

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La transizione di fase di Berezinskii-Kosterlitz-Thouless nei superconduttori bidimensionali

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Gioele Vicentini

Anno Accademico 2022/2023

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | v |
| 1 Ginzburg-Landau per sistemi bidimensionali | 1 |
| 1.1 Teoria di Landau di campo medio | 1 |
| 1.2 Il funzionale di Ginzburg-Landau | 2 |
| 1.3 Superconduttori | 3 |
| 1.3.1 Il funzionale di Ginzburg-Landau in presenza di campi magnetici costanti | 3 |
| 1.3.2 L'equazione dei London e l'effetto Meissner-Ochsenfeld | 3 |
| 1.3.3 Perdita della resistività | 5 |
| 2 Fluttuazioni del parametro d'ordine | 7 |
| 2.1 Fluttuazioni di fase e vortici | 7 |
| 2.2 Il singolo vortice | 7 |
| 2.3 Vortice e antivortice accoppiati | 9 |
| 3 La transizione di fase di Berezinskii-Kosterlitz-Thouless | 13 |
| 3.1 Grandezze caratteristiche del gruppo di rinormalizzazione | 13 |
| 3.2 Il gruppo di rinormalizzazione nella formulazione di Kosterlitz | 14 |
| 3.3 Flusso delle equazioni di Kosterlitz | 18 |
| 4 Riscontri sperimentali e conclusioni | 21 |

Introduzione

La superconduttività è un fenomeno sperimentalmente noto dal 1911, anno in cui il fisico olandese Heike Kamerlingh Onnes ne osservò l'insorgenza in campioni di mercurio a temperature prossime ai 4.2 K [7]. Successivamente, varie teorie fenomenologiche e microscopiche furono proposte per spiegare e prevedere il comportamento dei materiali a queste temperature. In particolare, nel 1950 L. D. Landau e V. L. Ginzburg introdussero l'idea che l'energia libera del materiale potesse essere descritta in termini di un funzionale con parametro d'ordine complesso [16], attingendo alla già presente teoria di Landau delle transizioni di fase [15]. Tale parametro è legato ad una funzione d'onda macroscopica, il cui modulo quadro rappresenta la densità di particelle che occupano lo stato superfluido. Fino allo sviluppo della teoria BCS [3], nel 1957, non era chiaro il significato della funzione d'onda $\Psi(\vec{r})$ introdotta da Ginzburg e Landau. Due anni dopo, L. P. Gor'kov dimostrò come essa fosse ottenibile a partire dalle considerazioni microscopiche introdotte da J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer [8]. Lo studio della superfluidità nel limite bidimensionale vide un particolare sviluppo grazie al lavoro di V. D. Berezinskii, J. M. Kosterlitz e D. J. Thouless, che introdussero un nuovo tipo di fluttuazione del parametro d'ordine $\Psi(\vec{r})$: il vortice. Con questa aggiunta, la teoria di Ginzburg-Landau ha permesso di spiegare la presenza di una transizione di fase topologica, ovvero legata alla formazione di regioni non superfluide e non alla rottura spontanea di una simmetria locale [17]. Successivamente, Kosterlitz raffinò la trattazione includendo la presenza di un potenziale d'interazione tra vortici [12] e collegò la comparsa di questi difetti topologici ad un processo di separazione di coppie vortice-antivortice, ottenendo di conseguenza la temperatura critica T_c alla quale la separazione è favorita. Nel suo lavoro, Kosterlitz impiega una forma particolare del gruppo di rinormalizzazione, mentre una derivazione più rigorosa si può trovare nel lavoro di José et al. [10]. Una raccolta dei risultati ottenuti per questa transizione si può trovare in [14].

In questo lavoro di tesi ci concentriamo sullo studio della trattazione svolta da Kosterlitz tramite un utilizzo particolare del gruppo di rinormalizzazione [12]. Al [Capitolo 1](#) introduciamo la teoria di Landau per le transizioni di fase del secondo ordine [15] per poi espanderne lo studio includendo le fluttuazioni della funzione d'onda introdotte nel funzionale di Ginzburg e Landau [16]. In questo modo otteniamo una teoria di campo medio che delinea la dipendenza dalla temperatura delle grandezze fondamentali studiate. Approfondiamo poi in [sezione 1.3](#) le differenze tra superfluidi neutri e carichi, per ottenere dalla teoria introdotta l'equazione di London ed una giustificazione teorica per l'effetto Meissner-Ochsenfeld e la scomparsa della resistività [1, 2, 17]. Al [Capitolo 2](#) raffiniamo lo studio introducendo le fluttuazioni del parametro d'ordine e la definizione di vortice. Sono successivamente approfonditi il caso del singolo vortice e della coppia di vortici di carica opposta, derivandone il contributo energetico [17]. Al [Capitolo 3](#) introduciamo le idee e la metodologia del gruppo di rinormalizzazione come applicato da Kosterlitz, per poi applicare l'apparato matematico alla funzione di ripartizione di un sistema di N vortici ed N antivortici. In [sezione 3.3](#) studiamo qualitativamente le relazioni differenziali ottenute per dedurre il comportamento delle coppie vortice-antivortice. Con questo risultato definiamo la transizione di fase BKT come una transizione topologica, legata alla separazione di dipoli di cariche opposte ad una certa temperatura T_c [12, 17]. Infine, al [Capitolo 4](#) riportiamo una verifica sperimentale di quanto introdotto [6].



Capitolo 1

Ginzburg-Landau per sistemi bidimensionali

1.1 Teoria di Landau di campo medio

La teoria di Landau delle transizioni di fase si basa sulla scelta di un parametro d'ordine che sia nullo nella fase disordinata di alta temperatura e diverso da zero nella fase ordinata di bassa temperatura [15]. Prendendo spunto dalla condensazione di Bose-Einstein, Ginzburg e Landau proposero di utilizzare la grandezza ψ : l'ampiezza di una funzione d'onda macroscopica di singola particella $\Psi(\vec{r})$ e, di conseguenza, un numero complesso. L'obiettivo è quello di descrivere il comportamento collettivo delle particelle in termini di una funzione d'onda efficace che rappresenti la regione superconduttiva o superfluida, che quindi deve essere nulla al di sopra della temperatura critica della transizione T_c . Non essendo $\Psi(\vec{r})$ una vera e propria funzione d'onda, è possibile scegliere una normalizzazione adeguata:

$$\int_D |\Psi(\vec{r})|^2 d^2r = N_s \quad \Rightarrow \quad |\Psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r}) \quad (1.1)$$

ovvero $|\Psi(\vec{r})|^2$ rappresenta la densità numerica di particelle allo stato superfluido o superconduttivo, mentre N_s è il numero complessivo di paricelle occupanti questo stato. D è la regione del piano occupata dal materiale.

La teoria delle transizioni di fase alla Landau prevede che, nel caso più semplice, il parametro d'ordine scelto sia costante nel tempo ed uniforme nello spazio, inoltre l'energia libera del sistema deve dipendere unicamente da $|\Psi(\vec{r})|^2 = |\psi|^2$. In tal modo, $F(|\psi|^2)$ matematicamente è una funzione che può essere espansa in serie di Taylor in $|\psi|^2$ in un intorno di 0:

$$F(|\psi|^2) = F_0 + a(T)|\psi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\psi|^4 + \mathcal{O}(|\psi|^6) \quad (1.2)$$

I coefficienti $a(T)$, $b(T)$ introdotti sono funzioni sufficientemente regolari della temperatura ed eventualmente di altre grandezze caratteristiche del sistema. Per superfluidi e superconduttori vale inoltre $b(T) \geq 0$, per cui possiamo interrompere l'espansione a questo termine per ottenere un minimo di $F(|\psi|^2)$ non banale, come riportato in Fig. (1.1). La costante F_0 non è di interesse per questa trattazione e verrà da qui in poi trascurata. Si noti che imponendo una forma tale all'energia libera, stiamo di fatto assumendo che la transizione di fase sia del second'ordine. Per avere una transione di fase del prim'ordine dovremmo includere anche termini con potenza dispari in $|\psi|$. Inoltre, in questa trattazione stiamo trascurando la presenza di campi elettrici o magnetici esterni. In effetti, le cariche elettriche non appaiono nella Eq. (1.2).

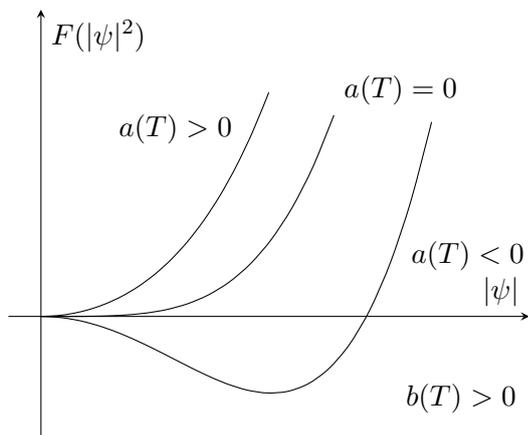


Figura 1.1: Espansione di $F(|\psi|^2)$ al termine quartico. Poiché $b(T) > 0$, abbiamo il primo minimo non banale e i restanti termini della serie sono superflui e trascurabili per $|\psi|$ sufficientemente piccoli

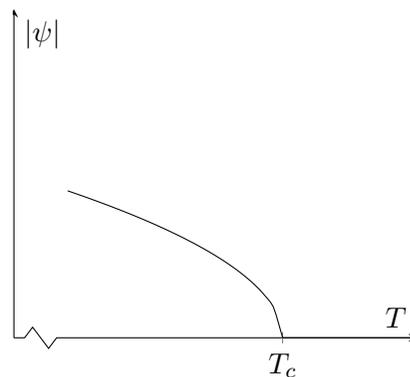


Figura 1.2: Andamento del modulo del parametro d'ordine in prossimità della transizione.

