



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Controllo altitudinale di una mongolfiera

Relatore:  
prof. Zampieri Sandro

Laureando:  
Ferin Eli

ANNO ACCADEMICO: 2021/2022

Data di laurea: 20 Settembre 2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alla mongolfiera</b>	<b>5</b>
1.1	Cenni storici . . . . .	5
1.2	Costruzione . . . . .	6
1.3	Principio fisico . . . . .	7
1.3.1	Principio di Archimede . . . . .	7
1.3.2	Relazione tra densità e temperatura dell'aria . . . . .	7
1.3.3	Bruciatore e dispersione di calore . . . . .	8
1.3.4	Attrito viscoso e velocità del vento . . . . .	8
1.4	Modellizzazione . . . . .	9
1.4.1	Moto verticale . . . . .	9
1.4.2	Bruciatore . . . . .	9
1.5	Equilibrio e linearizzazione . . . . .	9
1.5.1	Punto di equilibrio . . . . .	9
1.5.2	Linearizzazione . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Esercizio</b>	<b>12</b>
2.1	Testo . . . . .	12
2.2	Quesiti . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Modello nel dominio delle frequenze</b>	<b>14</b>
3.1	Funzione di trasferimento . . . . .	14
3.2	Controllo in retroazione . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Soluzione</b>	<b>17</b>
4.1	Strategia di risoluzione . . . . .	17
4.1.1	Prestazioni del controllore . . . . .	17
4.1.2	Approssimazione ad un sistema del secondo ordine . . . . .	19
4.2	Controllore proporzionale . . . . .	21
4.3	Controllo con rete anticipatrice singola . . . . .	24
4.4	Controllo con rete anticipatrice doppia . . . . .	26
4.5	Diagrammi di Bode e frequenza di taglio . . . . .	28
4.6	Reiezione dell'errore . . . . .	30
4.6.1	Calcolo dell'errore a regime . . . . .	30

4.6.2	Reiezione dell'errore con rete ritardatrice . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>34</b>

# Capitolo 1

## Introduzione alla mongolfiera

### 1.1 Cenni storici

Quando pensiamo al concetto di "volare", la prima immagine che ci viene in mente è quella di un aeroplano, che con i suoi potenti motori sfreccia nel cielo ad una velocità che può raggiungere migliaia di chilometri orari. Tuttavia, per oltre un secolo l'unico mezzo in grado di sollevare l'uomo da terra è stato un altro, un velivolo molto più silenzioso, lento e di semplice costruzione: la mongolfiera.

Sin dal terzo secolo dopo Cristo in Cina venivano utilizzate delle lanterne, che, con l'aria calda prodotta da una fiamma posta alla base, si sollevavano nel cielo. Venivano sfruttate per comunicazioni di carattere militare. Sfruttando lo stesso principio, verso la fine del diciottesimo secolo, i fratelli Joseph-Michel e Jacques-Étienne Montgolfier, proprietari di una cartiera nel paese di Annonay nel sud della Francia, cominciarono a sperimentare dei palloni di carta riempiti di aria calda, di dimensioni sempre maggiori. Dopo svariati tentativi, il 19 settembre 1783 riuscirono a compiere il primo volo senza pilota, seguito da un volo che trasportò animali il 15 ottobre. Poco più di un mese dopo, il 21 novembre 1783, i fratelli Montgolfier (dal cui cognome il pallone aerostatico prenderà il nome *mongolfiera*) si recarono a Parigi e, di fronte alla folla e al re Luigi XVI in persona, eseguirono il primo volo libero della storia, nel quale i piloti Jean-Francois Pilatre de Rozier e il marchese François d'Arlandre raggiunsero i 1000 metri di altitudine.

Da quel momento la mongolfiera divenne popolare in tutta Europa e negli Stati Uniti, e per più di un secolo rimase l'unico velivolo in grado di trasportare persone. Negli anni successivi venne perfezionata e resa più efficiente e sicura. Nelle mongolfiere moderne l'involucro del pallone viene realizzato in nylon, e il brucatore viene alimentato con bombole di propano. Al giorno d'oggi la mongolfiera non viene più utilizzata come mezzo di trasporto, ma è diventata una particolare attrazione turistica, che permette alle persone di ammirare paesaggi anche in zone completamente pianeggianti. Inoltre, la capacità di rimanere in una posizione stazionaria per un lungo periodo di tempo e le ridotte emissioni di sostanze inquinanti rendono la mongolfiera particolarmente adatta alla raccolta di dati ad alta quota, come ad esempio la qualità dell'aria o i movimenti dell'atmosfera.

## 1.2 Costruzione

La mongolfiera ha una struttura molto semplice, che può essere riassunta in tre elementi principali. La componente più riconoscibile è sicuramente il pallone, un grande involucro che contiene l'aria calda necessaria per volare. Questo involucro è realizzato in nylon o poliestere, e viene impermeabilizzato con uno strato di silicone per impedire che l'aria lo attraversi. Il pallone ha un foro nella parte bassa, dove viene posizionato il bruciatore, che ha il compito di produrre calore per scaldare l'aria all'interno del pallone. Il bruciatore viene alimentato con bombole di propano liquefatto e produce una fiamma che viene puntata direttamente verso l'interno del pallone. Sotto al pallone, vincolata con delle funi, c'è la navicella, o *gondola*, che permette il trasporto del carburante, del pilota e dei passeggeri.

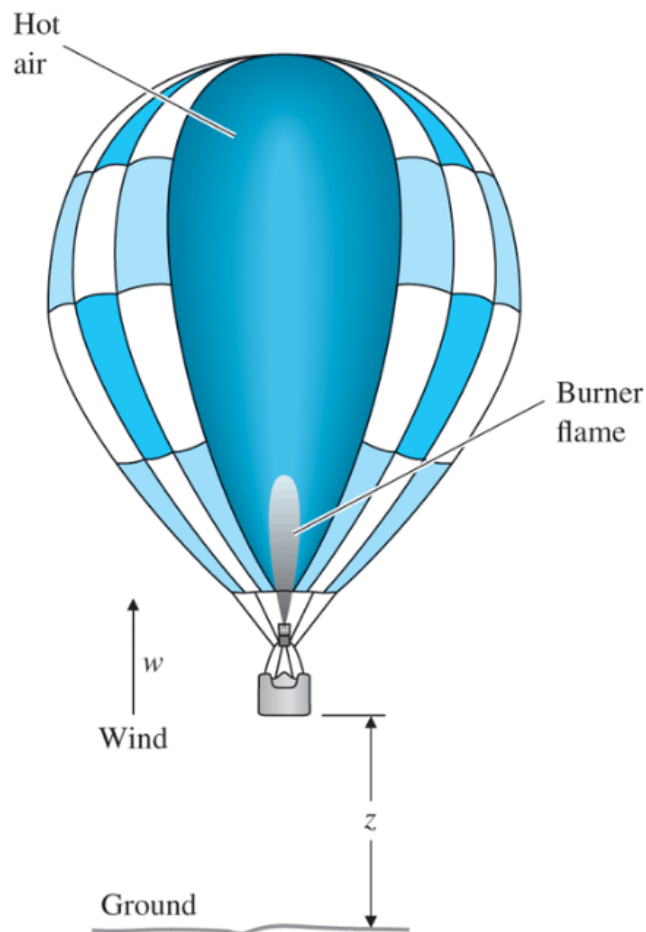


Figura 1.1: Struttura della mongolfiera

## 1.3 Principio fisico

### 1.3.1 Principio di Archimede

La mongolfiera basa il suo funzionamento sul principio di Archimede: “un corpo immerso in un fluido subisce una spinta dal basso verso l’alto pari al peso del fluido spostato”. L’aria all’interno del pallone viene riscaldata per mezzo di un bruciatore, così da diminuirne la densità e fare in modo che l’aria esterna, più fredda, eserciti la spinta verso l’alto che permette alla mongolfiera di volare.

Consideriamo una mongolfiera il cui pallone occupa un volume  $V$ . Secondo il principio di Archimede, la spinta generata dall’atmosfera è pari al peso dell’aria contenuta nel volume  $V$ . Quindi, nota la densità dell’aria ambientale  $\rho_A$  e l’accelerazione di gravità  $g$ , la forza di Archimede  $F_A$  si può calcolare come

$$F_A = \rho_A V g$$

Per garantire che la mongolfiera si sollevi da terra, è necessario che  $F_A$  sia maggiore al peso della mongolfiera. Considerando la massa della mongolfiera come somma della massa  $m$  dell’aria nel pallone e di tutte le masse delle altre componenti  $M$  (bruciatore, telo, cabina, ...), si ha che il peso totale è

$$P_M = (m + M)g$$

Supponendo di conoscere la densità dell’aria nel pallone  $\rho_M$ , la massa  $m$  è data dal prodotto di  $\rho_M$  per il volume  $V$

$$m = \rho_M V \quad \Rightarrow \quad P_M = (\rho_M V + M)g$$

Quindi, per far sollevare la mongolfiera deve valere la diseuguaglianza

$$F_A > P_M \quad \Rightarrow \quad \rho_M < \rho_A - \frac{M}{V}$$

### 1.3.2 Relazione tra densità e temperatura dell’aria

La relazione tra densità e temperatura dell’aria può essere approssimata con l’equazione di stato dei gas perfetti

$$PV = nRT$$

Supponendo che la pressione  $P$  sia costante, il rapporto tra le densità dell’aria a diverse temperature in una trasformazione isobara è

$$\frac{\rho_M}{\rho_A} = \frac{T_A}{T_M}$$

### 1.3.3 Bruciatore e dispersione di calore

Il bruciatore ha il compito di riscaldare sufficientemente l'aria nella fase di decollo e di equilibrare la dispersione termica verso l'atmosfera una volta raggiunta l'altezza desiderata.

