



**Università degli Studi di Padova**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA.**

*Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione.*

**Controllo distribuito ed in retroazione della  
potenza reattiva per la regolazione di  
tensione e la minimizzazione delle perdite**  
(Distributed reactive power feedback control for  
voltage regulation and loss minimization)

*Laureando*

**Fraccaroli Francesco**

*Relatore*

**Carli Ruggero**

*Co-relatore*

**Cavraro Guido**

---

ANNO ACCADEMICO 2014/2015



A chi ho già ringraziato e a chi  
non sarò mai grato abbastanza

La sabiduría nos llega cuando ya no nos sirve de nada.

*Gabriel García Márquez*



## Sommario

Si considera il problema di utilizzare i microgeneratori dislocati in una *smart grid* per fornire iniezioni di potenza reattiva con l'obiettivo di controllare le tensioni nodali entro un intervallo di tolleranza. Si esaminano alcuni algoritmi puramente locali o distribuiti già presenti in letteratura e viene proposta una strategia di controllo finalizzata in primo luogo alla *voltage regulation* ed in secondo luogo anche alla minimizzazione delle perdite di potenza nelle linee. L'algoritmo di controllo proposto è progettato in modo da garantire una soluzione *feasible* del problema di controllo delle tensioni, nel caso sia effettivamente possibile, e di raggiungerla attraverso un transitorio ridotto. Le prestazioni degli algoritmi descritti sono analizzate mediante il ricorso a simulazioni per testare la robustezza della strategia di controllo proposta al variare del numero di acquisizioni da parte dei sensori della *smart grid*.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Notazione matematica</b>	<b>9</b>
2.1	Notazione matriciale . . . . .	9
2.2	Nozioni di teoria dei grafi . . . . .	9
2.3	Regime sinusoidale e fasori . . . . .	11
2.4	Notazione <i>per-unit</i> . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Modello di <i>smart grid</i></b>	<b>17</b>
3.1	<i>Physical layer</i> . . . . .	17
3.1.1	Generatori e carichi . . . . .	18
3.1.2	Linee e cavi . . . . .	20
3.1.3	Equazioni di rete . . . . .	23
3.2	<i>Cyber layer</i> . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Modello della rete</b>	<b>29</b>
4.1	Modello approssimato e sue proprietà . . . . .	29
4.2	Modello alternativo . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Algoritmi di controllo puramente locali</b>	<b>35</b>
5.1	Algoritmo <i>loc1</i> . . . . .	35
5.2	Algoritmo <i>loc2</i> . . . . .	37
5.3	Limiti degli algoritmi locali . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Ottimizzazione di reti elettriche</b>	<b>45</b>
6.1	Problema di <i>Optimal Power Flow</i> . . . . .	45
6.2	Problema di <i>Optimal Reactive Power Flow</i> . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Controllore con comunicazione tra i nodi</b>	<b>53</b>
7.1	Algoritmo <i>dist</i> . . . . .	53
7.1.1	Algoritmo sincrono . . . . .	55
7.1.2	Significato dei moltiplicatori di Lagrange . . . . .	56

7.1.3	Analisi di convergenza dell' algoritmo sincrono . . . . .	57
7.2	Limiti dell' algoritmo <i>dist</i> . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Algoritmo <i>misto</i></b>	<b>61</b>
<b>9</b>	<b>Simulazioni</b>	<b>65</b>
<b>10</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Dimostrazione di Proposizione 7.1.1</b>	<b>75</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>81</b>







# Capitolo 1

## Introduzione

Con il termine *smart (micro)grid* si intende una porzione (a bassa tensione) di una rete di distribuzione gestita autonomamente rispetto al resto della rete elettrica con l'obiettivo di migliorare la qualità del servizio fornito agli utenti, ad esempio regolando la tensione a ciascun *bus*.

Un approccio classico per far sì che le tensioni ai nodi della rete siano prossime alla nominale è quello basato sull'utilizzo di *transformer taps* e *capacitor banks* [1], [2]. Si tratta di considerare misure, solitamente di tensione, per controllare lo stato della rete e, nel caso, connettere delle impedenze ad alcuni nodi in modo da cambiare le condizioni del carico e riportare i valori di tensione in prossimità di quelli nominali.

Negli ultimi anni, per ragioni ambientali ed economiche si è optato per ricorrere anche a generatori di energia pulita, i quali però comportano una maggiore variabilità dei valori di tensione a causa del fatto che la generazione è dipendente dalle condizioni ambientali. In queste applicazioni, la rapidità delle variazioni delle tensioni implica un deterioramento molto più veloce dei dispositivi di controllo riconducibili ai *capacitor banks*, per questa ragione le moderne tecniche di *voltage regulation* si basano su altre tecnologie.

In particolare si sfruttano piccoli generatori di potenza, detti microgeneratori, per risolvere problemi di controllo di tensione o minimizzazione delle perdite in reti a bassa tensione.

Per conseguire gli obiettivi proposti è necessario disporre di almeno una parte dei fasori delle tensioni nodali, attualmente sono disponibili dei dispositivi, detti PMU (*Phasor Measurement Unit*), in grado di assolvere questo compito. Tali dispositivi sono tuttavia abbastanza costosi, pertanto raramente in una rete tutti i fasori di tensione possono essere noti, comunque in [13] si propone un approccio bayesiano per la conoscenza dello stato della rete anche non disponendo di un PMU per ogni nodo.

Nel seguito si presentano alcuni approcci per controllare le tensioni e/o per minimizzare le perdite di potenza nelle linee. Alcuni di essi sono puramente locali, altri distribuiti, altri ancora centralizzati; per queste ultime due categorie è necessario lo scambio di informazioni tra sensori e unità di calcolo. Una caratteristica delle *smart grid* è appunto quella di poter disporre di un *cyber layer* per lo scambio di comunicazioni e l'elaborazione dei dati.

In questa trattazione si è interessati sia alla regolazione dei moduli delle tensioni nodali che alla minimizzazione delle perdite nella rete utilizzando iniezioni di potenza reattiva. Per il conseguimento di questi obiettivi si richiede al sistema di risolvere un problema di *Optimal Reactive Power Flow* (ORPF) attraverso algoritmi centralizzati ([20], [9]) o distribuiti [3].

Solitamente, nelle reti reali, una parte dei nodi non è provvista di PMU, dunque non è possibile disporre di tutte le tensioni nodali, inoltre, altrettanto spesso, è disponibile solo una conoscenza parziale della rete. Per queste ragioni non è conveniente affrontare il problema ORPF in maniera centralizzata.

Un'altra ragione di utilizzo dei microgeneratori è quella di portare ad un valore comune le frequenze dei segnali sinusoidali di tensione ai nodi della rete. In [14], [15] e [16] vengono presentati degli algoritmi orientati alla *voltage and frequency regulation* in reti caratterizzate da un basso rapporto resistenza/impedenza ( $R/X$ ) nelle linee.

Sotto queste condizioni, in [14], [15], è infatti possibile ricavare empiricamente delle equazioni di controllo centralizzate che riconducono il problema ad un controllo in retroazione. Inoltre si ricava una condizione sui parametri del controllo che assicuri un'equa ripartizione della potenza generata tra i microgeneratori della rete.

In [16] si propone un algoritmo distribuito che risolve un problema del consenso per ottenere la regolazione delle frequenze e delle ampiezze di tensione in reti con basso rapporto  $R/X$  ed assicura al contempo il *power sharing*.

In [7] vengono introdotte due strategie di controllo lineari distribuite per reti radiali basate sulla conoscenza dei moduli delle tensioni nodali, tuttavia in [10] si dimostra che, utilizzando come informazione solo i moduli di tensione, esiste sempre una condizione di lavoro non regolarizzabile.

Al giorno d'oggi la maggior parte dei sistemi di distribuzione operano come reti radiali che si diramano a partire da un singolo fornitore, rappresentabile come un generatore di tensione. Inoltre spesso i carichi della rete richiedono una corrente sinusoidale sfasata rispetto al valore della tensione nodale, il che si traduce in una richiesta di potenza reattiva oltre che attiva, rispettivamente riconducibili alle componenti fuori fase ed in fase della corrente rispetto alla tensione. La potenza reattiva può essere intesa come la grandezza corrispondente alla potenza che un elemento reattivo (capacitivo

o induttivo) è in grado di depositare o restituire alla sorgente di potenza. Non si tratta dunque di una forma di dissipazione, non vi sono conversioni di energia né costi di alimentazione per produrla. Comunque contribuisce con la potenza attiva a determinare le dissipazioni di potenza all'interno della rete ed eventuali scostamenti dei moduli delle tensioni nodali dai valori nominali. Dal punto di vista economico risulta quindi conveniente cercare di minimizzare i flussi di potenza reattiva rendendola il più possibile simile a quella richiesta dai nodi.

Sulla base di queste considerazioni dunque in molti lavori si è optato per utilizzare i microgeneratori per iniettare potenza reattiva nella rete, a costo nullo, allo scopo di fornire un servizio migliore agli utenti. Ad esempio, in [21] viene presentata una strategia di controllo puramente locale basata su iniezioni di potenza reattiva con lo scopo di portare i moduli delle tensioni nodali ad un valore di riferimento.

Allo stesso modo in [10] si propongono due strategie di controllo puramente locali simili a quella in [21] ad eccezione del fatto che in questo caso si richiede di portare i moduli delle tensioni nodali entro un intervallo di tolleranza rispetto ai valori nominali. Il più complesso di questi algoritmi si occupa inoltre di minimizzare un funzionale riconducibile all'entità delle compensazioni mediante potenza reattiva.

In [17], [18], [19] si propongono algoritmi distribuiti finalizzati al controllo di tensione mediante iniezioni di potenza reattiva in reti con una significativa componente di energia generata tramite impianti fotovoltaici. In particolare in [19], [18] gli aggiornamenti delle iniezioni di potenza reattiva sono basati su informazioni puramente locali (sulle tensioni nodali o sui flussi di potenza), in [17] invece per la risoluzione del problema è necessaria anche una certa forma di comunicazione tra i nodi finalizzata allo scambio di informazioni tra vicini.

Il limite degli algoritmi presentati in [7], [10], [21] è che si suppone che ad ogni nodo sia presente un microgeneratore.

In [4] viene proposto un modello lineare approssimato per esprimere le tensioni nodali in funzione della tensione nominale e delle potenze. In [3] si sfrutta tale modello ed una assunzione di omogeneità del rapporto  $R/X$  nella rete per presentare un algoritmo sincrono ed uno asincrono. Essi, mediante l'iniezione di potenza reattiva ai microgeneratori, si occupano di controllare le tensioni e minimizzare le perdite nelle linee. Come già detto in precedenza le iniezioni di potenza vengono ricavate dalla risoluzione di un problema ORPF mediante una algoritmi *dual ascent*.

L'approccio proposto per la regolazione delle tensioni può anche essere considerato un controllo in retroazione nelle variabili di tensioni ai nodi dei microgeneratori. Le misure fasoriali ricavate dai PMU vengono infatti utiliz-

zate, seguendo un approccio distribuito, per aggiornare le iniezioni di potenza reattiva che a loro volta contribuiscono a modificare le tensioni nodali in tutta la rete.

Uno degli obiettivi di questo elaborato è di comparare varie tecniche di controllo dei moduli delle tensioni nodali. Per questa ragione si prendono in esame alcuni approcci puramente locali descritti in [10] e [18], ed uno distribuito, l'algoritmo sincrono presentato in [3].

Per prima cosa è necessario adattare le diverse strategie di controllo in modo che si faccia riferimento ad uno stesso modello della rete. Nello specifico si dimostra che le rappresentazioni proposte in [10] e [18] sono riconducibili al modello lineare approssimato presentato in [4].

Vengono portati degli esempi in cui gli algoritmi con regola di aggiornamento delle iniezioni di potenza basata solo su dati locali non riescono ad assicurare il controllo delle tensioni, al contrario dell'algoritmo distribuito presentato in [3].

Inoltre, implementando una combinazione complessa tra le regole di aggiornamento delle iniezioni di potenza reattiva degli algoritmi proposti in [18] e [3], si propone un algoritmo che si occupa principalmente di controllare le tensioni nodali ed in secondo luogo di minimizzare le perdite di potenza nelle linee. L'idea principale è di considerare poco l'informazione sulla dissipazione di potenza nel caso in cui i vincoli sull'intervallo delle tensioni tollerabili siano pesantemente violati. Invece si opta per considerare sempre maggiormente l'informazione sulle dissipazioni nella rete nel caso in cui le tensioni siano prossime ai valori nominali.

Le prestazioni degli algoritmi considerati vengono valutate attraverso simulazioni MATLAB facendo uso del pacchetto `Matpower` ([22]) che permette di risolvere le equazioni del *power flow* implementando il metodo di Newton-Raphson.

Nel resto di questo elaborato ci si concentra sull'implementazione di un algoritmo orientato al controllo delle tensioni nodali di una *smart grid* ed alla minimizzazione delle perdite di potenza nel caso in cui i moduli delle tensioni siano prossime ai valori nominali. Al Capitolo 2 si presentano alcuni strumenti matematici utili nella trattazione successiva. Al Capitolo 3 si modellano gli elementi del *physical layer* e del *cyber layer* della rete. Al Capitolo 4 si presenta il modello approssimato proposto in [4] e si unificano le notazioni di [3], [10], [18]. Al Capitolo 5 si descrivono due algoritmi puramente locali per il controllo delle tensioni. Capitolo 6 definisce le caratteristiche dei problemi di OPF ed ORPF utilizzati nell'algoritmo distribuito presentato al Capitolo 7 ed in quello proposto al Capitolo 8. Capitolo 9 confronta i metodi descritti alle sezioni precedenti attraverso simulazioni sulla rete di distribuzione pre-

sentata in [8]. Infine al Capitolo 10 si riassumono le conclusioni ottenute in questo elaborato e si discutono direzioni per futuri lavori.





# Capitolo 2

## Notazione matematica

### 2.1 Notazione matriciale

Data una generica matrice ad elementi complessi  $W \in \mathbb{C}^{n \times m}$  si indica con  $W_{jk}$  il suo elemento in posizione  $(j, k)$ , con  $W^T$  la sua matrice trasposta, con  $\bar{W}$  la matrice che ha per elementi i complesso coniugati degli elementi di  $W$ .

Allo stesso modo, dato un generico vettore complesso  $v \in \mathbb{C}^n$  si definisce con  $v^T$  il suo vettore trasposto e con  $\bar{v}$  il vettore che ha per elementi i complesso coniugati degli elementi di  $v$ . Inoltre si definisce con  $|v|$  il vettore il cui generico elemento  $j$ -esimo vale  $|v_j|$ .

Con  $\mathbf{1}$  si indica un vettore colonna le cui componenti sono tutte 1, con  $\mathbf{1}_j$  si indica il  $j$ -esimo vettore della base canonica, ossia un vettore colonna di componenti nulle eccetto quella in posizione  $j$ , posta uguale a 1. Con  $\mathbf{1}_G$  si intende la generalizzazione di quanto appena definito, con la differenza che  $G$  rappresenta l'insieme degli indici ad elementi uguali ad 1, ossia

$$[\mathbf{1}_G]_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in G, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con  $I$  ci si riferisce alla matrice identità di dimensione intuibile dal contesto. Con  $i$  si indica l'unità immaginaria.

