UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA, SOCIOLOGIA, PEDAGOGIA E PSICOLOGIA APPLICATA

CORSO DI LAUREA IN FILOSOFIA

L'assiomatizzazione dei numeri naturali: un'analisi logica sui fondamenti dell'aritmetica

LAUREANDO

Giuseppe Manes

Matricola 2017192

RELATORE

Ch.mo Prof. Ivano Alessandro Ciardelli

ANNO ACCADEMICO
2022/2023

Alla mia cara
nonna

Quaestiones, quae ad mathematicae fundamenta pertinent, etsi hisce temporibus a multis tractatae, satisfacienti solutione et adhuc carent.

Giuseppe Peano

Indice

Introduzione

La scienza matematica, fu dai tempi di Platone, oggetto di considerazioni di carattere filosofico. Sia da un lato ontologico che epistemologico, in tutta la storia della filosofia troviamo importanti commistioni tra lo studio della matematica e il sapere speculativo. In particolare sia il procedere delle scienze matematiche che la natura delle strutture numeriche erano oggetto di viva speculazione tra i filosofi. Con l'avvento del XIX secolo e il continuo sorgere all'interno delle scienze matematiche nuove discipline e teorie[1], gli stessi matematici sentono l'esigenza di studiare i fondamenti della loro disciplina. In questo ambito d'indagine si colloca lo sviluppo moderno della logica e la riscoperta di questa scienza come disciplina autonoma.

Tra le varie questioni che interessano lo studio dei fondamenti della matematica, sicuramente un ruolo primario viene occupato dal problema dei fondamenti dell'aritmetica e il conseguente studio della teoria dei numeri naturali. La ricerca in questo settore chiama in gioco diversi nomi importanti e vari progetti di ricerca tra la fine del XIX e inizio XX secolo. In questo lavoro di tesi cercheremo di ricostruire il dibattito sul tema prendendo un punto di vista particolare: quello fornito dal metodo assiomatico.

L'assiomatizzazione dei numeri naturali è, infatti, fin dagli albori della ricerca dei fondamenti uno dei temi in gioco e fornisce una chiave d'indagine privilegiata per lo studio, sia da un punto di vista storico-filosofico che logico. La teoria dei numeri naturali, in particolar modo, risulta essere alla base del problema della fondazione aritmetica e la caratterizzazione della sua struttura è stata oggetto di diversi approcci. La lettura fornita dal metodo assiomatico, tuttavia, ci permette di trarre considerazioni interessanti da un punto di vista logico, siccome attraver-

[1]Tra le questioni che richiamano il problema dei fondamenti all'attenzione della ricerca matematica vi sono di certo il sorgere delle geometrie non euclidee e gli studi svolti in ambito analitico. Per maggiori informazioni su questi temi citiamo (Boyer et al., 1976: 605-656).

so l'assiomatizzazione diretta dei numeri naturali possiamo evitare di far capo ad altre teorie al fine di caratterizzarne la struttura in questione. Inoltre, si fa presente che ad oggi l'interezza delle teorie matematiche è presentata in modo assiomatico e quindi analizzando questo approccio, anche se nello specifico dello studio della scienza aritmetica, riusciamo a cogliere delle considerazioni epistemologiche generali riguardanti l'interezza delle scienze matematiche.

Nel lavoro presenteremo risultati di natura logica e speculativa, sia abbracciando il terreno teorico che metateorico, al fine di dare un'analisi complessiva della struttura teorica dell'aritmetica. Da un punto di vista teorico chiameremo in causa alcuni importanti risultati e mostreremo come il problema dei fondamenti sia riducibile alla caratterizzazione dei naturali. Procedendo su questo tracciato si analizzeranno come alcune importanti teorie, quali la teoria logicista e degli insiemi, tentano di fondare i naturali. In seguito si approderà allo studio del metodo assiomatico, fornendo prima una caratterizzazione storico-filosofica di questo approccio fondazionale, chiamando in causa anche il cosiddetto Programma di Hilbert, e in seguito analizzando in particolare l'assiomatizzazione dell'aritmetica. Nello studio delle teorie assiomatiche dei numeri naturali, studieremo sia la teoria degli assiomi di Penao al primo che al secondo ordine, cercando di capire le differenze tra queste due strutture teoriche.

Per approfondire la nostra indagine proseguiremo analizzando metateoricamente e in seguito filosoficamente tali strutture. Su un piano metateorico presenteremo importanti risultati, quali i Teoremi di Löwenhwim-Skolem e i Teoremi di Incompletezza di Gödel. Questi offrono spunto per l'approfondimento di importanti questioni in ambito logico, in particolari in settori quali la completezza, la categoricità, la consistenza e la decidibilità della teoria aritmetica. Di questi non si analizzeranno le dimostrazioni ma si daranno comunque gli strumenti teorici essenziali per la comprensione del loro funzionamento delle loro conseguenze. Dopo lo studio in questo ambito approderemo alle considerazioni filosofiche sulle teorie matematiche. Analizzeremo da un lato epistemologico e ontologico sia i vari approcci adottati per lo studio dei fondamenti, sia lo studio delle strutture numeriche. In seguito forniremo una trattazione più specifica dello statuto filosofico delle teorie assiomatiche dei naturali studiando sia cosa comporta lo studio della teoria nei diversi ordini, delineando anche il dibattito su quale assiomatizzazione sia da adottare, sia quale sia la caratterizzazione logica delle proposizioni aritmetiche e matematiche in generale. In quest'ultima analisi giocheranno un ruolo primario anche i risultati metateorici presentati in precedenza.

Gli argomenti usati richiameranno nozioni base di logica, insiemistica e talvolta analisi matematica e algebra, per le quai verrà sempre presentata una definizione completa al fine di permettere facilmente la fruizione del testo a qualsiasi lettore. Per quanto riguarda risultati che andrebbero dimostrati se ne segnalerà per i risultati principali la struttura generale della dimostrazione senza entrare nello specifico, se in questa troviamo risultati essenziali che occorrono per la nostra presentazione. In caso contrario si indicherà dove è possibile trovarne una trattazione esaustiva con dettaglio della dimostrazione.

1

La scienza aritmetica e i suoi oggetti

1.1 La fondazione dell'aritmetica

La matematica per secoli è stata definita come la scienza dei numeri e delle forme, e quindi divisa in due branche fondamentali: l'aritmetica e la geometria. Tuttavia queste due branche erano estremamente diverse tra loro. Mentre la geometria da sempre ha utilizzato lo sviluppo di un metodo di indagine basato su assiomi, l'aritmetica per secoli ha continuato la sua indagine in un modo cosiddetto intuitivo. Questa sua mancanza non le ha impedito, tuttavia, uno sviluppo continuo e profondo. Rimane, comunque, aperto il problema della fondazione della teoria aritmetica. Per questo motivo in questo lavoro porremo ciò alla base della trattazione cercando di delinearne gli sviluppi e cercare di ricostruire logicamente le fondazioni della teoria aritmetica.

Dobbiamo inizialmente chiederci cosa sia l'aritmetica. Si propone di adottare la seguente come definizione del termine in questione:

Definizione 1. [2] *Chiamiamo aritmetica la scienza dei numeri e delle operazioni sugli insiemi numerici.*

Sulla base di questa definizione quindi proseguiamo cercando i fondamenti alla base di questi sviluppi teorici e operando un lavoro di ricostruzione dell'impalcatura teorica alla base dell'aritmetica in chiave logica.

[2](Bukhshtab e Pechaev, 2011).

Per perseguire questo scopo, tuttavia, occorre in primis cercare l'oggetto che necessita di fondazione al fine di poter definire le altre strutture teoriche da questo derivanti. Questo oggetto sono i numeri naturali e la loro definizione e trattazione sarà alla base dei prossimi capitoli. In questo capitolo ci concentreremo su come le altre strutture numeriche possono essere definite a partire dai numeri naturali. Per poter fare questo lavoro tuttavia occorre almeno dare un'idea intuitiva su che cosa siano i numeri naturali e la definizione di insieme numerico, questi saranno i nostri strumenti fondamentali per la costruzione di tutti i tipi di numeri che andremo a trattare.

1.2 Insiemi numerici e numeri naturali

Iniziamo con il dare la definizione di operazione

Definizione 2. [3] *Dato un insieme X, definiamo operazione una funzione che associa a una coppia ordinata $(x, y) \in X$, un elemento $z \in X$.*

In base a questa definizione ricaviamo la definire un oggetto che chiameremo insieme numerico:

Definizione 3. [4] *Dato un insieme X, definiamo tale insieme un insieme numerico se in esso sono definite l'addizione e la moltiplicazione.*

Le operazioni sopra menzionate sono le operazioni base da cui si parte per definire gli insiemi numerici. L'addizione, in particolare, è un'operazione binaria che combina due numeri per produrre una somma. La moltiplicazione, invece, è un'operazione binaria che combina due numeri per produrre un prodotto. Queste hanno certe proprietà formali tra le quali annoveriamo per l'addizione associatività, commutatività e esistenza elemento neutro mentre per la moltiplicazione le stesse con l'aggiunta della distributività. In base alla definizione prendiamo in considerazione l'insieme dei numeri naturali (in simboli $\mathbb{N}$). Possiamo ora dare una craterizzazione dell'insieme per elencazione

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}$$[5].

[3](Bertsch et al., 2007: 6).

[4](*Ibid.*).

[5]Come già detto in precedenza non ci limiteremo a questa definizione e daremo più in seguito una definizione rigorosa e li tratteremo in modo più completo.

Partendo dal concetto di insieme numerico e prendendo come dati i numeri naturali nei seguenti paragrafi delineeremo metodi per la costruzione degli altri insiemi numerici.

1.3 Costruzione di $\mathbb{Z}$

Passiamo ora alla costruzione dall'insieme dei numeri interi dall'insieme dei numeri naturali. Per fare questo occorre definire l'operazione della sottrazione:

$$- : X \times X \to X, (x, y) \mapsto y + z = x.$$

L'operazione appena introdotta è essenziale per capire il perché occorre costruire l'insieme $\mathbb{Z}$. Introduciamo a questo punto il concetto di operazione interna ad un insieme:

Definizione 4. [6] *Una operazione $\oplus$ si dice interna ad un insieme X se ha per dominio $X \times X$ e per codominio X.*

Come si può facilmente dimostrare a partire dalla definizione di addizione e moltiplicazione date nel paragrafo precedente, queste risultano operazioni interne all'insieme $\mathbb{N}$. Questa cosa non vale per l'operazione di sottrazione la quale infatti risulta non totale per i naturali. Infatti essa è definita solo nel caso in cui prendiamo una coppia ordinata $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abbiamo che $n \geq m$.

Il nostro obiettivo è ora cercare di definire un insieme costruendolo a partire da $\mathbb{N}$, che abbia come operazione interna e totale la sottrazione. Per riuscire a ottenere ciò definiamo la seguente relazione:

$$(n, m) \cong (a, b) \leftrightarrow n + b = a + m.$$

Si può facilmente mostrare che la seguente relazione è una relazione di equivalenza, ovvero che ha le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Si definisce quindi a partire dalla seguente relazione il seguente insieme quoziente:

Definizione 5. [7]

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \cong .$$

[6](Acerbi e Buttazzo, 1997: 64).
[7](*Ivi.*: 103).

De finiamo a partire da questa relazione gli interi positivi e negativi rispettivamente come le classi di equivalenza $(n, 0)$ e $(0, n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ secondo la relazione di equivalenza definita.

Nell'insieme appena introdotto rimangono interne l'addizione e la moltiplicazione ma in più abbiamo anche la nuova operazione, usata per costruire l'insieme, come operazione interna. Le operazioni saranno quindi così definite:

Definizione 6. [8] *Chiamiamo rispettivamente addizione, moltiplicazione e sottrazione nell'insieme $\mathbb{Z}$ le operazioni così definite:*

$$[(n, m)] + [(a, b)] := [(n + a, m + b)],$$

$$[(n, m)] \cdot [(a, b)] := [((n \cdot a) + (m \cdot b), (n \cdot b) + (m \cdot a))],$$

$$[(n, m)] - [(a, b)] := [(n + b, m + a)].$$

1.4 Costruzione di $\mathbb{Q}$

Passiamo ora alla costruzione dall'insieme dei numeri razionali tentando di definirli sempre come insieme derivante dai naturali. Per fare questo occorre che definiamo una nuova operazione che chiameremo divisione:

$$\div : X \times X \longrightarrow X, (x, y) \mapsto z \cdot y = x.$$

Come si può facilmente notare con svariati esempi questa operazione non è interna all'insieme $\mathbb{Z}$. Vogliamo quindi costruire, come nel paragrafo precedente, a partire da questa operazione un insieme in modo che questa risulti intera ad esso.

Definiamo l'insieme di tutte le coppie ordinate $(k, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ la quale rappresenteranno un termine q, che equivale al quoziente dei due termini. Mettiamo a questo punto in relazione le coppie ordinate dato dallo stesso quoziente, come fatto prima per la definizione degli interi. La relazione sarà così definita:

$$(k, n) \cong (h, m) \leftrightarrow k \cdot m = h \cdot n.$$

[8] (*Ibid.*).

Questa relazione sarà ancora di equivalenza perché sono rispettate le proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva. A questo punto è possibile definire l'insieme di numeri razionali come insieme quoziente a partire dalla relazione sopra introdotta:

Definizione 7. [9]

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))/\cong .$$

Anche in questo insieme sono interne, come in $\mathbb{Z}$, le operazioni di sottrazione, addizione e moltiplicazione. Queste ultime operazioni possono essere così definite nel nuovo insieme appena introdotto:

Definizione 8. [10] *Chiamiamo rispettivamente addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione nell'insieme $\mathbb{Q}$ le operazioni così definite:*

$$[(k,n)] + [(h,m)] := [((k \cdot m) + (h \cdot n), n \cdot m)],$$

$$[(k,n)] \cdot [(h,m)] := [(k \cdot h, n \cdot m)],$$

$$[(k,n)] - [(h,m)] := [((k \cdot m) - (h \cdot n), n \cdot m)],$$

$$[(k,n)] \div [(h,m)] := [(k \cdot m, h \cdot n)].$$

1.5 Costruzione di $\mathbb{R}$

Arriviamo ora al problema della definizione dei numeri reali. La costruzione di questo insieme risulterà più ampia di quella degli altri insiemi siccome quest'ultimo ha alcune proprietà che elencheremo in seguito che non appartengono agli altri.

Per costruirlo partiamo dal problema derivante dall'equazione:

$$x^2 = 2.$$

Introduciamo ora questa proposizione:

Proposizione 1. [11] $\neg \exists x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2$

[9](*Ivi.*: 104).
[10](*Ibid.*).
[11](Bertsch et al., 2007: 8).

Risulta possibile dimostrare, operando per assurdo che tale proposizione risulta vera. Da ciò appare chiara l'esigenza di introdurre un nuovo insieme numerico che permetta di risolvere questa equazione. Per fare questo useremo uno dei metodi più comuni per introdurre questo insieme numerico: la costruzione tramite le sezioni di Dedekind[12]. Per farlo dobbiamo prima introdurre qualche definizione e alcune proprietà dalle quali dobbiamo partire.

Iniziamo definendo gli strumenti che useremo per la nostra costruzione

Definizione 9. [13] *Dato un insieme X totalmente ordinato e due suoi sottoinsiemi propri A e B, definiamo che (A, B) è una sezione di X se:*

- $A \cup B = X$,
- $A \cap B = \emptyset$,
- $\forall a \in A \land \forall b \in B \rightarrow a < b$.

Se prediamo come insieme di partenza l'insieme $\mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$ possiamo costituire una sezione nella quale q ha il ruolo di elemento separatore o taglio. avremo quindi una sezione (A, B) data dagli insiemi:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} | a < q\},$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} | b \geq q\}.$$

È possibile creare sezioni del genere per ogni $q \in Q$, e siccome l'elemento separatore è unico per definizione vale sempre $a < q \leq b$ o $a \leq q < b$. Dalla Proposizione 1 segue, tuttavia, è possibile creare una sezione (A, B) per cui l'elemento separatore è il valore che verifica l'equazione $x^2 = 2$. In questa sezione avremmo che:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\}.$$

Questi insiemi rispettano tutte le condizioni poste dalla Definizione 9.Tuttavia il valore che funge da elemento separatore non è un numero razionale . Torna

[12](Dedekind e a cura di Gana, 1982: 70-76).
[13](Giusti, 1983: 15).

quindi l'esigenza introdotta a inizio paragrafo di introdurre un nuovo insieme numerico.

Introduciamo quindi α che chiameremo numero irrazionale il quale risulterà completamente definito da questa sezione, la quale è pertanto determinata da α stesso. Ora cerchiamo di usare queste considerazioni e concetti di base per poter costruire i numeri reali. Prima di ogni cosa bisogna studiare la relazione tra due sezioni (A_1, A_2) e (B_1, B_2) determinate rispettivamente da α e β. Analizziamo di seguito i possibili casi:

1. Se A_1 è identico a b_1 allora A_2 è identico a B_2 è questo risulta direttamente derivante dalla definizione 9 dalla quale traiamo inoltre che $\alpha = \beta$.