Sia  $d$  la potenza dissipata nello scambio termico con l'atmosfera. Tale potenza è direttamente proporzionale, con coefficiente di proporzionalità  $k$ , alla differenza di temperatura tra l'aria interna ( $T(t)$ ) ed esterna ( $T_A$ ) al pallone

$$d(t) = k(T(t) - T_A)$$

Sia  $Q$  il calore fornito dal bruciatore in un certo intervallo di tempo e  $Q_D$  il calore dissipato nell'atmosfera. Possiamo quindi definire il calore netto immesso nel pallone come

$$Q_N(t) = Q(t) - Q_D(t)$$

Sia  $C$  la capacità termica dell'aria nel pallone. Vale quindi la relazione

$$Q_N(t) = C(T(t) - T_A)$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene la relazione tra la potenza netta immessa nel pallone e la derivata della differenza di temperatura

$$q_N(t) = \dot{Q}_N(t) = C\dot{T}(t)$$

Sia  $b(t)$  la potenza immessa nel pallone dal bruciatore. Tale potenza è data dalla somma della potenza che riscalda l'aria nel pallone e della potenza che invece viene dispersa verso l'esterno

$$b(t) = q_N(t) + d(t) = C\dot{T}(t) + k(T(t) - T_A)$$

Dividendo entrambi i membri per  $C$  si ottiene l'equazione differenziale che lega la potenza immessa, normalizzata rispetto alla capacità termica della mongolfiera,  $q(t)$  e la temperatura dell'aria nel pallone. Definiamo inoltre il parametro  $\tau_1 = \frac{C}{k}$

$$\frac{1}{C}b(t) = \dot{T}(t) + \frac{k}{C}(T(t) - T_A)$$

$$q(t) = \dot{T}(t) + \frac{1}{\tau_1}(T(t) - T_A)$$

### 1.3.4 Attrito viscoso e velocità del vento

Quando la mongolfiera si muove nell'atmosfera, quest'ultima produce un attrito viscoso che ne ostacola il moto. Tale attrito è proporzionale alla velocità relativa  $v$  tra la mongolfiera e l'aria.



Dati il coefficiente di attrito viscoso  $B$ , la velocità della mongolfiera  $\dot{z}$  e la componente verticale della velocità del vento  $w$ , la forza di attrito viscoso è

$$F_B(t) = B(\dot{z}(t) - w(t))$$

## 1.4 Modellizzazione

### 1.4.1 Moto verticale

L'equazione del moto verticale della mongolfiera è determinato dalla legge di Newton. Sia  $F$  la forza risultante dalla somma di tutte le forze considerate nella sezione 1.3

$$F = F_A - F_B - P_M$$

Riordinando i termini si ottiene

$$M\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) = \rho_A V g \left(1 - \frac{T_A}{T(t)}\right) + Bw(t) - Mg \quad (1.1)$$

### 1.4.2 Bruciatore

Per quanto riguarda il bruciatore, la relazione tra potenza immessa e temperatura è data dall'equazione

$$q(t) = \dot{T}(t) + \frac{1}{\tau_1}(T(t) - T_A) \quad (1.2)$$

## 1.5 Equilibrio e linearizzazione

Le due equazioni differenziali che descrivono la mongolfiera non sono lineari. Per semplificare lo studio del sistema e la progettazione del controllore è opportuno linearizzare le due equazioni attorno ad un punto di equilibrio.

### 1.5.1 Punto di equilibrio

Il *punto di equilibrio* di un sistema è una particolare combinazione di ingresso e uscita per cui le variabili di stato del sistema rimangono costanti nel tempo. Per trovare il punto di equilibrio per la mongolfiera, imponiamo che tutti i segnali che compaiono nelle equazioni differenziali siano costanti e supponiamo che i disturbi siano nulli

$$\begin{cases} z(t) = \bar{z} \\ q(t) = \bar{q} \\ T(t) = \bar{T} \\ w(t) = 0 \end{cases}$$

Dato che i segnali sono costanti, le loro derivate sono identicamente nulle

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \ddot{z}(t) = 0 \\ \dot{T}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Imponendo queste condizioni nelle equazioni 1.1 e 1.2, si ottengono la temperatura  $\bar{T}$  e la potenza immessa  $\bar{q}$  che garantiscono l'equilibrio della mongolfiera. Il punto di equilibrio del sistema è quindi:

$$\dot{z} = 0 \quad , \quad \bar{w} = 0 \quad , \quad \bar{T} = \frac{1}{1 - \frac{M}{\rho_A V}} T_A \quad , \quad \bar{q} = \frac{M}{\tau_1(\rho_A V - M)} T_A \quad (1.3)$$

### 1.5.2 Linearizzazione

Data una equazione differenziale non lineare, è possibile ottenere una approssimazione di tale equazione in un intorno di un punto di equilibrio mediante lo sviluppo in serie di Taylor.

Definiamo la deviazione dal punto di equilibrio come differenza tra il segnale originale e il valore del segnale nel punto di equilibrio 1.3

$$\begin{cases} \tilde{z}(t) = z(t) - \bar{z} \\ \tilde{q}(t) = q(t) - \bar{q} \\ \tilde{T}(t) = T(t) - \bar{T} \\ \tilde{w}(t) = w(t) - \bar{w} \end{cases} \quad (1.4)$$

Osserviamo che l'unico termine non lineare nelle equazioni differenziali della mongolfiera è quello relativo al segnale  $T(t)$  nell'equazione 1.1. Definiamo

$$f(T(t)) = \frac{1}{T(t)}$$

Secondo il teorema di Taylor, possiamo scrivere lo sviluppo al primo ordine di  $f(T)$  in un intorno del punto di equilibrio  $\bar{T}$  come

$$f(T(t)) = f(\bar{T}) + \frac{\partial f}{\partial T} \cdot \tilde{T}(t) + o(\|\tilde{T}(t)\|)$$

Ignorando il resto infinitesimo  $o(\|\tilde{T}(t)\|)$  si ottiene una approssimazione linearizzata di  $f(T(t))$

$$f(T(t)) \approx f(\bar{T}) + \frac{\partial f}{\partial T} \cdot \tilde{T}(t)$$

Sostituendo il termine non lineare con la sua linearizzazione appena trovata ed effettuando un cambio di variabile secondo il sistema 1.4, si ottiene il sistema di equazioni

differenziali linearizzato in un intorno del punto di equilibrio

$$\begin{cases} \tilde{q}(t) = \dot{\tilde{T}}(t) + \frac{1}{\tau_1} \tilde{T}(t) \\ \frac{M}{B} \ddot{\tilde{z}}(t) + \dot{\tilde{z}}(t) = \frac{M}{B} \frac{g(\rho_A V - M)^2}{\rho_A V T_A} \tilde{T}(t) + \tilde{w}(t) \end{cases}$$

Definiamo i parametri

$$\tau_2 = \frac{M}{B} \quad , \quad a = \frac{M}{B} \frac{g(\rho_A V - M)^2}{\rho_A V T_A}$$

Il sistema di equazioni linearizzate può essere quindi riscritto come

$$\begin{cases} \tilde{q}(t) = \dot{\tilde{T}}(t) + \frac{1}{\tau_1} \tilde{T}(t) \\ \tau_2 \ddot{\tilde{z}}(t) + \dot{\tilde{z}}(t) = a \tilde{T}(t) + \tilde{w}(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

# Capitolo 2

## Esercizio

### 2.1 Testo

Le equazioni che descrivono il moto verticale della mongolfiera, linearizzate attorno al punto di equilibrio, sono

$$\begin{cases} \tilde{q}(t) = \dot{\tilde{T}}(t) + \frac{1}{\tau_1}\tilde{T}(t) \\ \tau_2\ddot{\tilde{z}}(t) + \dot{\tilde{z}}(t) = a\tilde{T}(t) + \tilde{w}(t) \end{cases}$$

dove

- $\tilde{T}$  = deviazione dalla temperatura di equilibrio
- $\tilde{q}$  = deviazione dalla quantità di calore generata dal bruciatore rispetto al punto d'equilibrio (normalizzata alla capacità termica dell'aria nel pallone)
- $\tilde{z}$  = altitudine della mongolfiera
- $\tilde{w}$  = componente verticale della velocità del vento
- $\tau_1, \tau_2, a$  = parametri della mongolfiera

Si progetti un controllore in grado di mantenere l'altitudine per una mongolfiera i cui parametri sono

$$\begin{cases} \tau_1 = 250 \text{ sec} \\ \tau_2 = 25 \text{ sec} \\ a = 0.3 \text{ m}/(\text{sec} \cdot ^\circ\text{C}) \end{cases}$$

Viene misurata solamente l'altitudine, quindi va utilizzata una legge di controllo nella forma

$$Q(s) = C(s) [Z_d(s) - Z(s)]$$

dove  $Z_d(s)$  indica l'altitudine desiderata.

### 2.2 Quesiti

1. Disegnare il luogo delle radici del sistema in catena chiusa, rispetto al guadagno  $K$  di un controllore proporzionale in retroazione  $Q(s) = K [Z_d(s) - Z(s)]$ . Utilizzando

il criterio di Routh, determinare il valore del guadagno e la rispettiva frequenza per cui il sistema è marginalmente stabile.