### 2.2 Nozioni di teoria dei grafi

Sia  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \sigma, \tau)$  un grafo diretto, dove  $\mathcal{V}$  rappresenta l'insieme dei nodi, di cardinalità  $n$ ,  $\mathcal{E}$  l'insieme degli archi, mentre  $\sigma, \tau : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$  sono due funzioni che indicano rispettivamente il nodo di partenza e di arrivo corrispondenti all'arco  $e \in \mathcal{E}$ .

Due archi  $e$  ed  $e'$  sono detti *consecutivi* se  $\tau(e) = \sigma(e')$ , si dice poi *cammino* o *path*, indicato con  $\mathcal{P}_{jk}$ , una sequenza di archi consecutivi che ha origine dal nodo  $j$  e termina nel nodo  $k$ .

Due nodi  $j$  e  $k$  si dicono vicini se esiste un arco  $e$  che li collega. Inoltre si definisce con  $\mathcal{N}(j) = \{k \text{ t.c. } \exists e = (j, k) \in \mathcal{E}\}$  l'insieme dei nodi  $k$  vicini di  $j$ .

Spesso nel seguito si avrà a che fare con vettori complessi, solitamente di dimensione  $n$  o  $|\mathcal{E}|$ .

Si definisce  $A \in \{0, \pm 1\}^{|\mathcal{E}| \times n}$  la *matrice di incidenza* del grafo  $\mathcal{G}$ , dove

$$[A]_{ev} = \begin{cases} -1 & \text{se } v = \sigma(e) \\ 1 & \text{se } v = \tau(e) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

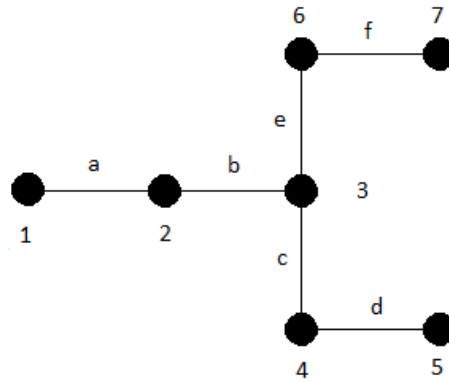


Figura 2.1: Grafo molto semplice con i nodi caratterizzati da numeri interi e gli archi da lettere.

**Esempio 1.** Si consideri il caso del grafo rappresentato in Figura 2.1, la matrice  $A$  corrispondente è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Se  $\mathcal{G}$  è un grafo connesso, cioè se per ogni coppia di nodi esiste un cammino che li congiunge, allora  $\mathbf{1}$  è l'unico vettore del nucleo di  $A$  ( $\ker A$ ).

## 2.3 Regime sinusoidale e fasori

Spesso lo studio delle reti elettriche sotto certe condizioni si riduce alla risoluzione di un problema di circuito in corrente alternata, è dunque essenziale avere familiarità con l'analisi di circuiti in corrente alternata. In questa Sezione si illustrano le proprietà matematiche delle funzioni sinusoidali ed i metodi matematici che ne facilitano la trattazione [6].

Una rete elettrica a regime è caratterizzata da tensioni e correnti variabili sinusoidalmente nel tempo, tali segnali condividono la stessa frequenza, convenzionalmente fissata a 50 o 60 Hz in Europa o negli Stati Uniti rispettivamente.

Si consideri la grandezza sinusoidale  $a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$ , dove  $A_m$  indica il valore massimo che può assumere il segnale,  $\omega$  la sua pulsazione,  $f = \omega/2\pi$  la frequenza ed  $\alpha$  un angolo di fase che indica di quanto il generico segnale anticipi un'altra grandezza sinusoidale isofrequenziale di riferimento. Una volta fissata la pulsazione  $\omega$ , comune per tutta la rete, a regime, appare evidente che tutta l'informazione necessaria per ricostruire il segnale sinusoidale sia contenuta in due soli parametri:  $A_m$  ed  $\alpha$ .

Sia

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt}$$

il *valore efficace* del generico segnale  $a(t)$ . Nel caso sinusoidale si può dimostrare che  $A_{rms} = A_m/\sqrt{2}$ . Risulta conveniente condensare l'informazione contenuta in  $A_m$  (e dunque  $A_{rms}$ ) ed  $\alpha$  nel numero complesso,

$$a = A_{rms} e^{j\alpha}. \quad (2.1)$$

Tale numero complesso, detto *fasore* è in relazione biunivoca con il segnale sinusoidale  $a(t)$ .

Le forme d'onda della tensione e della corrente al nodo  $j$  possono dunque essere espresse con

$$u_j(t) = U_{m,j} \sin(\omega t + \theta_j), \quad (2.2a)$$

$$i_j(t) = I_{m,j} \sin(\omega t + \eta_j), \quad (2.2b)$$

dove  $\theta_j$  indica la fase di tensione e  $\eta_j$  quella di corrente.

Con riferimento a (2.1) è possibile dunque determinare i fasori

$$u_j = U_{rms,j} (\cos \theta_j + i \sin \theta_j) = U_{rms,j} e^{i\theta_j}, \quad (2.3a)$$

$$i_j = I_{rms,j} (\cos \eta_j + i \sin \eta_j) = I_{rms,j} e^{i\eta_j}. \quad (2.3b)$$

In maniera analoga a (2.2) possono essere definite anche delle grandezze relative al generico arco  $e = (j, k)$  tra i nodi  $j$  e  $k$ , è il caso di  $\Delta u_e(t) = u_k(t) - u_j(t)$  e  $\xi_e(t)$

$$\Delta u_e(t) = \Delta U_{m,e} \sin(\omega t + \theta_e), \quad (2.4a)$$

$$\xi_e(t) = \Xi_{m,e} \sin(\omega t + \eta_e), \quad (2.4b)$$

ad esse corrispondono i fasori

$$\Delta u_e = \Delta U_{rms,e} e^{i\theta_e}, \quad (2.5a)$$

$$\xi_e = \Xi_{rms,e} e^{i\eta_e}. \quad (2.5b)$$

Le sinusoidi ed i fasori di tensione sono espressi in V, mentre quelli di corrente in A.

Ricorrendo a (2.4), la potenza istantanea nella linea può essere scritta come

$$\begin{aligned} p_e(t) &= \Delta u_e(t) \xi_e(t) = \Delta U_{m,e} \Xi_{m,e} \sin(\omega t + \theta_e) \sin(\omega t + \eta_e) \\ &= \Delta U_{m,e} \Xi_{m,e} [\sin^2(\omega t) \cos \theta_e \cos \eta_e + \cos^2(\omega t) \sin \theta_e \sin \eta_e + \\ &\quad + \cos(\omega t) \sin(\omega t) \cos \theta_e \sin \eta_e + \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin \theta_e \cos \eta_e], \end{aligned}$$

il cui valore medio, ossia la potenza attiva  $p$ , vale

$$p = \frac{1}{2} \Delta U_{m,e} \Xi_{m,e} \cos(\theta_e - \eta_e) = \Delta U_{rms,e} \Xi_{rms,e} \cos(\theta_e - \eta_e).$$

Definendo la potenza complessa  $s$  come prodotto tra il fasore di tensione ed il complesso coniugato di quello di corrente si ottiene

$$\begin{aligned} s_e = p_e + iq_e &= u_e \bar{i}_e = \Delta U_{rms,e} \Xi_{rms,e} e^{i(\theta_e - \eta_e)} \\ &= \Delta U_{rms,e} \Xi_{rms,e} \cos(\theta_e - \eta_e) + i \Delta U_{rms,e} \Xi_{rms,e} \sin(\theta_e - \eta_e). \end{aligned} \quad (2.6)$$

È dunque possibile definire col nome di potenza reattiva la grandezza

$$q_e = \Delta U_{rms,e} \Xi_{rms,e} \sin(\theta_e - \eta_e).$$

Ancora una volta il segno della potenza reattiva dipende dalla posizione reciproca dei fasori, ossia dallo sfasamento tra le due sinusoidi  $\theta_e - \eta_e$ . In particolare assume valori positivi nel caso in cui  $(\theta_e - \eta_e) \in (0, \pi)$  e negativi se invece  $(\theta_e - \eta_e) \in (-\pi, 0)$ . Per distinguerla dalla potenza attiva, misurata in W, quella reattiva viene convenzionalmente espressa in VAR.

Infine si definisce potenza apparente (e si esprime in VA) il modulo della potenza complessa  $|s|$ .

Sostituendo  $\Delta u_e$  con  $u_j$  e  $\Xi_e$  con  $i_j$  si ottengono le grandezze

$$p_j = |u_j| I_{rms,j} \cos(\theta_j - \eta_j), \quad (2.7a)$$

$$q_j = |u_j| I_{rms,j} \sin(\theta_j - \eta_j). \quad (2.7b)$$

Le considerazioni svolte sulle potenze continuano a valere tuttavia con  $p_j$  non si intende più la potenza attiva dissipata lungo la linea  $e$ , bensì la potenza attiva generata o assorbita, in dipendenza dal segno, dal nodo  $j$ . Valutazioni analoghe si possono effettuare per  $q_j$  ed  $s_j$ .

Prendendo in considerazione la differenza di potenziale ai capi della generica linea  $e = (j, k)$  e la corrente che scorre in essa si definisce l'impedenza della linea in regime sinusoidale come l'operatore complesso

$$z_e = \frac{\Delta u_e}{\xi_e} = \frac{\Delta U_{rms,e}}{\Xi_{rms,e}} e^{i(\theta_e - \eta_e)}.$$

Dunque il modulo dell'impedenza risulta pari al rapporto tra i valori efficaci di differenza di potenziale e corrente, mentre l'argomento è pari alla differenza delle fasi di tensione e di corrente  $\phi_e = \theta_e - \eta_e$ .

La resistenza  $r_e$  e la reattanza  $x_e$  della linea  $e$ , rispettivamente le parti reale ed immaginaria dell'impedenza  $z_e$  si ottengono per mezzo della regola di Eulero

$$z_e = |z_e|e^{i\phi_e} = |z_e| \cos \phi_e + i|z_e| \sin \phi_e,$$

dunque

$$\begin{aligned} r_e &= |z_e| \cos \phi_e, \\ x_e &= |z_e| \sin \phi_e. \end{aligned}$$

Impedenze reattanze e resistenza sono espresse in  $\Omega$ .

Allo stesso modo è possibile definire l'ammettenza  $y_e$  nella linea  $e = (j, k)$  come l'operatore complesso

$$y_e = \frac{\xi_e}{\Delta u_e} = \frac{\Xi_{rms,e}}{\Delta U_{rms,e}} e^{i(\eta_e - \theta_e)} = \frac{\Xi_{rms,e}}{\Delta U_{rms,e}} e^{-i\phi_e}.$$

Analogamente a resistenza e reattanza, la parte reale  $g_e$  e quella immaginaria  $b_e$  di  $y_e$  fanno riferimento rispettivamente alla conduttanza ed alla suscettanza della linea  $e$

$$\begin{aligned} g_e &= |y_e| \cos(-\phi_e), \\ b_e &= |y_e| \sin(-\phi_e). \end{aligned}$$

Ammettenze, conduttanze e suscettanze sono espresse in S.

Il vantaggio considerevole nell'utilizzo della rappresentazione fasoriale consiste nel fatto che si possano mantenere formalmente le stesse leggi che regolano le reti in corrente continua con l'accortezza di sostituire le differenze di potenziale e le correnti con i rispettivi fasori e le resistenze con le impedenze. Restano dunque valide le leggi di Kirchhoff e di Ohm.

## 2.4 Notazione *per-unit*

Nelle reti di distribuzione la notazione *per-unit* è utilizzata per esprimere le grandezze elettriche in funzione di alcune quantità base. L'idea principale è quella di rendere più uniforme la rappresentazione degli elementi del sistema riducendo la grandi differenze tra i valori assoluti delle grandezze. In questa Sezione si presenta questa forma di rappresentazione, per una trattazione più approfondita si rimanda a [11].

Molte reti di distribuzione presentano due o più livelli di tensione ed ovviamente anche numerosi trasformatori per garantire il passaggio da un livello ad un altro. In questo caso può diventare molto oneroso convertire di volta in volta il livello della corrente che scorre attraverso un trasformatore al livello di tensione relativo a ciascuno degli avvolgimenti del trasformatore. Si è dunque ideato un sistema per rappresentare le tensioni e le correnti in maniera più maneggevole, l'idea consiste nel considerare un insieme di quantità basi per ogni livello di tensione e nell'esprimere ciascun parametro in funzione di tale base. In sostanza tensioni, correnti, potenze e carichi vengono normalizzati rispetto a delle quantità scelte in modo che siano significative nell'intervallo dei valori normalmente attesi dalle rispettive grandezze.

Ad esempio si supponga che una rete di distribuzione debba garantire agli utenti una tensione efficace di 220 V (esigenze domestiche), ma che la corrente viaggi in linee a media tensione da 12 kV. In questo caso le quantità base delle tensioni nodali efficaci più adeguate sono proprio 220 V e  $12 \cdot 10^3$  V.

In questo modo è inoltre più rapido controllare se le condizioni del sistema siano normali o anomale. Un sistema trifase è una rete elettrica in corrente alternata costituita da terne di circuiti caratterizzati dalla stessa tensione a meno di sfasamenti di  $2\pi/3$  radianti. Se tutte le grandezze, espresse in *per-unit*, presentano valori approssimativamente unitari allora il comportamento della rete è corretto, in caso contrario si sta verificando un problema. La rappresentazione *per-unit* fornisce dunque un modo più rapido per monitorare il verificarsi di anomalie. Un sistema di grandezze non normalizzate non sarebbe altrettanto esplicativo in quanto sarebbe molto comune notare valori di tensioni o correnti anche molto diversi tra loro.

Va notato che, in quanto si tratta solo di un ridimensionamento, le quantità in *per-unit* e le loro *basi* devono continuare ad obbedire alle stesse relazioni a cui dovrebbero sottostare se le grandezze fossero rappresentate con altri sistemi di unità di misura. Si fa ovviamente riferimento alla legge di Ohm ed alle leggi di Kirchhoff.

Per definire completamente un sistema *per-unit* è necessario disporre di un minimo di 4 quantità base: una per le tensioni, una per le correnti, una per le potenze ed una per le impedenze (o ammettenze). Se due di esse vengono scelte arbitrariamente, per esempio tensione e potenza, le altre sono ad esse vincolate. Per convertire le grandezze da *per-unit* (p.u.) a Volt, Ampere, Ohm, Watt è necessario conoscere il valore della quantità base corrispondente a ciascun elemento della rete.

