



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Modello basato su sistemi dinamici e teoria dei giochi
per la sostenibilità delle risorse comuni

Relatore

Prof./Dr. Samir Suweis

Laureando

Dacia Braca

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Common pool resources	1
1.2	La tragedia dei beni comuni	1
1.3	Una nuova prospettiva economica	4
2	Cenni di teoria dei giochi	5
2.1	Framework teorico	5
2.2	Gli equilibri di Nash	6
2.3	Il dilemma dei prigionieri	7
3	Modello teorico	10
3.1	Dinamica delle Risorse	10
3.2	Dinamica delle strategie	11
3.3	Equazione delle Repliche Generalizzata	11
3.3.1	Caso 1: “giocatori razionali ed intelligenti”	12
3.3.2	Caso 2: strategia collaborativa	13
3.4	Equilibri e stabilità	14
3.5	Studio numerico della stabilità	15
3.6	Traiettoria delle soluzioni	18
4	Discussione conclusiva	20
4.1	Sulla tragedia dei beni comuni	20
4.2	Sviluppi futuri	21

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Common pool resources

Tutte le risorse immediatamente disponibili sul nostro pianeta sono chiamate risorse naturali, mentre quelle prodotte artificialmente, frutto dell'ingegno umano o del lavoro combinato tra uomo e natura, sono dette non naturali. Nel primo caso rientrano le fonti biologiche e alimentari - come terreni agricoli, pascoli, foreste o ambienti acquatici atti alla pesca - o ancora minerarie, idriche ed energetiche, mentre nel secondo si annoverano ad esempio le risorse umane ed economiche. Si parla infine di risorse rinnovabili qualora siano in grado di rigenerarsi, non rinnovabili altrimenti [2, 4]. La sopravvivenza dell'umanità è strettamente legata se non interamente subordinata alla disponibilità e dunque alla modalità di sfruttamento delle risorse, perché da esse dipende la conservazione e l'equilibrio dell'ecosistema terra [2, 4, 33].

In questo lavoro di tesi verrà presentato un modello basato su sistemi dinamici e teoria dei giochi per la sostenibilità delle risorse naturali e rinnovabili accessibili a un gruppo consistente di individui e che in questo senso sono definite risorse comuni o *common pool resources* (CPR). Si analizzeranno perciò le scelte di utilizzo della risorsa per il singolo consumatore o *player* e l'effetto dell'intera comunità (costituita da diversi *players*) sulla dinamica e sostenibilità della risorsa stessa.

L'idea di partenza su cui si svilupperà l'intero studio è la necessità di delineare le condizioni di sostenibilità della risorsa e per questo motivo i quesiti che si pongono al centro dello studio sono: fino a che punto le risorse comuni possono essere utilizzate senza comprometterne il processo di rigenerazione e di conseguenza la disponibilità per le generazioni future? Qual è la strategia migliore che il singolo e la comunità devono perseguire per trarre maggiori benefici dalla risorsa, riuscendo al contempo a conservarne il volume al di sopra del livello critico di deterioramento irreversibile [6]?

Nel momento in cui ci si pone il problema della resilienza e della capacità rigenerativa per le CPR - dove per resilienza si intende la capacità di recupero della risorsa in seguito a perturbazioni esterne (come possono esserlo procedure di estrazione) - si ammette implicitamente che il pianeta è in grado di fornire risorse in misura limitata e quindi che non è possibile non porre restrizioni nel loro rate di estrazione, perché in caso contrario si presenterebbero pesanti conseguenze per le future generazioni [12, 29, 30, 34, 36].

1.2 La tragedia dei beni comuni

Un lavoro fondamentale della seconda metà del '900 nell'ambito delle scienze sostenibili e di politica ambientale, è quello scritto da Garrett Hardin in un articolo del 1968 pubblicato sulla rivista Science, che prende il nome di "The Tragedy of the common" - la tragedia legata allo sfruttamento delle risorse comuni [12].

Una prima considerazione di questo lavoro è che mantenere un tasso di crescita demografico positivo

e contemporaneamente consumare le risorse disponibili senza alcun freno con l'obiettivo di garantire il miglior tenore di vita per ciascun individuo, porta inevitabilmente all'estinzione delle stesse [35].

Questo ragionamento poggia innanzi tutto sul presupposto che il nostro è un mondo finito, in tutti i sensi, perciò se la popolazione aumenta, con un andamento che sappiamo essere esponenziale, la quantità pro-capite di beni materiali necessariamente diminuisce e se non si tengono sotto controllo le tempistiche di rigenerazione, il pool di risorse scivola verso uno stato degradato e irreversibile [29] [34] [36]. La "tragedia" sta proprio in questo: non esiste secondo Hardin una soluzione puramente tecnica al problema, vale a dire che senza una responsabilità etica e condivisa dei giocatori la sola scienza non può evitare che le risorse si esauriscano [12]. Con il termine "soluzione tecnica" si indica una soluzione che richiede cambiamenti solo in termini tecnici e di scienze naturali, ma esige poco o nulla in termini dell'iniziativa umana individuale o collettiva e dunque di cambiamenti nei valori o nella moralità. Ad esempio creare allevamenti ittici nei mari o sviluppare nuove varietà di cereali più resistenti e nutrienti, potrà magari ritardare l'inevitabile, ma non potrà di fatto risolvere in modo consistente e definitivo il problema del fabbisogno alimentare mondiale o dell'estinzione di certe specie animali o dei cambiamenti climatici.

Se si cerca di rispondere alla questione posta da J. Bentham, "il maggior benessere per il maggior numero di persone" [3], stando alle previsioni di Hardin si trova che questo non può essere realizzato senza intaccare negativamente le risorse comuni [12]. Infatti, essendo le risorse finite, non si può massimizzare contemporaneamente le due variabili in questione (volume delle risorse comuni e benessere individuale) perché esse sono in *trade-off*. Contrariamente da quanto sostenuto da Hardin, prendere delle decisioni massimizzando il benessere personale (tipicamente quantificato come profitto), costituisce secondo la teoria liberale di A. Smith [31] il modo migliore di agire, che va automaticamente a vantaggio dell'intera comunità. In questa ottica si promuovono quindi un'economia e una struttura sociale basate sul libero mercato e sulla capacità auto-regolatrice del singolo, permettendo il raggiungimento di un equilibrio del tutto autonomo [31]. Storicamente, le varie crisi economiche, l'oppressione delle popolazioni più deboli e lo sfruttamento senza riserve del nostro pianeta hanno mostrato che questo approccio non è in realtà in grado di portare un bene comune su scala globale e nel lungo termine [19, 26, 29, 30].

Si consideri un esempio semplice per illustrare questa *tragedy of the commons*: sia dato un pascolo al quale chiunque desideri abbia libero accesso. Allora è razionale pensare che ogni pastore proverà a massimizzare il proprio guadagno allevando il maggior numero possibile di animali, tanto quanto la risorsa lo permette. Un approccio del genere può essere vincente quando sono in pochi ad accedere al pascolo dato che la concorrenza è minima, così che la rigenerazione della risorsa (ad esempio l'erba dei campi con cui si nutre il bestiame) riesce a controbilanciare il suo consumo. Il problema sorge quando sono in tanti a servirsi della stessa risorsa. Ciascun individuo si chiederà: "Cosa posso fare per massimizzare il mio profitto?" E quindi deciderà di aggiungere un altro capo di bestiame al suo allevamento. D'altra parte se tutti ragionano in questo modo - perché massimizzare il guadagno è il criterio razionalmente condiviso - il pascolo che accoglie l'attività intensiva ne risentirà, ma tale penalizzazione sarà ripartita sul bilancio di ciascun allevatore. Infatti, nel caso in cui tutti i pastori aggiungano un capo di bestiame, il pascolo diventerà sovraffollato, gli animali saranno a rischio epidemico maggiore e l'erba da brucare potrebbe estinguersi. Se tutti i pastori, invece, decidono per il bene comune di non aggiungere un altro capo di bestiame, allora può succedere che qualche pastore scelga comunque di introdurre qualche animale in più, valutando che se è il solo a compiere questa



Figura 1.1: Sbiancamento della Grande Barriera Corallina - Foto rilasciate da Greenpeace Australia, marzo 2017 Brett Monroe Garner

operazione non recherà danno al pascolo e allo stesso tempo incrementerà il suo guadagno. Si dice in questo caso che il sistema è vulnerabile a strategie di *free rider*. Tale fenomeno ha luogo quando all'interno di un gruppo di individui si ha un membro che evita di dare il proprio contributo al bene comune poiché ritiene che il gruppo possa funzionare ugualmente nonostante la sua astensione [23]. Questo può provocare un fenomeno a cascata per cui ogni allevatore introdurrà un capo di bestiame nell'allevamento.



Figura 1.2: Esempio per la tragedia dei beni comuni

La tragedia risiede proprio nel fatto che se gli individui, nel linguaggio di teoria dei giochi, sono razionali ed intelligenti (che in questo caso coincide con la strategia di massimizzazione del profitto) [9, 18], inevitabilmente l'equilibrio del sistema sarà quello in cui tutti sovra-sfruttano il pascolo. Come si vedrà nel prossimo capitolo, questo risultato può essere generalizzato, formalizzato e dimostrato attraverso la teoria dei giochi, in particolare attraverso il cosiddetto "dilemma dei prigionieri" [21].

Quello proposto è solamente un esempio, per altro molto specifico, ma ci sono innumerevoli situazioni che di fatto possono ricondursi a questa tragedia delle risorse comuni - si pensi alla deforestazione, alla perdita di biodiversità animale e vegetale, all'inquinamento atmosferico o idrico [8, 11, 16, 19, 20, 29].

A questo punto ci si domanda quale alternative ci siano di fronte a questa tragedia delle risorse comuni. Una potenziale soluzione si trova ricorrendo a una gestione "statale" della risorsa. In tal caso è necessario formulare un codice legislativo e amministrativo che guidi gli utenti verso un uso consapevole e parsimonioso della risorsa. Sembrerebbe a questo punto di essere sulla buona strada per fornire una soluzione alla tragedia dei beni comuni, perché basta introdurre un sistema legislativo che tuteli le risorse e che allo stesso tempo garantisca agli utenti di soddisfare le proprie necessità, stabilite a loro volta da un criterio precedentemente imposto. I criteri di assegnazione della risorsa in questione possono essere i più disparati: la si può aggiudicare in virtù di qualche merito seguendo quindi una graduatoria, la si può distribuire a seguito di un'estrazione o di una votazione e così via [12].

Come accennato però, il concetto di bisogno necessario non è statico, cambia nel tempo per ciascun individuo, adattandosi al contesto sociale, culturale e ambientale, dunque non è semplice strutturare un sistema legislativo efficace [10, 12]. Un primo motivo è legato alla responsabilità del singolo: dopo aver stabilito quei criteri che consentano l'accesso alla risorsa, questo potrebbe decidere di non rispettare le indicazioni. Con l'obiettivo di impedire che questo avvenga, si potrebbe pensare di introdurre sistemi di penalizzazione ma soprattutto istituire un complesso di controllori con il compito di far rispettare quelle stesse regole. Ed è qui che si presenta il secondo ostacolo: "*Quis custodiet ipsos custodes?*"¹. Il rischio estremamente realistico è che affidandosi alle autorità adibite ai controlli si crei una polarizzazione delle responsabilità, per cui coloro che hanno il diritto e il dovere di far rispettare le regole abusano del ruolo che rivestono, favorendo i propri interessi [12]. Delegare allo stato la

¹Chi è che sorveglia gli stessi controllori? - Tratto dalla VI Satira di Giovenale

soluzione della tragedia delle risorse comuni, si è infatti rivelato fallimentare in moltissime situazioni reali, come per esempio in Africa, dove il fenomeno di “land grabbing” ha portato all’espropriazione e all’impoverimento di moltissime risorse naturali [28].