2. Il risultato del punto 1 suggerisce che, per ottenere un controllore soddisfacente, occorre utilizzare una elevata compensazione in anticipo. Disegnare il luogo delle radici del sistema in catena chiusa, rispetto al guadagno  $K$  di un controllore a doppia rete anticipatrice con funzione di trasferimento

$$C(s) = K \left( \frac{s + 0.03}{s + 0.12} \right)^2$$

3. Disegnare i diagrammi di Bode del guadagno per le funzioni di trasferimento ad anello aperto del controllore proporzionale e del controllore a doppia rete anticipatrice.
4. Selezionare il guadagno  $K$  per cui il sistema con compensazione in anticipo ha una frequenza di taglio di  $0.06 \text{ rad/s}$
5. Se l'errore nel punto precedente è troppo grande, come si potrebbe modificare la compensazione per dare al sistema un guadagno maggiore a bassa frequenza?

# Capitolo 3

## Modello nel dominio delle frequenze

### 3.1 Funzione di trasferimento

Abbiamo verificato che le equazioni differenziali che descrivono il comportamento della mongolfiera, linearizzate attorno al punto d'equilibrio, sono

$$\begin{cases} \tilde{q}(t) = \dot{\tilde{T}}(t) + \frac{1}{\tau_1}\tilde{T}(t) \\ \tau_2\ddot{\tilde{z}}(t) + \dot{\tilde{z}}(t) = a\tilde{T}(t) + \tilde{w}(t) \end{cases}$$

dove  $q(t)$  rappresenta l'ingresso del sistema,  $z(t)$  l'uscita e  $w(t)$  il disturbo dovuto al vento.

Prima di procedere nell'analisi del sistema e nella progettazione del controllore, è opportuno ricavare la funzione di trasferimento della mongolfiera nel dominio delle frequenze, mediante l'utilizzo della trasformata di Laplace<sup>1</sup>.

I segnali nel dominio del tempo vengono trasformati nelle seguenti funzioni a variabile complessa:

$$\tilde{q}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q(s)$$

$$\tilde{T}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} T(s)$$

$$\tilde{z}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z(s)$$

$$\tilde{w}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} W(s)$$

Sfruttando la proprietà di linearità della trasformata di Laplace, si ottengono le seguenti equazioni caratteristiche:

$$\begin{cases} Q(s) = sT(s) + \frac{1}{\tau_1}T(s) \\ \tau_2 s^2 Z(s) + s Z(s) = aT(s) + W(s) \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>La trasformata di Laplace è un operatore che associa ad una funzione variabile reale (generalmente la variabile temporale  $t$ ) una funzione a variabile complessa  $s$ . Dato un segnale  $x(t)$ , la sua trasformata di Laplace è definita come

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt$$

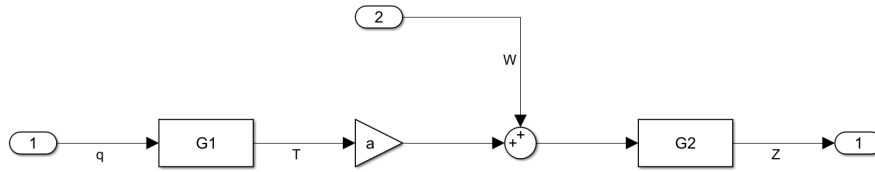


Figura 3.1: Schema a blocchi per la mongolfiera

A questo punto, è possibile ricavare le due funzioni di trasferimento caratteristiche della mongolfiera,  $G_1$  e  $G_2$ :

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{\tau_1}{\tau_1 s + 1} \\ G_2(s) = \frac{Z(s)}{aT(s) + W(s)} = \frac{1}{s(\tau_2 s + 1)} \end{cases} \quad (3.1)$$

L'uscita del sistema, ossia l'altitudine  $Z$ , si ottiene risolvendo il sistema di equazioni 3.1

$$Z(s) = a G_1(s) G_2(s) Q(s) + G_2(s) W(s) \quad (3.2)$$

Osservando il sistema in assenza di disturbi dovuti al vento, si ricava la funzione di trasferimento  $G$  del processo con ingresso  $Q$  e uscita  $Z$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{Q(s)} = a G_1(s) G_2(s) = \frac{a\tau_1}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

## 3.2 Controllo in retroazione

Per poter effettivamente controllare l'altitudine della mongolfiera, è necessario introdurre due ulteriori elementi nel sistema (Figura 3.2):

- il *feedback*, che permette di misurare le prestazioni del sistema;
- il *controllore*, che raccoglie le informazioni fornite dal feedback e gestisce il processo

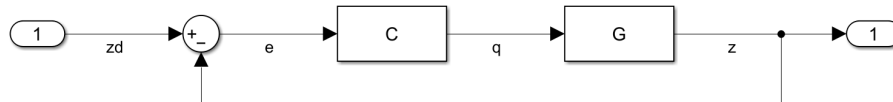


Figura 3.2: Schema a blocchi del sistema a catena chiusa

Sia  $C(s)$  la funzione di trasferimento del controllore. La funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto è quindi

$$C(s) G(s) = \frac{a\tau_1 C(s)}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3.3)$$

Considerando ora il feedback, la funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{a\tau_1 C(s)}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + a\tau_1 C(s)} \quad (3.4)$$



# Capitolo 4

## Soluzione

### 4.1 Strategia di risoluzione

In questo esercizio ci viene richiesto di progettare un controllore in grado di gestire l'altitudine della mongolfiera. Le performance del sistema controllato dipendono dal posizionamento di zeri e poli della funzione di trasferimento in catena chiusa. Di conseguenza torna molto utile l'analisi mediante luogo delle radici<sup>1</sup>.

Una volta determinato il guadagno che garantisce la stabilità del sistema, ci occuperemo di perfezionare il controllore in modo che la mongolfiera risponda in maniera reattiva agli input impostati dal pilota. Come vedremo, un compensatore proporzionale non sarà sufficiente e dovremo ricorrere a metodi di controllo più sofisticati, come la reti anticipatrici e ritardatrici.

Per studiare la stabilità e la risposta del sistema sono molto utili gli strumenti messi a disposizione da *Matlab*<sup>2</sup>, che permettono di descrivere e simulare sistemi dinamici, permettendo inoltre di produrre grafici basati su tali simulazioni. In particolare, nella scrittura di questa tesi sono stati utilizzati il *Control System Toolbox* e il *Control System Designer*.

#### 4.1.1 Prestazioni del controllore

Lo studio del luogo delle radici determina un intervallo di valori del guadagno  $K$  che garantisce la stabilità del sistema, posizionando i poli nella parte sinistra del piano complesso. Tuttavia, il comportamento del sistema controllato può variare radicalmente in funzione del guadagno selezionato e della posizione dei poli. Per valutare la qualità del controllore e le prestazioni del sistema, si utilizzano dei *parametri di prestazione*, che for-

---

<sup>1</sup>Il luogo delle radici è una rappresentazione grafica nel piano complesso dei poli e degli zeri di una data funzione di trasferimento. In particolare mostra come questi poli e zeri si spostano nel piano al variare di un parametro  $K$ , generalmente associato al guadagno del controllore. Sapendo che un sistema dinamico è stabile solamente se i suoi poli hanno tutti parte reale negativa, studiando il luogo delle radici si può determinare l'intervallo di valori di  $K$  che ne garantiscono la stabilità.

<sup>2</sup>Matlab, software sviluppato da MathWorks, è una piattaforma di programmazione e calcolo numerico utilizzata per l'analisi di dati, lo sviluppo di algoritmi e la creazione di modelli[5].

niscono una misura utile per verificare se il controllore che si è progettato è adatto alle specifiche di progetto desiderate.

I parametri di prestazione generalmente utilizzati sono quelli relativi alla risposta al gradino<sup>3</sup>, ossia:

- **tempo di salita**  $t_r$ : indica quanto tempo il sistema impiega per passare dal 10% al 90% del valore del segnale di riferimento.
- **tempo di assestamento**  $t_s$ : indica quanto tempo il sistema impiega per stabilizzarsi in un intorno del valore del segnale di riferimento, generalmente l'1% del valore a regime.
- **sovraelongazione**  $M_p$ : indica, in percentuale, il valore massimo raggiunto dall'uscita in relazione al segnale di riferimento.

In questo esercizio il primo obiettivo da raggiungere è avere un tempo di salita

$$t_r < 60 \text{ s}$$

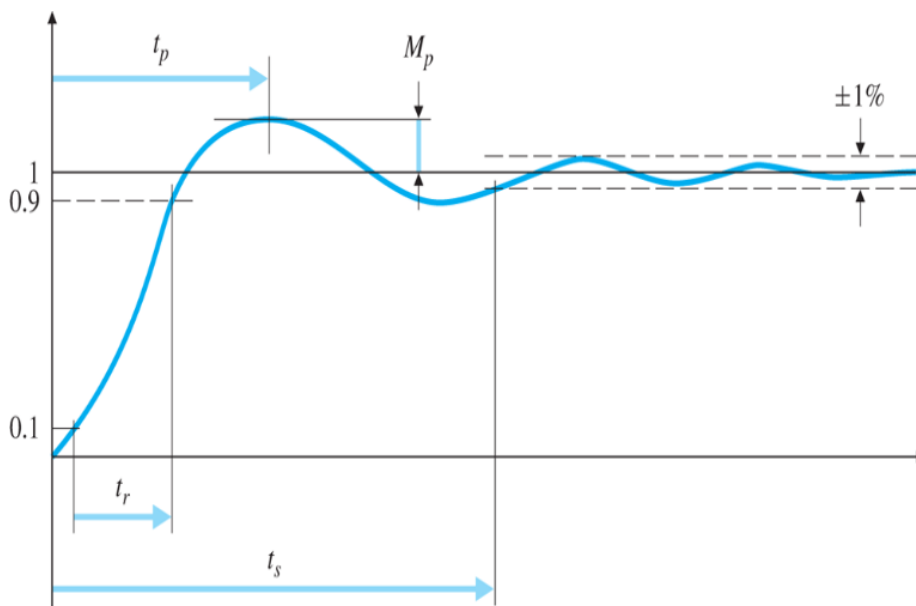


Figura 4.1: Rappresentazione grafica della risposta al gradino e dei parametri di prestazione

<sup>3</sup>Con risposta al gradino si intende la funzione che rappresenta l'uscita di un sistema quando in ingresso viene imposto un segnale a gradino, definito come

$$\delta^{-1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## 4.1.2 Approssimazione ad un sistema del secondo ordine

Consideriamo un sistema con due poli complessi coniugati e nessuno zero, descritto da una funzione di trasferimento in catena chiusa che può essere scritta come

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove  $\omega_n$  è la frequenza naturale e  $\xi$  è il coefficiente di smorzamento.