2. Se A_1 non è identico a B_1 allora consideriamo che in A_1 ci sia $a_1 = b_2$ che non appartiene a B_2. Allora tutti i numeri di B_1 sono minori di a_1 e quindi $B_1 \subset A_1$. Se a_1 è l'unico elemento di A_1 non appartenente a B_1 allora si ha che ogni altro numero $a_1 \in A_1$ appartiene a B_1. Quindi per ogni elemento di B_1 si ha che questo risulta minore di $a_1 \in A_1$. Perciò risulta che $max(A_1) = a_1$ e che la sezione (A_1, A_2) è determinata dal numero $\alpha = a_1 = b_2$. Di (B_1, B_2) sappiamo che $B_1 \subset A_1$ e tutti gli elementi di B_1 sono inoltre minori di $a_1 = b_2 \in B_2$. Ogni altro elemento di B_2 è necessariamente maggiore di b_2, altrimenti gli elementi di B_2 apparterrebbero ad A_1 e quindi anche a B_1. Quindi abbiamo che $max(B_2) = b_2$ e che la sezione (B_1, B_2) è determinata dal numero $\beta = b_2 = a_1 = \alpha$. Queste sezioni *non sono essenzialmente diverse*.

3. Se in A_1 ci sono due numeri $a'_1 = b'_2$ e $a''_1 = b''_2$ non contenuti in B_1 allora di numeri così ve ne sono infiniti. Questo siccome vi sono infiniti numeri compresi fra a_1 e a_2 tutti contenuti in A_1 ma non in B_1. In questo caso diciamo che le sezioni sono *essenzialmente diverse* e che α e β sono diversi fra loro e sono in relazione nei seguenti modi: $\alpha > \beta$ o $\alpha < \beta$.

4. Se in B_1 c'è uno e un solo $b_1 = a_2$ ritroviamo una situazione speculare a quella proposta al punto 2. mentre se in B_1 ci sono due numeri diversi non contenuti in A_1 allora ritroviamo una situazione equivalente al punto 3.

Da queste considerazioni possiamo dare la definizione di numero reale

Definizione 10. [14] *Chiamiamo l'insieme dei numeri reali* $(\mathbb{R})$ *l'insieme di tutti gli elemnti separatori delle sezioni di Dedekind.*

Tale insieme risulterà perciò ben ordinato ed avrà le seguenti proprietà:

- se $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma$ allora $\alpha > \gamma$,
- se $\alpha \neq \gamma$ allora esistono infiniti β tali che $\alpha < \beta < \gamma$,

[14](Enderton, 1977: 113).

- dato un numero α allora tutti i numeri di $\mathbb{R}$ si dividono in due insiemi A_1 e A_2 i quali formano una sezione (A_1, A_2) la quale è determinata da α.

Da questa definizione è possibile dimostrare una caratteristica essenziale dei numeri reali che è quella della continuità essenziale per operare la cosiddetta aritmetizzazione della analisi, la quale verrà analizzata nei paragrafi successivi.

1.6 Funzione di immersione

Abbiamo precedentemente costruito gli insiemi numerici. Da questi insiemi possiamo costruire tutte le operazioni che fanno parte della definizione di aritmetica, introdotta all'inizio del capitolo. Ora occorre mostrare che relazione intercorre tra i vari insiemi. Vogliamo in questo paragrafo mostrare come tutti gli insiemi numerici che abbiamo costruito possano essere identificati con un sottoinsieme del successivo. Per farlo definiamo una funzione, che chiameremo immersione nel seguente modo:

Definizione 11. [15] *L'immersione è una funzione $I : X \to Y$ che preserva la struttura di X quando mappata in Y, creando un omomorfismo che conserva le strutture algebriche di X in Y.*

Se applichiamo questa definizione ai vari insiemi numerici otteniamo che:

- è possibile immergere $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ definendo una funzione di immersione che mappa gli $n \in \mathbb{N}$ nelle classi di equivalenza $(n, 0) \in \mathbb{Z}$,
- è possibile immergere $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ definendo una funzione di immersione che mappa gli $h \in \mathbb{Z}$ nelle classi di $(h, 1) \in \mathbb{Q}$,
- è possibile, infine, immergere $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ definendo una funzione di immersione che mappa i $q \in \mathbb{Q}$ nella sezione (A, B), con A insieme dei razionali minori di q e B l'insieme dei razionali maggiori o uguali di q.

Abbiamo così ottenuto una mappatura dei vari insiemi numerici dall'insieme dal quale sono stati costruiti . Ora rimane aperta tuttavia la domanda sul fondamento posta nel primo paragrafo. Abbiamo già detto che il problema sarà affrontato attraverso la trattazione della teoria dei naturali. Occorrerà adesso analizzare sia come i naturali sono stati definiti nel corso dei secoli sia come è stato analizzato il problema del fondamento e questo sarà lo scopo del prossimo capitolo.

---

[15] (Treccani, 2013).

1.7 Dagli insiemi numerici alla geometria e al calcolo infinitesimale: il problema dell'aritmetizzazione dell'analisi matematica

Possiamo ora procedere nel definire gli oggetti geometrici riconducendoli a strutture numeriche reali. Dando una serie di definizioni possiamo, quindi, studiare come il problema dei fondamenti dell'aritmetica riguardi non solo il semplice ambito che abbiamo qui definito ma tutto l'insieme delle matematiche. L'introduzione dei reali è stata, infatti, storicamente essenziale per poter ricostruire formalmente la base dell'analisi matematica, che prima della fine dell'Ottocento si era sviluppata ampiamente facendo capo a e definizioni totalmente intuitive. Un importante passo in avanti si deve a una proprietà dei numeri reali definita dall'assioma di Dedekind-Cantor per il quale:

Proposizione 2. [16] *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$. Se A è limitato superiormente allora esiste $\sup A \in \mathbb{R}$.*

Dove per $\sup A$ intendiamo il più piccolo maggiorante dell'insieme A, ossia l'elemento più piccolo rispetto al quale tutti elementi appartenenti ad A risultano minori.[17] Questa proprietà è essenziale siccome implica che presa una retta e fissati un origine e una unità di misura è possibile mettere in corrispondenza biunivoca i punti della retta e i numeri reali. Da questo ci possiamo spingere oltre e possiamo ampliare le corrispondenze biunivoche. Per iniziare prendiamo in considerazione la seguente definizione

Definizione 12. [18] *Dati $a \in A$ e $b \in B$ definiamo $(a, b) \in A \times B$ coppia ordinata se rispetta la seguente relazione*

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Tramite le coppie ordinate possiamo definire un piano $\mathbb{R}^2$ nel quale i punti saranno coppie ordinate e ancora uno spazio $\mathbb{R}^3$ nel quale i punti saranno questa volta triple ordinate. Questo tipo di piano è il famoso piano cartesiano. Questo

[16](Bertsch et al., 2007: 14).
[17](Acerbi e Buttazzo, 1997: 33, 68).
[18](Pinch, 2014).

meccanismo è espandibile fino a includere spazi $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$ nel quale avremmo serie di n elementi le quali definiranno i punti in questi spazi. Questo meccanismo mostra come partendo dai semplici numeri naturali possiamo arrivare a tutti gli elementi della geometria euclidea classica. Se prendiamo in considerazione anche gli studi sulla definizione di funzione e sugli ordini di infinito [19], possiamo ricostruire i fondamenti dell'analisi matematica. Storicamente questo processo prende il nome di aritmetizzazione dell'analisi, il quale è stato possibile proprio grazie agli studi svolti sulla definizione di numeri reali.

Come si è visto in questo capitolo possiamo arrivare a costruire i numeri reali stessi grazie all'insieme dei numeri naturali, per quali tuttavia non è stata presentata ancora una adeguata trattazione. Questo sarà l'oggetto di indagine dei prossimi capitoli al fine di dare una strutturazione generale dell'intera aritmetica.

[19]Per studi più approfonditi su questi argomenti si rimanda a (Boyer et al., 1976: 633-657).

2

I numeri naturali e il problema della fondazione

Nel precedente capitolo abbiamo presentato l'aritmetica e i suoi oggetti, operando una loro costruzione a partire da semplici concetti della teoria degli insiemi. L'unico oggetto che manca di una costruzione risulta l'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$). Questa domanda è la principale questione che occuperà il nostro lavoro in questo capitolo. Ci occuperemo di dare una ricostruzione delle teorie alla base della definizione dei numeri naturali e cercare di inserirle nel quadro più generale della trattazione dei fondamenti dell'aritmetica, ripercorrendo il grande dibattito che si è sviluppato tra fine XIX secolo e inizio XX.

2.1 La definizione logicista dei numeri naturali

Per analizzare come si definiscono i numeri naturali partiamo dal processo storico di come questi sono stati costruiti e i vari tentativi e metodi che si è usato per definirli. Per iniziare presenteremo il tentativo di definizione presentato nel programma di Frege. Nel seguente lavoro come in precedenza ci limiteremo ad analizzare le strutture formali nei loro caratteri essenziali, senza addentrarci in eventuali dimostrazioni per limitatezza di spazio.

Di notevole interesse da un punto di vista storico-filosofico il programma logicista che trova il suo principale sviluppatore in Gottlob Frege. Egli nel 1893 pubblicò il primo volume del suo famoso testo *Grundgesetze der Arithmetik*[20]. In questo testo egli affronta ampiamente il problema dei numeri naturali. Egli aveva già presentato informalmente le sue idee in un primo testo intitolato *Die Grundlagen der Arithmetik*[21], e solo 10 anni dopo formalizzata nei *Grundgesetze*.

La proposta logicista cerca di identificare i numeri con i concetti. Quindi un concetto con una 4 elementi che entrano nel suo dominio identificherà tale numero. Il numero di elementi di un concetto o insieme è detto la sua cardinalità e due concetti avranno la stessa cardinalità quando questi sono equinumerosi, ossia abbiamo una corrispondenza biunivoca tra gli oggetti che rientrano nel dominio del primo e quelli nel dominio del secondo concetto.[22]

Per definire una teoria che riesca a racchiudere i numeri naturali il punto di partenza di Frege è quello di identificare l'elemento 0, che definisce come il numero di ogni concetto vuoto. Formalmente espresso da

$$0 := \#xx \neq x.$$

In seguito deve specificare ulteriori concetti che saranno necessari per definire i numeri naturali. Il primo concetto che occorre definire è quello di successore[23]. Egli per dare questa definizione parte da due concetti F e G, i quali hanno rispettivamente come loro cardinali finiti m e n. Affinché sia possibile dire che m è il successore di n (in simboli $S(n)$) occorre che il concetto F, di cardinalità m, abbia esattamente un oggetto in più che rientri nel suo dominio rispetto a G. Quindi si vuole stabilire una relazione biunivoca (la quale verrà chiamata R) tra le G e le F eccetto una la quale sarà l'elemento in più il quale sarà dentro l'elemento F. Formalmente questo può espresso come:

$$\exists G(n = \#xG(x) \wedge \exists F(m = \#xF(x) \wedge \exists R \exists y(F(y) \wedge \forall z \forall w(R(zw)(G(z) \leftrightarrow (F(w) \wedge w \neq y))))))$$

L'elemento n ha un unico successore. Per ora l'estensione del concetto di numero naturale può essere identificata da una serie finita di passaggi applicato l'immediato successore al precedente passo, partendo da 0. Frege per risolvere la circolarità data dall'avere finiti passi senza prima avere il concetto di numero

[20](Frege et al., 2013).

[21](Frege e a cura di Mangione, 1965).

[22](Enderton, 1977: 128,137).

[23]Per indicare il successore useremo la notazione standard con $S(x)$, dove x rappresenta l'immediato successore.

naturale richiamerà in campo alcuni concetti sviluppati negli anni precedenti. Egli aveva già studiato il problema nel merito delle relazioni binarie, definendo cosa significa per un certo x essere in relazione ancestrale con un y ($R^*(xy)$). Per ottenere questo risultato egli definisce altre due nozioni ausiliari. La prima delle due è per un concetto F essere ereditario definito nel seguente modo:

$$\forall x \forall y (F(x) \rightarrow (R(xy) \rightarrow F(y))).$$

La seconda nozione è espressa tramite la seguente formula:

$$\forall z (R(xz) \rightarrow F(z)).$$[24]

Usiamo ora per queste due espressioni le abbreviazioni seguenti[25]:$\mathcal{H}xy(F(x), R(xy))$ e $Bz(R(xz), F(x))$. Ora possiamo definire la relazione ancestrale come segue:

$$\forall G(\mathcal{H}vw(G(v), R(vw)) \rightarrow (\mathcal{B}z(R(xz), G(z)) \rightarrow G(y))).$$

Questo esprime che y è nel dominio del concetto G che è ereditario e barra x. Quindi possiamo definire i concetto di numero naturale seguendo Frege come il concetto $N(x)$ come:

$$0 = x \vee S^*(0x).$$

La relazione S è quella di successore immediato come visto prima. Questa relazione è inoltre una vera è propria funzione il che consente a Frege di provare che le ancestrale di un successore è lineare:

$$\forall x \forall y \forall z ((S^*(xy) \wedge S^*(xz)) \rightarrow (y = z \vee S^*(yz) \vee S^*(zy))).$$

Questo modo di definire $N(x)$ assicura tra i vari risultati che ogni numero naturale è per un il numero stesso di applicazioni del successore e sarà anche la sua distanza da 0. Utilizzando la nozione di relazione ancestrale noi possiamo definire i passi senza chiamare in capo i numeri naturali e quindi evitare circolarità. Per fare ciò tuttavia è richiesta una formalizzazione al secondo ordine.

Grande forza della definizione che Frege fornisce per i numeri naturali e quella di riuscire a derivare in metodi puramente logici il Principio di induzione:

$$\forall F(F(0) \rightarrow (\forall x((N(x) \wedge F(x) \rightarrow F(sx) \rightarrow \forall z(N(z) \rightarrow F(z)))).$$

[24] In (Tennant, 2017) tale nozione esprime il fatto che x è barrata da F.
[25] (*Idem.*).

Da questo si ottiene la dimostrazione che ogni numero naturale ha un unico immediato successore. Da questo deriva il problema che possiamo identificare un numero che supera per cardinalità tutti gli oggetti nell'universo, allora bisogna trovare un concetto al quale appellarsi per poter definire il successore di tale numero. Per farlo Frege inventa un cosiddetto trucco: egli utilizzando $S^{*}(xn)$, ossia che il successore n di un numero x è tale che x sia identico a lui o lo preceda, ottiene che i naturali generano altri numeri della loro specie con il solo atto di contare.

2.2 Il paradosso di Russell: dalla teoria logicista alla teoria degli insiemi

Il tentativo di Frege pare riuscire a dare una copertura completa del problema riguardante la definizione dei numeri naturali, basando ogni entità matematica su un concetto. Tuttavia questo progetto viene mostrato essere contraddittorio nella sua struttura attraverso il paradosso di Russell. Tale paradosso colpisce il principio della comprensione alla base del sistema dell'aritmetica di Frege che può essere espresso da questa formula:

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \Phi(y)).$$

Il paradosso di Russell prende le mosse dalla proprietà di ogni y di non appartenere a se stesso. Da ciò si ottiene che

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \notin y).$$

Se sostituiamo la nostra x con un generico termine r otteniamo che

$$\forall y (y \in r \leftrightarrow y \notin y).$$

Essendo nello scopo della generalizzazione insistiamo con la sostituzione ottenendo

$$r \in r \leftrightarrow r \notin r.$$

e questo rende inconsistente il principio della comprensione di Frege.

Questo paradosso pone la fine del progetto fregeano e rende necessario un nuovo approccio che consenta di fondare i numeri naturali su una nuova base diversa dall'approccio logico-concettuale di Frege.

Dal crollo del programma logicista e altri problemi riguardanti le basi della scienza matematica nasce l'emergenza agli inizi del XX secolo di rifondare su nuove basi l'intera impalcatura delle scienze matematiche. Dal dibattito di questi anni nasce la teoria degli insiemi che è considerata ancora oggi una delle teorie essenziali per la fondazione della matematica. Senza addentrarci nella trattazione completa di essa, come abbiamo fatto in precedenza per il programma fregeano, esploreremo unicamente come dai concetti di questa teoria noi possiamo definire i numeri naturali.

Tuttavia dobbiamo analizzare prima di partire con la definizione come tale teoria, che presenta la sua formulazione completa all'interno del lavoro di Zermelo-Fraenknel (ZF), come quest'ultima riesca a sorpassare l'ostacolo posto dal paradosso di Russell.

Il problema che presentava la teoria logicista era rappresentato dal principio di comprensione che viene sostituito dall'assioma di separazione. Questo assioma può essere espresso nel seguente modo:

Assioma 1. [26] *Per ogni formula $\Phi(z, ...)$ con eventuali parametri diversi da y,*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \Phi(z, ...))$$

Questo assioma impedisce di formare insiemi da proprietà arbitrarie come permetteva l'assioma di comprensione, infatti per formare un nuovo insieme è necessario un insieme noto al quale si applica una condizione ben definita per selezionare un suo sottoinsieme di elementi. Al contrario la comprensione sosteneva che per ogni proprietà esiste una sua estensione.[27] Con l'aggiunta di questo assioma alla teoria degli insiemi è possibile dimostrare che il paradosso di Russell non vale all'interno della teoria. Per mostrare questo occorre studiare un risultato che implicherà la negazione del paradosso di Russell.

