

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sulla Struttura dei Tagli Minimi di un Grafo

Candidato:

Valentina Picco

Matricola 1154602

Relatore:

Prof. Michelangelo Conforti

28 settembre 2018

Indice

Introduzione	iii
1 Richiami Teorici di Teoria dei Grafi	1
1.1 Definizioni Preliminari	1
1.2 Tagli e Arcoconnettività	2
1.3 Albero di Gomory-Hu	3
1.4 Submodularità della Funzione Taglio	4
2 Rappresentazione a Cactus	7
2.1 Proprietà Generali	7
2.1.1 Arcoconnettività λ Dispari	8
2.1.2 Arcoconnettività λ Pari	8
2.2 Rappresentazione a Cactus	10
3 Cardinalità dell'Insieme dei Tagli Minimi	13
3.1 Bound sul Numero dei Tagli Minimi	13
4 Grafi con il Massimo Numero di Tagli Minimi	25
4.1 Caso λ Pari	25
4.2 Caso λ Dispari	27
4.2.1 λ Dispari per Grafi Semplici	27
4.2.2 λ Dispari per Grafi Pesati	28
Conclusioni	33

Introduzione

Trovare tagli minimi all'interno di un grafo è un importante problema legato alla connettività sugli archi, che trova varie applicazioni in diversi campi. Si cerca cioè di partizionare l'insieme dei nodi in due parti non vuote, in modo tale che il numero di archi tra di esse (o il loro peso totale) sia il minore possibile. Più precisamente, un taglio *globale* è una bipartizione dell'insieme dei nodi di un grafo in due parti non vuote.

Con questo lavoro vogliamo vedere alcune interessanti proprietà sui tagli minimi; in particolare, vogliamo dimostrare ed analizzare alcuni bound sul numero di possibili tagli minimi di un grafo, in relazione alla cardinalità dell'insieme dei suoi vertici. Il nostro obiettivo è trovare, ove possibile, tutti i grafi che realizzano ad uguaglianza tali bound, ed elencarli.

Per raggiungere il nostro scopo, ci focalizzeremo sulla struttura di tutti i tagli minimi globali, restringendoci a grafi *non* orientati.

Dopo aver richiamato brevemente, nel capitolo 1, alcune nozioni base di teoria dei grafi, soffermandoci in particolare su tagli e arcoconnettività, vedremo, nel capitolo 2, alcune interessanti proprietà e il concetto di *Rappresentazione a Cactus*, utile per descrivere la struttura di tutti i tagli minimi di un grafo. Nel capitolo 3, invece, esporremo e dimostreremo tre diversi bound che pongono una limitazione superiore alla cardinalità dell'insieme dei tagli minimi. In seguito, nel capitolo 4, ci occuperemo di trovare tutti i grafi che soddisfano ad uguaglianza tali bound, facendo distinzione tra grafi semplici e pesati, oltre che tra arcoconnettività pari o dispari, e riassumendo infine i risultati ottenuti.

Capitolo 1

Richiami Teorici di Teoria dei Grafi

Cominciamo col richiamare alcune nozioni fondamentali di teoria dei grafi [1].

1.1 Definizioni Preliminari

Definizione 1.1. Un *grafo* (*non orientato*) G è una coppia ordinata di insiemi $G = (V, E)$, dove $V = V(G)$ è un insieme di *vertici* o *nodi*, e $E = E(G)$ è un insieme di coppie non ordinate, dette *archi*, di elementi di V .

Denotiamo l'arco $e = \{u, v\}$ con uv e diciamo che l'arco e *incide* su u e v , e che u, v sono le *estremità* di e . Inoltre, diciamo che due vertici sono *adiacenti* se sono le estremità di uno stesso arco, e indichiamo con $d(v)$ il *grado* di v , cioè il numero di nodi adiacenti a v in G .

Definizione 1.2. Si dice *sottografo* di G un grafo $G'(V', E')$ tale che $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Un *cappio* è un arco le cui estremità coincidono. Due archi si dicono *paralleli* se hanno le stesse estremità.

Definizione 1.3. Un grafo $G(V, E)$ si dice *semplice* se non ha cappi né archi paralleli. Al contrario, si parla di *multigrafo* quando sono presenti archi paralleli.

Un *percorso* P fra due nodi v_1, v_n di un grafo è una sequenza alternata di nodi e archi $v_1, e_1, v_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ in cui ogni arco e_i ha come estremità v_i, v_{i+1} ; i nodi v_1, v_n sono detti *estremi* del percorso, gli altri *nodi intermedi*. Un percorso è *chiuso* se le sue estremità coincidono. Se non vi sono ripetizioni di vertici, il percorso è detto *cammino*, e la sua *lunghezza* è il numero di archi percorsi. Un *ciclo* è un cammino le cui estremità coincidono.

Dato un cammino P , definito dalla sequenza $v_1, e_1, v_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$, si dice che P' è *sottocammino* di P se esistono i, j , con $1 \leq i \leq j \leq n$, tali che P' è definito dalla sequenza $v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, e_{j-1}, v_j$.

Due vertici u, v si dicono *connessi* se esiste un cammino da u a v . Si può facilmente notare che la proprietà di connessione è una relazione di equivalenza, e perciò possiamo suddividere un grafo nelle sue classi di equivalenza, dette *componenti connesse*. Un grafo è *connesso* se è costituito da una singola componente connessa, cioè se, per ogni coppia di nodi u, v , esiste un cammino che li unisce.

Definizione 1.4. Si dice *albero* un grafo connesso e aciclico. I nodi di grado 1 di un albero sono detti *foglie*. Un insieme di alberi è detto *foresta*.

Lemma 1.1.1. In ogni albero vale la relazione: $|E| = |V| - 1$.

È possibile anche assegnare ad ogni arco di un grafo un *peso*, tramite una *funzione peso*:

$$\begin{aligned} c : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ e &\rightarrow c_e; \end{aligned}$$

in questo caso si parla di *grafo pesato*, e il *grado* $d(v)$ di un vertice v è la somma dei pesi degli archi incidenti su v . Un caso particolare si ha associando ad ogni arco di E un peso pari a 1, ottenendo quindi un *grafo non pesato*.

Naturalmente, ogni grafo pesato è equivalente ad un multigrafo, e viceversa: basta sostituire, nel grafo pesato, ogni arco $e = uv$ di peso c_e con c_e archi paralleli tra u e v .

Definizione 1.5. Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ di sottoinsiemi di V si dice *laminare* (o *annidata*) se, per ogni coppia di sottoinsiemi $X, Y \in \mathcal{F}$, almeno uno dei tre insiemi $X \setminus Y, Y \setminus X, X \cap Y$ è vuoto.

Sia $\bar{S} = V \setminus S$, per ogni $S \subseteq V$. Dato un grafo $G(V, E)$ e un insieme non vuoto $S \subseteq V$, definiamo l'operazione di *contrazione* dell'insieme S in questo modo: il grafo iniziale G viene sostituito dal grafo $G_{/S}$, dove $V(G_{/S}) = (V \setminus S) \cup \{x\}$, con x un nuovo vertice, e dove $E(G_{/S})$ è l'insieme che contiene tutti gli archi che in G avevano entrambe le estremità in \bar{S} , e contiene un arco ux e per ogni arco uv che in G aveva una estremità in S e una in \bar{S} .

1.2 Tagli e Arcoconnettività

Definizione 1.6. Dato un insieme $S \subseteq V$, il *taglio* $\delta(S) = \{S, \bar{S}\}$ è l'insieme degli archi che hanno una estremità in S e l'altra in \bar{S} . In questo caso, S ed \bar{S} sono dette le *spiagge* di $\{S, \bar{S}\}$, e $d(S) = |\delta(S)|$ è il *grado* di S .

Nel caso di grafi pesati, il *grado* di S è la somma dei pesi degli archi di $\delta(S)$.

Osservazione 1. Per ogni taglio, vale: $d(S) = d(\bar{S})$, e, di conseguenza, $d(S) = d(\bar{S})$.

Diciamo che un taglio *separa* due vertici u e v se u appartiene a una spiaggia del taglio e v all'altra. Inoltre, se entrambe le spiagge di un taglio hanno cardinalità maggiore o uguale a due, diciamo che il taglio è *proprio*; in caso contrario, viene detto *improprio* (o *stella*).

Definizione 1.7. Due insiemi $X, Y \subseteq V$ si dicono *crossing* se gli insiemi $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$, $V \setminus (X \cup Y)$ sono tutti non vuoti.

Indichiamo poi con $d(X, Y)$ la somma dei pesi degli archi che vanno da X a Y in G , per ogni $X, Y \subseteq V$. Se X e Y sono le due spiagge di uno stesso taglio, $d(X, Y)$ si dice il *peso* del taglio $\{X, Y\}$.

Definizione 1.8. Diciamo che un taglio $\{S, \bar{S}\}$ di un grafo G connesso è *minimo* se non esiste in G un altro taglio di peso maggiore, cioè se vale:

$$d(S) = \min_{\emptyset \neq U \subseteq V} d(U);$$

in questo caso, ciascuna delle due spiagge S e \bar{S} è detta *insieme stretto*. Un insieme stretto è *proprio* se ha cardinalità maggiore o uguale a 2.

Un grafo G è *k-arcoconnesso* se togliendo al più $k - 1$ archi G rimane connesso.

Definizione 1.9. L'*arcoconnettività* $\lambda = \lambda(G)$ è il massimo valore di k per il quale G è *k-arcoconnesso*.

In particolare, $\lambda(G)$ è la cardinalità di ogni taglio minimo di G .

Si noti che l'operazione di contrazione vista sopra non riduce l'arcoconnettività di un grafo.

Dati due vertici $u, v \in V$, indichiamo con $k_{uv}^E(G)$ l'*arcoconnettività tra i due vertici* u e v in G ; indichiamo cioè il minimo numero di archi da togliere a G affinché u e v si trovino in componenti connesse distinte.

