$u^2(t) = \left(\frac{c}{m_2}\right)p^2(t) \tag{3.5}$$

per ogni t. Le equazioni aggiunte, sulla base di ciò che viene enunciato nel teorema (3), sono

$$\dot{p}^1(t) = rp^1(t) - H_x^*(x^*, p^1, t) = g_1 x(t) + (r - a)p^1(t),$$
$$\dot{p}^2(t) = rp^2(t) - H_x^*(x^*, p^2, t) = g_2 x(t) + (r - a)p^2(t).$$

Sostituendo (3.4) e (3.5) nell'equazione di stato (3.1) e raggruppandole alle equazioni aggiunte si ottiene il sistema canonico di equazioni differenziali lineari omogenee

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + \left(\frac{b^2}{g_2}\right)p^1(t) + \left(\frac{c^2}{m_2}\right)p^2(t) \\ \dot{p}^1(t) &= g_1 x(t) + (r-a)p^1(t), \\ \dot{p}^2(t) &= g_2 x(t) + (r-a)p^2(t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Se l'orizzonte di tempo è finito, il sistema (3.6) ha la condizione iniziale $x(0) = x_0$ e le due condizioni di trasversalità $p^i(T) = 0$ per $i = 1, 2$. Sotto tali restrizioni sui parametri, le funzioni Hamiltoniane massimizzate sono concave rispetto alla variabile di stato cosi che (3.4)-(3.5)-(3.6) insieme con le condizioni al contorno sono sufficienti per la proprietà di equilibrio di Nash per $(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$. Nel caso di orizzonte di tempo infinito bisogna rimpiazzare le condizioni $p^i(T) = 0$ con delle opportune condizioni di trasversalità limitanti (teorema (8)). Dimostreremo successivamente come costruire una soluzione per (3.4)-(3.5)-(3.6) cosi che le condizioni di trasversalità reggano.

In notazione vettoriale il sistema (3.6) può essere riscritto come

$$\dot{y}(t) = A \cdot y(t) \tag{3.7}$$

dove $y(t) = (x(t), p^1(t), p^2(t))'$ ($'$ indica la trasposta) e

$$A = \begin{pmatrix} a & b^2/g_2 & c^2/m_2 \\ g_1 & r-a & 0 \\ m_1 & 0 & r-a \end{pmatrix}$$

Dato che un equilibrio di Nash open-loop è caratterizzato da (3.4), (3.5) e il sistema (3.7), il prossimo obiettivo è trovare una soluzione a (3.7). Questo è un sistema lineare di equazioni differenziali di primo ordine che può essere risolto analiticamente. Si deve distinguere tra il caso di orizzonte temporale finito e di orizzonte temporale infinito.

Si prenda in considerazione il problema a orizzonte finito nel quale $T < +\infty$. É già stato fissato in precedenza che in questo caso è presente la condizione iniziale $x(0) = x_0$ per $t = 0$ e la condizione nell'istante finale $p^1(T) = p^2(T) = 0$ per $t = T$, cosicché il sistema (3.7) è un problema con due condizioni al bordo. Al fine di ricavare una soluzione di deve procedere come segue: inizialmente deriviamo i tre autovalori della matrice del sistema A così come i suoi autovettori. Usando questi risultati deriviamo la soluzione fondamentale di (3.7), e calcoliamo la soluzione particolare che soddisfa le condizioni al bordo, procedendo attraverso vari passi.

Il determinante di A è

$$detA = (r-a)[a(r-a) - M]$$

ove

$$M = c^2\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + b^2\left(\frac{g_1}{g_2}\right).$$

Gli autovalori s_1, s_2 e s_3 di A possono essere derivati dall'equazione caratteristica $det(sI - A) = 0$, dove I è la matrice identica.[3] Precisamente, l'equazione risulta essere

$$det(sI - A) = (s - r + a)^2(s - a) - (s - r + a)M = 0.$$

Le tre soluzioni dell'equazione sono gli autovalori

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - a(r-a) + M}, \\ s_2 &= \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - a(r-a) + M}, \\ s_3 &= r - a \end{aligned}$$

Si possono distinguere 5 casi differenti a seconda dei segni degli autovalori:

[3] Se questa tecnica di risoluzione viene applicata a un gioco differenziale più generale con numerose variabili di stato, l'equazione caratteristica può essere risolta solamente mediante metodi numerici.

1. Un autovalore è negativo, due sono positivi: $s_1 < 0, s_2 > 0, s_3 > 0$. Questo caso si presenta quando il determinante della matrice A del sistema è negativo.

2. Un autovalore è positivo, due sono nulli : $s_1 = s_2 = 0, s_3 > 0$. Questo capita se $0 < a < r$ e $a(r-a) = M$ cosi il determinante si annulla.

3. I tre autovalori sono positivi: $s_1 > 0, s_2 > 0, s_3 > 0$. É il caso di $0 < a < r$ e $a(r-a) > M$ così $detA > 0$.

4. Un autovalore è negativo, uno positivo e uno è nullo: $s_1 < 0, s_2 > 0, s_3 = 0$. Questo caso si presenta quando $a = r$ cosi che $detA = 0$.

5. Un autovalore è positivo, due sono negativi: $s_1 < 0, s_2 > 0, s_3 < 0$. Questo capita se $r < a$ con $detA > 0$

Dato che $\frac{r^2}{4} - a(r-a) = (\frac{r}{2} - a)^2 > 0$ e $M > 0$ per le assunzioni fatte, non può mai capitare una soluzione complessa in alcun caso.

Nelle considerazioni che seguiranno ci si restringe all'assunzione di un sistema stabile ($a \leq 0$), come nel caso 1.[4] Perciò due autovalori di A sono positivi e uno negativo, indicando che è presente la caratteristica del punto di sella[5] per il sistema. La soluzione generale di (3.7) può essere scritta come:

$$y(t) = e^{At}y(0) = We^{\Lambda t}\alpha \tag{3.8}$$

dove, per $i = 1, 2, 3$, si denota con $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3})' \in \mathbb{R}^3$ un autovettore di A corrispondente a s_i. Le matrici W e Λ sono definite da

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$$

Inoltre, per la definizione di Λ appena data, si ha

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{s_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{s_3 t} \end{pmatrix}$$

e $\alpha = W^{-1}y(0)$. Da notare che sotto le assunzioni fatte in precedenza i tre autovalori sono differenti e, di conseguenza, gli autovettori sono linearmente indipendenti.

Usando la (3.8) si possono esprimere le tre condizioni al contorno nel caso di orizzonte temporale finito come

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 w_{11} + \alpha_2 w_{12} + \alpha_3 w_{13}, \\ 0 &= \alpha_1 w_{21} e^{s_1 T} + \alpha_2 w_{22} e^{s_2 T} + \alpha_3 w_{23} e^{s_3 T}, \\ 0 &= \alpha_1 w_{31} e^{s_1 T} + \alpha_2 w_{32} e^{s_2 T} + \alpha_3 w_{33} e^{s_3 T}. \end{aligned}$$

Questo sistema di equazioni lineari può essere facilmente risolto per i parametri sconosciuti α_1, α_2 e α_3. Usando queste soluzioni, la (3.4) e la (3.5) strategie di equilibrio di Nash open-loop sono determinate completamente.