In sintesi, l’evidenza sperimentale prova che, nella maggior parte dei casi, tutti i tentativi di arginare la tragedy of the commons tramite regolamentazioni severe imposte da un organo statale e misure centralizzate hanno paradossalmente portato a uno sfruttamento eccessivo e ancora più inadeguato delle risorse [5, 26].

1.3 Una nuova prospettiva economica

Elinor Ostrom in “*The New Palgrave Dictionary of Economics*” pubblicato nel 2008 [26], propone una visione alternativa a questa tragedia dei beni comuni, contemplando la possibilità che, soddisfatte particolari condizioni al contorno, gli esseri umani appartenenti a piccoli gruppi sociali siano in grado di instaurare un sistema autoregolato di sfruttamento, in perfetta armonia con gli ecosistemi naturali e nel completo rispetto delle risorse comuni così da evitarne il collasso [17, 24]. Il merito di Ostrom è quello di aver proposto una *terza via*, ovvero un compromesso tra la proprietà pubblica e privata, tra Stato e mercato libero. Si tratta di una *democrazia partecipativa* che si basa sulle idee di comunità, benessere collettivo, partecipazione attiva alla conservazione e allo sfruttamento sostenibile delle risorse [24, 26]. Al suo interno gli individui stabiliscono di comune accordo le regole da rispettare per servirsi responsabilmente del bene comune in modo da evitarne il deterioramento, così da sentirsi motivati all’azione collaborativa. La strategia vincente sta proprio in questo: l’individuo è naturalmente portato al rispetto delle regole, perché non rappresentano più un obbligo imposto dall’alto ma una decisione consapevole e condivisa alla cui formulazione egli stesso ha partecipato [26, 27].

Ci si pone allora la seguente domanda: quando la teoria di Hardin è applicabile e quando invece è possibile ottenere sistemi sociali che si sottraggono alla tragedia dei beni comuni [7]? Ciò che fa la differenza è l’entità e la natura del gruppo, cioè il numero di elementi che lo compongono e il tipo di accordi presi all’interno. Nel caso in cui si considera un gruppo numeroso di utilizzatori, in cui non c’è dialogo collaborativo tra le parti e in cui non ci si pongono delle limitazioni nello sfruttamento, la teoria di Hardin è ben verificata [26]. Ci sono diverse evidenze che lo dimostrano, come nel caso della pesca intensiva e competitiva degli oceani o come per lo sfruttamento illimitato di boschi e foreste, per ricavare legname e terreni coltivabili [16, 17, 29]. Tuttavia si osserva che, di fronte a una minaccia di esaurimento per la risorsa comune, gli utilizzatori sono stati capaci di risolvere i dilemmi, creando delle istituzioni con il compito di gestire le proprie risorse [17, 24–26]. Contrariamente a quanto predetto nelle teorie precedenti, queste soluzioni hanno avuto successo nell’impresa ed è importante chiarire che tali enti non hanno natura statale ma possono essere pensati come piccoli centri di organizzazione a livello locale [7, 26, 27]. Come ci si aspettava, la marcia in più che distingue queste piccole soluzioni dai tradizionali meccanismi è la comunicazione, più precisamente la capacità di raggiungere accordi tra le parti interessate [27].

Ma quali sono questi requisiti che accomunano questi fenomeni di aggregazione? Se pur con qualche differenza si può trovare che gli accordi da perseguire per una corretta gestione dei beni comuni, presentano degli elementi universali: in primis occorre stabilire in modo ben definito i confini dell’area sotto la giurisdizione del piccolo gruppo, quindi stabilire l’entità della risorsa, chi ha diritto ad accedervi e chi no. Occorre poi stabilire delle regole di sfruttamento che si adeguino al contesto ambientale e culturale. A questo punto si può elaborare una struttura amministrativa che renda tutti gli elementi del gruppo attivamente coinvolti nella gestione del pool comune. Così facendo è possibile predisporre la comunità a un reciproco monitoraggio, per cui le responsabilità sono equamente condivise - ognuno è osservatore dell’altro ed è a sua volta controllato dalla comunità. In caso di violazione delle regole, si ricorre a delle norme e sanzioni correttive, anziché punitive, con severità crescente e adattabili ad ogni situazione. Se poi ci sono conflitti di interesse, questi devono essere risolti all’interno del gruppo [26]. Infine Ostrom propone anche dei principi per gestire, sempre secondo questa ottica bottom-up collaborativa, un pool di risorse comuni di dimensioni considerevoli [7, 26].

Si lascia al lettore interessato l’opportunità di approfondire questo caso, in quanto esula dallo scopo di questo lavoro [22–24].

Capitolo 2

Cenni di teoria dei giochi

2.1 Framework teorico

La teoria dei giochi è una disciplina matematica principalmente sviluppata nel corso del XX secolo¹, con il principale obiettivo di descrivere, tramite strumenti matematici e statistici, il comportamento umano individuale e collettivo in tutte quelle situazioni che comportano la vincita o lo spartirsi di una risorsa [2, 14]. L'interazione avviene sotto forma di gioco e le condizioni necessarie affinché sia possibile applicare costruttivamente i principi della teoria dei giochi sono:

1. tutti i partecipanti sono individui - piuttosto che gruppi, aziende, associazioni e così via - consapevoli di concorrere contro o con altri giocatori, avendo come unico scopo vincere e dunque massimizzare il proprio profitto;
2. il gioco ha delle regole ben precise, stabilite prima di iniziare e di cui tutti i partecipanti sono a conoscenza;
3. durante ogni incontro ciascun giocatore si serve della strategia che ritiene più congeniale, definita come il piano d'azione che prevede una serie di mosse;
4. ogni strategia porta a delle conseguenze positive o negative sul payoff del singolo giocatore che l'ha adottata e su quello di tutti gli altri partecipanti (questo meccanismo è noto come interdipendenza);
5. esistono diversi tipi di gioco che si possono approssimativamente distinguere in cooperativi e non cooperativi.

Si precisa che quelli elencati sono dei requisiti generali, ma è possibile caratterizzare il gioco in modo più dettagliato a seconda del tipo di descrizione che si vuole considerare [9] [14] [35].

Si può a questo punto definire *gioco* l'insieme dei giocatori e delle strategie da essi pianificate, in accordo con le regole prestabilite e condivise da ciascuno di essi [13] [14] [21] [35]. Di seguito si riportano altre definizioni essenziali nella comprensione della teoria dei giochi, alleggerite dove possibile dal formalismo matematico. In questo modo è possibile costruire un framework teorico che sarà utile nel comprendere lo studio dei sistemi di sfruttamento delle common pool resources, argomento affrontato in dettaglio nel capitolo successivo.

In questa sede si adotterà una specifica descrizione dei giochi, detta in forma normale. Un *gioco in forma normale* consiste di [14]:

1. un numero finito di giocatori $M = \{a_1, \dots, a_m\}$;
2. una strategia s_i con $i \in M$ associata a ciascuno di essi o un set di strategie S_i . L'insieme delle strategie adottate da tutti i giocatori è $s = (s_1, \dots, s_M)$, dove si ha che $s_i \in S_i$, mentre la

¹Questa branca della matematica ha origini antiche, quando B. Pascal e P. de Fermat condussero studi sulla probabilità nel gioco d'azzardo. Solo negli anni '20 del Novecento con E. Borel e nel 1944 con gli studi di J. von Neumann e O. Morgenstern si gettano le basi per la moderna interpretazione della "Teoria dei giochi".

combinazione di tutte le strategie possibili è detta *spazio delle strategie* $S = \prod_{i \in M} S_i$ dove si ha che $s \in S$;

3. una funzione di payoff u_i che assegna a ciascun giocatore un certo guadagno in base alle scelte del singolo e di tutti gli altri:

$$\forall i \in M \exists u_i : S \longrightarrow \mathbb{R} \implies s \in S : u_i(s) \in \mathbb{R}$$

Come prima approssimazione, in un qualsiasi gioco si presentano tre possibili situazioni elementari [13]:

1. *Competizione*: si verifica quando due o più giocatori sono rivali, nel senso che si contendono un premio - per esempio una risorsa comune - e la strategia adottata in questo caso si dice *defezione*. Più sono gli elementi che partecipano al gioco più il compenso pro-capite diminuisce;
2. *Mutualismo*: rappresenta la situazione opposta alla precedente e la strategia viene detta *cooperazione*. In questo caso infatti tutti i giocatori traggono vantaggio dalla collaborazione reciproca, più sono e meglio è per tutti;
3. *Relazione parassitaria o di "free rider"*: la situazione qui è asimmetrica nel senso che i giocatori scelgono, in misura variabile, delle strategie complementari. I giocatori "parassita" o "free riders" - cioè i defezionari - traggono i benefici maggiori sottraendoli in parte a quelli cooperativi.

Con il termine inglese *payoff* ci si riferisce a un compenso, una vincita, un pagamento, ma in linea generale indica l'esito di una certa azione strategica [2, 14]. Se i giocatori sono solo due e se il set di strategie consta di pochi elementi, l'insieme dei possibili esiti per la funzione di payoff può essere rappresentato in una matrice chiamata *matrice di payoff*. Questa ha il compito di riassumere il quadro completo della situazione, cioè mostra ordinatamente tutti i partecipanti al gioco, le loro strategie e i relativi guadagni [13, 14]. In questo caso particolare, non si è interessati a seguire passo per passo tutte le mosse di ogni giocatore tramite grafici o schemi ad albero - come per la descrizione in forma estensiva - dunque ricorrere alla matrice di payoff è sufficiente per avere ben chiaro lo svolgersi del gioco [14].

