

Piano

I Introduzione

II : Valori anomali aggiuntivi

II-A definizione

II-B modello garch (1,1)con alo

II-C modello garch(1,1)con avo

II_D modello generalizzato per outlier aggiuntivi

III: metodi di identificazione

A Metodo1

- descrizione
- statistica test e valore critico
- applicazione

B Metodo2

- descrizione
- valore critico e test statistico
- applicazione

IV conclusione

Referenze

Bollerslev, T. (1986). Generalised autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 51, 307–327.

Bollerslev, T., R. F. Engle, and D. B. Nelson (1994). ARCH models. In R. F. Engle and D. L. McFadden (Eds.), *Handbook of Econometrics*, Volume 4, Chapter 49, pp. 2959–3038. Amsterdam: North-Holland.

Chen, C. and L. M. Liu (1993). Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series. *Journal of the American Statistical Association* 88, 284–297.

Doornik, J. A. (2001). *Object-Oriented Matrix Programming using Ox* (4th ed.). London: Timberlake Consultants Press.

Doornik, J. A. and M. Ooms (2000). Multimodality in the GARCH regression model. mimeo, Nuffield College.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity, with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987–1007.

Franses, P. H. and D. van Dijk (2000). Outlier detection in GARCH models. Econometric Institute Report EI-9926/RV, Erasmus University Rotterdam.

Gourieroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. New York: Springer Verlag.
Hotta, L. K. and R. S. Tsay (1998). Outliers in GARCH processes. mimeo, IMECC, Brazil and University of Chicago.

Leadbetter, M. R., G. Lindgren, and H. Rootzén (1983). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Sakata, S. and H. White (1998). High breakdown point conditional dispersion estimation with application to S&P 500 daily returns volatility. *Econometrica* 66, 529–567.

Baillie, R. T. and T. Bollerslev, 1989, The message in daily exchange rates: a conditional variance tale, *Journal of Business Economic Statistics* 7, 297-305.

Bollerslev, T., R. Y. Chou and K. F. Kroner, 1992, ARCH modelling in finance: a review of the theory and empirical evidence, *Journal of Econometrics* 52, 5-59

Chen, C. and L.-M. Liu, (1993) Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series, *Journal of the American Statistical Association* 88, 284-297.

Hota, L. K. and R. S. Tsay, (1998), outliers in GARCH processes, unpublished manuscript, Graduate School of Business, University of Chicago

Abraham B. and N. Yatawara (1988). A score test for detection of time series outliers. *Journal of Time Series Analysis* 9(2), 109-119

I rendimenti di attività finanziari tipicamente mostrano volatility clustering (alternanza periodica di rendimenti alti e bassi), eccesso di curtosi, incorrelazione ma non indipendenza, autocorrelazione (persistenza) nei quadrati dei rendimenti. I modelli GARCH (generalised autoregressive conditional heteroskedasticity) Bollerslev (1986) e ARCH Engel (1982) sono stati costruiti nello scopo di modellare tali fenomeni. La stima di tali modelli e soprattutto quelli GARCH assumendo una distribuzione normale degli errori non riesce a spiegare nel loro intero le caratteristiche evidenziate, ma conduce a più valori anomali di quanto previsto.

Due diversi approcci sono stati definiti come possibile risposte a tale problema: il primo, consiste nel assumere per i residui distribuzione con code più pesante della normale ad esempio la t - student caratterizzata da una maggiore variabilità nelle code. Il secondo approccio impone di trattare i valori anomali come generati separatamente e utilizzare le variabile dummy per eliminarli.

Analizzeremo qualche metodo per identificare e manipolare i valori anomali riferendoci a serie storiche standard similmente a Chen and Lui (1993) e a modelli statistici eteroschedastici GARCH basandoci sul ipotesi che siano stati generati separatamente.

I valori anomali esistono solo rispetto ad un specifico modello statistico; e rispetto ai tipi di modelli sono state elaborate diverse tecniche per identificarli. Nei modelli statistici omoschedastici è abbastanza semplice identificarli, dato la conoscenza di un specifico intervallo in cui appartiene la varianza del fenomeno, quindi valori fuori vengono considerati anomali. Nei modelli eteroschedastici, le cose si complicano leggermente a causa dell'assenza di un noto intervallo in cui appartiene la varianza, identificare tali valori perciò necessita tecniche più elaborate di prima.

Lavoreremo sui valori anomali aggiuntivi classificati da Hotta and Tsay (1998) il quale Distingue tra valori anomali che influenzano solo la media e non la varianza, quelli che influenzano solo la varianza, e infine quelli che influenzano sia la media sia la varianza. I primi sono chiamati ALO (additive level outliers) i secondi AVO (additive volatility outliers) ed i terzi GAO (generalised additive outliers).

In seguito analizzeremo la procedura di identificazione elaborata da Doorniks and Ooms (2000) basata sul test di verosimiglianza e sull'impatto delle dummy sulla stima del modello, sia quella elaborata da Franses and Van Dijk (2000) e basata sulla regressione lineare.

La prima parte di nostro lavoro consisterà nella presentazione dei tre tipi di valori anomali, dei

modelli costruiti per modellarli e la presentazione del modello generalizzato ; discuteremo anche di qualche aggiustamenti di dati adottato per semplificazione .

La seconda parte consisterà nella descrizione dei due metodi applicati ai modelli GARCH (1,1) delle loro caratteristiche dei test statistici a loro associati e della loro applicazione pratica.

La terza parte servirà per il confronto dei metodi ed infine la quarta per la conclusione.

II- VALORI ANOMALI E MODELLI STATISTICI

Talvolta l'evoluzione di un fenomeno osservata tramite una serie storica è influenzata da fattori che non fanno parte della dinamica intrinseca del fenomeno stesso, perché esogeno ad esso e/o perché si verificano in modo occasionale. Tale fattori definiti valori anomali o outliers esistono solo sia rispetto alla dinamica di base del fenomeno da modellare, sia rispetto al modello statistico scelto. Prendendo in considerazione il caso di un processo generatore indipendente e identicamente distribuito (i.i.d) e in generale quello dei processi omoschedastici, un outlier viene identificato dalla sua distanza dal resto dei dati correttamente misurata. I processi statistici omoschedastici sono caratterizzati dal fatto che tutti i singoli elementi della serie provengono dalla stessa distribuzione di probabilità (stessa dinamica intrinseca) e da una variabilità costante ed interna ad un determinato intervallo; da cui un valore viene definito anomalo se non soddisfa o sembra non soddisfare alle assunzioni precedenti.

I processi statistici eteroschedastici in generale e quelli GARCH in particolare, sono caratterizzati da una variabilità non costante e non appartenente ad un qualunque intervallo finito. Valutare se un valore appartiene o no alla dinamica di base del fenomeno oggetto di indagine diventa abbastanza problematico e richiede tecniche più elaborate. Un possibile modo di identificazione viene determinato valutando l'impatto di certe osservazione sulla serie osservata e su le sue caratteristiche.

Lavoriamo su modelli eteroschedastici GARCH e su valori anomali di tipo additivi classificati da Hotta and Tsay (1998), che hanno identificato diversi tipi di outliers additivi di cui tre principali categorie sono dati da valori che influenzano solo il livello del fenomeno, da quelli che influenzano solo la varianza e da quelli che influenzano contemporaneamente sia il livello sia la varianza del fenomeno. primi sono stati chiamati additive level outlier (ALO); i secondi additive volatility outlier (AVO) e i terzi generalised additive outlier (GAO). valori anomali di tipo ALO influenzano solo il livello del fenomeno portandolo da un livello a un altro. In generale una singola osservazione della serie osservata è influenzata, ma in modo abbastanza breve: la serie tende a tornare alla normale come se niente fosse accaduto.

I secondi sono valori la cui influenza è limitata alla varianza del fenomeno, tendono ad influenzare l'intera serie. Tale influenza è più o meno permanente e la dinamica del fenomeno viene modificata in modo duraturo nel tempo. I valori di tipo GAO possono influenzare la serie dei dati in modo breve o permanente, modificandone sia la varianza sia la media o entrambe simultaneamente.

II-A modelli garch con valori anomali additivi.

È stato dimostrato che i modelli etreschedastici GARCH costruiti da Bollerslev (1986) sono idonei alla manipolazione di serie storiche di rendimenti di attività finanziarie.

Definiamo un modello GARCH(1,1) standard con distribuzioni normali degli errori.

Come:

$$\begin{aligned}y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \quad t=1, \dots, T \\ \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \quad \varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, h_t) \\ z_t &\sim iid(0,1) \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1},\end{aligned} \tag{1}$$

dove I_{t-1} è informazione disponibile al tempo t-1.

ε_t è serie dei residui al tempo t o la nuova informazione disponibile al tempo t

h_t varianza non condizionata al tempo t.

La funzione di log-verosimiglianza è definita come :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T l(\theta) = c - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\log(h_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right] \tag{2}$$

dove $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ e c è una costante in generale nota.

L'obiettivo principale del nostro lavoro è quello di identificare e possibilmente eliminare gli outliers nelle serie storiche di rendimenti di attività finanziarie, nello scopo di evitare scorrette stime dei parametri del modello utilizzato che condurrebbe a conclusioni errate sul fenomeno in esame.

Riferendoci ai tipi di valori anomali additivi individuati e classificati da Hotta and Tsay (1998), analizziamo alcuni modelli GARCH adatti alla modellazione e manipolazione dei dati in presenza di outlier. Alcuni esempi sono descritti in seguito.

II- A Modello GARCH (1,1) con additive level outlier (AIO) .

Un modello GARCH(1,1) con un additive level outliers viene definito come

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu_t + \varepsilon_t + d_t \omega \\
 \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t}, \\
 h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad t=1, \dots, T
 \end{aligned} \tag{3}$$

d_t uguale a zero per t diverso da r (momento in cui sorge l'outlier) e $d_t = 1$ per $t = r$

la funzione di verosimiglianza è definita nello stesso modo dell'equazione (2), la sua funzione derivata viene data da :

$$\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial(\theta)} = - \sum_{t=1}^T \left[\frac{\varepsilon_t}{h_t} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t^2} (h_t - \varepsilon_t^2) \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right] \tag{4}$$

Con $\varepsilon_t = y_t - g_t \zeta - d_t \omega$ e $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \omega)$.