Nel caso di un orizzonte temporale infinito è necessario procedere con un approccio leggermente diverso. É dato uno stato iniziale x_0 ma nessun valore per la variabile di co-stato $p^i(t)$. Affinché sia soddisfatta la condizione di trasversalità (teorema (5)), viene scelta una soluzione per (3.7) che converga ad

[4] Un'analisi simile può essere estesa ai casi 4 e 5, mentre nei casi 2 e 3 il sistema canonico è totalmente instabile.

[5] Per una migliore comprensione del ruolo che gioca questa proprietà, soprattutto nell'equilibrio open-loop, si invita a consultare principalmente [4], capitolo (6) e [7]. Sostanzialmente, la caratteristica del punto di sella unita al concetto di minimax, risulta utile all'analisi dei giochi, in quanto applicando il teorema del punto di sella ([7], sezione (5.7)), al funzionale $J(\cdot)$, si trova un equilibrio per il gioco.

uno stato di costante. Nel caso sotto osservazione, ciò può essere ottenuto impostando $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, poiché s_1 e w_1 sono rispettivamente autovalore e autovettore stabili. L'unica soluzione particolare soddisfacente $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e $x(0) = x_0$ è

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{s_1 t}, \\ p^1(t) &= x_0 \left(\frac{w_{21}}{w_{11}}\right) e^{s_1 t}, \\ p^2(t) &= x_0 \left(\frac{w_{31}}{w_{11}}\right) e^{s_1 t}. \end{aligned}$$

Come nel caso di orizzonte temporale finito, vengono utilizzate (3.4) e (3.5) per definire le strategie di equilibrio open-loop; nel caso corrente, esse sono date da

$$\begin{aligned} u^1(t) &= x_0 \left(\frac{b}{g_2}\right)\left(\frac{w_{21}}{w_{11}}\right) e^{s_1 t}, \\ u^2(t) &= x_0 \left(\frac{c}{m_2}\right)\left(\frac{w_{31}}{w_{11}}\right) e^{s_1 t}. \end{aligned}$$

Una rappresentazione Markoviana non degenere di queste strategie di controllo è data da $u^1(t) = \phi^1(x(t))$, $u^2(t) = \phi^2(x(t))$, ove

$$\begin{aligned} \phi^1(x(t)) &= \left(\frac{b}{g_2}\right)\left(\frac{w_{21}}{w_{11}}\right) x, \\ \phi^2(x(t)) &= \left(\frac{c}{m_2}\right)\left(\frac{w_{31}}{w_{11}}\right) x. \end{aligned}$$

Data la forma esplicita delle variabili di stato e di controllo, è inoltre possibile calcolare il funzionale associato all'equilibrio per ogni giocatore lungo l'intero periodo di pianificazione. Tali costi sono quindi rappresentati da

$$\begin{aligned} -J_1 &= \frac{x_0^2}{2(r-2s_1)}\left[g_1 + \left(\frac{b^2}{g_2}\right)\left(\frac{w_{21}}{w_{11}}\right)^2\right], \\ -J_2 &= \frac{x_0^2}{2(r-2s_1)}\left[m_1 + \left(\frac{c^2}{m_2}\right)\left(\frac{w_{31}}{w_{11}}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Dal momento che le strategie di equilibrio open-loop determinate qui sopra dipendono dallo stato iniziale x_0 del gioco, ne segue che l'equilibrio di Nash open-loop non è Markoviano perfetto. Questo vale anche per giochi lineari quadratici con caratteristiche più generali. Risulta pertanto di interesse derivare un equilibrio di Nash Markoviano-perfetto considerando strategie di equilibrio che dipendono esplicitamente dallo stato del gioco. Tale trattazione verrà affrontata successivamente nella sezione 3.2.2. Prima di questo, viene dimostrato un diverso approccio per determinare l'equilibrio di Nash open-loop di un gioco differenziale lineare quadratico.

Approccio alternativo

In precedenza è stato contraddistinto l'unico equilibrio di Nash open-loop per un gioco differenziale lineare quadratico risolvendo esplicitamente il sistema lineare canonico nelle variabili di stato e di controllo. Ora verrà considerato un altro metodo basato sulla risoluzione di un sistema di equazioni di Riccati [6]. Per la dimostrazione di questo approccio, ci si restringe al caso di un gioco a orizzonte finito ma, contrariamente alla trattazione antecedente, è consentita la non stazionarietà ed è inclusa una funzione *scrap value*

[6] Nell'appendice è dedicato dello spazio ad una migliore comprensione di cosa si intende con equazione di Riccati.

quadratica. Si osserva che se $q^i = 0$ si ritrova la situazione del problema precedente. Dunque il gioco differenziale lineare quadratico ha i funzionali obiettivo

$$J_1 = -\frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}\Big[g_1(t)x(t)^2 + g_2(t)[u^1(t)]^2\Big]dt - \frac{1}{2}e^{-rT}q^1x(T)^2, \tag{3.9}$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}\Big[m_1(t)x(t)^2 + m_2(t)[u^2(t)]^2\Big]dt - \frac{1}{2}e^{-rT}q^2x(T)^2. \tag{3.10}$$

Ogni giocatore punta a massimizzare il proprio funzionale payoff soggetto all'equazione di stato

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u^1(t) + c(t)u^2(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{3.11}$$

Le funzioni $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot), g_1(\cdot), g_2(\cdot), m_1(\cdot)$ e $m_2(\cdot)$ sono continue e definite a priori e r, T, x_0, q^1 e q^2 sono costanti date. A causa della dipendenza esplicita dal tempo del sistema dinamico e delle funzioni di costo, il gioco è non autonomo.[7]

Analogamente a come si era proceduto nel precedente caso si ottengono le condizioni di ottimalità

$$u^1(t) = \frac{b(t)}{g_2(t)}p^1(t), \tag{3.12}$$

$$u^2(t) = \frac{c(t)}{m_2(t)}p^2(t). \tag{3.13}$$

e il sistema di equazioni differenziali lineari canonico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) + \left(\frac{b(t)^2}{g_2(t)}\right)p^1(t) + \left(\frac{c(t)^2}{m_2(t)}\right)p^2(t) \\ \dot{p}^1(t) &= g_1(t)x(t) + (r - a(t))p^1(t), \\ \dot{p}^2(t) &= g_2(t)x(t) + (r - a(t))p^2(t). \end{aligned} \tag{3.14}$$

dove permane che $p^i(t), i = 1, 2$, denota la variabile di costato del giocatore i. A causa della presenza della funzione *scrap value* le condizioni di trasversalità diventano

$$p^i(T) = -q^i x(T), \qquad i = 1, 2.$$

Fino a questo punto, le osservazioni sono del tutto identiche a quelle del metodo di risoluzione precedente. Si procede ad allontanarsi da quest'ultimo tramite l'ipotesi che le variabili di costato possano essere scritte in forma affine rispetto ad $x(t)$ nel seguente modo

$$p^i(t) = N^i(t)x(t) + n^i(t) \tag{3.15}$$

ove $N^i(\cdot)$ e $n^i(\cdot)$ sono funzioni differenziabili che verranno determinate in seguito.[8] L'obiettivo, per il quale viene fatta quest'assunzione, è quello di trovare un'alternativa in forma di feedback al precedente equilibrio open-loop. Per soddisfare le condizione di trasversalità occorre imporre

$$N^i(T) = -q^i \qquad n^i(T) = 0 \tag{3.16}$$

Differenziando la (3.15) rispetto al tempo comporta la condizione

$$\dot{p}^i(t) = \dot{N}^i(t)x(t) + N^i(t)\dot{x}(t) + \dot{n}^i(t)$$

Si rimpiazzano dunque le derivate $\dot{p}^i(t)$ e $\dot{x}^i(t)$ in quest'equazione con le espressioni date nelle equazioni di stato e costato (3.14) e si sostituiscono le variabili di costato con il membro destro dell'equazione (3.15). Nelle equazioni risultanti si raccolgono i termini associati alle stesse potenze di $x(t)$. Le equazioni

[7] Le equazioni differenziali vengono dette autonome quando in esse la variabile t non compare esplicitamente.