2.2 Gli equilibri di Nash

Un contributo importante, se non il più importante, nell'elaborazione della teoria dei giochi è stato dato dal matematico ed economista statunitense John Nash, il quale si è concentrato principalmente nello studio dei giochi non cooperativi [13, 14, 21]. Un gioco si dice *non cooperativo* se il criterio decisionale porta a massimizzare unicamente il profitto individuale, indipendentemente da cosa sia più conveniente per il gruppo. Questo è un principio egoistico ma, secondo la teoria dei giochi, rappresenta il comportamento corretto che un giocatore deve assumere per poter essere definito *razionale e intelligente*, in quanto le strategie defezionarie sono di fatto più vantaggiose per il singolo. Questo breve cenno consente di introdurre un concetto basilare nella teoria dei giochi non cooperativi e in particolare nei sistemi di sfruttamento delle risorse, cioè l'*equilibrio di Nash*. Un equilibrio di Nash è una soluzione ad un gioco in forma normale che coinvolge due o più giocatori, dove nessuno nel gruppo può incrementare il suo payoff se è l'unico a cambiare la propria strategia [1, 13, 14, 21, 32]. In termini formali, si dice che il profilo di strategie e i relativi guadagni per ciascun giocatore costituiscono un equilibrio di Nash se e solo se, data la combinazione di strategie $s^* \in S$, si ha che:

$$\forall i, j \in M, \forall s_i \in S_i : u_i(s^*) = u_i(s_i^*, s_j^*) \geq u_i(s_i, s_j^*)$$

dove con l'indice $j \neq i$ ci si riferisce a tutti i giocatori del gruppo che non siano il giocatore i -esimo [14]. John Nash ha dimostrato che esiste almeno un equilibrio di questo tipo per qualunque combinazione di giocatori e di relativi piani strategici, entrambi in numero finito [14, 21]. D'altro canto una strategia $\hat{s}_i \in S_i$ è considerata come la migliore tra tutte le scelte possibili per una combinazione di strategie $s_j \in S_j$ se e solo se [14]:

$$\forall s_i \in S_i : u_i(\hat{s}_i, s_j) \geq u_i(s_i, s_j) \iff u_i(\hat{s}_i, s_j) = \max\{u_i(s_i, s_j); s_i \in S_i\}$$

Com'è noto tutti i giocatori di un gioco non cooperativo hanno l'obiettivo principale di massimizzare il proprio payoff, perciò ognuno di essi cercherà sin da subito di adottare una serie di mosse che produrranno la massima remunerazione e nei tempi più brevi, in accordo con quelle degli altri. Essendo s_i^* la strategia dominante² per ogni individuo i -esimo, l'esito del gioco - se i giocatori sono *razionali e intelligenti*, sarà proprio l'equilibrio di Nash [9, 14, 18, 21].

Dopo averne proposto la definizione e aver ricordato qual è l'obiettivo dei giocatori, è possibile individuare un equilibrio di Nash per un gioco in forma normale, osservando la cosiddetta matrice di payoff. Prima di esaminare nel dettaglio tale procedura generale, si consideri una situazione particolarmente citata nella letteratura della teoria dei giochi, nota come *dilemma dei prigionieri*.

2.3 Il dilemma dei prigionieri

In una città la polizia riesce ad acciuffare due sospettati di furto, che verranno denominati L_1 e L_2 , ma non ha prove sufficienti per condannare entrambi gli ipotetici ladri. Una volta scortati nella centrale i due vengono sottoposti a un interrogatorio e a ciascuno vengono proposte le seguenti condizioni:

1. se entrambi rimangono in silenzio, la polizia può condannarli per un reato minore con 6 mesi di reclusione ciascuno, per mancanza di prove;
2. se entrambi parlano, la polizia condanna i due giocatori a 2 anni di prigione ciascuno, con l'attenuante del pentimento;
3. se uno rimane in silenzio e l'altro parla, si ha che quest'ultimo viene liberato mentre colui che non ha confessato riceve una piena condanna di 5 anni, con l'aggravante della non collaborazione alle indagini.

Si introduca la seguente notazione: la scelta di *rimanere in silenzio* (si è usata spesso anche la terminologia *non confessare*) verrà chiamata *cooperazione* e sarà indicata per brevità con la lettera **C**, la decisione di *parlare* (si è usato anche il termine *confessare* o *collaborare alle indagini*) sarà invece detta *defezione* e verrà indicata con **D**.

Per analizzare la situazione proposta secondo la teoria dei giochi, si assegni a ciascuna strategia il payoff che sarà una funzione decrescente della condanna. In particolare:

1. $R = 3$ è la ricompensa per ciascun giocatore nel caso di una reciproca collaborazione (**C-C**);
2. $S = 0$ e $T = 5$ sono i compensi nel caso in cui i due giocatori decidano di adottare strategie opposte, rispettivamente cooperazione e defezione (**C-D** oppure **D-C**);
3. $P = 1$ è il compenso condiviso dai due giocatori che hanno scelto di confessare (**D-D**)

Ora che si dispone di tutte le informazioni necessarie, si può schematizzare la matrice di payoff, riportandola in Tabella 2.1 [13] [14] [21].

L_1 vs L_2	C	D
C	3 - 3	0 - 5
D	5 - 0	1 - 1

Tabella 2.1: Matrice di payoff per il dilemma dei prigionieri

I due giocatori hanno come principale obiettivo massimizzare il proprio guadagno, che nell'atto pratico consiste nello scegliere la strategia che porti alla pena meno severa, qualunque sia la decisione

²Nella teoria dei giochi, una strategia si dice dominante se garantisce, al giocatore che la segue, un risultato sempre migliore di ogni altra sua possibile alternativa, indipendentemente dalle strategie adottabili dagli altri giocatori

dell'avversario (che non conoscono)³. Per determinare l'equilibrio di Nash, allora, occorre capire a partire dalla matrice di payoff, quale è la risposta più conveniente per uno dei due giocatori fissata la strategia dell'altro [21]. Si supponga che L_1 decida di cooperare, allora L_2 si trova di fronte a un bivio: se decide anch'egli di rimanere in silenzio condividerà con l'altro giocatore la medesima pena di 6 mesi e in questo caso il guadagno è pari a $R=3$ per entrambi. Se invece L_2 confessa andando in defezione, gli si prospetta una sorte ancora migliore perché stavolta il suo guadagno sale a $T=5$, a dispetto di quello del suo avversario L_1 che precipita a zero $S=0$. Concludiamo che se L_1 sceglie **C**, a L_2 conviene puntare su **D**. Si immagina adesso che L_1 decida di andare in defezione. Se il secondo giocatore adotta **C** come strategia, sarà lui a vedere annullarsi il proprio profitto $S=0$, mentre il suo complice ottiene la remunerazione migliore $T=5$, scampando alla prigione. Se d'altro canto, decide di optare per la confessione **D**, entrambi i giocatori otterranno lo stesso guadagno $P=1$, che è il più basso tra quelli offerti ma sicuramente più remunerativo di zero. Anche stavolta, se si ragiona per il proprio e unico interesse personale, è più saggio per L_2 adottare una strategia defezionaria [13]. Stando alle definizioni riportate sopra è chiaro che l'equilibrio di Nash in questa situazione è dato dal caso in cui entrambi propendono per la defezione **D**, essendo essa la strategia dominante, i.e. un giocatore non potrà mai aumentare il suo payoff cambiando strategia, fissata quella dell'altro giocatore. Questo dilemma presenta una struttura abbastanza universale, nel senso che si applica a diverse situazioni. Generalizzando l'esempio appena illustrato infatti si può dire che dati due giocatori, ognuno dei quali deve decidere tra due strategie - cooperazione **C** e defezione **D** - allora la matrice di payoff A sarà così definita [13]:

$$A = \begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix}$$

Questa dovrà rispettare tre condizioni [13, 14]:

1. T, S, R, P sono positivi
2. $T > R > P > S$: la ricompensa R nel caso di una collaborazione reciproca deve essere superiore al compenso P nel caso di una defezione comune, mentre T e S devono essere rispettivamente i guadagni massimo e minimo;
3. $2R > T + S$: il payoff complessivo dei due giocatori che cooperano è maggiore del guadagno complessivo nel caso in cui uno decida di andare in defezione e l'altro no.

Nel caso di due elementi che partecipano a un round di gioco, si è visto che la strategia più conveniente per il singolo è la defezione, ma cosa succede se si effettuano più match?

Si ponga l'ipotesi che il gioco venga ripetuto più volte, in tal caso si ha che la cooperazione diventa plausibile come strategia, anzi quella che di fatto consente di raggiungere l'obiettivo di massimo profitto se si guarda al lungo anziché al breve periodo. Consideriamo un gioco ripetuto di cui non sappiamo la durata a priori, ma assumiamo che ogni round sia associata una certa probabilità ω . Allora la probabilità che si effettui l' n -esimo round è ω^n , mentre $\sum \omega^n = (1 - \omega)^{-1}$ dà la durata prevista dal gioco. Sia ora A_n il payoff associato all' n -esimo round, allora il guadagno complessivo aspettato durante l'intero game è dato da:

$$A = \sum A_n \omega^n$$

Quando $\omega = 1$, il caso limite rappresenta una ripetizione infinita per il gioco e in questa situazione la serie diverge. Allora il payoff complessivo può essere riscritto come il seguente limite (se esiste finito):

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_n}{n + 1}$$

A differenza di quanto accadeva nel caso in cui si effettuava un unico round di gioco per il dilemma dei prigionieri, ora esiste una vasta gamma di strategie convenienti, nessuna delle quali fornisce la migliore risposta in assoluto per tutti gli esiti possibili. Se, ad esempio, il primo dei due sceglie sempre

³In realtà si poteva costruire una matrice analoga riferendosi agli anni di prigione da scontare per ogni scelta piuttosto che ai compensi assegnati e determinare l'equilibrio di Nash secondo la stessa logica, naturalmente in quest'ultimo caso lo scopo sarebbe stato minimizzare i payoffs (gli anni di condanna).

la cooperazione, allora la miglior risposta per l'altro è giocare in defezione, producendo un payoff complessivo di $(1 - \omega)^{-1}T$. Se, invece, il primo giocatore decide di cooperare al primo turno, mentre il secondo gioca D , e da quel momento in poi procede sempre secondo una strategia defezionaria, la situazione non è più così fruttuosa come nell'eventualità precedente. Di fronte a questa prospettiva il secondo giocatore dovrebbe riflettere sul seguente fatto: quello che potrebbe guadagnare giocando in defezione al primo turno - quando il complice sceglie la cooperazione - è di fatto superiore al payoff che potrebbe trarre dalla cooperazione (per definizione T è più grande di R), ma il margine di guadagno che riceve scegliendo così viene completamente vanificato dalle vincite successive, che non potranno essere più alte di $(1 - \omega)^{-1}P$. Si capisce allora che in linea di principio sarebbe bene cooperare il più possibile, dato che:

$$\omega > \frac{T - R}{T - P}$$

Si dimostra allora l'assenza di una effettiva strategia vincente nel caso di giochi con ripetizione che seguono lo stesso schema del dilemma dei prigionieri. Con esperimenti di informatica relativamente recenti si è trovato che il payoff complessivo migliore si ottiene giocando una semplice strategia, detta *Tit for Tat*, che consiste nel giocare **C** alla prima mossa e per i round successivi giocare secondo la strategia precedente dell'avversario [13].

Nella sezione successiva si generalizzeranno questi risultati e si analizzerà l'evoluzione della risorsa R nel tempo in funzione della strategia di estrazione (anche essa dipendente dal tempo) per un sistema composto da più giocatori. Anche in questo caso è possibile mostrare che se l'estrazione avvenisse una sola volta, allora l'equilibrio di Nash sarebbe inevitabilmente defezione e quindi si ritroverebbe la tragedia di Hardin. Se però i giocatori possono continuare a estrarre durante molti round, fino a che il pool comune offre risorse da sfruttare, la cooperazione diventa una strategia conveniente, in caso contrario, infatti, quando tutti perseguono una condotta defezionaria e competitiva la risorsa si estingue molto velocemente e le estrazioni che si possono effettuare sono ben poche. Quando, invece, le strategie scelte sono cooperative, la risorsa fa in tempo a rigenerarsi e si potranno eseguire molte estrazioni evitandone l'estinzione. D'altra parte i sistemi di giocatori nei quali si adotta la cooperazione sono vulnerabili al fenomeno dei "free riders" e così, in ultima analisi, l'unica strategia dominante risulta essere quella defezionaria. La situazione che si presenta quindi è ancora una volta quella descritta dalla Tragedy of the commons di Hardin.