L'equilibrio termodinamico deve corrispondere ad un minimo dell'energia libera, perciò differenziando in $|\psi|^2$ otteniamo:

$$\frac{\partial F}{\partial |\psi|^2} = a(T) + b(T)|\psi|^2 = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 |\psi|^2} = b(T) > 0 \quad (1.4)$$

di conseguenza, per $T \leq T_c$ deve essere $a(T) \leq 0$ e $a(T_c) = 0$ perché sia soddisfatta Eq. (1.3) alla temperatura critica. Espandendo in serie in prossimità di T_c , abbiamo che $a(T) \approx a'(T_c)(T - T_c)$ e $b(T) \approx b_c$. Per $T \leq T_c$, perché valga $a(T) \leq 0$ deve essere $a'(T_c) \geq 0$: ricaviamo dalle condizioni di minimo l'espressione dell'ampiezza in prossimità della transizione, che ha l'andamento di Fig. (1.2).

$$|\psi|^2 = -\frac{a(T)}{b(T)} \quad \Rightarrow \quad |\psi| \approx \sqrt{\frac{a'(T_c)}{b_c}} \sqrt{T_c - T} \quad (1.5)$$

1.2 Il funzionale di Ginzburg-Landau

La teoria di campo medio appena introdotta non tiene conto delle possibili disomogeneità spaziali del parametro d'ordine. Per ovviare a questo problema, Ginzburg e Landau proposero di modificare la teoria finora introdotta [16], aggiungendo un termine all'energia libera che pesasse le variazioni della funzione d'onda macroscopica $\Psi(\vec{r})$.

$$F[\Psi] = \int d^2r \left[a|\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2}|\Psi(\vec{r})|^4 + \gamma|\vec{\nabla}\Psi(\vec{r})|^2 \right] \quad (1.6)$$

Con questa modifica Eq. (1.6) definisce un funzionale, che corrisponde all'energia libera del sistema solo in corrispondenza della configurazione di equilibrio termodinamico, ovvero il suo minimo. Poiché lo stato fondamentale è omogeneo, vale inoltre $\gamma \geq 0$, ovvero ad una variazione spaziale della funzione d'onda deve comportare un aumento dell'energia.

Inizialmente, mancando ancora una teoria microscopica della superconducibilità, non era chiaro il significato della funzione d'onda così introdotta. Successivamente, con l'introduzione della teoria BCS, è stato possibile descrivere il comportamento delle particelle occupanti questi stati. In tale ottica, $\Psi(\vec{r})$ risulta essere la funzione d'onda che descrive il sistema su una scala intermedia tra il microscopico ed il macroscopico, dove i gradi di libertà superflui a questa trattazione sono stati assorbiti (tramite medie

o gruppo di rinormalizzazione) [11]. Grazie a queste considerazioni, Eq. (1.6) può essere vista come il valor medio di una hamiltoniana efficace $H_{\text{eff}}(T)$ di potenziale a , la quale contiene un contributo quartico in $|\Psi(\vec{r})|$. Infatti si può identificare nel termine contenente il gradiente l'operatore momento: ciò è immediato se poniamo $\gamma = \hbar^2/2m^*$, dove m^* rappresenta la massa efficace delle particelle.

$$\langle H(T) \rangle_{\Psi} = \int_D d^2r \Psi^*(\vec{r}) \left[a + \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \right] \Psi(\vec{r}) \quad (1.7)$$

$$= \int_D d^2r \left[a |\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \Psi^*(\vec{r}) \nabla \cdot \nabla \Psi(\vec{r}) \right] \quad (1.8)$$

Notiamo che per il secondo termine vale $\nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi) = \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi + \Psi^* \nabla \cdot \nabla \Psi$. Sostituendo questa relazione nell'integrale è possibile applicare il teorema della divergenza, inoltre imponendo che $\Psi(\vec{r})$ sia zero sul bordo di D possiamo eliminare il relativo addendo. Includendo il termine quartico, otteniamo il funzionale cercato.

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{eff}}(T) \rangle_{\Psi} &= \int_D d^2r \left[a |\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} (\nabla \Psi(\vec{r}))^* \cdot (\nabla \Psi(\vec{r})) + \frac{b}{2} |\Psi(\vec{r})|^4 \right] + \int_{\partial D} d\vec{s} \cdot (\Psi^*(\vec{r}) \nabla \Psi(\vec{r})) \\ &= \int_D d^2r \left[a |\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2} |\Psi(\vec{r})|^4 + \gamma |\vec{\nabla} \Psi(\vec{r})|^2 \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Di conseguenza, i termini "energia libera" ed "energia" in questa trattazione sono utilizzati come sinonimi.

1.3 Superconduttori

La trattazione precedente non distingueva tra superfluidi neutri e superfluidi carichi elettricamente, cioè i superconduttori. Con il presente capitolo ci concentriamo su alcune proprietà uniche dei superconduttori, derivandole dalla teoria di Ginzburg-Landau introdotta finora ed espandendola.

1.3.1 Il funzionale di Ginzburg-Landau in presenza di campi magnetici costanti

In presenza di campi magnetici esterni costanti, possiamo riscrivere il funzionale di Ginzburg-Landau adoperando la sostituzione minimale: $-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - q/c\vec{A}$ ed aggiungendo nel computo dell'energia il termine dovuto alla presenza del campo $\vec{B}(\vec{r})$ nello spazio occupato dal sistema [17]. Si dovrebbe inoltre includere il termine d'accoppiamento con lo spin delle particelle che compongono il materiale, proporzionale a $\vec{B} \cdot \vec{S}$, ma per tutti i superconduttori convenzionali vale $\vec{S} = 0$. Con questi due contributi, otteniamo la seguente formulazione:

$$F[\Psi, \vec{A}] = \int_{\text{Vol}} d^3r \left[a |\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2} |\Psi(\vec{r})|^4 + \frac{\gamma}{\hbar^2} \left| -i\hbar\nabla\Psi(\vec{r}) - \frac{q}{c}\vec{A}\Psi(\vec{r}) \right|^2 + \frac{1}{8\pi} |\vec{B}(\vec{r})|^2 \right] \quad (1.10)$$

si noti che l'integrale è calcolato su tutto lo spazio occupato dal campo $\vec{B}(\vec{r})$, non solo nella porzione bidimensionale D occupata dal superconduttore. Nonostante ciò, la funzione d'onda è non nulla unicamente nel piano contenente D , che possiamo supporre essere xy : $\Psi(\vec{r}) = \psi e^{i\theta(\vec{r})} \delta(\vec{r} \cdot \hat{z})$.

1.3.2 L'equazione dei London e l'effetto Meissner-Ochsenfeld

Minimizziamo ora rispetto ad \vec{A} a partire dalla piccola variazione $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_0(\vec{r}) + \epsilon \vec{a}(\vec{r})$, con $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\vec{a} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{A}_0(\vec{r}) + \epsilon \vec{a}(\vec{r})) = \vec{B}_0(\vec{r}) + \epsilon \nabla \times \vec{a}(\vec{r})$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F[\Psi, \vec{A}]}{\delta \vec{A}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\Psi, \vec{A}] - F[\Psi, \vec{A}_0]}{\epsilon} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\text{Vol}} d^3r \left\{ \frac{\gamma}{\hbar^2} \left[\left(i\hbar \nabla \Psi^*(\vec{r}) - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \Psi^*(\vec{r}) \right) \left(-\frac{q}{c} \Psi(\vec{r}) \epsilon \vec{a} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(-i\hbar \nabla \Psi(\vec{r}) - \frac{q}{c} \vec{A}_0 \Psi(\vec{r}) \right) \left(-\frac{q}{c} \Psi^*(\vec{r}) \epsilon \vec{a} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{A}_0) \cdot (\nabla \times \epsilon \vec{a}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} = \\
 &= \int_{\text{Vol}} d^3r \left[-\frac{i\gamma q}{\hbar c} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2\gamma q^2}{\hbar^2 c^2} \vec{A}_0 |\Psi|^2 + \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}_0) \right] \cdot \vec{a} \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

la notazione z^* indica il complesso coniugato di z e si è utilizzata la proprietà del prodotto misto tale che $\vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{D}) = (\nabla \times \vec{C}) \cdot \vec{D} - \nabla \cdot (\vec{C} \times \vec{D})$. Richiedendo che $\vec{A}, \vec{a} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^3)$ si annulla il termine $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A} \times \vec{a})$.

Applichiamo il principio variazionale al risultato ottenuto imponendo che l'integrando di Eq. (1.11) sia nullo per una qualsiasi scelta di \vec{a} .

$$-\frac{i\gamma q}{\hbar c} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2\gamma q^2}{\hbar^2 c^2} \vec{A}_0 |\Psi|^2 + \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}_0) = 0 \quad (1.12)$$

dalle equazioni di Maxwell in unità di Gauss ricaviamo la densità di corrente, che possiamo supporre sia in prevalenza dovuta alla superconduttività: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}_0) = \nabla \times \vec{B}_0 = 4\pi/c \vec{j}$. Dall'equazione precedente otteniamo infine l'equazione di London se la funzione d'onda $\Psi(\vec{r})$ si trova nello stato fondamentale di campo medio ad ampiezza costante, $\Psi(\vec{r}) = \psi$, $\nabla \Psi(\vec{r}) = 0$:

$$\begin{aligned}
 &\cancel{-\frac{i\gamma q}{\hbar c} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)} + \frac{2\gamma q^2}{\hbar^2 c^2} |\Psi|^2 \vec{A}_0 + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \vec{B}_0 = 0 \\
 &\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{2\gamma q^2 |\psi|^2}{\hbar^2 c} \vec{A} \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

in particolare, il risultato ottenuto è esattamente identico all'equazione di London se applichiamo una normalizzazione diversa alla funzione d'onda. Abbiamo visto in precedenza che $\gamma = \hbar^2/2m^*$, con m^* la massa efficace delle particelle portatrici di carica in una determinata banda energetica, che convenzionalmente viene posta pari a $2m_e$ per superconduttori [17]. La carica delle particelle è invece pari a $2e$, come spiegato dalla teoria microscopica BCS. Otteniamo quindi che la densità superconduttiva n_s può essere ridefinita pari a $2|\psi|^2$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{2\gamma q^2 |\psi|^2}{\hbar^2 c} \vec{A} = -\frac{\hbar^2}{2(2m_e)} \frac{(2e)^2}{\hbar^2 c} 2|\psi|^2 \vec{A} = -\frac{n_s e^2}{m_e c} \vec{A} \quad \text{eq. di London} \quad (1.14)$$

in questo modo, possiamo racchiudere le caratteristiche specifiche di un superconduttore all'interno di n_s , studiandone il valore da risultati sperimentali. Infine, è necessario sottolineare che trascurando i termini contenenti i gradienti in Eq. (1.13), abbiamo di fatto ristretto la validità del risultato a quelle regioni del piano in cui lo stato fondamentale ha ampiezza costante. Sono esclusi di conseguenza i bordi del superconduttore ed i vortici, introdotti a breve.