In presenza di verosimiglianza regolare, cioè quando la funzione di verosimiglianza è derivabile almeno tre volte con funzione derivate continue, la stima di massima verosimiglianza dei parametri definiti in θ è individuata come unica soluzione dell'equazione di verosimiglianza data da

$$\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial(\theta)} = - \sum_{t=1}^T \left[\frac{\varepsilon_t}{h_t} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t^2} (h_t - \varepsilon_t^2) \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right] = 0 \text{ e } \text{dettata dalle condizioni di primo ordine per un}$$

massimo locale .

$$\frac{\partial h_t}{\partial \omega} = -2\alpha_1 \sum_{j=1}^{t-1} \beta_1^{j-1} \varepsilon_{t-j} d_{t,j} \qquad \frac{\partial \varepsilon_t^2}{\partial \omega} = -2\varepsilon_t d_t \qquad \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \omega} = -d_t$$

La risoluzione del sistema di equazione derivante ,rispetto ai parametri definiti in θ evidenzia che la stima di massima verosimiglianza per il coefficiente ω non è unica ma dipende dai valori di ε_r ,

h_{r+1}, h_{r+2}, \dots

nello stesso modo, la funzione derivata per h_{r+1} conduce a più soluzioni per ω . soluzioni che dipendono sia dai parametri del modello sia di h_r e di $\varepsilon_{r+2}, h_{r+2}, \varepsilon_{r+3}, \dots$

quindi la funzione di verosimiglianza non è regolare ma è caratterizzata da più massimi nel nostro caso di minimi locali.

Questo tipo di fenomeno, spesso si manifesta in modo periodico sia nella volatilità sia nella funzione di log-verosimiglianza.

Doornik and Ooms (2000) dimostrano che la stima di ω che conduce $\hat{\varepsilon}_r = 0$ corrisponde ad un minimo locale invece di un massimo da cui l'uso dei test basati sul rapporto di verosimiglianza invece dei test de Wald per stimare il modello.

In questo caso, l'outlier non influenza l'intervallo nel quale evolve la varianza condizionata, ma per via dell'impatto delle variabile dummy sulle stime di massima verosimiglianza (smv) influenza i parametri del modello. Questi tipi di valori anomali in generale possono essere il risultato di una semplice correzione di mercato, di un cambiamento istituzionale o di un enorme volume di vendite in un determinato momento.

Il modello (2), è un tipico modello GARCH con valori anomali nel equazione della media, i cui valori iniziali non dipendono dai suoi parametri. Abbiamo visto che a causa del potenziale delle bimodalità nella funzione di verosimiglianza dovuta all'introduzione della variabile dummy, la stima di massima verosimiglianza di tale modello risulta abbastanza problematica.

In generale non devono mai verificarsi le bimodalità nella funzione di verosimiglianza; secondo Hotta and Tsay(1998) diventano molto probabile in presenza di outliers.

Viene dimostrato che l'introduzione della stessa variabile dummy al ritardo 1 nell'equazione della varianza risolve il problema delle bimodalità.

II-B Modello GARCH (1,1) con additive variance outlier (AVO)

Definiamo un modello GARCH(1,1) con un AVO nell'equazione della varianza

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu_t + d_t \omega + \varepsilon_t & t=1, \dots, n \\
 \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} & \varepsilon_t / \sqrt{h_t} \sim N(0, h_t^*) \\
 h_t^* &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^* & t=1, \dots, T
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

la variabile dummy definita come prima, influenza la varianza condizionata nel tempo.

Per esprimere h_t^* come funzione della varianza condizionata non influenzata, sostituiamo ε_t^* con suo valore definito in funzione dei residui non contaminati e definito come

$$\varepsilon_t^* = d_t \omega + \varepsilon_t$$

otteniamo

$$h_t^* = h_t + \beta_1 \varepsilon_1^{t-r-2} (2\omega \varepsilon_s + \omega^2) d_t$$

Per $\beta_1 < 1$ quando $\varepsilon_r = 0$ sia gli outliers positivi sia quelli negativi influenzano la varianza.

La derivata della log-verosimiglianza definita in (2) è data da:

$$\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial(\theta)} = - \sum_{t=1}^T \left[\frac{\varepsilon_t}{h_t^*} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t^{*2}} (h_t^* - \varepsilon_t^2) \frac{\partial h_t^*}{\partial \theta} \right]$$

In (4) la varianza è funzione di ε_t^* e di h_t^* , $\frac{\partial h_t^*}{\partial \omega} = 0$ quando $\frac{\partial \varepsilon_t^*}{\partial \omega} = 0$ la prima condizione

della stima di massima verosimiglianza $\hat{\varepsilon}_r = 0$ viene soddisfatta: l'introduzione della variabile dummy al ritardo 1 nell'equazione della varianza da sola risolve il problema delle bimodalità

II-c Modello GARCH(1,1) generale per gli outlier additivi (GAO)

Il modello (5) seguente viene costruito in due fase; prima introducendo nel l'equazione della varianza di un GARCH(1,1) una variabile dummy d_{t-1} al ritardo 1 e poi la stessa dummy d_t nell'equazione della media.

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + s d_{t-1} \end{aligned} \quad (5)$$

$t = 1, \dots, T$ e $\varepsilon_t / f_{t-1} \sim N(0, h_t)$

μ_t è considerata costante .

Il modello (5) è il modello generale per gli outliers additivi .permette di modellare contemporaneamente i due tipi di outliers.

Hotta and Tsay (1998) hanno dimostrato che l'apparizione delle bimodalità nella funzione di verosimiglianza è strettamente legata all'introduzione di una variabile dummy nell'equazione della media di un modello GARCH(1,1) standard. Hanno ugualmente dimostrato che il problema delle bimodalità viene risolto semplicemente con l'introduzione della stessa variabile dummy nell'equazione della varianza ma al ritardo 1 . il modello descritto in (5) soddisfa quelle condizione; la stima di massima verosimiglianza è unica e la funzione di log-verosimiglianza è regolare.

In generale, il tempo $t = r$ in cui sorge il valore anomalo non è noto; l'evidenziazione delle proprietà della funzione di verosimiglianza in presenza di outliers necessita la capacità di stimarla nei diversi modelli di valori anomali come funzione del parametro ω . Tale stima risulta molto complicata quando nei dati si sospetta la presenza di più valori anomali. Per evitare complicazioni inutile, viene consigliato di utilizzare i dati aggiustati nel modo proposto in tabella1.

Tabella1

	In volatilità	Nei residui	notazione
ALO	$\varepsilon_t^* - d_t \omega$	$\varepsilon_t^* - d_t \omega$	$l_{alo}(. / \omega)$
AVO	ε_t^*	$\varepsilon_t^* - d_t \omega$	$l_{avo}(. / \omega)$

$$\varepsilon_t^* = y_t - g_t \zeta$$

Tali aggiustamenti permettono di evitare una inutile sovrapparametrizzazione dei modelli statistici sopra definiti.

Usando la serie dei rendimenti mensili e settimanali del titolo Dow Jones rispettivamente per il periodo dal 1965 al 1999 e per il periodo dal 1982 al 1992 , stimiamo il modello GARCH(1,1) standard con intercetta nell'equazione della media e usando i dati aggiustati nel modo descritto precedentemente. Nei due casi si identifica come outlier il primo valore dopo il lunedì del 19 ottobre 1987(conosciuto come giorno di grande perdita nella storia dei mercati finanziari americani).

Considerando tale valore come anomalo,abbiamo introdotto una variabile dummy nel equazione della media e la stessa dummy nel equazione della varianza ma al ritardo 1. quindi , abbiamo stimato un modello generale per gli outliers additivi (GAO) descritto in (5)

Tabella2

Dati mensili 1982-1992

modello	Log-verosimiglianza	ω	s	e
Modello GARCH(1,1)	-333.73	-	-	-4.38
Modello GAO(1,1)	-302.91	-4.39	0.08	0
Statistica test e p.value	61.7(10 ⁻¹⁰)			

Dati settimanali 1965-1999

Modello GARCH(1,1)	-861.89	-	-	9.01
Modello GAO(1,1)	-843.32	-8.98	6.09	0
Statistica test e p.value	37.2(10 ⁻⁵)			

La tabella 2 da sia la massima log-verosimiglianza per i due modelli stimati sia i p-value dei rispettivi test di rapporto di verosimiglianza. Il test è stato condotto usando come valore critico un approssimato valore teorico e trattando il tempo del outlier (r) come non noto ma stimato dai dati .

In entrambe i due casi, il valore anomalo risulta altamente significativo.

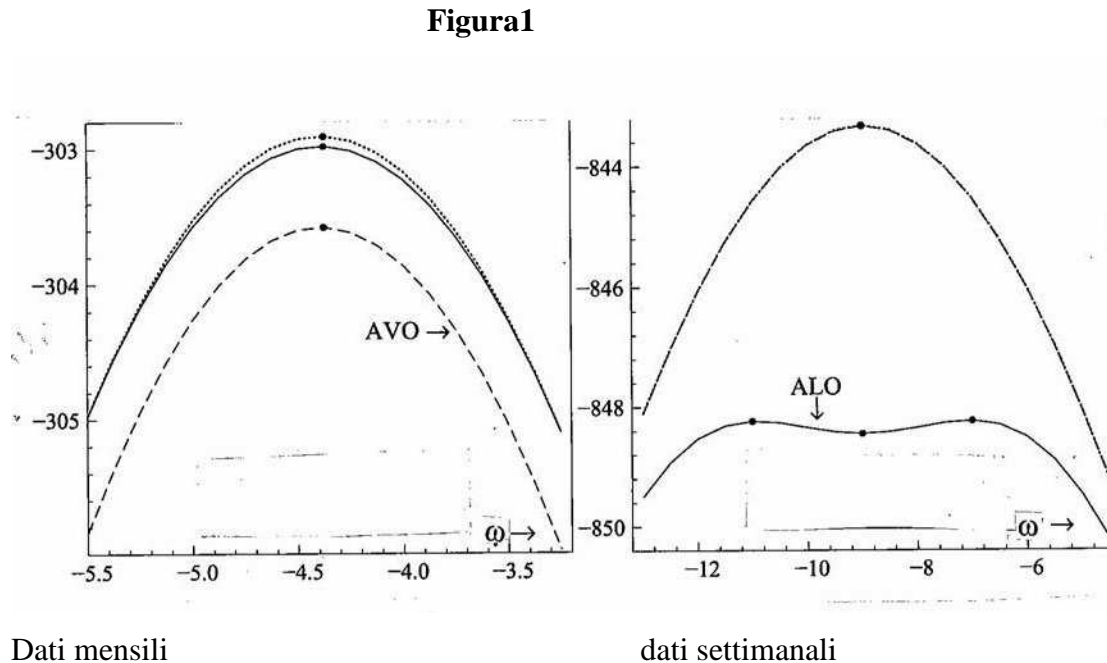
La procedura di decisione tra outlier di tipo AVO o ALO identificato a $t = r$ si basa sulle funzioni di log-verosimiglianza. Tali funzioni sono calcolate usando i dati aggiustati come specificato in tabella1 e sono funzione del parametro ω . In caso di bimodalità nella stima di massima verosimiglianza del modello con ALO , diventa impossibile decidere il tipo di valore anomalo basandoci sulla log-verosimiglianza.