In un sistema di questo tipo i parametri di prestazione  $t_r$ ,  $t_s$ ,  $M_p$  sono influenzati dai parametri  $\omega_n$  e  $\xi$  secondo le relazioni

$$t_r \simeq \frac{1.8}{\omega_n} \quad , \quad t_s \simeq \frac{4.6}{\xi\omega_n} \quad , \quad M_p = f(\xi) \quad (4.1)$$

Queste approssimazioni sono valide considerando un sistema del secondo ordine senza zeri. L'aggiunta di poli e zeri nella funzione di trasferimento altera le proprietà del sistema e il calcolo dei parametri di prestazione diventa più complesso.

Tuttavia, dato un sistema con due poli dominanti complessi coniugati e zeri con parte reale molto più negativa di tali poli, la sua risposta nel transitorio può essere approssimata a quella di un sistema del secondo ordine con gli stessi poli dominanti e nessuno zero.

Quindi, sapendo che per un sistema del secondo ordine la frequenza di taglio  $\omega_c$  approssima la frequenza naturale  $\omega_n$ , per un generico sistema su cui si applica l'approssimazione ai poli dominanti si possono calcolare i parametri di prestazione utilizzando  $\omega_c$ , che si può ricavare molto semplicemente dai diagrammi di Bode.

Come si può notare in figura 4.3, il sistema che descrive la mongolfiera può essere approssimato ai suoi poli dominanti se il guadagno è sufficientemente grande. Ciò significa che possiamo avere una approssimazione della frequenza naturale desiderata per ottenere un tempo di salita  $t_r < 60$  s. Richiamando le relazioni tra parametri di prestazione e frequenza naturale (4.1), viene imposto sul sistema il seguente vincolo:

$$\omega_n > \frac{1.8}{t_r} = 0.03 \text{ rad/s}$$

Sapendo che la frequenza naturale è la distanza dei poli dall'origine, questo vincolo può essere rappresentato nel piano complesso come una porzione del piano stesso, detta *regione di prestazione*, su cui dovremo posizionare i poli per ottenere il tempo di salita desiderato.

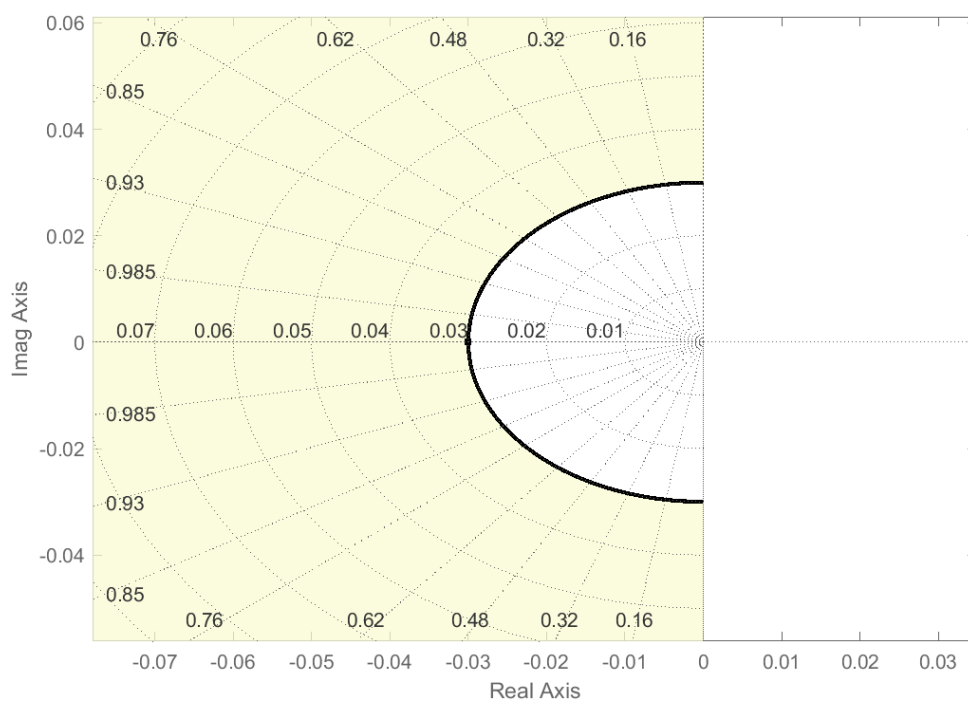


Figura 4.2: Regione di prestazione: i poli vanno posizionati nella parte evidenziata del piano

## 4.2 Controllore proporzionale

Nel primo quesito viene chiesto di analizzare il comportamento del sistema con un semplice controllore proporzionale, ossia un controllore con funzione di trasferimento

$$C(s) = K$$

Con un controllore di questo tipo, la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa diventa

$$T(s) = \frac{a\tau_1 K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + a\tau_1 K} \quad (4.2)$$

Disegniamo quindi il luogo delle radici del sistema in catena chiusa. Per farlo, utilizzeremo la funzione `rlocus()` del Control System Toolbox fornito da Matlab.

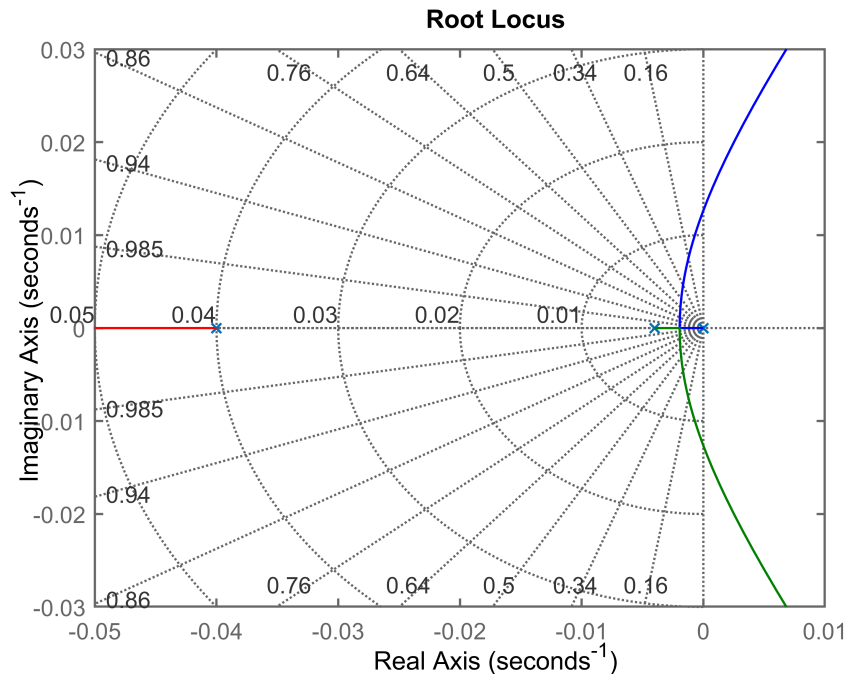


Figura 4.3: Luogo delle radici con controllore proporzionale

Osservando il luogo delle radici (figura 4.3) si nota che uno dei rami rimane nella parte sinistra del piano complesso per qualsiasi valore di  $K$ . Al contrario, gli altri due rami attraversano l'asse immaginario ed entrano nella parte destra del piano. Ciò significa che esiste un valore massimo del guadagno  $K_{MAX}$  per cui i poli del sistema hanno tutti parte reale negativa. Se si impone un guadagno  $K > K_{MAX}$  il sistema diventa instabile. Tale valore determina il *margin di stabilità* del sistema.

Per calcolare il valore esatto di  $K_{MAX}$  utilizziamo il criterio di Routh, il quale permette di determinare il margine di stabilità a partire dai coefficienti del polinomio caratteristico di un sistema. Nel nostro caso, il polinomio caratteristico è

$$p(s) = s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + a\tau_1 K = s^3 + 0.044 s^2 + 0.00016 s + 0.012K$$

Dopo aver controllato che tutti i coefficienti del polinomio siano positivi, proseguiamo con la stesura della tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 0.00016 \\
 s^2 & 0.044 & 0.012K \\
 s^1 & -0.273K + 0.00016 & \\
 s^0 & 0.012K & 
 \end{array}$$

Secondo il criterio, il sistema è stabile se e solo se tutti gli elementi della prima colonna della tabella sono positivi. Pertanto il sistema è stabile se

$$\begin{cases} -0.273K + 0.00016 > 0 \\ 0.012K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K < 0.000587 \\ K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow K \in [0, 0.000587]$$

Adesso che abbiamo individuato i margini di stabilità, selezioniamo il guadagno ottimo che ci permetta di rispettare le specifiche di progetto desiderate.