**Esempio 2.** *Si supponga che per una rete di distribuzione siano state scelte le quantità base  $U_N = 4800$  V, per i valori delle tensioni, e  $S_N = 1$  MVA,*

per i valori delle potenze attive e reattive. Le quantità base  $I_N$  e  $Z_N$  per i valori delle correnti e delle impedenze sono rispettivamente

$$I_N = \frac{S_N}{U_N} = \frac{10^6 \text{ VA}}{4.8 \cdot 10^3 \text{ V}} = 208.\bar{3} \text{ A}$$

$$Z_N = \frac{U_B}{I_N} = \frac{4.8 \cdot 10^3 \text{ V}}{208.\bar{3} \text{ A}} = 23.04 \Omega$$

Tutte le tensioni, correnti, potenze ed impedenze della rete vanno dunque normalizzate a  $U_N$ ,  $I_N$ ,  $S_N$  e  $Z_N$  rispettivamente. ■

Per completezza si sottolinea che è possibile fare uso di questa rappresentazione anche in sistemi trifase. Inoltre utilizzare una stessa quantità base di potenza per tutta la rete (anche nel caso in cui, per esigenze imposte dalla presenza di trasformatori, si decidano di utilizzare più quantità base di tensione) permette di avere dei vantaggi. Infatti, nel caso in cui si considerino le quantità base di tensione in modo che i rapporti tra loro siano uguali ai rapporti di trasformazione, i valori delle impedenze di livello alto e basso dei trasformatori sono equivalenti, se espressi in *per-unit*.

D'ora in avanti, a prescindere dal fatto che si parli di tensioni, correnti, potenze, ammettenze o impedenze esse sono espresse in *per-unit*, a meno che non venga specificato il contrario.



# Capitolo 3

## Modello di *smart grid*

Ripercorrendo e ampliando quanto presentato in [4] e [3] in questo Capitolo viene descritto il modello di una *smart power distribution grid*, come l'unione di un *physical layer* e di un *cyber layer* in cui

- il *physical layer* è una parte della rete elettrica, comprendente linee di potenza, carichi, microgeneratori e il punto di connessione alla rete di trasmissione (PCC<sup>1</sup>);
- il *cyber layer* è un insieme di agenti *smart* dispersi nella rete in grado di raccogliere misure, eseguire dei calcoli, comunicare tra loro ed iniettare potenza nella rete.

### 3.1 *Physical layer*

In questo lavoro si opta per considerare la rete elettrica come un grafo orientato e connesso  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \sigma(\cdot), \tau(\cdot))$  nel quale

- $\mathcal{V}$  rappresenta l'insieme dei *bus*, cioè sia dei carichi che dei microgeneratori. Si ricorda che tale insieme ha cardinalità  $n$ ;
- $\mathcal{E}$  rappresenta l'insieme delle linee di distribuzione della rete, cioè i cavi incaricati di collegare le utenze tra loro. Si ricorda che tale insieme ha cardinalità  $|\mathcal{E}|$ .

---

<sup>1</sup>*Point of Common Coupling*

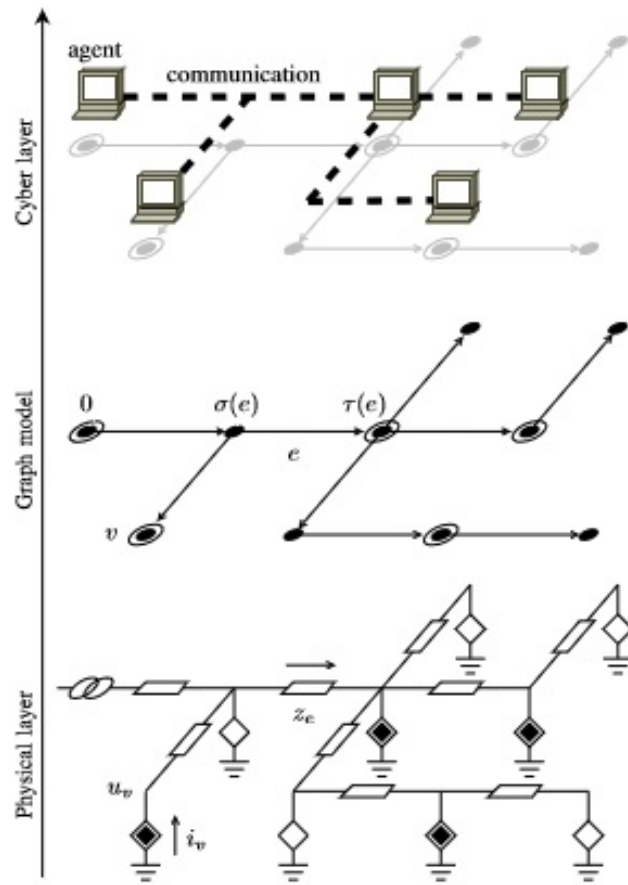


Figura 3.1: *Rappresentazione schematica del modello della rete di distribuzione di potenza.*

### 3.1.1 Generatori e carichi

Nello specifico i nodi possono essere sostanzialmente divisi in 3 categorie:

- *PQ bus*: si tratta di *bus* in cui le potenze attiva  $p_j$  e reattiva  $q_j$  iniettate, a regime, al nodo  $j$  in questione sono mantenute costanti in maniera indipendente dalla tensione nodale. Tali *bus* sono utilizzati come modello dei carichi della rete, in quanto è fondamentale che l'utente possa disporre della potenza effettivamente richiesta.

Tipicamente costituiscono la porzione più consistente dei dispositivi della rete, in quanto modellano aggregati di più carichi e sono impossibilitati a generare potenza.

- *PU bus*: si tratta di *bus* in cui, a regime, sono mantenute costanti la tensione  $|u_j|$  e la potenza attiva iniettata  $p_j$  al nodo  $j$ , indipendentemente dai valori della potenza reattiva iniettata e dell'angolo di fase del fasore di tensione  $\theta_j = \angle u_j$ , per quanto possibile. Per questa ragione sono particolarmente indicati per rappresentare i microgeneratori.

È bene precisare fin d'ora che in generale il modulo della tensione nodale è fortemente correlato all'iniezione di potenza reattiva e che in realtà vi sono dei limiti al controllo operabile sulla tensione nodale.

La regione di funzionamento delle potenze attiva e reattiva è approssimata abbastanza bene da una circonferenza di raggio opportuno, come sottolineato in Figura 3.2 [18].

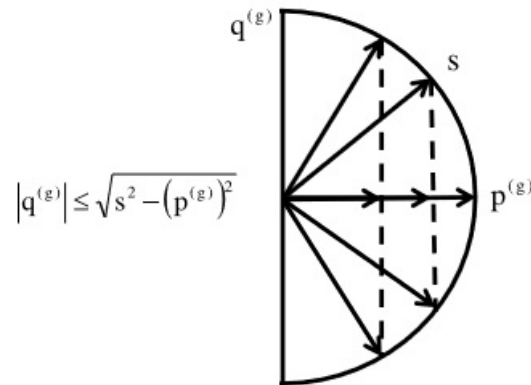


Figura 3.2: Approssimazione della regione di funzionamento delle potenze erogabili da un generatore.

- *U $\theta$  bus* (o *slack bus* o *reference bus*): si tratta di *bus* molto particolari, generalmente uno per ogni rete, tenuti a svolgere una doppia funzione. In primo luogo vengono usati come riferimento di fase, ossia tutti gli angoli dei fasori delle tensioni nodali sono rappresentati rispetto alla fase dell'*U $\theta$  bus*, posto, per comodità, a 0. Inoltre, poiché è impossibile conoscere in anticipo le perdite di potenza attiva della rete, la generazione di potenza attiva della rete è utilizzata per bilanciare quella dei generatori, quella dei carichi e quella dissipata nelle linee.

In base a quanto detto uno *slack bus* è praticamente un generatore di tensione, inoltre in ogni rete deve sempre esserne presente almeno uno. Nel seguito i concetti di *U $\theta$  bus* e PCC si equivarranno.

### 3.1.2 Linee e cavi

Un discorso diverso va affrontato per la parte riguardante i cavi. La generica linea di trasmissione può essere ricondotta allo schema di Figura 3.3 caratterizzato dai parametri serie

- $r'$  fasore della resistenza serie al km [ $\Omega/\text{km}$ ],
- $x'$  fasore della reattanza serie al km [ $\Omega/\text{km}$ ],

e dai parametri di *shunt*

- $g'$  fasore della conduttanza di *shunt* al km [ $\text{S}/\text{km}$ ].
- $b'$  fasore della suscettanza di *shunt* al km [ $\text{S}/\text{km}$ ],

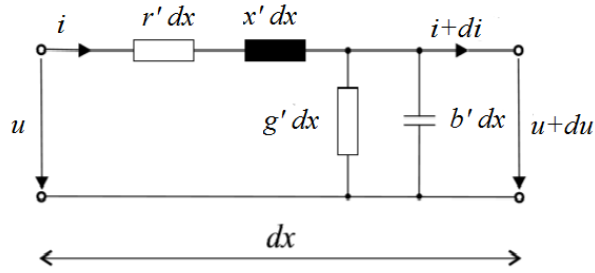


Figura 3.3: Circuito equivalente di un elemento lineare di lunghezza  $dx$ .

I parametri suddetti sono specifici della linea o della configurazione del cavo e dipendono dai conduttori e da considerazioni geometriche.

Dal circuito in Figura 3.3 è possibile derivare la *telegrapher's equation* e da questa a sua volta il modello circuitale a parametri concentrati per condizioni a regime simmetriche, rappresentato in Figura 3.4. Spesso si fa riferimento a tale modello con l'espressione  $\pi$ -*model* ed è caratterizzato dai parametri

- $z_e = r_e + ix_e$  impedenza serie [ $\Omega$ ],
- $y_e^{sh} = g_e^{sh} + ib_e^{sh}$  ammettenza di *shunt* [ $\text{S}$ ]<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>In Figura 3.4 i due elementi di *shunt* sono supposti equivalenti. Tale assunzione risulta verificata in caso di linee omogenee, ossia cavi caratterizzate dai medesimi valori dei parametri di linea per tutta la lunghezza del cavo, tuttavia potrebbe non risultare verificata nel caso generale. In questa eventualità gli elementi di *shunt* dovrebbero essere rimpiazzati da  $y_{jk}^{sh}$  ed  $y_{kj}^{sh}$  con  $y_{jk}^{sh} \neq y_{kj}^{sh}$  in generale.

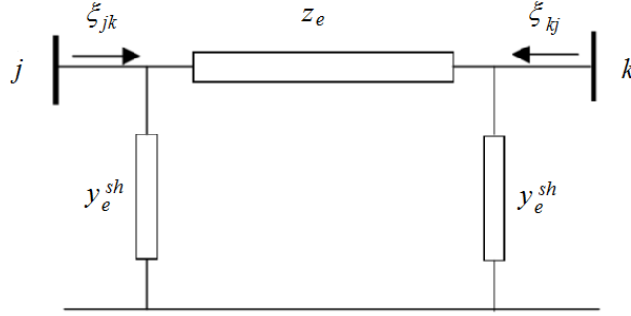


Figura 3.4: Modello circuitale a parametri concentrati ( $\pi$ -model) di una linea di trasmissione e tra i nodi  $j$  e  $k$ .

Per formulare le equazioni di rete è possibile fare uso di una matrice di ammettenze, dunque è necessario conoscere il valore dell'ammettenza serie

$$y_e = z_e^{-1} = g_e + ib_e,$$

dove  $g_e$  e  $b_e$  sono ricavabili ricorrendo a qualche passaggio algebrico, in particolare

$$g_e = \frac{r_e}{r_e^2 + x_e^2} \quad \text{e} \quad b_e = -\frac{x_e}{r_e^2 + x_e^2}.$$

Di norma la reattanza serie  $x_e$  e la resistenza serie  $r_e$  sono entrambe positive, di conseguenza  $g_e$  risulta positivo e  $b_e$  negativo. I valori della suscettanza di shunt  $b_e^{sh}$  e della conduttanza di shunt  $g_e^{sh}$  sono invece entrambi positivi. In molti casi inoltre  $g_e^{sh}$  è tanto piccolo da risultare trascurabile.

A questo punto è possibile esprimere le correnti complesse  $\xi_{jk}$  e  $\xi_{kj}$  di Figura 3.4 come funzione delle tensioni ai nodi  $j$  e  $k$

$$\begin{aligned} \xi_{jk} &= y_e(u_j - u_k) + y_e^{sh}u_j \\ \xi_{kj} &= y_e(u_k - u_j) + y_e^{sh}u_k, \end{aligned}$$

con  $u_j = |u_j|e^{i\theta_j}$  ed  $u_k = |u_k|e^{i\theta_k}$ .

Si possono riscrivere le equazioni appena ricavate in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} \xi_{jk} \\ \xi_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_e + y_e^{sh} & -y_e \\ -y_e & y_e + y_e^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Come si nota esaminando il secondo termine di (3.1) la matrice delle ammettenze risulta simmetrica e con elementi diagonali uguali. Tale proprietà riflette il fatto che i cavi sono elementi simmetrici.

Per la trattazione successiva si farà l'assunzione che le ammettenze di *shunt* siano trascurabili, permettendo in questo modo di semplificare (3.1) in

$$\begin{bmatrix} \xi_{jk} \\ \xi_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_e & -y_e \\ -y_e & y_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_k \end{bmatrix}.$$

ed anche lo schema circuitale di Figura 3.4.

In generale dunque la corrente  $\xi_e$  che scorre sull'arco  $e$  tra i nodi  $j$  e  $k$  può essere espressa come

$$\xi_e = y_e(u_k - u_j), \quad (3.2)$$

dove  $y_e$  è la ammettenza relativa all'arco  $(j, k)$ ,  $u_j$  e  $u_k$  sono i fasori di tensione ai nodi  $j$  e  $k$ . Dalla legge di Kirchhoff alle correnti inoltre

$$i_j + i_j^{sh} = \sum_{\sigma(e)=j} \xi_e, \quad (3.3)$$

dove  $i_j$  è la corrente iniettata nella rete dal nodo  $j$  e  $i_j^{sh}$  la corrente iniettata nella rete dovuta agli elementi di *shunt*. Sostituendo (3.2) in (3.3) e trascurando la corrente di *shunt* si ottiene

$$i_j = \left( \sum_{\sigma(e)=j} y_e \right) u_j - \sum_{\sigma(e)=j} y_e u_k,$$

dove  $j = 1, \dots, n$ . Tale espressione può essere riscritta in forma matriciale con

$$i = \mathbf{Y}u, \quad (3.4)$$

in cui  $i$  indica il vettore dei fasori delle correnti assorbite dai nodi,  $u$  quello dei fasori di tensione nodali e  $\mathbf{Y}$  è una matrice simmetrica di ammettenze i cui elementi sono individuati da

$$\mathbf{Y}_{jk} = -y_e \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{Y}_{jj} = \sum_{\sigma(e)=j} y_e, \quad (3.5b)$$

dove con  $e$  si intende ovviamente l'ammettenza dell'arco tra  $j$  e  $k$ .

Per reti di grandi dimensioni si tratta di una matrice molto sparsa, in particolare la percentuale di sparsità di norma aumenta con la dimensione della rete.