Il risultato in questione ottenibile all'interno di ZF è che non esiste l'insieme universale, ossia possiamo dimostrare che:

Proposizione 3. $\neg \exists A \forall z (z \in A)$

[26](Lolli, 1994: 83).

[27]Frege parla in termini di estensione concettuale ma questa terminologia è sovrapponibile a quella della teoria degli insiemi.

Questo risultato si ottiene dal fatto che se esistesse tale A, sostituitolo nella x dell'assioma di separazione, con Φ la formula $z \notin z$ si avrebbe

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \notin z)$$

è ciò porterebbe a contraddizione. Da quanto detto segue quindi che in ZF è escluso il paradosso di Russell, in simboli:

Proposizione 4. $ZF \vdash \neg \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \notin y)$

Questo risultato mostra come la teoria ZF superi i limiti della struttura fregeana, tuttavia conservandone lo scopo di fornire basi ai concetti matematici fondamentali. Scrive Zermelo:

> *La teoria degli insiemi è quella branca della matematica il cui compito è indagare matematicamente le nozioni fondamentali di "numero", "ordine" e "funzione", assumendole nella loro forma pristina, semplice, e sviluppando di lì i fondamenti logici di tutta l' aritmetica e l'analisi.*[28]

2.3 La definizione insiemistica dei numeri naturali

Passiamo ora passare all'analisi del trattazione dei numeri naturali all'interno della teoria ZF. Per descrivere al meglio il modo in cui i numeri naturali sono trattati dobbiamo analizzare in primo luogo alcuni punti di partenza. La teoria degli insiemi si presenta con una struttura assiomatica dando alcune proposizioni prese come punti di partenza per svolgere delle dimostrazioni e dare risultati, i quali saranno teoremi della teoria. Tra questi ricordiamo il già menzionato assioma della separazione e citiamo ulteriormente l'assioma del insieme vuoto:

Assioma 2. [29] *Esiste un insieme che chiameremo vuoto ($\emptyset$) tale che*

$$\forall x (x \notin \emptyset).$$

Ricordiamo ancora l'assioma dell'unione:

[28](Zermelo, 1908) in (Lolli, 1994: 65).
[29](*Ivi.*: 80).

Assioma 3. [30] *Dato un insieme x, chiamiamo linsieme unione di x (in simboli $\cup x$)un insieme tale che*

$$\forall z(z \in \cup x \leftrightarrow \exists y \in x(z \in y)).$$

Possiamo ora procedere ad analizzare come sono costruiti i numeri naturali allinterno della teoria ZF. [31] Dagli assiomi è possibile enunciare una definizione essenziale che è quella di successore di un insieme:

Definizione 13. [32] *Dato un insieme x, chiamiamo il suo successore $S(x)$ l'insieme tale che*

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

Applicando tale definizione all'insieme vuoto otteniamo che il suo successore sarà definito nel seguente modo:

$$S(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}.$$

Possiamo continuare nello stesso modo dando i successori dell'insieme così ottenuto:

$$SS(\varnothing) = S(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Questo procedimento può essere ripetuto andando avanti e creando un successore per ogni insieme così formato. Questo processo ci permette ora di definire elementi dei numeri naturali come $0, 1, 2...$, definendo di volta in volta un numero come il successore del precedente. Per farlo si inizierà identificando il numero 0 con l'insieme vuoto. Di seguito applicheremo all'insieme vuoto la funzione di successore, ottenendo l'insieme contenente come unico suo elemento l'insieme vuoto. A questo, come mostrato sopra, possiamo riapplicare la funzione di successore in modo da ottenere il numero 2. Quindi, avremo che un numero corrisponderà al insieme derivante dalle corrispondenti applicazioni del successore all'insieme vuoto. Quindi nella teoria ZF ogni numero è formato dall'unione di tutti i numeri precedenti. Tuttavia ad ora con i semplici assiomi è ancora impossibile dare una

[30](*Ivi.*: 81).

[31]Per dovere di completezza occorre dire che la teoria degli insiemi di Zermelo-Freanknel, vista la sua complessità, richiederebbe un lavoro di esposizione largo, tuttavia per motivi di coerenza con il nostro obiettivo e con il soggetto del quale si occupa l'opera si rinvia a maggiori approfondimenti in testi come (Lolli, 1994), (Enderton, 1977).

[32](Enderton, 1977: 68).

definizione di un insieme che corrisponda a tutti i numeri naturali, il quale è il nostro risultato desiderato.

Per fare introdurre un insieme siffatto occorre chiamare in campo altri elementi. Il primo tra questi elementi è la definizione di insieme induttivo:

Definizione 14. [33] *Dato un insieme X diciamo che tale insieme è induttivo se e solo se:*

- $\varnothing \in X$
- $\forall x \in X(S(x) \in X)$

Da questa definizione è possibile procedere a dare un altro assioma chiamato assioma dell'infinito:

Assioma 4. [34]

$$\exists X(\varnothing \in X \land \forall x \in X(S(x) \in X))$$

Ora armati di questo assioma possiamo asserire l'esistenza di un insieme che contiene i numeri naturali ma non è equivalente ad avere un insieme quale $\mathbb{N}$. La differenza è che questo insieme da noi trovato è in grado di avere al suo interno altre cose oltre ai numeri naturali.

Per definire i numeri naturali adesso partiamo dall'insieme X, del quale ma 4 garantisce l'esistenza, il quale è induttivo. Definiamo un secondo insieme S, il quale verrà caratterizzato con l'assioma della separazione dicendo che per ogni $x \in S$ si ha che $x \in X$ e al contempo ad ogni altro insieme induttivo. Essendo lo stesso insieme X induttivo si ha che $x \in S$ se e solo se appartiene a tutti gli insiemi induttivi Se noi denotiamo tale insieme sarà esattamente l'insieme dei numeri naturali e lo indicheremo con ω. In termini di classi si può esprimere nel seguente modo

$$\omega = \cap\{X|X \text{ è induttivo}\}$$ [35]

L'insieme appena denotato con ω sarà induttivo e sottoinsieme di ogni altro insieme induttivo, e da ciò deriviamo che $0 = \varnothing \in \omega$ e così tutti i suoi successori. Gli elementi estranei a questa successione sono esclusi da ω siccome è per definizione il più piccolo insieme induttivo. Da ciò deriva il principio di induzione per

[33] (*Idem.*).
[34] (*Idem.*).
[35] Si fa presente che tale classe non è un insieme siccome è impossibile avere un insieme di tutti gli insiemi come presentato nella Proposizione 3.

tale insieme siccome se possiamo provare che un $A \in \omega$ è induttivo tale insieme coincide per forza con ω, essendo esso il più piccolo insieme induttivo. Risulta quindi che l'insieme da noi trovato ω è uguale all'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$).[36]

[36]Per mostrare questo risultato basta chiamare in campo l'assioma di estensionalità per il quale due insiemi formati dagli stessi elementi sono uguali tra loro.

3

Il metodo assiomatico e la teoria dei numeri naturali

3.1 Il metodo assiomatico

Abbiamo finora parlato muovendoci all'interno della struttura della teoria degli insiemi. Introduciamo ora un nuovo metodo che ci accompagnerà è sarà oggetto della nostra analisi da qui in seguito. Il metodo in questione è il metodo assiomatico. Di assiomi se ne è già parlato in precedenza in questo elaborato ma non si è analizzato propriamente cosa sia un assioma e cosa definiamo per teoria assiomatica.

Possiamo dire che gli assiomi di una teoria sono

> *[...] proposizioni primitive che coinvolgono termini o concetti primitivi.*[37]

Le relazioni di questi concetti primitivi sono fissate dagli assiomi ma non hanno significato indipendente da questi. Questa metodo di sviluppo delle teorie si è imposto all'inizio, verso la metà del XIX secolo, allo scopo di studiare altre operazioni analoghe ma non identiche a quelle usate in ambito numerico. Le proprietà di queste operazioni costituiscono gli assiomi di nuove algebre nelle quali prevale il formalismo. Tra queste algebre è possibile annoverare quella di Boole usata per strutturare le leggi del pensiero.[38]

[37](Lolli, 2011: 11).
[38](*Idem.*).

Altra situazione abbiamo per la logica formale la quale fin dai suoi albori si è caratterizzata come sapere che tratta forme e schemi indipendentemente dalle loro applicazioni. La logica in campo matematico ha trovato la sua rinascita solo molto più tardi per via della divisione che si ebbe a partire da Cartesio e la sua convinzione che la matematica trattasse cose con contenuto e che fosse l'unica vera *ars invenindi*.

Spesso quando si parla di teorie assiomatiche è citato il lavoro compiuto da Euclide nei suoi *Elementi* tuttavia vi sono notevoli differenze tra quello che noi intendiamo per teoria assiomatica oggi e quello che è la teoria della geometria come esposta da Euclide. Nella esposizione originale della geometria euclidea, anche se vi sono assiomi iniziali, vengono date le definizioni dei termini di punto e retta, che quindi non risultano essere primitivi in quanto non sono definiti implicitamente dagli assiomi, e mancano delle inferenze formali. Il metodo assiomatico moderno si scosta notevolmente da questo modo di procedere.

Il metodo moderno nasce proprio dalla scoperta delle geometrie non euclidee e dal tentativo di capire il loro rapporto con la teoria euclidea. Quando vari matematici si impegnarono nell'opera di sistemare queste nuove geometrie si scoprì per la prima volta come la matematica fosse una scienza formale. In questo clima nasce anche l'indagine su cosa fosse una scienza deduttiva.

Con lo studio della geometria avanzò la convinzione che la matematica, per affermarsi come una vera scienza deduttiva, dovesse avere dimostrazioni che fossero indipendenti dai concetti di riferimento. Si cerca un continuo distacco dal senso delle parole nella costruzione delle deduzioni. Si volevano costruire, infatti, dimostrazioni per i teoremi facendo unicamente capo ad alcune proposizioni iniziali. In seguito combinando questi risultati con altri concetti sia primitivi sia dimostrati, si ottiene sempre una proposizione che è conseguenza dalle proposizioni iniziali. Come dice Moritz Pasch, uno dei padri del metodo assiomatico[39]:

> *Quando si deduce un teorema da un gruppo di proposizioni il valore della deduzione travalica lo scopo iniziale. Infatti se si derivano proposizioni corrette , allora cambiando con altri concetti geometrici si ottiene senza duplicare la dimostrazione una proposizione che è conseguenza delle proposizioni così modificate.* [40]

[39]Egli nella sua opera "*Vorlesungen über neuere Geometrie*" del 1882 fornisce uno studio approfondito dell'analisi della fondazione teorica della nuova geometria.

[40](Pasch, 1882) in (Lolli, 2011: 14).

Altro pregio delle teorie assiomatiche è che queste possono avere diverse interpretazioni. Dice Hilbert che tutti i risultati di una teoria valgono anche per ogni altro sistema di enti che sono al posto di quelli pensati, a patto che soddisfano gli assiomi. Tale proprietà di una teoria viene indicata come non categoricità.[41]

Nell'ambito delle geometrie lo stesso David Hilbert nella sua opera *Grundlagen der Geometrie*[42] si impegna in uno studio volto a correggere, completare e svolgere indagini logiche sull'opera di Euclide. Egli vuole indagare la geometria allo scopo di rivalutare il suo posto all'interno della matematica, e in un certo senso riscattare la geometria e cercare nelle sue strutture gli stessi risultati ottenuti pochi anni prima all'interno del lavoro di Cantor e Dedekind.[43] L'impostazione assiomatica è essenziale per portare avanti questa ricerca.

La rivalutazione delle strutture assiomatiche è contro la tradizione logicista la quale vuole che gli assiomi siano definizioni dei concetti che li soddisfano, cioè definizioni descrittive. Mentre la nuova idea di assioma come nuove definizioni, né nominali, né reali, sembra essere inaccettabile dalla tradizione logica. Secondo Frege, massimo esponente della tradizione appena nominata, le definizioni non sono asserzioni ma stipulazioni attraverso cui assegniamo un significato ad un segno. Per cui secondo Frege non è possibile stabilire da assiomi e teoremi il significato di una parola o di un segno che ricorre in essi. Per quest'ultimo un assioma è un enunciato vero non dimostrato perché conosciuti da fonti di natura extra-logica. Questi saranno veri e per questo non vi sono contraddizioni tra i vari assiomi di una teoria. Ma dall'altro lato Hilbert dice, in risposta a Frege, che "non vuole dare nulla come noto" e richiamando il concetto di punto fa notare che essendo privo di estensione non lo si potrà mai trovare siccome questo non sarà mai dove lo si cerca.

Per Hilbert in ultima analisi il metodo assiomatico serve a stabilire le relazioni logiche tra i vari concetti. Dice infatti:

---

[41]Per chiarire meglio questo concetto dobbiamo specificare che una teoria è detta categorica: Per fare questo diamo prima due definizioni preliminari ai concetti di modello e isomorfismo. Un modello consiste di un dominio di oggetti e di uninterpretazione dei simboli non-logici della teoria che rendono veri gli assiomi. Per isomorfismo si intende precisamente l'esistenza di una biiezione tra due modelli tale che conserva le costanti, le operazioni e le relazioni. Quindi chiamiamo una teoria assiomatica categorica quando i suoi assiomi sono soddisfati da un solo modello a meno di isomorfismi.

[42](Hilbert e a cura di Manara, 1970).

[43]Questo lavoro di rifondazione della geometria rientra tra i tanti ambiti che tra fine XIX e inizio XX secolo hanno interessato l'ambito dei fondamenti della matematica come è stato parzialmente mostrato nel primo capitolo di questa trattazione.

> *[...] ogni teoria e solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario.*

e continuando asserisce che:

> *[...] ogni teoria può essere sempre applicata a infiniti sistemi di elementi fondamentali. [...] occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i corrispondenti.*

Dopo questi chiarimenti sulla natura di una teoria assiomatica Hilbert afferma una idea che avrà un peso enorme nello sviluppo del suo futuro pensiero in materia di teorie assiomatiche:

> *Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione [...] allora essi sono veri, allora esisteranno gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi.*

Da queste ultime affermazioni appare evidente l'esigenza di una prova di non contraddittorietà della teoria aritmetica. La ricerca di questa prova sarà alla base degli sviluppi degli studi durante gli anni '20 del XX secolo, periodo nel quale si svilupperà il cosiddetto progetto del Programma di Hilbert.[44]

3.2 Il Programma di Hilbert

La predilezione che Hilbert mostra per il metodo assiomatico si fa evidente all'interno di alcune affermazioni presso una conferenza del 1899. In questa conferenza egli paragona il metodo genetico che si usava nell'esposizione del concetto di numero e il metodo assiomatico proprio della geometria. Egli da un lato elogia il metodo genetico di esposizione delle teorie numeriche per la sua potenza euristica e pedagogica, siccome opera tramite continue estensioni di campo partendo da concetti primitivi. Tuttavia dall'altro suggerisce come per una corretta esposizione delle scienze matematiche il metodo assiomatico andrebbe esteso a tutte le scienze matematiche, non solo alla geometria.[45]

[44]Tutte le citazioni qui esposte sono presenti nel carteggio tra Hilbert e Frege se ne può trovare traccia per maggiori approfondimenti e interesse storico in (Gabriel et al., 1980),

[45](Lolli, 2011: 21-22).

Da qui si evince come lo scopo di Hilbert sia più grande della semplice sistemazione della geometria, in particolare il suo obiettivo finale è una sistemazione di tutte le scienze matematiche su nuove fondamenta salde e che non crollino. Tale tentativo di sistemazione e rifondazione è spesso chiamato Programma di Hilbert e al centro di questo lavoro vi sono la rifondazione della logica e dell'aritmetica, le quali secondo Hilbert devono essere sviluppate "in modo simultaneo"[46].

Ci addentriamo ora nell'analisi di questo progetto, ma non tanto nel tentativo di ricostruirne il quadro di sviluppo storico, quanto nell'obiettivo di comprenderne le strutture alla base usate per definire una teoria assiomatica fondata. In una teoria assiomatica si richiede in generale la non contraddizione come è già stato detto, ossia si richiede che in una teoria assiomatica $\mathcal{T}$ non sia possibile derivare al contempo un enunciato ϕ e la sua negazione, $\neg\phi$. Tuttavia per quanto riguarda la geometria e per le teorie numeriche Hilbert cerca di arrivare a un teoria completa.

Per capire quale sia l'obiettivo che Hilbert si è prefissato di raggiungere nella fondazione di queste due discipline esaminiamo cosa sia una teoria completa. Una teoria assiomatica $\mathcal{T}$ con una semantica e un calcolo è completa se si ha che per ogni enunciato ϕ, o esso risulta dimostrabile in $\mathcal{T}$ o lo risulta la sua negazione, $\neg\phi$. In una teoria completa quindi abbiamo che i modelli sono tra loro tutti elemntarmente equivalenti, ossia soddisfano le stesse formule. Quindi un qualunque enunciato o è già teorema e la sua unione con $\mathcal{T}$ equivale a $\mathcal{T}$, oppure è con esso incompatibile e quindi la sua negazione unita a $\mathcal{T}$ darà $\mathcal{T}$. Tuttavia, bisogna evidenziare che tali modelli non risultano tra loro necessariamente isomorfi e quindi la completezza on garantisce la categoricità.