L'estensione più naturale nel caso in cui il gioco consista nell'estrarre una risorsa da un pool comune, suggerisce quindi una proporzionalità tra il payoff e la risorsa (funzione del tempo), dove il coefficiente varia a seconda della strategia. Una descrizione di questo tipo, dove il giocatore compie la propria scelta in base alla differenza nei compensi $\Delta U = (E_D - E_C)R(t)$, porterà all'estinzione della risorsa stessa, dato che si può facilmente dimostrare come la soluzione di equilibrio, denotata da \star , alle equazioni differenziali per la risorsa R e per la frazione di giocatori cooperativi x sarà $(R^*, x^*) \rightarrow (0, 0)$ per tempi $t \rightarrow \infty$ (sezione 3.3.1).

Si è visto, dunque, che la teoria dei giochi non rappresenta solo un importante contributo nel campo matematico-probabilistico ma si rivela un utile strumento nello studiare situazioni di rivalità e nel tracciare analisi e previsioni per sistemi economici, politici, biologici e anche nello studio dello sfruttamento per le CPR [1, 12, 15, 35].

Capitolo 3

Modello teorico

3.1 Dinamica delle Risorse

Si proceda dunque all'elaborazione di un modello dinamico per descrivere il comportamento della risorsa nel tempo a seconda della strategia adoperata dai singoli giocatori.

Si considerino un volume di risorse $R(t)$ che varia nel tempo e un numero di giocatori N , ciascuno dei quali può scegliere di accedere ad esso secondo due possibili strategie complementari: cooperazione o defezione. Nel primo caso il singolo giocatore collabora con gli altri in modo tale da attingere al pool di risorse solo una quantità che è compatibile con il rate di rigenerazione della risorsa. La frazione di giocatori cooperativi nel sistema verrà indicata con $x(t)$, anche essa variabile nel tempo. La strategia defezionaria prevede un uso meno sostenibile della risorsa, principalmente mirato al profitto personale. La frazione di coloro che vanno in defezione sarà ovviamente $1 - x(t)$.

Per descrivere l'andamento di $R(t)$ nel tempo, si ignori inizialmente la presenza dei giocatori che estraggono una certa quantità di risorse dal volume iniziale e si consideri solo la dinamica intrinseca della risorsa che può essere descritta dall'*equazione differenziale di crescita logistica*, nota anche come *equazione di Verhulst*. Si tratta di un'equazione quadratica che esprime la crescita naturale di una popolazione in funzione del tempo o - come nel caso in esame - di una risorsa [13]:

$$\frac{dR}{dt} = TR \left(1 - \frac{R}{K} \right) \quad (3.1)$$

Nell'equazione compaiono due parametri costanti caratteristici: il primo è il parametro $T > 0$, che rappresenta il tasso naturale di crescita della risorsa. Il secondo è la capacità portante K che invece esprime il fatto che la risorsa non può crescere indefinitamente, ma raggiunge all'equilibrio un valore massimo. Si osservi come il modello fenomenologico sia in grado di descrivere una crescita inizialmente rapida, quasi esponenziale, ma che nel tempo rallenta fino al raggiungimento di un volume di equilibrio finito e determinato da K [6].

Per rappresentare matematicamente lo sfruttamento del pool di risorse comuni per opera degli N giocatori, si consideri che ciascuno di essi attinge alla risorsa con l'obiettivo di trarne il maggior profitto e a seconda della strategia adoperata - sia la propria sia quella degli avversari - gli esiti saranno diversi [13,21]. Per i cooperatori si indichi con e_C il lavoro di estrazione compiuto dal singolo giocatore sulla risorsa, mentre con e_D quello dei defezionari. Qualora tutti i giocatori optino per una strategia cooperativa, viene prelevata dal volume originario una quantità di risorsa uguale a $R \cdot N \cdot e_C$: ciascun giocatore consuma una quantità di risorsa proporzionale al lavoro di estrazione e alla risorsa stessa. Se si stabilisce un regime competitivo, ciascun giocatore attinge dal serbatoio il più possibile in modo da aumentare il proprio profitto - chiaramente superiore di quello dei cooperativi - a discapito del volume della risorsa stessa che ora non riesce a contrastare l'estrazione. Ne consegue che la risorsa R è destinata a diminuire, fino ad esaurirsi irreversibilmente. Nel caso contrario in cui si stabilisce

una dinamica cooperativa, la sostenibilità della risorsa è garantita. Dunque si ha che:

$$R \cdot N \cdot e_C < R \cdot T < R \cdot N \cdot e_D$$

A questo punto si consideri il lavoro di estrazione medio \bar{E} eseguito dagli $N = N_C + N_D$ giocatori:

$$\bar{E} = N_C \cdot e_C + N_D \cdot e_D = [x \cdot E_C + (1 - x) \cdot E_D] \quad (3.2)$$

dove sono state considerate le seguenti definizioni:

$$\begin{cases} x = \frac{N_C}{N} \\ E_C = N \cdot e_C \\ E_D = N \cdot e_D \end{cases} \quad (3.3)$$

Per descrivere l'andamento del volume della risorsa R nel tempo tenendo in considerazione anche il lavoro di estrazione sulla CPR compiuto dagli N giocatori cooperativi e defezionari, occorre generalizzare l'equazione 3.1 alla luce del risultato appena conseguito. Si ottiene, dunque, un'equazione differenziale del primo ordine composta da due termini, uno quadratico e uno lineare:

$$\frac{dR}{dt} = T \cdot R \left(1 - \frac{R}{K}\right) - R \cdot [x \cdot E_C + (1 - x) \cdot E_D] \quad (3.4)$$

3.2 Dinamica delle strategie

In una prospettiva più ampia, i giocatori attingono alla risorsa più volte durante il gioco e allo stesso tempo possono confrontare le proprie decisioni con quelle dell'avversario - nei limiti della reperibilità delle informazioni - lasciandosi condizionare sia dalle scelte altrui che dagli esiti finali. Quindi in ogni step temporale il giocatore può cambiare strategia e ne consegue che la proporzione tra cooperativi e defezionari varia nel tempo. La regola del replicatore - anche nota come regola dell'imitazione proporzionale o aggiornamento locale - consente di studiare l'evoluzione della frazione di cooperatori, i.e. dx/dt , considerando che ciascun giocatore decide una certa strategia alla luce delle differenze nei compensi - noti come *payoff* - tra lui e uno dei suoi giocatori "vicini". In questo caso, se la propensione nell'adottare una certa strategia coincide con il relativo payoff ritroviamo la *tragedy of the commons* in quanto - come sarà mostrato nella sezione 3.3.1 - l'evoluzione della risorsa R tende a zero.

In generale possiamo pensare che la scelta di un giocatore nell'adottare una particolare strategia in ogni time step dipenda non (solo) dal *payoff* ma anche da altre informazioni, per esempio lo stato della risorsa o quanti altri giocatori cooperano nel sistema. Nella sezione 3.3 si presenterà quindi la derivazione di un'equazione differenziale per la variabile $x(t)$ detta *equazione delle Repliche Generalizzata*.

3.3 Equazione delle Repliche Generalizzata

Per descrivere matematicamente l'evoluzione dei cooperatori nel sistema, si consideri la dinamica stocastica e discreta di N_C - definito come il numero di giocatori che adottano una strategia collaborativa - da cui sarà possibile derivare, per grandi numeri di giocatori N , l'equazione delle Repliche Generalizzata. In questo modo si potrà descrivere correttamente l'evoluzione della risorsa nel tempo, accoppiando all'equazione logistica 3.4 quella che descrive la dinamica della variabile continua $x(t)$. Sia $i = \{1 \dots N\}$ l'indice che individua il singolo giocatore interessato alla risorsa, che può essere considerato in una rete di interazioni sociali descritte dalla matrice A . Si indichi con s_i la strategia adottata dall' i -esimo giocatore, i.e. $s_i = 1$ se i coopera e $s_i = 0$ altrimenti¹. Con U_i ci si riferisce alla propensione dell' i -esimo giocatore nel cooperare o fare defezione, dunque U_i descrive le quantità rilevanti che lo convincono nel perseguire una certa strategia.

¹Secondo la notazione stabilità in precedenza C indicherà cooperazione, D defezione

Ora è possibile sviluppare il modello adottando la regola del replicatore derivandolo come limite nel continuo di una approssimazione di campo medio, partendo da una dinamica stocastica e discreta.

Si consideri dunque un qualunque giocatore i e si scelga uno tra i suoi vicini, contrassegnandolo con l'indice j . La strategia del giocatore i può cambiare nel tempo, influenzato dal payoff o da qualche altra quantità caratterizzante il sistema, come ad esempio il volume della risorsa R anch'esso funzione del tempo. Si definiscono *rate di transizione* le probabilità:

$$\begin{aligned} T(C \rightarrow D|N_C) &= \frac{N_C}{N} \frac{N - N_C}{N} p^+ \\ T(D \rightarrow C|N_C) &= \frac{N - N_C}{N} \frac{N_C}{N} p^- \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove N_C indica il numero di giocatori che cooperano nel sistema al tempo t , $\frac{N - N_C}{N}$ è la probabilità di "incontro" tra un cooperatore e un defettore (o viceversa), mentre p^+ (p^-) è la probabilità che un cooperatore (defettore) cambi strategia "copiando" quella del giocatore con cui si confronta.

L'*equazione maestra* che descrive l'evoluzione della probabilità di avere N_C cooperatori nel sistema è:

$$\begin{aligned} \frac{dP(N_C)}{dt} &= P(N_C - 1) \cdot T(C \rightarrow D|N_C - 1) + P(N_C + 1) \cdot T(C \rightarrow D|N_C + 1) + \dots \\ &\quad - [T(C \rightarrow D|N_C - 1) + T(D \rightarrow C|N_C + 1)] \cdot P(N_C) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nel caso in cui l'unico criterio di scelta della strategia sia il payoff, il giocatore compierà la propria decisione avendo cura della differenza tra il suo guadagno e quello del giocatore con cui si incontra, cioè:

$$p^\pm = \frac{1}{2} + \frac{1}{N} \Delta U \quad (3.7)$$

dove $1/N$ rappresenta un coefficiente di normalizzazione per assicurare che p^\pm sia una probabilità.

La definizione 3.7, da sostituire nell'equazione per l'evoluzione della probabilità discreta, dipende dalla differenza $\Delta U = U_i - U_j$ che a sua volta si costruisce osservando le proprietà del sistema degli N giocatori. Di seguito si descriverà la procedura matematica che porta all'espressione per l'equazione maestra in forma continua e deterministica (i.e. l'equazione generalizzata delle repliche) nel caso più elementare in cui la differenza delle propensioni U_i è funzione del volume della risorsa e di opportuni coefficienti.

3.3.1 Caso 1: "giocatori razionali ed intelligenti"

La descrizione classica di ΔU_t (dipendente anche dal tempo) nel framework di teoria dei giochi coinciderà con la differenza di payoff tra i due giocatori e sarà quindi:

$$\Delta U_t = \pm(E_C - E_D)R(t) \quad (3.8)$$

Dopo aver sostituito tale definizione nell'espressione della probabilità 3.7 e poi nell'equazione maestra, si moltiplichino ambo i membri per $\frac{1}{N} \sum_{N_C=0}^{\infty} N_C$ in modo da scrivere la dinamica evolutiva del valore di aspettazione per il numero di giocatori cooperativi $\langle N_C \rangle = \sum_{N_C=0}^{\infty} P(N_C) N_C$.