### 3.1.3 Equazioni di rete

Nel seguito si limita lo studio allo stato a regime della rete, quando cioè ogni tensione o corrente è assimilabile ad un segnale sinusoidale ad una frequenza comune e può dunque essere rappresentato da un fasore  $a = A_{rms}e^{i\alpha}$ , dove  $A_{rms}$  corrisponde al valore efficace della grandezza sinusoidale e  $\alpha$  alla fase del segnale rispetto ad un arbitrario sistema di riferimento globale.

Con questa notazione lo stato a regime della rete è descritto dal seguente sistema di variabili:

- $u \in \mathbb{C}^n$ , dove  $u_j$  indica la tensione al nodo  $j$ ;
- $i \in \mathbb{C}^n$ , dove  $i_j$  indica la corrente iniettata dal nodo  $j$ ;
- $s \in \mathbb{C}^n$ , dove  $s_j$  indica la potenza iniettata dal nodo  $j$ ;
- $\xi \in \mathbb{C}^{|\mathcal{E}|}$ , dove  $\xi_e$  indica la corrente che scorre sull'arco  $e$  secondo l'orientazione dell'arco stesso.

Tali grandezze devono rispettare i vincoli teorici imposti dalle leggi di Kirchhoff, cioè devono essere soddisfatte

$$A^T \xi + i = 0, \quad (3.6)$$

$$Au + \mathbf{Z}\xi = 0, \quad (3.7)$$

dove  $A$  è la matrice di incidenza di  $\mathcal{G}$  e  $\mathbf{Z} = \text{diag}(z_e, e \in \mathcal{E})$  è la matrice diagonale delle impedenze di linea  $z_e$ , in cui il pedice  $e$  fa riferimento all'arco. L'equazione (3.6) corrisponde alla riscrittura matriciale della Legge di Kirchhoff alle correnti, mentre (3.7) descrive i cali di tensione sugli archi del grafo, a loro volta riconducibili alla Legge di Kirchhoff alle tensioni.

Per procedere nella trattazione è bene fare la seguente assunzione.

**Assunzione 1.** *Tutte le linee di potenza nella rete hanno lo stesso rapporto reattanza/resistenza ( $X/R$ ) o, equivalentemente, che tutte le impedenze siano caratterizzate dalla stessa fase  $\theta$ , cioè*

$$z_e = e^{i\phi}|z_e|, \quad \forall e \in \mathcal{E},$$

per un fissato valore comune di  $\phi$ .

Il modulo della generica impedenza  $z_e$ , purché espresso in *per-unit*, è invece libero da qualsiasi vincolo assuntivo.

L'errore introdotto con Assunzione 1 può dirsi trascurabile quando il rapporto X/R delle linee di potenza della rete risulta relativamente omogeneo. In molte reti di distribuzione si ha a che fare con cavi caratterizzati dagli stessi parametri lineari  $r', x', g', b'$  (con riferimento a Figura 3.3), dunque anche dai medesimi rapporti reattanza/resistenza ( $x_e/r_e$ ). Per questa ragione Assunzione 1 risulta spesso verificata. Ad ogni modo in [3] viene mostrato quanto la strategia proposta sia comunque molto robusta rispetto al possibile errore introdotto da questa approssimazione.

Definita dunque con  $Z = \text{diag}(|z_e|, e \in \mathcal{E})$  la matrice diagonale dei moduli delle impedenze di linea, sotto l'Assunzione 1,  $\mathbf{Z}$  può essere riscritta come  $\mathbf{Z} = e^{i\phi}Z$ . Poiché (3.7) può anche essere posta nella forma  $\xi = -e^{-i\phi}Z^{-1}Au$ , sostituendo in (3.6) quanto appena trovato si ottiene

$$i = e^{-i\phi}Y u, \quad (3.8)$$

dove  $Y = A^T Z^{-1}A$  è il Laplaciano pesato del grafo ed indica la matrice delle ammettenze.

Si noti che questa equazione coincide con (3.4) sotto l'ipotesi semplificativa introdotta in Assunzione 1, cioè  $\mathbf{Y} = e^{-i\phi}Y$ . Richiamando (3.5) è possibile dedurre che le componenti di  $Y$  valgono

$$Y_{jk} = -|y_e| \quad (3.9a)$$

$$Y_{jj} = \sum_{\sigma(e)=j} |y_e|, \quad (3.9b)$$

con  $|y_e| = |z_e|^{-1}$  in cui  $e$  è l'arco tra i nodi  $j$  e  $k$ .

**Esempio 3.** *Si consideri la rete rappresentata in Figura 2.1, la matrice  $Y$  corrispondente risulta*

$$Y = \begin{bmatrix} |y_a| & -|y_a| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -|y_a| & |y_a| + |y_b| & -|y_b| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|y_b| & |y_b| + |y_c| + |y_e| & -|y_c| & 0 & -|y_e| & 0 \\ 0 & 0 & -|y_c| & |y_c| + |y_d| & -|y_d| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -|y_d| & |y_d| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|y_e| & 0 & 0 & |y_e| + |y_f| & -|y_f| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -|y_f| & |y_f| \end{bmatrix},$$



dove  $|y_h| = |z_h|^{-1}$ ,  $h \in \{a, b, c, d, e, f\}$  rappresenta l'inverso del modulo della generica impedenza di linea  $z_h$ , corrispondente all'arco  $a, b, c, d, e, f$  di Figura 2.1. ■

Da (3.8) emerge che ogni nodo  $j$  è dunque caratterizzato da una legge che mette in relazione la sua corrente  $i_j$  con la sua tensione  $u_j$  e con quelle dei suoi vicini  $u_k$ ,  $k \in \mathcal{N}(j)$ .

È inoltre possibile modellare il PCC come un generatore di tensione sinusoidale ideale alla tensione nominale  $U_N$  con fase arbitraria fissata  $\theta$ . Si può esprimere il fasore della tensione al nodo 1 come

$$u_1 = e^{i\theta}. \quad (3.10)$$

I carichi ed i microgeneratori, cioè tutti gli altri nodi della rete, possono essere modellati attraverso la seguente legge che mette in relazione la tensione  $u_j$  con la corrente  $i_j$

$$u_j \bar{i}_j = s_j, \quad \forall j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, \quad (3.11)$$

dove  $s_j = p_j + iq_j$  indica la *potenza complessa* iniettata dal nodo  $j$ .

Le potenze complesse corrispondenti ai carichi della rete sono tali per cui  $\{p_j < 0\}$ , con ciò intendendo che l'energia è fornita ai dispositivi. Le potenze complesse relative ai microgeneratori sono invece caratterizzate da  $\{p_j > 0\}$ , a significare che la potenza è invece iniettata nella rete. I microgeneratori in questo modello sono comandati attraverso un riferimento di potenza complessa (*power demand*) e possono iniettare potenza in maniera indipendente dalla tensione al loro punto di connessione con la rete di trasmissione.

## 3.2 Cyber layer

Si assume che ogni microgeneratore e che il PCC possano operare da *agenti* nel *cyber layer*, l'insieme dei nodi con capacità di misura, comunicazione ed attuazione. Sia  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$  il sottoinsieme dei nodi di  $\mathcal{G}$ , di cardinalità  $m$ , contenente i nodi corrispondenti a tali dispositivi. Ognuno di questi agenti è dotato di alcune capacità computazionali ed è in grado di ottenere misure di fasori, cioè possiede un sensore in grado di misurare tanto l'ampiezza che la fase, in questo caso, della tensione al nodo.

Tra tali dispositivi quelli che attualmente trovano particolare diffusione sono detti PMU (*Phasor Measurement Unit*) [5]. Essi utilizzano un riferimento di tempo comune, fornito tipicamente da una sorgente di sincronizzazione di tipo GPS (*Global Positioning System*), in modo da raccogliere

informazioni contemporanee delle grandezze elettriche di interesse. L'errore di sincronizzazione commesso è inferiore al  $\mu s$ .

Ciascun PMU è in grado di ottenere misure istantanee dei segnali di corrente e di tensione al nodo corrispondente in maniera sincronizzata, permettendo di offrire un quadro generale della rete ad un dato istante. Nel caso preso in esame si è interessati esclusivamente alle misure di tensione. Trattandosi di segnali sinusoidali sono necessarie più acquisizioni consecutive per determinare i valori di modulo e fase che caratterizzano il fasore. Dunque ogni PMU si incarica di effettuare un numero sufficiente di misure in dipendenza dalla frequenza a regime dei segnali sinusoidali, tipicamente tra 10 e 30 al secondo.

Una volta convertiti, tramite convertitori analogico-digitale, i segnali di tensione campionati da ciascuna PMU vengono inviati ad un PDC (*Phasor Data Concentrator*) e successivamente al centro di controllo vero e proprio, ad esempio uno SCADA (*Supervisory Control And Data Acquisition*). Tale dispositivo si incarica dell'elaborazione dei dati, attraverso tecniche di tipo DFT (*Discrete Fourier Transform*) [12], ottenendo i valori dei fasori richiesti dall'algoritmo di controllo. Successivamente calcola i riferimenti di potenza che ogni agente del *cyber layer* deve fornire per regolare le tensioni nodali ed invia agli agenti le informazioni necessarie per il controllo.

Gli agenti in corrispondenza dei microgeneratori, ossia tutti ad eccezione del PCC, sono infatti in grado di lavorare come attuatori nel sistema, comandando un riferimento per l'iniezione di potenza reattiva al nodo in questione.

Un'altra possibilità è che ciascun agente sia in grado di svolgere i compiti del dispositivo SCADA, ossia elaborare i dati per ottenere il fasore della tensione nodale e calcolare il valore dell'iniezione di potenza reattiva. Per fare ciò, a seconda dell'algoritmo di controllo utilizzato, potrebbero essere necessarie anche le misure dei fasori di tensione relativi ad altri nodi.

In alcuni casi i dispositivi devono dunque essere in grado di comunicare tra loro, attraverso un canale realizzato a parte o coincidente con le linee di potenza stesse. Per questo è opportuno dare una definizione di vicinanza anche nel *cyber layer*.

**Definizione 3.2.1.** *Sia  $h \in \mathcal{C}$  un agente nel cyber layer. L'insieme di agenti vicini di  $h$ , denotato con  $\mathcal{N}(h)$  è il sottoinsieme di  $\mathcal{C}$  definito come*

$$\mathcal{N}(j) = \{k \in \mathcal{C} \mid \mathcal{P}_{jk} \cap \mathcal{C} = \{j, k\}\}$$

In questo lavoro si assume che ogni agente  $j \in \mathcal{C}$  conosca il suo insieme di vicini  $\mathcal{N}(j)$  e sia in grado di comunicare con loro.

**Esempio 4.** Si consideri la semplice rete elettrica di Figura 3.5, in questo caso l'insieme degli agenti  $\mathcal{C}$  contiene 4 elementi, in particolare  $\mathcal{C} = \{1, 3, 5, 7\}$ . Secondo la definizione di vicinanza nel cyber layer,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(1) &= \{3\}, \\ \mathcal{N}(3) &= \{1, 5, 7\}, \\ \mathcal{N}(5) &= \{3\}, \\ \mathcal{N}(7) &= \{3\}.\end{aligned}$$

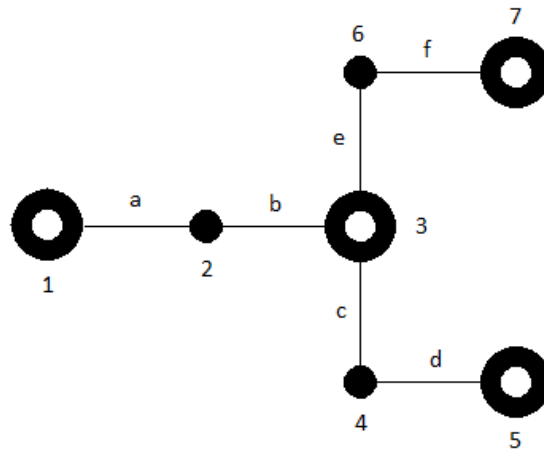


Figura 3.5: Grafo corrispondente ad una rete molto semplice con gli agenti del cyber layer ai nodi 1, 3, 5, 7.

■



# Capitolo 4

## Modello della rete

In questo Capitolo si riprende in mano una soluzione esplicita approssimata delle equazioni (3.8), (3.10) e (3.11) già presentata in [4] e [3]. Inoltre si dimostra che il modello della rete utilizzata in [10] è sostanzialmente uguale a quello presentato al Capitolo seguente.

### 4.1 Modello approssimato e sue proprietà

L'approssimazione presentata in [4] gioca un ruolo fondamentale nella strategia di controllo presentata in [3] e di conseguenza anche in quella proposta in questo elaborato che fa uso dei risultati conseguiti dal suddetto lavoro. Per introdurre la soluzione approssimata è necessario il seguente Lemma.

**Lemma 4.1.1.** *Sia  $Y$  il Laplaciano pesato di  $\mathcal{G}$ . Esiste ed è unica la matrice  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica e semidefinita positiva tale che*

$$\begin{cases} XY = I - \mathbf{1}\mathbf{1}_0^T \\ X\mathbf{1}_0 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

La dimostrazione del Lemma è fornita in [4].

La matrice  $X$  dipende solo dalla topologia della rete e dalle impedenze nelle linee, essa presenta le seguenti proprietà notevoli

$$\begin{aligned} X_{jj} &\geq X_{jk} \geq 0, & j, k \in \mathcal{V}, \\ (\mathbf{1}_j - \mathbf{1}_k)^T X (\mathbf{1}_j - \mathbf{1}_k) &= z_{jk}^{rms}, & j, k \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove con  $z_{jk}^{rms}$  si indica il modulo dell'impedenza effettiva equivalente della rete tra i nodi  $j$  e  $k$ . Si noti che se la rete è radiale, cioè se  $\mathcal{G}$  è un albero,

allora  $z_{jk}^{rms}$  è esattamente l'impedenza effettiva equivalente dell'unico path tra i nodi  $j$  e  $k$ , ossia la somma dei moduli delle impedenze degli archi nel cammino tra  $j$  e  $k$ .

Sfruttando la notazione di [3], si introduce la seguente decomposizione in blocchi del vettore delle tensioni:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_G \\ u_L \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

dove il primo elemento,  $u_1$ , fa riferimento al solo nodo PCC, il secondo,  $u_G \in \mathbb{C}^{m-1}$ , al blocco dei generatori (di potenza) ed il terzo,  $u_L \in \mathbb{C}^{n-m}$ , a quello dei carichi. In maniera del tutto analoga si possono anche definire  $s_G = p_G + jq_G$  ed  $s_L = p_L + jq_L$ .

La stessa decomposizione in blocchi permette anche di riscrivere  $X$  come

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N \\ 0 & N^T & Q \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

con  $M \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (n-m)}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ . La seguente Proposizione fornisce una relazione approssimata tra le tensioni e le iniezioni di potenza a tutti i nodi della rete.