Definizione 1.10. Diciamo che un taglio $\{S, \bar{S}\}$ di G che separa due vertici u e v è un *taglio minimo che separa* u e v se vale:

$$d(S) = \min_{|U \cap \{u, v\}|=1, U \subseteq V} d(U).$$

In particolare, $k_{uv}^E(G)$ è la cardinalità di un taglio minimo che separa u e v . Notiamo inoltre che vale la seguente relazione:

$$\lambda(G) = \min_{u, v \in V} k_{uv}^E(G).$$

1.3 Albero di Gomory-Hu

Dato un grafo $G(V, E)$ con pesi positivi sugli archi, un albero di Gomory-Hu è una particolare struttura che permette di rappresentare, per ogni coppia di nodi $u, v \in V$, un taglio minimo che li separa.

Definizione 1.11. Dato $G(V, E)$ grafo con pesi $c_e \in \mathbb{Z}_+$, $\forall e \in E$, diciamo che l'albero $T(V, F)$ con pesi $w_e \in \mathbb{Z}_+$, $\forall e \in F$, è un *albero di Gomory-Hu* per G se, per ogni coppia di vertici $u, v \in V$, vale:

- $k_{uv}^E(G) = k_{uv}^F(T)$;

- un taglio di capacità minima che separa u e v in T è anche un taglio di capacità minima che separa u e v in G .

È poi possibile dimostrare il seguente interessante problema sull'esistenza di un albero di Gomory-Hu per un grafo:

Teorema 1.3.1. *Ogni grafo G ammette un albero di Gomory-Hu, e questo può essere costruito risolvendo $n - 1$ problemi di taglio minimo tra due nodi.*

Esiste quindi un semplice algoritmo per il calcolo di un albero di Gomory-Hu di un grafo.

Il teorema precedente e la definizione di albero di Gomory-Hu ci permettono infine di stabilire che i valori distinti che possono essere assunti dalle quantità $k_{uv}^E(G)$, al variare di $u, v \in V$, sono al più $n - 1$.

1.4 Submodularità della Funzione Taglio

Definizione 1.12. Dato un grafo $G(V, E)$, la *funzione taglio* di G è la seguente funzione:

$$d : 2^V \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad S \rightarrow d(S), \quad \forall S \subseteq V.$$

Tale funzione è chiaramente *simmetrica*, in quanto, per ogni $S \subseteq V$, $d(S) = d(\overline{S})$.

Lemma 1.4.1. *Submodularità della funzione taglio.*

La funzione taglio è submodulare, cioè:

$$d(X) + d(Y) \geq d(X \cup Y) + d(X \cap Y),$$

per ogni $X, Y \subseteq V$.

Dimostrazione. Siano $X, Y \subseteq V$.

Claim 1. *Per ogni $X, Y \subseteq V$, vale:*

$$d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2 d(X \setminus Y, Y \setminus X).$$

Dimostrazione. Prendiamo in considerazione ogni arco $e = uv$ di G appartenente al taglio $\{X, \overline{X}\}$, con $u \in X$ e $v \in \overline{X}$. Valutiamo quindi il contributo di ciascuno di questi archi agli addendi dell'equazione da dimostrare:

- se $u \in X \setminus Y$ e $v \in \overline{X \cup Y}$, l'arco e dà un contributo unitario a $d(X)$ e $d(X \cup Y)$, mentre dà un contributo nullo agli altri addendi;
- se $u \in X \setminus Y$ e $v \in Y \setminus X$, l'arco e dà un contributo unitario a $d(X)$ e $d(Y)$, mentre dà un contributo di 2 a $d(X \setminus Y, Y \setminus X)$, e nullo agli altri addendi;
- se $u \in X \cap Y$ e $v \in \overline{X \cup Y}$, l'arco e dà un contributo unitario a $d(X)$, $d(Y)$, $d(X \cup Y)$ e $d(X \cap Y)$, nullo agli altri addendi;

- se $u \in X \cap Y$ e $v \in Y \setminus X$, l'arco e dà un contributo unitario a $d(X)$ e $d(X \cap Y)$, nullo agli altri addendi.

Abbiamo visto quindi che ogni arco dà lo stesso contributo ad entrambi i lati dell'equazione. Per simmetria, lo stesso vale per gli archi appartenenti al taglio $\{Y, \bar{Y}\}$. Tutti gli altri archi del grafo non appartenenti a questi due tagli non danno invece alcun contributo agli addendi dell'equazione. Abbiamo così dimostrato il claim. □

Poiché $2 d(X \setminus Y, Y \setminus X) \geq 0$, segue subito che

$$d(X) + d(Y) - d(X \cap Y) - d(X \cup Y) \geq 0,$$

e vale quindi la proprietà di submodularità. □

Notiamo come trovare i tagli minimi di un grafo significhi minimizzare la funzione taglio: si cerca infatti di arrivare a un insieme $S \subseteq V$ che abbia grado minimo, cioè tale che il taglio $\{S, \bar{S}\}$ abbia cardinalità minima (o, nel caso di grafi pesati, tale che il peso sia minimo).

Nella nostra trattazione, ci occuperemo della struttura di tutti i tagli minimi *globali*, cioè dei tagli minimi che dividono l'insieme V dei vertici di un grafo in due parti generiche. In particolare, ci limiteremo a prendere in considerazione grafi *non orientati*.

Capitolo 2

Rappresentazione a Cactus

Introduciamo ora il concetto di *Rappresentazione a Cactus*, usato per descrivere la struttura dell'insieme di tutti i tagli minimi di un grafo, facendo riferimento al lavoro di A. Frank [2].

2.1 Proprietà Generali

Cominciamo con un risultato fondamentale comune a tutte le coppie di tagli minimi crossing:

Lemma 2.1.1. Proprietà dei tagli minimi crossing.

Sia $G(V, E)$ un grafo con arcoconnettività λ , e siano $\{X, \bar{X}\}$ e $\{Y, \bar{Y}\}$ due tagli minimi crossing. Dati $V_1 = X \cap Y$, $V_2 = Y \setminus X$, $V_3 = \bar{X} \cap \bar{Y}$ e $V_4 = X \setminus Y$, vale:

1. $d(V_1, V_3) = d(V_2, V_4) = 0$;
2. $d(V_1, V_2) = d(V_2, V_3) = d(V_3, V_4) = d(V_4, V_1) = \lambda/2$.

Dimostrazione. 1. Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} 2\lambda &= d(X) + d(Y) = d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X) + 2 d(X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}) = \\ &= d(V_4) + d(V_2) + 2 d(V_1, V_3) \geq 2\lambda + 2 d(V_1, V_3), \end{aligned}$$

dunque possiamo concludere che $d(V_4) = d(V_2) = \lambda$ e $d(V_1, V_3) = 0$. Similmente:

$$2\lambda = d(\bar{X}) + d(Y) = d(V_3) + d(V_1) + 2 d(V_2, V_4) \geq 2\lambda + 2 d(V_2, V_4),$$

e quindi $d(V_1) = d(V_3) = \lambda$ e $d(V_2, V_4) = 0$.

2. Poiché $d(V_i) = \lambda \forall i = 1, \dots, 4$, sommando due elementi qualsiasi dell'insieme

$$\{d(V_1, V_2), d(V_2, V_3), d(V_3, V_4), d(V_4, V_1)\}$$

il risultato è sempre λ , il che dimostra l'affermazione. □

Facciamo ora una distinzione tra il caso in cui, dato un grafo G connesso, la sua arcoconnettività λ sia dispari, e il caso in cui invece λ sia pari. Ciò ci permette di dare ulteriori risultati sui tagli minimi di un grafo, e in particolare sulla loro struttura.

2.1.1 Arcoconnettività λ Dispari

Sia $G(V, E)$ un grafo connesso, non necessariamente semplice, e sia λ la cardinalità minima di un taglio di G , ovvero la sua arcoconnettività. Vediamo questo importante risultato valido quando λ è un numero dispari.

Proposizione 2.1.2. *Se λ è dispari, G non ha tagli minimi crossing.*

Dimostrazione. Per assurdo, siano $\{X, \bar{X}\}$ e $\{Y, \bar{Y}\}$ due tagli minimi di G crossing. Allora X e Y sono stretti, e $d(X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}) = 0$. Inoltre, per le proprietà degli insiemi crossing e stretti, anche $X \setminus Y$ e $X \cap Y$ sono stretti, e quindi vale:

$$\lambda = d(X \cap Y) = d(X \setminus Y, X \cap Y) + d(Y \setminus X, X \cap Y).$$

Poiché λ è dispari, i due addendi $d(X \setminus Y, X \cap Y)$ e $d(Y \setminus X, X \cap Y)$ sono diversi tra loro. Senza perdita di generalità, supponiamo $d(X \setminus Y, X \cap Y) > d(Y \setminus X, X \cap Y)$. Allora vale:

$$\begin{aligned} \lambda &= d(X) = d(X \setminus Y) - d(X \setminus Y, X \cap Y) + d(Y \setminus X, X \cap Y) = \\ &= \lambda + (\text{quantità minore di zero}) < \lambda, \end{aligned}$$

il che è evidentemente assurdo. □

Dunque, quando λ è dispari, l'insieme dei tagli minimi di un grafo $G(V, E)$ definisce una famiglia laminare di sottoinsiemi di V .

Tramite quest'ultima proposizione è possibile dimostrare il seguente risultato sulla struttura dei tagli minimi di un grafo con λ dispari:

Teorema 2.1.3. *Sia $G(V, E)$ un grafo con arcoconnettività λ dispari. Allora esiste un albero $H(U, F)$ e una mappa $\phi : V \rightarrow U$ tale che i tagli minimi di G e gli archi di H sono in corrispondenza biunivoca; ciò significa che, $\forall e \in F$, la preimmagine tramite ϕ delle due componenti connesse di $H \setminus e$ sono le spiagge del corrispondente taglio minimo in G .*

2.1.2 Arcoconnettività λ Pari

Sia ora $G(V, E)$ un grafo connesso, non necessariamente semplice, con arcoconnettività λ pari. In questo caso, la struttura dell'insieme dei tagli minimi di G è più complessa rispetto al caso precedente, in quanto vi possono essere anche tagli crossing.

Vediamo qui un risultato fondamentale per la nostra trattazione:

Lemma 2.1.4. *Sia $\lambda \geq 2$ un numero intero pari, e sia $G(V, E)$ un grafo con arcoconnettività λ , tale che esiste un taglio minimo proprio, e ogni taglio minimo proprio è crossing con un altro taglio minimo proprio. Allora G è un ciclo in cui si è sostituito ogni arco con $\lambda/2$ archi paralleli.*

Dimostrazione.