Negli anni '20 tuttavia la proprietà di completezza era vista come unita a quella della categoricità. Non a caso Hilbert nel congresso di Bologna del 1928 afferma che:

> *Ciò che si deve fare - è innanzitutto per la teoria dei numeri, il quale dominio ancora non si lascia definire con precisione - è trasformare finitariamente la dimostrazione sui modelli isomorfi, così che per questa via si dimostri quanto segue: Se per una proposizione S può venir dimostrata la non contraddittorietà con gli assiomi della teoria dei numeri, allora la non contraddittorietà con quegli assiomi non può venir dimostrata anche per* $\neg S$.[47]

[46](Lolli, 2011: 28).
[47](Lolli, 2011: 44).

Qui si mostra come la completezza di un sistema deduttivo sia considerata da Hilbert come equivalente alla categoricità di tale sistema. Precisamente da un lato troviamo l'idea di volere una teoria dei numeri categorica, la quale abbia quindi un solo modello definito, da questo risultato poi si vuole che tutte le cose vere in questo modello siano derivabili all'interno della teoria. Quindi grazie alla dimostrazione dell'esistenza di soli modelli isomorfi per le teorie numeriche, Hilbert voleva arrivare a dimostrare la completezza della teoria aritmetica. In questo modo Hilbert vuole definire assolutamente il concetto di numero e quindi dare fondamento all'intera aritmetica.

Bisogna anche tener presente che in questi anni Hilbert aveva già nelle sue mani un sistema di logica preciso nel quale era stato affrontato anche il problema della completezza logica. Egli, infatti, nello stesso anno pubblicò un sistema di logica nell'opera *Grundzüge der theoretischen Logik*, pubblicato in collaborazione con Ackermann[48]

Tale opera è stata il frutto dall'insoddisfazione che il lavoro di fondazione della logica compiuto da Bertrand Russell e Alfred Whitehead nell'opera *Principia Mathematica*[49] recò allo studioso di Gottinga. Quest'opera lasciava come problemi aperti quello della consistenza dell'aritmetica e il problema della decidibilità delle questioni matematiche. Per risolvere questi problemi dopo le sue numerevoli dichiarazioni si impegnò in prima persona in un'opera sistematica della logica del primo ordine.

Tuttavia questo programma di Hilbert non era appoggiato da tutta la comunità matematica. Tra i principali oppositori troviamo Luitzen Egbertus Jan Brouwer e il suo allievo Hermann Weyl, in precedenza studente di Hilbert. Quest'ultimi appoggiavano un'idea di matematica come una scienza intuizionista. Il dibattito tra queste due visioni fu molto accesso culminando in diverse opere e conferenze. Per chiarire al meglio come Hilbert tentò di arginare i suoi oppositori occorre chiarire in cosa consiste la visione intuizionista. Per Brouwer lo studio dei simboli non ci insegna nulla sua matematica. Egli ha una visione di studio matematico come guidato dall'intuizione. Quindi un'asserzione matematica per essere vera, deve essere conosciuta, quindi o deve ricevere una dimostrazione diretta o va costruita. Per Brouwer quindi la non contraddizione di per sé non ha alcun significato matematico.

[48](Hilbert e Ackermann, 1959).

[49](Whitehead e Russell, 1910).

Per arginare la deriva di questa interpretazione Hilbert insiste sull'idea della finitezza. Egli sostiene che una parte privilegiata della matematica è costituita dalla "teoria dei numeri elementari contenutali" i quali sono basati su una "base puramente intuitiva di segni concreti"[50]. L'operare da concetti astratti è considerato inadeguato, al contrario risulta fondato un procedere sulla base di oggetti extra logici che esistono intuitivamente e dei quali possiamo avere esperienza immediata. Data la base logica costruita deduttivamente in modo certo e questi oggetti primitivi di base è possibile procedere nell'indagine matematica senza intoppi particolari. Hilbert vuole assicurare una base per evitare riduzionismi continui. La teoria dei numeri contenutali opera come una sequenza di tratti, in egual modo la matematica opera come una sequenza di simboli.

L'operazione matematica compiuta su oggetti astratti viene giustificata da Hilbert tramite proprio i sistemi assiomatici che permettono finitezza nell'uso delle proposizioni in particolari dimostrazioni. In questo ambito diventano quindi importanti le idee già menzionate di non contraddizione e completezza, screditate dagli intuizionisti, senza le quali l'assiomatica perderebbe la sua forza.

Anche se il programma riusci a dare un sistema del primo ordine tale che fosse sia consistente che completo, tale risultato si dimostro non essere raggiungibile nel merito della teoria aritmetica. La ricerca di Hilbert mirava a mostrare come il risultato della completezza, ottenuto in ambito logico e geometrico, fosse raggiungibile anche in ambito aritmetico, tuttavia tale obiettivo si dimostrò infondato. Il colpo di grazia al desiderio di Hilbert di un'intera matematica che fosse coerente e completa si deve a Kurt Gödel il quale con i suoi Teoremi di Incompletezza dimostrò che non è possibile raggiungere i risultati che Hilbert si era prefissato come obiettivo della sua ricerca.[51]

Con Gödel si segna la fine del programma di Hilbert ma non dei suoi lasciti importanti. Il metodo assiomatico protagonista delle analisi hilbertiane si è mostrato come uno dei mezzi favoriti per strutturare le teorie matematiche. Al giorno d'oggi l'intera matematica presenta una struttura assiomatica, per i vantaggi finora sottolineati.

[50](Zach, 2023).

[51]La questione dei Teoremi di Incompletezza verrà affrontata nei capitoli successivi in modo esaustivo e dettagliato.

3.3 Assiomatizzazione della teoria dei numeri naturali

3.3.1 Linguaggi del primo ordine e del secondo ordine

Analizziamo ora come questo metodo assiomatico possa essere applicato alla teoria dei numeri naturali. Finora questi sono stati analizzati a partire da altre teorie, in particolare quella logicista e quella degli insiemi. Essi venivano costruiti, infatti, a partire da altri concetti, ora invece analizziamo le possibili strutture assiomatiche che possono essere adottate per descrivere la teoria dei numeri naturali.

In primo luogo bisogna portare in gioco una importante distinzione che troviamo all'interno della logica. È possibile distingue i linguaggi logici in due ordini. La differenza chiave tra i due ordini si trova nel modo in cui possono operare i quantificatori. Mentre nella logica del primo ordine i quantificatori possono operare solo sulle variabili individuali, in quella del secondo ordine è possibile quantificare anche sui predicati o sugli insiemi.

La logica del primo ordine presenta alcune proprietà notevoli. Sebbene sia noto che non è decidibile, ha la caratteristica di essere assiomatizzabile. Ciò significa che esistono sistemi di prova per la logica del primo ordine che sono sia corretti che completi, quindi dove tutti e solo i giudizi validi rispetto alla semantica sono derivabili nel sistema.[52] Questo implica in particolare che le validità della logica del primo ordine possono essere elencate in modo computazionale. È possibile definire una funzione computabile $f : \mathbb{N} \to \mathcal{L}$ in modo che i valori di f siano esclusivamente le frasi valide nel linguaggio. Questo è possibile grazie alla capacità di enumerare le deduzioni, con particolare attenzione a quelle che derivano una singola frase, che vengono poi mappate su quella specifica frase. In sostanza, la logica del primo ordine offre un sistema coerente e completo per rappresentare e analizzare proposizioni matematiche e logiche.

La logica del secondo ordine invece è più espressiva rispetto a quella del primo ed è difficile riuscire ad ottenere gli stessi risultati. In effetti la logica del

[52] In merito a questi risultati si fa presente che la dimostrazione della completezza è attribuita al lavoro svolto da Gödel. Invece lassiomatizzazione della logica del primo ordine è stata raggiunta da Hilbert come menzionato nello scorso capitolo. Lo stile di derivazione assiomatico in ambito logico viene infatti chiamato stile di Hilbert.

secondo ordine risulta sia indecidibile che incomputabile, quindi senza prova di completezza. La logica del primo ordine è ancora compatta il che significa che se ogni finito sottoinsieme di un insieme di proposizioni è soddisfacibile, lo è anche l'insieme stesso. Questa proprietà manca al secondo ordine.

La logica del primo ordine avendo una serie di buone proprietà è stata infatti presa da subito come il mezzo favorito nel programma di rifondazione della matematica in base assiomatica ma anche essa ha i suoi limiti. Procederemo ora con il mostrare l'aritmetica del primo ordine e quella del secondo tentando di captarne i punti di forza e i punti deboli partendo dalla distinzione degli ordini logici.

3.3.2 Aritmetica del primo ordine

Presentiamo ora una serie di proposizioni che mirano a cogliere la struttura dei numeri naturali ma al primo ordine logico. Il modello al primo ordine che prendiamo in considerazione è la canonica formulazione dell'aritmetica del primo ordine degli assiomi di Peano. Il risultato dell'assiomatizzazione dell'aritmetica è presentata da Giuseppe Penao nell'opera *Arithmetices principia, nova metodo exposita*[53], nella seguente trattazione presenteremo la versione di PA proposta da Mendelson[54].

Partiamo definendo il linguaggio della nostra teoria al quale vanno aggiunti i classici elementi dei linguaggi logici del primo ordine con uguaglianza[55], che è identificata con il nome di PA:

$$\mathcal{L}_{PA} = \{0, S(...), +, \times\}.$$

Procediamo ora fornendo gli assiomi:

(1) $\forall x(0 \neq S(x))$

(2) $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$

(3) $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = S(y))$

(4)$\forall x(x + 0 = x)$

(5)$\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$

[53](Peano e Odifreddi, 2001).

[54](Mendelson, 2009: 150).

[55]Si fa presente che si userà la classica abbreviazione di $x \neq y := \neg(x = y)$ al fine di snellire la notazione

$(6)\forall x(x \times 0 = 0)$
$(7)\forall x\forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$
$(8)\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(S(x))) \rightarrow \forall x\phi(x)$
Questa serie di assiomi garantisce che:

- 0 non è successore di alcun numero
- Definisce sulla ricorsione della successione le operazioni già identificate nel primo capitolo come interne all'insieme $\mathbb{N}$, ovvero addizione e moltiplicazione.

Risultato importante ottenibile in questa teoria è la coerenza la quale è dimostrabile se estendiamo il calcolo classico di Gentzen (G3c) con le regole derivabili dagli assiomi. In un siffatto calcolo risulta ammissibile la regola del taglio e quindi si ottengono con la sua ammissibilità le proprietà di sottoformula e di coerenza.[56]

Per quanto riguarda l'induzione matematica è una proposizione che necessita di essere espressa al secondo ordine. Per potere integrarla nel nostro sistema di assiomi bisogna ricorrere a uno schema di assiomi, in questo senso avremmo l'espressione dell'induzione per ogni possibile proprietà dei numeri naturali.

Tramite questi assiomi si esprime l'induzione per 0 e per ogni successore di x. L'insieme espresso da queste proposizioni è un infinito numerabile siccome della stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Situazione diversa si ha con l'induzione espressa al secondo ordine la quale risulta formulata sui sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ ma formulata per mezzo di un unica formula.

3.3.3 Aritmetica del secondo ordine

Passiamo ora all'analisi degli assiomi dei numeri naturali al secondo ordine. Presenteremo ora la classica versione dell'aritmetica del secondo ordine. Vi è una formulazione standard degli assiomi che utilizza sia il linguaggio della teoria degli insiemi che quello del secondo ordine[57], nel seguente paragrafo presentiamo una versione degli assiomi usando solo il linguaggio del secondo ordine presentando la versione di essi chiamata PA_2.

Come fatto per il caso del primo ordine, partiamo definendo il linguaggio della nostra teoria. Questo sarà formato aggiungendo alla classica formulazione dei

[56](Mancosu et al., 2021: 269-276).
[57]Esempio di una assiomatizzazione del genere si può trovare in (Acerbi e Buttazzo, 1997: 98).

linguaggi del secondo ordine con uguaglianza i simboli le costanti e le relazioni aggiunte all'interno di PA. Il linguaggio di PA_2 sarà, quindi, il seguente:

$$\mathcal{L}_{PA_2} = \{0, S(...), +, \times\}.$$

Per quanto riguarda la lista degli assiomi, questo nuovo sistema differisce dalla versione sopra esposta al primo ordine per quanto riguarda l'induzione matematica. Nel sistema PA_2, infatti, lessa è espressa nel seguente modo:

$$\forall X(X(0) \wedge \forall x(X(x) \rightarrow X(S(x)))) \rightarrow \forall x X(x).$$

Per quanto riguarda i restanti assiomi essi sono uguali alla versione del primo ordine. L'induzione si presenta come un caso particolare siccome il quantificatore all'inizio del principio di induzione quantifica su tutti i sottoinsiemi del dominio, dato un modello per gli assiomi. Come si è visto nella costruzione insiemistica la teoria così costituita è coerente.

La teoria degli assiomi di Peano ha un ulteriore pregio ossia quella di essere categorica. È possibile infatti dimostrare che a meno di isomorfismi i modelli della teoria sono tra loro uguali e congruenti all'insieme dei numeri naturali.

4

Analisi metateoriche sulle teorie assiomatiche

Nel presente capitolo procediamo nell'analisi di importanti risultati in logica matematica che sono di estremo interesse per lo studio e la comprensione delle potenzialità e proprietà delle teorie assiomatiche esposte in precedenza.

I teoremi che interesseranno la nostra indagine sono i teoremi di Löwenheim-Skolem e i teoremi di Incompletezza di Gödel. Attraverso lo studio di questi miriamo a presentare considerazioni riguardanti la categoricità, la completezza e la coerenza delle teorie assiomatiche dei numeri naturali nei linguaggi del primo e del secondo ordine.

Tratteremo, quindi, i teoremi enunciandoli e presentando in linea generale il significato che questi assumono nell'ambito della nostra analisi, senza presentare le dimostrazioni complete ma solo fornendone un accenno sommario.

4.1 Sulla categoricità: modelli delle teorie e i Teoremi di Löwenheim- Skolem

Abbiamo già in precedenza enunciato la definizione di categoricità nel paragrafo precedente. La richiamiamo ora di seguito

Definizione 15. *Chiamiamo una teoria $\mathcal{T}$ categorica se tutti i suoi modelli sono isomorfi tra loro.*

Come già detto questa caratteristica è estremamente importante in ambito di teorie assiomatiche, siccome queste mirano a formalizzare in modo rigoroso le caratteristiche di una specifica struttura di cui abbiamo una comprensione chiara e precisa. In queste situazioni, possiamo affermare che gli assiomi della teoria catturano in modo completo e accurato tutte le proprietà fondamentali di quella struttura. In altre parole, tali assiomi garantiscono che non esistano altre strutture, escluse quelle isomorfe a quella di riferimento, in cui gli stessi assiomi risultino verificati.

L'analisi dell'assiomatizzazione dei numeri naturali, quindi, richiede il passaggio per lo studio dei modelli di queste teorie. Nel capitolo precedente analizzando le strutture al primo e al secondo ordine si è anticipato che gli assiomi al primo orine non riescono a fornire una teoria categorica, a differenza di quelli espressi al secondo ordine. Per capire il motivo di questa importante differenza tra le assiomatizzazioni nei due ordini bisogna chiamare in causa due importati teoremi della logica matematica, rilevanti soprattutto nell'ambito della teoria dei modelli. I teoremi in questione sono i cosiddetti teoremi di Löwhenheim-Skolem.

La prima formulazione di questi consiste in un unico teorema presentato la prima volta da 1915 da Leopold Löwenheim nel seguente modo:

Teorema 1. [58] *Sia Σ un insieme di proposizioni del primo ordine in un linguaggio numerabile. Se Σ ha un qualsiasi modello, allora Σ ha anche un modello numerabile.*

Questa era la formulazione del teorema originale. Oggi questo è comunemente interpretata come una formulazione particolare di una delle due versioni del teorema, precisamente quella "*verso il basso*". Questa è detta *verso il basso* siccome tratta i limiti inferiori sulla cardinalità dei modelli per insiemi soddisfacibili di proporzioni.

Teorema 2. [59] *Se Σ è un insieme soddisfacibile di formule di proposizioni del primo ordine di cardinalità al più κ, con κ infinito, e Σ ha un modello qualsiasi allora ha un modello infinito di cardinalità $\leq \kappa$.*

Questa versione è simile a quella data da Löwenheim nel 1915. Tuttavia nella nuova formulazione si ha che la cardinalità κ è infinita non più limitata al caso numerabile. Tale generalizzazione si deve a Skolem che la produsse nel 1920, ed è qui che giace il motivo nel doppio nome in questa serie di teoremi.

[58](Enderton, 2001: 151).
[59](Bridge, 1977: 97).