[8] Tale presupposto non comporta nessuna perdita di generalità in quanto banalmente soddisfatto se $N^i(t) = 0$ e $n^i(t) = p^i(t)$ per ogni t. Verranno comunque determinate delle $N^i(\cdot)$ e $n^i(\cdot)$ diverse, in modo tale che sia soddisfatto (3.15).

sono affini rispetto a $x(t)$, cosicché ognuna di esse contiene un termine noto e un termine dipendente da $x(t)$. Un modo per soddisfare queste equazioni consiste nell'applicare il principio di identità dei polinomi, secondo il quale i termini associati alla stessa potenza della variabile, in questo caso $x(t)$, devono avere lo stesso coefficiente sia al membro destro che sinistro, termine noto compreso. In alternativa, portando tutti i termini da un solo membro, lasciando l'altro nullo, è sufficiente richiedere che il termine noto e il coefficiente di $x(t)$ siano identicamente nulli. Da ciò si ricava il seguente sistema di equazioni differenziali di Riccati

$$\dot{N}^1(t) = g_1(t) + [r - 2a(t)]N^1(t) - \frac{b(t)^2}{g_2(t)}(N^1(t))^2 - \frac{c(t)^2}{m_2(t)}N^1(t)N^2(t), \tag{3.17}$$

$$\dot{N}^2(t) = g_2(t) + [r - 2a(t)]N^2(t) - \frac{c(t)^2}{m_2(t)}(N^2(t))^2 - \frac{b(t)^2}{g_2(t)}N^1(t)N^2(t), \tag{3.18}$$

per quanto riguarda $N^i(t)$, mentre per $n^i(t)$

$$\dot{n}^1(t) = [r - a(t)]n^1(t) - \frac{b(t)^2}{g_2(t)}N^1(t)n^1(t) - \frac{c(t)^2}{m_2(t)}N^1(t)n^2(t), \tag{3.19}$$

$$\dot{n}^2(t) = [r - a(t)]n^2(t) - \frac{c(t)^2}{m_2(t)}N^2(t)n^2(t) - \frac{b(t)^2}{g_2(t)}N^2(t)n^1(t), \tag{3.20}$$

Il sistema (3.17)-(3.18) è un sistema di equazioni differenziali di Riccati accoppiate per le funzioni $N^1(\cdot)$ e $N^2(\cdot)$, le cui condizioni al contorno sono definite in (3.16). Le soluzioni a un sistema di questo tipo possono essere ottenute tramite programmi numerici e verranno omesse. Una volta calcolate, possono essere sostituite nel sistema (3.19)-(3.20), il quale è un sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari. Date le condizioni al bordo definite sempre in (3.16), segue dagli aspetti teorici delle equazioni differenziali lineari che $n^1(t) = 0 = n^2(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Avendo dunque determinato le funzioni $N^i(\cdot)$ e $n^i(\cdot)$, le equazioni (3.12),(3.13) e (3.15) producono una rappresentazione Markoviana non degenere delle strategie di controllo per l'equilibrio di Nash open-loop. La corrispondente traiettoria di stato può essere trovata applicando la sostituzione di queste strategie nell'equazione di stato del gioco, ottenendo

$$\dot{x}(t) = \left[a(t) + \frac{b(t)^2}{g_2(t)}N^1(t) + \frac{c(t)^2}{m_2(t)}N^2(t)\right]x(t), \qquad x(0) = x_0$$

3.2.2 Markoviano-perfetto

In questa sezione viene rivolta l'attenzione alla ricerca di un equilibrio di Nash Markoviano-perfetto per il gioco definito all'inizio del capitolo. Denotando con $\phi^1(x,t)$ e $\phi^2(x,t)$ le strategie di equilibrio, le equazioni di HJB per questo gioco sono

$$rV^1(x,t) - \frac{\partial V^1(x,t)}{\partial t} = \max\left\{ -\frac{1}{2}\left[g_1 x^2 + g_2(u^1)^2\right] + \frac{\partial V^1(x,t)}{\partial x}\left[ax + bu^1 + c\phi^2(x,t)\right] \;\Big|\; u^1 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$rV^2(x,t) - \frac{\partial V^2(x,t)}{\partial t} = \max\left\{ -\frac{1}{2}\left[m_1 x^2 + m_2(u^2)^2\right] + \frac{\partial V^2(x,t)}{\partial x}\left[ax + b\phi^1(x,t) + cu^2\right] \;\Big|\; u^2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le condizioni al bordo per il gioco a orizzonte finito sono $V(x,T) = 0$ per ogni x. Per trovare una soluzione a queste equazioni si procede come segue. Data la struttura lineare quadratica del gioco, si può supporre che le funzioni valor ottimo siano quadratiche e che le strategie di equilibrio siano lineari rispetto alla variabile di stato. Si dimostra, dunque, che la congettura stabilita in effetti conduce alla funzione valor ottimo che soddisfa le equazioni di HJB e le condizioni al bordo. Più specificatamente si postula una funzione valore quadratica della forma[9]

$$V^i(x,t) = \frac{1}{2}v^i(t)x^2,$$

[9] In questo esempio di gioco differenziale lineare quadratico la supposizione iniziale per le strategie non ha alcuna rilevanza. In giochi differenziali lineari quadratici più complicati, si deve usare una forma parametrica della forma $\phi(x,t) = A(t)x + B(t)$. In quel caso è anche necessario formulare una configurazione più generale per la funzione valore ottimo, come ad esempio $V^i(x,t) = \frac{1}{2}v^i(t)x^2 + w^i(t)x + z^i(t)$ (vedi sezione 3.3).

ove $v^i(\cdot)$, $i = 1, 2$, è una funzione che dovrà essere determinata. La condizione di trasversalità per il problema a orizzonte finito è soddisfatta se $v^i(T) = 0$. Sostituendo le funzioni valore quadratiche nelle equazioni di HJB ed applicando la richiesta di massimizzazione nel membro destro, si ricavano

$$u^1 = \phi^1(x,t) = \left(\frac{b}{g_2}\right) v^1(t)x, \tag{3.21}$$

$$u^2 = \phi^2(x,t) = \left(\frac{c}{m_2}\right) v^2(t)x. \tag{3.22}$$

Sostituendo queste nuovamente nelle equazioni di HJB, raccogliendo poi i termini associati alla stessa potenza di x, e infine eguagliando i coefficienti di questi termini a zero, si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali di Riccati accoppiate:

$$\dot{v}^1(t) = g_1 + (r - 2a)v^1(t) - \frac{b^2}{g_2}\left[v^1(t)\right]^2 - 2\frac{c^2}{m_2}v^1(t)v^2(t), \tag{3.23}$$

$$\dot{v}^2(t) = m_1 + (r - 2a)v^2(t) - \frac{c^2}{m_2}\left[v^2(t)\right]^2 - 2\frac{b^2}{g_2}v^1(t)v^2(t). \tag{3.24}$$