Per studiare il comportamento del sistema al variare del guadagno  $K$  utilizzeremo il *Control System Designer* messo a disposizione nel Control System Toolbox, che fornisce una comoda interfaccia grafica per modificare i parametri del controllore. Dopo aver aperto l'applicazione dalla scheda *Apps* di Matlab, impostiamo  $G(s)$  come funzione di trasferimento del processo nella finestra *Edit architecture*. A questo punto l'interfaccia grafica mostra il luogo delle radici e i diagrammi di Bode del sistema in catena aperta e la risposta al gradino del sistema in catena chiusa. Nel grafico del luogo delle radici, selezioniamo la voce *Edit compensator*, nella quale possiamo configurare il controllore del sistema. Per un controllore proporzionale, l'unico parametro da gestire è il guadagno. Modificando il valore nella casella di inserimento in alto, il programma disegna il luogo delle radici e simula la risposta al gradino del sistema.

Il guadagno da inserire dipende dalle prestazioni che si vogliono ottenere dal sistema. Ad esempio, per minimizzare il tempo di salita  $t_r$  si deve prendere in considerazione un guadagno molto vicino al margine di stabilità. Tuttavia, questa scelta comporta il fatto che la risposta avrà componenti oscillatorie di frequenza e intensità non trascurabili.

Al contrario, se si vuole imporre che la sovralongazione sia nulla, occorre selezionare un guadagno per cui le radici del sistema siano puramente reali. Osservando il luogo delle radici, il guadagno massimo per cui le radici sono puramente reali è  $K = 0.0000126$ .

Un buon compromesso si raggiunge selezionando un valore intermedio, circa un decimo del margine di stabilità.

Come si può notare osservando il luogo delle radici in figura 4.3, non è possibile far entrare i poli nella regione di piano definita dal vincolo  $\omega_n > 0.03 \text{ rad/s}$  definito nella sezione precedente. In altre parole, non è possibile scegliere un guadagno  $K$  sufficientemente grande da garantire un tempo di salita  $t_r < 60 \text{ s}$ . Per ottenere le prestazioni desidera-

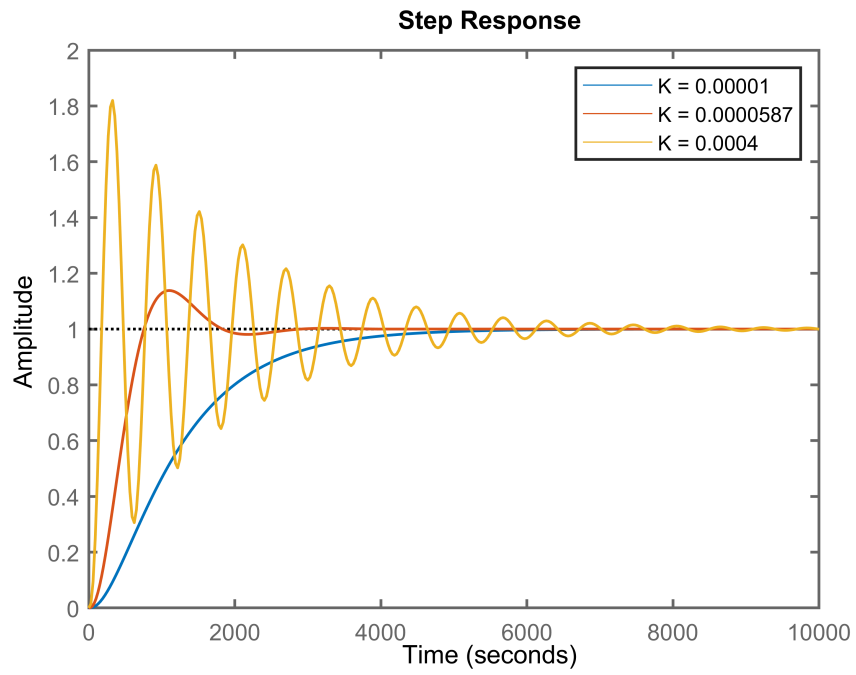


Figura 4.4: Risposta al gradino con vari valori di  $K$

te, occorre quindi utilizzare un controllore più sofisticato di un semplice compensatore proporzionale

### 4.3 Controllo con rete anticipatrice singola

Nella sezione precedente abbiamo osservato che un semplice controllore proporzionale non è sufficiente per garantire le prestazioni desiderate. È quindi necessario utilizzare un controllore con struttura diversa e più sofisticata.

In questo caso, dato che il sistema ha un tempo di salita molto elevato, è opportuno utilizzare una *rete anticipatrice*, ossia un compensatore che approssima la funzione di un classico controllore PD. La rete anticipatrice riesce infatti a migliorare la reattività del sistema, diminuendo il tempo di salita e la sovraelongazione.

Il controllore costruito con una rete anticipatrice è caratterizzato da uno zero e da un polo, puramente reali, secondo la funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{s + z}{s + p}, \quad z < p$$

Il ruolo dello zero è quello di spostare il luogo delle radici del sistema verso la parte sinistra del piano complesso, incrementando il margine di stabilità e quindi il guadagno massimo. Lo zero viene generalmente posizionato in un intorno della frequenza naturale del sistema in catena chiusa. Per evitare eccessive amplificazioni dei rumori dovute all'effetto di un controllore puramente derivativo, viene aggiunto al controllore il polo. Il posizionamento del polo richiede un compromesso tra efficacia della anticipatrice, per cui si vorrebbe  $p \gg z$ , e la soppressione dei rumori, per cui si vorrebbe  $p$  vicino all'origine.

Lo scopo del controllore è fare in modo che il sistema abbia un tempo di salita  $t_r < 60 s$  e quindi una frequenza naturale  $\omega_n > \frac{1.8}{t_r} = 0.03 \text{ rad/s}$ . Posizioniamo lo zero in corrispondenza della frequenza naturale e il polo ad una distanza dall'origine 4 volte maggiore. Otteniamo una rete anticipatrice con funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{s + 0.03}{s + 0.12}$$

Confrontando la risposta al gradino del sistema con controllore proporzionale e con la rete anticipatrice (figura 4.6), si osserva che, a parità di guadagno, nel secondo caso le componenti oscillatorie sono molto più smorzate e il tempo di assestamento è dimezzato.



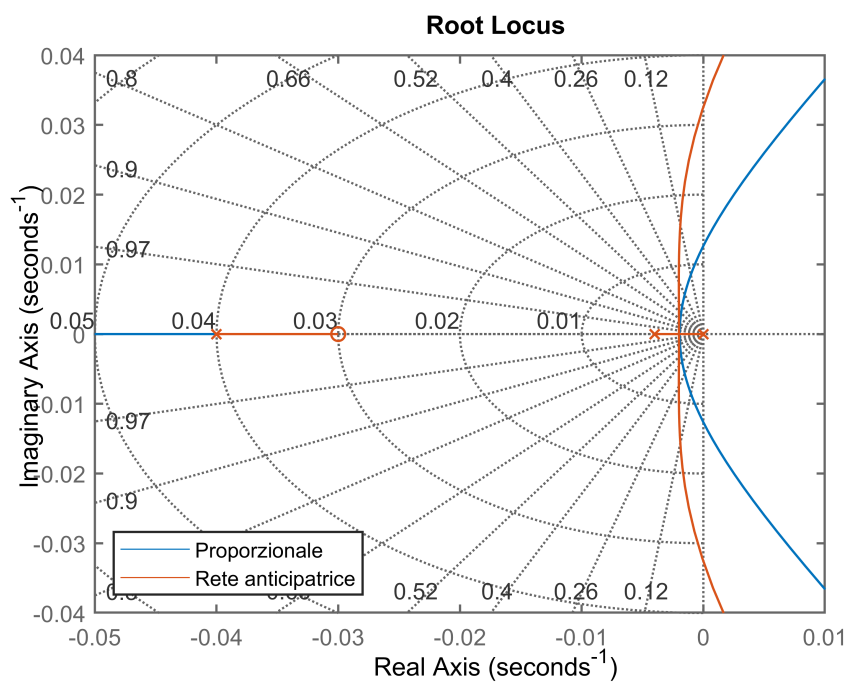


Figura 4.5: Confronto tra il luogo delle radici con controllore proporzionale e rete anticipatrice

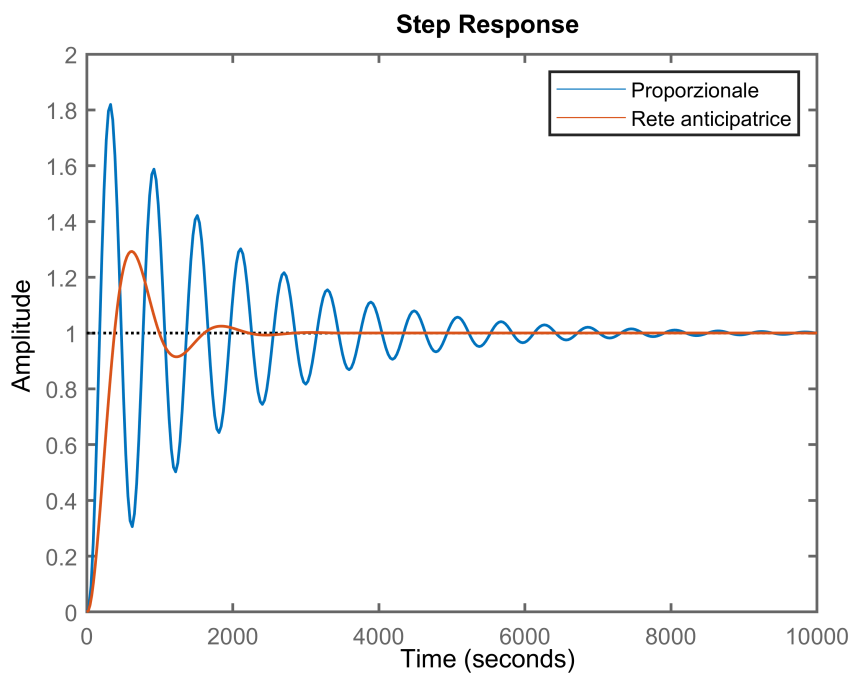


Figura 4.6: Confronto tra la risposta al gradino con controllore proporzionale e rete anticipatrice con guadagno  $K = 0.0004$