Passiamo ora alla seconda parte detta verso l'alto la quale viene dimostrata a partire dalla precedente parte

Teorema 3. [60] *Data Σ insieme di proposizioni, espresse in un linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine di cardinalità κ. Se Σ ha un modello infinito allora Σ ha anche un altro modello infinito di qualsiasi cardinalità λ, per ogni $\lambda \geq \kappa$.*

Esso stabilisce che un qualsiasi insieme di proposizioni infinito con un modello infinito ha un altro modello di cardinalità arbitrariamente alta. Skolem provò tale risultato su Σ espressi in un linguaggio $\mathcal{L}$ numerabile, in seguito Tarski estese tale risultato per i linguaggi non numerabili.

Da ciò derivano una serie di conseguenze. Possiamo dire che se abbiamo un insieme di proposizioni, espresse in un linguaggio numerabile, se questo ha un modello infinito allora ne ha uno per ogni cardinalità infinità. Se una struttura del primo ordine ha quindi un modello infinito non può risultare categorica siccome abbiamo diversi modelli i quali essendo di cardinalità infinite diverse non possono risultare isomorfi tra di loro, ciò vale in particolare per la teoria dei numeri naturali.

Questo problema non si presenta per la teoria al secondo ordine. Al secondo ordine tale teorema non si applica siccome esso richiede formule espresse nel linguaggio del primo ordine. Infatti risulta possibile determinare che la teoria dei numeri naturali al secondo ordine, come quella per i numeri reali, risulta categorica, e che tutti i modelli sono quindi isomorfi tra di loro.[61]

Dalla non categoricità della formalizzazione dell'aritmetica al primo ordine possiamo concludere che esistono vari modelli che soddisfano gli assiomi in questo linguaggio. Tale conclusione è stata esplorata in maniera profonda per la prima volta dallo stesso Skolem, il quale grazie ai suoi teoremi riuscì ha fornire importanti considerazioni nel merito dei modelli per teorie espresse nei linguaggi del primo ordine.

Le prime considerazioni tratte dal teorema vengono analizzate nell'ambito della teoria assiomatica degli insiemi. Se esiste infatti un modello che soddisfa la teoria degli insiemi al primo ordine allora anche una struttura numerabile qualsiasi sarà modello di tale teoria. Tuttavia una qualsiasi assiomatizzazione della teoria degli insiemi mira a caratterizzare in modo naturale la struttura matematica degli

[60](*Idem.*: 98).
[61]Per una prova di questo risultato si rimanda a (Smith, 2013: 214).

insiemi, i quali hanno domini non numerabili. Tuttavia Skolem sottolinea che non è possibile rendere tale proprietà con linguaggi del primo ordine siccome, per il teorema prima menzionato, abbiamo modelli la cui cardinalità può anche essere numerabile. Da questo si deriva la nozione di modello non standard, il quale riesce a soddisfare la teoria ma non è isomorfo al modello che si intendeva rappresentare con essa. Tale considerazioni sono espresse nel 1922 è fanno parte dei dubbi riassunti dal cosiddetto Paradosso di Skolem[62].

Queste considerazioni sono il punto di inizio in merito alla discussione sui modelli non standard. Infatti, dalla teoria degli insiemi in poco tempo si sposta alle strutture matematiche stesse, applicando tale lavoro d'indagine alla teorie dei numeri tra cui la stessa teoria degli assiomi di Peano al primo ordine. Nel 1929 scrivere un articolo dal titolo "*Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik*"[63] espresse una serie di dubbi riguardo la possibilità di una assiomatizzazione completa dei concetti matematici. Tali dubbi presero forma nel lavoro del 1934[64] , nel quale provò che non vi è insieme e finito o di infinità numerabile di proposizioni nel linguaggio dell'aritmetica di Peano che possa caratterizzare univocamente la teoria dei numeri naturali.

Questa serie di risultati resero Skolem il padre dei modelli non standard, i quali nel caso dell'aritmetica sono strutture diverse da quella dei numeri naturali che riescono comunque a essere caratterizzate dagli assiomi della teoria PA. Essi sono un risultato cardine in ambito di studio delle assiomatizzazioni delle teorie numeriche siccome stabiliscono i limiti di qualsiasi assiomatizzazione dell'aritmetica al primo ordine, sancendo l'impossibilità di creare una teoria categorica in questo tipo di linguaggi. Tali limiti sono in particolare l'incapacità di determinare univocamente il modello standard dell'aritmetica, come mostrato nella trattazione precedente.

Tuttavia va sottolineato che, anche se la l'assiomatizzazione del secondo ordine riesce a darci una teoria categorica, essa non potrà mai darci una teoria completa, siccome non è possibile avere un sistema di deduzione completo espresso al secondo ordine. Da un lato quindi abbiamo un aritmetica del primo ordine (nel nostro caso PA) che viene espresso in un linguaggio il quale ha varie buone proprietà, quali coerenza e completezza deduttiva, dall'altro abbiamo una teoria

[62](Bays, 2022).
[63](Skolem, 1929).
[64](Skolem, 1934).

del secondo ordine (PA_2) che risulta categorica ma manca delle buone proprietà della logica del primo ordine, come evidenziato nel capitolo precedente.

4.2 Sulla completezza: il primo Teorema di Incompletezza di Gödel

Passiamo ora a studiare la completezza delle nostre assiomatizzazioni. Quando parliamo di teoria completa, in generale, intendiamo una teoria che è sufficiente a decidere la verità di ogni enunciato, che non lascia nulla di indeterminato. Procediamo ora a darne un caratterizzazione formale nel seguente modo:

Definizione 16. *Chiamiamo una teoria* T *completa se per ogni ϕ espresso nel linguaggio della teoria,*

$$T \vdash \neg\phi \text{ o } T \vdash \phi.$$

Per rispondere ora ai quesiti sulla completezza delle nostre due teorie assiomatiche chiamiamo in causa uno dei principali teoremi della logica matematica, formulato da Kurt Gödel nel 1931 nel suo articolo "*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*"[65], il Primo Teorema di Incompletezza:

Teorema 4. [66] *Data una teoria $\mathcal{T}$ la quale sia ω-consistente che estenda PA. Allora esiste un enunciato ϕ tale che $\mathcal{T}$ non dimostra, né ϕ né $\neg\phi$.*

4.2.1 Concetti preliminari

Questo teorema per essere compreso richiede delle analisi preliminari. Di seguito enunceremo alcune definizioni e metodologie usate per arrivare a formulare una proposizione tale che non sia né dimostrabile né confutabile all'interno della nostra teoria.

Il primo concetto che introduciamo è quello della ω-consistenza, già espresso nella formulazione del teorema. Una teoria $\mathcal{T}$ è ω-consistente se non è il caso che per alcune formule $A(x)$, sono dimostrabili sia $\neg A(\bar{n})$ per ogni $\bar{n}$ e $\exists x A(x)$.

[65](Gödel, 1931).
[66](Raatikainen, 2022).

Questa nozione implica anche la consistenza semplice, siccome se una teoria è ω-consistente significa che essa non è in grado di provare una certa combinazione di formule nel linguaggio della teoria, da questo si ottiene che essa non può provare tutte le formule del linguaggio e quindi la sua consistenza.[67] Dalla ω-consistenza è possibile derivare la 1-consistenza. Questa si ha sulle cosiddette formule Σ_1^0, che sono le formule esistenziali dove non vi sono variabili libere. Questi due tipi di consistenza sono nozioni puramente sintattiche . Se usiamo i concetti di verità e falsità, la 1-consistenza esprime solo il fatto che il sistema formale non può dimostrare nessun falsa proposizione che sia del tipo Σ_1^0. I sistemi formali dell'aritmetica sono 1-consistenti.[68]

Secondo concetto che occorre esplicare è quello di numerale. Di norma noi per indicare i numeri naturali all'interno delle teorie assiomatiche presentate partiamo dallo 0, il quale e la nostra unica costante, al quale applichiamo la funzione di successore. Nel nostro linguaggio quindi il numero 4, per esempio, sarà rappresentato in questo modo: $S(S(S(S(0))))$. Il numero che 4 che noi assegniamo per leggere quella formula è chiamato all'interno della teoria il numerale con il simbolo di $\bar{n}$, dove n sono le volte in cui la funzione di successore è applicata.

Terzo concetto chiave che bisogna discutere è quello della rappresentabilità[69]. Questo concetto si applica agli insiemi e alle relazioni di un sistema formale, nel nostro caso al sistema $\mathcal{T}$.

Definizione 17. [70] *Chiamiamo un insieme S di numeri naturali fortemente rappresentabile in un sistema $\mathcal{T}$ se vi è una formula $A(x)$ nel linguaggio di $\mathcal{T}$ con una variabile libera x tale che per ogni numero naturale n si ha che:*

$$n \in S \rightarrow \mathcal{T} \vdash A(\bar{n}),$$

$$n \notin S \rightarrow \mathcal{T} \vdash \neg A(\bar{n}).$$

Definizione 18. [71] *Chiamiamo un insieme S debolmente rappresentabile in un sistema*

[67](Smith, 2013: 157).

[68]Quest'ultimo risultato segue direttamente dal Primo Teorema di Incompletezza e verrà mostrato come si arriva a tale conclusione alla fine del nostro paragrafo.

[69]In merito alla terminologia usata in questa sezione si menziona che la letteratura usa diversi termini per esprimere tali concetti. Nella nostra analisi seguiamo la terminologia proposta in (Raatikainen, 2022). Si fa presente tuttavia che concetti analoghi a quelli mostrati si trovano anche in (Mendelson, 2009: 167-169).

[70](Raatikainen, 2022).

[71](*Idem.*).

$\mathcal{T}$ se vi è una formula $A(x)$ nel linguaggio di $\mathcal{T}$ tale che per ogni numero naturale n si ha che:

$$n \in S \to \mathcal{T} \vdash A(\bar{n}),$$

$$n \notin S \to \mathcal{T} \nvdash A(\bar{n}).$$

Queste definizioni riguardano anche relazioni a più posti e sono collegate ai concetti di funzioni rappresentabili. Inoltre facciamo presente che per entrambi i tipi di rappresentabilità c'è sempre una formula esistenziale del tipo Σ_1^0, la quale rappresenta l'insieme S in questione.

È possibile collegare la nozione di rappresentabilità alla nozione di ricorsione. Possiamo dire che un insieme è fortemente rappresentabile se e solo se esso è ricorsivo. In egual modo un insieme è debolmente rappresentabile se e solo se esso è ricorsivamente enumerabile.[72] Per quanto riguarda la differenza tra ricorsivo e ricorsivamente enumerabile ci limitiamo in questa sede a dire che la differenza tra questi due tipi di sistemi formali è collegata al concetto di decidibilità. Se abbiamo un insieme ricorsivo questo risulta decidibile, in quanto abbiamo un algoritmo finito per dire se un elemento appartiene o meno al nostro insieme. Nel caso di un insieme ricorsivamente enumerabile esso risulta semi-decidibile, ossia esiste un algoritmo che elenca gli elementi del nostro insieme ma non è necessariamente in grado di decidere se un elemento particolare appartiene o no a esso.[73]

Per terminare la trattazione della nozione di rappresentabilità occorre chiarire che essa risulta diversa da quella di definibilità. Un insieme S, infatti, è definibile nel linguaggio dell'aritmetica se esiste una formula $A(x)$ in questo linguaggio tale che $A(\bar{n})$ è vera nella struttura standard dei numeri naturali, se e solo se $n \in S$. Tra gli insiemi definibili ma non rappresentabili in $\mathcal{T}$ troviamo quello delle formule consistenti o indimostrabili nel sistema.[74]

4.2.2 L'aritmetizzazione del linguaggio

Consolidati i concetti preliminari entriamo nel vivo dell'operazione compiuta da Gödel per arrivare ad ottenere una proposizione tale per cui essa non sia né

[72]Queste doppie implicazioni riguardano il caso di teorie sufficientemente ricche, tali da contenere PA.

[73]Per una definizione più precisa delle definizioni dei due concetti si rimanda a (Mendelson, 2009: 171-172, 346).

[74](Raatikainen, 2022).

dimostrabile né confutabile. Questo passaggio fondamentale all'interno della dimostrazione è conosciuto con diversi nomi: aritmetizzazione o codifica del linguaggio, o ancora numerazione di Gödel. Egli crea una mappatura effettiva che permette di passare attraverso una serie di operazioni meccaniche da una espressione nel linguaggio al suo numero corrispondente, e viceversa.

Per fare una operazione del genere il primo passo consiste nell'associare ad ogni simbolo del nostro linguaggio un numero naturale. Assegnati i numeri ai simboli base del nostro linguaggio, possiamo codificare il numero delle formule e successivamente il numero delle dimostrazioni stesse grazie alla sequenza dei numeri primi. Per cominciare occorre tradurre i simboli di una formula ai corrispondenti numeri di Gödel, successivamente usiamo la sequenza dei numeri primi per assegnare numeri alle formule stesse. Questa procedura è svolta elevando la sequenza dei numeri primi ai numeri dei simboli della formula rispettando il loro ordine di comparsa in essa. Ogni formula sarà, quindi, identificata da una serie di potenze di numeri primi, elevati alla potenza che identifica un certo simbolo, che moltiplicati tra loro daranno un numero unico alla formula. Possiamo eseguire la stessa procedura con le dimostrazioni, composte da una serie finita di passaggi, assegnando ad esse un numero risultato della moltiplicazione dei numeri primi elevati al numero di Gödel corrispondente alla formule che la compongono, rispettando sempre l'ordine dei passaggi. Questo algoritmo può essere invertito permettendo di passare dai numeri alle corrispettive formule e simboli. Ciò può essere fatto grazie alla unicità della fattorizzazione garantita dal teorema fondamentale dell'aritmetica[75]. Il numero di Gödel di una data formula A si indica nel seguente modo: $\ulcorner A \urcorner$.

Quindi le proprietà sintattiche, relazioni e operazioni sono tradotte in linguaggio aritmetico. I vari operatori diventano una serie di funzioni che associano una formula o una serie di formule al numero di Gödel corrispondente alla formula composta dall'operatore logico più le formule di partenza. Altre funzioni aritmetiche utili da costruire sono

- la funzione $Fm(x)$ vera per una dato numero naturale n se e solo se n è il numero naturale di una formula ben formata nel linguaggio preso in considerazione
- la funzione $M(x, y, z)$ il quale è vero se e solo se vi è una valida applicazione del modus ponens per delle formule A e B. In essa $x = \ulcorner A \urcorner$, $y = \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ e $z = \ulcorner B \urcorner$

[75](Cattaneo e Maria, 1996: 52).

In questo modo tutte le proprietà sintattiche e le operazioni possono essere tradotte al livello dei numeri e risultano fortemente rappresentabili in ogni teoria dei numeri naturali. Possiamo procedere nel definire la seguente relazione, la quale risulterà rappresentabile fortemente nel nostro sistema:

$Prov(x, y) :=$ x è il numero di Gödel di una dimostrazione della formula avente un numero di Gödel y

Possiamo definire infine la proprietà di una formula di essere dimostrata nella struttura con la formula $\exists x Prov(x, y)$ che denoteremo con $Dim(y)$. Quest'ultima risulta debolmente rappresentabile per mezzo di una formula del tipo Σ_1^0.

4.2.3 La diagonalizzazione

Possiamo ora enunciare la proposizione cardine usata da Gödel nella dimostrazione del suo teorema. Questa proposizione consiste nella diagonalizzazione:

Proposizione 5. *Sia $A(x)$ una formula arbitraria nel linguaggio di $\mathcal{T}$ con una sola variabile libera, allora possiamo costruire meccanicamente una proposizione D tale che*

$$\mathcal{T} \vdash D \leftrightarrow A(\ulcorner D \urcorner)$$

Per dimostrare tale proposizione occorre definire una funzione che rappresenti l'operazione di sostituzione di un numero con la corrispondente formula. Tale operazione ha il suo analogo in ambito aritmetico che dal numero di Gödel di una formula e dal numero n produce il numero di Gödel, dove $\bar{n}$ sostituisce la variabile della formula. In simboli usiamo la notazione $Sost(x, y, z)$, dove $x = \ulcorner A(x) \urcorner$, $y = n$ e $z = \ulcorner A(\bar{n}) \urcorner$.

Possiamo anche sostituire la variabile di una formula con il numero corrispondente alla formula stessa in modo da ottenere la funzione $Sost(x, x, y)$. Da ciò costruiamo un seconda formula $\exists y(A(y) \wedge Sost(x, x, y))$ la quale avrà un suo numero di Gödel. È possibile riapplicare la sostituzione a questa nuova formula sostituendo alla sua unica variabile libera il numerale che funge da suo numero di Gödel. Tale nuova formula sarà la formula D la quale avrà un nuovo numero di Gödel . La nostra teoria quindi riesce a dimostrare che il risultato di tale operazione di sostituzione è unico. Da ciò quindi sappiamo che se la nostra struttura deriva D e possibile formulare una proposizione $A(x)$, dove corrisponde unicamente a $\ulcorner D \urcorner$.

Questa proposizione ci fornisce una equivalenza tra D e $A(\ulcorner D \urcorner)$ in merito al loro valore di verità, senza implicare nulla sul loro significato.