Claim 2. *Per ogni insieme proprio stretto T e per ogni $v \in V$ esiste un insieme stretto T' che contiene v e tale che T e T' sono crossing.*

Dimostrazione. Il complementare di ogni insieme stretto è anch'esso stretto, e poiché per ipotesi ogni taglio minimo proprio è crossing con un altro taglio minimo, la conclusione è immediata. \square

Claim 3. *Ogni nodo di G ha grado λ .*

Dimostrazione. Per assurdo esista $v \in V$ tale che $d(v) > \lambda$. Sia T un insieme stretto, proprio e *minimale* contenente v . Per il Claim 2 esiste un insieme X stretto tale che $v \in X$ e X e T sono crossing. Per le proprietà degli insiemi stretti e crossing, anche $X \cap T$ è stretto. Inoltre, $X \cap T$ è proprio (infatti non può contenere soltanto v , perché $d(v) > \lambda$ e $d(X \cap T) = \lambda$). Abbiamo quindi trovato un insieme, $X \cap T$, che contraddice la minimalità di T , il che porta ad un assurdo. \square

Claim 4. *Se $T = \{x, y\}$ è un insieme stretto, allora $d(x, y) = \lambda/2$.*

Dimostrazione.

$$\lambda = d(T) = d(x) + d(y) - 2d(x, y) = \lambda + \lambda - 2d(x, y).$$

Dunque $d(x, y) = \lambda/2$. \square

Claim 5. *Sia $v \in T$ stretto, proprio. Allora T contiene un insieme stretto di due elementi di cui uno è v .*

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su $|T|$:

- Caso $|T| = 2$: banale;
- Caso $|T| \geq 3$: per il Claim 2, esiste un insieme X stretto, con $v \in X$ e tale che X e T sono crossing. Per le proprietà degli insiemi stretti e crossing, anche $X \cap T$ è stretto. Se $|X \cap T| \geq 2$ per induzione abbiamo finito.

Sia invece $X \cap T = \{v\}$. Sempre per le proprietà degli insiemi stretti e crossing, l'insieme $T' := T \setminus X = T \setminus \{v\}$ è proprio e stretto. Dunque, per il Claim 2, esiste un insieme X' stretto e proprio tale che $v \in X'$ e X' e T' sono crossing.

Si ha quindi che o $X' \subset T$ oppure X' e T sono crossing. In entrambi i casi, $T \cap X'$ è stretto, e $|T| > |T \cap X'|$.

Infine, $|T \cap X'| \geq 2$: infatti, se per assurdo $|T \cap X'| = 1$, allora $T \cap X' = \{v\}$, e quindi non è vero che X' e T' sono crossing. Da qui si arriva alla conclusione per induzione.

□

Claim 6. *Per ogni $v \in V$ esistono due insiemi stretti di cardinalità 2 contenenti v .*

Dimostrazione. Sia $v \in V$, e sia T un insieme stretto contenente v . Per il Claim 5, esiste un insieme $T_1 = \{v, x\} \subset T$ stretto. Per il Claim 2, esiste T' stretto tale che $v \in T'$, e T' e T_1 sono crossing. Allora, ancora per il Claim 5, esiste un insieme $T_2 \subset T'$ stretto, di cardinalità 2, tale che $v \in T_2$, e $T_2 \neq T_1$. Abbiamo dunque due insiemi distinti stretti T_1 e T_2 , di cardinalità 2, che contengono v . □

Claim 7. *Ogni $v \in V$ ha esattamente due vicini.*

Dimostrazione. Siano $\{x, v\}$ e $\{y, v\}$ due insiemi stretti, la cui esistenza è garantita dal Claim 6. Il Claim 4 implica che $d(x, v) = d(y, v) = \lambda/2$, e poiché, per il Claim 3, ogni nodo di G ha grado λ , si conclude immediatamente. □

Possiamo concludere quindi che G è un ciclo in cui si è sostituito ogni arco con $\lambda/2$ archi paralleli.

□

2.2 Rappresentazione a Cactus

Diamo ora la definizione di cactus, dopodiché riportiamo il teorema di Dinits, Karzanov e Lomonosov, tratto da *On the structure of a family of minimal weighted cuts in a graph* [3], sulla struttura dei tagli minimi di un grafo, con la dimostrazione data da Fleiner e Frank in *A quick proof for the cactus representation of mincuts* [4].

Definizione 2.1. Un *Cactus* è un grafo connesso $C(U, F)$ senza cappi, con arcoconnettività 2, tale che ogni arco $e \in F$ appartiene a uno e un solo ciclo di C .

Notiamo che ogni taglio minimo di un cactus C è costituito da due archi appartenenti allo stesso ciclo in C .

Il seguente teorema, dovuto a Dinits, Karzanov e Lomonosov [3], mostra come l'insieme dei tagli minimi di un grafo qualsiasi abbia la stessa struttura dell'insieme dei tagli minimi di un cactus.

Teorema 2.2.1. *Sia $\lambda \geq 1$ intero, $G(V, E)$ un grafo, senza loop, con arcoconnettività pari a λ . Esiste un cactus $C(U, F)$ e una mappa $\phi : V \rightarrow U$ tale che, per ogni taglio minimo di C con spiagge U_1 e U_2 , le preimmagini $\phi^{-1}(U_1)$ e $\phi^{-1}(U_2)$ sono due spiagge di un taglio minimo di G . Inoltre, ogni taglio minimo di G si ottiene così, cioè X è insieme stretto di G se e solo se $\phi(X)$ è insieme stretto di C .*

Si parla quindi di *Rappresentazione a Cactus*, nominando così la coppia (C, ϕ) che descrive la struttura dei tagli minimi del grafo $G(V, E)$, la cui esistenza è garantita dal teorema 2.2.1.

Dati un grafo $G(V, E)$ e una sua rappresentazione a cactus (C, ϕ) , diciamo che un nodo del cactus è *vuoto* (o *dummy*) se la sua preimmagine tramite ϕ è vuota.

Vediamo ora la dimostrazione del teorema 2.2.1 proposta da Fleiner e Frank [4]:

Dimostrazione. • **Caso λ dispari:** grazie al teorema 2.1.3, si trova subito una rappresentazione a cactus per un grafo con λ dispari: infatti, è possibile ricavare un cactus da un albero semplicemente sostituendo ogni arco dell'albero con due archi paralleli; segue quindi subito la tesi.

• **Caso λ pari:** procediamo per induzione su $|V| \geq 3$ (il caso $|V| \leq 2$ è banale).

1. **Ogni taglio minimo è una stella.** Siano v_1, \dots, v_h i nodi di G di grado λ . Sia $U = \{u_0, u_1, \dots, u_h\}$ l'insieme dei nodi di un cactus C tale che, per ogni $i = 1, \dots, h$, u_0 e u_i sono connessi da due archi paralleli (rappresentazione a stella). Sia poi $\phi : V \rightarrow U$ tale che $\phi(v_i) = u_i \forall i = 1, \dots, h$ e $\phi(v) = u_0$ per ogni $v \in V \setminus \{v_1, \dots, v_h\}$. Tali C e ϕ costituiscono la rappresentazione cercata.

2. **Esiste un taglio minimo proprio.**

(a) **Ogni taglio minimo proprio è crossing con almeno un altro taglio minimo proprio.** In questo caso G può essere ottenuto da un ciclo $C(V, F)$ sostituendo ogni arco con $\lambda/2$ archi paralleli. Ciò discende direttamente dal lemma 2.1.4 visto sopra. Una rappresentazione a cactus è quindi data da C e $\phi : V(G) \rightarrow V(C)$, $\phi(v) = v$.

(b) **Esiste un taglio minimo proprio $\{B, \bar{B}\}$ che non è crossing con nessun altro taglio minimo.** Creiamo G_1 (rispettivamente G_2) contraendo B (rispettivamente \bar{B}) in un solo nodo v_1 (rispettivamente v_2), mantenendo tutti gli archi che collegavano i nodi di B ai nodi di \bar{B} .

Per ipotesi induttiva, i tagli minimi di G_1 e G_2 possono essere rappresentati da un cactus $C_j(U_j, F_j)$ e una mappa $\phi_j : V(G_j) \rightarrow U_j$, per $j = 1, 2$, con U_1 e U_2 disgiunti (intendendo con $V(G_j)$ l'insieme dei nodi del grafo G_j).

Si osserva che $u_j := \phi_j(v_j)$ ha grado 2 in C_j , per $j = 1, 2$: infatti, se per assurdo valesse $d(u_j) > 2$, ciò significherebbe che non esiste un

taglio minimo di C_j separante u_j da tutti gli altri nodi di U_j ; perciò l'insieme $\{v_j\} = \{\phi^{-1}(u_j)\}$ non sarebbe una spiaggia di un taglio minimo di G_j . Sappiamo però che $d(v_j) = \lambda$ per $j = 1, 2$, il che porta ad un assurdo.

Inoltre, si vede subito che non esiste un altro nodo v di G_j tale che $\phi_j(v) = u_j$.

A questo punto, sia $C(U, F)$ il cactus ottenuto da C_1 e C_2 identificando u_1 e u_2 , e sia $\phi : V \rightarrow U$ tale che $\phi(v) = \phi_1(v)$ se $v \in B$, mentre $\phi(v) = \phi_2(v)$ se $v \in \overline{B}$.

Poiché $\{B, \overline{B}\}$ non è crossing con nessun altro taglio minimo, ogni taglio minimo di G è un taglio minimo di G_1 o di G_2 . Dunque, C e ϕ definiti sopra danno la rappresentazione cercata.

□

Notiamo infine che la rappresentazione a cactus di un grafo G può non essere unica. Per esempio, infatti, un ciclo di lunghezza 3 può essere rappresentato sia da se stesso, inteso come cactus, sia da un grafo con tre vertici, ciascuno collegato allo stesso nodo vuoto tramite due archi paralleli.

Capitolo 3

Cardinalità dell'Insieme dei Tagli Minimi

Passiamo ora ai capitoli più importanti della nostra trattazione. Vediamo innanzitutto, in questo terzo capitolo, alcuni risultati che forniscono dei bound alla cardinalità dell'insieme dei tagli minimi di un grafo, in relazione alla cardinalità dell'insieme dei nodi del grafo stesso, e ne diamo delle dimostrazioni.