Uno dei fenomeni principali che permettono di distinguere i superconduttori dal resto dei materiali è la loro risposta a campi magnetici esterni: per valori di $B(\vec{r})$ inferiori ad una certa soglia, il superconduttore si comporta come un diamagnete perfetto, cioè agisce in modo tale da estinguere il campo magnetico all'interno del suo volume [2]. Questo risultato sperimentale è noto come effetto Meissner-Ochsenfeld, e dimostreremo che si manifesta in quei sistemi che soddisfano l'equazione di London vista precedentemente.

A partire dall'equazione di Maxwell per i campi magnetici, applichiamo il rotore ad entrambi i lati e, ricordando che $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$, otteniamo:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \vec{j}(\vec{r})$$

a questo punto sempre dalle equazioni di Maxwell abbiamo $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e ricaviamo l'espressione cercata imponendo al sistema che sia soddisfatta l'equazione di London:

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi n_s e^2}{c m_e} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi n_s e^2}{m_e c^2} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.15)$$

Il parametro $\lambda = \sqrt{\frac{c^2 m_e}{4\pi n_s e^2}}$ rappresenta la lunghezza caratteristica di penetrazione del campo $\vec{B}(\vec{r})$ all'interno del volume superconduttivo, dove $n_s \neq 0$. A titolo d'esempio, è facilmente verificabile che l'andamento esponenziale decrescente $\vec{B}(\vec{r}) = B_0 \exp(-z/\lambda) \hat{z}$ è una soluzione di Eq. (1.15) nel caso di campo parallelo a \hat{z} , perpendicolare al superconduttore e tale che B_0 sia l'intensità all'esterno del materiale.

1.3.3 Perdita della resistività

Un'altra proprietà nota dei materiali in stato superconduttivo è la formazione di correnti che scorrono prive di resistenza in risposta all'applicazione di potenziali elettrici [1]. I sistemi che soddisfano all'equazione di London manifestano questo effetto, che è contenuto nelle equazioni di Maxwell. Partendo da queste, di seguito presentiamo una spiegazione teorica qualitativa del fenomeno.

Sia $\vec{E}(\vec{r})$ un generico campo elettrico e sfruttiamo una trasformazione di gauge per assorbire il potenziale elettrostatico $\phi(\vec{r})$ in un nuovo potenziale vettore $\vec{A}'(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (1.16)$$

A questo punto, derivando rispetto al tempo il contenuto di Eq. (1.14) ed imponendo quanto appena trovato otteniamo una relazione che leghi $\partial_t \vec{j}$ ed \vec{E} :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\frac{n_s e^2}{m_e c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m_e} \vec{E} \quad (1.17)$$

Per concludere, nei materiali vale $\vec{E} = \rho \otimes \vec{j}$, dove ρ rappresenta la resistività ed è un tensore ad elementi non negativi. Sostituendo abbiamo un'equazione della forma $\partial_t \vec{j} = (n_s e^2 / m_e) \rho \otimes \vec{j}$ e poiché il lato destro ha coefficienti positivi o nulli, la corrente sembrerebbe aumentare incontrollata, autoalimentandosi. Questo risultato chiaramente non è fisico e ci segnala la necessità che nelle regioni superconduttive, dove $n_s \neq 0$, valga $\rho = 0$.

Capitolo 2

Fluttuazioni del parametro d'ordine

2.1 Fluttuazioni di fase e vortici

Come introdotto precedentemente, il campo medio ad ampiezza costante finora introdotto non è una descrizione soddisfacente: a temperatura maggiore di zero lo stato del sistema presenta fluttuazioni attorno a ψ in ampiezza e in fase locale. Un particolare tipo di queste fluttuazioni è rappresentato dai vortici: regioni del materiale al cui centro $\Psi(\vec{r})$ si annulla e di conseguenza la fase non è ben definita. È possibile dimostrare che le fluttuazioni in ampiezza sono energeticamente sfavorite rispetto a quelle in fase locale, dato che solo le prime presentano un salto energetico necessario alla loro formazione [17]. Per tale motivo trascuriamo la loro trattazione e ci concentriamo solo sull'analisi della variazione di fase attorno ad un vortice. Questa scelta comporta l'esclusione della regione di piano prossima al centro del vortice, il *core*, nel quale l'ampiezza deve necessariamente variare perché $\Psi(\vec{r})$ si annulli.

Sia ora \mathcal{C} una curva regolare chiusa, che circonda il centro del vortice ma non lo attraversi. Dobbiamo imporre che la funzione d'onda macroscopica non sia polidroma, in modo tale che percorso un giro lungo \mathcal{C} e tornati al punto di partenza, questa non sia cambiata. Ciò corrisponde al chiedere che la variazione della fase lungo una qualsiasi \mathcal{C} sia un multiplo di 2π , o in altri termini:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \nabla \theta = 2\pi q \quad (2.1)$$

dove $q \in \mathbb{Z}$ è la carica topologica del vortice, anche nota come il numero di avvolgimenti. In Fig. (2.1) riportiamo l'illustrazione di un singolo vortice.

Il vincolo imposto in Eq. (2.1) è indipendente dall'ampiezza della funzione d'onda e la definizione di carica topologica non dipende dalla dimensione del core, a patto di escludere la regione in cui $\Psi(\vec{r})$ si annulla. Di conseguenza, possiamo supporre che il centro abbia dimensione trascurabile (puntiforme) per poter introdurre la densità di carica $n_c(\vec{r}) = q\delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i)$, con \vec{r}_i la posizione del generico vortice. Generalizziamo infine a combinazioni di N_v vortici di carica totale N_c .

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \nabla \theta = 2\pi N_c \quad \xrightarrow{\text{Stokes}} \quad \nabla \times (\nabla \theta(\vec{r})) = 2\pi n_v \quad (2.2)$$

$$N_c = \sum_{i=1}^{N_v} q_i \quad n_v(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N_v} q_i \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.3)$$

2.2 Il singolo vortice

Analizziamo il caso di un singolo vortice in posizione (x_i, y_i) di carica topologica q_i : perché $\Psi(\vec{r})$ soddisfi l'Eq. (2.2), la forma più semplice per descrivere la fase è:

$$\theta(x, y) = q_i \arctan \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \quad (2.4)$$

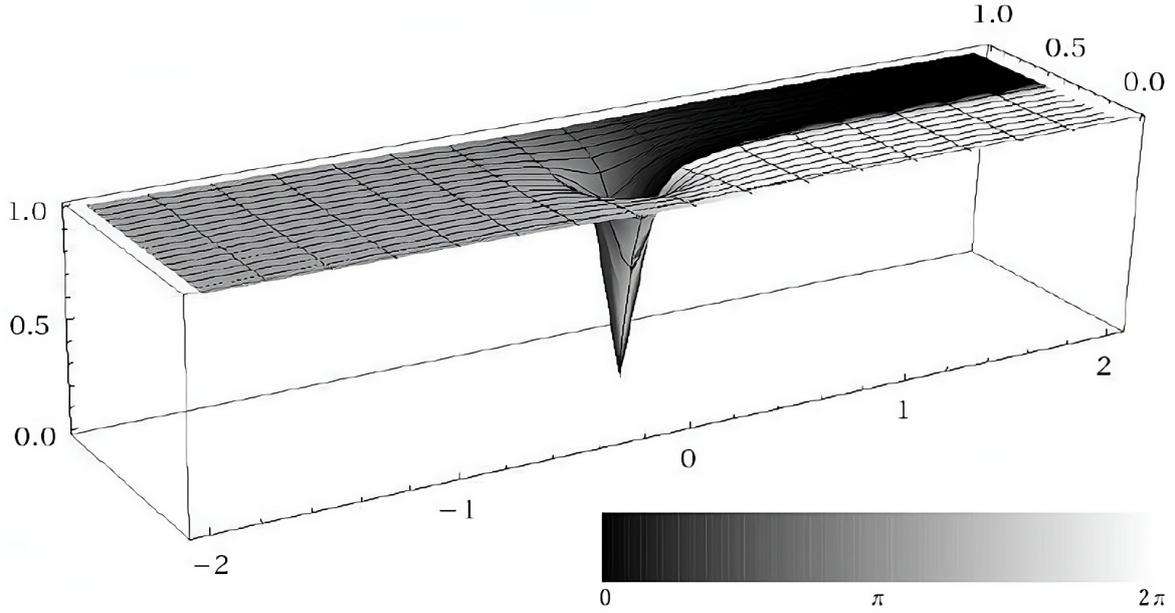


Figura 2.1: Illustrazione di un singolo vortice su una striscia superconduttiva. L'asse verticale riporta l'ampiezza della funzione d'onda $\Psi(\vec{r})$, mentre la scala di grigi rappresenta l'andamento della fase. Nonostante la fase presenti un taglio nel piano, la funzione d'onda complessiva non è polidroma. La variazione in ampiezza è concentrata nel core, che possiamo escludere per trattare $|\Psi(\vec{r})|$ costante. Immagine riadattata da [9].

Possiamo spostarci in un sistema di riferimento tale che il vortice si trovi nell'origine, $(x', y') = (x - x_i, y - y_i)$ e tralascieremo da ora in poi gli apici.

Nella teoria di Ginzburg-Landau, l'energia libera ha un contributo dipendente dal gradiente della fase, che a partire dall'Eq. (2.4) assume la forma:

$$\nabla\theta(x, y) = q_i \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y^2+x^2} & \frac{-y}{x^2} \\ \frac{x^2}{y^2+x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{q_i}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza dal vortice. In particolare, detta A la parte di piano occupata dal superfluido o superconduttore, il contributo all'energia libera dovuta alle variazioni spaziali vale:

$$F_{\nabla} = \gamma|\psi|^2 \int_A |\nabla\theta(x, y)|^2 dA \quad (2.6)$$

Ma per il singolo vortice, Eq. (2.5) restituisce un termine dipendente dalla geometria del sistema.

$$\begin{aligned} F_1 &= \gamma|\psi|^2 q_i^2 \int_A \frac{[(-y)^2 + x^2]}{(x^2 + y^2)^2} dy dx \stackrel{(a)}{=} \gamma|\psi|^2 q_i^2 \int_0^L dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r d\phi \stackrel{(b)}{=} \\ &= F_{\text{core}} + \gamma|\psi|^2 q_i^2 \int_{r_0}^L dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\phi = F_{\text{core}} + 2\pi\gamma|\psi|^2 q_i^2 \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

al punto (a) si passa in coordinate cilindriche, mentre al punto (b) si normalizza la divergenza dell'integrale in r : si spezza quest'ultimo in un contributo a distanze maggiori di una certa soglia r_0 ed uno a distanze minori, che diverge. Tale comportamento è dovuto all'aver supposto il parametro d'ordine ψ uniforme nello spazio, ma ciò non è verificato né in corrispondenza del centro del vortice né al bordo del materiale superconduttore [17]. Di conseguenza, fissato un valore per r_0 , ridefiniamo l'integrale divergente come un termine costante, indipendente dalla configurazione del sistema: l'energia libera del core, F_{core} .