4.2.4 La proposizione G e il significato del teorema

Nella dimostrazione di Gödel la diagonalizzazione è applicata alla negazione della proposizione $Dim(x)$ nel seguente modo:

$$\mathcal{T} \vdash G \leftrightarrow \neg Dim(\ulcorner G \urcorner).$$

Si dimostra dentro $\mathcal{T}$ stesso che G è vero se è solo se non è dimostrabile. G risulta né dimostrabile né confutabile all'interno di $\mathcal{T}$, se e solo se la struttura è 1-consistente .

Tale proposizione G è spesso chiamata la proposizione di Gödel, e tale proposizione è dimostrabile essere vera, se la teoria $\mathcal{T}$ è 1-consistente, ma di essa non abbiamo alcuna dimostrazione all'interno della teoria $\mathcal{T}$. Con tale proposizione si dimostrano i due punti del primo teorema, tuttavia anche se il teorema è applicabile ad una grande serie di sistemi formali la proposizione G varia da sistema a sistema.

Si potrebbe pensare per tentare di sistemare il problema derivato dalla prova del primo teorema di voler includere la proposizione G tra gli assiomi di $\mathcal{T}$. Tuttavia tale operazione sarebbe inutile al fine di risolvere il problema dell'incompletezza, siccome questa nuova teoria sarebbe una struttura che dimostra tutti i predicati di $\mathcal{T}$ e in quanto tale per lo stesso teorema possiamo formare una nuova formula del tipo di G, e quindi concludere nuovamente l'incompletezza.

Dal teorema, oltre a derivare l'incompletezza dell'aritmetica, si determina anche la sua indecidibilità. Questo si deve al fatto che all'interno della teoria è possibile formulare proposizioni le quali non possono né essere dimostrate, né confutate.

Ultima precisazione necessaria è che dal teorema si possono fare importanti considerazioni riguardanti i modelli della teoria dei numeri naturali. Risulta infatti dimostrabile a partire dal teorema i modelli delle teoria aritmetica del primo ordine non risultano tra loro isomorfi, e quindi dal teorema stesso trarre la non categoricità dell'aritmetica del primo ordine.[76] Anche se, come analizzato nel precedente paragrafo, il lavoro sui modelli non-standard non inizia con Gödel,

[76] Per una dimostrazione della non categoricità della teoria PA che fa uso dei risultati di Gödel si rimanda a (Smith, 2013: 213).

tuttavia il suo contributo ha alimentato l'uso lo studio di tali modelli in ambito aritmetico.

4.3 Sulla coerenza: il secondo Teorema di Incompletezza di Gödel

Arriviamo ora all'ultimo problema che affronteremo in questo capitolo: quello della consistenza. Procediamo quindi nel darne la definizione

Definizione 19. *Chiamiamo una teoria $\mathcal{T}$ consistente se e solo se non esiste nessuna formula ϕ tale che $\mathcal{T} \vdash \phi$ e $\mathcal{T} \vdash \neg\phi$.*

Il secondo teorema di Gödel tratta proprio della consistenza delle teorie dei numeri naturali. Dal predicato riguardante la dimostrabilità si può definire una formula che è vera se e solo se la teoria $\mathcal{T}$ è consistente. Si può formalizzare dentro la teoria che se fosse dimostrabile la formula che esprime la consistenza dentro la teoria lo sarebbe anche la proposizione G. Da ciò deriva che neppure la consistenza è dimostrabile dentro la teoria. Da qui l'enunciato del secondo Teorema di Incompletezza:

Teorema 5. [77] *Dato $\mathcal{T}$ una teoria assiomatica consistente che contiene PA. Allora la consistenza di $\mathcal{T}$ non è dimostrabile in $\mathcal{T}$.*

Il secondo teorema a differenza del primo è di importanza filosofica minore siccome non dice nulla riguardo la consistenza della teoria in sé. Infatti risulta possibile dimostrare la coerenza formale di queste teorie.[78] Tuttavia mostra che la teoria in sé è alquanto impotente siccome non riesce a dimostrare al suo interno questa importante proprietà metateorica.

[77] (Raatikainen, 2022).

[78] In merito alla dimostrabilità di questa proprietà, nel capitolo 3, analizzando la struttura PA, abbiamo osservato che esiste una dimostrazione.

5

Riflessioni filosofiche sui fondamenti dell'aritmetica

In questo ultimo capitolo della nostra esposizione tratteremo i risvolti filosofici delle nostre analisi. Cercheremo di capire cosa il nostro studio a livello teorico e metaterico è in grado di fornirci su un piano epistemologico. All'inizio del nostro lavoro abbiamo chiamato in causa una definizione molto generale del termine aritmetica e nel corso della trattazione abbiamo cercato di fondare i suoi elementi su un piano teorico.

Tuttavia, come si è visto in seguito alle analisi svolte nel capitolo precedente, il metodo assiomatico il quale agli inizi dello scorso secolo si presentava come il più interessante metodo di fondazione delle teorie matematiche risulta avere problemi in campo di teoria dei numeri. Nel diversi linguaggi le assiomatizzazioni mostrano diverse proprietà e tali proprietà sono interessanti da un punto di vista filosofico, siccome ci permettono di capire i limiti teorici non solo dell'aritmetica ma della matematica nel suo complesso.

Nel seguente capitolo presenteremo alcune considerazioni possibili su questi limiti dell'aritmetica per capire lo statuto epistemologica di questa disciplina nel suo complesso. Per cominciare occorrerà analizzare il problema generale della fondazione partendo da un breve richiamo dei risultatati tratti nel corso della nostra trattazione. Dopo proseguiremo analizzando come il problema fondazionale cambi rotta in seguito ai risultati di Skolem in ambito di teoria dei modelli e di Gödel in merito all'incompletezza. Partendo dalle implicazioni derivanti dai teoremi analizzati è possibile trarre diversi spunti interessanti di riflessione filosofica in merito a sue applicazioni affascinanti in argomenti di carattere metafisico più generale.

5.1 Sguardo complessivo sulla teoria dei numeri naturali

Per dare una visione di insieme dalla quale partire occorre richiamare in causa le analisi svolte nello scorso capitolo. Ogni teoria assiomatica, infatti, mira a riuscire a cogliere una particolare struttura tramite una serie di proposizioni primitive chiamate assiomi. Queste proposizioni, come abbiamo visto possono essere analizzate a diversi livelli e ordini logici. In base alla potenzialità del linguaggio di riferimento avremo diverse proprietà.

In ambito dei modelli delle teorie PA e PA_2, in seguito ai risultati ottenuti da Skolem, possiamo dire che la teoria espressa al secondo ordine risulta privilegiata, in quanto a differenza del suo analogo al primo ordine, risulta categorica. Come evidenziato già nel 3 capitolo, la categoricità è una caratteristica molto ricercata in ambito di fondazione della matematica. Lo stesso Hilbert nelle sue diverse dichiarazioni nell'ambito ha detto che una teoria che descrivesse l'aritmetica doveva configurarsi come categorica. I linguaggi di cardinalità infinita del primo ordine non riescono a garantirci questa proprietà. Da questa loro caratteristica, come abbiamo analizzato, fiorisce lo studio dei modelli non-standard[79], prima sviluppati in ambito insiemistico e in seguito in campo aritmetico. D'altro canto anche se PA_2 è categorica, essa non è in grado di fornirci una teoria con un sistema di deduzione completo e ciò risulta un limite ulteriore nello studio delle teorie assiomatiche.

Altra grande mancanza che caratterizza tutte le teorie dell'aritmetica è l'incompletezza. Il risultato di Gödel in ambito logico è il punto cruciale dell'indagine sui fondamenti. Egli tramite le sue indagini non solo pone fine al grandioso progetto di Hilbert, il quale mirava a costruire una assiomatizzazione dell'aritmetica completa, ma risulta chiave nella svolta in merito al modo in cui oggi è considerata la matematica in quanto disciplina e conoscenza. Dai suoi risultati derivano in

[79]Questi modelli non standard, sono modelli che soddisfano il sistema di assiomi ma differiscono dal modello inteso, cioè l'insieme dei numeri naturali con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione.

fatti importanti considerazioni in merito sia alla natura della matematica, dei suoi oggetti e delle proposizioni formulate in ambito matematico.

Con il crollo di una possibilità di una teoria competa si mostra infatti che è impossibile creare una teoria assiomatica che racchiuda l'aritmetica, la quale sia decidibile. La decidibilità è un elemento essenziale in ambito logico in quanto essa garantisce che qualsiasi proposizione risulta dimostrabile essere vera o falsa all'interno della teoria. Tuttavia, come è stato mostrato nel corso della trattazione, possiamo dare degli enunciati nelle teorie aritmetiche i quali risultano né dimostrabili né confutabili. Lo stesso tentativo di inserire queste proposizioni tra i nostri assiomi fallisce perché risulta nuovamente possibile creare una proposizione indecidibile in questa nuova struttura assiomatica.

Nell'ambito delle teorie assiomatiche analizzate nel nostro lavoro possiamo dire che mentre al primo e al secondo ordine abbiamo in entrambi i casi un calcolo coerente, non risulta possibile avere la completezza. In ambito di modelli della teoria quelle al secondo risultano categoriche. Da questi risultati possiamo ora partire nel dare delle considerazioni più generali di carattere filosofico sulla struttura dell'aritmetica

5.2 Il problema fondazionale: considerazioni filosofiche sull'aritmetica

5.2.1 I diversi approcci al problema dei fondamenti

Il problema dei fondamenti come abbiamo accennato negli scorsi capitoli è accomunato da diversi approcci fondazionali. In seguito analizzeremo i principali approcci che si hanno nel dibattito tra fine XIX e inizio XX secolo che abbiamo già menzionato e in parte analizzato.

Il primo approccio è quello logicista, il quale rappresenta un ambizioso tentativo di ridurre la matematica alla logica, senza fare affidamento su entità matematiche distinte o concetti ontologici. Questo ha guadagnato forza nel XIX secolo, grazie al lavoro di matematici e logici come Dedekind, Peano e Frege. Dedekind e Peano, come abbiamo già evidenziato, hanno svolto un ruolo cruciale definendo i principi fondamentali dell'aritmetica e stabilendo i numeri naturali come una struttura matematica. Questi principi hanno fornito una base solida per l'analisi dei numeri naturali e la formulazione delle leggi che li governano. Frege è stato un altro pioniere dell'approccio logicista. Ha dedicato gran parte della sua carriera a cercare di dimostrare come la matematica potesse essere ridotta alla logica. Ha sviluppato un sistema di logica di secondo ordine e ha derivato i principi dell'aritmetica di Peano (di secondo ordine) da questo sistema. Tuttavia, il suo sforzo si è basato su un principio noto come Principio di Comprensione, che si è rivelato problematico. Questa legge implicava l'identità tra insiemi definiti da predicati diversi, ma ha portato al paradosso di Russell, dimostrando che era inconsistente. Russell ha cercato un approccio diverso, introducendo una gerarchia di proprietà e classi per risolvere il problema dell'identità tra insiemi. Tuttavia, questa struttura non è stata sufficiente per derivare tutte le leggi fondamentali dell'aritmetica e ha richiesto l'introduzione di principi aggiuntivi, che non potevano essere considerati puramente logici.

Altro importante approccio ai problemi fondazionali è quello intuizionista, che si basa su una visione radicale della matematica come un'attività di costruzione mentale. Secondo questa prospettiva, i numeri naturali, reali, dimostrazioni e teoremi sono tutti considerati costruzioni mentali. Gli intuizionisti respingono l'idea di entità matematiche oggettive e l'infinito attuale, concentrandosi invece su collezioni potenzialmente infinite. Inoltre, rifiutano le dimostrazioni non costruttive che non forniscono un metodo per generare un esempio dell'entità matematica in questione. Questo approccio ha portato allo sviluppo di teorie intuizioniste dell'aritmetica, come l'Aritmetica di Heyting costruita escludendo il principio del terzo escluso. Sebbene l'aritmetica intuizionista sia meno potente di quella classica, esiste una traduzione sintattica che permette di dimostrare in modo intuizionista tutti i teoremi aritmetici classici. Sebbene inizialmente ci fosse un certo sostegno per l'intuizionismo, specialmente nella comunità matematica, le differenze rispetto alla matematica classica, soprattutto in ambito avanzato, hanno ridimensionato l'entusiasmo. Tuttavia, gli intuizionisti hanno continuato a sviluppare questa prospettiva critica dei fondamenti matematici.

Terzo e ultimo approccio è il formalismo, sostenuto da matematici come David Hilbert, che si distingue per la sua visione dell'aritmetica come un sistema di simboli astratti. In contrasto con gli intuizionisti, i formalisti non considerano i numeri naturali come costruzioni mentali o entità concrete, ma piuttosto come simboli astratti. Questi simboli sono considerati oggetti strettamente astratti, ma hanno la capacità di essere incorporati da oggetti concreti, definendoli quindi come "quasi-concreti". Ad esempio, i simboli matematici potrebbero essere rappresentati da tracce di inchiostro concretamente realizzate. Hilbert riteneva, tuttavia, che fosse problematico o quantomeno complesso interpretare in modo diretto e concreto le strutture matematiche più avanzate.

A differenza degli intuizionisti, i formalisti non adottano una posizione di revisione rispetto al corpo esistente di conoscenza matematica. Piuttosto, assumono un atteggiamento strumentalista nei confronti della matematica avanzata. Secondo Hilbert, la matematica superiore non è altro che un gioco formale, nel quale le affermazioni matematiche sono stringhe di simboli prive di interpretazione. La dimostrazione di tali affermazioni è una semplice manipolazione di simboli basata su regole fisse. L'obiettivo del "gioco della matematica superiore" consiste, secondo Hilbert, nel dimostrare affermazioni di aritmetica elementare, che invece hanno un'interpretazione diretta. Hilbert credeva fermamente nella solidità dell'aritmetica di Peano, o almeno in una sua sottospecie detta Aritmetica Primitiva Ricorsiva. Credeva che ogni affermazione aritmetica dimostrabile attraverso il ricorso alla matematica superiore potesse essere dimostrata direttamente nell'aritmetica di Peano. Tuttavia, Gödel dimostro lesistenza di proposizioni indecidibili allinterno dellaritmetica e limpossibilità per laritmetica di dimostrare la sua consistenza.

Questi risultati gettarono un'ombra sul programma di Hilbert, in quanto dimostrarono che il programma di Hilbert di ridurre l'intera matematica superiore a un semplice gioco formale basato sull'aritmetica non era realizzabile. Questi risultati mettono in discussione la visione di Hilbert secondo cui la matematica superiore potrebbe essere interpretata in modo puramente strumentale. Mentre il formalismo persiste come una visione coerente della matematica, le scoperte di Gödel hanno dimostrato che alcune verità matematiche vanno oltre il suo ambito formale e che non tutto può essere ridotto a una mera manipolazione di simboli.

Gli approcci finora analizzati anche se si pongono in forte dibattito tra di loro hanno una visione ontologica comune: l'antiplatonismo[80]. Nel logicismo l'obiettivo è ridurre la matematica alla logica, dimostrando che le entità matematiche possono essere definite in termini di concetti logici senza richiedere l'esistenza di entità indipendenti. Il formalismo, proposto da Hilbert, abbraccia un antiplatonismo radicale, vedendo la matematica come un gioco formale di simboli astratti, eliminando completamente l'ontologia matematica. Nell'intuizionismo, l'antiplatonismo è legato alla concezione della matematica come un'attività di costru-

[80](Horsten, 2023).

zione mentale, rifiutando l'idea di entità matematiche oggettive e indipendenti. Questi approcci condividono una visione che minimizza l'ontologia matematica, sottolineando l'attività umana, le regole formali o le costruzioni mentali come fondamenti della matematica, riducendo l'importanza delle entità matematiche indipendenti. In sintesi, questi approcci hanno giocato un ruolo significativo nel dibattito sulla natura della matematica, sfidando il platonismo matematico e spostando l'attenzione verso l'attività umana, le regole formali e le costruzioni mentali come basi fondamentali della disciplina matematica.

5.2.2 Il platonismo matematico e la natura delle entità numeriche

Il platonismo in matematica è una concezione filosofica che sostiene l'esistenza di entità matematiche come oggetti astratti, indipendenti dal pensiero umano e dall'esperienza fisica. Secondo il platonismo matematico, numeri, funzioni, insiemi e altre entità matematiche sono reali e esistono in un mondo separato da quello fisico e mentale. Questi oggetti matematici sono considerati atemporali, non spaziali e acausali, il che significa che non sono limitati da tempo, spazio o causa ed effetto.[81] Il platonismo matematico, quindi, afferma che le entità matematiche sono oggetti reali e esistenti, indipendentemente dalla mente umana o dal mondo fisico, e che i matematici scoprono piuttosto che inventano verità matematiche. Questa prospettiva è in netto contrasto con l'anti-platonismo matematico, che nega l'esistenza di tali entità astratte e vede le verità matematiche come concetti creati dalla mente umana piuttosto che scoperti in un mondo matematico indipendente.