Si nota facilmente la similarità di questo sistema con quello di equazioni differenziali di Riccati (3.17)-(3.18), il quale caratterizza l'unico equilibrio di Nash open-loop del gioco. I due sistemi differiscono soltanto nei coefficienti del prodotto incrociato $N^1(t)N^2(t)$, rispettivamente $v^1(t)v^2(t)$, differenza che si riflette nelle diverse assunzioni informali riguardanti i due equilibri. Nell'equilibrio di Nash Markoviano-perfetto di cui si sta discutendo, i giocatori tengono conto del fatto che i loro rivali agiscono conseguentemente ai cambiamenti della variabile di stato. Nell'equilibrio open-loop discusso precedentemente, invece, le strategie non dipendono dallo stato che, a sua volta, porta a coefficienti diversi.

Come menzionato nell'approccio alternativo per l'equilibrio open-loop, un sistema del tipo (3.23)-(3.24) può facilmente essere risolto comodamente con metodi numerici, le cui condizioni al bordo sono date da $v^1(T) = v^2(T) = 0$. Una volta calcolate le funzioni $v^1(\cdot)$ e $v^2(\cdot)$, le equazioni (3.21)-(3.22) determinano le strategie di equilibrio. Dal momento che le ipotesi del teorema (9) sono soddisfatte, l'equilibrio è Markoviano perfetto.

Nel caso di un orizzonte temporale infinito si procede sostanzialmente allo stesso modo, tuttavia si usa la condizione di funzioni valore $V^i(x)$ stazionarie (es. indipendenti dal tempo) così come strategie stazionarie $\phi^i(x)$. Per il problema sotto osservazione, si postula quindi una funzione valore ottimo della forma

$$V^i(x) = \frac{1}{2}v^i x^i, \qquad i = 1, 2,$$

ove $v^i, i = 1, 2$, sono parametri costanti delle funzioni incognite $V^i(x)$ da determinare. Dal momento che $v^i(t) = v^i$ non dipende dal tempo, si ha $\dot{v}^i(t) = 0$ e le equazioni (3.23)-(3.24) diventano un sistema di equazioni di Riccati algebriche, ossia

$$g_1 + (r - 2a)v^1(t) - \frac{b^2}{g_2}\left[v^1(t)\right]^2 - 2\frac{c^2}{m_2}v^1(t)v^2(t) = 0, \tag{3.25}$$

$$m_1 + (r - 2a)v^2(t) - \frac{c^2}{m_2}\left[v^2(t)\right]^2 - 2\frac{b^2}{g_2}v^1(t)v^2(t) = 0. \tag{3.26}$$

Generalmente il sistema ha soluzioni multiple. Sotto le restrizioni per i parametri stilate nella sezione 3.2.1 (compresa la condizione $a \leq 0$), si può mostrare che esiste un'unica soluzione negativa $v^1 < 0$ e $v^2 < 0$[10]. Questa soluzione è quella che produce le funzioni valore soddisfacenti le condizioni di equilibrio del teorema (9). Per vedere questo, prima di tutto è necessario evidenziare che le restrizioni sui parametri e $v^i < 0$ implicano che

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + b\phi^1(x(t)) + c\phi^2(x(t)) \\ &= ax(t) + \left(\frac{b^2}{g_2}\right)v^1x(t) + \left(\frac{c^2}{m_2}\right)v^2x(t) \end{aligned} \tag{3.27}$$

[10]Un risultato analogo permane anche nel caso di giochi lineari quadratici più generali con più di una variabile di stato.

ha segno opposto rispetto a $x(t)$ (si ricorda che è stato assunto $a \leq 0$).

Si assume ora temporaneamente che l'intervallo di definizione dello stato sia l'intervallo limitato $X = [-\alpha, \beta]$, ove α e β sono costanti positive in modo tale che la stato stazionario sia contenuto nell'intervallo. Per via delle proprietà menzionate nei paragrafi precedenti $u^1 = \phi^1(x)$ e $u^2 = \phi^2(x)$ sono ammissibili anche se x è un estremo dell'intervallo dello stato. Perciò, la derivazione delle formule (in particolare le equazioni (3.25) e (3.26)) rimane valida anche sotto l'assunzione di uno dominio limitato per lo stato. Dato che le funzioni valore quadratiche $V^i(x)$ sono limitate su un intervallo limitato, le condizioni del teorema (9) sono soddisfatte e le strategie lineari proposte $\phi^1(\cdot)$ e $\phi^2(\cdot)$ costituiscono un equilibrio di Nash Markoviano perfetto. Da notare che questo argomento non è necessariamente valido se è stata scelta una soluzione (3.25)-(3.26) per cui $v^1 > 0$ e $v^2 > 0$.

La discussione soprastante si mantiene per ogni dominio di stato limitato $[\alpha, \beta]$ contenente 0. Possono essere scelti α e β arbitrariamente grandi ma finiti. Nel caso in cui il dominio sia illimitato, $X = \mathbb{R}$, la trattazione è tecnicamente più complicata e richiede una un approccio basato sulle condizioni del teorema (5).

La dinamica per l'equilibrio di Nash Markoviano perfetto è data da (3.27). Pertanto, la traiettoria di equilibrio per lo stato e $x(t) = x_0 e^{st}$ con

$$s = a + \left(\frac{b^2}{g_2}\right) v^1 + \left(\frac{c^2}{m_2}\right) v^2 < 0$$

Da questo risultato segue immediatamente che la rappresentazione open-loop delle sequenze dei controlli, generate dalle strategie di controllo dell'equilibrio di Nash Markoviano perfetto, sono

$$u^1(t) = \phi^1(x(t)) = x_0 \left(\frac{b}{g_2}\right) v^1 e^{st} \qquad\qquad u^2(t) = \phi^2(x(t)) = x_0 \left(\frac{c}{m_2}\right) v^2 e^{st}.$$

I costi che ne risultano per i due giocatori lungo l'orizzonte temporale di pianificazione sono

$$\begin{aligned} -J_1 &= \frac{x_0^2}{2(r-2s)} \left[g_1 + \left(\frac{b^2}{g_2}\right) (v^1)^2 \right], \\ -J_2 &= \frac{x_0^2}{2(r-2s)} \left[m_1 + \left(\frac{c^2}{m_2}\right) (v^2)^2 \right]. \end{aligned}$$

3.3 Un caso un po' più generale - payoff spurio

Nel capitolo corrente finora sono stati considerati funzionali quadratici privi di un termine lineare, ossia funzioni quadratiche pure, mentre ora ci concentriamo su dei tipi di giochi lineari quadratici nei quali il payoff si presenta in forma spuria. Tale trattazione ritornerà utile nel capitolo successivo, nel quale verrà presentata un'applicazione della discussione affrontata a un problema economico molto frequente nelle situazioni odierne.