Il modello generale GAO in generale ha una verosimiglianza maggiore di quella dei singoli modelli con ALO e AVO ; ma una di queste le rimane sempre molto vicina.

Nella pratica, contrariamente a tale ipotesi ; può essere che le funzioni di verosimiglianza per i modelli con ALO e con AVO risultano entrambe peggiori di quella del modello GAO .

Figura1

Funzioni di verosimiglianza dei modelli GARCH(1,1) ALO GAO AVO in funzione di ω



La figura1 da la distribuzione della funzione verosimiglianza per il modello GARCH(1,1);per i modelli con ALO AVO GAO per i rendimenti mensili e settimanali del titolo Dow Jones come funzione di ω

Tali risultati sono stati ottenuti utilizzando gli aggiustamenti proposti in tabella1.

Dalla figure1 si nota che:la verosimiglianza GAO e AVO sono quasi simile per i dati settimanali mentre quella ALO è bimodale : per i dati settimanali il modello con AVO risulta il più adatto per la manipolazione dei dati.

Per i dati mensili, la funzione di verosimiglianza del modello ALO è abbastanza simile a quella del modello GAO ed entrambe maggiore di quella AVO. quindi per i dati mensili, il modello ALO risulta il più adatto ai dati.

Una volta identificato il modello statistico più adatto alla manipolazione dei dati sospettati di contaminazione, risulta necessario definire i metodi migliori di manipolazione. Ne abbiamo identificato due, di cui la prima si basa sulla funzione di verosimiglianza e la seconda sulla la regressione lineare.

III - METODI DI IDENTIFICAZIONE DI VALORI ANOMALI

III-A Metodo 1

Basandoci sul modello generale (5) descritto sopra, ci proponiamo di seguire una procedura iterativa a 5 fase per identificare gli outliers in modelli GARCH(1,1). Tale procedure si basa sulle la funzione di verosimiglianza funzione dei parametri del modello; e considera i valori anomali come non appartenendo alla dinamica intrinseca del fenomeno oggetto di indagine ma provenendo da un'altra distribuzione di probabilità.

Consiste nella stima di un modello GARCH(1,1) senza valori anomali additivi, dalla serie dei residui standardizzati ipotizzare il valore massimo anomalo. Stimare un altro modello GARCH(1,1) ma con outlier di tipo additivo; per semplificare le cose, si usa il modello generale (5). Se il test statistico calcolato come differenza di verosimiglianza risulta minore di certo valore teorico, ci si ferma: nella serie, non ci sono valori anomali. Nel caso contrario, si stimano rispettivamente i modelli con AVO e con ALO a seconda di quale tipo di valore anomalo è supposto identificato e poi confrontando le funzioni di verosimiglianze si individua il tipo reale di tali valori anomali

III-A1 Metodo

Nella prima fase, si stima un modello GARCH(1,1) (1) senza valori anomali additivi, si determina una stima della log-verosimiglianza $\hat{\ell}_b$, la serie residui ε_t^* e una stima della volatilità h_t^* .

Nella seconda fase, dalla serie dei residui standardizzati in valore assoluto considerare il valore più grande come anomalo e considerare il suo tempo come tempo dell'outlier. stimare il modello GARCH GAO(1,1) (5) con una dummy $d_t \equiv I(t = r)$ nell'equazione della media e

$d_{t-1}; d_{t-1} \equiv I(t = r + 1)$ nel l'equazione della varianza; ed ottenere la stima dei parametri aggiuntivi

$$\hat{\omega}_{gao,r}, \hat{s}_{gao,r} \text{ e } \hat{\ell}_{gao,r}$$

Nella terza fase, si verifica l'ipotesi nulla di assenza di valore anomalo usando come test statistico la differenza delle funzioni di verosimiglianze. L'ipotesi nulla viene verificata confrontando tale differenza con un opportuno valore critico.

Se $2(\hat{\ell}_{gao,r} - \hat{\ell}_b) < c_T^\alpha$ ci si ferma, nessun valore anomalo è stato identificato.

il test statistico per la verifica dell'ipotesi nulla di assenza di valori anomali assume $c_T^\alpha \approx 5.66 + 1.88 \log T$ al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

La quarta fase soprattutto serve per individuare il tipo di outlier (nel caso in cui ne vengono individuati in precedenza).

Se dalla stima del modello GAO effettuata in fase 2, il parametro $\hat{s}_{gao,r} < 0$ allora il valore anomalo individuato è di tipo ALO ; nel caso contrario ,si stima un modello GARCH(1,1) con un ALO ponendo $\omega = \hat{\omega}_{gao,r}$, ricavare $\hat{\ell}_{alo,r}$ il modello stimato può essere considerato come un GARCH(1,1) senza variabile dummy nell'equazione della media ma con variabile dipendente corretta dall'effetto dell'outlier.

I dati sono aggiustati nel modo descritto in tabella 1

Il passo successivo consiste nella stima, di un modello GARCH(1,1) con un outlier di tipo AVO ponendo $\omega = \hat{\omega}_{gao,r}$, si calcola la log -verosimiglianza ottenere $\hat{\ell}_{avo,r}$.

La decisione del tipo di valore anomalo identificato si basa sul confronto delle funzioni di log-verosimiglianze calcolate sopra:

se $\hat{\ell}_{avo,r} > \hat{\ell}_{alo,r}$ l'outlier è di tipo AVO se non è di tipo ALO.

Il metodo viene ripetuto finché nei dati non ci siano più o sembra non esserci più outlier da identificare.

Il coefficiente ω viene stimato ad ogni fase della procedura descritta sopra ; Per semplificare le cose e soprattutto per evitare di sovrapparametrizzare il modello, abbiamo utilizzato gli aggiustamenti descritti in tabella 1

Il primo passo della quarta fase si basa sulle ipotesi che: se la condizione di primo ordine per la stima di massima verosimiglianza dettata da $\hat{\varepsilon}_r = 0$ per un modello con AVO viene soddisfatta , e se $s = \alpha_1 \omega^2$, assumendo $\alpha_1 > 0$ si vede che effettivamente \hat{s} negativo non è compatibile con un modello di tipo AVO.

III-A2- Valore critico

Per calcolare il livello di significatività associato alla statistica test calcolata precedentemente abbiamo usato un teorico valore estremo come distribuzione limite .

il tempo r del valore anomalo non è noto; Assumendo che i singoli test statistici calcolati per $r, r=1, \dots, T$ sono tra di loro indipendenti, che la selezione della dummy(valore da considerare anomalo additivo) per il calcolo del test sia avvenuta nella seconda fase della procedura sopra descritta si può dimostrare usando lo sviluppo di Taylor che tale distribuzione sotto assunzione di regolarità della funzione di verosimiglianza, tende alla distribuzione di un chi-quadro con p grado di libertà dove p corrisponde al numero di parametri in Θ .quindi , in tale

condizioni $M_t = \max_{r \in (1, \dots, T)} LR_T^{gao}(r) = \max_{r \in (1, \dots, T)} 2(\hat{\ell}_{gao} - \hat{\ell}_b)$ e una quantità asintoticamente pivotale .

la media di M_t e la distribuzione del valore critico utilizzato sopra all'aumentare di T , sono funzione lineare di $\log(T)$.

quindi il calcolo del test e del valore critico richiede solo la conoscenza del tempo T .

III-A3 “Applicazione alla serie dei rendimenti di dow jones”

prendendo in considerazione le serie annualizzate (mensili, settimanali, giornalieri) delle differenze prime dei rendimenti logaritmici del titolo Dow Jones rilevate per il periodo dal 26/05/1896 al 05/12/2001 . Dall' analisi preliminare dei dati ci risulta che è un periodo considerato nella storia dei mercati finanziari come di alta volatilità. Nel 1914, i dati mancanti risultano da fatto che la borsa di New York è stata chiusa per 4 mesi e mezzo a causa della prima guerra mondiale. L'anno 1929 caratterizzato da un'alta crescita e seguita da un crollo spettacolare:marca il periodo della più grande crisi economica e della più grande volatilità mai incontrata nella storia dei mercati finanziari degli USA . Nel ottobre 1987 è stato identificato un valore anomalo i cui effetti necessitarono poco più di 2 anni per essere riassorbiti . Un altro valore anomalo viene rilevato nel 11 settembre 2001, giorno del attacco alle torre del New York center.

I rendimenti sono stati annualizzati moltiplicandoli per la scala data in tabella 3

Tabella3

frequenze	indice	N° di osservazione	Scala
giornaliere	Prezzi di chiusura	29269	276
settimanale	A metà settimana	5422	51
mensile	Fine mese	1264	12

Abbiamo applicato il nostro metodo in modo iterativo : prima identificando un valore anomalo poi aggiustando i dati per tale outlier , questo finche nei dati non ci siano più valori anomali.