## 4.4 Controllo con rete anticipatrice doppia

Nonostante il miglioramento di prestazioni dovuto alla rete anticipatrice, non riusciamo ancora a posizionare i poli nella regione di prestazione desiderata se non con un guadagno vicinissimo al margine di stabilità, che però comporterebbe oscillazioni molto ampie e un tempo di assestamento eccessivamente prolungato. Per questo motivo è necessario intensificare l'effetto di compensazione introducendo un controllore con rete anticipatrice doppia, la cui funzione di trasferimento è

$$C(s) = \frac{(s + 0.03)^2}{(s + 0.12)^2}$$

Il luogo delle radici viene ulteriormente spostato nella parte sinistra del piano complesso, come si può vedere in figura 4.7. Risulta evidente che con questa tipologia di compensatore i due rami dei poli dominanti entrano nella regione di prestazione desiderata, garantendo l'esistenza di un valore del guadagno  $K$  per cui  $\omega_n > 0,03 \text{ rad/s}$ .

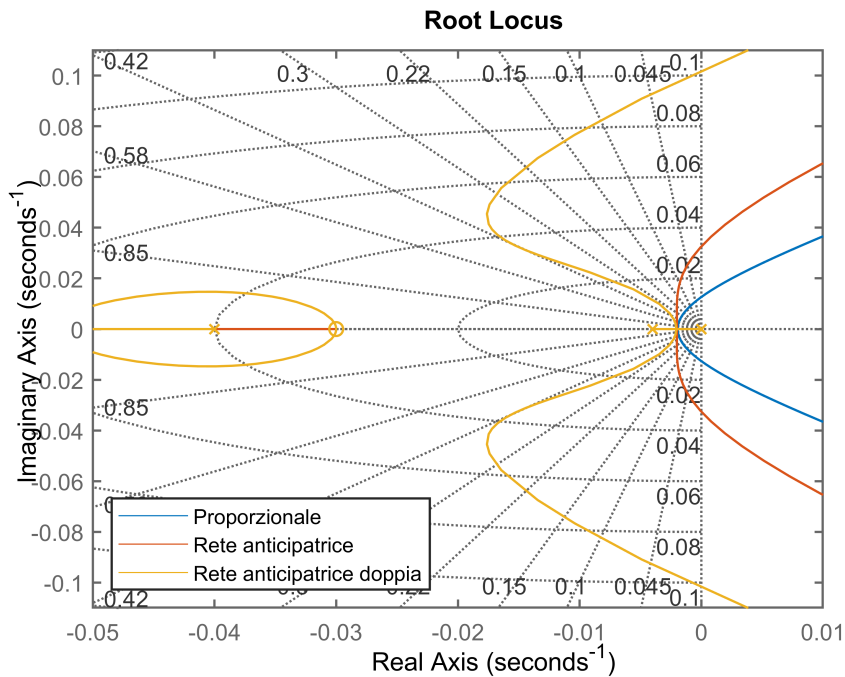


Figura 4.7: Confronto tra il luogo delle radici con controllore proporzionale, rete anticipatrice singola e doppia

Osservando le risposte al gradino in figura 4.8, osserviamo che l'effetto della rete anticipatrice è ulteriormente amplificato: con un guadagno  $K = 0.0004$ , molto vicino al margine di stabilità per il controllore proporzionale, il sistema con la doppia rete anticipatrice risulta molto più smorzato e con una sovraelongazione inferiore al 5%.

Con l'aiuto del Control System Designer, osserviamo che è possibile ottenere un tempo di salita inferiore ai 60 s impostando il valore del guadagno a  $K = 0.02$ .

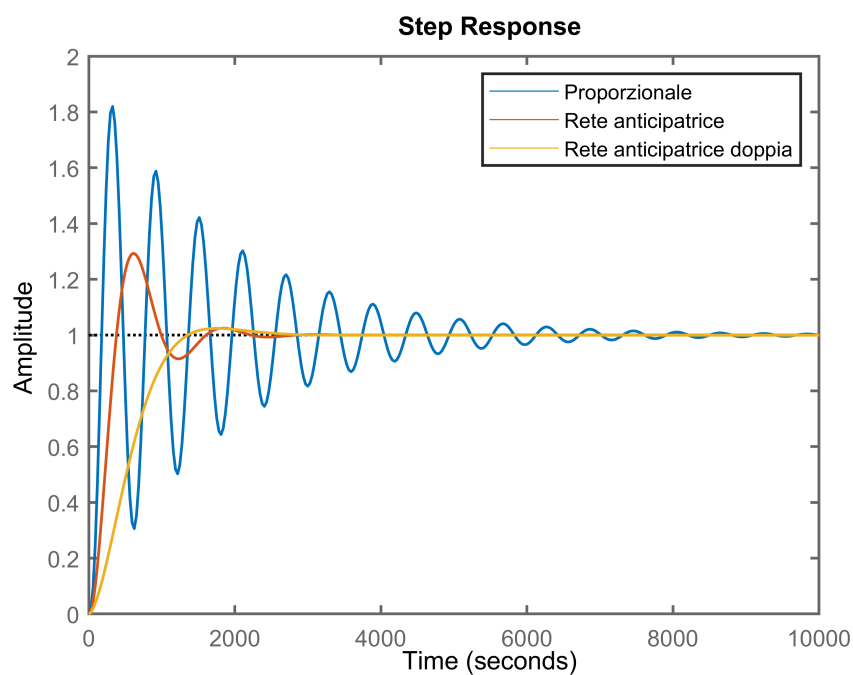


Figura 4.8: Confronto tra le risposte al gradino con controllore proporzionale, rete anticipatrice singola e doppia e guadagno  $K = 0.0004$

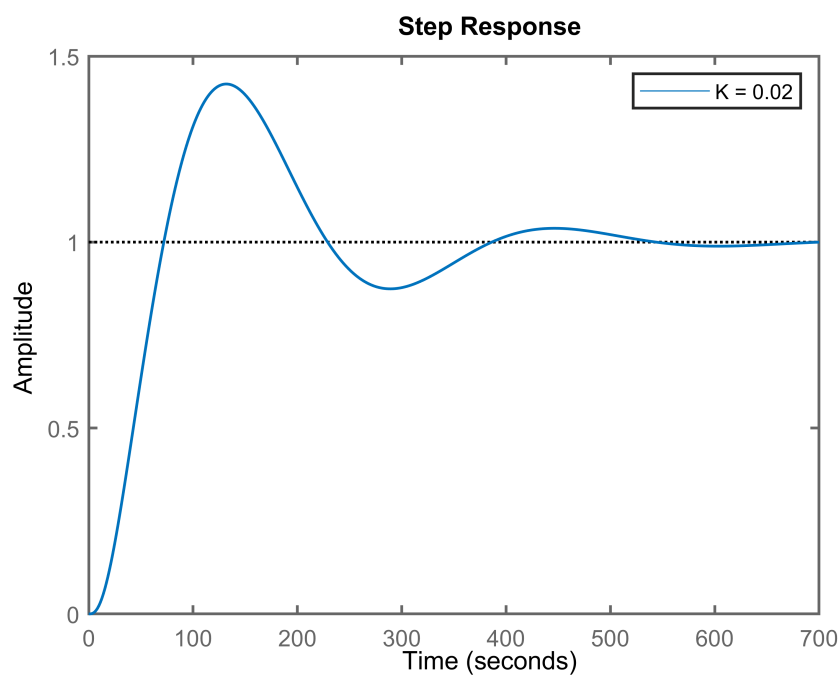


Figura 4.9: Risposta al gradino con  $K = 0.02$

## 4.5 Diagrammi di Bode e frequenza di taglio

Per capire la differenza tra le proprietà del controllore proporzionale e della rete anticipatrice, disegniamo con l'aiuto di Matlab i diagrammi di bode dei sistemi in catena aperta. Imponendo un guadagno unitario  $K = 1$ , i diagrammi di Bode dei due sistemi sono mostrati in figura 4.10.