Si definisce perciò la nuova struttura del funzionale e di conseguenza il nuovo problema:

$$J_1 = -\frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} \{ g_{11} x(t) + g_{12} x(t)^2 + g_{21} u^1(t) + g_{22} [u^1(t)]^2 \} dt, \tag{3.28}$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} \{ m_{11} x(t) + m_{12} x(t)^2 + m_{21} u^2(t) + m_{22} [u^2(t)]^2 \} dt \tag{3.29}$$

con equazione di stato che rimane uguale a

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u^1(t) + c u^2(t), \qquad\qquad x(0) = x_0.$$

Si osserva che nel caso $g_{11}, g_{21}, m_{11}, m_{21} = 0$,si riottengono gli stessi funzionali dei paragrafi precedenti, dunque lo stesso problema e le stesse soluzioni analitiche.

Open-loop

Procedendo in maniera del tutto analoga ai calcoli precedenti, si definiscono le funzioni Hamiltoniane, dato $(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$ equilibrio di Nash open-loop

$$H_1(x, u^1, p^1, t) = -\frac{1}{2}[g_{11}x(t) + g_{12}x(t)^2 + g_{21}u^1(t) + g_{22}[u^1(t)]^2] + p^1[ax + bu^1 + cu^2],$$
$$H_2(x, u^2, p^2, t) = -\frac{1}{2}[m_{11}x(t) + m_{12}x(t)^2 + m_{21}u^2(t) + m_{22}[u^2(t)]^2] + p^2[ax + bu^1(t) + cu^2],$$

e si ottengono come controlli massimizzanti le Hamiltoniane la coppia

$$u^1(t) = \left(\frac{b}{g_{22}}\right)p^1(t) - \frac{g_{21}}{2g_{22}},$$
$$u^2(t) = \left(\frac{b}{m_{22}}\right)p^2(t) - \frac{m_{21}}{2m_{22}}.$$

Le equazioni aggiunte sono

$$\dot{p}^1(t) = g_{12}x(t) + \frac{1}{2}g_{11} + (r-a)p^1(t),$$
$$\dot{p}^2(t) = m_{12}x(t) + \frac{1}{2}m_{11} + (r-a)p^2(t).$$

Si nota che le differenze rispetto a (3.4) – (3.5) e le relative funzioni aggiunte sono date semplicemente dalla presenza di alcuni termini noti, dati appunto dalla presenza del fattore lineare. Ciò comporta che la matrice del sistema lineare del gioco è identica a quella del sistema (3.6) e perciò si può ripetere lo stesso procedimento attuato nel caso di funzione pura per arrivare a una derivazione degli equilibri, sia ad orizzonte finito che infinito.

Markoviano perfetto

Denotando con $\phi^1(x,t)$ e $\phi^2(x,t)$ le strategie di equilibrio, le equazioni di HJB per questo gioco sono

$$rV^1(x,t) - \frac{\partial V^1(x,t)}{\partial t} =$$
$$\max\left\{-\frac{1}{2}\big[g_{11}x(t) + g_{12}x(t)^2 + g_{21}u^1(t) + g_{22}[u^1(t)]^2\big] + \frac{\partial V^1(x,t)}{\partial x}\big[ax + bu^1 + c\phi^2(x,t)\big] \;\Big|\; u^1 \in \mathbb{R}\right\},$$

$$rV^2(x,t) - \frac{\partial V^2(x,t)}{\partial t} =$$
$$\max\left\{-\frac{1}{2}\big[m_{11}x(t) + m_{12}x(t)^2 + m_{21}u^2(t) + m_{22}[u^2(t)]^2\big] + \frac{\partial V^2(x,t)}{\partial x}\big[ax + b\phi^1(x,t) + cu^2\big] \;\Big|\; u^2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Data la costruzione del funzionale, è necessario ipotizzare una funzione valor ottimo della forma

$$V^i(x,t) = \frac{1}{2}v^i(t)x^2 + w^i(t)x + z^i(t)$$

Sostituendo tale equazione nella HJB e applicando la massimizzazione del membro destro dell'equazione, viene ricavata la coppia

$$u^1 = \phi^1(x,t) = \left(\frac{b(v_1(t)x + w_1(t))}{g_{22}}\right) - \frac{g_{21}}{2g_{22}}, \tag{3.30}$$
$$u^2 = \phi^2(x,t) = \left(\frac{c(v_2(t)x + w_2(t))}{m_{22}}\right) - \frac{m_{21}}{2m_{22}}. \tag{3.31}$$

la quale risulta leggermente differente rispetto al caso puro per la presenza di più termini, ma comunque riconducibile allo stesso caso annullando i coefficienti opportuni.
Inserendo tali soluzioni all'interno della HJB, accoppiando i termini di egual potenza di x, si ottiene un sistema di equazioni differenziali di Riccati per $v^i(t)$ nella potenza x^2, analogamente al paragrafo precedente

$$\dot{v}^1(t) = g_{12} + (r-2a)v^1(t) - \frac{b^2}{g_2}\left[v^1(t)\right]^2 - 2\frac{c^2}{m_{22}}v^1(t)v^2(t), \tag{3.32}$$

$$\dot{v}^2(t) = m_{12} + (r-2a)v^2(t) - \frac{c^2}{m_2}\left[v^2(t)\right]^2 - 2\frac{b^2}{g_{22}}v^1(t)v^2(t). \tag{3.33}$$

le quali, data la condizione di trasversalità, possono essere risolte allo stesso modo del caso puro. La novità risiede nella presenza di equazioni differenziali anche per la potenza in x e per i termini noti, le quali portano a definire $w^i(t)$ e $z^i(t)$. Tali procedimenti verranno omessi data la complessità dei calcoli, l'aspetto importante risiede sempre nel fatto che le ipotesi del teorema (9) sono soddisfatte, dunque una volta calcolate $v^i(t), w^i(t)$ e $z^i(t)$, (per definire u^i, come indicato esplicitamente da (3.30)-(3.31), si potrebbe anche tralasciare il calcolo di $z^i(t)$, in quanto ininfluente nella definizione dei controlli), le equazioni (3.32)-(3.33) restituiscono un equilibrio Markoviano perfetto.

Nel caso di orizzonte temporale infinito ci si ricollega nuovamente a funzioni valore ottimo stazionarie che dunque assumeranno la forma

$$V^i(x,t) = \frac{1}{2}v^i x^2 + w^i x + z^i$$

esi giunge nuovamente a un sistema di equazioni di Riccati come $(3.32) - (3.33)$, nel quale il membro sinistro risulta essere nullo, in quanto $\dot{v}^1 = 0 = \dot{v}^2$ per la scelta di funzioni valore stazionarie. A questo punto, inserendo $(3.30) - (3.31)$ nell'equazione di stato si ricava

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b^2}{g_{22}}v^1 + \frac{c^2}{m_{22}}v^2\right)x + \frac{bw^1}{g_{22}} - \frac{bg_{21}}{2g_{22}} + \frac{cw^2}{m_{22}} - \frac{cm_{21}}{2m_{22}}$$

e si ripercorre una discussione analoga al caso puro, con la differenza che ora $\phi(x,t)$ è della forma $\phi(x,t) = A(t)x + B(t)$, per cui, con considerazioni pressoché analoghe, si arriva a definire le strategie di controllo dell'equilibrio di Nash Markoviano perfetto.