Tabella4-5

Tabella4

Dati mensili

data	ampiezza	p-outlier	p-AVO	P-ALO	Tipo
1987/10	-4.39	$3 \cdot 10^{-10}$	$S < 0$	0.795	ALO
1914/12	-3.58	0.00012	0.478	0.112	AVO
1940/05	-3.11	0.00022	$S < 0$	0.241	ALO
1937/09	-2.37	0.028	0.122	0.001	AVO
2001/09		0.129			

Dati settimanali

1914/12/16	-16.75	0	$2 \cdot 10^{-4}$	0.244	ALO
1940/05/15	-7.05	0	1	0	AVO
1899/12/13	-7.14	$3 \cdot 10^{-10}$	0.206	0.026	AVO
1987/10/21	-8.95	$3 \cdot 10^{-7}$	0.287	0.010	AVO
1926/03/03	-4.84	0.00015	1	0.002	AVO
1898/05/11	7.61	0.00020	0.030	0.960	ALO
1994/03/30	-3.39	0.00075	0.120	0.536	ALO
1998/09/02		0.070			-

Tabella5

Dati giornalieri

data	tipo	p-outlier	data	tipo	p-outlier	data	tipo	p-outlier
1899/12/08	AVO	$3^{(-4)}$	1924/02/15	AVO	0.00037	1955/09/26	AVO	0
1901/05/08	AVO	0.0008	1925/11/10	AVO	0.0015	1962/05/28	AVO	0.0039
1901/05/08	AVO	0.0208	1927/10/08	AVO	0.325	1982/08/17	AVO	0.0055
1901/09/07	AVO	0.000005	1929/10/28	AVO	0.0002	1986/09/11	AVO	0.0033
1904/12/07	AVO	0.0005	1933/03/15	ALO	0.00008	1987/10/19	ALO	0
1907/03/14	ALO	0.0000006	1934/07/26	ALO	0.0067	1989/10/13	AVO	0
1913/01/20	ALO	0.000005	1939/09/05	ALO	0.0037	1991/01/17	AVO	0.0158
1914/07/28	AVO	0.000003	1940/05/15	AVO	0.0000003	1991/11/15	ALO	0.000003
1914/07/30	ALO	0	1943/04/09	ALO	0.0004	1997/10/27	AVO	0.00002
1914/12/12	AVO	0.0012	1946/09/03	AVO	0.00034	200/04/14	ALO	0.0156
1916/12/12	AVO	0.0000001	1948/11/03	AVO	0.00004	2001/09/17	AVO	0.0002
1917/02/01	ALO	0	1950/06/26	AVO	0.00000006			

La prima parte di tabella 4 da risultati dell'applicazione della nostra procedura sui dati mensili.

La colonna chiamata p-outlier da il p-value del test di verifica del ipotesi nulla di assenza di valore anomalo. Utilizza come valore critico un approssimato valore estremo. tale test è calcolato usando il modello generale per gli outliers additivi. sono stati identificati come outliers : il crash del 1987 , inizio delle due guerre mondiale e il mese in cui il titolo decrebbe del 17%. l'ordine nella tabella è quello in cui i valori sono stati individuati. La colonna chiamata p-AVO da il p-value del test di rapporto di verosimiglianza con distribuzione Chi_ Quadro con 1 grado di libertà utilizzando modello generale GAO ristretto ad un modello solo con AVO. Quando la stima per s è significativamente diversa e inferiore a zero ;un outlier di tipo ALO è individuato.

Nello stesso modo la colonna p-ALO dà p-value per il modello generale GAO ristretto ad un modello solo con un AIO. Si vede che il valore anomalo identificato dopo la riapertura del mercato nel dicembre 1914 può essere sia di tipo ALO che di tipo AVO ma il confronto delle verosimiglianze per questi diversi modelli ci induce a pensare che è il tipo AVO

La seconda parte della tabella 4 dà i risultati della procedura applicata ai dati settimanali. Vengono identificati molti valori anomalo di tipo AVO, ad esempio quelli delle due guerre mondiali, e in particolare quello della seconda è di tipo AVO, una decrescita del 13% rilevata nella

seconda settimana di dicembre 1899 viene identificata come valore anomalo prima del crash del 1987. tranne per l'outlier identificato nel 1994, la decisione tra i due tipi non è problematica.

La tabella 5 dà i risultati per dati giornalieri, parecchi outliers sono identificati e ci sono più outliers nello stesso anno.

I risultati precedenti dimostrano che il modello generale GARCH per gli outliers additivi è un GARCH Gaussiano possibilmente contaminato da valori anomali. In generale gli outliers esistono vincolati ad un modello. Quindi, usare un falso modello può condurre a l'identificazione di parecchi valori anomali soprattutto per dati a frequenza giornaliera. un modello GARCH(1,1) con gli errori distribuiti come una t-student potrebbe essere una alternativa migliore soprattutto per l'applicazione pratica (facile da implementare nei software al contrario del metodo precedente che è abbastanza costoso e complicato) . Infatti utilizzando il modello GARCH con gli errori distribuiti come una t-student solo per i dati settimanali si identifica valori anomali. Sono stati identificati un outliers di tipo ALO nella settimana di riapertura del mercato dopo la prima guerra e un altro di tipo AVO all' inizio della seconda: corrispondono a quelli identificati precedentemente .

Tabella 6

	Garch(1,1)	Con outliers	Garch(1,1)-t(v)	Con outliers
Outlier nei dati mensili	0	4	0	
Outlier nei dati settimanali	0	7	0	2
Outlier nei dati giornalieri	0	34	0	

III-B Metodo2

Costrutto da Franses and Van Dijk(2000) , è basato sulla regressione lineare della(varianza o innovation) e contrariamente al caso precedente permette di identificare e modellare esclusivamente i valori anomali di tipo ALO.

Prima di qualunque altra causa, è importante in questa parte mettere in evidenza l'effetto di un valore anomalo non preso in considerazione sui parametri di un modello GARCH(1,1) senza nessun outlier.

Definiamo un modello GARCH(1,1) con un valore anomalo di tipo ALO nell'equazione della varianza :

$$y_t = \mu_t + d_t \omega + \varepsilon_t \quad t=1, \dots, T \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad (2)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (3)$$

$$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0,1), \quad d_t = 1 \text{ per } t=1, \dots, T \text{ e } 0 \text{ altrove}$$

Da questo modello, generiamo le serie ε_t applicando le equazioni (2) e (3) e considerando differenti valori dei parametri $(\alpha_1, \beta_1) = (0.2, 0.5), (0.2, 0.7), (0.1, 0.6), (0.1, 0.8)$.

Si assume $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \beta_1$, la varianza non condizionata di ε_t uguale 1 e gli z_t generati da un processo statistico normale ed identicamente distribuito.

Le serie ε_t sono generate per $t = -250, -249, \dots, 0, 1, \dots, T$ con $T=200$ o 500 . I necessari valori iniziali ε_{-251}^2 e h_{-251} sono posti uguali a 1. Le prime 250 osservazioni di tali serie, servono ad impedire che i parametri del modello dipendano da suoi valori iniziali. La serie y_t viene generata secondo (1). Il parametro ω , la componente ε_t sono di segno uguale; il parametro $\omega \in \{0, 3, 5, 7, 9\}$.

Per le serie y_t osservate si stima il modello GARCH usando specifici metodi basati sulla funzione di massima verosimiglianza.

La distribuzione empirica di Kernel per i parametri stimati di tale modello GARCH(1,1) evidenzia il fatto che:

all'aumentare del valore del parametro ω , la stima di α_0 diventa meno precisa; α_1 tende a zero per valori grandi di ω per $T=250$, e per $T=500$;

β_1 tende a 1 per $T=250$ e non presenta nessun andamento particolare per T grande

Figura2-7

III-B1 Metodo

Consideriamo un modello GARCH(1,1) (*) definito precedentemente come :

$$y_t = \mu_t + d_t \omega + \varepsilon_t \quad t=1, \dots, T \quad (4)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad (5) \quad (*)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (6)$$

$$\mu_t = E[y_t / I_t] = 0$$

Si ipotizza il tempo r in cui sorge il valore anomalo come sconosciuto .

$\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ e $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ da cui dipende la stazionarietà del processo nei momenti secondari del modello per ε_t e per h_t .

Sotto l'ipotesi nulla di assenza di valore anomali, otteniamo stime di massima verosimiglianza consistenti dei parametri del modello GARCH (1,1) definito sopra , con distribuzione asintotica normale degli errori.

L'equazione (6) può essere riscritta nel modo seguente :

$$h_t = \sum_{i=1}^{t-1} \beta_1^{i-1} (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2) + \beta_1^{t-1} h_1. \quad (7).$$

In generale la varianza condizionata di un processo statistico non è osservabile in pratica , ma quasi sempre risulta stimata dai dati , utilizzando diversi metodi di cui alcuni esempi sono :la varianza mobile, la varianza storica, la varianza riskmetrics...

Nel nostro caso, stimiamo la varianza come :

$$\begin{aligned} h_t^e &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1}^e \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} \beta_1^{i-1} (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-i}^2) + \beta_1^{t-1} h_1. \end{aligned} \quad (8)$$

h_1 è assunto noto e uguale alla varianza storica calcolata sull'intera serie degli y_t come

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^2 .$$

In presenza di un unico outlier , $h_1 \neq h_1^e$ e l'intera sequenza degli h_2^e, h_3^e, \dots viene influenzata dal valore anomalo a $t = r$. In pratica, tale influenza viene ignorata perchè di ordine molto piccolo

Supponiamo che nella serie osservata esiste un unico valore anomalo ad un qualunque tempo $t = r$ non noto.

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t && \text{per } t \neq r \\ y_r &= \varepsilon_r + \omega && \text{per } t = r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_t &= h_t^e && \text{per } t < r \\ h_{r+j}^e &= h_{r+j} + \sum \beta_1^{j-1} (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1^{j-1} h_1 && \text{per } j=1,2,\dots \end{aligned} \quad (9)$$

L'outlier non influenza la vera varianza condizionata h_{r+j} definita in (6) a $t = r$ ma influenza solo quella stimata h_{r+j}^e .