**Proposizione 4.1.1.** *Si consideri il modello fisico descritto dall'insieme di equazioni non lineari (3.8), (3.10) e (3.11). Le tensioni ai nodi soddisfano allora*

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_G \\ u_L \end{bmatrix} = e^{i\theta} \left( \mathbf{1} + e^{i\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N \\ 0 & N^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{s}_G \\ \bar{s}_L \end{bmatrix} \right) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right), \quad (4.5)$$

dove con la notazione *o-piccolo* si intende che  $\lim_{U_N \rightarrow \infty} \frac{o(f(U_N))}{f(U_N)} = 0$ .

La dimostrazione di questa Proposizione discende direttamente da Proposizione 2 in [4].

La qualità di questa approssimazione migliora disponendo di tensioni nominali  $U_N$  elevate e di correnti iniettate dagli *inverter* (o richieste dai carichi) relativamente basse. Questa assunzione è verificata nella pratica dal momento che la corretta progettazione delle reti di trasmissione si fonda proprio su

tensioni nominale sufficientemente elevate, in modo da rendere relativamente ridotte le perdite di potenza nelle linee.

Grazie a questo modello si è in grado di conoscere le tensioni ai nodi della rete, e dunque anche le perdite di potenza nelle linee, in funzione delle potenze generate ed assorbite da ciascun nodo. Si conclude questa Sezione introducendo la matrice  $G$ , che sarà utile nel prosieguo della trattazione.

**Lemma 4.1.2.** *Esiste un'unica matrice simmetrica  $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tale che*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} G = I - \mathbf{1}\mathbf{1}_0^T \\ G\mathbf{1} = 0. \end{cases}$$

La matrice  $G$  è caratterizzata da uno schema di sparsità abbastanza interessante, come afferma il seguente Lemma.

**Lemma 4.1.3.** *La matrice  $G$  ha uno schema di sparsità ricavabile dalla definizione 3.2.1 di agenti vicini nel cyber layer, cioè*

$$G_{jk} \neq 0 \iff k \in \mathcal{N}(j). \quad (4.6)$$

Le dimostrazioni dei due Lemmi precedenti sono fornite in [3].

Con riferimento a (4.5), trascurando il termine  $o\left(\frac{1}{U_N^2}\right)$ , si può scrivere il vettore dei moduli delle tensioni nodali  $|u|$  come

$$\begin{aligned} |u| &= \left| e^{i\theta} (\mathbf{1} + e^{i\phi} X \bar{s}) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right) \right| \\ &\simeq \left| \mathbf{1} + e^{i\phi} X \bar{s} \right|. \end{aligned}$$

È dunque possibile trovare un'espressione per  $v = |u|^2 = \text{Re} [|u|^2] + \text{Im} [|u|^2]$

$$\begin{aligned} v &= \left| \mathbf{1} + e^{i\phi} X \bar{s} \right|^2 \\ &= \left( \mathbf{1} + \text{Re} [e^{i\phi} X \bar{s}] \right)^2 + \left( \text{Im} [e^{i\phi} X \bar{s}] \right)^2 \\ &= \mathbf{1} + 2\text{Re} [e^{i\phi} X \bar{s}] + \left( \text{Re} [e^{i\phi} X \bar{s}] \right)^2 + \left( \text{Im} [e^{i\phi} X \bar{s}] \right)^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Non tutti i termini a secondo membro di (4.7) rivestono un ruolo rilevante nella determinazione di  $v$ . La matrice  $X$  è stata derivata a partire da  $Z$ , matrice dei moduli delle impedenze di linea espressa in *per-unit*. L'ordine di grandezza dei suoi elementi è dunque quello dei moduli delle impedenze espresse in p.u., quindi coincide con quello del valore reale delle impedenze moltiplicate per un fattore  $S_N/U_N^2$ , dove con  $U_N$  si intende la quantità base di tensione e con  $S_N$  quella di potenza.

D'altra parte anche il vettore  $\bar{s}$  è espresso in *per-unit*, ed equivale al valore reale del vettore delle potenze complesse diviso per un termine  $S_N$ . Complessivamente dunque il termine  $X\bar{s}$  risulta normalizzato un fattore  $\frac{1}{U_N^2}$  rispetto al valore espresso in  $V^2$ . Si tratta dunque di un termine nettamente inferiore rispetto al vettore  $\mathbf{1}$ .

Si può dunque riscrivere (4.7) trascurando i termini quadratici a secondo membro

$$v \simeq \mathbf{1} + 2\text{Re} [e^{i\phi} X \bar{s}]$$

Procedendo con i calcoli si giunge dunque a

$$v = \mathbf{1} + 2(\text{Re} [e^{i\phi} X] p + \text{Im} [e^{i\phi} X] q),$$

dunque, ricordando  $v_1 = 1$ , si ottiene

$$\begin{aligned} v &= 2\text{Re} [e^{i\phi} X] p + 2\text{Im} [e^{i\phi} X] q + v_1 \mathbf{1} \\ &= 2 \cos \phi X p + 2 \sin \phi X q + v_1 \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

dove si è sfruttato il fatto che  $X$  è una matrice a componenti reali.

## 4.2 Modello alternativo

Nel seguito si richiama un modello alternativo, presentato in [10] e denominato *Simplified DistFlow Model*. Procedendo in accordo con [10], nella trattazione successiva ci si limita al caso in cui ogni nodo è in grado di iniettare potenza reattiva in una rete di distribuzione radiale.

Sia  $s_j = p_j + iq_j$  la potenza complessa iniettata nella rete dal generatore corrispondente al nodo  $j$ , ossia generata meno consumata.

Sia  $\xi_{jk}$  la generica corrente complessa che scorre nell'arco  $e$  tra i nodi  $j$  e  $k$ , vicini nel *physical layer*, sia  $z_{jk} = r_{jk} + ix_{jk}$  l'impedenza sulla generica linea  $e$  ed  $S_{jk} = P_{jk} + iP_{jk}$  la potenza complessa che scorre tra i nodi  $j$  e  $k$ , vicini nel *physical layer*. Si noti che, in questa Sezione, si preferisce utilizzare



la notazione  $jk$  piuttosto che  $e$  a pedice per definire le grandezze riconducibili agli archi. Inoltre si indicano con la lettera maiuscola le potenze relative agli archi. Si fa uso di questi espedienti per non creare confusione tra le potenze assorbite o generate ai nodi e quelle dissipate lungo le linee.

Siano rispettivamente  $r$  ed  $x$  i vettori, di dimensione  $|\mathcal{E}|$ , delle resistenze e delle reattanze, sulle linee della rete, mentre con  $P$  e  $Q$  si denotino i vettori, di dimensione  $|\mathcal{E}|$ , dei flussi di potenza attiva e reattiva sulle linee della rete. Si ricorda inoltre che  $v$  è il vettore, di dimensione  $n$ , dei quadrati dei moduli dei fasori delle tensioni nodali (in p.u.) ed  $s = p + iq$  quello delle potenze complesse generate dai nodi.

Il *Branch Flow Model* permette di modellare i flussi di potenza a regime di un circuito a distribuzione radiale:

$$-p_j = P_{ij} - r_{ij}l_{ij} - \sum_{k|(j,k) \in \mathcal{E}} P_{jk}, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.9a)$$

$$-q_j = Q_{ij} - x_{ij}l_{ij} - \sum_{k|(j,k) \in \mathcal{E}} Q_{jk}, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.9b)$$

$$v_j = v_i - 2(r_{ij}P_{ij} + x_{ij}Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2)l_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{E} \quad (4.9c)$$

$$l_{ij} = \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}, \quad (4.9d)$$

dove  $l_{ij} = |\xi_{ij}|^2$  ed  $l$  è il corrispondente vettore di dimensione  $|\mathcal{E}|$ .

L'equazione (4.9) definisce un sistema di equazioni nelle variabili  $(P, Q, l, v) := (P_{jk}, Q_{jk}, l_{jk}, (j, k) \in \mathcal{E}, v_j, j = 1, \dots, n)$ , che non includono gli angoli di fase di tensioni e correnti. Infatti in reti radiali, dato  $(P, Q, l, v)$ , tali angoli di fase possono essere determinati univocamente.

Nei circuiti di distribuzioni reali solitamente  $r, x \ll 1$  e  $v \sim 1$ , per questo le perdite di potenza attiva e reattiva sono tipicamente molto inferiori ai flussi di potenza  $P_{jk}$  e  $Q_{jk}$ . Seguendo [10] si trascurano i termini ad ordine più elevato delle perdite di potenza attiva e reattiva in (4.9) imponendo  $l_{jk} = 0$  e si approssimano  $P, Q, v$  con la seguente approssimazione lineare, nota come *Simplified DistFlow*

$$-p_j = P_{ij} - \sum_{k|(j,k) \in \mathcal{E}} P_{jk}, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.10a)$$

$$-q_j = Q_{ij} - \sum_{k|(j,k) \in \mathcal{E}} Q_{jk}, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.10b)$$

$$v_j = v_i - 2(r_{ij}P_{ij} + x_{ij}Q_{ij}), \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (4.10c)$$

È dunque possibile ricavare una relazione tra le tensioni ai nodi della rete e le potenze da essi iniettate

$$v = \tilde{R}p + \tilde{X}q + \mathbb{1}v_1, \quad (4.11)$$

dove  $v_1 = 1$ , mentre  $\tilde{R} = [\tilde{R}_{ij}]_{n \times n}$ ,  $\tilde{X} = [\tilde{X}_{ij}]_{n \times n}$  hanno la seguente struttura

$$\tilde{R}_{ij} = 2 \sum_{(h,k) \in \mathcal{P}_{0i} \cap \mathcal{P}_{0j}} r_{hk},$$

$$\tilde{X}_{ij} = 2 \sum_{(h,k) \in \mathcal{P}_{0i} \cap \mathcal{P}_{0j}} x_{hk},$$

con  $\mathcal{P}_{0j} \subset \mathcal{E}$ , insieme di archi sul cammino unico tra il nodo 0 ed il nodo  $j$ .

Vale il seguente risultato, che ricorda le equazioni in (4.2).

**Lemma 4.2.1.**  *$\tilde{R}$  ed  $\tilde{X}$  sono matrici positive e definite positive.*

Ora, confrontando (4.8) con (4.11) è immediato ricavare le relazioni

$$\tilde{R} \simeq 2 \cos \phi X,$$

$$\tilde{X} \simeq 2 \sin \phi X,$$

dove il simbolo "sime" è dovuto al fatto che tanto per ricavare (4.8) quanto per (4.11) sono state eseguite delle approssimazioni.

# Capitolo 5

## Algoritmi di controllo puramente locali

In questo Capitolo vengono presentate due strategie puramente locali di controllo delle tensioni, il loro obiettivo è cioè quello di portare ciascuna tensione, nei nodi in cui questa grandezza sia effettivamente misurabile, all'interno dell'intervallo  $[u_{min}, u_{max}]$ .

Il primo approccio, d'ora in avanti identificato con l'appellativo *loc1*, fa riferimento alla prima strategia di controllo presentata in [10], quella che non si occupa di minimizzare l'entità dell'iniezione di energia reattiva. Il secondo, al quale ci si riferirà con *loc2*, invece è riconducibile all'idea basata sul controllo della potenza reattiva mediante i soli valori delle tensioni ai nodi descritta in [18].

### 5.1 Algoritmo *loc1*

Si può suddividere il vettore dei quadrati normalizzati delle tensioni come fatto per le tensioni in (4.3), ed in particolare risulterà  $v_G = |u_G|^2$ . Dunque, sostituendo in tale formula il valore di  $u_G$  ricavato da (4.5), è possibile scrivere

$$\begin{aligned} v_G &\simeq \mathbb{1} + 2\text{Re} [e^{i\phi} M \bar{s}_G + e^{j\phi} N \bar{s}_L] \\ &= \mathbb{1} + 2(\sin \phi M q_G + \cos \phi M p_G) + \\ &\quad 2(\sin \phi N q_L + \cos \phi N p_L), \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove per  $s$ ,  $p$  e  $q$  vale la stessa decomposizione a blocchi sopra descritta per  $u$  e  $v$ . Si noti che per ricavare (5.1) si sono svolti sostanzialmente gli stessi passaggi necessari per la determinazione di (4.8)

Nel primo algoritmo presentato in [10], a ciascun nodo  $j$  si utilizzano le informazioni del rispettivo modulo della tensione nodale  $v_j$  e dell'iniezione di potenza reattiva  $q_j$  con l'obiettivo di vincolare ad una certa fascia i valori dei moduli delle tensioni nodali, il tutto tramite iniezioni di potenza reattiva.

L'idea proposta in [10] non coincide esattamente con quella che viene introdotta nel seguito, tuttavia il concetto alla base di tale approccio è il medesimo. Se questa trattazione ne trascurerà alcuni dettagli sarà solo a vantaggio della chiarezza espositiva. Laddove ve ne siano, si indicheranno comunque le modifiche rispetto a [10].

Siano  $v_j[t]$  e  $q_j[t]$  quadrato della tensione normalizzata e potenza reattiva (in p.u.) del bus  $j$  all'istante  $t$ . La regola per l'aggiornamento è la seguente:

$$q_j[t] = q_j[t - 1] + \epsilon_{loc1} d(v_j[t]), \quad (5.2)$$

con

$$d(v_j[t]) = [v_j[t] - v_j^{max}]_+ - [v_j^{min} - v_j[t]]_+, \quad (5.3)$$

dove  $[\cdot]_+$  indica la proiezione sull'asse reale positivo, cioè  $[a]_+ = \max(\operatorname{Re}[a], 0)$ .

Nell'idea originale vi era la possibilità di considerare ritardi nelle acquisizioni e di prendere in esame il caso in cui all'istante  $t$  solo un sottoinsieme dei generatori si incaricasse effettivamente di effettuare la misura di tensione necessaria all'aggiornamento di  $q_j$ . Inoltre quanto appena presentato si discosta da [10] anche perché non è richiesto che ogni bus sia in grado di iniettare potenza reattiva, cioè non è richiesta una rete formata unicamente da *PU bus*.

Sostanzialmente la regola di aggiornamento identificabile con (5.2) e (5.3) prevede di intensificare l'iniezione di potenza reattiva in caso di tensioni inferiori alla soglia minima, di ridurla in caso di tensioni superiori alla soglia massima e di lasciare tutto invariato altrimenti.

Questo approccio sfrutta una strategia di controllo puramente locale, dunque non è richiesta comunicazione tra i nodi. Si tratta di un controllore simile ad un controllore integrale in cui la convergenza dell'algoritmo è affidata alla scelta del parametro  $\epsilon_{loc1}$ , indipendente dalle condizioni di lavoro della rete, ossia dalle potenze attive e reattive richieste da ogni nodo. In particolare vale la seguente risultato:

**Teorema 5.1.1.** *Sia data una rete di distribuzione radiale in cui ogni nodo è in grado di iniettare potenza reattiva senza alcun vincolo, nell'ambito dell'algoritmo caratterizzato dalle regole di aggiornamento (5.2) e (5.3),  $d(v_j[t])$  converge a 0 e  $v[t]$  converge ad un vettore  $v^* \in [v^{min}, v^{max}]$  se*

$$\epsilon_{loc1} < \frac{2}{\sigma_{max}(\tilde{X})},$$

dove  $\sigma_{max}(\tilde{X})$  indica l'autovalore massimo di  $\tilde{X}$ .