Ricorrendo all'*approssimazione di campo medio*, nella quale vengono trascurate le fluttuazioni:

$$\sigma_{N_C}^2 = \langle N_C^2 \rangle - \langle N_C \rangle^2 \approx 0 \implies \langle N_C^2 \rangle \approx \langle N_C \rangle^2$$

e dopo aver considerato il limite continuo, i.e. $x = N_C/N$ per $N \gg 1$, si ottiene l'*equazione differenziale per la frazione di cooperazione* x accoppiata all'equazione logistica precedentemente ricavata:

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon x(1 - x) \Delta U \quad (3.9)$$

dove ϵ è una costante di normalizzazione arbitraria che per questa particolare descrizione di ΔU_t la si considererà unitaria. L'equazione differenziale appena ottenuta ha validità per qualsiasi forma funzionale di $\Delta U = U_i - U_j$. Nella sezione successiva 3.3.2 si analizzerà un secondo caso.

Il sistema di equazioni in grado di descrivere in modo completo la dinamica del sistema è:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = TR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - R[xE_C + (1-x)E_D] \\ \frac{dx}{dt} = x(1-x)(E_C - E_D)R \end{cases} \quad (3.10)$$

che riscalandolo i parametri di un fattore $1/T$ e ponendo $K = 1$ diventa (si consideri il sistema 3.13):

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = T[R(1-R) - R(x\tilde{E}_C + (1-x)\tilde{E}_D)] \\ \frac{dx}{dt} = x(1-x)(\tilde{E}_C - \tilde{E}_D)R, \end{cases} \quad (3.11)$$

Si potrebbe proseguire nello studio analitico del sistema di equazioni differenziali riportato sopra, calcolando gli equilibri e valutandone la stabilità, sia sotto un profilo generale dove si mantiene la dipendenza delle soluzioni dai parametri caratteristici sia nel caso specifico in cui si valutano precisi valori numerici dei parametri \tilde{E}_C ed \tilde{E}_D e delle condizioni iniziali R_0 e x_0 . Tuttavia è possibile dimostrare - secondo una procedura che verrà descritta in dettaglio nella sezione immediatamente successiva - che qualunque scelta dei parametri e delle condizioni iniziali porta a soluzioni che presentano un unico equilibrio stabile a cui il sistema tende per tempi molto grandi e che tale equilibrio coincide con l'estinzione della risorsa $R = 0$ e con $x = 0$.

3.3.2 Caso 2: strategia collaborativa

Una seconda descrizione delle propensioni alla cooperazione e alla defezione può essere formulata ipotizzando che non vi sia la sola dipendenza dalla risorsa ma che in qualche modo ciascun giocatore sia condizionato nella sua scelta dalla frazione di individui che preferiscono una strategia collaborativa a quella competitiva. Si potrebbe pensare che un dato giocatore decida per la prima, in tal caso la risorsa estratta viene ripartita equamente tra i cooperativi del sistema e la propensione individuale vale $U_C = xE_C$. Nel caso contrario il compenso del singolo giocatore presenta un minimo sicuro di remunerazione m e dunque l'inclinazione alla defezione sarà data da $U_D = RE_D + m$.

La differenza tra le propensioni sarà dunque data da:

$$\begin{cases} U_C = xE_C \\ U_D = m + RE_D \end{cases} \quad \implies \quad \Delta U = U_C - U_D = (xE_C - RE_D - m)$$

Le due possibili strategie messe a confronto in termini di efficienza, presentano entrambe pregi e difetti. Un giocatore che segue le regole di uno schema competitivo riesce a ricavare un guadagno nettamente superiore ($E_D > E_C$), dato che il principio su cui si basa la defezione è quello di agire egoisticamente per ricavare il massimo profitto possibile per se stessi. In questa prospettiva l'interesse personale viene posto al di sopra del benessere collettivo e della necessità di rigenerazione della risorsa, che viene esposta così al rischio di estinzione. D'altro canto la cooperazione rende possibile la sostenibilità della risorsa, essendo essa estratta al di sotto del tasso di rigenerazione. In questa analisi di bilancio è fondamentale valutare come la propensione alla defezione per un dato giocatore dipenda dal volume della risorsa R : questa strategia è tanto più remunerativa quanto grande è la quantità delle risorse disponibili e inoltre la presenza del contributo minimo m assicura un margine di profitto anche quando la risorsa tende all'estinzione. Se però R è in minore disponibilità, un regime competitivo appare pericolosamente rischioso e - per quanto visto finora - diventa più conveniente gestire le risorse in modo collaborativo e sostenibile. Sintetizzando quanto detto al crescere di R la differenza tra le due propensioni U_C e U_D aumenta a favore della seconda; inoltre, mentre i lavori di estrazione sulla risorsa E_C ed E_D sono parametri stabiliti in partenza, U_C e U_D variano nel tempo insieme alla composizione dei giocatori e al volume della risorsa.

In approssimazione di campo medio, le equazioni differenziali accoppiate per questa descrizione delle propensioni sono:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = TR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - R[xE_C + (1-x)E_D] \\ \frac{dx}{dt} = \frac{x(1-x)(xE_C - RE_D - m)}{E_D + m} \end{cases} \quad (3.12)$$

dove in questo caso è stato posto $\epsilon = 1/(E_D + m)$. È possibile effettuare una semplificazione ponendo la capacità portante $K = 1$, in modo da normalizzare il volume della risorsa, e poi adattando i parametri di estrazione E_C ed E_D secondo la stessa scala. Quindi si considerino i parametri riscaldati:

$$\begin{cases} \tilde{E}_C = \frac{E_C}{T} \\ \tilde{E}_D = \frac{E_D}{T} \\ \tilde{m} = \frac{m}{T} \end{cases} \quad (3.13)$$

che sostituiti nel sistema 3.12 portano a:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = T[R(1-R) - R(x\tilde{E}_C + (1-x)\tilde{E}_D)] \\ \frac{dx}{dt} = \frac{x(1-x)(x\tilde{E}_C - R\tilde{E}_D - \tilde{m})}{\tilde{E}_D + \tilde{m}} \end{cases} \quad (3.14)$$

3.4 Equilibri e stabilità

Quello riportato nella sezione 3.2 è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in due variabili, rispettivamente la risorsa R e la frequenza di estrazione per i giocatori cooperativi x , entrambe funzioni del tempo. Un'analisi preliminare e necessaria è quella che consente di individuare gli equilibri e di studiarne la stabilità al variare dei parametri.

Dopo aver ricordato le condizioni di esistenza $\tilde{m} > 0$ e $0 < \tilde{E}_C < 1 < \tilde{E}_D$, occorre trovare gli zeri (R^*, x^*) delle equazioni, cioè risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = R[1 - R + x\tilde{E}_C + (1-x)\tilde{E}_D] \\ 0 = x(1-x)(x\tilde{E}_C - R\tilde{E}_D - \tilde{m}) \end{cases} \quad (3.15)$$

Tre prime soluzioni sono immediate e si determinano studiando la seconda equazione per $R = 0$:

$$E_1(0, 0) \quad E_2(0, 1) \quad E_3\left(0, \frac{\tilde{m}}{\tilde{E}_C}\right)$$

Gli altri equilibri si ottengono studiando gli argomenti delle due equazioni:

$$E_4(1 - \tilde{E}_C, 1) \quad E_5\left(\frac{\tilde{E}_D\tilde{m} - \tilde{E}_C(\tilde{E}_D + \tilde{m} - 1)}{\tilde{E}_C + \tilde{E}_C\tilde{E}_D - \tilde{E}_D^2}, \frac{\tilde{m} + \tilde{E}_D - \tilde{E}_D^2}{\tilde{E}_C + \tilde{E}_C\tilde{E}_D - \tilde{E}_D^2}\right) \quad E_6(1 - \tilde{E}_D, 0)$$

Si noti che per le condizioni di esistenza date sui parametri e sul dominio di definizione delle variabili R e x , l'ultimo equilibrio non costituisce una soluzione accettabile: una situazione in cui è data una risorsa negativa non è fisicamente verificabile.

I punti di equilibrio riportati sopra sono in forma generale, ovvero funzioni dei parametri m , \tilde{E}_C e \tilde{E}_D . Il passo successivo riguarda l'analisi della stabilità per gli equilibri, che consiste nel calcolare la matrice Jacobiana $J \in M_{2 \times 2}$ del sistema di primo ordine 3.12 e studiare gli autovalori che si ottengono sostituendovi le coordinate di ogni equilibrio precedentemente determinato. Si consideri la matrice:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_R}{\partial R} & \frac{\partial X_R}{\partial x} \\ \frac{\partial X_x}{\partial R} & \frac{\partial X_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

dove X_R e X_x indicano i campi vettoriali associati alle due equazioni. Si ottiene:

$$J = \begin{pmatrix} [1 - 2R - x\tilde{E}_C\tilde{E}_D - (1-x)\tilde{E}_D] & (-R\tilde{E}_C + R\tilde{E}_D) \\ -\frac{x\tilde{E}_D(1+x)}{\tilde{E}_D + m} & -\frac{R\tilde{E}_D + m + 2x(-\tilde{E}_C + R\tilde{E}_D + m) - 3x^2\tilde{E}_C}{\tilde{E}_D + m} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Dopo aver sostituito le coordinate degli equilibri (R^*, x^*) - definite in funzione dei parametri - negli elementi di matrice di J , si ricercano gli autovalori λ per ciascuno di essi calcolando il determinante:

$$\det(J(R^*, x^*) - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

Si riportano esplicitamente gli autovalori di ciascun equilibrio²:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{m}{\tilde{E}_D + \tilde{m}}, (1 - \tilde{E}_D) \right\} & \left\{ \frac{-\tilde{E}_C + \tilde{m}}{\tilde{E}_D + \tilde{m}}, (1 - \tilde{E}_C) \right\} \\ & \left\{ \frac{(\tilde{E}_C - \tilde{m})\tilde{m}}{\tilde{E}_C(\tilde{E}_D + \tilde{m})}, \frac{\tilde{E}_D\tilde{m}}{\tilde{E}_C} - (-1 + \tilde{E}_D + \tilde{m}) \right\} & \left\{ (-1 + \tilde{E}_C), \frac{\tilde{E}_D - \tilde{E}_C(1 + \tilde{E}_D) + \tilde{m}}{\tilde{E}_D + \tilde{m}} \right\} \\ & & \{ \lambda_{E_5,1}^*, \lambda_{E_5,2}^* \} \end{aligned}$$

Tutti gli autovalori ottenuti sono reali e si ricavano a partire da una matrice Jacobiana bidimensionale $J \in M_{2 \times 2}$. In tal caso per determinare la stabilità degli equilibri associati al variare dei parametri m , \tilde{E}_C e \tilde{E}_D - definiti nei rispettivi domini di esistenza in modo che siano tutti positivi e non nulli - si possono considerare le regole sul segno degli autovalori per i sistemi di equazioni differenziali in \mathbb{R}^2 . In particolare si ha che:

1. *equilibrio stabile*: quando i due autovalori sono concordi e negativi $\lambda_2^* < \lambda_1^* < 0$ (nodo stabile), uguali e negativi $\lambda_1^* = \lambda_2^*$ (nodo a stella stabile) e quando uno è nullo ma l'altro è negativo $\lambda_1^* = 0$ e $\lambda_2^* < 0$ (nodo a pettine stabile);
2. *equilibrio instabile*: quando i due autovalori sono concordi e positivi $\lambda_2^* > \lambda_1^* > 0$ (nodo instabile), uguali e positivi $\lambda_1^* = \lambda_2^*$ (nodo a stella instabile) e quando uno è nullo ma l'altro è positivo $\lambda_1^* = 0$ e $\lambda_2^* > 0$ (nodo a pettine instabile);
3. *sella*: nel caso in cui i due autovalori siano discordi.