Definiamo: $v_t = y_t^2 - h_t^e$ e $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$; sorge naturalmente v_t riscrivendo il modello GARCH(1,1) definito in (6) come un ARMA (1,1)

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \quad (10)$$

$v_t = h_t(z_t^2 - 1)$ da cui si può vedere v_t è un processo èteroschedastico invece di essere indipendente e identicamente distribuito (i.i.d)

Usando l'equazione (9) abbiamo:

$$\begin{aligned} v_t &= v_t && t < r \\ v_t &= y_r^2 - h_r^e = (\varepsilon_r + \omega)^2 - h_r = v_r + \omega^2 + 2\omega\varepsilon_r \\ v_{r+j} &= y_{r+j}^2 - h_{r+j}^e = v_{r+j} - \beta_1^{j-1} \alpha_1 (\omega^2 + 2\omega\varepsilon_r) && \text{per } j=1,2,\dots \end{aligned}$$

per semplificazione, quanto scritto può essere interpretato come un modello di regressione degli $v_t = y_t^2 - h_t^e$. Sugli $v_t = h_t(z_t^2 - 1)$. Definiamo l'equazione di regressione come:

$$v_t = \xi x_t + v_t. \quad (11)$$

Con

$$\begin{aligned} x_t &= 0 \quad \text{per } t < r \\ x_r &= 1 \\ x_{r+j} &= -\beta_1^{j-1} \alpha_1 \quad \text{per } j=1,2,\dots \end{aligned}$$

e con

$$\xi \equiv f(\omega) = \omega^2 + 2\omega(\varepsilon_r - \omega) = -\omega^2 + 2\omega y_r \quad (12)$$

dalla stima dell'equazione (11) con i minimi quadrati ordinari, otteniamo $\hat{\xi}$

$$\hat{\xi}(r) = \left(\sum_{t=r}^T x_t^2 \right)^{-1} \left(\sum_{t=r}^T x_t u_t \right) \quad (13)$$

coerente con il fatto che $t = r$ è noto

possibili valori di ω sono calcolati come

$$\omega = y_r \pm \sqrt{y_r^2 - \xi} \quad (14)$$

ω e ε_r sono assunti di segno identico.

dalla stima di $\hat{\xi}$ si può stimare ω come:

$$\begin{aligned} & 0 \quad \text{se } y_r - \hat{\xi}(r) < 0 \\ \hat{\omega}(r) &= y_r - \sqrt{y_r^2 - \hat{\xi}(r)} \quad \text{se } y_r - \hat{\xi}(r) > 0 \quad y_r > 0 \\ & y_r + \sqrt{y_r^2 - \hat{\xi}(r)} \quad \text{se } y_r - \hat{\xi}(r) > 0 \quad y_r < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

a questo punto, una statistica test può essere calcolata come:

$$t_{\omega(r)}^{\wedge} = \frac{\hat{\omega}(r)}{\sigma_v \left(\frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} \left[\sum_{t=r}^T x_t^2 \right] \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1/2}} \quad (16)$$

σ_v rappresenta una stima della deviazione standard di v_t .

dall'equazione (12) si ottiene:

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega} = -2\omega + 2y_r + 2\omega \frac{\partial y_r}{\partial \omega} = 2y_r$$

il test in (16) confrontato ad un determinato valore critico verificherà l'ipotesi nulla di assenza di outliers a $t = r$

$$t_{\max}^{\wedge}(\omega) \equiv \max_{1 \leq r \leq T} \left| t_{\omega(r)}^{\wedge} \right| \quad (17)$$

La statistica test in (17) è plausibile perché nella realtà, il tempo $t = r$ del outlier non è noto, ha una distribuzione non standard e dipende dai parametri del modello stimato in precedenza.

Il metodo può essere riassunto nel modo seguente:

- 1) stimare un modello GARCH (1,1) definito in (1) (2) (3) per la serie osservata ottenere la stima della varianza condizionata e costruire la serie $v_t = h_t(z_t^2 - 1)$
- 2) ottenere la stima di ω per tutti gli $r : r=1, \dots, T$; usando (15) e (16) calcolare il test con (18). se il valore del test è maggiore di un certo valore limite o critico: un valore anomalo è stato identificato all'osservazione per cui il test è massimo
- 3) costruire la nuova serie aggiustando i dati affine di annullare l'effetto del valore anomalo identificato.
- 4) Tornando al punto 1, stimare un GARCH(1,1) iniziale prendendo in considerazione la nuova serie corretta dall'effetto del valore anomalo identificato.

La procedura viene ripetuta finché il valore del test calcolato non eccede più il valore detto critico cioè finché non vengono più identificati valori anomali.

L'applicazione del metodo di identificazione di valori anomali richiede un valore critico appropriato per verificare la significatività della test di verifica dell'ipotesi nulla di assenza di outlier. Contrariamente al primo metodo costruito da Chen and Lui (1993), la statistica test per il tempo $t = r$ fissato in questo caso non è caratterizzata da una distribuzione standard normale asintoticamente distribuita, ma dipende dai parametri del modello GARCH(1,1) (*) stimato. Le fasi successive sono volte all'individuazione di un corretto valore critico corrente con i parametri del modello.

La curtosi per ε_t è data da:

$$k_\varepsilon = k_z \frac{1 - \gamma_1^2}{1 - \gamma_2} \quad \text{dove } k_z \text{ rappresenta la curtosi per } z_t \quad \gamma_i = E[(\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)^i] \text{ per cui}$$

$$k_\varepsilon = 3 \frac{[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} \quad (18).$$

Risulta sempre maggiore di 3, assume un valore finito solo quando $(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$ ed aumenta quando α_1 e β_1 aumentano. Grandi valori k_ε aumentano la probabilità di osservare grande realizzazione sia di ε_t sia di y_t . tutto questo sostiene il fatto che la distribuzione del test (17) non è standard ma dipende dai parametri del modello stimato.

Tabella7

α	β	$n = 250$				$n = 500$				k_ε
		80%	90%	95%	99%	80%	90%	95%	99%	
0.10	0.50	11.75	13.57	15.53	20.82	13.23	15.25	17.28	22.25	3.10
0.10	0.60	11.51	13.59	15.49	20.71	13.38	15.34	17.60	22.36	3.12
0.10	0.70	11.90	14.04	15.96	21.17	13.66	15.72	17.94	23.42	3.18
0.10	0.80	12.02	14.11	16.23	21.99	14.21	16.69	18.96	25.03	3.35
0.15	0.50	12.16	14.26	16.71	22.64	13.96	16.38	18.91	25.87	3.25
0.15	0.60	12.31	14.44	16.88	21.70	14.33	16.75	19.43	27.17	3.34
0.15	0.70	12.73	15.21	17.83	25.15	15.12	17.83	20.52	28.56	3.58
0.15	0.80	13.64	16.63	19.33	26.52	17.48	21.02	24.72	34.78	5.57
0.20	0.50	12.85	15.24	18.04	26.04	15.19	18.26	21.34	29.84	3.56
0.20	0.60	13.25	15.97	19.02	26.78	16.21	19.52	22.88	32.37	3.86
0.20	0.70	14.30	17.31	20.76	29.91	17.85	21.67	25.37	36.10	5.18
0.25	0.50	13.97	17.27	20.59	30.02	17.03	20.73	25.03	37.22	4.20
0.25	0.60	14.69	18.38	21.90	32.29	18.56	23.03	27.64	40.57	5.46
0.30	0.50	15.53	19.32	23.15	35.70	19.50	24.31	29.62	45.51	6.00

Contiene i percentili della distribuzione della statistica test sotto l'ipotesi nulla di assenza di outlier. Sono calcolati sia per diversi valori di α_1 e β_1 sia per $T=250$ e $T=500$; e basati su 5000 repliche del modello GARCH(1,1) definito in (5) e(6)

Dalla rappresentazione dei percentili in funzione della curtosi possiamo dedurre che

Per $k_\epsilon < 4$ la reazione è quasi lineare
 $k_\epsilon > 4$ si osserva una deviazione .

la deviazione dalla relazione lineare per valori grandi di k_ϵ dipende dai parametri α_1 e β_1 del modello GARCH(1,1) (*). Perciò un valore critico potrebbe essere calcolato come:

$$\hat{PC}_{\alpha,T} = b_0 + b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 + b_3k_\epsilon + \eta_t \quad (19)$$

il valore calcolato in questo modo (19) evidenzia la dipendenza dai parametri del modello stimato.

Dalla stima dell' equazione (19) con i minimi quadrati ordinari dati in si ottiene valori consistenti dei parametri , con valore di R^2 molto vicino ad 1 (quasi perfetti) . Il valore in (19) sarebbe una buona approssimazione del valore critico .

Il valore così definito, funziona solo per $T = 250$ o $T = 500$, per i $z_t \sim N(0,1)$ e fornisce i percentili solo per specifici livelli di significatività .Quindi in pratica l' applicazione di questo valore critico è abbastanza complicata perché troppo vincolata.

Un valore alternativo e più semplice da implementare in pratica può essere calcolato con la seguente procedura detta di Bootstrap:

Prima di tutto Esaminiamo l'effetto dei parametri stimati di un modello GARCH(1,1) standard sulla distribuzione del test calcolato in (16) .I percentili in tabella8 sono determinati assumendo noti i parametri del modello. Dal confronto di tali percentili con quelli determinati assumendo che i parametri del modello siano stimati , si può concludere che tra di loro non esiste una differenza significativa.

Tabella8

α	β	$n = 250$				$n = 500$				κ_ε
		80%	90%	95%	99%	80%	90%	95%	99%	
0.10	0.50	11.84	13.73	15.77	21.09	13.37	15.36	17.44	22.66	3.10
0.10	0.60	11.88	13.82	15.92	21.50	13.55	15.55	17.69	23.32	3.12
0.10	0.70	11.95	13.91	16.13	21.80	13.77	15.91	18.14	23.92	3.18
0.10	0.80	12.27	14.46	16.60	22.38	14.43	16.86	19.11	25.47	3.35
0.15	0.50	12.21	14.51	16.82	22.68	14.15	16.67	19.27	25.68	3.25
0.15	0.60	12.54	14.72	17.12	23.32	14.61	17.25	19.79	27.03	3.34
0.15	0.70	12.85	15.24	17.89	24.89	15.36	18.34	21.03	28.64	3.58
0.15	0.80	13.60	16.51	19.78	26.71	17.51	21.07	24.74	34.09	5.57
0.20	0.50	13.02	15.58	18.28	26.14	15.52	18.50	21.70	29.90	3.56
0.20	0.60	13.42	16.08	19.04	27.33	16.30	19.68	23.26	32.75	3.86
0.20	0.70	14.11	17.34	20.74	28.54	17.99	21.97	26.34	36.81	5.18
0.25	0.50	13.95	17.10	20.49	31.54	17.21	21.20	25.67	36.22	4.20
0.25	0.60	14.77	18.19	21.81	32.81	18.80	23.13	27.86	40.00	5.46
0.30	0.50	15.22	19.00	23.43	36.23	19.58	24.38	29.70	43.53	6.00

III-B22 Procedure di Bootstrap:

la procedura di Bootstraps viene divisa in due passi principali:

Il primo passo consente di generare il campione di Bootstrap utilizzando un modello GARCH(1,1) standard i cui parametri sono stati ottenuti applicandolo alla la serie osservata.