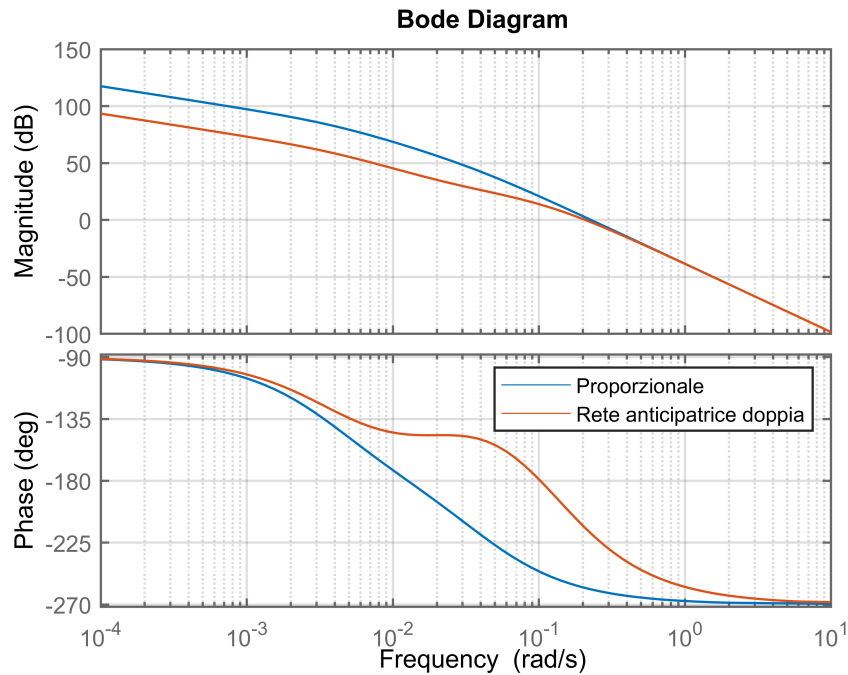


Figura 4.10: Confronto tra i diagrammi di Bode

Con l'aiuto del Control System Designer, selezioniamo il guadagno  $K$  per cui il sistema in catena chiusa ha una frequenza di taglio  $\omega_c = 0.06 \text{ rad/s}$ . Il guadagno trovato è  $K = 0.0846$ . Con questo valore, osserviamo che il sistema ha un tempo di salita molto breve, di circa  $18 \text{ s}$ .

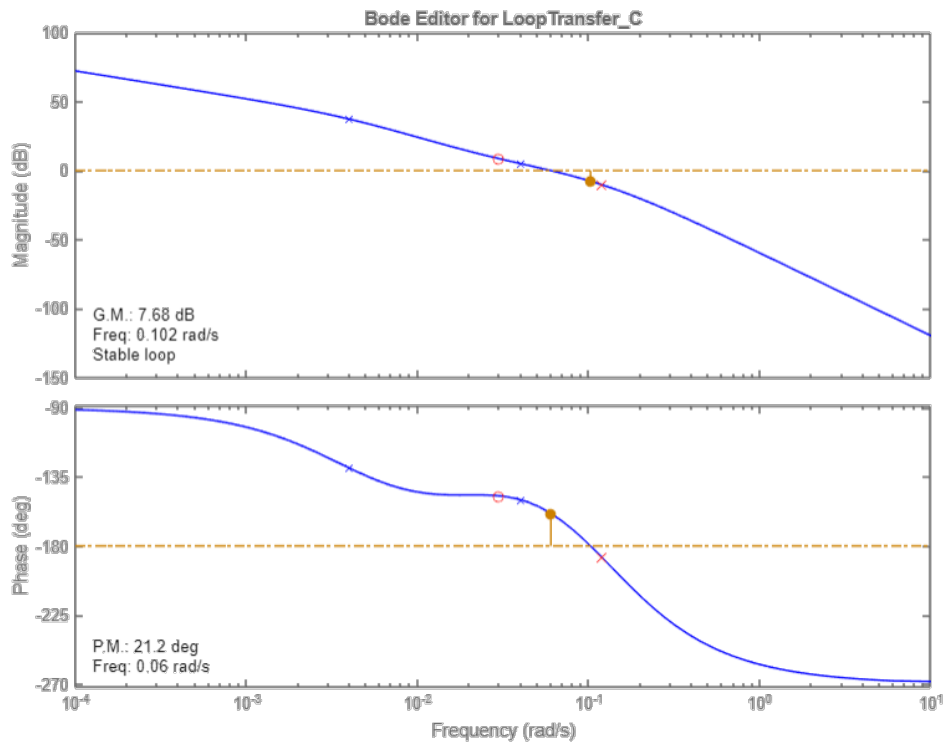


Figura 4.11: Diagramma di Bode di  $T(s)$  con frequenza di taglio  $\omega_c = 0.06 \text{ rad/s}$

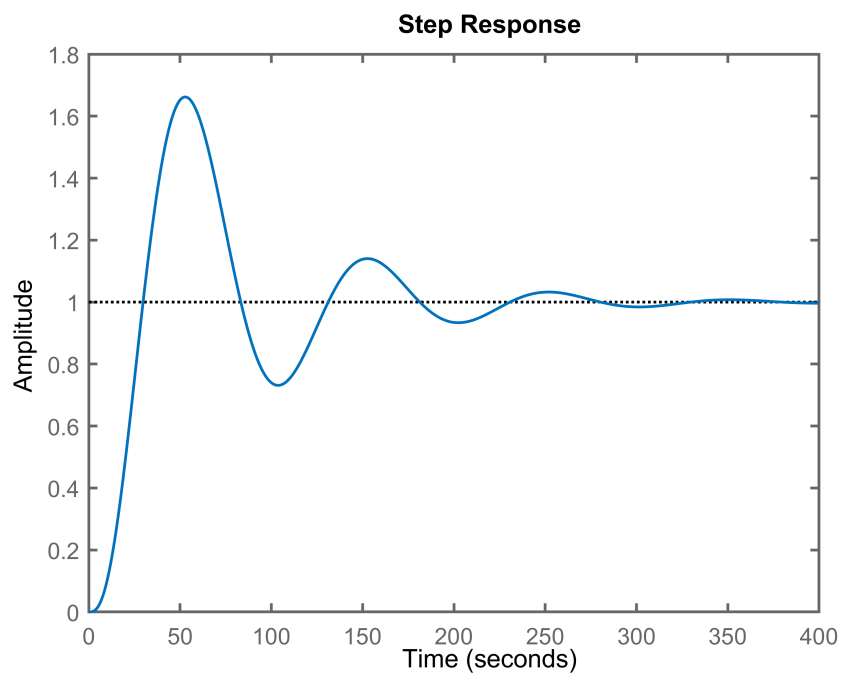


Figura 4.12: Risposta al gradino con guadagno  $K = 0.0846$

## 4.6 Reiezione dell'errore

Fino a questo punto abbiamo considerato il sistema in assenza di disturbi dovuti al vento. Per studiare il comportamento della mongolfiera quando la velocità verticale del vento non è nulla, ricaviamo la funzione di trasferimento che ha come ingressi l'altezza desiderata  $z_d(t)$  e la velocità del vento  $w(t)$ , e come uscita l'errore  $e(t)$  definito come

$$e(t) = z_d(t) - z(t)$$

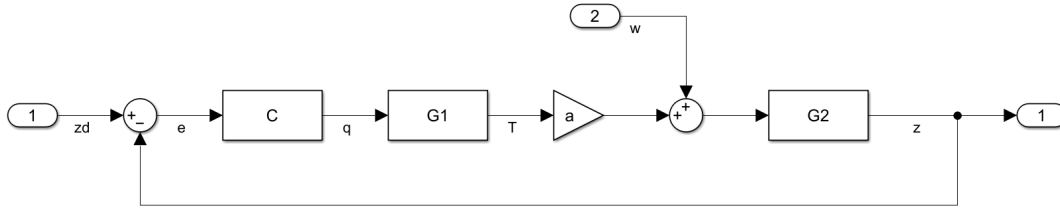


Figura 4.13: Schema a blocchi che descrive la mongolfiera

Consideriamo lo schema a blocchi in figura 4.13. Applicando la trasformata di Laplace ai segnali nel dominio del tempo, otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} E(s) = Z_d(s) - Z(s) \\ Z(s) = a G_1(s) G_2(s) C(s) E(s) + G_2(s) W(s) \end{cases}$$

da cui ricaviamo la funzione di trasferimento dell'errore

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1 + a G_1(s) G_2(s) C(s)} Z_d(s) - \frac{G_2(s)}{1 + a G_1(s) G_2(s) C(s)} W(s) \\ &= E_Z(s) Z_d(s) - E_W(s) W(s) \end{aligned}$$

### 4.6.1 Calcolo dell'errore a regime

Dato un segnale  $x(t)$  e la sua trasformata di Laplace  $X(s)$ , possiamo calcolare il valore di  $x(t)$  per  $t \rightarrow \infty$  con il teorema del valore finale<sup>4</sup>.

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, studiamo l'andamento a regime dell'errore  $e(t)$  mediante la risposta al gradino del sistema, considerando le funzioni di trasferimento  $E_Z(s)$  e  $E_W(s)$  in due casi separati.

<sup>4</sup>**Teorema del valore finale:** Dato un segnale nel dominio del tempo  $x(t)$  e la sua trasformata nel dominio delle frequenze  $X(s)$ , se tutti i poli di  $X(s)$  hanno parte reale non positiva allora vale la relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

Se su un sistema con funzione di trasferimento  $X(s)$  viene imposto un ingresso a gradino  $u(t) = \delta^{-1}(t)$  la cui trasformata è  $U(s) = \frac{1}{s}$ , allora il valore a regime dell'uscita del sistema può essere calcolata come

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x * u)(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} X(s)$$

Nel primo caso, supponiamo di avere un segnale in ingresso a gradino per l'altitudine desiderata  $z_d(t)$ , mantenendo la velocità del vento nulla:

$$z_d(t) = \delta^{-1}(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad Z_d(s) = \frac{1}{s}$$

Per il teorema del valore finale, si ha che l'errore a regime è

$$e_{ss,z} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_Z(s) \frac{1}{s} = 0$$

Nel secondo caso, supponiamo di avere una altitudine desiderata nulla e la velocità del vento a gradino:

$$w(t) = \delta^{-1}(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad W(s) = \frac{1}{s}$$

In questo caso l'errore a regime è

$$e_{ss,w} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_W(s) \frac{1}{s} = 2.522$$

Per confermare i risultati, simuliamo la risposta al gradino con la funzione `step()` del Control System Toolbox (figura 4.14)