In seguito, nel capitolo successivo, vedremo quali particolari grafi soddisfano ad uguaglianza ciascuno dei bound esposti qui, facendo distinzione tra grafi con tagli minimi di cardinalità pari e grafi i cui tagli minimi hanno invece cardinalità dispari, e distinguendo anche quando ci occuperemo soltanto di grafi semplici oppure quando considereremo anche grafi pesati (o multigrafi).

3.1 Bound sul Numero dei Tagli Minimi

Sia $G(V, E)$ un grafo connesso, non necessariamente semplice, e sia $C(G)$ l'insieme dei tagli minimi di G . Sia inoltre λ l'arcoconnettività di G .

Cominciamo col vedere il seguente risultato, che si può trovare in *Algorithmic Aspects of Graph Connectivity* di Nagamochi e Ibaraki [5], il quale offre un bound alla cardinalità dell'insieme $C(G)$ quando il grafo $G(V, E)$ non ha tagli minimi crossing.

Proposizione 3.1.1. *Sia G tale che non c'è alcuna coppia di tagli minimi crossing in $C(G)$. Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$|C(G)| \leq 2|V| - 3.$$

Dimostrazione. Proviamo la disuguaglianza per induzione sul numero dei tagli minimi propri.

Come caso base consideriamo il caso in cui ogni taglio minimo di G è una stella, cioè non ci sono tagli minimi propri. In questa situazione, come si può vedere anche dal primo punto della dimostrazione del teorema 2.2.1, vale sempre

$$|C(G)| \leq |V| \leq 2|V| - 3.$$

Passiamo ora al caso generale. Sia $\{X, \bar{X}\}$ un taglio minimo proprio di G . Sia G_1 il grafo ottenuto da G contraendo X in un unico vertice, e sia G_2 il grafo ottenuto da G contraendo \bar{X} in un unico vertice. Per ipotesi induttiva vale:

$$|C(G)| = |C(G_1)| + |C(G_2)| - 1 \leq [2(|X| + 1) - 3] + [2(|\bar{X}| + 1) - 3] - 1 = 2|V| - 3,$$

e così si conclude. □

Questa stima ci dice che la cardinalità dell'insieme $C(G)$ è sempre maggiore del numero dei nodi di G , esclusa la situazione banale in cui $|V| = 1, 2$. Inoltre, è stretta: infatti, il ciclo di lunghezza 3 la soddisfa ad uguaglianza.

In relazione al caso base della dimostrazione della proposizione 3.1.1 appena vista, in cui viene preso in considerazione un grafo in cui ogni taglio minimo è una stella, ci siamo posti alcune domande che coinvolgono un particolare tipo di grafi, denominati *grafi di Turan (regolari)*.

Definizione 3.1. Si dice *grafo di Turan regolare* un grafo in cui i nodi sono suddivisi in k insiemi di q nodi ciascuno, e ciascun nodo è adiacente ad ogni altro nodo, esclusi quelli appartenenti al suo stesso insieme.

Abbiamo cercato di rispondere in particolare al seguente quesito: dato un grafo $G(V, E)$ tale che tutti i suoi tagli minimi sono stelle e ogni suo singolo vertice costituisce un taglio minimo, possiamo affermare che G è sicuramente un grafo di Turan regolare?

Il grafo contenuto in figura 3.1 a sinistra dimostra che ciò non è vero. Esso infatti non è un grafo di Turan, ma ogni suo taglio minimo è una stella, ed ogni suo nodo costituisce un taglio minimo.

Il grafo in figura 3.1 a destra mostra invece che anche l'implicazione contraria è falsa: esso è infatti un grafo di Turan in cui vi sono però dei tagli minimi propri.

Un altro risultato interessante, che riguarda la cardinalità dell'insieme dei tagli minimi di un grafo nel caso questo abbia arcoconnettività dispari e strettamente maggiore di 1, è il seguente, dovuto al lavoro di J. Lehel, F. Maffray, M. Preissmann, *Graphs with largest number of minimum cuts* [6].

Proposizione 3.1.2. Dato un grafo $G(V, E)$ con $n = |V|$, sia $\lambda \geq 3$, dispari. Allora vale la disuguaglianza seguente:

$$|C(G)| \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2.$$

Vediamo intanto una dimostrazione di questa proposizione solo per grafi *semplici*, dopodiché, ampliandone l'enunciato, ne vediamo una prova nel caso di grafi *pesati* (o multigrafi), che ci porterà poi a conclusioni interessanti.

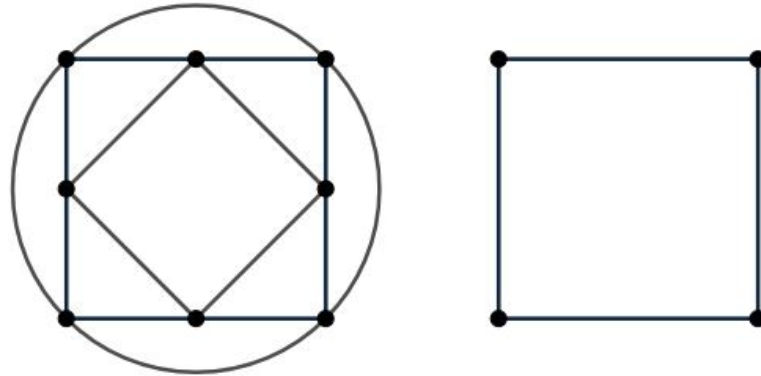


Figura 3.1: Controesempi

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n (essendo $\lambda \geq 3$, si ha necessariamente $n \geq 4$).

Per $n = 4$ abbiamo come unica possibilità il grafo completo con 4 vertici (il grafo è semplice, senza pesi), e la disuguaglianza è vera, anzi, è soddisfatta ad uguaglianza.

Ora, sia $n > 4$, e supponiamo che la disuguaglianza sia vera per tutti i grafi con $|V| < n$. Procediamo per casi:

- **G non ha tagli minimi propri:** come visto anche sopra, in questo caso $|C(G)| \leq n$, e sappiamo che $n < \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$, per $n > 4$; dunque la disuguaglianza è soddisfatta, ma mai ad uguaglianza.
- **G ha dei tagli minimi propri:** sia $\{A, \bar{A}\}$ un taglio minimo *proprio* tale che A abbia il minor numero di nodi possibile. Trattandosi di un grafo semplice, ed essendo $\lambda \geq 3$, A non può avere meno di 3 elementi: infatti, per ogni insieme $A \subseteq V$ di cardinalità 2 in un grafo semplice, deve per forza valere $d(A) > \lambda$, dal momento che, per definizione, entrambi i nodi di un insieme di soli due elementi devono avere grado maggiore o uguale a λ .

Sia ora G' il grafo ottenuto da G contraendo A in un unico nodo. G' è naturalmente λ -arcoconnesso, ed ha $n' = n - |A| + 1$ nodi. Sia poi Q l'insieme dei nodi di A di grado maggiore di λ : allora, per la minimalità di A , non ci sono tagli minimi *propri* contenuti in A , e perciò vale

$$C(G) = C(G') \cup \{ \delta(\{v\}), v \in A \setminus Q \},$$

quindi:

$$|C(G)| = |C(G')| + |A \setminus Q|.$$

Inoltre, per ipotesi induttiva:

$$|C(G')| \leq \left\lfloor \frac{3n'}{2} \right\rfloor - 2.$$

Essendo quindi $|A| \geq 3$, seguono subito le disuguaglianze:

$$|C(G)| = |A \setminus Q| + |C(G')| \leq |A| + \left\lfloor \frac{3(n - |A| + 1)}{2} \right\rfloor - 2 \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2,$$

per le quali vale l'uguaglianza se e solo se $|A| = 3$ e $Q = \emptyset$.

□

Sia ora $G(V, E)$ un grafo connesso con pesi positivi sugli archi, e con $n = |V|$. Ri-formuliamo la proposizione 3.1.2 nel modo seguente, dandone poi una dimostrazione adattata al caso di grafi pesati:

Proposizione 3.1.3. *Sia $\lambda \geq 3$, dispari. Allora*

$$|C(G)| \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2.$$

Inoltre, se vale $|C(G)| = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2$, e $n \geq 4$, allora G ha un taglio minimo $\{S, \bar{S}\}$ tale che o S o \bar{S} ha esattamente 3 nodi di grado λ .

La prima parte della dimostrazione è simile a quella vista per grafi semplici, senza pesi.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n .

Come caso base, vediamo che la disuguaglianza è banalmente vera per $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

Ora, sia $n > 4$, e supponiamo che la disuguaglianza sia vera per tutti i grafi con $|V| < n$. Procediamo per casi:

- **G non ha tagli minimi propri:** esattamente come nella proposizione precedente, in questo caso $|C(G)| \leq n$, e sappiamo che $n < \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2$, per $n > 4$; dunque la disuguaglianza è soddisfatta, ma mai ad uguaglianza.
- **G ha dei tagli minimi propri:** anche qui, sia $\{A, \bar{A}\}$ un taglio minimo *proprio* tale che A abbia il minor numero di nodi possibile. Sia G' il grafo ottenuto da G contraendo A in un unico nodo. G' è λ -arcoconnesso ed ha $n' = n - |A| + 1$ nodi. Sia Q l'insieme dei nodi di A di grado maggiore di λ : allora, per la minimalità di A , non ci sono tagli minimi *propri* contenuti in A , e perciò vale:

$$C(G) = C(G') \cup \{\delta(\{v\}), v \in A \setminus Q\},$$

quindi:

$$|C(G)| = |C(G')| + |A \setminus Q|.$$

Inoltre, per ipotesi induttiva,

$$|C(G')| \leq \left\lfloor \frac{3n'}{2} \right\rfloor - 2.$$

Ora ci troviamo di fronte a due possibilità:

- caso $|A| \geq 3$: seguono subito le disuguaglianze:

$$|C(G)| = |A \setminus Q| + |C(G')| \leq |A| + \lfloor 3(n - |A| + 1)/2 \rfloor - 2 \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2,$$

per le quali vale l'uguaglianza se e solo se $|A| = 3$ e $Q = \emptyset$, come per la proposizione precedente;