Come si può notare, il risultato di Eq. (2.7) cresce logicamente con la dimensione del sistema,

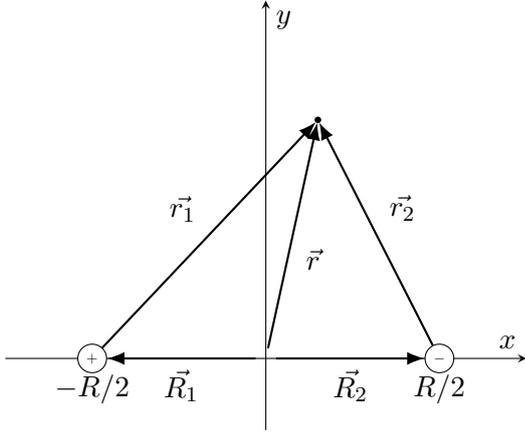


Figura 2.2: Coordinate del centro di massa per la coppia di vortici, con il vortice di carica +1 a sinistra.

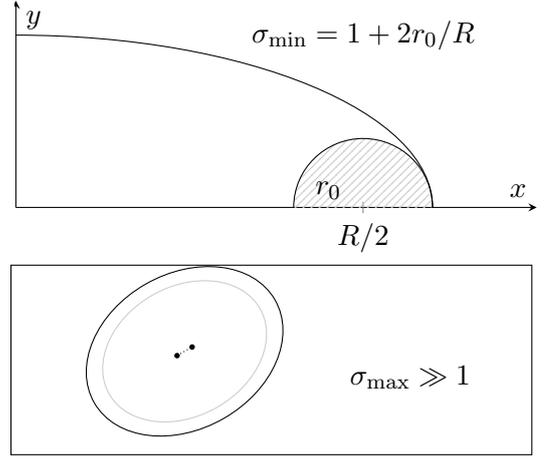


Figura 2.3: Limiti di integrazione in σ . Sopra: l'ellisse tangente alla circonferenza deve contenere il punto $(R/2 + r_0, 0)$, che in coordinate ellittiche corrisponde a $\sigma = 1 + 2r_0/R$. Sotto: ellisse di dimensioni massime in una striscia superfluida rettangolare. Il bordo grigio rappresenta $\sigma' = 10$, $|\nabla\theta(\sigma')|^2 \approx 1/100|\nabla\theta(\sigma_{\min})|^2$

tuttavia ciò non proibisce la formazione di vortici isolati: all'equilibrio, la probabilità di avere un singolo vortice ad una data temperatura è proporzionale a $\exp(-\beta F_1)$, il fattore di Boltzmann, mentre il numero delle possibili posizioni in cui collocare il vortice è pari al rapporto tra l'area di A e quella del core: L^2/r_0^2 . Inoltre, per studiare la dipendenza dei vortici dalla geometria del sistema possiamo in prima approssimazione ignorare i fattori che non ne dipendono, come i contributi all'energia libera dipendenti da $|\psi|^2 = n_s$. Il numero di vortici N_v è allora in media pari a:

$$N_v \propto \frac{L^2}{r_0^2} e^{-\beta F_1} = \frac{L^2}{r_0^2} \exp\left(-\frac{F_{\text{core}} + 2\pi\gamma|\psi|^2 q_i^2 \ln\left(\frac{L}{r_0}\right)}{k_B T}\right) = e^{-\beta F_{\text{core}}}\left(\frac{L}{r_0}\right)^{2-2\beta\pi\gamma|\psi|^2 q_i^2} \quad (2.8)$$

Notiamo che in presenza di superfluido o superconduttore, $n_s = |\psi|^2 \geq 0$, esiste una temperatura critica aldisopra della quale è favorita la proliferazione di singoli vortici:

$$2 - \frac{2\pi\gamma|\psi|^2 q_i^2}{k_B T} \geq 0 \implies T \geq \frac{\pi\gamma|\psi|^2 q_i^2}{k_B} \stackrel{\text{def}}{=} T_c^s \quad (2.9)$$

Berezinskii [4],[5], e successivamente Kosterlitz e Thouless [13], [12], ipotizzarono che la perdita di superfluidità per temperature superiori a T_c^s fosse legata proprio alla forte presenza di difetti topologici, nonostante il campo medio risulti ancora aldisotto della transizione ($n_s > 0$ e quindi $T < T_c^{\text{MF}}$). Tuttavia, la trattazione sviluppata finora non è sufficiente: i vortici possono interagire tra loro per diminuire l'energia della configurazione.

2.3 Vortice e antivortice accoppiati

Per il caso di due vortici di carica opposta $+q$ e $-q$, situati rispettivamente in \vec{R}_1 e \vec{R}_2 e separati da una distanza R , sfruttiamo la linearità di Eq. (2.2) per imporre che la fase di $\Psi(\vec{r})$ sia la sovrapposizione di due fasi di singoli vortici: $\theta(\vec{r}) = \theta_1(\vec{r}, \vec{R}_1) + \theta_2(\vec{r}, \vec{R}_2)$. Per analizzare questa configurazione è conveniente spostarsi nel sistema di riferimento del centro di massa, Fig. (2.2), dove la coppia di vortici si trova sull'asse x a distanza $\pm R/2$ dall'origine. Riprendendo Eq. (2.4) e Eq. (2.5) per il singolo vortice e supponendo senza perdita di generalità che $|q| = 1$ abbiamo:

$$\theta(\vec{r}) = +q\theta_1(\vec{r}) - q\theta_2(\vec{r}) = \arctan\left(\frac{y}{x - R/2}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x + R/2}\right) \quad (2.10)$$

$$\nabla\theta(\vec{r}) = +q\nabla\theta_1(\vec{r}) - q\nabla\theta_2(\vec{r}) = \frac{1}{r_1^2} \begin{pmatrix} -y \\ x - \frac{R}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{r_2^2} \begin{pmatrix} -y \\ x + \frac{R}{2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

dove $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ è la distanza di un punto dal centro del i -esimo vortice: $r_i = |\vec{r} - \vec{R}_i|$. Nelle coordinate introdotte è pari a $r_1 = |\vec{r} - R/2\hat{x}| = \sqrt{(x - R/2)^2 + y^2}$ per il vortice di carica $+1$ posto in posizione $(+R/2, 0)$; $r_2 = |\vec{r} + R/2\hat{x}| = \sqrt{(x + R/2)^2 + y^2}$ per il vortice di carica -1 in $(-R/2, 0)$.

Il calcolo dell'energia libera come riportata in Eq. (2.6) presenta in prossimità dei core la stessa divergenza vista per il singolo vortice. Procedendo allo stesso modo, è possibile separare dall'integrale le due regioni prossime ai nuclei dei vortici, raggruppando il relativo contributo all'interno di un termine $2F_{\text{core}}$. Di conseguenza, definiamo A la regione di piano occupata dal materiale meno la porzione dei due core. Il calcolo su A dell'Eq. (2.6) richiede lo svolgimento del seguente integrale:

$$I = \int_A dx dy \left| \frac{-y (|\vec{r} + R/2\hat{x}|^2 - |\vec{r} - R/2\hat{x}|^2)}{|\vec{r} + R/2\hat{x}|^2 |\vec{r} - R/2\hat{x}|^2} \hat{x} + \frac{(x - R/2) |\vec{r} + R/2\hat{x}|^2 - (x + R/2) |\vec{r} - R/2\hat{x}|^2}{|\vec{r} + R/2\hat{x}|^2 |\vec{r} - R/2\hat{x}|^2} \hat{y} \right|^2 \quad (2.12)$$

dove \hat{x} e \hat{y} indicano i versori dei relativi assi.

Supponiamo che la coppia si trovi a grandi distanze dal bordo del materiale: il problema diventa simmetrico rispetto all'asse x ed è di conseguenza analizzabile nelle coordinate ellittiche σ e τ , che mappano per l'appunto $\pm y$ in $+y$. Le coordinate ellittiche si ottengono tramite il seguente cambio di variabili:

$$x = \frac{R}{2} \sigma \tau \quad (2.13)$$

$$y = \frac{R}{2} \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2}$$

$$\sigma \geq 1, \quad \tau \in [-1, +1] \quad (2.14)$$

Il luogo dei punti a σ fissato e $\tau \in [-1, 1]$ corrisponde alla metà superiore (con $y \geq 0$) dell'ellisse di fuochi $(\pm R/2, 0)$, tale che i suoi punti siano a distanza da ciascun fuoco pari a $R/2(\sigma \pm \tau)$. Per τ fissato e $\sigma \geq 1$ otteniamo invece le metà superiori delle iperboli con gli stessi fuochi e le stesse distanze. Per concludere il cambio di variabili, si riportano la matrice jacobiana e l'elemento di volume della trasformazione.

$$J_{\sigma\tau} = \frac{R}{2} \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\sigma\sqrt{1-\tau^2}} & \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}} \\ \frac{\sigma\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{\sigma^2-1}} & -\frac{\tau\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{1-\tau^2}} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$dx dy \longrightarrow |\det J_{\sigma\tau}| d\sigma d\tau = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2}} d\sigma d\tau$$

Nelle nuove coordinate, le distanze dai vortici si esprimono come $|\vec{r} \pm R/2\hat{x}|^2 = (R/2)^2(\sigma\tau \pm 1)^2 + (R/2)^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)$. L'integrale in Eq. (2.12) espresso in questo nuovo sistema è moltiplicato per un fattore 2 dovuto alla simmetria di cui sopra e sostituendo in x e y e raccogliendo i fattori in $(R/2)$ comuni otteniamo il seguente risultato. Si noti che il termine in Eq. (2.16) fa riferimento al quadrato della componente di Eq. (2.12) parallela ad x , mentre in Eq. (2.17) abbiamo quella parallela a y .