La dimostrazione è un caso particolare del Teorema 3 in [10].

## 5.2 Algoritmo *loc2*

Facendo riferimento a [18] si presenta nel seguito una strategia di controllo locale basata sulla sola acquisizione dei valori di tensione con lo scopo di mantenere i voltaggi all'interno di alcune soglie. Va notato che in nessun modo con questo approccio si tenta di minimizzare le perdite di potenza della rete, non vi è dunque alcuna ragione di aspettarsi una minimizzazione delle perdite di potenza della rete.

Per la verità neanche in questo caso l'algoritmo implementato riflette totalmente quello descritto in [18], dove si fa uso di una transcaratteristica tensione-potenza del tipo presentato in Figura 5.1.

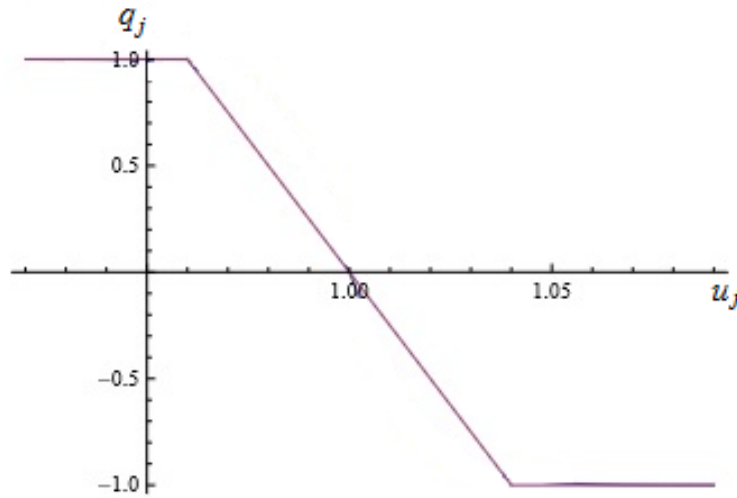


Figura 5.1: *Transcaratteristica a regime tra modulo della tensione nodale ed iniezione di potenza reattiva corrispondente al generico microgeneratore  $j$ .*

Nel caso corrente si fa uso di transcaratteristiche a regime  $f_j(\cdot)$  lineari che prolungano il tratto centrale delle transcaratteristiche saturata. Si tratta cioè di rette passanti per i punti  $(1 - \beta_j, q_j^{max})$  e  $(1 + \beta_j, -q_j^{max})$ , dove  $\beta_j$  indica la variazione percentuale massima tollerabile nel valore di tensione al nodo  $j \in G$ . In Figura 5.1, ad esempio,  $\beta_j \simeq 0.04$ .

Prima di procedere con la trattazione va comunque notato che anche questa tecnica in qualche misura generalizza quella presentata in [18] in quanto risulta applicabile a morfologie di rete più complesse.

Riprendendo quanto detto poco sopra a proposito della transcaratteristica a regime, vale dunque

$$f_j(u_j) = a_{f_j}|u_j| + b_{f_j}, \quad (5.4)$$

dove  $a_{f_j}$  e  $b_{f_j}$  devono rispettare:

$$a_{f_j} = -\frac{q_j^{max}}{\beta_j},$$

$$b_{f_j} = \frac{q_j^{max}}{\beta_j}.$$

Si consideri, per ogni generatore, l'equazione di aggiornamento dell'iniezione di potenza reattiva

$$q_j[t] = [q_j[t-1] + \gamma_j(f_j(u_j[t-1]) - q_j[t-1])]_+, \quad (5.5)$$

dove  $[\cdot]_+$  indica la saturazione fuori dall'intervallo  $[-q_j^{max}, q_j^{max}]$ . Lo stato a regime del sistema controllato da (5.5), facendo riferimento a (5.4), coincide con quello raggiunto utilizzando la più familiare transcaratteristica lineare saturata

$$f_j(u_j) = \begin{cases} q_j^{max} & \text{se } |u_j| \leq 1 - \beta_j \\ a_{f_j}|u_j| + b_{f_j} & \text{se } 1 - \beta_j \leq |u_j| \leq 1 + \beta_j \\ -q_j^{max} & \text{se } |u_j| \geq 1 + \beta_j \end{cases} \quad (5.6)$$

Raccogliendo le leggi di tutti i generatori si ottiene l'equazione globale di aggiornamento

$$q_G[t] = [q_G[t-1] + \Gamma(A_f|u_G[t]| + B_f - q_G[t-1])]_+, \quad (5.7)$$

in cui

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_m),$$

$$A_f = \text{diag}(a_{f_1}, \dots, a_{f_m}),$$

$$B_f = [b_{f_1}, \dots, b_{f_m}]^T,$$

dove  $m$  è la dimensione del vettore  $u_G$ .

**Teorema 5.2.1.** *Nell'ambito dell'algoritmo caratterizzato dalle transcaratteristiche tensione-potenza reattiva (5.4) e dalla regola di aggiornamento (5.7), condizione sufficiente per la convergenza di  $|u[t]|$  ad un vettore  $|u^*|$  è*

$$\kappa_{loc2} \leq \kappa_{lim}, \quad (5.8)$$

dove

$$\gamma_j a_{f_j} = -\kappa_{loc2}, \quad j = 1, \dots, m \quad (5.9)$$

e  $\kappa_{lim} = \min_j \kappa_j$  con

$$\kappa_j = \frac{2}{\sin(\phi)\rho(M) - \frac{1}{a_{f_j}}}, \quad j = 1, \dots, m.$$

*Dimostrazione.* Partendo dall'equazione (4.5) è possibile riscrivere  $|u_j|$  con  $j \in \mathcal{C} \setminus \{1\}$  come

$$\begin{aligned} |u_j| &= \sqrt{\left| e^{i\theta} \left( 1 + e^{i\phi} \mathbf{1}_j^T \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_G \\ \bar{s}_L \end{bmatrix} \right) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right) \right|^2} \\ &\simeq \sqrt{\left| 1 + e^{i\phi} \mathbf{1}_j^T \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_G \\ \bar{s}_L \end{bmatrix} \right|^2}. \end{aligned}$$

Per procedere nella trattazione è conveniente operare una approssimazione di questo tipo: sia  $\varepsilon$  un numero complesso tale che  $|\varepsilon| \ll 1$ . Nel calcolo di  $|1 + \varepsilon|$  è possibile trascurare la parte immaginaria di  $\varepsilon$  infatti

$$|1 + \varepsilon| = \sqrt{(1 + \operatorname{Re}[\varepsilon])^2 + (\operatorname{Im}[\varepsilon])^2} \simeq 1 + \operatorname{Re}[\varepsilon],$$

poiché  $(1 + \operatorname{Re}[\varepsilon]) \sim 1$  ed  $\operatorname{Im}[\varepsilon] \ll 1$ .

Allo stesso modo

$$\begin{aligned} |u_j| &\simeq \sqrt{\left( 1 + \operatorname{Re} \left[ e^{i\phi} \mathbf{1}_j^T \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_G \\ \bar{s}_L \end{bmatrix} \right] \right)^2} \\ &= \left( 1 + \mathbf{1}_j^T \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi)p_G + \sin(\phi)q_G \\ \cos(\phi)p_L + \sin(\phi)q_L \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Passando ad una notazione matriciale si ottiene

$$\begin{aligned} |u_G| &\simeq \left( \mathbf{1} + [M \quad N] \begin{bmatrix} \cos(\phi)p_G + \sin(\phi)q_G \\ \cos(\phi)p_L + \sin(\phi)q_L \end{bmatrix} \right) \\ &= \sin(\phi)Mq_G + \tilde{u}_G, \end{aligned}$$

dove

$$\tilde{u}_G = \left( \mathbf{1} + [M \quad N] \begin{bmatrix} \cos(\phi)p_G \\ \cos(\phi)p_L + \sin(\phi)q_L \end{bmatrix} \right).$$

In questo modo (5.5) può essere riscritta come

$$q_G[t] = [(I + \sin(\phi)\Gamma A_f M - \Gamma) q_G(t) + \Gamma(A_f \tilde{u}_G + B_f)]_+$$

Sia ora  $\delta[t] := q_G[t] - q_G[t-1]$ , allora

$$\begin{aligned} \|\delta[t]\| &= \|(I + \sin(\phi)\Gamma A_f M - \Gamma)\delta[t-1]\| \\ &\leq \|I + \sin(\phi)\Gamma A_f M - \Gamma\| \|\delta[t-1]\|. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sia ora fissato un parametro  $\kappa_{loc2} \geq 0$  in modo che i parametri  $\gamma_j$  siano riconducibili ad una sola grandezza tramite la relazione

$$\gamma_j a_{f_j} = -\kappa_{loc2}, \quad j = 1, \dots, m,$$

cioè

$$\Gamma A_f = -\kappa_{loc2} I. \quad (5.11)$$

Sostituendo (5.11) in (5.10) si ottiene

$$\begin{aligned} \|\delta[t]\| &\leq \|I - \sin(\phi)\kappa_{loc2}M - \Gamma\| \|\delta[t-1]\| \\ &\leq \|I - \sin(\phi)\kappa_{loc2}\rho(M)I - \Gamma\| \|\delta[t-1]\| \\ &= \|\Phi\| \|\delta[t-1]\|, \end{aligned}$$

dove  $\rho(M)$  indica l'autovalore dominante di  $M$  e  $\Phi$  è una matrice diagonale il cui  $j$ -esimo elemento diagonale vale



$$\begin{aligned}
[\Phi]_{jj} &= 1 - \sin(\phi)\kappa_{loc2}\rho(M) - \gamma_j \\
&= 1 - \sin(\phi)\kappa_{loc2}\rho(M) + \frac{\kappa}{a_{f_j}} \\
&= 1 - \kappa_{loc2} \left( \sin(\phi)\rho(M) - \frac{1}{a_{f_j}} \right).
\end{aligned}$$

Per la stabilità dell'algoritmo è dunque sufficiente che

$$\left| 1 - \kappa_{loc2} \left( \sin(\phi)\rho(M) - \frac{1}{a_{f_j}} \right) \right| \leq 1, \quad j = 1, \dots, m,$$

cioè che

$$\kappa_{loc2} \leq \kappa_j = \frac{2}{\sin(\phi)\rho(M) - \frac{1}{a_{f_j}}}, \quad j = 1, \dots, m$$

o allo stesso modo che

$$\kappa_{loc2} \leq \kappa_{lim}, \tag{5.12}$$

con  $\kappa_{lim} = \min_j \kappa_j$ .

Sostituendo (5.9) in (5.12) si ottiene

$$\gamma_j \leq -\frac{\kappa_{lim}}{a_{f_j}}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{5.13}$$

■

Nel caso in cui

$$\begin{aligned}
q_{max} &:= q_1^{max} = \dots = q_m^{max}, \\
\beta &:= \beta_1 = \dots = \beta_m,
\end{aligned}$$

è possibile riscrivere (5.7) con

$$q_G(t+1) = [q_G(t) + \Gamma(a|u_G(t)| + b - q_G(t))]_+, \tag{5.14}$$

e (5.13) con

$$0 \leq \gamma \leq \frac{2}{1 - \sin(\phi)a\rho(M)}, \tag{5.15}$$

dove

$$\begin{aligned}
 a &= a_{f_1} = \dots = a_{f_m} = -\frac{q_{max}}{\beta}, \\
 b &= b_{f_1} = \dots = b_{f_m} = \frac{q_{max}}{\beta}, \\
 \gamma &= \gamma_1 = \dots = \gamma_m.
 \end{aligned}$$

### 5.3 Limiti degli algoritmi locali

Il grosso limite degli algoritmi appena presentati è che la convergenza delle tensioni a valori interni all'intervallo  $[u_{min}, u_{max}]$  è assicurata solo a patto che l'iniezione di potenza reattiva da parte degli agenti nel *cyber layer* possa essere considerevole.

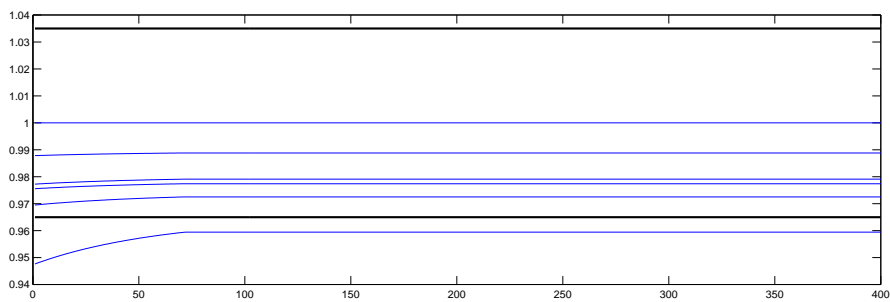
Negli algoritmi puramente locali ogni iniezione si occupa di correggere la violazione del vincolo di tensione al nodo corrispondente sulla base di informazioni che provengono dal nodo stesso. Non è infatti contemplata la possibilità che l'iniezione di potenza al generico nodo  $j$  possa essere influenzata dalle violazioni dei vincoli di tensione in altri nodi  $k$ , con l'obiettivo di contribuire a correggerle.

In generale il controllo non è sempre in grado di conseguire l'obiettivo della *voltage regulation* anche ammettendo l'esistenza di una soluzione *feasible* che un controllore centralizzato sia in grado di raggiungere.

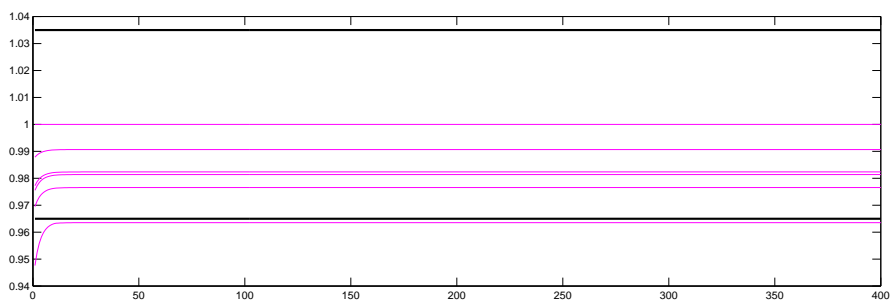
**Esempio 5.** *Si supponga di avere a che fare con un carico costante nel tempo a cui possono essere associate delle power demand altrettanto tempo invariante. Si supponga inoltre che in alcuni nodi sia presente un microgeneratore in grado di iniettare una potenza reattiva in modulo inferiore a 0.4 MVAR. Dopo un tempo sufficientemente lungo (400 iterazioni), da Figura 5.2a e Figura 5.2b appare evidente che non tutte le tensioni, controllate rispettivamente con gli algoritmi *loc1* e *loc2*, siano interne all'intervallo  $[u_{min}, u_{max}]$ , dove  $u_{min} = 0.965$  e  $u_{max} = 1.035$ .*

*Inoltre, confrontando Figura 5.2a e Figura 5.2b, si nota che l'algoritmo *loc2* appare più rapido e le tensioni a regime si discostano in misura minore dall'intervallo dei valori ammissibili.*

*Questo comportamento è dovuto al fatto che, mentre l'algoritmo *loc1* si occupa di iniettare o assorbire potenza reattiva al nodo  $j$  solo nel caso in cui il corrispondente vincolo di tensione sia violato, l'algoritmo *loc2* esercita una azione di controllo anche nel caso in cui  $u_{min} < |u_j| < u_{max}$ . In questo modo le iniezioni di potenza ai nodi che rispettano i vincoli di tensione contribuiscono comunque a correggere le violazioni anche agli altri nodi. ■*



(a) *Traiettorie delle tensioni nodali controllate con l'algoritmo loc1.*



(b) *Traiettorie delle tensioni nodali controllate con l'algoritmo loc2.*

Figura 5.2: *Andamento delle traiettorie di tensione controllate con algoritmi locali.*



# Capitolo 6

## Ottimizzazione di reti elettriche

Nell'ambito della reti di distribuzione, con TSO (*Transmission System Operator*) o ISO (*Independent System Operator*) si definisce un operatore finalizzato a trasportare energia elettrica dagli impianti di generazione alle reti di distribuzione locali attraverso la rete di trasmissione.