Per individuare gli equilibri stabili di un particolare sistema fisico, occorre sostituire nelle coordinate degli equilibri e negli autovalori precedentemente ricavati i valori numerici effettivi dei parametri che caratterizzano tale sistema. Si prenderanno, dunque, in considerazione per la stabilità solamente gli equilibri (R^*, x^*) i cui autovalori sono non positivi e non entrambi nulli.

3.5 Studio numerico della stabilità

La struttura della rete di interazioni che si instaura tra i vari giocatori che concorrono per lo sfruttamento della risorsa, può essere di varia natura ma nel caso di una connessione completa³ possono verificarsi due situazioni differenti per la stabilità, dato che vi è una forte dipendenza dalle condizioni iniziali. Data una scelta dei parametri m , \tilde{E}_D ed \tilde{E}_C , a seconda dei valori R_0 e x_0 assegnati, il sistema può presentare un solo equilibrio stabile oppure due. Nel caso di una dinamica bistabile occorre eseguire uno studio più approfondito del bacino di attrazione degli equilibri a partire dalle condizioni iniziali, per stabilire quale sia l'equilibrio stabile $(R^*, x^*) := (R(t \rightarrow \infty), x(t \rightarrow \infty))$.

²Per non appesantire la notazione, gli autovalori dell'ultimo equilibrio non sono stati riportati esplicitamente in quanto particolarmente complessi.

³Per ulteriori informazioni circa la natura delle connessioni in un sistema di N giocatori si consulti *Impact of globalization on the resilience and sustainability of natural resources. Nature Sustainability* [34].

Per eseguire lo studio numerico degli equilibri e della loro stabilità, si considerino delle scelte opportune dei parametri da sostituire nelle espressioni generali degli equilibri e degli autovalori ad essi associati. In tabella 3.1 sono riportate 6 combinazioni tra 3 scelte dei parametri m , \tilde{E}_D e \tilde{E}_C e 2 delle condizioni iniziali R_0 e x_0 per un sistema di giocatori che interagiscono secondo una struttura completa⁴.

m	\tilde{E}_D	\tilde{E}_C	R_0	x_0	Eqb Stabile
0.1	1.5	0.2	0.8	0.5	(0, 0)
0.1	1.5	0.2	0.3	0.1	(0, 0)
0.1	1.5	0.6	0.8	0.5	(0.28, 0.86)
0.1	1.5	0.6	0.3	0.1	(0, 0)
0.1	1.5	0.9	0.8	0.5	(0.1, 1)
0.1	1.5	0.9	0.3	0.1	(0, 0)

Tabella 3.1: Scelte dei parametri e delle condizioni iniziali

Nell'ultima colonna della tabella 3.1, per ognuna delle 6 combinazioni, sono riportati i relativi equilibri stabili ai quali il sistema tende per tempi crescenti, ciascuno ricavato secondo la procedura generale spiegata nella sezione precedente 3.4 e di cui si descrive di seguito l'analisi numerica.

A partire dalla prima scelta dei parametri a cui sono associate due differenti coppie di condizioni iniziali, dopo aver eseguito la sostituzione numerica nelle espressioni generali degli equilibri e degli autovalori si ottengono i risultati riportati in tabella 3.2:

E_i	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0.5)	(0.8, 1)	(-0.0171429, 0.371429)
$\{\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}\}$	{-0.0625, -1}	{-0.0625, 1.6}	{0.03125, 0.3}	{-1.6, 0.6875}	{-0.0670691, 0.130539}

Tabella 3.2: Prima scelta dei parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.2$

L'unica coppia di autovalori in grado di soddisfare la condizione di stabilità è quella relativa al primo equilibrio, dato dall'origine. In questo caso, dunque, non è necessario procedere oltre nello studio della stabilità perché è ammesso un solo equilibrio stabile per entrambe le condizioni iniziali date. In generale, però, non è possibile trovare una bistabilità per tale scelta dei parametri qualunque siano le condizioni iniziali poiché gli autovalori ottenuti in seguito alla sostituzione dei parametri non dipendono dalle coordinate (R_0, x_0) .

Per la seconda e la terza scelta dei parametri, invece, si verifica una situazione diversa rispetto alla precedente in quanto sostituendo i valori numeri considerati nell'espressione generale degli equilibri e degli autovalori, si trova per entrambi i casi che due equilibri presentano coppie di autovalori negativi, rispettando contemporaneamente il requisito di stabilità. Per la seconda scelta, questi sono dati dal primo e dall'ultimo equilibrio, mentre per la terza sono il primo e il quarto, come si evince dalle tabelle 3.3 e 3.4.

E_i	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0.16)	(0.4, 1)	(0.28, 0.86)
$\{\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}\}$	{-0.0625, -1}	{-0.3125, 0.8}	{0.052033, -0.7}	{-0.8, 0.0625}	{-0.449128, -0.067538}

Tabella 3.3: Seconda scelta dei parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.6$

E_i	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0.1)	(0.1, 1)	(nd, nd)
$\{\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}\}$	{-0.0625, -1}	{-0.5, 0.2}	{0.05, -0.86}	{-0.2, -0.40625}	{nd, nd}

Tabella 3.4: Terza scelta dei parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.9$

⁴Tutte le stime numeriche sono state ricavate tramite calcolo e dunque sono soggette all'approssimazione di *floating point*. Laddove necessario sono state ricondotte alla forma periodica.

Un breve commento sui risultati numerici dell'equilibrio E_5 per la terza scelta dei parametri: nella sostituzione si ottiene l'annullamento del denominatore per entrambe le coordinate, facendo sì che, insieme agli autovalori associati, l'equilibrio considerato non costituisca una soluzione finita e accettabile.

Come anticipato per stabilire quale tra gli equilibri stabili sia quello a cui il sistema tende a seconda delle condizioni iniziali che lo caratterizzano, occorre studiare il comportamento delle soluzioni nei dintorni di (R_0, x_0) per tempi molto grandi. Si consideri, dunque, una griglia di valori numerici per le condizioni iniziali in modo da eseguire una serie di simulazioni a partire da essa, al fine di verificare quale sia l'equilibrio per ciascun (R_0, x_0) . In questo modo possiamo ricostruire i bacini di attrazione dei due equilibri. Si riesce così a comporre una coppia di grafici di livello - uno per la risorsa R e uno per la frequenza di estrazione x - che presentano tutte le possibili casistiche di stabilità e grazie ai quali è possibile prevedere l'andamento delle curve $R(t)$ e $x(t)$ quando i tempi crescono tendendo all'infinito. Dopo aver posizionato sulle ascisse le coordinate R_0 e sulle ordinate quelle x_0 , il piano si suddivide in diverse aree di stabilità ognuna rappresentata da un colore appartenente a una scala cromatica discreta. Ad ogni colore corrisponde una soluzione (R^*, x^*) e per individuare l'equilibrio stabile di un sistema con precise condizioni iniziali è necessario localizzare il punto corrispondente alle specifiche coordinate (R_0, x_0) , confrontare il colore della regione a cui appartiene con la scala posta a lato e ricercare quale tra i possibili equilibri ricade all'interno dell'intervallo di valori individuato.

Si applichi quanto descritto alla seconda scelta dei parametri, per cui sono ammessi due equilibri stabili E_1 ed E_5 . Si osserva nei grafici in figura 3.1 che, data la condizione iniziale $(R_0, x_0) = (0.8, 0.5)$, l'area di livello in cui si ricade è quella corrispondente al range $[0.25, 0.30]$ per la coordinata R^* e a quello $[0.9, 1]$ per x^* .

Si può dunque concludere che per tempi molto grandi, per questa particolare scelta di parametri e condizioni iniziali, il sistema tende all'equilibrio $E_5(0.28, 0.8\bar{6})$. Secondo un procedimento analogo si trova che date le condizioni iniziali $(R_0, x_0) = (0.5, 0.1)$ l'equilibrio stabile principale è $E_1(0, 0)$.

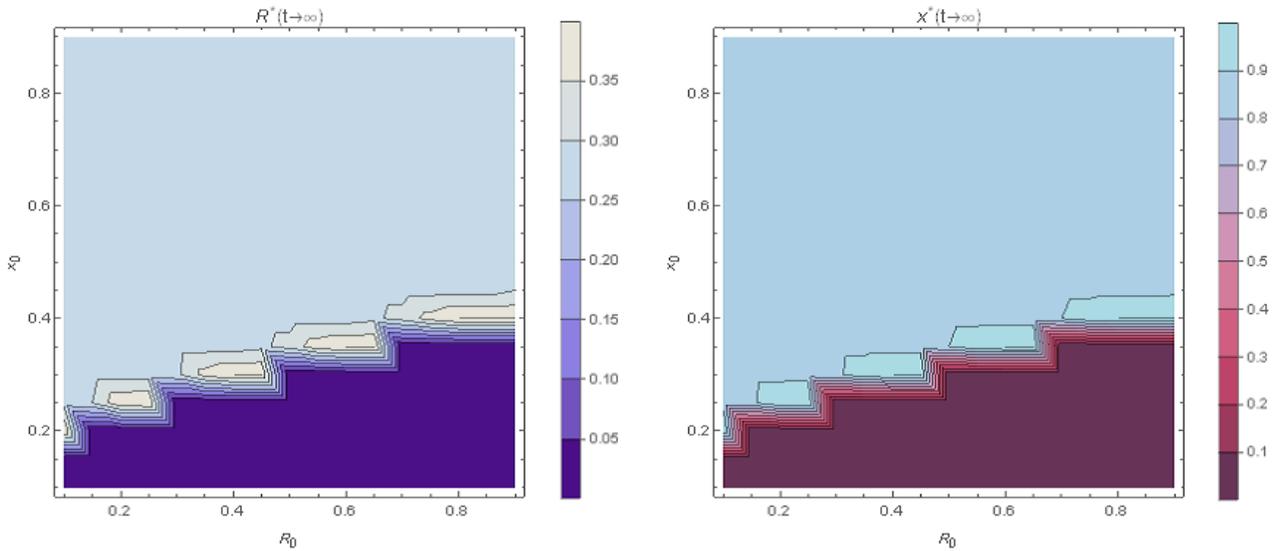


Figura 3.1: Eqb stabili per differenti condizioni iniziali dati i parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.6$

Prendendo in considerazione la terza scelta dei parametri per la quale sono state proposte due condizioni iniziali, l'iter da seguire per individuare gli equilibri stabili del sistema è il medesimo del caso precedente. Di seguito in figura 3.2 si riportano i grafici di livello con cui determinare le coordinate (R^*, x^*) date (R_0, x_0) .