$$I = 2 \iint d\sigma d\tau \left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2}} \times \left[\frac{(R/2)^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)(R/2)^4 [(\sigma\tau + 1)^2 - (\sigma\tau - 1)^2]^2}{(R/2)^8 [(\sigma\tau + 1)^2 + (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)]^2 [(\sigma\tau - 1)^2 + (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)]^2} + \right. \quad (2.16)$$

$$\left. \frac{|(R/2)^3 \sigma \tau [(\sigma\tau + 1)^2 - (\sigma\tau - 1)^2] - (R/2)^3 [(\sigma\tau + 1)^2 + (\sigma\tau - 1)^2 + 2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)]|^2}{(R/2)^8 [(\sigma\tau + 1)^2 + (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)]^2 [(\sigma\tau - 1)^2 + (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)]^2} \right] \quad (2.17)$$

Tutti i fattori $R/2$ si elidono ed è possibile calcolare esplicitamente i termini a numeratore e denominatore: ne riportiamo i principali.

$$\begin{aligned}
 (\sigma\tau \pm 1)^2 + (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) &= (\sigma \pm \tau)^2 \\
 (\sigma\tau + 1)^2 - (\sigma\tau - 1)^2 &= 4\sigma\tau \\
 \sigma\tau [(\sigma\tau + 1)^2 - (\sigma\tau - 1)^2] - (\sigma\tau + 1)^2 + (\sigma\tau - 1)^2 + 2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) &= 4\sigma^2\tau^2 - 2\sigma^2 - 2\tau^2
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ciò permette di semplificare notevolmente l'integrale, che sostituendo diventa:

$$I = 2 \iint d\sigma d\tau \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sqrt{\sigma^2 - 1}\sqrt{1 - \tau^2}} \left[\frac{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)(4\sigma\tau)^2 + (4\sigma^2\tau^2 - 2\sigma^2 - 2\tau^2)^2}{(\sigma + \tau)^4(\sigma - \tau)^4} \right] \tag{2.19}$$

Infine, dal calcolo del numeratore si ottiene:

$$(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)(4\sigma\tau)^2 + (4\sigma^2\tau^2 - 2\sigma^2 - 2\tau^2)^2 = 4(\sigma^4 - 2\sigma^2\tau^2 + \tau^4) = 4(\sigma^2 - \tau^2)^2 \tag{2.20}$$

Con quest'ultima sostituzione è possibile separare l'integrale in due fattori: uno indipendente da τ e l'altro dipendente da entrambe le coordinate.

$$I = 2 \iint d\sigma d\tau \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sqrt{\sigma^2 - 1}\sqrt{1 - \tau^2}} \cdot 4 \frac{(\sigma^2 - \tau^2)^2}{(\sigma^2 - \tau^2)^4} = 8 \int_{D_\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \cdot I_\tau \tag{2.21}$$

$$I_\tau = \int_{D_\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}(\sigma^2 - \tau^2)} \tag{2.22}$$

L'intervallo di integrazione in τ , D_τ , dipende dalle dimensioni dei core, dalla geometria del bordo del superconduttore e di conseguenza da σ , che ne misura la distanza. Sapendo però che vale $|\nabla\theta(\vec{r})|^2 \sim |\vec{r}|^{-2}$ e supponendo che la coppia di vortici sia sufficientemente lontana dal bordo, possiamo restringere D_σ e D_τ alla superficie contenuta in un'ellisse di fuochi $(\pm R/2, 0)$ e di semiassi massimi permessi dalla forma del superconduttore, Fig. (2.3), trascurando l'integrazione sulla regione esterna a questo ellisse.

Con queste approssimazioni possiamo porre $D_\tau = [-1, +1]$. Trascurando la dipendenza di D_τ da σ , l'integrando di I_τ è simmetrico su dominio simmetrico e ciò ci permette di restringere quest'ultimo.

$$I_\tau = \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}(\sigma^2 - \tau^2)} = 2 \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}(\sigma^2 - \tau^2)} \tag{2.23}$$

Il problema è facilmente affrontabile con un adeguato cambio di variabili:

$$\tau \in [0, +1] \quad \Rightarrow \quad \sin u = \tau, \quad d\tau \rightarrow \cos u \, du, \quad u \in [0, \pi/2] \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
 I_\tau &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u \, du}{\sqrt{1 - \sin^2 u}(\sigma^2 - \sin^2 u)} = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 - \frac{\sin^2 u}{\sigma^2}} = \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos^2 u + (1 - \sigma^{-2}) \sin^2 u} = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (1 - \sigma^{-2}) \tan^2 u} \frac{du}{\cos^2 u}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

dove si è in più punti sfruttata l'equazione fondamentale della trigonometria, oltre al fatto che nell'intervallo dato sia $\sin u$ sia $\cos u$ sono positivi.

Per concludere: il primo fattore è della forma $(1 + x^2)^{-1}$, la derivata dell'arcotangente, mentre il secondo è la derivata di $\tan u$. Si intuisce che l'integrando è la derivata di una composizione di $\arctan(x)$ e $\tan(x)$, come è verificabile derivando la funzione in Eq. (2.27):

$$I_\tau = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (1 - \sigma^{-2}) \tan^2 u} \frac{du}{\cos^2 u} = \tag{2.26}$$

$$= \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma^{-2}}} \frac{d}{du} \left[\arctan \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2}} \tan u \right) \right] du =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{\sigma^2 - 1}} \left[\arctan \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2}} \tan u \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{\sigma^2 - 1}} \tag{2.27}$$

Si noti che la tangente diverge in $\pi/2$ e di conseguenza l'estremo di integrazione superiore rende l'integrale improprio. A tal fine, la derivata della funzione in Eq. (2.27) è l'integrando di Eq. (2.26), che è strettamente positivo, e la convergenza della funzione in $\pi/2$ ad esattamente $\pi/2$ è garantita dal teorema del limite per funzioni monotone.

Otteniamo in conclusione un integrale I dipendente unicamente da σ e decomponibile in fratti semplici:

$$\begin{aligned} I &= 8 \int_{D_\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \cdot I_\tau = 8\pi \int_{D_\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma^2 - 1)} = 8\pi \int_{D_\sigma} \left[\frac{\sigma}{\sigma^2 - 1} - \frac{1}{\sigma} \right] d\sigma = \\ &= 8\pi \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2} \right) \right]_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} = 4\pi \log \left(1 - \frac{1}{\sigma_{\max}^2} \right) - 4\pi \log \left(1 - \frac{1}{\sigma_{\min}^2} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

A questo punto è necessario discutere il dominio di integrazione $D_\sigma = [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$. Poiché è stata rimossa la porzione di piano a distanza minore di r_0 da ciascuno dei due vortici, il valore minimo di σ è $\sigma_{\min} = 1 + \frac{2r_0}{R}$, che corrisponde all'ellisse di fuochi $(\pm R/2, 0)$ tangente internamente alle circonferenze di raggio r_0 centrate sui fuochi, come in Fig. (2.3). Si noti che agendo in tal modo escludiamo dall'integrazione la regione interna a questo ellisse, che tuttavia diventa trascurabile per distanze R di molto maggiori del raggio dei core r_0 , ovvero per $\frac{r_0}{R} \ll 1$. Il valore massimo invece dipenderebbe dalla geometria del bordo, ma avendo supposto che la coppia di vortici si trovi sufficientemente lontana da questo possiamo supporre che $\sigma_{\max} \gg 1$, rendendo il primo termine di Eq. (2.28) in prima approssimazione nullo.

In conclusione, I è in prima approssimazione indipendente dalle dimensioni del superfluido o superconduttore e dipende logicamente da R ed r_0 . Il contributo della fase all'energia libera di conseguenza non diverge con le dimensioni del sistema, che si riducono ad influire sulla precisione della nostra trattazione.

$$F_\nabla - 2F_{\text{core}} = \gamma|\psi|^2 I \approx -4\pi\gamma|\psi|^2 \log \left(1 - \frac{1}{\sigma_{\min}^2} \right) = -4\pi\gamma|\psi|^2 \log \left(1 - \frac{R^2}{(R + 2r_0)^2} \right) \quad (2.29)$$

Nel caso in cui la distanza tra i vortici sia sufficientemente elevata, $\frac{r_0}{R} \ll 1$, si ottiene un'espressione semplificata:

$$F_\nabla - 2F_{\text{core}} \approx -4\pi\gamma|\psi|^2 \log \left(1 - \frac{R^2}{(R + 2r_0)^2} \right) \xrightarrow{r_0/R \ll 1} 4\pi\gamma|\psi|^2 \log \left(\frac{R}{4r_0} \right) \quad (2.30)$$

Si noti che l'energia, crescendo con la separazione dei vortici, implica che la configurazione più probabile a basse temperature è quella di una coppia ravvicinata.

La trattazione qui conclusa si limitava al caso di due cariche topologiche opposte, ma è possibile dimostrare che l'operatore di Eq. (2.2) garantisce il principio di sovrapposizione: l'energia per un sistema qualsiasi di vortici corrisponde alla somma delle energie di interazione, più un fattore divergente che si elide imponendo la neutralità complessiva [11]. La soluzione per un insieme di N vortici qualsiasi è pari a:

$$F_N = NF_{\text{core}} + \sum_{i=1}^N 2\pi\gamma|\psi|^2 q_i \log \frac{L}{r_0} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N 4\pi\gamma|\psi|^2 q_i q_j \log \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{4r_0} \quad (2.31)$$

Con i risultati ottenuti finora siamo in grado di descrivere qualitativamente ciò che accade in prossimità della transizione: a basse temperature, per $T < T_c^s$, abbiamo la formazione di dipoli molto ravvicinati, con probabilità prossime a $\exp(-2\beta F_{\text{core}})$. Man mano che la temperatura aumenta le coppie di vortici si allontanano sempre di più, risentendo sempre di meno dell'attrazione dovuta alle cariche opposte, fino a quando per $T > T_c^s$ è favorita la loro separazione e la proliferazione di singoli vortici liberi. Alla fine, per $T > T_c^{\text{MF}}$, lo stato fondamentale di campo medio non è superconduttivo e pochi vortici si presentano come fluttuazioni del parametro d'ordine rispetto allo zero.

Capitolo 3

La transizione di fase di Berezinskii-Kosterlitz-Thouless

Avendo introdotto alcune delle configurazioni topologiche più frequenti, ora introduciamo le idee e gli strumenti matematici necessari per affrontare la transizione. Per applicare le tecniche del gruppo di rinormalizzazione, definiamo le grandezze caratteristiche in gioco e scriviamo la funzione di partizione del sistema in approssimazione di vortici diluiti e di neutralità complessiva. Infine, procediamo con la derivazione delle equazioni di flusso che descrivono la rinormalizzazione e ne studiamo le implicazioni per descrivere il comportamento delle coppie di vortici.