Il secondo passo permette di calcolare la statistica test di verifica dell'ipotesi nulla di basandosi su serie generate in modo artificiale utilizzando i valori empirici dei parametri .

Si ripeta tali passi B volte e si ricava la distribuzione del test calcolato empiricamente.

Il p-value del test così determinato può essere calcolato come:

$$\hat{p} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I \left[t_{\max}^i(\hat{\omega}) > t_{\max}(\hat{\omega}) \right],$$

dove $t_{\max}^i(\hat{\omega})$ rappresenta l'i-esimo elemento del campione di Bootstrap.

Nella realtà, la vera procedura di Bootstrap non assume noti i parametri del modello (bisogna stimarli); precedentemente , abbiamo dimostrato che tra i valori critici in tabella7 e tabella8 una grande differenza non esiste; perciò quando le innovazioni hanno distribuzione normale i parametri stimati hanno un effetto limitato sulla distribuzione del test statistico calcolato in(16) .Quindi, la procedura sopra descritta può essere assunta come una buona approssimazione della vera procedura

di Bootstrap per determinare un appropriato valore critico del test di verifica dell'ipotesi nulla di assenza di outliers nei dati .

III B3 applicazione

appliciamo il metodo sopra descritto alle serie dei rendimenti settimanali dei titoli AEX DAX CAC40 Hong-Kong Singapur e New-york che circa hanno 500 osservazioni. Le osservazioni dal 1996 al 1998 servono per la previsione della volatilità di un modello GARCH(1,1) (*) prima e dopo l'identificazione e la correzione dell'outlier. Si assume la media condizionata descritta da una costante.

. Il test statistico di verifica dell'ipotesi nulla di assenza di valore anomalo viene valutato al livello di significatività del 5% e utilizza come valore critico valori determinati per 3 diverse procedure di Bootstrap : aggiustata , parametrizzata non parametrizzata

La procedura di Bootstrap parametrizzata è caratterizzata dal fatto che il campione sia determinato assumendo le innovazioni z_t distribuite in modo normale. Quella aggiustata assume che i tre valori più grandi della serie dei rendimenti standardizzati in valore assoluto non siano presi in considerazione nel costruire il campione. Solo la procedura non parametrizzata di Bootstrap utilizza tutti i residui standardizzati nella costruzione del campione.

Per tutte le serie tranne quella di Singapur ,1,2,anche 3 outliers vengono identificati. La differenza tra le tre diverse procedure è piccola. Per il titolo di Singapur la procedure di Bootstrap aggiustata non identifica nessun outlier ma le altre due ne identificano 5. parecchi valori anomali sono stati identificati attorno ad ottobre 1897(crollo dei mercati finanziari) e agosto 1990 (invasione de kowait)

Alcuni risultati sono dati in tabella9.

La stima dei parametri del modello GARCH(1,1) (*) calcolati prima e dopo l'identificazione e correzione del valore anomalo , evidenzia una assenza di differenza. Il p-value è calcolato al livello di significatività del 5% e utilizza la procedura aggiustata di bootstrap per determinare il valore critico

Questo suggerisce che diverse previsioni possono essere ottenute dalla stima dei due modelli GARCH.(1,1) che sono rispettivamente il modello GARCH(1,1) (*) e il modello GARCH(1,1) standard con variabile dipendente aggiustate dall'effetto del valore anomalo. La stima della curtosi e della simmetria nei nelle due diversi casi ci mostra che anche i residui del primo modello tendono alla normale dopo la correzione del valore anomalo.

Tabella9

Titolo	$t_{\max}(\hat{\omega})$	NP	T	NP	$\hat{\omega}$	data
<u>Amsterdam</u>	54.40	0.046	0	0.002	-14.22	10/28/87
	29.24	0.395	0	0.004	-9.21	10/21/87
	18.21		0.008	0.062	-7.21	08/15/90
	9.85		0.434		4.42	02/17/88
<u>Frankfort</u>	45.23	0.020	0	0	-14.16	10/28/87
	13.89	0.573	0.156	0.208	-7.25	11/11/87
<u>Paris</u>	61.86	0.012	0	0	-16.07	10/28/87
	17.24	0.517	0.004	0.076	-7.60	08/15/90
	9.93		0.232		-5.12	10/21/87
<u>Hong Kong</u>	68.77	0.028	0.006	0	-26.11	10/28/87
	34.31	0.108	0.004	0.008	-15.85	06/07/89
	12.00		0.511	0.425	-8.58	08/15/94
Singapour	27.80	0.699	0.008	0	-14.27	10/14/87
	43.84		0.016	0	-15.40	10/21/87
	20.46		0.024	0.018	-9.32	08/22/90
	22.88		0	0.004	-9.51	08/08/90
	25.11		0	0.008	9.36	03/13/86
	12.22		0.377	0.354	5.59	10/24/90
<u>New york</u>	58.17	0.042	0	0	-13.18	10/21/87
	25.56	0.148	0	0.006	-7.67	10/28/87
	13.13		0.124	0.279	-5.23	08/29/90

NP p-value utilizzando Bootstrap non parametrizzato

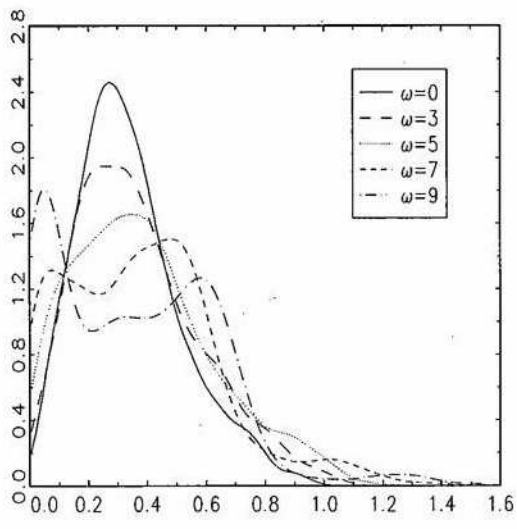
T p-value utilizzando Bootstrap aggiustato

P p-value utilizzando Bootstrap parametrizzato

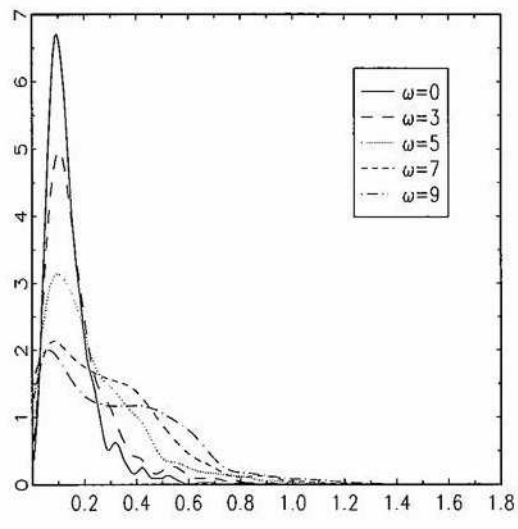
IV- CONCLUSIONE

I valori anomali in generale esistono solo in relazione ad un determinato modello statistico .nello scopo di evitare di ottenere stime distorte di tali modelli ,stime che condurrebbero a conclusioni sbagliate sul fenomeno oggetto di studio abbiamo studiato diverse procedure di identificazione e manipolazione di valori anomali di tipo additivo nelle serie storiche di rendimenti di attività finanziarie. tali procedure si basano su modelli statistici con valori anomali .

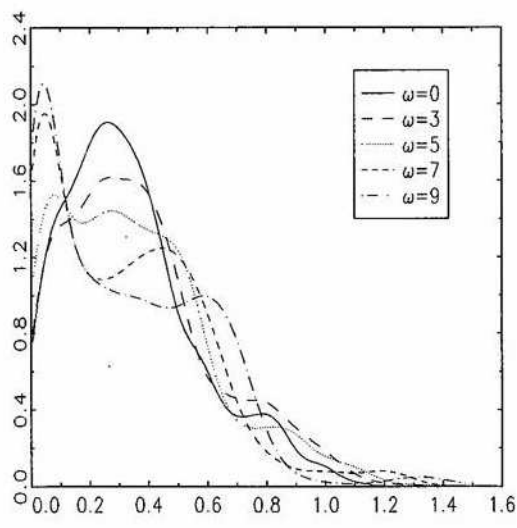
Abbiamo studiato due diverse procedure per identificare i valori anomali nelle serie storiche di attività finanziarie. La prima, utilizza la funzione di verosimiglianza su cui risulta abbastanza facile evidenziare l' impatto dei valori anomali. In pratica questo metodo funziona bene; consente semplici calcoli sia per il calcolo del test sia per la determinazione del p-value utile alla verifica dell' ipotesi nulla ,non richiede nessuna simulazione. La distribuzione del test è pivotale e asintoticamente distribuito e tende ad una distribuzione chi –quadrato(X^2), è coerente con il rispetto dei parametri del modello ed infine permette di identificare il tipo di outlier. Il secondo metodo invece richiede calcoli più complicati . il test statistico per la verifica dell' ipotesi nulla dipende dai veri valori dei parametri del modello, ed assume una distribuzione asintotica non normale e quindi richiede delle simulazione per la conduzione del test cioè per il calcolo del valore critico . questo metodo non consente di individuare il tipo di outlier e in generale non funziona in presenza di un valore anomalo di tipo AVO . Sono molto utilizzate in pratica e danno buoni risultati.