Kurt Gödel, a differenza dei matematici che abbracciarono gli approcci appena analizzati, abbracciò un platonismo matematico sofisticato. La sua visione platonica riguardo agli oggetti e ai concetti matematici si distingueva per la sua profondità. Gödel riteneva che i principi relativi agli oggetti e ai concetti matematici presentassero un forte parallelismo con i principi relativi agli oggetti fisici e alle proprietà fisiche. Secondo Gödel, gli oggetti e i concetti matematici non sono costruiti dall'umanità, né sono riducibili a entità mentali. Essi condividono con gli oggetti e le proprietà fisiche un carattere di oggettività, esistendo al di fuori della mente umana. Proponeva che, analogamente alla percezione degli oggetti

[81] (Balaguer e Balaguer, 1998: 3).

fisici, attraverso l'intuizione matematica si stabilisce una sorta di relazione quasi percettiva con gli oggetti e i concetti matematici. Tuttavia, questa intuizione matematica non è infallibile ma può essere addestrata e migliorata. L'importante ruolo dell'intuizione matematica consiste nel fornire evidenza intrinseca per i principi matematici.

Diverso platonismo è quello presentato nella visione del naturalismo, come proposto da Quine, che fornisce una prospettiva metodologica rivoluzionaria nell'ambito della filosofia. Questa metodologia suggerisce che le migliori teorie a nostra disposizione siano le migliori teorie scientifiche. Pertanto, se desideriamo ottenere le migliori risposte disponibili a domande filosofiche come "Cosa conosciamo?" e "Quali tipi di entità esistono?"[82], non dovremmo fare riferimento alle teorie epistemologiche e metafisiche tradizionali. Dovremmo anche evitare di intraprendere un'indagine epistemologica o metafisica fondamentale partendo da primi principi. Invece, dovremmo consultare ed analizzare le nostre migliori teorie scientifiche, poiché contengono, anche se spesso in modo implicito, la nostra migliore descrizione di ciò che esiste, di ciò che conosciamo e di come lo conosciamo.

Putnam ha applicato la prospettiva naturalistica di Quine all'ontologia matematica. Egli fa presente come le nostre migliori teorie nelle scienze naturali sono espresse in termini matematici. Ad esempio, la teoria della gravitazione di Newton si basa pesantemente sulla teoria classica dei numeri reali. Di conseguenza, un impegno ontologico verso le entità matematiche sembra essere insito nelle nostre migliori teorie scientifiche. Questa linea di ragionamento può essere rafforzata appellandosi alla tesi quineana dell'olismo confermativo. Le prove empiriche non conferiscono il loro potere confermativo a una singola ipotesi individuale. Piuttosto, l'esperienza conferma globalmente la teoria in cui l'ipotesi individuale è incorporata. Poiché le teorie matematiche sono parte integrante delle teorie scientifiche, anch'esse ricevono conferma dall'esperienza. Inoltre, sembra che la matematica sia indispensabile per le nostre migliori teorie scientifiche: non è affatto ovvio come potremmo esprimerle senza fare ricorso al linguaggio matematico. Di conseguenza, la prospettiva naturalistica ci impone di accettare le entità matematiche come parte della nostra ontologia filosofica. Questa linea di argomentazione è chiamata argomento di indispensabilità. Se prendiamo la ma-

[82] (Horsten, 2023)

tematica coinvolta nelle nostre migliori teorie scientifiche alla lettera, sembra che ciò ci impegni in una forma di platonismo. Tuttavia, va notato che si tratta di una forma di platonismo più modesta rispetto a quella sostenuta da Gödel.

Tuttavia vi sono sfide notevoli anche per le letture platoniche. Una di queste è rappresentata dal problema epistemologico di Benacerraf. Questa critica è stata formulata da Paul Benacerraf nel suo saggio del 1973 intitolato "*Mathematical Truth*"[83]. L'argomento di Benacerraf si concentra sull'epistemologia delle entità matematiche, che secondo i platonici sono oggetti astratti senza localizzazione spaziale o temporale. Il problema inizia con l'assunto che la nostra migliore teoria della conoscenza sia la teoria causale della conoscenza. Questa teoria sostiene che la conoscenza deve derivare da interazioni causali tra il soggetto conoscente e l'oggetto di conoscenza. Tuttavia, i platonici affermano che gli oggetti matematici, come numeri o concetti matematici, sono entità astratte che non esistono nello spazio o nel tempo. Al contrario, i matematici che li studiano sono esseri umani spazialmente e temporalmente localizzati. Il problema di Benacerraf sta nel tentativo di spiegare come gli esseri umani possano acquisire conoscenza di entità matematiche astratte attraverso l'interazione causale, quando queste entità non esistono in uno spazio o in un tempo con cui potremmo interagire. In altre parole, se il nostro accesso alla conoscenza matematica richiede una connessione causale con gli oggetti matematici, come può avvenire questa connessione con oggetti che non hanno una presenza fisica o temporale?

Il problema epistemologico di Benacerraf ha portato i filosofi a sviluppare approcci strutturalisti e nominalisti nella filosofia della matematica. Questi approcci cercano di affrontare la difficoltà di spiegare come otteniamo conoscenza delle entità matematiche, specialmente in un contesto in cui le entità matematiche sono considerate astratte e non spazialmente o temporalmente localizzate.

Proprio in materia dei numeri naturali questa sfida li chiama in causa i merito alla duplice lettura che hanno in ambito insiemistico coinvolge l'identificazione dei numeri naturali con insiemi puri in modi diversi. La prima lettura è quella già presentata nel capitolo 3, dove l'insieme vuoto rappresenta lo 0 è poi ogni numero è l'insieme delle rappresentazioni di tutti i precedenti. Questa visione è stata presentata per la prima volta da Von Neumann nell'opera "*Die Axiomatisierung der Mengenlehre*" del 1923[84]. La seconda rappresentazione possibile è quella

[83](Benacerraf e Putnam, 1983).
[84](v. Neumann, 1928).

presentata nell'opera originale di Zermelo per la quale lo 0 è rappresentato sempre dall'insieme vuoto e poi ogni numero è rappresentato come un singoletto che contiene il precedente. Avremo quindi che nei due casi uno stesso numero avrà due diverse possibili designazioni. Prendendo ad esempio il numero 3 avremo rispettivamente queste rappresentazioni insiemistiche:

- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $\{\{\{\emptyset\}\}\}$

La domanda fondamentale che Benacerraf pone è: quale di questi modi consiste esclusivamente in vere affermazioni di identità? Inizialmente, sembra difficile rispondere a questa domanda. Entrambi i modi possono essere utilizzati per definire funzioni di successione e operazioni di addizione e moltiplicazione in modo che tutte le affermazioni aritmetiche ritenute vere vengano confermate. In altre parole, i due modi conducono a strutture isomorfe, che rendono verificate le stesse frasi (sono elementarmente equivalenti) dal punto di vista della teoria aritmetica.

Tuttavia, le divergenze emergono quando vengono poste domande extra-aritmetiche come quelle che indicano l'appartenenza di un numero al successivo.. In base ai due modi, si ottengono risposte diverse. Questo pone il problema della trasmittanza dell'identità, che è una questione strettamente insiemistica. In definitiva, Benacerraf giunge a una situazione in cui sembra non esserci alcun motivo convincente per considerare un modo superiore all'altro. Tuttavia, non possono entrambi essere corretti. Questo dilemma è noto come "problema dell'identificazione di Benacerraf".

La conclusione logica di questa sfida sembra suggerire che né il primo modo né il secondo siano corretti. Questo solleva il dubbio che i numeri naturali non siano insiemi in alcun modo. Benacerraf applica lo stesso ragionamento anche ai numeri razionali, reali e oltre. Questo porta alla conclusione che anche queste entità matematiche non possono essere considerate insiemi. Inoltre, si pone la questione se matematici famosi come Gödel siano effettivamente impegnati a ridurre i numeri naturali a insiemi puri. Un platonista potrebbe sostenere che i numeri naturali possono essere incorporati nell'universo insiemistico, ma questa incorporazione non rappresenta una riduzione ontologica. In altre parole, i numeri naturali non perdono le loro proprietà specifiche in virtù della loro incorporazione negli insiemi. Questo solleva la questione della natura delle entità matematiche e se esista un modo diverso per elucidarne la natura, diverso dalla riduzione agli insiemi.

Per affrontare questi problemi, sono state sviluppate diverse prospettive filosofiche. La prima che occorre analizzare è lo strutturalismo proposto da Shapiro[85] sostiene che le teorie matematiche, anche non-algebriche, descrivono strutture piuttosto che entità specifiche. Queste strutture consistono di posizioni che stanno in relazioni strutturali tra loro, e le teorie matematiche descrivono queste posizioni. Questo approccio aiuta a evitare il problema dell'interazione causale con entità astratte. Seconda prospettiva è presentata nella visione nominalista proposta da diversi filosofi[86], i quali hanno cercato di fornire una ricostruzione nominalista delle teorie matematiche, in cui le entità concrete e relazioni concretamente esistenti simulano le entità matematiche. Tuttavia, questo approccio incontra difficoltà quando si tratta di numeri naturali, in quanto richiederebbe un numero infinito di entità concrete.

Si è tentato di dare una visione unitaria che potesse risolvere i problemi di entrambe le proposte ma al contempo mantenendone i punti di forza. Tale proposta è quella del cosiddetto strutturalismo *in rebus*[87] nel quale le strutture matematiche esistono solo all'interno dei sistemi che le istanziano, senza richiedere l'esistenza di entità astratte al di fuori di tali sistemi. Questo approccio cerca di risolvere il problema dell'interazione causale con entità astratte, mantenendo una base concreta per le teorie matematiche. In particolare, il problema di identificazione di Benacerraf ha portato a considerare se i numeri naturali siano effettivamente insiemi. Le teorie strutturaliste e nominaliste cercano di affrontare questa questione, sostenendo che i numeri naturali potrebbero non essere riducibili a insiemi e che la loro natura può essere meglio compresa attraverso relazioni strutturali piuttosto che entità distinte. Questi approcci cercano di superare il problema epistemologico di Benacerraf e di fornire spiegazioni più convincenti sulla natura della matematica e della conoscenza matematica, riducendo la dipendenza da entità astratte.

---

[85](Shapiro, 2000b).

[86]I primi a fornire una interpretazione nominalista sono (Goodman e Quine, 1947), i quali cerano di costruire una visione secondo cui le proposizioni matematiche non si riferiscono ad entità astratte. Continuando su questo terreno (Field, 1980) propone una visone fisicalista, interpretando la struttura dei numeri reali con la meccanica newtoniana.

[87]Per contributi in materia citiamo (Putnam, 1967) e (Parsons, 1990a).

5.3 Ulteriori considerazioni sui risultati metateorici e l'assiomatizzazione

Nel seguente paragrafo analizzeremo più approfonditamente i risultati filosofici derivanti dalla trattazione delle nostre analisi metateoriche. Tali argomenti vedranno come oggetto di analisi le teorie assiomatiche e la loro caratterizzazione, i diversi risultati epistemologici e ontologici derivanti dall'utilizzo dei diversi ordini logici per esprimere la nostra teoria e la natura delle proposizioni aritmetiche. In questo modo si tenterà di fornire una descrizione epistemologica generale della scienza aritmetica sia nella sua struttura che nella sua pratica.

5.3.1 Assiomatizzazioni del primo e del secondo ordine e categoricità dei modelli

Passiamo ora ad uno studio più approfondito sui problemi evidenziati a partire dai teoremi in ambito metateorico analizzati nello scorso capitolo. I primi risultati presentati ci vengono da Löwenheim e Skolem che ci forniscono importanti risultati per le teorie del primo ordine. Queste teorie se hanno un modello infinito, hanno un modello per ogni infinita cardinalità. Questo problema delle teorie del primo ordine interessa in modo molto rilevante l'assiomatizzazione dell'aritmetica.

Abbiamo visto che in terreno aritmetico esistono le assiomatizzazioni del primo e quelle del secondo ordine, e si è detto che quelle del primo risultano non categoriche. La non categoricità di questo tipo di assiomatizzazione risiede proprio nei risultati di Löwenheim e Skolem. Quelle del secondo ordine diversamente hanno modelli tutti isomorfi fra di loro. Questo risultato viene raggiunto per la prima volta da Dedekind[88] .

Queste conclusioni in terreno metateorico ci permettono, in questa sede, di chiarire alcune differenze importanti tra gli assiomi del primo e del secondo ordine. Punto cruciale della differenza tra i due sistemi assiomatici giace nell'assioma che esprime il principio di induzione. Al primo ordine tale assioma è presentato come uno schema di assiomi: quindi per ogni formula dell'aritmetica del primo ordine che presenta al suo interno una variabile libera abbiamo una nuova formulazione

[88](Dedekind e a cura di Gana, 1982: 115-117).

del principio di induzione. Tale numero di proprietà si rivela infinito. Il primo ordine, inoltre, non è in grado di esprimere il principio di induzione nella sua piena forza a differenza del secondo. Ciò deriva dal fatto che nel primo ordine non tutte le proprietà dei naturali risultano esprimibili da formule, mentre il secondo è in grado di esprimere l'induzione come principio valido per tutte le proprietà dei naturali.

Questi motivi inducono molti matematici e filosofi[89] a sostenere che una teoria assiomatica che voglia racchiudere la teoria numeri naturali debba essere formulata al secondo ordine. A livello ontologico le posizioni strutturaliste, soprattutto, possono giovare di una assiomatizzazione al secondo ordine. Lo strutturalismo, infatti, mira a dare una formulazione delle teorie matematiche che abbiano uno modelli uguali tra di loro. Lo strutturalismo nominalista, o *in rebus*, anche ne trae benefici siccome punta a isolare il modello vero della matematica.

Tuttavia, come la formulazione al primo ordine, anche quella al secondo presenta le sue controversie. La prima obiezione riguarda l'alto impegno ontologico associato alla logica del secondo ordine, poiché questa sembra richiedere l'esistenza di oggetti astratti come le classi. Tale impegno ontologico deriva proprio dalla quantificazione del secondo ordine che può avere nel suo ambito sia insiemi di oggetti, sia classi di insiemi. Questa forma di logica è problematica per i nominalisti e coloro che cercano di evitare il riferimento a entità astratte. Tuttavia, George Boolos[90] ha proposto una soluzione nota come "interpretazione plurale" della logica del secondo ordine per evitare questo alto impegno ontologico. In questa interpretazione, le quantificazioni di secondo ordine non vengono interpretate come riferite a classi astratte, ma piuttosto come riferite a pluralità di oggetti concreti. La posizione di Boolos, tuttavia, ha i suoi oppositori i quali ribadiscono la posizione del duplice livello ontologico della quantificazione.

La seconda obiezione, la quale può essere fatta risalire a Quine, si riferisce al fatto che la logica del secondo ordine è intimamente connessa con questioni profonde della teoria degli insiemi, come l'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo. Questa connessione significa che la logica del secondo ordine è coinvolta in problemi irrisolti e controversie in matematica, come l'ipotesi del continuo, che

[89]Per motivazioni approfondite riguardo lo studio del secondo ordine e i motivi matematici e filosofici per preferirlo si raccomanda (Shapiro, 2000a), nel quale si trovano anche alcune motivazioni di che abbracciano la visione strutturalista)

[90](Boolos, 1998).

è indipendente dai principi accettati della teoria degli insiemi. Questo solleva dubbi sulla determinatezza delle affermazioni della logica del secondo ordine, in particolare quelle relative a modelli infiniti, portando alcuni filosofi a ritenere che tali affermazioni non abbiano un valore di verità definito.

Per ottenere formulazioni categoriche dell'aritmetica si possono adottare diverse strategie. Uno degli approcci approcci menzionati[91] consiste nell'introduzione di quantificatori intermedi, posizionati tra quelli del primo e del secondo ordine. Ad esempio, è possibile introdurre un quantificatore primitivo come "esistono un numero finito di x", consentendo così la costruzione di formulazioni categoriche dell'aritmetica. Tuttavia anche se in questo modo otteniamo la categoricità, abbiamo una nuova logica la quale risulta non compatta e non completa. In alternativa, è possibile basarsi sul concetto di computabilità,[92] assumendo che le operazioni di addizione e moltiplicazione siano funzioni computabili. Questo implica che tutti i modelli del sistema Peano sono isomorfi tra loro, aprendo la strada a formulazioni categoriche. Un terzo approccio coinvolge argomenti di categoricità interna.[93] Supponendo che due matematici formulino, ognuno nel rispettivo idioma, la teoria di Peano al primo ordine e considerino l'induzione matematica come una collezione aperta di predicati. Ammettendo che i matematici accettino reciprocamente gli schemi di induzione dellaltro, i due possono convincersi reciprocamente che le loro teorie descrivono strutture isomorfe. La scelta dell'approccio dipenderà dalle preferenze filosofiche e dalle assunzioni accettate sulle proprietà delle teorie matematiche, tenendo presente che queste strategie possono sollevare importanti questioni filosofiche che variano a seconda del contesto in cui vengono utilizzate.[94]

5.3.2 La natura delle proposizioni aritmetiche

Un altro importante tema analizzabile a partire dai risultati metateorici è la natura delle proposizioni in ambito aritmetico. Fin dalla filosofia moderna la natura delle proposizioni matematiche è stata oggetto di dibattito. Tra i grandi protagonisti nella storia del dibattito della natura di queste proposizioni vi è Immanuel

[91]Tale proposta è suggerita all'interno di (Horsten, 2023).
[92](Halbach e Horsten, 2005).
[93](Parsons, 1990b).
[94](Horsten, 2023).