3.1 Grandezze caratteristiche del gruppo di rinormalizzazione

Descriviamo un superfluido in approssimazione bidimensionale che occupa la superficie D , nella quale si trovano lo stesso numero N di vortici ed antivortici con core di raggio r_0 propriamente scelto. L'energia libera di un tale sistema è pari alla somma di tutte le energie di interazione tra coppie:

$$F_{2N} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} 4\pi q_i q_j \gamma |\psi|^2 \log \left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{4r_0} \right) + 2NF_{\text{core}} \quad (3.1)$$

Ripetendo i ragionamenti visti per il singolo vortice, possiamo ottenere la densità di probabilità non normalizzata $p_2(r)$ per la coppia di vortici, pari al fattore di Boltzmann diviso la dimensione del core: $N_0^2 r_0^{-2} \exp(-\beta F_2(r))$, N_0 è una necessaria costante di proporzionalità. A partire dal risultato di [Eq. \(2.30\)](#) introduciamo alcune grandezze fondamentali: la fugacità y_0 e la rigidità K_0 .

$$y_0 = N_0 \exp \left(-\frac{F_{\text{core}}}{k_B T} \right) \quad (3.2)$$

$$K_0 = 2 \frac{\gamma |\psi|^2}{k_B T} = 2 \frac{\gamma a'(T_c - T)}{b_c k_B T} \geq 0 \quad (3.3)$$

K_0 misura la resistenza del fluido alla formazione di vortici.

Procediamo scrivendo la funzione di partizione gran canonica del sistema in termini delle grandezze appena introdotte, applicando l'[Eq. \(3.1\)](#). Per fare ciò, si procede assegnando a ciascun vortice un indice i ed integrando sulle relative posizioni \vec{r}_i :

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sum_N \frac{1}{(N!)^2} \int_{D1} \frac{d^2 r_1}{r_0^2} \cdots \int_{D2N} \frac{d^2 r_{2N}}{r_0^2} \exp \left(-\frac{F_{2N}}{k_B T} \right) \\ &= \sum_N \frac{1}{(N!)^2} y_0^{2N} \int_{D1} \frac{d^2 r_1}{r_0^2} \cdots \int_{D2N} \frac{d^2 r_{2N}}{r_0^2} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} 2\pi q_i q_j K_0 \log \left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{4r_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

D_i rappresenta la regione occupata dal superfluido, alla quale sottraiamo i cerchi di raggio r_0 dei core di tutti i vortici di indici $k \leq i$. In aggiunta, il termine $(N!)^2$ permette di contare una sola volta tutte le permutazioni di vortici con indici diversi, ma la stessa carica. Si noti che una tale scelta implica che tutte le cariche siano di due tipi e la configurazione più probabile pone $|q_i| = 1$. Infatti la formazione di coppie di carica $q_i = -q_j$ maggiori di 1 è meno favorita per un fattore $\exp(-q_i^2)$ rispetto al caso di carica 1. Il modello presentato è quindi equivalente ad un gas di Coulomb bidimensionale, di cariche ± 1 .

3.2 Il gruppo di rinormalizzazione nella formulazione di Kosterlitz

Il procedimento presentato di seguito fu proposto da Kosterlitz [12] e presenta una applicazione non comune delle tecniche di rinormalizzazione. Una derivazione più sofisticata fu successivamente presentata da José et al. [10], la cui trattazione eccede gli scopi di questa tesi.

L'idea chiave è di separare le configurazioni contenute nella funzione di partizione Z_0 in due gruppi: uno che consideri tutte le possibili posizioni dei vortici separati da una distanza non inferiore ad un valore τ , ed uno che raccolga le configurazioni in cui coppie di vortice ed antivortice si trovano a distanze inferiori. Dimosteremo quindi che l'effetto di questi dipoli è integrabile sulle possibili posizioni assunte dalle coppie e dagli altri vortici, generando una funzione di partizione Z che presenta parametri y e K rinormalizzati, ovvero dipendenti dalla dimensione minima scelta τ . Da tali nuove grandezze caratteristiche sono poi derivate le equazioni di flusso della rinormalizzazione, che ne determinano il comportamento in funzione della temperatura.

Selezioniamo due vortici i, j di cariche opposte $q_i = -q_j$. Contare le configurazioni in cui questi vortici sono a distanze prossime a $\tau = 2r_0$ corrisponde ad integrare le loro posizioni \vec{r}_i, \vec{r}_j sull'insieme $\delta_i(j) = \{\vec{r}_i \in \mathbb{R}^2 : \tau \leq |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \leq \tau + d\tau\}$, in cui si fissa la posizione del vortice j e si integra la posizione di i sull'anello centrato in \vec{r}_j e di spessore $d\tau$. A questo punto basta integrare in \vec{r}_j tale risultato su tutto il piano disponibile $\bar{D}_{i,j}$, ovvero la regione D meno i core di tutti i restanti $2(N-1)$ vortici. Iterando su tutte le possibili coppie ed aggiungendo le configurazioni a dipoli spaiati, in termini di operatori otteniamo la sostituzione di Eq. (3.5). Si noti che i casi di vortici con cariche dello stesso segno a distanze prossime a τ sono sfavoriti per sistemi diluiti ($y_0 \ll 1$), che giustifica l'aver considerato solo coppie di vortice ed antivortice.

$$\begin{aligned} \int_{D_1} d^2 r_1 \cdots \int_{D_{2N}} d^2 r_{2N} &\longrightarrow \int_{D'_1} d^2 r_1 \cdots \int_{D'_{2N}} d^2 r_{2N} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \int_{D'_1} d^2 r_1 \cdots \int_{D'_{i-1}} d^2 r_{i-1} \cdots \int_{D'_{i+1}} d^2 r_{i+1} \cdots \int_{D'_{j-1}} d^2 r_{j-1} \cdots \int_{D'_{j+1}} d^2 r_{j+1} \cdots \int_{D'_{2N}} d^2 r_{2N} \cdots \int_{\bar{D}_{i,j}} d^2 r_j \int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'_k denota la stessa regione descritta da D_k , ma con raggio dei core aumentato a $\tau' = \tau + d\tau$.

Per svolgere l'integrale in $\delta_i(j)$ con $q_i = -q_j$, raggruppiamo i termini dipendenti da \vec{r}_i e \vec{r}_j dell'Eq. (3.1):

$$\int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \exp \left[\sum_{k \neq i,j} \left[2\pi q_i q_k K_0 \log \left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}{4r_0} \right) + 2\pi (-q_i) q_k K_0 \log \left(\frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}{4r_0} \right) \right] - 2\pi q_i^2 K_0 \log \left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{4r_0} \right) \right] \quad (3.6)$$

L'ultimo termine è trascurabile in quanto restituisce un addendo costante. Dalle proprietà di esponenziali e logaritmi riformuliamo quanto ottenuto:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \prod_{k \neq i, j} \left[\exp \left(\log \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^2}{16r_0^2} - \log \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2}{16r_0^2} \right) \right]^{\pi q_i q_k K_0} = \\
 & = \int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \prod_{k \neq i, j} \left[\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^2}{16r_0^2} \cdot \frac{16r_0^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} \right]^{\pi q_i q_k K_0} = \\
 & = \int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \prod_{k \neq i, j} \left[\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_k + (\vec{r}_j - \vec{r}_k)|^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} \right]^{\pi q_i q_k K_0} = \\
 & = \int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \prod_{k \neq i, j} \left[1 + 2 \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} + \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} \right]^{\pi q_i q_k K_0} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

A questo punto poniamo $\tau = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ed espandiamo il termine tra parentesi fino a valori $\mathcal{O} \left(\frac{\tau^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} \right)$, ricordando che vale $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$. Definiamo inoltre $\cos \theta_k = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k) / (\tau |\vec{r}_j - \vec{r}_k|)$, l'angolo formato dai vettori congiungenti j e k , i e j . Nell'intervallo di integrazione scelto vale inoltre $\theta_k \in [0, 2\pi] \forall k$, poiché $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ "ruota" attorno al centro di j .

$$\int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \prod_{k \neq i, j} \left[1 + \pi q_i q_k K_0 \frac{\tau^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} (1 + 2 \cos^2 \theta_k (\pi q_i q_k K_0 - 1)) + \pi q_i q_k K_0 \frac{2\tau}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \cos \theta_k \right] \quad (3.8)$$

È possibile ora sviluppare la produttoria, sempre scartando i termini al secondo ordine.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\delta_i(j)} d^2 r_i \left[1 + \sum_{k \neq i, j} \pi q_i q_k K_0 \frac{\tau^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} (1 + 2 \cos^2 \theta_k (\pi q_i q_k K_0 - 1)) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k \neq i, j} \pi q_i q_k K_0 \frac{2\tau}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \cos \theta_k + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \pi q_i q_k K_0 \frac{4\tau^2 \cos \theta_k \cos \theta_l}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k| |\vec{r}_j - \vec{r}_l|} \right] \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Per integrare su $\delta_i(j)$ passiamo in coordinate polari centrate in \vec{r}_j . Vale allora $\delta_i(j) = [\tau, \tau + d\tau] \times [0, 2\pi]$ e tutti i termini lineari in $\cos \theta_n$ spariscono di conseguenza. Il termine che accoppia gli angoli in Eq. (3.9) è riconducibile al coseno dell'angolo formato dai vettori congiungenti j e k , j e l : definito $\Delta\theta_{l,k} = \theta_l - \theta_k$, dalle formule di addizione del coseno possiamo ricavare la relazione cercata.

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_k \cos \theta_l & = \cos \theta_k \cos(\theta_k + \Delta\theta_{l,k}) \\
 & = \cos^2 \theta_k \cos \Delta\theta_{l,k} - \cos \theta_k \sin \theta_k \sin \Delta\theta_{l,k}
 \end{aligned}$$

Infatti $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$ e $\int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0$, per cui il risultato di Eq. (3.9) è riportato in Eq. (3.10).

$$2\pi\tau d\tau \left[1 + \pi^2 q_i^2 K_0^2 \sum_{k \neq i, j} q_k^2 \frac{\tau^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} + \pi^2 q_i^2 K_0^2 \sum_{k \neq l} q_k q_l \frac{\tau^2 (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2 |\vec{r}_j - \vec{r}_l|^2} \right] \quad (3.10)$$

Si noti che $q_i^2 = 1$ per qualsiasi vortice, di conseguenza verrà ommesso da qui in poi.