Capitolo 4

Un'applicazione: la conoscenza come bene pubblico

All'interno di questo capitolo finale verranno sfruttati gran parte dei risultati e delle formulazioni ottenute nel precedente, per analizzare un esempio particolare di gioco differenziale lineare quadratico, in modo tale da fornire un'applicazione pratica, concreta, di ciò di cui si è discusso finora. Obiettivo di tutto questo è comprendere ancor meglio quanto la teoria dei giochi, cosi apparentemente astratta nelle sue caratteristiche, trova linfa in problemi anche lontani da aspetti prettamente matematici, in particolare nell'esempio proposto ci si interfaccia con aspetti più vicini all'ambiente economico.

La maggior parte degli esempi riguardanti questa struttura di giochi differenziali riguardanti l'economia si concentra spesso su un'impresa che investe del capitale sociale[1] (*capital accumulation games* [1]) in un privato o in qualcosa di "fisico". Molte applicazioni sono presenti in [1], [4], [3] e [5]. Il problema preso in considerazione ha una prospettiva diversa: si andrà a considerare l'accumulo di conoscenza, interpretandola come un bene pubblico. Ciò significa che ogni individuo ha accesso a tutta la conoscenza nell'economia[2].

4.1 Il problema

Si procede alla descrizione e alla formulazione del problema. Come già anticipato poco sopra, si considera un modello in cui l'obiettivo è la crescita della conoscenza in un'economia, non l'accumulo personale di ricchezza. Tale considerazione implica la presenza di un singolo capitale, $K(t)$, nel quale due o più giocatori investono. Ci si restringe al caso di due individui, che decidono entrambi di investire ad un livello $I^i(t)$ ad un istante t; perciò l'equazione di accumulo di capitale è descritta da

$$\dot{K}(t) = I^i(t) + I^j(t) - \delta K(t), \qquad i \neq j, \;\; i,j \in \{1,2\}$$

ove $\delta \geq 0$ è un parametro costante di deprezzamento e $K(0) = K_0$ è un ammontare iniziale di capitale. Ogni giocatore che ha optato per l'investimento si trova a fronteggiare dei costi pari a

$$C^i(I^i(t)) = \rho I^i(t) + \frac{1}{2}[I^i(t)]^2.$$

Ciascuno di essi, a prescindere dall'essere coinvolto o meno nell'investimento, beneficia del livello corrente di capitale sociale, la conoscenza, e ne deriva un ricavo istantaneo indicato da

$$\pi^i(K(t)) = K(t)[a^i - K(t)].$$

È importante precisare delle assunzioni che sono necessarie alla ricerca delle soluzioni del gioco e che d'ora in poi verranno considerate implicite, ossia:

[1] Il capitale sociale, in economia aziendale, è il capitale contribuito alla società da parte dei soci e che viene impiegato nelle attività di business.

[2] Alcuni modelli riguardanti problemi di *advertising* hanno una struttura simile, in [1] e [5] ne sono presenti alcuni.

- le funzioni di ricavo $\pi^i(K)$ sono differenziabili, con derivata continua, cioè di classe C^1, crescenti e strettamente concave rispetto a K^i. Inoltre $\pi^i_{K^i}(K^i)$ è limitata superiormente;
- le funzioni dei costi $C^i(I^i)$ sono differenziabili almeno due volte con derivata continua e strettamente convesse, con $C^i(0) = 0$ e $C^i_{I^i}(0) = 0$.

Tutte le considerazioni implicano che il payoff che ogni giocatore vuole massimizzare sia dato dal seguente funzionale:

$$J^i = \int_0^\infty e^{-rt}\Big\{K(t)[a^i - K(t)] - \rho I^i(t) - \frac{1}{2}[I^i(t)]^2\Big\}dt,$$

sottostante all'unica equazione di stato

$$\dot{K}(t) = I^i(t) + I^j(t) - \delta K(t), \qquad i \neq j \tag{4.1}$$

4.2 Equilibri

Markoviano perfetto

L'interesse è di ricercare sia l'equilibrio di Nash open-loop, sia l'equilibrio di Nash Markoviano perfetto del gioco, e osservare come queste soluzioni decentralizzate, vale a dire risultati di non cooperazione, si relazionano ad una soluzione collusiva, ossia una nella quale è presente un accordo tra più parti con una massimizzazione congiunta, nel caso in esame tra i due decisori.

Si procede a derivare un equilibrio di Nash Markoviano perfetto, applicando i metodi derivati nel Dockner ([1]) e riportati nella discussione del capitolo precedente, dato che il problema è stato modellato su una struttura lineare quadratica. L'equazione di HJB associata a ciascun giocatore è data da

$$rV^i(K) = \max_{I_i}\Big\{K(a^i - K) - \rho I^i - \frac{1}{2}(I^i)^2 + V^i_K(K)[I^i + \phi^J(K) - \delta K] \;\Big|\; I^i \in \mathbb{R}\Big\}. \tag{4.2}$$

Per la risoluzione si ipotizza una funzione valore quadratica nel capitale del tipo

$$V^i(K) = \frac{\alpha}{2}K^2 + \beta^i K + \gamma^i.$$

Massimizzare il membro destro dell'equazione (4.2) rispetto a I^i, facendo riferimento a una funzione valore quadratica, risulta nell'avere strategie d'investimento lineari descritte da

$$I^i = \phi^i(K) = -\rho + \alpha K + \beta^i. \tag{4.3}$$

Queste strategie costituiscono un equilibrio di Nash Markoviano perfetto se le costanti α, β^i e γ^i soddisfano le equazioni

$$\frac{r}{2}\alpha = -1 + \frac{3}{2}\alpha^2 - \delta\alpha, \tag{4.4}$$

$$\beta^i r = a^i + 2\alpha\beta^i - 2\alpha\rho - \beta^i\delta + \alpha\beta^i, \tag{4.5}$$

$$\gamma^i r = \frac{\rho^2}{2} + \frac{1}{2}(\beta^i)^2 - 2\beta^i\rho + \beta^i\beta^j. \tag{4.6}$$

Si osserva che (4.4) è un'equazione quadratica in α e (4.5) è un sistema si equazioni lineari in (β^i, β^j) facilmente risolvibile. Le radici di (4.4) sono date da

$$\alpha = \frac{r + 2\delta}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{r + 2\delta}{6}\right)^2 + \frac{2}{3}}. \tag{4.7}$$

Date le strategie definite in (4.3), le dinamica di stato del gioco risulta essere

$$\dot{K}(t) = -2\rho + (2\alpha - \delta)K(t) + \beta^1 + \beta^2, \tag{4.8}$$

la quale presenta uno stato costante asintoticamente stabile se $2\alpha - \delta < 0$. Questa disuguaglianza viene soddisfatta solamente scegliendo α negativo in (4.7). La risoluzione di (4.5) produce

$$\beta^i = \left(\frac{1}{\Delta_c}\right)[2\alpha^2\rho + (r+\delta)(a^i - 2\alpha\rho) - \alpha(2a^i - a^j)],$$

ove $\Delta_c = (r + \delta - 2\alpha)^2 - \alpha^2$.