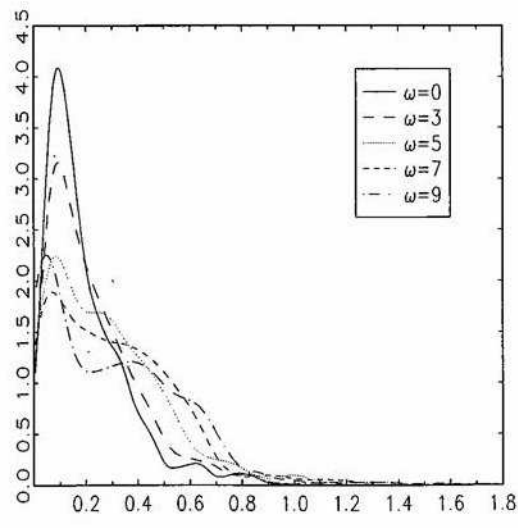
(a) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.5$



(b) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.7$

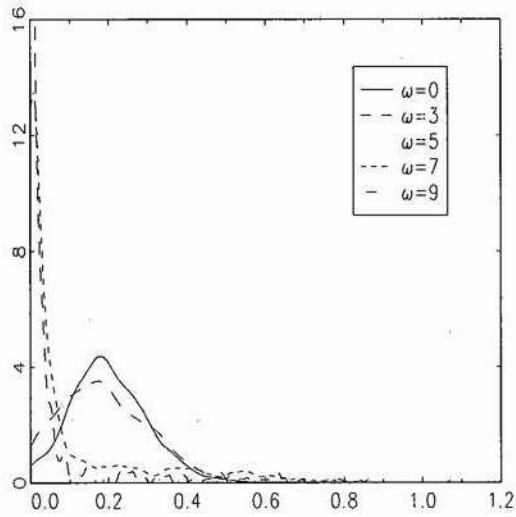


(c) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.6$

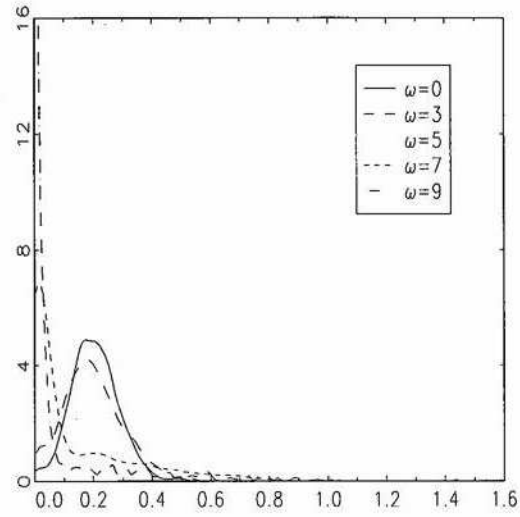


(d) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.8$

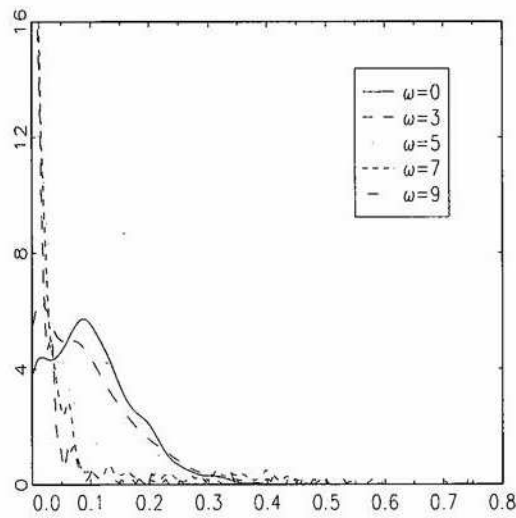
Figura2: distribuzione empirica della stima di massima verosimiglianza di α_0 con un modello GARCH(1,1) contaminato da un outlier di tipo ALO per N=250 osservazioni



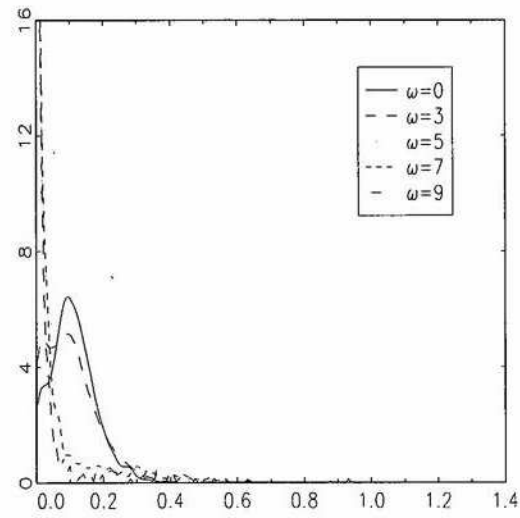
(a) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.5$



(b) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.7$

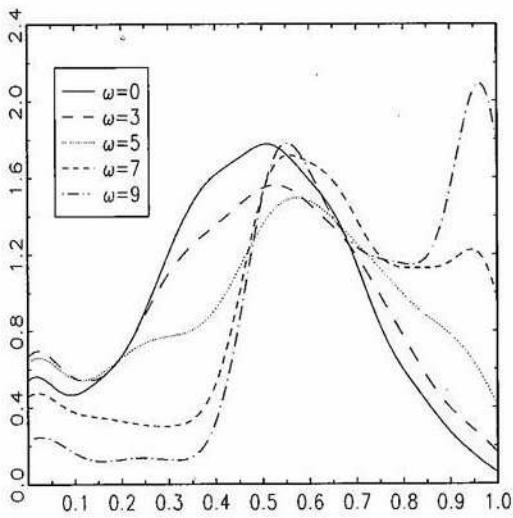


(c) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.6$

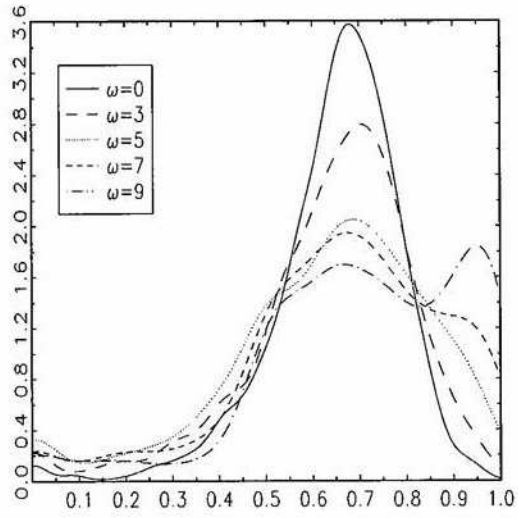


(d) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.8$

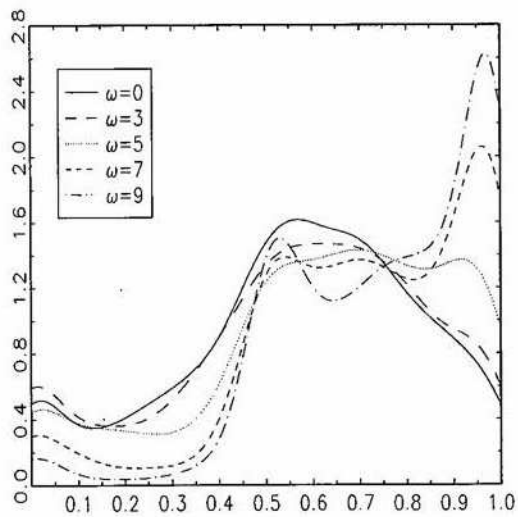
Figura3: distribuzione empirica della stima di massima verosimiglianza di α_0 con un modello GARCH(1,1) contaminato da un outlier di tipo ALO per N=500 osservazioni



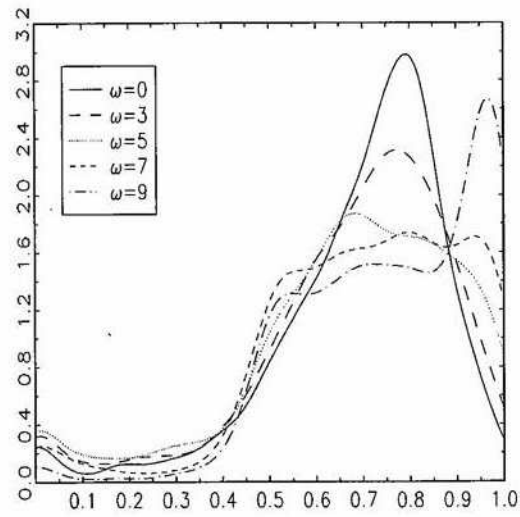
(a) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.5$



(b) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.7$

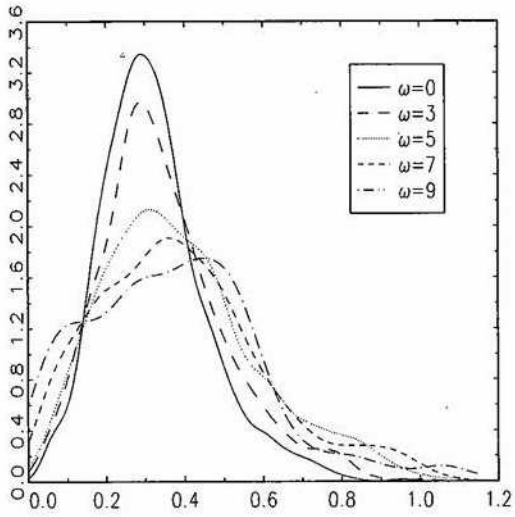


(c) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.6$

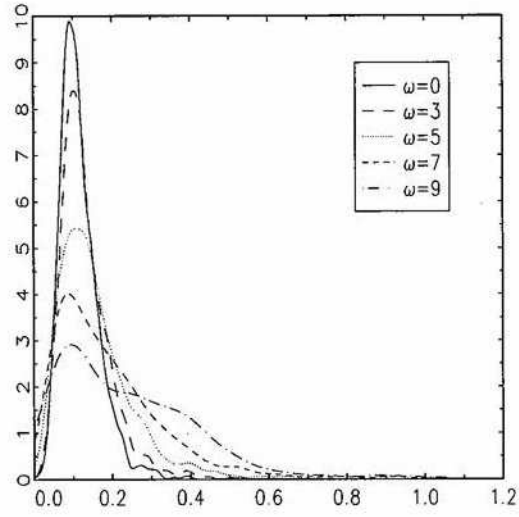


(d) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.8$

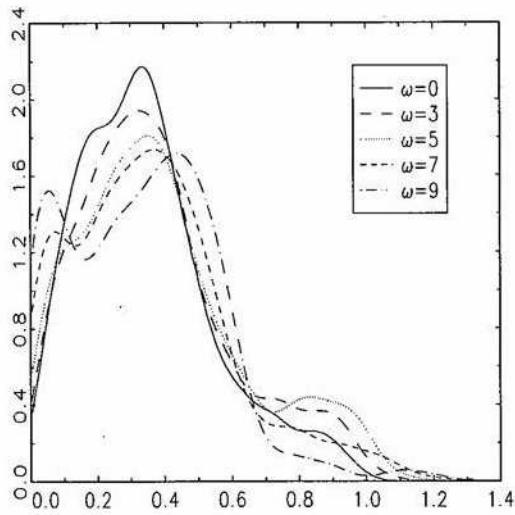
Figura4: distribuzione empirica della stima di massima verosimiglianza di α_1 con un modello GARCH(1,1) contaminato da un outlier di tipo ALO per N=250 osservazioni