L'analisi *Power Flow* costituisce uno strumento fondamentale per i TSO in quanto permette di predire come il sistema elettrico reagirà a determinate stimolazioni, ad esempio iniezioni di potenza o di tensione.

### 6.1 Problema di *Optimal Power Flow*

Con problema di OPF (*Optimal Power Flow*) si intende un problema di ottimizzazione vincolata che si prefigge l'obiettivo di configurare le variabili elettriche in modo da massimizzare o minimizzare una certa figura di merito. In questo modo è possibile scegliere tra le differenti configurazioni dei generatori quella che consente di ottimizzare una grandezza desiderata, ad esempio costi economici o dissipazioni di potenza.

I vincoli di uguaglianza corrispondono alle leggi che regolano il funzionamento della rete, è il caso delle leggi di Kirchhoff e di quella di Ohm. I vincoli di disuguaglianza fanno invece riferimento ai limiti delle regioni di funzionamento che caratterizzano ciascun elemento della rete. Ad esempio si tratta di condizioni sulla corrente massima in grado di scorrere su un cavo o all'iniezione di potenza limite generabile da un microgeneratore.

Solitamente si fa uso di 4 grandezze associate a ciascun *bus*:

- $|u_j|$ , il modulo del fasore di tensione nodale;
- $\theta_j$ , la fase del fasore di tensione nodale;

- $p_j$ , la potenza attiva assorbita dal nodo;
- $q_j$ , la potenza reattiva assorbita dal nodo.

Evidentemente, a seconda del tipo di *bus* al nodo  $j$ , solo due di queste grandezze assumono il ruolo di variabili mentre le altre sono vincolate a dei valori ben precisi, nello specifico

- *PQ bus*:  $p_j$  e  $q_j$  sono specificate,  $|u_j|$  e  $\theta_j$  sono da calcolare;
- *PU bus*:  $p_j$  e  $|u_j|$  sono specificate,  $q_j$  e  $\theta_j$  sono da calcolare;
- *U $\theta$  bus*:  $|u_j|$  e  $\theta_j$  sono specificate,  $p_j$  e  $q_j$  sono da calcolare.

Per risolvere l'OPF è inoltre necessaria la conoscenza di ulteriori informazioni specifiche della rete, si fa riferimento ai parametri delle linee (impedenze o ammettenze) delle linee ed alla topologia stessa della rete.

Lo stato della rete è univocamente determinabile a partire dai valori dei fasori di tensione, da essi infatti è possibile ricavare il vettore  $\xi$  delle correnti sulle linee, di conseguenza il vettore  $i$  delle correnti ai *bus* e a sua volta il vettore  $s$  delle potenze.

A seconda dell'ambito del problema preso in esame, è necessario scegliere una particolare funzione obiettivo del problema di OPF, tra le più utilizzate si ricordano:

- i *costi di generazione*, ossia il costo necessario a produrre potenza attiva. Solitamente per ogni nodo  $j$  si tratta di una funzione convessa quadratica nella potenza attiva generata, del tipo  $g_j(p_j) = c_2^j p_j^2 + c_1^j p_j + c_0^j$ , con  $c_2^j > 0$ . La funzione obiettivo vale  $g(p) = \sum_{j=1}^n g_j(p_j)$ ;
- le *perdite della rete*, ossia la potenza dissipata nel trasporto di energia lungo le linee elettriche;
- il *numero di azioni di controllo*, ossia il numero di segnali necessari a connettere o sconnettere dalla rete dei *capacitor banks*, carichi capacitivi di *shunt* in grado di cambiare le impedenze delle linee;
- le *differenze di potenziale sulle linee della rete*. Mantenere queste grandezze ridotte comporta mantenere tutti i valori dei moduli di tensione ai *bus* vicini tra loro e dunque prossimi al valore nominale.

Per quanto riguarda i vincoli di uguaglianza, in questa trattazione si farà riferimento alle leggi che mettono in relazione le potenze complesse nodali generate o assorbite alle tensioni nodali della rete. Esse infatti riassumono in se stesse le leggi di Kirchhoff e quella di Ohm, nel seguito si mostra come vengano ricavate.

La  $j$ -esima componente di  $i$  in (3.8), utilizzando (3.9), può essere riscritta come

$$i_j = e^{-i\phi} Y_{jj} u_j + \sum_{k \in \mathcal{N}(j)} e^{-i\phi} Y_{jk} u_k = e^{-i\phi} \sum_{k \in \mathcal{J}} Y_{jk} u_k,$$

dove  $\mathcal{J} = \mathcal{N}(j) \cup \{j\}$ .

L'iniezione di potenza complessa  $s_j = p_j + iq_j$  al bus  $j$  vale dunque

$$\begin{aligned} s_j &= u_j \bar{i}_j \\ &= |u_j| e^{i\theta_j} \sum_{k \in \mathcal{J}} Y_{jk} e^{-i\phi} |u_k| e^{-i\theta_k} \\ &= |u_j| \sum_{k \in \mathcal{J}} Y_{jk} e^{-i\phi} |u_k| e^{i\theta_{jk}}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

dove  $\theta_{jk} = \theta_j - \theta_k$ .

Estraendo parte reale ed immaginaria dall'equazione (6.1) possono essere ricavate le espressioni delle potenze attiva e reattiva generate al nodo  $j$

$$p_j = |u_j| \sum_{k \in \mathcal{J}} |u_k| (Y_{jk} \cos \phi \cos \theta_{jk} + Y_{jk} \sin \phi \sin \theta_{jk}) \quad (6.2a)$$

$$q_j = |u_j| \sum_{k \in \mathcal{J}} |u_k| (Y_{jk} \cos \phi \sin \theta_{jk} - B_{jk} \cos \theta_{jk}), \quad (6.2b)$$

Le equazioni di (6.2) mettono effettivamente in relazione tra loro le grandezze  $\{|u_j|, \theta_j, p_j, q_j \text{ t.c. } j = 1, \dots, n\}$  e possono essere riscritte come segue

$$p_j = \sum_{k \in \mathcal{N}(j)} p_{jk}(|u_j|, |u_k|, \theta_j, \theta_k) \quad (6.3a)$$

$$q_j = \sum_{k \in \mathcal{N}(j)} q_{jk}(|u_j|, |u_k|, \theta_j, \theta_k), \quad (6.3b)$$

dove i flussi di potenza attiva e reattiva coincidono con le parti reale e immaginaria del flusso di potenza complessa tra i generici nodi  $j$  e  $k$

$$s_{jk} = p_{jk} + iq_{jk} = u_j \bar{i}_{jk} = e^{-i\phi} y_e |u_j| e^{i\theta_j} (|u_j| e^{-i\theta_j} - |u_k| e^{-i\theta_k}).$$

I vincoli di disequaglianza sono imposti dai limiti operazionali sulle variabili, come ad esempio i limiti sull'iniezione di potenza reattiva per i *PU bus* o quelli sui moduli dei fasori delle tensioni nodali per i *PQ bus*

$$\begin{aligned} u_{j,min} &\leq |u_j| \leq u_{j,max} \\ q_{j,min} &\leq |q_j| \leq q_{j,max}. \end{aligned}$$

Condizione necessaria, anche se non sempre sufficiente, per la risolvibilità è che il numero di equazioni dell'*Optimal Power Flow* coincida col numero di incognite del sistema. Si supponga di avere a che fare con una rete di  $n$  nodi,  $n_{PU}$  dei quali siano *PU bus*,  $n_{PQ}$  siano *PQ bus* ed uno, il PCC, sia un *U $\theta$  bus*.

Per determinare univocamente lo stato del sistema sono necessarie  $2n$  grandezze, ossia i valori dei moduli e delle fasi dei fasori delle tensioni nodali, cioè  $\{|u_j|, \theta_j \text{ t.c. } j = 1, \dots, n\}$ . Tra queste  $2n$  variabili,  $n_{PU} + 2$  sono note, ossia i moduli dei fasori delle tensioni dei *PU bus* e l'intero fasore di tensione del PCC. Restano incognite i moduli dei fasori delle tensioni nodali dei *PQ bus* e tutte le fasi ad eccezione di quella del *U $\theta$  bus*, nel complesso  $n_{PQ} + n_{PQ} + n_{PU} = 2n_{PQ} + n_{PU}$ . Risulta quindi necessario trovare un sistema di altrettante equazioni che non introduca alcuna nuova incognita.

È il caso del sistema che riunisce le  $n_{PU}$  equazioni di bilancio dei flussi di potenza attiva dei *PU bus* e tutte le equazioni di bilancio dei flussi di potenza dei *PQ bus*. Si tratta infatti di un sistema di  $2n_{PQ} + n_{PU}$  equazioni che presenta come incognite solamente moduli e fasi dei fasori delle tensioni nodali.

Non vengono invece considerate le equazioni del bilancio dei flussi di potenza reattiva per i *PU bus* in quanto ciascuna di esse introdurrebbe la generica variabile incognita  $q_j$ , avendo come unico effetto quello di aumentare sia il numero di equazioni che di incognite, ossia la complessità del sistema.

Le iniezioni di potenza reattiva dei *PU bus* possono essere invece utilizzate nel caso in cui non siano rispettati ad esempio i vincoli sui limiti dei moduli dei fasori delle tensioni nodali  $|u_j|$ .

## 6.2 Problema di *Optimal Reactive Power Flow*

Con la denominazione problema di ORPF (*Optimal Reactive Power Flow*) si indica un problema di OPF in cui le variabili di controllo sono le iniezioni



di potenza reattiva.

L'algoritmo presentato al Capitolo 7 segue un approccio basato sulla risoluzione un problema di ORPF. Il suo funzionamento consiste nell'utilizzare le iniezioni di potenza reattiva dei microgeneratori per minimizzare le perdite di potenza nelle linee di distribuzione, sempre prestando attenzione al fatto che i moduli delle tensioni nodali si mantengano all'interno degli intervalli desiderati.

Le variabili di decisione, ossia gli ingressi del sistema, sono dunque i riferimenti delle potenze reattive  $q_j, j \in \mathcal{C} \setminus \{1\}$ , o, in maniera più compatta,  $q_G$ .

Come detto si opta per una funzione obiettivo riconducibile alle perdite per dissipazione nella rete, che possono essere espresse in funzione delle cadute di tensione lungo le linee e dunque mediante

$$\tilde{J}_{losses} = \text{Re} [\bar{u}^T \mathbf{Y} u] = \text{Re} [e^{-i\phi} \bar{u}^T Y u],$$

sempre considerando Assunzione 1.

Poiché  $\bar{u}^T Y u$  può essere inteso anche come una norma quadrata del vettore  $u$  pesata secondo la matrice  $Y$  ( $\|u\|_Y^2$ ), è un numero reale, quindi

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{losses} &= \text{Re} [e^{-i\phi}] \bar{u}^T Y u \\ &= \cos \phi \bar{u}^T Y u. \end{aligned}$$

Per ragioni di calcolo, è conveniente riscrivere  $\tilde{J}_{losses}$  e rappresentare le perdite di potenza nella rete utilizzando la forma quadratica

$$J_{losses} := \bar{u}^T Y u, \quad (6.4)$$

in questo modo tale fattore risulta sostanzialmente espresso in *per-unit*.

Siano  $u_{min}$  e  $u_{max}$  i limiti rispettivamente inferiore e superiore tollerabili per i moduli della generica tensione  $u_j, j \in \mathcal{C} \setminus \{1\}$  ed allo stesso modo siano  $q_{min}$  e  $q_{max}$  i limiti delle iniezioni di potenza reattiva minima e massima iniettabili da ogni microgeneratore. È possibile riformulare il problema di ottimizzazione nella maniera seguente

$$\min_{q_G} \bar{u}^T Y u \quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned} &|u_j| \geq u_{min} \\ \text{subject to } &|u_j| \leq u_{max} \quad \forall j \in \mathcal{C} \setminus \{1\}, \quad (6.5b) \\ &q_j \geq q_{min} \\ &q_j \leq q_{max} \end{aligned}$$

dove il vettore delle tensioni  $u$  è una funzione delle variabili decisionali  $q_G$  attraverso la relazione implicita definita dal sistema di equazioni non lineari (3.8), (3.10) e (3.11). Da un punto di vista della progettazione del controllo il problema presentato è dunque caratterizzato da

- le variabili di ingresso  $q_G$ ,
- le variabili di uscita note o misurabili  $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_G \end{bmatrix}$ ,
- i disturbi non misurabili  $p_L, q_L, p_G$ .

L'ovvia conseguenza di un problema abbozzato nella maniera appena mostrata è la ricerca di un algoritmo di controllo capace di affrontare il problema di ORPF utilizzando una strategia distribuita, nella quale ogni microgeneratore  $j$  sia in grado di comunicare solo con i propri vicini nel *cyber layer*, cioè gli agenti in  $\mathcal{N}(j)$ .

Lo scenario appena proposto è generalizzabile al caso in cui gli intervalli delle tensioni ai microgeneratori e delle iniezioni di potenza reattiva da essi applicabili non siano omogenei. È il caso del problema di minimizzazione

$$\min_{q_G} \bar{u}^T Y u \quad (6.6a)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{aligned} |u_j| &\geq u_j^{\min} \\ |u_j| &\leq u_j^{\max} \\ q_j &\geq q_j^{\min} \\ q_j &\leq q_j^{\max} \end{aligned} \quad \forall j \in \mathcal{C} \setminus \{1\}, \quad (6.6b)$$

dove  $u_j^{\min}$ ,  $u_j^{\max}$ ,  $q_j^{\min}$  e  $q_j^{\max}$  sono in generale differenti al variare di  $j$ .