L'unico livello di stato costante del gioco è dato da

$$\hat{K}_c = -\frac{\beta^1 - \beta^2 - 2\rho}{2\alpha - \delta}$$

e il capitale sociale nell'equilibrio di Nash Markoviano perfetto evolve secondo

$$K_c(t) = (K_0 - \hat{K}_c)e^{(2\alpha-\delta)t} + \hat{K}_c,$$

la quale mostra che il capitale converge, o superiormente o inferiormente, al livello di stato stazionario, con velocità di convergenza data da $2\alpha - \delta$. Prendiamo questa forma dell'equilibrio di Nash Markoviano perfetto come punto di riferimento.

Open-loop

A questo punto si prosegue con la determinazione dell'equilibrio di Nash open-loop. Si formula la funzione Hamiltoniana, che si presenta come

$$H^i(K, I^i, \lambda^i, y, t) = K(a^i - K) - \rho I^i - \frac{1}{2}(I^i)^2 + \lambda^i[I^i + I^j(t) - \delta K],$$

con λ^i la variabile aggiunta del giocatore i. Senza perdita di generalità, si assume per semplicità di avere a che fare con un caso simmetrico ($a^i = a^j = a$): allora le variabili di costato coincidono e le condizioni di equilibrio si riducono al seguente sistema di equazioni differenziali per la variabile di stato e la variabile di costato comune λ

$$\dot{K}(t) = -2\rho + 2\lambda(t) - \delta K(t), \tag{4.9}$$

$$\dot{\lambda}(t) = (r+\delta)\lambda(t) - a + 2K(t). \tag{4.10}$$

Tale sistema, consistente in due equazioni differenziali lineari, presenta la proprietà di un punto di sella, verificabile tramite l'osservazione che la traccia della matrice Jacobiana del sistema è positiva e uguale a r, mentre il determinante è negativo e dato da

$$\Delta_0 = -[\delta(\delta + r) + 4] < 0.$$

La radice stabile dell'equazione caratteristica del sistema (4.9) – (4.10) è definita da

$$\mu_0 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \Delta_0}\ .$$

Le dinamiche, allo stesso modo dell'equilibrio open-loop sul lungo periodo, sono completamente determinate dalla soluzione del sistema (4.9) – (4.10). I valori stazionari sono descritti da

$$\hat{K}_0 = \left(\frac{2}{\Delta_0}\right)[\rho(r+\delta) - a]$$

e

$$\hat{\lambda}_0 = \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)(-\delta a - 4\rho).$$

L'evoluzione del capitale sociale in forma open-loop è invece data da

$$K_0(t) = (K_0 - \hat{K}_0)e^{\mu_0 t} + \hat{K}_0\ .$$

Ancora una volta possiamo osservare che il comportamento transiente del capitale è o una crescita o una decrescita graduale verso il livello di stato stazionario, a seconda del valore iniziale del capitale.

4.3 Confronto con la soluzione collusiva

Una volta ricavati entrambi gli equilibri di Nash, open-loop e Markoviano perfetto, l'attenzione si sposta ora sul confrontare questi ultimi con una soluzione collusiva, in cui i due giocatori collaborano per un ricavo congiunto maggiore. Nonostante in tutto l'elaborato si siano considerati giochi di tipo non cooperativo, questa discussione viene affrontata in quanto questo particolare problema è contraddistinto da una soluzione decentralizzata (non cooperativa) che va a costituire un problema di *free rider*[3]. Per evidenziare tale caratteristica è necessario dunque ricavare la soluzione efficiente del gioco, andando poi a paragonarla con le altre ricavate nella sezione 4.2.

Il problema collusivo consiste nel massimizzare

$$J = \int_0^\infty e^{-rt}\big\{2K(t)[a - K(t)] - C^1(I^1(t)) - C^2(I^2(t))\big\}dt$$

soggetto all'equazione di stato

$$\dot{K}(t) = I^i(t) + I^j(t) - \delta K(t), \qquad i \neq j\ .$$

Questo rappresenta un problema di controllo ottimo standard che può essere risolto con i classici metodi di risoluzione. La funzione Hamiltoniana a valore corrente è data da

$$H(K, I^1, I^2, \lambda) = 2K(a - K) - C^1(I^1) - C^2(I^2) + \lambda(I^1 + I^2 - \delta K).$$

Le condizioni di massimo sono $H_{I^i}(K(t), I^i(t), I^j(t), \lambda(t)) = 0$, le quali implicano $I^i(t) = -\rho + \lambda(t)$. L'equazione aggiunta è

$$\dot{\lambda}(t) = (r + \delta)\lambda(t) - 2a + 4K(t)\ .$$

Il sistema canonico è quindi definito da

$$\begin{aligned}\dot{K}(t) &= -2\rho + 2\lambda(t) - \delta K(t),\\ \dot{\lambda}(t) &= (r + \delta)\lambda(t) - 2a + 4K(t)\ .\end{aligned}$$

Come in precedenza, si può verificare banalmente che il sistema possiede la proprietà di un punto di sella per la radice negativa

$$\mu_e = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \Delta_e}\ ,$$

ove

$$\Delta_e = -\delta(r + \delta) - 8 < 0.$$

L'unico stato stazionario per il sistema è dato da

$$\hat{K}_e = \left(\frac{2}{\Delta_e}\right)[\rho(r + \delta) - 2a]$$

e

$$\hat{\lambda}_e = \left(\frac{2}{\Delta_e}\right)(-\delta a - 4\rho)$$

Perciò, il capitale sociale nella soluzione collusiva segue un'evoluzione secondo

$$K_e(t) = (K_0 - \hat{K}_e)e^{\mu_e t} + \hat{K}_e\ .$$

Si è ora in grado di poter comparare le soluzioni collusiva e decentralizzata. I risultati dell'equilibrio open-loop, così come quello Markoviano, ricadono in un problema di *free rider*, cioè l'ammontare di capitale allo stato di equilibrio stazionario è minore rispetto a quello di una soluzione collusiva. Inoltre la condizione di *free rider* è più severa nel caso dell'equilibrio Markoviano perfetto rispetto a quello open-loop, poiché $\hat{K}_0 > \hat{K}_c$.

[3]In economia, il problema del *free rider* si verifica quando un individuo beneficia di risorse, beni, servizi, informazioni, senza contribuire al pagamento degli stessi, di cui si fa carico il resto della collettività.

Equilibrio di Nash open-loop	Equilibrio di Nash Markoviano perfetto	Soluzione collusiva
$K_0(t) = (K_0 - \hat{K}_0)e^{\mu_0 t} + \hat{K}_0$	$K_c(t) = (K_0 - \hat{K}_c)e^{(2\alpha-\delta)t} + \hat{K}_c$	$K_e(t) = (K_0 - \hat{K}_e)e^{\mu_e t} + \hat{K}_e$
$\hat{K}_0 = \left(\frac{2}{\Delta_0}\right)[\rho(r+\delta) - a]$	$\hat{K}_c = -\frac{\beta^1 - \beta^2 - 2\rho}{2\alpha - \delta}$	$\hat{K}_e = \left(\frac{2}{\Delta_e}\right)[\rho(r+\delta) - 2a]$
$\mu_0 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \Delta_0}$	$\alpha = \frac{r+2\delta}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{r+2\delta}{6}\right)^2 + \frac{2}{3}}$	$\mu_e = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \Delta_e}$
$\Delta_0 = -[\delta(\delta + r) + 4]$		$\Delta_e = -\delta(r+\delta) - 8$