Per procedere con l'integrale su $\bar{D}_{i,j}$ notiamo che gli elementi delle sommatorie di Eq. (3.10) sono riconducibili a quanto calcolato per il singolo vortice in sezione 2.2 e per la coppia vortice e antivortice in sezione 2.3. In particolare, il termine proporzionale a q_k^2 è riconducibile all'integrale di Eq. (2.7), mentre il termine contenente il prodotto scalare può essere ricondotto all'integrale di Eq. (2.12) per vortice ed antivortice, indipendentemente dalle singole cariche q_k e q_l :

$$-2 \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_k) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2 |\vec{r}_j - \vec{r}_l|^2} = \left| \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} - \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_l}{|\vec{r}_j - \vec{r}_l|^2} \right|^2 - \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} - \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_l|^2} \quad (3.11)$$

Il primo addendo a destra dell'Eq. (3.11) è identico al termine integrato in Eq. (2.12) a patto di scambiare i fattori in \hat{x} e \hat{y} , che non modificano il risultato. I restanti addendi sono contributi del singolo vortice.

Sfruttando queste analogie con quanto già visto, riportiamo in Eq. (3.12) il risultato dell'integrale su $\overline{D}_{i,j}$. Nel calcolo si è assunto che le dimensioni dei core dei restanti $2N - 2$ vortici fossero trascurabili rispetto alle dimensioni del sistema. Si sono inoltre applicate le ipotesi necessarie alla sostituzione dei termini del singolo vortice e della coppia, già presentate nelle relative sezioni.

$$2\pi\tau d\tau \left[D + (\pi K_0\tau)^2 \left(\sum_{k \neq i,j}^{2N} q_k^2 + \sum_{k \neq i,j}^{2N} \sum_{l \neq k,i,j}^{2N} q_k q_l \right) 2\pi \ln \left(\frac{L}{\tau} \right) - 2\pi(\pi K_0\tau)^2 \sum_{k \neq l} q_k q_l \log \left(\frac{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|}{2\tau} \right) \right] \quad (3.12)$$

Si noti che l'insieme di integrazione è caratterizzato dalla distanza minima τ , non $2r_0$, per cui le formule che sono state ottenute dalle sezioni precedenti devono riportare τ come limite inferiore di integrazione.

Avendo supposto che $q_i = -q_j$, che le cariche abbiano modulo 1 e che $\sum_i q_i = 0$, tutti i termini di singolo vortice scompaiono annullando la divergenza contenuta in Eq. (2.7):

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i,j}^{2N} q_k^2 + \sum_{k \neq i,j}^{2N} \sum_{l \neq k,i,j}^{2N} q_k q_l &= \sum_{k \neq i,j}^{2N} q_k \left(q_k + \sum_{l \neq k,i,j}^{2N} q_l \right) = \\ &= \sum_{k \neq i,j}^{2N} q_k (q_k + (N-3)q_k + (N-2)(-q_k)) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Riprendendo l'operatore di Eq. (3.5), è importante notare che questo procedimento ha rimosso dal secondo addendo la dipendenza da \vec{r}_i e \vec{r}_j , lasciando all'interno della sommatoria $2(N-1)$ integrali indipendenti da i e j . È possibile riformulare la funzione di partizione Z gran canonica, dato che tali $2(N-1)$ integrali combaciano con quelli di un sistema a $2N' = 2(N-1)$ cariche. Ciò corrisponde a traslare la sommatoria di Eq. (3.5) al termine precedente della sommatoria in N di Eq. (3.4), trascurando il termine costante relativo al caso $N = 1$. Operando in tale modo, otteniamo la funzione di partizione di Eq. (3.14).

$$\begin{aligned} Z' &= \sum_N \frac{1}{(N!)^2} \left(\frac{y}{\tau^2} \right)^{2N} \int_{D'_1} d^2 r_1 \cdots \int_{D'_{2N}} d^2 r_{2N} \left[1 + \frac{y^2}{\tau^2(N+1)^2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} 2\pi\tau d\tau \times \right. \\ &\quad \left. \left(D - 2\pi(\pi K_0\tau)^2 \sum_{k \neq l}^N q_k q_l \log \left(\frac{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|}{2\tau} \right) \right) \right] \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N 2\pi q_i q_j K_0 \log \left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{2\tau} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

La sommatoria si riduce a $(N+1)^2$ dato che i suoi termini non dipendono da i e j . Inoltre, avendo supposto che il sistema sia diluito ($y_0 \ll 1$) possiamo approssimare il termine in parentesi quadre come $(1 + \gamma dx) \approx e^{\gamma dx}$. Riarrangiando le somme otteniamo un'espressione simile a Eq. (3.4).

$$\begin{aligned} Z' &= \exp \left(\frac{y^2}{\tau^4} 2\pi\tau d\tau D \right) \sum_N \frac{1}{(N!)^2} \left(\frac{y}{\tau^2} \right)^{2N} \int_{D'_1} d^2 r_1 \cdots \int_{D'_{2N}} d^2 r_{2N} \\ &\quad \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \left(-2\pi K + 8\pi^4 y^2 K^2 \frac{d\tau}{\tau} \right) q_i q_j \log \left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{2\tau} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ci chiediamo ora come si modificherebbe Z' se variassimo la distanza minima a $\tau' = \tau + d\tau$, sostituendo in ogni occorrenza e mantenendo solo gli ordini $\mathcal{O}(d\tau^2)$. Abbiamo $\tau^{-2} = (\tau' - d\tau)^{-2} = (\tau')^{-2} + 2d\tau/(\tau')^3$, mentre per i termini lineari in $d\tau$ basta sostituire τ' a τ . Per i contributi logaritmici

abbiamo invece:

$$\begin{aligned}
 \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^N 2\pi K q_i q_j \log \tau\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^N 2\pi K q_i q_j \left(\log \tau' + \log\left(1 - \frac{d\tau}{\tau'}\right)\right)\right) = \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^N 2\pi K q_i q_j \log \tau'\right) \prod_{i\neq j} \left[\exp\left(\pi K \frac{d\tau}{\tau'}\right)\right]^{q_i q_j} = \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^N 2\pi K q_i q_j \log \tau'\right) \left[\exp\left(\pi K \frac{d\tau}{\tau'}\right)\right]^{\sum_i -q_i^2} \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^N 2\pi K q_i q_j \log \tau'\right) \left(1 - \pi K \frac{d\tau}{\tau'}\right)^{2N} \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato le espansioni al primo ordine del logaritmo e dell'esponenziale, oltre alla neutralità complessiva e la presenza di $2N$ vortici con carica $q_i^2 = 1$. Tralasciando i termini costanti, sostituiamo in Eq. (3.15) e riarrangiamo i termini.

$$\begin{aligned}
 Z' &= \exp\left[\left(\frac{y}{(\tau')^2}\right)^2 2\pi\tau' d\tau D\right] \sum_N \frac{1}{(N!)^2} \left(\frac{y}{(\tau')^2}\right)^{2N} \left[1 + (2 - \pi K) \frac{d\tau}{\tau'}\right]^{2N} \int_{D'_1} d^2 r_1 \cdots \int_{D'_{2N}} d^2 r_{2N} \\
 &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^N \left(-2\pi K + 8\pi^4 y^2 K^2 \frac{d\tau}{\tau'}\right) q_i q_j \log\left(\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{2\tau'}\right)\right) \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Si noti che la funzione di partizione originaria di Eq. (3.4) è simile a Z' se ridefiniamo i parametri caratteristici y , K come funzioni della distanza minima τ' . Possiamo inoltre definire Z_{pair} come la funzione di partizione per i dipoli a distanza τ , che sono stati assorbiti come una correzione all'energia libera. In particolare, le relazioni che legano y , K , Z_{pair} a τ' sono:

$$y(\tau') = y(\tau + d\tau) = y(\tau) \left[1 + (2 - \pi K) \frac{d\tau}{\tau}\right] \tag{3.18}$$

$$K(\tau') = K(\tau + d\tau) = K(\tau) \left[1 - 4\pi^3 y^2 K(\tau) \frac{d\tau}{\tau}\right] \tag{3.19}$$

$$Z_{\text{pair}} = \exp\left[\left(\frac{y}{(\tau')^2}\right)^2 2\pi\tau' d\tau D\right] \tag{3.20}$$

dove abbiamo sostituito $d\tau/\tau'$ con $d\tau/\tau$ dato che la differenza è trascurabile al primo ordine. Introduciamo infine la lunghezza logaritmica l , dalla quale possiamo ottenere le equazioni differenziali per il gruppo di rinormalizzazione di Kosterlitz derivando le relazioni precedenti:

$$l = \log \frac{\tau}{\tau_0}, \quad dl = \frac{d\tau}{\tau} \tag{3.21}$$

$$\frac{dy}{dl} = (2 - \pi K)y(l) \tag{3.22}$$

$$\frac{dK}{dl} = -4\pi^3 y^2 K^2(l) \tag{3.23}$$

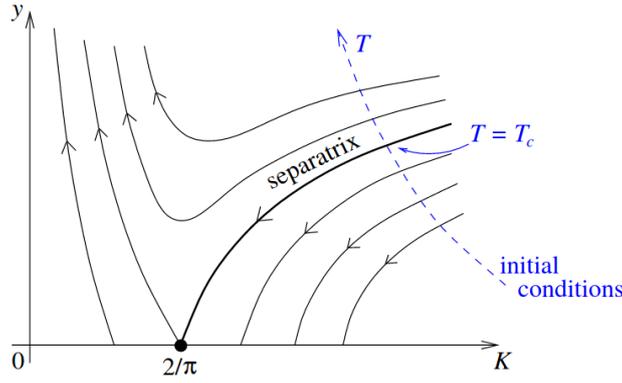


Figura 3.1: Flusso delle equazioni di Kosterlitz. La direzione di moto è definita dall'Eq. (3.23), per cui $\frac{dK}{dl} \leq 0$. La presenza di una separatrice implica l'esistenza di due fasi: una a temperatura elevata, nella zona superiore del grafico, ed una a bassa temperatura nella zona inferiore. Immagine riadattata da [17]