- caso $|A| = 2$: essendo l'insieme A di grado dispari, esso deve avere per forza un numero dispari di nodi di grado dispari, e dunque deve avere un nodo di grado pari e maggiore di λ . Quindi Q è non vuoto. In questo caso, perciò, valgono le disuguaglianze:

$$|C(G)| = |A \setminus Q| + |C(G')| \leq 1 + \lfloor 3(n - 1)/2 \rfloor - 2 \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2.$$

Vediamo ora la seconda parte dell'enunciato, cioè mostriamo che, se vale la relazione $|C(G)| = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$ e $n \geq 4$, allora G ha un taglio minimo $\{S, \bar{S}\}$ tale che uno tra gli insiemi S e \bar{S} ha esattamente 3 nodi di grado λ . Siano intanto $\{A, \bar{A}\}$, Q e G' come nella prima parte della dimostrazione:

- **caso $|A| \geq 3$** : si trova subito che, se vale $|C(G)| = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$ e $n \geq 4$, allora $\{A, \bar{A}\}$ è il tipo di taglio cercato;
- **caso $|A| = 2$** : in questa situazione, se vale $|C(G)| = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$ e $n \geq 4$, allora significa che $|Q| = 1$. Infatti, se per assurdo $|Q| = 2$, si avrebbe

$$|C(G)| = |C(G')| = 1 + \lfloor 3(n - 1)/2 \rfloor - 2,$$

ma noi sappiamo che vale invece $|C(G')| \leq \lfloor \frac{3n'}{2} \rfloor - 2$, con $n' = n - 1$, il che porta ad un assurdo.

Possiamo quindi affermare che

$$|C(G)| = |C(G')| + 1,$$

e ciò implica che ogni taglio di G' è anche taglio di G .

Inoltre,

$$|C(G)| = 1 + |C(G')| = 1 + \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor - 2,$$

e quindi anche $C(G')$ soddisfa ad uguaglianza il bound dell'enunciato, cioè:

$$|C(G')| = \left\lfloor \frac{3(n')}{2} \right\rfloor - 2.$$

A questo punto dunque consideriamo il grafo G' : cerchiamo in esso un nuovo taglio minimo proprio $\{A, \bar{A}\}$ tale che A abbia il minor numero di nodi possibile, tenendo conto che ogni taglio di G' è anche taglio di G .

Poichè G' soddisfa ad uguaglianza il nostro bound, i casi possibili ora sono soltanto due: $|A| = 3$ oppure $|A| = 2$. Se $|A| = 3$, concludiamo subito come sopra; se $|A| = 2$, reiteriamo il procedimento, fino ad arrivare ad ottenere un grafo il cui taglio minimo proprio $\{A, \bar{A}\}$ per il quale A ha il minor numero di nodi è un taglio in cui $|A| = 3$ e ogni nodo di A ha grado λ , e possiamo quindi porre $\{S, \bar{S}\} := \{A, \bar{A}\}$.

Siamo certi di arrivare a trovare un taglio minimo di quel tipo. Se così non fosse, infatti, ciò significherebbe che l'ultimo grafo preso in considerazione, che denominiamo G^h , non ha tagli minimi con spiagge di 2 o 3 vertici. Dunque, o G^h non ha tagli minimi propri, oppure ha soltanto tagli minimi propri con spiagge con un numero di vertici maggiore o uguale a 4. Entrambi questi casi contraddicono il fatto che G^h soddisfi ad uguaglianza il bound dimostrato sopra, il che porta ad un assurdo, avendo noi appena dimostrato che, date le nostre premesse, se per G vale $|C(G)| = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$, si ha anche che $|C(G')| = \lfloor \frac{3n'}{2} \rfloor - 2$, e questo vale per ogni iterazione che compiamo.

□

Vediamo ora, con il seguente teorema, un'ultima importante stima sul numero dei tagli minimi, maggiore delle precedenti, e valida per tutti i grafi di cui ci occupiamo:

Teorema 3.1.4. *Dato un grafo qualsiasi $G(V, E)$, sia $n = |V|$. Allora*

$$|C(G)| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Prima di passare alla dimostrazione del teorema 3.1.4, prendiamo in esame alcune definizioni e lemmi che ci torneranno utili, dovuti a Nagamochi, Ibaraki [5] e a F. Kammer, H. Täubig [7].

Per prima cosa, diamo le definizioni di *partizione ordinata* e di *partizione circolare* di un grafo $G(V, E)$.

Definizione 3.2. Un insieme ordinato (V_1, V_2, \dots, V_r) si dice *partizione ordinata* di V se $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ è una partizione di V .

Definizione 3.3. Dato $C(G)$ l'insieme dei tagli minimi di G , una partizione ordinata (V_1, V_2, \dots, V_r) di V si dice *circolare* su $C(G)$ se vale:

1. $d(V_i, V_{i+1}) = \lambda/2 \ \forall i$, e $d(V_r, V_1) = \lambda/2$; in tutti gli altri casi $d(V_i, V_j) = 0$;
2. dati a, b tali che $1 \leq a < b \leq r$, $\{\cup_{i=a}^{b-1} V_i, V \setminus \cup_{i=a}^{b-1} V_i\}$ è un taglio minimo, e se $\{B, V \setminus B\}$ è un taglio minimo tale che né B né $V \setminus B$ sono di quella forma, allora o B o $V \setminus B$ è contenuto in qualche V_i .

Osservazione 2. Ricordiamo per un attimo quanto visto nel lemma 2.1.1, dove, dati due tagli minimi crossing $\{X, \overline{X}\}$ e $\{Y, \overline{Y}\}$, avevamo definito gli insiemi $V_1 = X \cap Y$, $V_2 = Y \setminus X$, $V_3 = \overline{X} \cap \overline{Y}$ e $V_4 = X \setminus Y$.

Possiamo dire che, in assenza di altri tagli minimi crossing in G oltre a $\{X, \overline{X}\}$ e $\{Y, \overline{Y}\}$, gli insiemi (V_1, V_2, V_3, V_4) definiti sopra formano una partizione circolare su $C(G)$.

Passiamo ora ai risultati che ci servono per arrivare a dimostrare il teorema 3.1.4.

Lemma 3.1.5. Sia $\{S, \overline{S}\}$ un taglio minimo in G . Allora, per ogni $T \subset S$, $T \neq \emptyset$, vale $d(T, S \setminus T) \geq \lambda/2$.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $d(T, S \setminus T) < \lambda/2$. Poiché $\{S, \overline{S}\}$ è taglio minimo, vale:

$$d(T, V \setminus S) + d(S \setminus T, V \setminus S) = \lambda.$$

Senza perdita di generalità, sia $d(T, V \setminus S) \leq \lambda/2$ (altrimenti basterebbe scambiare di ruolo T e $S \setminus T$). Allora vale:

$$d(T) = d(T, V \setminus T) = d(T, S \setminus T) + d(T, V \setminus S) < \lambda/2 + \lambda/2 = \lambda,$$

il ché contraddice il fatto che λ è l'arcoconnettività di G . □

Lemma 3.1.6. Siano $\{S_1, \overline{S_1}\}$, $\{S_2, \overline{S_2}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$ tagli minimi tali che $S_1 \subset S_2$, $T \not\subset S_2$ e $\{S_1, \overline{S_1}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$ sono crossing. Siano $A := (S_2 \setminus S_1) \setminus T$, $B := S_1 \setminus T$, $C := S_1 \cap T$ e $D := (S_2 \setminus S_1) \cap T$. Allora A, B, C, D sono tali che

$$d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = \lambda/2 \text{ e } d(A, C) = d(A, D) = d(B, D) = 0.$$

Dimostrazione. Poiché $\{S_1, \overline{S_1}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$ sono crossing, anche $\{S_2, \overline{S_2}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$ sono crossing, e dunque, per le proprietà dei tagli minimi crossing (lemma 2.1.1), si conclude subito che $d(B, C) = \lambda/2$ e $d(A, C) = d(B, D) = 0$.

Inoltre, $d(A \cup B, C \cup D) = \lambda/2$, e dunque anche $d(A, D) = 0$.

Sempre per le proprietà dei tagli minimi crossing, valgono anche le seguenti uguaglianze:

$$d(A, B) + d(B, \overline{S_2} \cap \overline{T}) = d(B, A \cup (\overline{S_2} \cap \overline{T})) = \lambda/2,$$

$$d(A, \overline{S_2} \cap \overline{T}) + d(B, \overline{S_2} \cap \overline{T}) = d(A \cup B, (\overline{S_2} \cap \overline{T})) = \lambda/2,$$

di conseguenza, $d(A, \overline{S_2} \cap \overline{T}) = d(A, B)$. Quest'ultimo valore non può essere inferiore a $\lambda/2$, altrimenti si avrebbe $d(A) < \lambda$, il che contraddirebbe il fatto che λ è l'arco-connettività del grafo; in più, tale valore non può essere nemmeno superiore a $\lambda/2$, altrimenti si avrebbe $d(B) > \lambda$, il che contraddirebbe il fatto che $\{S_1, \overline{S_1}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$ sono tagli minimi crossing. Perciò $d(A, B) = \lambda/2$. Con un simile ragionamento concludiamo infine che anche $d(C, D) = \lambda/2$. \square

Lemma 3.1.7. *Siano $\{X, \overline{X}\}$ e $\{Y, \overline{Y}\}$ due tagli minimi crossing, e si abbiano gli insiemi V_1, \dots, V_4 definiti come sopra. Per ogni taglio $\{T, \overline{T}\}$ crossing con $\{V_2, \overline{V_2}\}$, vale:*

$$d(V_1, V_2 \cap T) = \lambda/2, \quad \text{oppure} \quad d(V_1, V_2 \cap \overline{T}) = \lambda/2.$$

Lo stesso vale sostituendo a $\{V_1, V_2\}$, nell'enunciato, una qualsiasi delle coppie $\{V_2, V_3\}$, $\{V_3, V_4\}$, $\{V_4, V_1\}$.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione nei 4 casi seguenti:

- **Caso $T \subset (V_1 \cup V_2)$:** si conclude subito che $d(V_1, V_2 \cap T) = \lambda/2$, per il lemma 3.1.6;
- **Caso $T \cap V_3 \neq \emptyset$:** poiché $\{Y, \overline{Y}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$ sono crossing, vale:

$$\begin{aligned} d(V_1 \setminus T, V_1 \cap T) + d(V_1 \setminus T, V_2 \cap T) + d(V_2 \setminus T, V_1 \cap T) + d(V_2 \setminus T, V_2 \cap T) = \\ = d((V_1 \setminus T) \cup (V_2 \setminus T), (V_1 \cap T) \cup (V_2 \cap T)) = d(Y \setminus T, Y \cap T) = \lambda/2. \end{aligned}$$

Per il lemma 3.1.5, $d(V_2 \setminus T, V_2 \cap T) \geq \lambda/2$, segue quindi che

$$d(V_1 \setminus T, V_1 \cap T) = d(V_1 \setminus T, V_2 \cap T) = d(V_2 \setminus T, V_1 \cap T) = 0.$$

Inoltre, $d(V_1 \setminus T, V_1 \cap T) = 0$ implica che $V_1 \cap T = \emptyset$ oppure $V_1 \setminus T = \emptyset$. Abbiamo quindi due situazioni possibili:

- se $V_1 \cap T = \emptyset$, allora $d(V_1, V_2 \cap T) = d(V_1 \setminus T, V_2 \cap T) = 0$ e quindi $d(V_1, V_2 \setminus T) = \lambda/2$;
 - se $V_1 \setminus T = \emptyset$, allora $d(V_2 \setminus T, V_1) = d(V_2 \setminus T, V_1 \cap T) = 0$ e quindi $d(V_1, V_2 \cap T) = \lambda/2$;
- **Caso $T \not\subset (V_1 \cup V_2)$, $T \cap V_3 = \emptyset$ e $(V_1 \cup V_4) \subset T$:** ricordando che $d(V_2, V_4) = 0$, diciamo che vale, per il lemma 3.1.5:

$$d(V_1, T \cap V_2) = d(V_1 \cup V_4, T \cap V_2) = d(V_1 \cup V_4, T \setminus (V_1 \cup V_4)) \geq \lambda/2.$$

Poiché $d(V_1, V_2) = \lambda/2$ per ipotesi, concludiamo che $d(V_1, T \cap V_2) = \lambda/2$;

- **Caso** $T \not\subset (V_1 \cup V_2)$, $T \cap V_3 = \emptyset$ e $(V_1 \cup V_4) \not\subset T$: poiché $\{V_1 \cup V_4, \overline{V_1 \cup V_4}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$ sono crossing, possiamo concludere che vale:

$$d(V_1, T \cap V_2) = d(V_1 \cup V_4, T \cap V_2) = d(V_1 \cup V_4, T \setminus (V_1 \cup V_4)) = \lambda/2.$$

□

Lemma 3.1.8. *Dati due tagli minimi crossing qualsiasi $\{X, \overline{X}\}$ e $\{Y, \overline{Y}\}$ e gli insiemi V_1, \dots, V_4 definiti come sopra, esistono esattamente due tagli minimi disgiunti $\{S_2, \overline{S_2}\}$ e $\{S_4, \overline{S_4}\}$, con $S_2 \subseteq V_2$ e $S_4 \subseteq V_4$, e tali che $d(V_1, S_2) = d(V_1, S_4) = \lambda/2$. Lo stesso vale per ciascuno degli altri V_i , per ciascuna coppia di tagli minimi crossing in G .*

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione per assurdo. Supponiamo che esista un taglio minimo $\{T, \overline{T}\}$ crossing con $\{V_2, \overline{V_2}\}$, tale che T divide V_2 in due sottoinsiemi V_2', V_2'' , tali che $d(V_1, V_2'), d(V_1, V_2'') \geq 0$. Ciò è in contraddizione con il lemma 3.1.7. Esiste quindi un solo taglio minimo $\{Z, \overline{Z}\}$, con $Z \subset V_2$ tale che $d(V_1, Z) = \lambda/2$.

□

Teorema 3.1.9. *Se in G esistono (almeno) due tagli minimi crossing $\{X, \overline{X}\}$ e $\{Y, \overline{Y}\}$, allora G ha una partizione circolare $\{U_1, \dots, U_k\}$ tale che ognuno degli insiemi V_1, \dots, V_4 definiti sopra può essere scritto come $\bigcup_{i=a}^{b-1} U_i$ per qualche a, b opportuni.*

Dimostrazione. Per cominciare, introduciamo la seguente notazione: data $S = \{S_1, \dots, S_k\}$ una collezione di insiemi, e dati $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{0, 1\}^k$, definiamo:

$$\mathcal{F}_{S_1, \dots, S_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} = \left(\bigcap_{i=1 \dots k, \alpha_i=1} S_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1 \dots k, \alpha_i=0} \overline{S_i} \right),$$

$$\mathcal{F}(S) = \{\mathcal{F}_{S_1, \dots, S_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}, \text{ al variare di } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{0, 1\}^k\} \setminus \emptyset.$$

Dati i due tagli minimi crossing $\{X, \overline{X}\}$ e $\{Y, \overline{Y}\}$, prendiamo come insieme di partenza il seguente:

$$\Lambda = \{V_1, \dots, V_4\},$$

e operiamo in questo modo: ogni volta che ci sono due tagli minimi crossing $\{S, \overline{S}\}$ e $\{T, \overline{T}\}$, tali che $S \in \Lambda$ e $T \notin \Lambda$, aggiungiamo T all'insieme Λ . Una volta terminato, Λ rimane un insieme di tagli minimi.

Una partizione dei vertici del grafo è data dagli insiemi contenuti in $\mathcal{F}(\Lambda)$. Per il lemma 3.1.8, per ogni $X \in \mathcal{F}(\Lambda)$ esistono esattamente due insiemi $Y, Z \in \mathcal{F}(\Lambda)$ tali che $d(X, Y) = d(X, Z) = \lambda/2$; per tutti gli altri $S \in \mathcal{F}(\Lambda)$ vale $d(X, S) = 0$.

Quest'ultima affermazione è una generalizzazione del lemma 3.1.8: infatti, ognuno degli insiemi $X \in \mathcal{F}(\Lambda)$ può essere considerato come una delle quattro sponde generate da due tagli minimi crossing, per come è stato costruito Λ , e può quindi essere utilizzato al posto di V_1 nell'enunciato del suddetto lemma.

Possiamo a questo punto ordinare gli insiemi di $\mathcal{F}(\Lambda)$ in modo tale che valgano entrambi i punti della definizione di partizione circolare. Abbiamo trovato così una partizione circolare $\mathcal{F}(\Lambda)$ che soddisfa la proprietà richiesta.

□

Arriviamo quindi finalmente alla dimostrazione del teorema 3.1.4:

Dimostrazione. (Teorema 3.1.4)

Dimostriamo, per induzione su $|V| = n$, solo il caso in cui in G esiste (almeno) una coppia di tagli minimi crossing (il caso contrario è stato dimostrato in precedenza, con la proposizione 3.1.1, la quale offre un bound minore rispetto a quello che stiamo considerando qui).

Dal teorema precedente risulta che, se in G vi sono due tagli minimi crossing $\{X, \overline{X}\}$ e $\{Y, \overline{Y}\}$, allora in G esiste una partizione circolare (V_1, \dots, V_k) .

Se ognuno dei V_i è costituito da un solo vertice, allora $k = n$, e G è un ciclo con n vertici, perciò ogni coppia di archi di G costituisce un taglio minimo, e quindi ci sono $\binom{n}{2}$ tagli minimi.

In generale, sia $|V_i| = n_i$. Per ipotesi induttiva, in ogni sottografo G_i che ha V_i come insieme di vertici ci sono al massimo $\binom{n_i}{2}$ tagli minimi, e $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Gli unici tagli minimi di G sono quelli contenuti in ogni G_i e quelli dati dalla partizione circolare: possiamo quindi dire che:

$$|C(G)| \leq \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2} + \binom{k}{2}.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2} + \binom{k}{2} &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i(n_i - 1)}{2} + \binom{k}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k n_i^2 - \sum_{i=1}^k n_i \right) + \binom{k}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k n_i^2 - n \right) + \binom{k}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^k n_i \right)^2 - 2 \sum_{i < j} n_i n_j - n \right] + \binom{k}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[n^2 - 2 \sum_{i < j} n_i n_j - n \right] + \binom{k}{2}. \end{aligned}$$

Poiché per definizione $n_i \geq 1$, e i termini di tipo $n_i n_j$ sono $\binom{k}{2}$, si ha che $\sum_{i < j} n_i n_j \geq \binom{k}{2}$, e possiamo quindi proseguire così:

$$\frac{1}{2} \left[n^2 - 2 \sum_{i < j} n_i n_j - n \right] + \binom{k}{2} \leq \frac{1}{2} \left(n^2 - 2 \binom{k}{2} - n \right) + \binom{k}{2} = \binom{n}{2}.$$

Si conclude perciò che $|C(G)| \leq \binom{n}{2}$. □

Esclusi i casi banali ($n = 1, 2$), la stima data dal teorema 3.1.4 è sempre maggiore del numero dei nodi di G , ed è inoltre la migliore possibile: infatti, nel caso particolare in cui il grafo G è un ciclo di n vertici in cui tra ogni coppia di nodi vi sono $\lambda/2$ archi paralleli, la cardinalità di $C(G)$ è esattamente $n(n - 1)/2$.

Capitolo 4

Grafi con il Massimo Numero di Tagli Minimi

Dopo aver visto e dimostrato, nel capitolo precedente, alcune limitazioni superiori al numero di tagli minimi che un grafo può avere, in relazione alla cardinalità dell'insieme dei vertici, cerchiamo ora di trovare e descrivere quali sono i grafi che hanno il massimo numero di tagli minimi, cioè quali grafi realizzano ad uguaglianza i bound sopra citati.

A tal proposito, distinguiamo nuovamente il caso in cui, dato un grafo G connesso, questo abbia arcoconnettività λ pari, dal caso in cui invece λ sia dispari, e specificando anche se G sia semplice o meno.

4.1 Caso λ Pari

Sia $G(V, E)$ un grafo connesso e semplice, cioè senza pesi sugli archi. Sia poi λ la cardinalità di un taglio minimo di G , e sia $C(G)$ l'insieme di tutti i tagli minimi di G . Supponiamo che λ sia pari.