Tabella 4.1: Tabella complessiva degli equilibri ricavati

L'interpretazione economica di questi risultati è chiara: il problema di *free rider* è un'immediata conseguenza dell'interpretazione del capitale sociale, la conoscenza, come un bene pubblico. Dato che entrambi i giocatori traggono un'utilità dal capitale $K(t)$, essi sono incentivati a non partecipare all'investimento, ma beneficiano dell'investimento ad opera dell'altro giocatore. Questa tendenza è più accentuata nel caso di un equilibrio di Nash Markoviano perfetto rispetto al caso dell'equilibrio di Nash open-loop. Tuttavia questo può creare un contraddittorio, in quanto se ogni attore del gioco è spinto a non investire, per l'equazione (4.1) si ha che il capitale segue un andamento decrescente o al massimo costante, dunque non si ottiene un effettivo beneficio nell'adottare un controllo di questo tipo. Riassumendo, ogni considerazione fatta finora supporta la scelta di adottare una strategia di cooperazione tra i giocatori, decisamente vantaggiosa se confrontata ad una decentralizzata.

Appendice A

Equazioni di Riccati

La discussione all'interno di quest'appendice riprende quella elaborata in [2].
I problemi di controllo lineari quadratici portano a studiare un'equazione differenziale in forma

$$\dot{\varphi}(t) = a\varphi^2(t) + b\varphi(t) + c, \tag{A.1}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$; questo tipo di equazione viene chiamata **equazione di Riccati**. All'interno di questo approfondimento si presenta qualche indicazione su come possano essere risolti problemi di Cauchy associati ad equazioni differenziali di Riccati.

Per una trattazione più semplice del problema viene ipotizzato $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$; in questo modo si ottiene un'analisi più facile, che tuttavia non esaurisce tutti i casi possibili. Come primo passo, si considerino delle possibili soluzioni stazionarie, ossia costanti tali che

$$a\varphi^2 + b\varphi + c = 0. \tag{A.2}$$

In questo caso ci si è ridotti a risolvere un'equazione di secondo grado nell'incognita φ, che, nell'ipotesi $\Delta \geq 0$, ammette le radici reali

$$\varphi_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \ .$$

Se si conosce una soluzione particolare dell'equazione $(A.1)$, è possibile riformulare lo studio come quello di un'equazione differenziale ordinaria lineare. Il teorema seguente mostra come, conoscendo un'equazione particolare dell'equazione di Riccati, sia possibile trasformare il problema di Cauchy che la contiene in un altro costituito da una ODE quadratica nella funzione incognita $\varphi(t)$, che appartiene alla famiglie delle ODE di Bernoulli.

Teorema. *Sia dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = a\varphi^2(t) + b\varphi(t) + c \\ \varphi(T) = \phi \end{cases}$$

e sia $\varphi^*(t)$ una soluzione particolare dell'equazione di Riccati

$$\dot{\varphi}(t) = a\varphi^2(t) + b\varphi(t) + c \ .$$

Allora la soluzione al problema di Cauchy si presenta come

$$\varphi(t) = \varphi^*(t) + z(t) \ ,$$

dove $z(t)$ è soluzione del nuovo problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = az^2(t) + (2a\varphi^*(t) + b)z(t) \\ z(T) = \phi - \varphi^*(T) \end{cases}$$

in cui l'equazione differenziale è del tipo di Bernoulli.

Dimostrazione. Sostituendo$\varphi(t) = \varphi^*(t) + z(t)$ nell'equazione di Riccati, si ottiene

$$\dot{\varphi}^*(t) + \dot{z}(t) = a(\varphi^*(t) + z(t))^2 + b(\varphi^*(t) + z(t)) + c\ .$$

Dato che $\varphi^*(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione di Riccati, la precedente diventa

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= a(\varphi^*(t) + z(t))^2 + b(\varphi^*(t) + z(t)) + c\\ &= az^2(t) + 2a\varphi^*(t)z(t) + bz(t)\ .\end{aligned}$$

La condizione al bordo

$$\varphi(T) = \varphi^*(T) + z(T),$$

a questo punto porta a una condizione per $z(t)$ del tipo

$$z(T) = \varphi(T) - \varphi^*(T) = \phi - \varphi^*(T).$$

□

Seguendo ora un procedimento standard per la risoluzione delle equazioni di Bernoulli, si elimina la presenza del termine quadratico nella funzione incognita per ottenere un'equazione differenziale lineare secondo il seguente teorema.

Teorema. *Sia dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases}\dot{z}(t) = az^2(t) + (2a\varphi^*(t) + b)z(t)\\ z(T) = \phi - \varphi^*(T),\end{cases}$$

e sia $z(t)$ una soluzione mai nulla, allora la funzione

$$w(t) = \frac{1}{z(t)}$$

soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases}\dot{w}(t) = -(2q\varphi^*(t) + b)w(t) - a\\ w(T) = \frac{1}{(\phi - \varphi^*(T))}\end{cases}.$$

Dimostrazione. Si osserva che, se $z(t)$ non è mai nulla in $[0, T]$, allora l'equazione differenziale nel primo sistema è equivalente alla

$$\frac{\dot{z}(t)}{z^2(t)} = a + (2a\varphi^*(t) + b)\frac{1}{z(t)}\ .$$

Utilizzando la definizione della funzione $w(t)$, si ottiene

$$\dot{w}(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{z^2(t)},$$

quindi la precedente equazione differenziale si può riscrivere equivalentemente come

$$\dot{w}(t) = -a - (2a\varphi^*(t) + b)w(t)\ .$$

□

È doveroso osservare che se viene scelta una soluzione costante per l'equazione $(A.1)$, $\varphi^*(t) = \bar{\varphi}$, allora l'equazione finale nel secondo problema di Cauchy in quest'ultimo teorema risulta essere un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti,

$$\dot{w}(t) = -a - (2a\bar{\varphi} + b)w(t)\ .$$

Bibliografia

[1] Engelbert J. Dockner, Steffen Jorgensen, Ngo Van Long, Gerhard Sorger, *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press (2000).

[2] Alessandra Buratto, Luca Grosset, Bruno Viscolani *Ottimizzazione Dinamica, modelli economici e gestionali*, Libreria Progetto Padova (2021).

[3] Alain Haurie, Georges Zaccour, *Dynamic Games, Theory and Applications*, Springer (2005).

[4] Tamer Basar, Geert Jan Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1999).

[5] Tamer Basar, Georges Zaccour, *Handbook of Dynamic Game Theory*, Springer (2018).

[6] Daniel Leonard, Ngo Van Long, *Optimal control theory and static optimization in economics*, Cambridge University Press (1992).

[7] A.Agnoletto, *Una dispensa di teoria dei giochi: i concetti, il metodo, le applicazioni.*

[8] Emanuele Becchiega, Luca Lambertini, Arsen Palestini, *On the time consistency of equilibria in additively separable differential games.*

[9] Mirella Manaresi, *Matematica e cultura in Europa*, Springer-Verlag (2005).

[10] Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo, *Primo corso di analisi matematica*, Pitagora Editrice Bologna (1997)

[11] Nicola Fusco, Paolo Marcellini, Carlo Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, Zanichelli (2020)

[12] Alban William Phillips, *The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom*, Economica (1958).