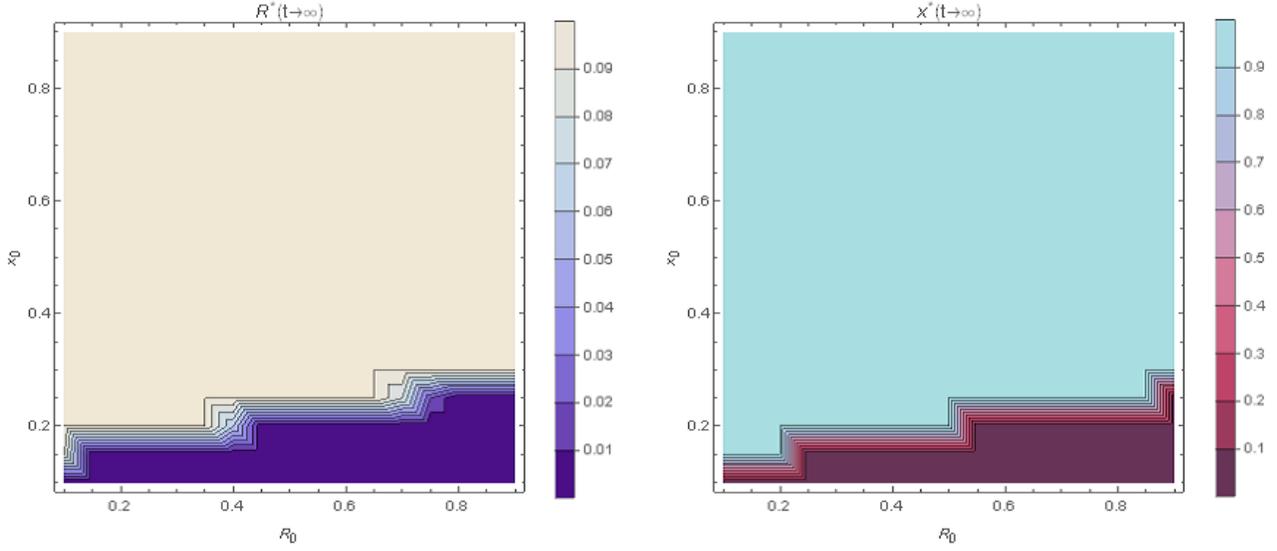


Figura 3.2: Eqb stabili per differenti condizioni iniziali dati i parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.9$

3.6 Traiettorie delle soluzioni

Dopo aver risolto esplicitamente il sistema 3.12 per le due incognite $R(t)$ e $x(t)$, avendo considerato una scelta opportuna dei parametri e dei valori iniziali, è possibile tracciare le traiettorie delle due variabili in funzione del tempo.

Si considerino nuovamente i casi numerici riportati nella tabella 3.1 della sezione 3.5. Per la prima scelta dei parametri si è trovato che un unico equilibrio soddisfa le condizioni di stabilità. La figura 3.3 conferma che l'origine $E_1(0, 0)$ costituisce un equilibrio stabile e attrattivo per entrambe le condizioni iniziali. In effetti sia la curva nera che quella blu - che come indicato in legenda si riferiscono rispettivamente a $(R_0, x_0) = (0.8, 0.5)$ e a $(R_0, x_0) = (0.5, 0.1)$ - qualunque sia la scelta dei parametri tendono asintoticamente all'equilibrio per tempi crescenti.

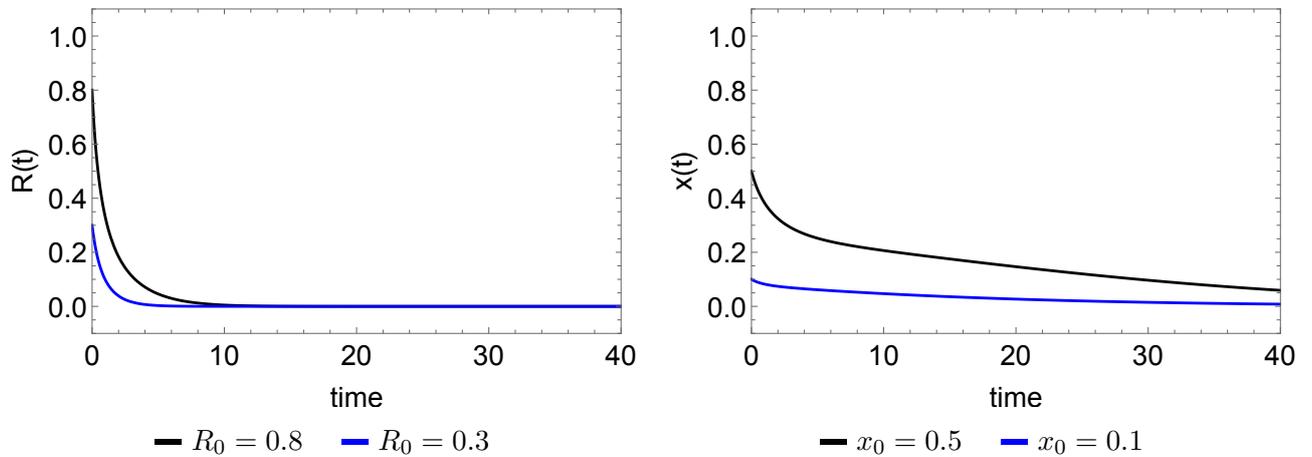


Figura 3.3: Prima scelta dei parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.2$

Per la seconda scelta dei parametri analizzando la figura 3.4 si trova che, date le condizioni $(R_0, x_0) = (0.8, 0.5)$, le curve $R(t)$ e $x(t)$ tracciate in nero, all'aumentare di t tendono progressivamente alle rispettive coordinate dell'equilibrio $E_5(0.28, 0.86)$, che dunque si conferma essere l'equilibrio stabile del sistema in questo caso particolare. Se le condizioni iniziali sono $(R_0, x_0) = (0.5, 0.1)$ le curve $R(t)$ e $x(t)$, riportate in blu nella figura 3.4, tendono ad annullarsi per tempi crescenti, confermando l'origine come equilibrio stabile.

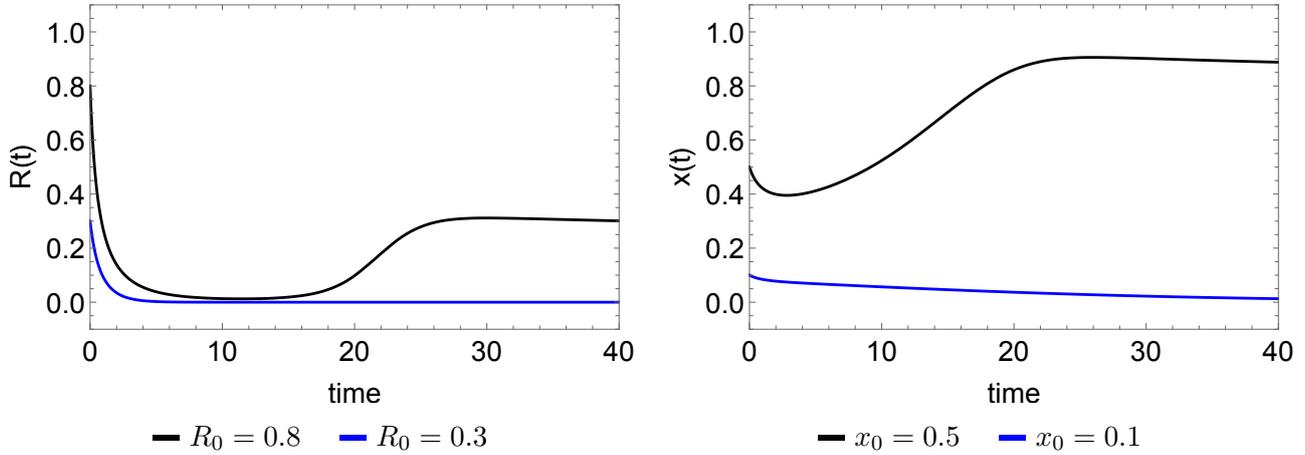


Figura 3.4: Seconda scelta dei parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.6$

Un'analisi analoga vale per la terza scelta dei parametri per la quale i grafici riportati in figura 3.5 confermano $E_1(0, 0)$ come equilibrio stabile del sistema se le condizioni iniziali sono $(R_0, x_0) = (0.8, 0.5)$ ed $E_4(0.1, 1)$ se $(R_0, x_0) = (0.5, 0.1)$.

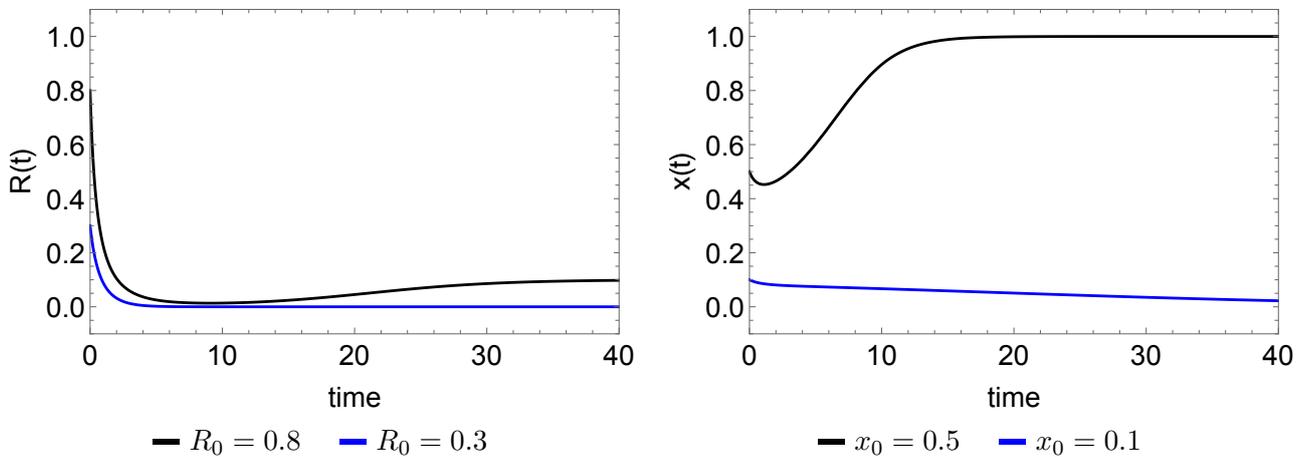


Figura 3.5: Terza scelta dei parametri $m = 0.1$, $\tilde{E}_D = 1.5$ e $\tilde{E}_C = 0.9$

Si ricorda che le conclusioni per lo studio degli equilibri e della stabilità dati i parametri e le condizioni iniziali sono riportate nell'ultima colonna della tabella 3.1.

Capitolo 4

Discussione conclusiva

4.1 Sulla tragedia dei beni comuni

A causa della naturale limitatezza delle risorse comuni rinnovabili, l'intera comunità globalizzata che ne usufruisce dovrà rivedere, in un futuro non lontano, la sua attuale definizione di consumo necessario e riformulare una strategia di sfruttamento sostenibile al fine di preservarle per le generazioni future, evitandone l'esaurimento irreversibile.