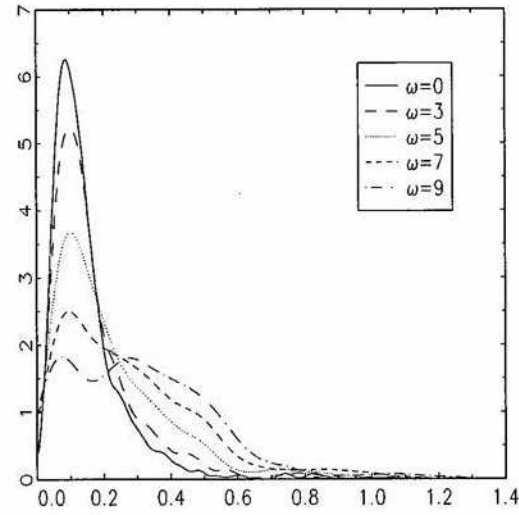
(a) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.5$



(b) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.7$

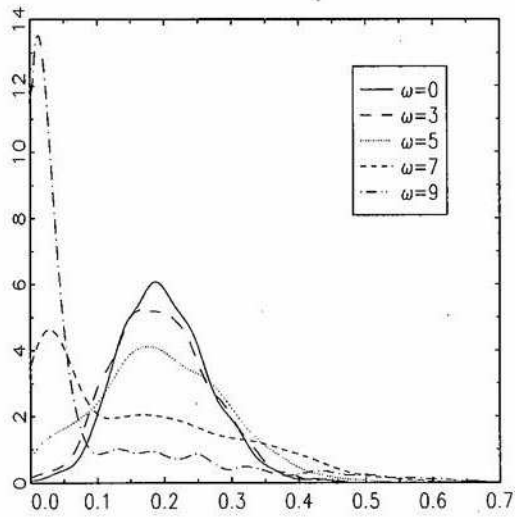


(c) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.6$

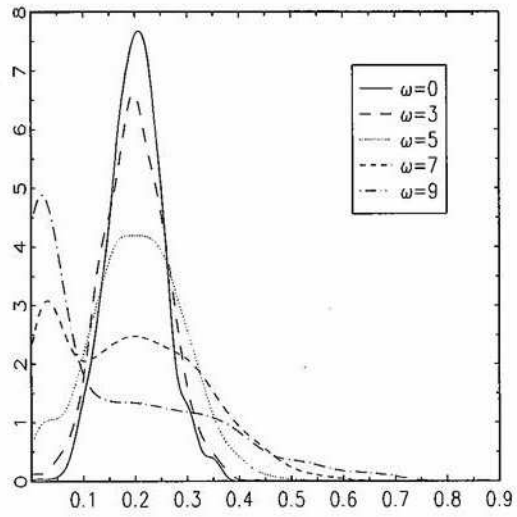


(d) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.8$

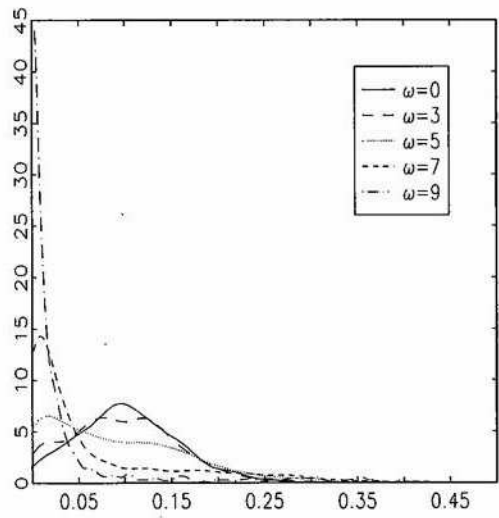
Figura5: distribuzione empirica della stima di massima verosimiglianza di α_1 con un modello GARCH(1,1) contaminato da un outlier di tipo ALO per N=500 osservazioni



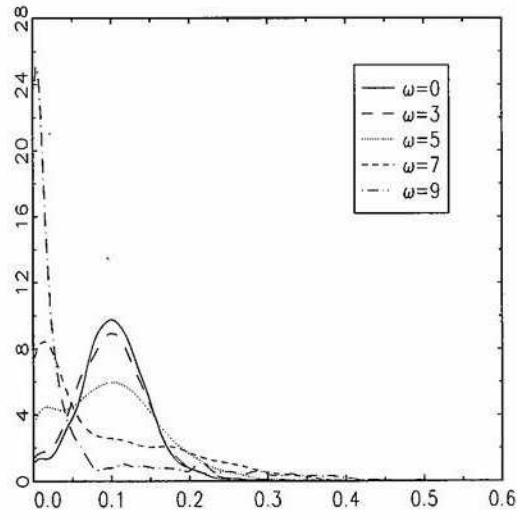
(a) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.5$



(b) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.7$

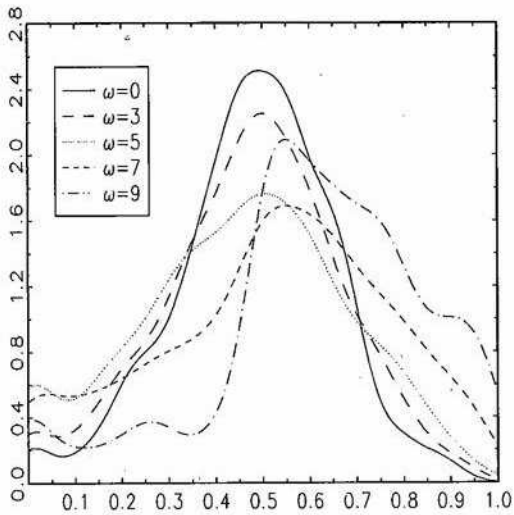


(c) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.6$

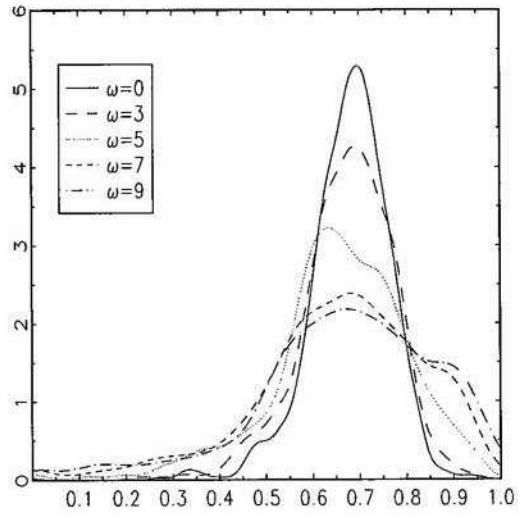


(d) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.8$

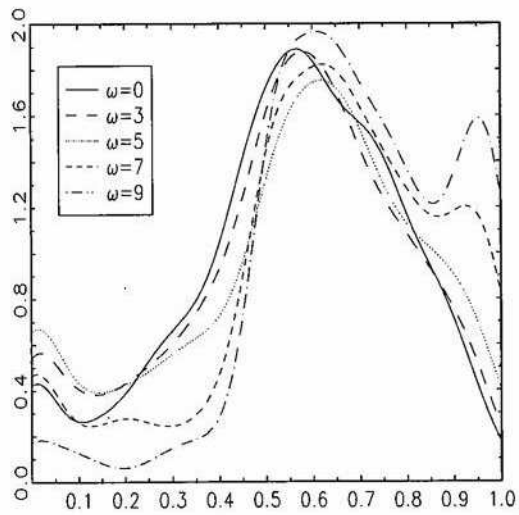
Figura6: distribuzione empirica della stima di massima verosimiglianza di β_1 con un modello GARCH(1,1) contaminato da un outlier di tipo ALO per N=250 osservazioni



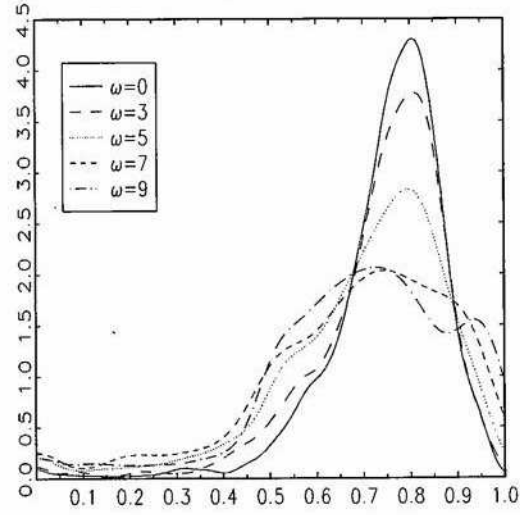
(a) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.5$



(b) $\alpha_1 = 0.2, \beta_1 = 0.7$



(c) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.6$



(d) $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.8$

Figura7: distribuzione empirica della stima di massima verosimiglianza di β_1 con un modello GARCH(1,1) contaminato da un outlier di tipo ALO per $N=500$ osservazioni