Kant, che nella sua opera "*Critica della ragion pura*"[95], configura le proposizioni aritmetiche come sintetiche a priori, le quali aggiungono informazioni rispetti alle proposizioni da cui derivano, senza però derivare tale informazioni dall'esperienza. Diversa era la concezione delle scuole razionaliste che vedevano la matematica come una scienza puramente analitica, che quindi operava dividendo i concetti primari in concetti nuovi.

Questo dibattito continua in epoca contemporanea configurandosi come tema centrale nel dibattito tra Frege e Quine[96]. Frege cercò di riformulare il concetto di analiticità in opposizione alla tradizione kantiana, sostenendo che le proposizioni aritmetiche non vanno definite sintetiche solo perché aumentano il bagaglio delle nostre conoscenze. Per Frege l'analiticità e sinteticità di un enunciato si determinano a seconda del tipo di giustificazione offerta per una certa proposizione. Quindi, contrariamente alla definizione kantiana, Frege non collegò l'analiticità al significato intrinseco delle proposizioni, ma piuttosto alla loro derivabilità formale da un numero finito di assiomi e definizioni di carattere logico. Questa prospettiva suggerisce che l'analiticità delle proposizioni aritmetiche non è basata su una caratteristica evidente del loro significato, ma piuttosto sulla loro giustificazione deduttiva.

Questo contrasta con la visione di Quine, che, influenzato dagli empiristi logici, critica la distinzione tradizionale tra proposizioni analitiche e sintetiche. Quine sostiene una nuova concezione del linguaggio che è in linea con un empirismo senza dogmi. Lempirismo senza dogmi di Quine è una prospettiva filosofica che sfida la distinzione tradizionale tra fatti osservabili e teoria scientifica. Secondo Quine, le teorie sono reti complesse di credenze interconnesse, il cui significato è legato al contesto teorico più ampio. Questa visione implica che la revisione di una parte della teoria può influenzare altre parti, enfatizzando la coerenza e linterconnessione delle credenze scientifiche. Da questa posizione egli tra la sua critica alla distinzione tradizionale tra proposizioni analitiche e sintetiche. Quine rifiuta questa distinzione, suggerendo che la revisione teorica coinvolge sia proposizioni logicamente necessarie che affermazioni dipendenti dai fatti empirici. Ciò implica che le affermazioni aritmetiche non possono essere facilmente separate in proposizioni puramente analitiche, deducibili solo dalla logica e dalla definizione delle parole, e proposizioni sintetiche, che dipendono dai fatti del mondo. Quine sug-

[95](Kant, 2005).
[96](Bradascio, 2015).

gerisce che il significato delle affermazioni aritmetiche è intrinsecamente legato al contesto teorico più ampio e alla rete complessa di credenze. La discussione tra Frege e Quine solleva domande fondamentali sulla natura delle proposizioni aritmetiche, la loro giustificazione e il significato delle parole "analitico" e "sintetico" in filosofia della matematica.

Nel dibattito in epoca contemporanea grande influenza hanno avuto i Teoremi di Incompletezza. Lo stesso già menzionato Quine li ha usati per sostenere la sua critica alla tradizionale visione filosofica secondo cui tutte le verità matematiche potrebbero essere derivate per mezzo di passaggi autoevidenti da verità e osservazioni, anch'esse autoevidenti. Putnam[97] a sua volta sostiene che assumendo naturalmente la parola analitico, l'esistenza di proposizioni indecidibili in matematica mostra che vi sono in questa disciplina giudizi di natura sintetica.[98] Per capire meglio chiariamo che il senso naturale di analiticità, citando lo stesso Putnam[99]:

> *derivare conclusioni dagli assiomi che sono sistemati una volta per tutte.*

Tuttavia egli avanza la possibilità di integrare le deduzioni da principi autoevidenti, quali gli assiomi, con ipotesi "evidenti" confermate da "esperimenti" matematici. Combinando, in tal modo, prove deduttive e conferme attraverso esperimenti matematici potrebbe essere quasi necessario nella ricerca della verità, specialmente in contesti come la teoria dei numeri. Putnam sottolinea, inoltre, che tutte le affermazioni dimostrabili dagli assiomi formano un insieme ricorsivamente enumerabile, ma il Teorema di Gödel mostra che l'insieme delle verità della teoria elementare dei numeri non è ricorsivamente enumerabile. Di conseguenza, si suggerisce che lutilizzo di metodi quasi-empirici potrebbe essere cruciale per scoprire "verità sintetiche" altrimenti inaccessibili tramite approcci puramente deduttivi.

[97](Putnam, 1975).
[98]Per ulteriori informazioni sulla distinzione (Rey, 2023).
[99](*Idem.*).

Conclusioni

Tramite questo elaborato abbiamo cercato di analizzare logicamente il problema dell'aritmetica, adottando il metodo assiomatico. Tale approccio allo studio della teoria dei numeri naturali ci ha permesso di svolgere non solo uno studio delle caratteristiche metateoriche dell'aritmetica, ma è stato anche la base per trarre riflessioni filosofiche sull'epistemologia e ontologia delle teorie matematiche.

Da principio abbiamo mostrato come i vari elementi oggetto dell'aritmetica, ossia i numeri e le operazioni, siano studiabili da un punto di vista fondazionale partendo dal problema della caratterizzazione dei numeri naturali. Per compiere questo lavoro si sono usate nozioni di natura insiemistica, cercando di dare una caratterizzazione breve e efficiente dei vari insiemi numerici.

Il problema dell'aritmetica, quindi, è stato affrontato come il problema della fondazione dei numeri naturali. Per portare a termine questo scopo si sono mostrati diversi approcci, come quello logicista e quello della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel. Tali teorie, tuttavia, ci forniscono una caratterizzazione dei naturali partendo da concetti extra-aritmetici. Per darne quindi una caratterizzazione basata sui soli principi dell'aritmetica e nozioni logiche di base, si è optato per l'approccio assiomatico allo studio della teoria.

Il metodo assiomatico diventa quindi oggetto della nostra indagine, permettendoci di caratterizzare la teoria dei numeri naturali senza basarci su altre teorie. Abbiamo analizzato come storicamente tale approccio è risultato essenziale per lo sviluppo della scienza matematica in generale e, infine, fornito una caratterizzazione della teoria dei numeri naturali presentando gli Assiomi di Peano al primo e al secondo ordine.

Definiti gli oggetti teorici della nostra indagine, abbiamo potuto fornire uno studio metateorico delle teorie proposte presentando i Teoremi di Löwenheim-Skolem e i Teoremi di Gödel. Tramite l'analisi di questi risultati e delle loro conseguenze abbiamo potuto studiare i limiti dell'approccio assiomatico, comprendendo i limiti che la teoria presenta se analizzata in questo modo. Riassumendo brevemente i risultati abbiamo che la teoria dei numeri naturali al primo ordine risulta non categorica, incompleta e indecidibile. Quella al secondo ordine, invece, risulta categorica anche se formulata in un linguaggio con sistema di deduzione incompleto. Ulteriore limite della teorie assiomatiche che esprimono l'aritmetica è l'impossibilità di dimostrare la loro consistenza, tuttavia questo risultato è dimostrabile attraverso strumenti extra-teorici.

Dai risultati metateorici abbiamo quindi presentato varie riflessioni di carattere filosofico, analizzando i vari approcci attraverso i quali è possibile studiare le teorie matematiche. Abbiamo presentato, quindi, le varie scuole di pensiero che hanno dato origine allo studio dei fondamenti, quali quella logicista, fondazionalista e intuizionista, cercandone di comprendere i punti di forza e i limiti teorici. In seguito abbiamo mostrato come tali scuole abbraccino un approccio antiplatonico di analisi delle strutture matematiche, considerando quindi la matematica come una scienza svincolata dalla realtà e basata unicamente sulla logica, sulle relazioni formali tra i concetti prodotti totalmente dall'uomo o derivante da una costruzione mentale. Da qui abbiamo visto come tali visioni subiscono delle critiche in seguito ai risultati di Gödel, i quali riattivano l'interesse per il platonismo. Sotto tale prospettiva nascono nuovi approcci allo studio delle entità matematiche nella seconda metà dello scorso secolo, quali nominalismo e strutturalismo. Queste ultime teorie cerano di fornire argomentazioni in grado di colmare i limiti del platonismo classico in merito allo studio della natura delle entità numeriche.

Queste considerazioni di carattere ontologico aprono in seguito la strada a delle considerazioni generali di natura epistemologica dell'aritmetica e dell'approccio assiomatico, usato in questa tesi per il suo studio. Problema iniziale riguarda la caratterizzazione della teoria dei numeri naturali nei diversi ordini logici. Il primo e il secondo ordine forniscono, come detto in precedenza, diverse proprietà. Questa diversità, soprattutto in materia di categoricità, apre un forte dibattito su quale sia l'assiomatizzazione da usare. Da qui nascono, come si è mostrato, diverse proposte per fornire soluzioni a tale problema cercando di trovare soluzioni che colgano le buone proprietà della teorie in entrambi i linguaggi.

Secondo punto è la natura della proposizioni aritmetiche e lo studio dei concetti di analiticità e sinteticità. Questo tema è affrontato sia in chiave storica che filosofica. Sin dalla tradizione kantiana nasce questo dibattito, il quale continua con Frege, Quine e Putnam tra i più recenti. Questo dibattito non arriva a conclusione definitiva, anche se con le analisi fornite da Gödel si assumono nuove argomentazioni per la visione delle proposizioni matematiche come sintetiche.

Per concludere ad oggi, il problema della fondazione è ancora natura di dibattito sia da un lato ontologico che epistemologico. Da un punto di vista filosofico l'approccio assiomatico offre diversi spunti d'indagine come si è tentato di mostrare nel corso della trattazione. Tra le varie tematiche analizzate molte risultano ancora senza una risposta definitiva e con dibattiti aperti, sia nel tentativo di trovare soluzioni sincretiche delle varie proposte in gioco, sia nel tentativo di difesa di un particolare approccio. Tale studio, inoltre, non risulta importante solo da un lato filosofico ma anche matematico. Non a caso gli stessi risultati e protagonisti della ricerca matematica entrano in gioco nel corso della nostra trattazione.

Bibliografia

Acerbi, E. & Buttazzo, G. (1997). *Primo corso di analisi matematica*. Pitagora.

Balaguer, M. & Balaguer, M. (1998). *Platonism and anti-Platonism in mathematics*. Oxford university press.

Bays, T. (2022). Skolems Paradox. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Cur.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2022). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Benacerraf, P. & Putnam, H. (Cur.). (1983). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2nd). Cambridge University Press.

Bertsch, M., Dal Passo, R. & Giacomelli, L. (2007). *Analisi matematica*. McGraw-Hill.

Boolos, G. (1998). *Logic, Logic, and Logic*. Harvard University Press.

Boyer, C. B., Lombardo Radice, L. & Carugo, A. (1976). *Storia della matematica*. ISEDI.

Bradascio, M. T. (2015). La nozione di Analiticità e di conoscenza A Priori. *Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior*, *Vol 6*, No 1 (2015). https://doi.org/10.13130/2037-4445/4808

Bridge, J. (1977). *Beginning model theory : the completeness theorem and some consequences*. Claredon Press.

Bukhshtab, A. & Pechaev, V. (2011). Arithmetic. *Encyclopedia of Mathematics*. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Arithmetic&oldid=45221

Cattaneo, P. & Maria, G. (1996). *Algebra: un approccio algoritmico*. Decibel Zanichelli.

Dedekind, J. & a cura di Gana, F. (1982). *Scritti sui fondamenti della matematica*. Bibliopolis.

Enderton, H. B. (1977). *Elements of set theory*. Academic Press.

Enderton, H. B. (2001). Academic Press.

Field, H. (1980). *Science without Numbers: A Defense of Nominalism*. Blackwell.

Frege, G. & a cura di Mangione, C. (1965). *Logica e aritmetica*. Boringhieri.

Frege, G., Ebert, P. A., Rossberg, M., Wright, C. & Beaney, M. (2013). *Basic laws of arithmetic : derived using concept-script . Volumes 1. 2.* Oxford University Press.

Gabriel, G., Hermes, H., Kambartel, F., Thiel, C., Veraart, A., McGuinness, B. & Kaal, H. (Cur.). (1980). *Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence*. Blackwell.

Giusti, E. (1983). *Analisi matematica 1*. Boringhieri.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, *38-38*(1), 173–198.

Goodman, N. & Quine, W. V. O. (1947). Steps Towards a Constructive Nominalism. *Journal of Symbolic Logic*, *12*, 97–122.

Halbach, V. & Horsten, L. (2005). Computational Structuralism. *Philosophia Mathematica*, *13*, 174–186.

Hilbert, D. & a cura di Manara, C. F. (1970). *Fondamenti della geometria*. Feltrinelli.

Hilbert, D. & Ackermann, W. (1959). *Grundzüge der theoretischen Logik* (4. Aufl). Springer.

Horsten, L. (2023). Philosophy of Mathematics. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Cur.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2023). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Kant, I. (2005). *Critica della ragion pura*. GLF editori Laterza.

Lolli, G. (1994). *Dagli insiemi ai numeri : storia e assiomatica della teoria degli insiemi*. Bollati Boringhieri.

Lolli, G. (2011). *La guerra dei trent'anni (1900-1930) : da Hilbert a Gödel*. ETS.

Mancosu, P., Galvan, S. & Zach, R. (2021). *An Introduction to Proof Theory: Normalization, Cut-Elimination, and Consistency Proofs* (S. Galvan & R. Zach, Cur.). Oxford University Press.

Mendelson, E. (2009). *Introduction to Mathematical Logic* (5th). Chapman; Hall/-CRC. https://doi.org/10.1201/9781584888772

Parsons, C. (1990a). The Structuralist View of Mathematical Objects. *Synthese*, *84*(3), 303–346.

Parsons, C. (1990b). The Uniqueness of the Natural Numbers. *Iyyun*, *13*, 13–44.

Pasch, M. (1882). *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Teubner.

Peano, G. & Odifreddi, P. (2001). *Arithmetices principia, principi di geometria e di logica*. N. Aragno.

Pinch, R. (2014). Ordered pair. *Encyclopedia of Mathematics*. http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Ordered_pair&oldid=35380

Putnam, H. (1967). Mathematics without Foundations. *Journal of Philosophy*, *64*(1), 5–22.

Putnam, H. (1975). What is Mathematical Truth? *Historia Mathematica*, *2*, 529–545.

Raatikainen, P. (2022). Gödels Incompleteness Theorems. In E. N. Zalta (Cur.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2022). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Rey, G. (2023). The Analytic/Synthetic Distinction. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Cur.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2023). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Shapiro, S. (2000a). *Foundations without Foundationalism*. Oxford University Press.

Shapiro, S. (2000b). *Philosophy of Mathematics*. Oxford University PressNew York.

Skolem, T. (1929). Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik. *Proceedings of the 7th Scand. Math. Congress*, 3–21.

Skolem, T. (1934). Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. *Fundamenta Mathematicae*, *23*, 150–161.

Smith, P. (2013). *An introduction to Godel's theorems* (2. ed). Cambridge University Press.

Tennant, N. (2017). Logicism and Neologicism. In E. N. Zalta (Cur.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2017). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Treccani. (2013). Immersione. *Enciclopedia della Matematica*. https://www.treccani.it/enciclopedia/immersione_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/

v. Neumann, J. (1928). Die Axiomatisierung der Mengenlehre. *Mathematische Zeitschrift*, *27*(1), 669–752.

Whitehead, A. N. & Russell, B. (1910). *Principia Mathematica* (2. ed.). Cambridge University Press.

Zach, R. (2023). Hilberts Program. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Cur.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*, *65*(2), 261–281.

Ringraziamenti

Giunto alla fine di questa trattazione desidero spendere alcune parole per ringraziare tutti coloro che sono stati essenziali per questo mio percorso di studi durato tre anni.

In primo luogo vorrei esprimere la mia più sincera gratitudine al Prof. Ivano Alessandro Ciardelli per la sua saggezza e sostegno durante la stesura di questa tesi. La sua guida e i suoi consigli si sono rivelati essenziali per poter portare a compimento questo lavoro.

Un ringraziamento affettuoso va alla mia famiglia, che ha sostenuto e incoraggiato ogni mio passo. Le vostre parole di conforto e il vostro appoggio infinito hanno reso possibile questo importante traguardo.

Ai miei amici va il mio sentito ringraziamento. Grazie per aver reso questi anni universitari così preziosi, per le risate condivise e per esservi sempre mostrati presenti, anche nelle sfide più impegnative, regalandomi tantissime esperienze che mi hanno fatto crescere e maturare.

Il supporto di tutti i suddetti ha reso questo cammino di studio e crescita un'esperienza indimenticabile.