Analizzando con strumenti elementari di teoria dei giochi la situazione di rivalità nella quale N individui si spartiscono una risorsa comune R con l'obiettivo di trarre il miglior profitto, si possono costruire modelli matematici per studiare la dinamica della risorsa comune in funzione di diverse strategie di estrazione. Date specifiche condizioni al contorno quali la natura delle interazioni tra i giocatori, l'intervallo di esistenza per i parametri caratteristici e la definizione di specifiche condizioni iniziali (R_0, x_0) è possibile tracciare un profilo completo del gioco e di confermare o smentire l'efficacia delle strategie adottate dai singoli giocatori.

I modelli presi in esame sono stati sviluppati costruendo un sistema di due equazioni differenziali nel quale la prima, detta equazione logistica, descrive l'evolversi del volume della risorsa nel tempo - tenendo presente la sua naturale capacità di rigenerazione e l'azione di sfruttamento compiuta dagli N giocatori - ed è valida per qualunque rappresentazione matematica. La seconda, detta equazione delle repliche generalizzata, descrive come varia nel tempo la frazione di cooperatori nel sistema e la si ottiene a partire da specifiche considerazioni circa quei fattori che influiscono sul modus operandi dell' i -esimo giocatore. La propensione del singolo nell'adottare una strategia collaborativa piuttosto che una competitiva può dipendere unicamente dal payoff o può essere condizionata da altri fattori, come per esempio dal volume della risorsa disponibile o dalle scelte degli altri giocatori.

In quello che è stato denominato *Caso 1*, il giocatore sceglie la strategia da seguire in modo che l'estrazione compiuta sul pool comune, e quindi il guadagno associato, sia il massimo possibile.

Si è trovato in questo caso che qualunque sia la scelta dei parametri caratteristici e qualunque siano le condizioni iniziali (R_0, x_0) , al termine del gioco il volume della risorsa precipita nell'unico equilibrio stabile del sistema che coincide con l'esaurimento irreversibile della stessa. La tragedia dei beni comuni descritta da Hardin è pienamente verificata e questo suggerisce la necessità di affinare il modello implementando le teorie di collaborazione formulate da E. Ostrom.

Nel secondo modello proposto, infatti, non solamente il payoff e il volume della risorsa influiscono sulla propensione alla cooperazione o alla defezione. Altri fattori intervengono nel processo decisionale dei giocatori quali la possibilità di agire di comune accordo per la tutela della risorsa guardando a lungo termine, la composizione strategica degli N giocatori, la presenza di un compenso minimo nel caso della defezione che assicura una remunerazione anche quando la risorsa è prossima all'estinzione. Ricorrendo a descrizioni differenti da quella più naturale proposta in un primo momento, sono infatti ammesse per precise scelte di parametri e condizioni iniziali, situazioni che si sottraggono alla tragedia dei beni comuni.

In questo caso infatti è stato ipotizzato che la propensione alla cooperazione U_C fosse proporzionale al prodotto tra lavoro di estrazione e frazione di giocatori cooperativi - che in approssimazione di campo medio diventa x frequenza - mentre la propensione alla defezione U_D è stata modellizzata come una funzione del volume delle risorse R , del lavoro di estrazione relativo E_D e di un contributo di base m .

La possibilità di eludere la tragedia di Hardin dipende fortemente dalle condizioni al contorno, in particolare dalle scelte dei parametri m , \tilde{E}_D ed \tilde{E}_C e dei valori iniziali (R_0, x_0) - i grafici di livello riportati nella sezione 3.5 e quelli sull'andamento di $R(t)$ e $x(t)$ in 3.6 sono di aiuto nella comprensione di questo aspetto. Sono ammesse combinazioni che salvaguardano la risorsa dall'esaurimento irreversibile quando il lavoro di estrazione normalizzato eseguito dai cooperativi - seppur inferiore per definizione a quello dei defezionari - assume valori vicini all'unità e quando il volume della risorsa all'inizio del gioco è consistente. Da tale risultato emerge comunque la necessità di apportare delle modifiche alla rappresentazione matematica proposta, ad esempio prendendo in considerazione nuove ipotesi sulla forma di ΔU al fine di aumentare le chance positive per la sostenibilità della risorsa.

4.2 Sviluppi futuri

Nel futuro si vogliono quindi formulare altri modelli che siano in grado di descrivere matematicamente lo sfruttamento di un pool di risorse comuni in diversi contesti socio-economici. Si può pensare ad esempio che il singolo giocatore, trovandosi in una situazione in cui il volume R ha raggiunto valori molto bassi ed è prossimo all'estinzione, decida - in virtù di quanto esposto nelle sezioni precedenti - di ricorrere a una strategia collaborativa in modo da prelevare una quantità di risorsa tale da consentire la sua rigenerazione, indipendentemente dalla frequenza con cui gli altri decidono di fare altrettanto. D'altro canto qualunque sia il valore di R a un certo t , un singolo giocatore potrebbe adottare una determinata strategia in funzione delle scelte degli altri. Ad esempio se la maggior parte dei giocatori segue un principio collaborativo - situazione che in termini matematici corrisponde ad avere un'alta frequenza x - il singolo individuo potrebbe ritenere più conveniente andare in defezione, traendo un profitto consistente a discapito dei giocatori cooperativi (tipo *free rider*).

Secondo queste ipotesi le propensioni alla cooperazione e alla defezione possono essere riscritte in modo alternativo:

$$\begin{cases} U'_C = (1 - R)E_C \\ U'_D = xE_D \end{cases} \quad (4.1)$$

Secondo la stessa procedura seguita nella sezione 3.3.2 e con la medesima approssimazione di campo medio si ricava il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = TR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - R[xE_C + (1 - x)E_D] \\ \frac{dx}{dt} = \frac{x(1 - x)[(1 - R)E_C - xE_D]}{E_D} \end{cases} \quad (4.2)$$

Il sistema 4.2, una volta normalizzato, costituisce il punto di partenza per l'analisi degli equilibri e della stabilità, sia nel caso generale dove viene mantenuta la dipendenza dai parametri sia in quello specifico assegnata una scelta di valori numerici. L'iter da seguire è il medesimo esposto nelle sezioni 3.4 - 3.6 e sarà affrontato in un lavoro futuro.

Si vuole infine ricordare che la descrizione fornita deriva da una analisi teorica che tiene conto dei risultati empirici e fenomenologici eseguiti in precedenza ma necessita di una verifica sperimentale e quindi della possibilità di creare una piattaforma online dove queste teorie possano essere testate.

Bibliografia

- [1] Alessandro Agnetis. Introduzione alla teoria dei giochi. *Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Siena*.
- [2] Amedeo Benedetti. L'enciclopedia italiana treccani e la sua biblioteca. *Biblioteche oggi*, 23(8):39, 2005.
- [3] Jeremy Bentham. An introduction to the principles of morals and legislation (1789), ed. by j. *H Burns and HLA Hart, London*, 1970.
- [4] Inc Encyclopaedia Britannica et al. *Encyclopaedia britannica*. Encyclopaedia Britannica, Incorporated, 1957.
- [5] Colin W Clark. Mathematical bioeconomics. In *Mathematical Problems in Biology*, pages 29–45. Springer, 1974.
- [6] Bert JM De Vries. *Sustainability science*. Cambridge University Press, 2012.
- [7] Thomas Dietz, Elinor Ostrom, and Paul C Stern. The struggle to govern the commons. *science*, 302(5652):1907–1912, 2003.
- [8] Derek M Elsom and Elsom. *Atmospheric pollution: a global problem*. Blackwell Oxford, 1992.
- [9] Roberto Festa. *Teoria dei giochi ed evoluzione delle norme morali*. 2007.
- [10] Joseph F Fletcher. *Situation ethics: The new morality*. Westminster John Knox Press, 1997.
- [11] Helmut J Geist and Eric F Lambin. What drives tropical deforestation. *LUCC Report series*, 4:116, 2001.
- [12] Garrett Hardin. The tragedy of the commons. *science*, 162(3859):1243–1248, 1968.
- [13] Josef Hofbauer, Karl Sigmund, et al. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998.
- [14] Heiko Hotz. A short introduction to game theory. *Retrieved on*, 21:2017, 2006.
- [15] Luca Lambertini and WB1018 Amsterdam. *Applicazioni della teoria dei giochi alle scienze sociali*, 2004.
- [16] William F Laurance, Ana KM Albernaz, Philip M Fearnside, Heraldo L Vasconcelos, and Leandro V Ferreira. Deforestation in amazonia. *Science*, 304(5674):1109–1111, 2004.
- [17] Bonnie J McCay and James M Acheson. *The question of the commons: The culture and ecology of communal resources*. University of Arizona Press, 1987.
- [18] László Mészáros. *Calcoli morali. Teoria dei giochi, logica e fragilità umana*, volume 110. Edizioni Dedalo, 2000.
- [19] David R Montgomery. *Dirt: the erosion of civilizations*. Univ of California Press, 2012.
- [20] Ransom A Myers and Boris Worm. Extinction, survival or recovery of large predatory fishes. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 360(1453):13–20, 2005.

- [21] John Nash. Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, pages 286–295, 1951.
- [22] Mancur Olson. The logic of collective action [1965]. *Contemporary Sociological Theory*, page 124, 2012.
- [23] Mancur Olson and Serenella Sferza. *La logica dell'azione collettiva: i beni pubblici e la teoria dei gruppi*. Feltrinelli, 1983.
- [24] Elinor Ostrom. *Governing the commons: The evolution of institutions for collective action*. Cambridge university press, 1990.
- [25] Elinor Ostrom. Self-governance and forest resources. *Terracotta reader: A market approach to the environment*, 12, 2005.
- [26] Elinor Ostrom. Tragedy of the commons. *The new palgrave dictionary of economics*, 2, 2008.
- [27] Elinor Ostrom, Roy Gardner, James Walker, James M Walker, and Jimmy Walker. *Rules, games, and common-pool resources*. University of Michigan Press, 1994.
- [28] Maria Cristina Rulli, Antonio Saviori, and Paolo D'Odorico. Global land and water grabbing. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(3):892–897, 2013.
- [29] Christiane Runyan and Paolo D'Odorico. *Global deforestation*. Cambridge University Press, 2016.
- [30] Marten Scheffer, Steve Carpenter, Jonathan A Foley, Carl Folke, and Brian Walker. Catastrophic shifts in ecosystems. *Nature*, 413(6856):591–596, 2001.
- [31] Adam Smith. The wealth of nations. *New York: The Modern Library*, 1776.
- [32] John Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge university press, 1982.
- [33] Giovanni Treccani et al. *Enciclopedia Italiana di scienze, lettere ed arti*. Roma, 1994.
- [34] Chengyi Tu, Samir Suweis, and Paolo D'Odorico. Impact of globalization on the resilience and sustainability of natural resources. *Nature Sustainability*, 2(4):283–289, 2019.
- [35] John Von Neumann, Oskar Morgenstern, and Harold William Kuhn. *Theory of games and economic behavior (commemorative edition)*. Princeton university press, 2007.
- [36] Boris Worm, Ray Hilborn, Julia K Baum, Trevor A Branch, Jeremy S Collie, Christopher Costello, Michael J Fogarty, Elizabeth A Fulton, Jeffrey A Hutchings, Simon Jennings, et al. Rebuilding global fisheries. *science*, 325(5940):578–585, 2009.