Consideriamo qui la disuguaglianza, più generale, esposta nel teorema 3.1.4:

$$|C(G)| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Vogliamo dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 4.1.1. *Gli unici grafi in cui $|C(G)| = \binom{n}{2}$ sono i cicli.*

Dimostrazione. Prendiamo in considerazione diversi casi:

- **Non ci sono tagli minimi propri, cioè ogni taglio minimo è una stella.** In questo caso vale $|C(G)| \leq |V|$, come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 2.2.1 di Dinitz, Karzanov e Lomonosov [3].

Dunque, in questa situazione, la nostra disuguaglianza è stretta quando vale la seguente relazione:

$$|C(G)| = |V| = \frac{n(n-1)}{2},$$

cioè soltanto quando $n = 3$.

L'unico grafo senza tagli minimi propri che soddisfa ad uguaglianza il bound che stiamo considerando è quindi il ciclo di lunghezza 3. Notiamo che in questo particolare grafo non sono presenti tagli minimi crossing, perciò esso soddisfa ad uguaglianza anche il bound, più stretto, visto in proposizione 3.1.1.

- **Ogni taglio minimo proprio è crossing con almeno un altro taglio minimo proprio.** In questo caso, dal lemma 2.1.4 segue direttamente che G è necessariamente un ciclo, e il bound è quindi sempre soddisfatto ad uguaglianza.
- **Esiste un taglio minimo proprio $\{T, \bar{T}\}$ che non è crossing con nessun altro taglio minimo.** Creiamo G_1 (rispettivamente G_2) contraendo T (rispettivamente \bar{T}) in un solo nodo.

Siano $m_1 = |\bar{T}|$, $m_2 = |T|$. Il nostro bound ci dice che vale sempre:

$$|C(G)| \leq \frac{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1)}{2}.$$

Inoltre, tenendo conto che lo stesso bound vale anche per i due grafi G_1 e G_2 , possiamo scrivere:

$$|C(G)| = |C(G_1)| + |C(G_2)| - 1 \leq \frac{(m_1 + 1)m_1}{2} + \frac{(m_2 + 1)m_2}{2} - 1,$$

e vediamo subito, tramite calcoli, che vale la seguente relazione:

$$\frac{(m_1 + 1)m_1}{2} + \frac{(m_2 + 1)m_2}{2} - 1 \leq \frac{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1)}{2}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} (m_1 + 1)m_1 + (m_2 + 1)m_2 - 2 &\leq (m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1) \quad \text{se e solo se} \\ m_1^2 + m_1 + m_2^2 + m_2 - 2 &\leq m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 - m_1 - m_2, \quad \text{se e solo se} \\ m_1 + m_2 - 2 &\leq 2m_1m_2 - m_1 - m_2, \quad \text{se e solo se} \\ m_1m_2 - m_1 - m_2 + 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza è sempre valida, anzi è strettamente maggiore di zero, poiché m_1 e m_2 sono interi maggiori o uguali a 2.

Dunque vale la disuguaglianza:

$$|C(G)| < \frac{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1)}{2} = \binom{m_1 + m_2}{2},$$

e quindi il nostro bound iniziale non è mai stretto.

Possiamo perciò concludere che qui il bound iniziale non è mai soddisfatto ad uguaglianza.

□

La stessa dimostrazione vale anche se siamo in presenza di un grafo pesato, o di un multigrafo: in questo caso, gli unici grafi per i quali si verifica l'uguaglianza $|C(G)| = \binom{n}{2}$ sono quelli che possono essere ottenuti da un ciclo sostituendone ogni singolo arco con $\lambda/2$ archi paralleli.

4.2 Caso λ Dispari

Passiamo ora al caso in cui l'arcoconnettività λ dei grafi che consideriamo è dispari. Cominciamo restringendo la nostra trattazione ai soli grafi semplici, per poi allargarci a considerare grafi con pesi positivi sugli archi.

4.2.1 λ Dispari per Grafi Semplici

Sia $G(V, E)$ un grafo connesso e senza pesi sugli archi. Sia λ la cardinalità di un taglio minimo di G , e sia $C(G)$ l'insieme di tutti i tagli minimi di G . Supponiamo inoltre che λ sia dispari.

In questa situazione, per la proposizione 2.1.2, non ci sono tagli minimi crossing. Dunque prendiamo in esame, per cominciare, direttamente la disuguaglianza, fornitaci dalla proposizione 3.1.1:

$$|C(G)| \leq 2|V| - 3,$$

valida appunto quando G non ha tagli minimi crossing.

Tale bound è stretto solo per uno specifico caso banale. Infatti, supponiamo che l'arcoconnettività λ del grafo sia pari a 1. Con queste premesse, possiamo dire che i grafi con il maggior numero di tagli minimi sono chiaramente gli alberi, i quali hanno $n - 1$ tagli minimi. Dunque, in questo caso, l'unico grafo con $|C(G)| = 2n - 3 = n - 1$ è l'albero con due sole foglie. Esso è quindi l'unico esempio di grafo con $\lambda = 1$ che soddisfa la disuguaglianza presa in esame.

Supponiamo ora di avere $\lambda > 1$ (e, di conseguenza, $n \geq 4$). In questo caso, tramite il lavoro di Lehel, Maffray, Preissmann [6], abbiamo dimostrato, nella proposizione 3.1.2, la validità della seguente disuguaglianza, per grafi semplici:

$$|C(G)| \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2.$$

Il bound offertoci da tale disuguaglianza è banalmente migliore rispetto a quello descritto sopra, dato dalla proposizione 3.1.1: infatti, si vede subito che vale la relazione:

$$\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2 \leq 2|V| - 3,$$

per ogni $n \geq 1$.

Questo ci dice, in particolare, che per λ generico non esistono altri grafi semplici, oltre a quello banale costituito da due nodi e da un arco che li collega, per i quali valga $|C(G)| = 2|V| - 3$. Per quanto riguarda invece il bound di Lehel, Maffray, Preissmann [6], gli unici grafi che lo soddisfano ad uguaglianza sono quelli, con $\lambda = 3$, in cui, secondo la notazione del teorema 3.1.2, $|A| = 3$ e $Q = \emptyset$.

4.2.2 λ Dispari per Grafi Pesati

Sia $G(V, E)$ un grafo connesso e con pesi positivi sugli archi. Sia λ la cardinalità di un taglio minimo di G , e sia $C(G)$ l'insieme di tutti i tagli minimi di G , con λ dispari.

Di nuovo, in questa situazione, per la proposizione 2.1.2, non ci sono tagli minimi crossing. Dunque consideriamo la disuguaglianza, vista nella proposizione 3.1.1:

$$|C(G)| \leq 2|V| - 3,$$

valida appunto quando G non ha tagli minimi crossing.

Tale bound è stretto solo per alcuni casi banali. Infatti, supponiamo, come sopra, che l'arcoconnettività λ del grafo sia pari a 1. Di nuovo, possiamo dire che i grafi con il maggior numero di tagli minimi sono gli alberi, i quali possono avere fino a $n - 1$ tagli minimi. Dunque, in questo caso, ripetendo il ragionamento visto sopra, si ricava che gli unici grafi per i quali vale $|C(G)| = 2|V| - 3$ sono quelli con due soli nodi, e un arco di peso arbitrario che li collega.

Supponiamo ora di avere $\lambda > 1$, e passiamo a considerare la disuguaglianza, migliore della precedente:

$$|C(G)| \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2,$$

fornitaci dalla proposizione 3.1.3, dovuta a Lehel, Maffray, Preissmann [6].

Ciò che vogliamo dimostrare ora è che si possono ottenere dei grafi che soddisfano la relazione

$$|C(G)| \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2,$$

partendo da grafi più piccoli e facendo delle operazioni su di essi, in questo modo: sia v un nodo di G di grado λ . Siano p_1, p_2, p_3 dei numeri interi tali che

$$p_1 + p_2 + p_3 = \lambda.$$

Partizioniamo dunque gli archi di G incidenti a v in 3 insiemi P_1, P_2, P_3 , ciascuno di peso rispettivamente p_1, p_2, p_3 . Rimuoviamo quindi v da G , e al suo posto aggiungiamo tre nuovi nodi v_1, v_2, v_3 . Poi, per ogni arco wv che prima apparteneva

a P_i , aggiungiamo al grafo un arco wv_i , per $i = 1, 2, 3$. Aggiungiamo infine degli archi tra v_1, v_2, v_3 tali che valga $d(v_1, v_2) = p_3$, $d(v_2, v_3) = p_1$ e $d(v_3, v_1) = p_2$.

L'operazione appena descritta si dice λ -*splitting* di G in v . Parliamo invece di λ -*legal splitting* quando $p_i < \lambda/2$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

Denotiamo con $S(G)$ il grafo ottenuto da G tramite il procedimento di legal splitting.

Proposizione 4.2.1. *Sia $G(V, E)$ un grafo con pesi positivi sugli archi. Sia λ la cardinalità di un taglio minimo di G , $n = |V|$ e sia $C(G)$ l'insieme di tutti i tagli minimi di G . Consideriamo una legal splitting di G nel nodo v di grado λ . Allora $S(G)$ ha arcoconnettività λ , $n + 2$ vertici, e $|C(S(G))| = |C(G)| + 3$.*

Dimostrazione. Consideriamo un generico taglio $\{A, \bar{A}\}$ di $S(G)$.

- Supponiamo che $\{A, \bar{A}\}$ non separi tra loro i nodi v_1, v_2, v_3 , derivati dalla legal splitting di G in v . Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che questi tre vertici siano tutti contenuti in \bar{A} . Naturalmente, $A \subset V$ e $\{A, V \setminus A\}$ è un taglio di G . C'è dunque corrispondenza biunivoca tra gli archi del taglio $\{A, \bar{A}\}$ in $S(G)$ e gli archi di $\{A, V \setminus A\}$ in G . Segue quindi che $d(A, \bar{A}) \geq \lambda$, e ciò vale per ogni taglio $\{A, \bar{A}\}$ che non separa v_1, v_2, v_3 ; inoltre, ogni taglio minimo di G corrisponde a un taglio minimo di $S(G)$.
- Supponiamo che $\{A, \bar{A}\}$ separi v_1, v_2, v_3 tra loro. Senza perdita di generalità, assumiamo $v_1 \in A$ e $v_2, v_3 \in \bar{A}$. Notiamo che v_1v_2 e v_1v_3 formano $p_3 + p_2$ archi tra A e \bar{A} .