3.3 Flusso delle equazioni di Kosterlitz

Il comportamento del sistema è determinato dalle soluzioni delle Eq. (3.22) e Eq. (3.23). Per cominciare, introduciamo l'integrale primo C :

$$C = 2\pi^2 y^2 - \frac{2}{\pi K} - \log K \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dl} &= 4\pi^2 y(l) \frac{dy}{dl} + \left(\frac{2}{\pi K^2(l)} - \frac{1}{K(l)} \right) \frac{dK}{dl} \\ &= 4\pi^2 y^2 (2 - \pi K) - 8\pi^2 y^2 - 4\pi^3 y^2 K = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Il valore di C non varia lungo il flusso di una soluzione, perciò a partire dalle condizioni al contorno calcoliamo $C(l=0)$ per ottenere il comportamento della fugacità $y(l)$ lungo il flusso:

$$y(l=0) = y(\tau = 2r_0) = y_0 = N_0 \exp\left(-\frac{F_{\text{core}}}{k_B T}\right) \quad (3.26)$$

$$K(l=0) = K(\tau = 2r_0) = K_0 = 2 \frac{\gamma a'(T_c - T)}{b_c k_B T} \quad (3.27)$$

$$C(l=0) = 2\pi^2 y_0^2 - \frac{2}{\pi K_0} - \log K_0 = 2\pi^2 y^2 - \frac{2}{\pi K} - \log K \quad (3.28)$$

Di conseguenza, dati i parametri iniziali y_0 , K_0 e nota la dipendenza dalla temperatura riportata in Eq. (3.26) ed in Eq. (3.27), la fugacità segue una curva ben definita:

$$y = \sqrt{y_0^2 + \frac{1}{\pi^3} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_0} \right) + \frac{1}{2\pi^2} \log \frac{K}{K_0}} \quad (3.29)$$

Una rappresentazione delle curve di livello di C è riportata in Fig. (3.1). La separatrice ha un equilibrio stabile in $y = 0$ per $\pi K \geq 2$ ed instabile per $\pi K < 2$, con la fugacità che diverge positivamente. Un tale comportamento significa una forte proliferazione di singoli vortici spaiati, dato che la forza di interazione diminuisce: $K(l \rightarrow +\infty) = 0$. Possiamo allora identificare nella regione inferiore alla separatrice per $\pi K \geq 2$ un sistema a temperatura $T < T_c$, mentre la regione superiore si trova a $T > T_c$. Tale comportamento si riscontra anche analizzando qualitativamente l'andamento di $y_0(T)$ e $K_0(T)$ dalle Eq. (3.26) e Eq. (3.27).

Analizzando il grafico del flusso notiamo che per $T < T_c$ la forza di interazione tra vortici misurata da $K(l)$ converge al valore $2/\pi$ per grandi separazioni, mentre la fugacità $y(l)$ per coppie molto separate tende a 0. Ciò significa che le configurazioni di vortice ed antivortice sono legate da un potenziale di interazione non nullo e sono più rare man mano che la loro separazione cresce: il sistema è composto

da pochi dipoli. Infatti possiamo associare ad $y(l)$ un'energia libera efficace necessaria a creare i core della coppia, dipendente dalla separazione l , $F_{\text{core}}^{\text{eff}}(l)$: come in Eq. (3.26), più la configurazione dei core a distanza l è dispendiosa, più y a temperatura fissata sarà prossima a 0. Per $T > T_c$ invece, $K(l \rightarrow +\infty)$ tende a 0, mentre la fugacità diverge, ma questo comportamento non è fisico e deriva dalle approssimazioni fatte. Come già accennato, la scomparsa dell'interazione per grandi distanze implica la proliferazione di singoli vortici liberi. Questo è possibile perché col crescere della separazione di una coppia aumenta l'interazione di essa con le restanti cariche topologiche, che ne schermano il potenziale attrattivo riducendolo: $K(l) \leq K_0$. Infine, in termini di energia libera efficace abbiamo che ad $y(l)$ elevata corrisponde un minore dispendio energetico efficace.

Notiamo inoltre che il valore di $K(l)$ nel limite per $l \rightarrow +\infty$ ci restituisce la stessa temperatura critica vista in Eq. (2.9).

Capitolo 4

Riscontri sperimentali e conclusioni

A partire dall'Eq. (3.3), possiamo introdurre una densità superfluida rinormalizzata $n_s(l)$. Prendendone il limite per $l \rightarrow +\infty$ e ricordando che alla temperatura critica vale $\pi K(l) = 2$, otteniamo una dipendenza lineare della densità rinormalizzata dalla temperatura critica:

$$n_s(l \rightarrow +\infty, T_c) = n_{s0} \frac{K(l \rightarrow +\infty)}{K_0} \approx \frac{2}{\pi} \frac{k_B m^*}{\hbar^2} T_c \quad (4.1)$$

Questa relazione è stata verificata sperimentalmente tramite l'utilizzo di pendoli a torsione o analizzando la propagazione di perturbazioni esterne, come lo studio del *third sound*. Quest'ultima tecnica consiste nel misurare le fluttuazioni della temperatura di un film superfluido che sono originate da onde superficiali longitudinali della frazione superfluida. Le oscillazioni avvengono solo nella componente superfluida parallela al substrato che ospita il sistema, mentre la parte di fluido normale è stazionaria. In Fig. (4.1) riportiamo i risultati di vari esperimenti, raccolti ed ampliati da D. J. Bishop e J. D. Reppy, in cui si è verificata la corrispondenza con il modello lineare. Si noti inoltre che, come riportato in Fig. (3.1), nel limite per $l \rightarrow +\infty$ la rigidità $K(l)$ tende a 0 per $T > T_c$ e ad un valore maggiore di $2/\pi$ per temperature $T < T_c$. Dalla definizione data di $n_s(l)$ emerge una discontinuità in T_c , che salta dal valore in Eq. (4.1) a 0.

Le equazioni della rinormalizzazione ci hanno permesso di studiare in prima approssimazione il comportamento delle coppie di vortice e antivortice. Abbiamo visto come la temperatura critica per la proliferazione dei singoli vortici in Eq. (2.9) può essere interpretata come la separazione di tali coppie con un abbassamento del potenziale efficace attrattivo d'interazione. Da quanto abbiamo ottenuto in Eq. (1.15), la densità superconduttiva deve essere localmente diversa da zero perché il sistema manifesti l'effetto Meissner-Ochsenfeld. Al centro di un vortice tale ipotesi non vale, perciò questo fenomeno è dipendente dal numero di cariche topologiche presenti e di conseguenza da T_c .

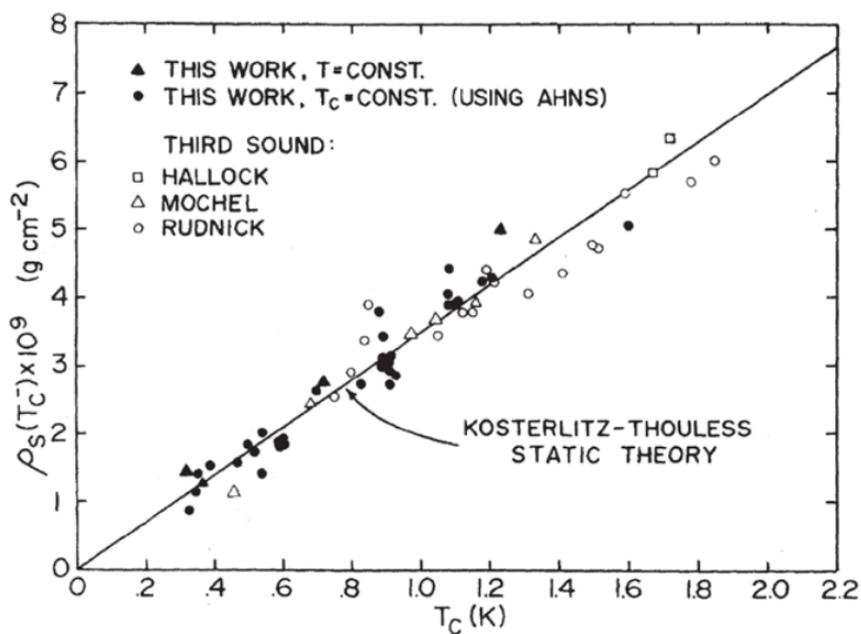


Figura 4.1: Risultati di diversi esperimenti sulla dipendenza lineare della densità superfluida rispetto alla temperatura critica. La previsione teorica combacia col risultato sperimentale con una precisione del 10%, ma ciò è sufficiente dato che il fattore $2/\pi$ di Eq. (4.1) è caratteristico della trattazione a coppie di vortici e la corrispondenza con i dati ne rafforza la validità. L'asse verticale rappresenta la densità superfluida di massa per superficie, pari a $\rho_s = m_e n_s$. Immagine riadattata da [6].

Bibliografia

- [1] A. Altland and B. D. Simons, *Condensed Matter Field Theory* (Cambridge University Press, 2010).
- [2] J. F. Annett, *Superconductivity, Superfluids, and Condensates* (Oxford Master Series in Physics, 2004).
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.* **108** (1957).
- [4] V. L. Berezinsky, Destruction of long range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group. I. Classical systems, *Sov. Phys. JETP* **32**, 493 (1971).
- [5] V. L. Berezinsky, Destruction of Long-range Order in One-dimensional and Two-dimensional Systems Possessing a Continuous Symmetry Group. II. Quantum Systems. *Sov. Phys. JETP* **34**, 610 (1972).
- [6] D. J. Bishop and J. D. Reppy, Study of the superfluid transition in two-dimensional ^4He films, *Phys. Rev. B* **22** (1980).
- [7] D. van Delft and P. Kes, The discovery of superconductivity, *Physics Today* **63** (2010).
- [8] L. P. Gor'kov, Microscopic Derivation of the Ginzburg-Landau Equations in the Theory of Superconductivity, *JETP* **9** (1959).
- [9] B. Halperin, G. Refael and E. Demler, Resistance in Superconductors, *International Journal of Modern Physics B* **24** (2010).
- [10] J. V. José, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick and D. R. Nelson, Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model, *Phys. Rev. B* **16**, 1217 (1977).
- [11] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields* (Cambridge University Press, 2007).
- [12] J. M. Kosterlitz, The critical properties of the two-dimensional xy model, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **7**, 1046 (1974).
- [13] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **6**, 1181 (1973).
- [14] J. M. Kosterlitz, Kosterlitz–Thouless physics: a review of key issues, *Reports on Progress in Physics* **79**, 026001 (2016).
- [15] L. Landau, On the theory of phase transitions, *Collected Papers of L.D. Landau*, vol. 1 (1969), p. 234.
- [16] L. Landau, On the theory of superconductivity, *Collected Papers of L.D. Landau*, vol. 73 (Pergamon, 1965), p. 546.
- [17] C. Timm, *Theory of Superconductivity, Lecture Notes* (Technische Universität Dresden, 2023).