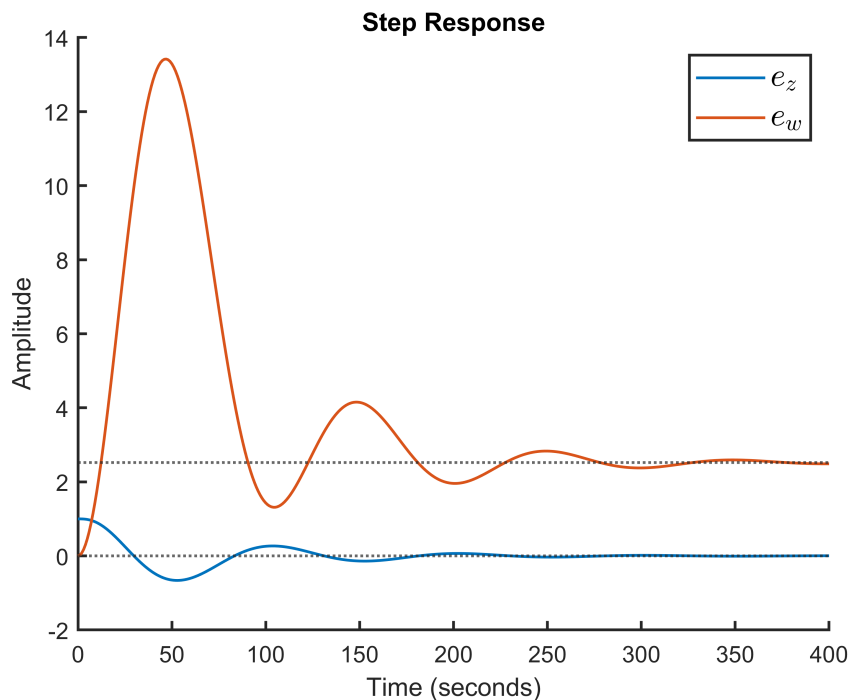


Figura 4.14: Risposte al gradino dell'errore rispetto agli ingressi  $z_d(t)$  e  $w(t)$

Osserviamo quindi che, in assenza di disturbi il sistema riesce a inseguire perfettamente il segnale in ingresso, mentre se la velocità del vento non è nulla, permane un errore a regime. Tale errore, che è solamente di  $2.5 \text{ m}$  quando il vento ha velocità di  $1 \text{ m/s}$ , può crescere sostanzialmente non appena la velocità del vento aumenta, fino anche a svariare

decine di metri. Risulta evidente che tale errore non è accettabile e deve pertanto essere eliminato con opportune tecniche di controllo, come la rete ritardatrice.

#### 4.6.2 Reiezione dell'errore con rete ritardatrice

Una rete ritardatrice è un compensatore con struttura analoga alla rete anticipatrice discussa nella sezione 4.3, dove l'unica differenza è il posizionamento dello zero e del polo. Una rete ritardatrice è caratterizzata da una funzione di trasferimento del tipo

$$C(s) = \frac{s + z}{s + p} \quad , \quad z > p$$

Le reti ritardatrici vengono utilizzate principalmente quando si ha un sistema che già soddisfa i parametri di prestazione nel transitorio come il tempo di salita o di assestamento, ma che presenta errori a regime troppo elevati e non tollerabili. Lo scopo della rete ritardatrice è quindi quello di diminuire l'errore a regime aumentando sostanzialmente il guadagno di bassa frequenza, lasciando inalterato il guadagno attorno alla frequenza di taglio, così da non modificare la risposta nei transienti.

Supponiamo di voler ridurre l'errore a regime di un fattore  $k = 1000$ . Selezioniamo il valore dello zero in modo che sia circa 100 volte inferiore della frequenza naturale del sistema

$$w_n = 0.06 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad z = -0.0006$$

Selezioniamo quindi un polo tale che

$$\frac{z}{p} = k = 1000 \quad \Rightarrow \quad p = -0.0000006$$

Aggiungendo la rete ritardatrice al controllore già progettato, otteniamo la funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{s + 0.0006}{s + 0.0000006} \cdot \frac{(s + 0.03)^2}{(s + 0.12)^2}$$

Con il teorema del valore finale calcoliamo l'errore a regime in risposta ad un gradino per il vento:

$$e_{ss,w} = \lim_{s \rightarrow 0} E_W(s) = 0.0025$$

Tale risultato viene confermato simulando la risposta del sistema con la funzione `step()` (figura 4.15)



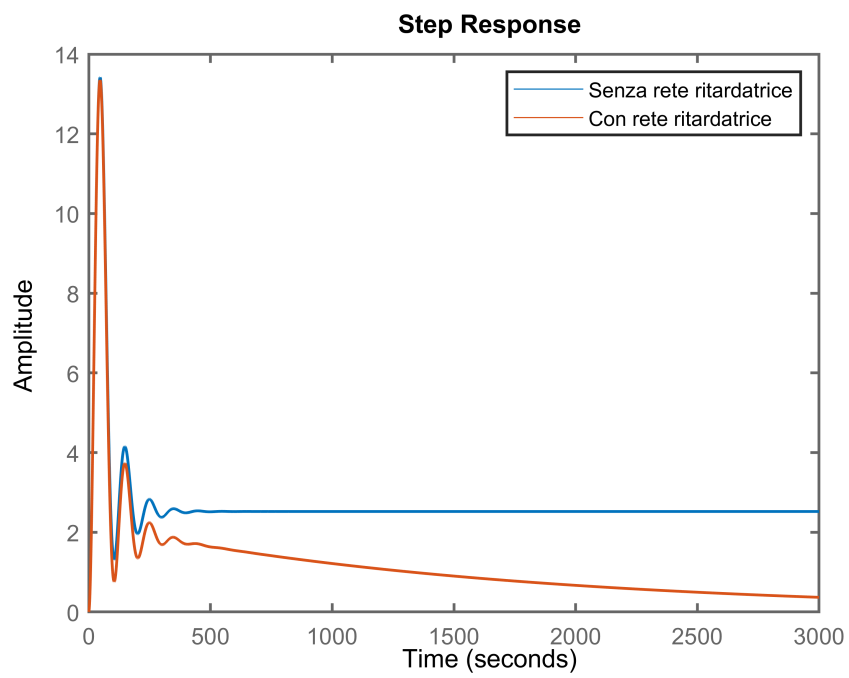


Figura 4.15: Risposte al gradino dell'errore con e senza rete ritardatrice nel controllore

# Capitolo 5

## Conclusioni

In questo progetto abbiamo realizzato un autopilota che è in grado di gestire autonomamente l'altitudine di una mongolfiera. Per farlo abbiamo cominciato dallo studio del principio fisico, che abbiamo riassunto in un modello nel dominio del tempo. Successivamente siamo passati al dominio delle frequenze e da lì abbiamo progettato il controllore per stabilizzare la mongolfiera. Tutto questo processo di analisi del sistema dinamico ci ha permesso di ottenere delle prestazioni molto superiori a quelle che avremmo avuto applicando un sistema di controllo rudimentale. Infatti, mediante l'utilizzo del compensatore *lead-lag*, la mongolfiera ha ridotto di un ordine di grandezza il suo tempo di salita all'altitudine desiderata, mantenendo oscillazioni accettabili ed un errore a regime inferiore all'1%. Considerando che le applicazioni della mongolfiera, come rilevazioni ad alta quota e raccolta di immagini del territorio da un punto di vista sopraelevato, spesso richiedono periodi di volo di ore, se non addirittura giorni, un tempo di salita di qualche decina di secondi garantito dal compensatore è accettabile e soddisfa le specifiche di progetto richieste dal problema.

Non dobbiamo tuttavia dimenticarci dei compromessi che sono stati fatti per studiare il sistema. Ad esempio, durante lo studio del modello fisico abbiamo linearizzato le equazioni differenziali per semplificarne l'analisi, ottenendo un modello semplificato che funziona solo in un intorno del punto d'equilibrio. Un altro fattore da prendere in considerazione è la saturazione del bruciatore. Non è possibile immettere nel sistema una quantità di calore arbitrariamente grande, ma deve essere rispettato il limite imposto dalla tecnologia con cui il bruciatore è realizzato. Analogamente, non è possibile aumentare la temperatura dell'aria a piacimento per ottenere le velocità di salita desiderate, ma bisogna considerare il rischio d'incendio collegato a temperature troppo elevate. Complessivamente, queste considerazioni non danneggiano l'analisi effettuata, ma rappresentano degli argomenti da considerare in uno studio più approfondito del problema.

Per concludere, osserviamo che nonostante sia possibile ottenere prestazioni ancora superiori utilizzando tecniche di controllo più sofisticate, il compensatore *lead-lag* garantisce una performance soddisfacente pur mantenendo la semplicità di progettazione e costruzione di un controllore PID.

# Bibliografia

- [1] *Anatomy of a Hot Air Balloon*. URL: <https://www.planoballoonfest.org/p/about/anatomy>.
- [2] Paolo Bolzern, Riccardo Scattolini e Nicola Schiavoni. *Fondamenti di Controlli Automatici - Quarta edizione*. McGraw-Hill, 2015.
- [3] *Early Balloon Flight in Europe*. URL: [https://web.archive.org/web/20121018142628/http://www.centennialofflight.gov/essay/Lighter\\_than\\_air/Early\\_Balloon\\_Flight\\_in\\_Europe/LTA1.htm](https://web.archive.org/web/20121018142628/http://www.centennialofflight.gov/essay/Lighter_than_air/Early_Balloon_Flight_in_Europe/LTA1.htm).
- [4] Gene F. Franklin, J. David Powell e Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems - Eighth edition*. Pearson, 2019.
- [5] *MATLAB*. URL: <https://it.mathworks.com/products/matlab.html>.