Sia $p'_1 = d(\{v_1\}, \bar{A} \setminus \{v_2, v_3\})$, e sia $p = d(A \setminus \{v_1\}, \bar{A})$. Abbiamo perciò:

$$d(A, \bar{A}) = p_2 + p_3 + p'_1 + p,$$

e i casi possibili sono i seguenti:

- Se $A = \{v_1\}$ allora chiaramente $d(A, \bar{A}) = \lambda$, poiché ogni v_i ha grado λ per costruzione di $S(G)$.
- Se $A' = A \setminus \{v_1\} \neq \emptyset$ allora $\{A', V \setminus A'\}$ è taglio di G , e vale:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq d(A', V \setminus A') = d(A', \{v_1\}) + d(A', \bar{A}) = \\ &= d(\{v_1\}, V \setminus \{v_2, v_3\}) - d(\{v_1\}, \bar{A} \setminus \{v_2, v_3\}) + d(A', \bar{A}) = \\ &= p_1 - p'_1 + p. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$p \geq \lambda - p_1 + p'_1 \geq p_2 + p_3,$$

poiché $\lambda = p_1 + p_2 + p_3$, quindi $d(A, \bar{A}) \geq 2(p_2 + p_3)$.

L'ipotesi che $p_1 < \lambda/2$ e $p_1 + p_2 + p_3 = \lambda$ implica che $p_2 + p_3 > \lambda/2$, quindi $d(A, \bar{A}) > \lambda$.

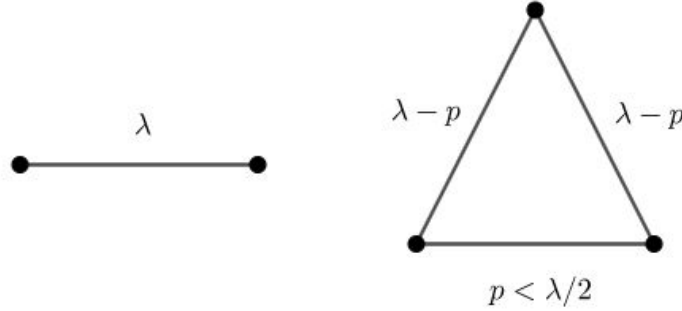


Figura 4.1: I grafi $P(\lambda)$ e $Q(\lambda, p)$.

Viste queste ultime due possibilità, possiamo dire che $\{A, \bar{A}\}$ non è taglio minimo a meno che $A = \{v_i\}$, per $i = 1, 2, 3$.

In $S(G)$ abbiamo quindi, in qualunque caso, solo 3 tagli minimi in più rispetto a G , e i nodi di $S(G)$ sono chiaramente, per costruzione, $n + 2$. Concludiamo notando che, come abbiamo appena dimostrato, per ogni taglio $\{A, \bar{A}\}$ vale $d(A, \bar{A}) \geq \lambda$, il che significa che $S(G)$, come G , ha arcoconnettività λ .

□

Per $\lambda \geq 3$, i grafi con il massimo numero di tagli minimi e con il minimo numero di nodi sono di due tipi: il primo tipo è il grafo con due soli vertici e λ archi paralleli (o un arco di peso λ) tra di essi, denotato da $P(\lambda)$ (in figura 4.1, a sinistra); il secondo tipo invece comprende ogni grafo con 3 vertici, un arco di peso $p < \lambda/2$ e due archi di peso $\lambda - p$; indichiamo questi particolari grafi con $Q(\lambda, p)$ (in figura 4.1, a destra).

Tramite la proposizione 4.2.1 possiamo arrivare a dire che, per ogni n , si possono ottenere grafi per i quali $|C(G)| = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$ a partire da $P(\lambda)$ o da $Q(\lambda, p)$, con $p < \lambda/2$, e operando una serie di legal splitting, come afferma il seguente teorema:

Teorema 4.2.2. *Dato un grafo $G(V, E)$ con un numero di vertici $n \geq 4$ e con arcoconnettività λ , questo soddisfa la relazione $|C(G)| = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$ se e solo se è ottenuto da $P(\lambda)$ o da $Q(\lambda, p)$, con $p < \lambda/2$, tramite una sequenza di legal splitting.*

Dimostrazione. Sia G un grafo tale che $|C(G)| = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 2$. Allora, per la proposizione 3.1.3, G ha un taglio minimo $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $d(v_j) = \lambda$, per $j = 1, 2, 3$. Sia $p_1 = d(v_2, v_3)$, $p_2 = d(v_3, v_1)$ e $p_3 = d(v_1, v_2)$. Poiché $d(A, \bar{A}) = \lambda$, otteniamo che $p_1 + p_2 + p_3 = \lambda$.

Se uno tra p_1, p_2, p_3 fosse maggiore di $\lambda/2$, per esempio p_1 , allora $\{v_2, v_3\}$ sarebbe un taglio di peso $2p_2 + 2p_3 = 2\lambda - 2p_1 < \lambda$, il che è assurdo.

Quindi, $p_1, p_2, p_3 < \lambda/2$, e ciò dimostra che $G = S(G')$, denotando con G' il grafo ottenuto da G contraendo l'insieme A in un solo nodo.

Abbiamo quindi un nuovo grafo G' il quale, per la proposizione 4.2.1, ha $n' = n - 2$ nodi, e per il quale vale $|C(G')| = |C(G)| - 3$.

Segue subito che anche G' soddisfa ad uguaglianza il bound sul numero dei tagli minimi descritto nella proposizione 3.1.3: infatti,

$$|C(G')| = |C(G)| - 3 = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2 - 3 = \left\lfloor \frac{3n'}{2} + 3 \right\rfloor - 2 - 3 = \left\lfloor \frac{3n'}{2} \right\rfloor - 2.$$

Possiamo quindi ripetere il ragionamento per G' , e così via. Dopo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ passi otteniamo il grafo $P(\lambda)$ o $Q(\lambda, p)$ per qualche $p < \lambda/2$.

□

Conclusioni

Concludiamo con un riepilogo dei risultati che abbiamo visto.

Per grafi $G(V, E)$ con arcoconnettività λ pari, abbiamo dimostrato che la disuguaglianza

$$|C(G)| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

è soddisfatta ad uguaglianza soltanto se siamo in presenza di un ciclo. Quindi, gli unici grafi per i quali $|C(G)| = \binom{n}{2}$ sono i cicli. Per tutti gli altri vale la disuguaglianza stretta $|C(G)| < \binom{n}{2}$.

Inoltre, ciò ci permette di affermare che, per ogni valore di n , è possibile trovare un grafo con arcoconnettività pari e con n nodi che soddisfa ad uguaglianza tale bound sulla cardinalità dei tagli minimi.

Tutto ciò vale però indipendentemente dal fatto che si considerino grafi semplici oppure multigrafi: infatti, estendendo la trattazione anche ai grafi non semplici, si arriva sempre a mostrare che gli unici grafi per i quali $|C(G)| = \binom{n}{2}$ sono i cicli, nei quali però si è sostituito ogni arco con $\lambda/2$ archi paralleli.

Abbiamo visto poi che, tra tutti i grafi $G(V, E)$ *semplici* e con arcoconnettività λ dispari, l'unico a soddisfare ad uguaglianza la relazione

$$|C(G)| \leq 2|V| - 3$$

è il caso banale dell'albero con due sole foglie.

Abbiamo quindi preso in esame un secondo bound, migliore del primo, restringendoci anche qui al caso di soli grafi semplici:

$$|C(G)| \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2,$$

che risulta però anch'esso soddisfatto ad uguaglianza solo in alcuni particolari casi banali. Possiamo quindi concludere che, escludendo tali casi banali, quest'ultimo bound è sicuramente migliorabile.

Parlando infine di grafi *pesati*, abbiamo visto che la relazione

$$|C(G)| \leq 2|V| - 3$$

è soddisfatta ad uguaglianza solo da un particolare tipo di grafi, quelli cioè con due soli nodi, e un arco di peso arbitrario che li collega.

Riprendendo invece il secondo bound

$$|C(G)| \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2,$$

sempre nel caso di grafi pesati, siamo arrivati a dimostrare che esiste un numero infinito di grafi per i quali tale disuguaglianza risulta stretta, e li si può ottenere a partire da due particolari grafi, che abbiamo denotato con $P(\lambda)$ e $Q(\lambda, p)$, compiendo una sequenza di specifiche operazioni, dette *legal splitting*.

Da quest'ultima affermazione possiamo sostenere in particolare che, per ogni valore di n della cardinalità dell'insieme dei vertici, è sempre possibile ottenere un grafo con arcoconnettività dispari e con pesi positivi sugli archi per il quale vale la relazione $|C(G)| = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2$.

Bibliografia

- [1] M. CONFORTI, Y. FAENZA: *Note del corso di Matematica Discreta*, Università degli studi di Padova, (A.A. 2010-2011).
- [2] A. FRANK: *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*, Series Editors John Ball, Dominic Welsh, 2010.
- [3] E. A. DINITS, A. V. KARZANOV, M. V LOMONOSOV: *On the structure of a family of minimal weighted cuts in a graph*, in *Studies in Discrete Optimization* (in Russian) edited by A. A. Fridman, Nauka, Moscow, 1976, pp. 290-306.
- [4] T. FLEINER, A. FRANK: *A quick proof for the cactus representation of mincuts* QP-2009-03, EGRES Quick-Proof series, www.cs.elte.hu/egres/.
- [5] H. NAGAMOCHI, T. IBARAKI: *Algorithmic Aspects of Graph Connectivity* Cambridge University Press, Cambridge 2008, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 123.
- [6] J. LEHEL, F. MAFFRAY, M. PREISSMANN: *Graphs with largest number of minimum cuts* *Discrete Applied Mathematics* 65 (1996), 387-407.
- [7] F. KAMMER, H. TÄUBIG: *Graph Connectivity*, TUM-I0422 (2004) Institute für Informatik, Technische Universität München;