Per semplicità in questa trattazione si fa riferimento al problema di minimizzazione (6.5) con vincoli di tensione e potenza uguali per tutti i nodi. Attraverso un cambio di coordinate è possibile riformulare il problema ottenendo

$$\min_{q_G} \bar{u}^T Y u \quad (6.7a)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{aligned} v_j &\geq v_{\min} \\ v_j &\leq v_{\max} \\ w_j &\geq w_{\min} \\ w_j &\leq w_{\max} \end{aligned} \quad \forall j \in \mathcal{C} \setminus \{1\}, \quad (6.7b)$$

dove

$$\begin{aligned} v_{min} &= |u_{min}|^2, & w_{min} &= 2q_{min}, \\ v_{max} &= |u_{max}|^2, & w_{max} &= 2q_{max}, \\ v_j &= |u_j|^2, & w_j &= 2q_j. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Sostanzialmente nel passaggio da (6.5b) a (6.7b) sono stati elevati al quadrato e normalizzati i vincoli sulle tensione e riscaldati quelli sulle iniezioni di potenza. Benché tali modifiche non abbiano alcun effetto sul problema di ottimizzazione, esse permettono di semplificare la derivazione dell'algoritmo presentato al Capitolo 7.

Il Lagrangiano del problema (6.7) è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_G, \lambda_{min}, \lambda_{max}, \mu_{min}, \mu_{max}) &= \bar{u}^T Y u + \lambda_{min}^T (v_{min} \mathbf{1} - v_G) + \\ &+ \lambda_{max}^T (v_G - v_{max} \mathbf{1}) + \mu_{min}^T (w_{min} \mathbf{1} - w_G) + \mu_{max}^T (w_G - w_{max} \mathbf{1}), \end{aligned} \quad (6.9)$$

dove  $\mathbf{1}$  è un vettore colonna di dimensione  $m$ ,  $\lambda_{min}, \lambda_{max}, \mu_{min}, \mu_{max}$  sono i moltiplicatori di Lagrange relativi ai vincoli (6.7b), cioè le variabili duali del problema.

I vettori  $u, v_G, w_G$  possono essere espressi in funzione delle variabili decisionali  $q_G$ , ricordando Proposizione 4.1.1 e (6.8), sebbene questa dipendenza sia stata omessa per non appesantire la notazione.

È possibile compattare i moltiplicatori di Lagrange nel vettore

$$\nu = [\lambda_{min}^T, \lambda_{max}^T, \mu_{min}^T, \mu_{max}^T].$$



# Capitolo 7

## Controllore con comunicazione tra i nodi

In questo Capitolo viene presentato un algoritmo che fa uso della comunicazione tra gli agenti per portare le componenti del vettore  $u_G$  all'interno dell'intervallo  $[u_{min}, u_{max}]$  ogniqualvolta esista una soluzione *feasible*. Inoltre, prendendo come riferimento [3], si presenterà un problema di controllo più complesso che si propone non solo di fornire agli utenti le tensioni nominali entro una soglia di errore contenuta, ma anche di minimizzare le perdite di potenza nelle linee di distribuzione. Nel seguito si farà riferimento a questo algoritmo col termine *dist*.

### 7.1 Algoritmo *dist*

In questa Sezione, allo scopo di progettare una strategia di controllo distribuito in retroazione per risolvere il problema di ORPF, si applica lo strumento della decomposizione duale al problema di ottimizzazione (6.7). Nello specifico si fa uso della soluzione esplicita approssimata delle equazioni non lineari (3.8), (3.10) e (3.11) introdotta in Proposizione 4.1.1 per derivare i passi di aggiornamento di un *dual ascent algorithm* implementabile in maniera distribuita dagli agenti ed utilizzabile come legge di aggiornamento del controllo in retroazione.

Un *dual ascent algorithm* consiste nell'iterare l'esecuzione alternata di due passi di aggiornamento, uno sulle variabili duali ed uno su quelle decisionali, in particolare, nel caso rappresentato dall'equazione (6.9), ciò si traduce nell'iterare l'aggiornamento di  $\nu$  secondo

$$\begin{aligned}
\lambda_{min}[t] &= \left[ \lambda_{min}[t-1] + \gamma \frac{\partial \mathcal{L}(q_G[t-1], \nu[t-1])}{\partial \lambda_{min}} \right]_+ \\
\lambda_{max}[t] &= \left[ \lambda_{max}[t-1] + \gamma \frac{\partial \mathcal{L}(q_G[t-1], \nu[t-1])}{\partial \lambda_{max}} \right]_+ \\
\mu_{min}[t] &= \left[ \mu_{min}[t-1] + \gamma \frac{\partial \mathcal{L}(q_G[t-1], \nu[t-1])}{\partial \mu_{min}} \right]_+ \\
\mu_{max}[t] &= \left[ \mu_{max}[t-1] + \gamma \frac{\partial \mathcal{L}(q_G[t-1], \nu[t-1])}{\partial \mu_{max}} \right]_+,
\end{aligned}$$

dove  $\gamma$  è una costante positiva adeguata e l'operatore  $[\cdot]_+$  corrisponde alla proiezione sull'ortante positivo, necessaria dal momento che si tratta di moltiplicatori di Lagrange.

Successivamente, ad ogni iterazione, si procede alla minimizzazione del Lagrangiano rispetto alle variabili primali  $q_G$ , cioè

$$q_G[t] = \underset{q_G}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(q_G, \nu[t]). \quad (7.1)$$

Si noti che gli aggiornamenti dei moltiplicatori di Lagrange possono essere eseguiti in maniera distribuita dagli agenti, basandosi sulle misure locali delle violazioni dei vincoli sulle tensioni e sulle iniezioni di potenza. Dette  $\lambda_{min,j}, \lambda_{max,j}, \mu_{min,j}, \mu_{max,j}$  le componenti  $j$ -esime dei moltiplicatori  $\lambda_{min}, \lambda_{max}, \mu_{min}, \mu_{max}$ , risulta evidente che il passo duale può essere implementato come

$$\begin{aligned}
\lambda_{min,j}[t] &= [\lambda_{min,j}[t-1] + \gamma(v_{min} - v_j[t-1])]_+ \\
\lambda_{max,j}[t] &= [\lambda_{max,j}[t-1] + \gamma(v_j[t-1] - v_{max})]_+ \\
\mu_{min,j}[t] &= [\mu_{min,j}[t-1] + \gamma(w_{min} - w_j[t-1])]_+ \\
\mu_{max,j}[t] &= [\mu_{max,j}[t-1] + \gamma(w_j[t-1] - w_{max})]_+.
\end{aligned}$$

Il punto cruciale è derivare un'espressione per trovare  $q_G[t]$  che minimizzi (7.1) e che possa essere calcolato in maniera distribuita dai compensatori. In [3] e nel seguito si mostra che, facendo uso dell'approssimazione introdotta in Proposizione 4.1.1, il valore di  $q_G[t]$  ottenuto è equivalente a quello che minimizza il Lagrangiano in (7.1) a meno di un  $o\left(\frac{1}{U_N}\right)$ .

Si assume che gli agenti siano coordinati tra loro, ossia che possano aggiornare le loro variabili di stato  $q_j, \lambda_{min,j}, \lambda_{max,j}, \mu_{min,j}, \mu_{max,j}$  in modo sincrono.

### 7.1.1 Algoritmo sincrono

Siano tutti gli agenti (eccetto il PCC) in grado di salvare le variabili scalari ausiliarie  $\lambda_{min,j}, \lambda_{max,j}, \mu_{min,j}, \mu_{max,j}$ , sia  $\gamma$  un parametro scalare positivo e sia  $\phi$  la fase comune a tutte le impedenze definita all'Assunzione 1. Siano  $G_{jk}$  gli elementi della matrice sparsa  $G$  definita al Lemma 4.1.2. Ad ogni iterazione sincrona dell'algoritmo, ogni agente  $j \in \mathcal{C} \setminus \{1\}$  esegue nell'ordine le seguenti operazioni:

- misura la tensione  $u_j$  e raccoglie dai suoi vicini nel *cyber layer* le misure di tensione

$$\{u_k = |u_k| \exp(i\theta_k), k \in \mathcal{N}(j)\};$$

- aggiorna le variabili ausiliarie  $\lambda_{min,j}, \lambda_{max,j}, \mu_{min,j}, \mu_{max,j}$  secondo

$$\begin{aligned} \lambda_{min,j} &\leftarrow [\lambda_{min,j} + \gamma (u_{min}^2 - |u_j|^2)]_+ \\ \lambda_{max,j} &\leftarrow [\lambda_{max,j} + \gamma (|u_j|^2 - u_{max}^2)]_+ \\ \mu_{min,j} &\leftarrow [\mu_{min,j} + 2\gamma (q_{min} - q_j)]_+ \\ \mu_{max,j} &\leftarrow [\mu_{max,j} + 2\gamma (q_j - q_{max})]_+; \end{aligned}$$

- raccoglie dai propri vicini nel *cyber layer* i valori aggiornati dei moltiplicatori di Lagrange  $\mu_{min,k}, \mu_{max,k}, k \in \mathcal{N}(j)$  relativi ai vincoli sulle iniezioni di potenza reattiva;
- basandosi sui nuovi valori di  $\lambda_{min,j}, \lambda_{max,j}$  e di  $\mu_{min,k}, \mu_{max,k}, k \in \mathcal{N}(j)$ , aggiorna il valore della potenza reattiva iniettata  $q_j$  secondo

$$\begin{aligned} q_j &\leftarrow q_j - \sin \phi (\lambda_{max,j} - \lambda_{min,j}) + \\ &\quad + \sum_{k \in \mathcal{N}(j)} G_{jk} |u_j| |u_k| \sin(\theta_{kj} - \phi) + \\ &\quad - \sum_{k \in \mathcal{N}(j) \setminus \{1\}} G_{jk} (\mu_{max,k} - \mu_{min,k}), \end{aligned} \quad (7.2)$$

dove  $\theta_{kj} = \theta_k - \theta_j$ .

Si noti come l'algoritmo sopra descritto possa essere implementato in maniera distribuita, infatti ogni agente scambia informazioni solo con i suoi vicini nel *cyber layer*.

Procedendo analogamente a quanto fatto in [3] si enuncia un risultato che testimonia la bontà dell'approccio seguito.

**Proposizione 7.1.1.** *Sia  $\mathcal{L}(q_G, \nu)$  il Lagrangiano definito in (6.9). La sua derivata parziale rispetto alle variabili primali  $q_G$  vale*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial q_G} \simeq 2(Mq_G + Nq_L + M \sin \phi (\lambda_{max} - \lambda_{min}) + \mu_{max} - \mu_{min}) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right)$$

*Considerando l'algoritmo sincrono appena descritto si ha che*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G[t], \nu[t])}{\partial q_G} = o\left(\frac{1}{U_N^2}\right),$$

*cioè l'aggiornamento di  $q_G$  definito in (7.2) minimizza il Lagrangiano rispetto alle variabili primali.*

La dimostrazione ripercorre i passaggi di Proposizione 2 in [3], ad ogni modo viene proposta in Appendice A, con alcune modifiche.

### 7.1.2 Significato dei moltiplicatori di Lagrange

Prima di procedere con l'analisi della convergenza si fornisce un possibile significato da attribuire ai moltiplicatori di Lagrange relativi al generico compensatore  $j$ .

Si noti che  $\lambda_{min,j}$  e  $\lambda_{max,j}$  aumentano nei casi in cui  $v_j < v_{min}$  o  $v_j > v_{max}$  rispettivamente, mentre diminuiscono entrambi fino a 0 se  $v_{min} \leq v_j \leq v_{max}$ . Intuitivamente dunque sembra che tali moltiplicatori servano a tenere nella memoria di ciascun compensatore uno storico dell'andamento della propria tensione nodale in modo da fornire al nodo in questione un ulteriore elemento di valutazione per la determinazione dell'entità di potenza reattiva da iniettare all'iterazione successiva.

Un discorso solo in parte analogo va fatto per  $\mu_{min,j}$  e  $\mu_{max,j}$ , che aumentano quando  $q_j < q_{min}$  o  $q_j > q_{max}$  rispettivamente, mentre diminuiscono entrambi fino a 0 se  $q_{min} \leq q_j \leq q_{max}$ .

Riguardando (7.2) si nota che i moltiplicatori corrispondenti alle iniezioni di potenza reattiva  $\mu_{min,j}$ ,  $\mu_{max,j}$  vanno ad influire sui microgeneratori vicini nel *cyber layer*  $k \in \mathcal{N}(j)$  e non sull'agente  $j$  stesso. Sostanzialmente accade che, nel caso l'iniezione di potenza reattiva consigliata al nodo  $j$  sia superiore o inferiore rispettivamente al valore massimo o minimo applicabile, l'aggiornamento dell'iniezione nei nodi vicini  $k \in \mathcal{N}(j)$  riceve un contributo che aiuta a riportare le tensioni all'interno degli intervalli concessi anche al nodo  $j$ , sempre nel rispetto dei vincoli di potenza. Tutto ciò a patto che esista effettivamente una soluzione *feasible* del sistema.



Il grosso limite di questo approccio è che l'aggiornamento dei moltiplicatori è molto lento e conseguentemente anche i transitori delle tensioni nodali e delle iniezioni di potenza dei microgeneratori lo sono.

### 7.1.3 Analisi di convergenza dell'algoritmo sincrono

Per studiare la convergenza dell'algoritmo presentato è consigliabile riscrivere

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \lambda_{min}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \lambda_{max}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \mu_{min}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \mu_{max}}.$$

Partendo da  $\partial \mathcal{L}(q_G, \nu) / \partial \lambda_{min} = v_{min} \mathbf{1} - v_G$  e ricordando (5.1) si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \lambda_{min}} = 2(b_{min} - \sin \phi M q_G) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right) \frac{o(U_N)}{U_N},$$

con

$$b_{min} = \frac{1}{2}(v_{min} - 1) \mathbf{1} - (M p_G \cos \phi + N p_L \cos \phi + N q_L \sin \phi).$$

Calcoli analoghi conducono a

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \lambda_{max}} = 2(\sin \phi M q_G - b_{max}) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right),$$

con

$$b_{max} = \frac{1}{2}(v_{max} - 1) \mathbf{1} - (M p_G \cos \phi + N p_L \cos \phi + N q_L \sin \phi).$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \mu_{min}} &= w_{min} \mathbf{1} - w_G = 2(\mathbf{1} q_{min} - q_G), \\ \frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial \mu_{max}} &= w_G - w_{min} \mathbf{1} = 2(q_G - \mathbf{1} q_{max}). \end{aligned}$$

Dunque il passo *dual ascent* può essere riscritto in notazione compatta come

$$\nu[t] = \left[ \nu[t-1] + 2\gamma(\Phi q_G[t-1] + b) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right) \right]_+,$$

dove

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\sin \phi M \\ \sin \phi M \\ -I \\ I \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_{min} \\ -b_{max} \\ \mathbf{1}q_{min} \\ -\mathbf{1}q_{max} \end{bmatrix}.$$

Come risulta chiaro esaminando (A.9) nella dimostrazione della Proposizione 7.1.1 in Appendice A, il passo di aggiornamento per le variabili primali può essere riscritto nella forma

$$q_G[t] = -M^{-1}Nq_L - M^{-1}\Phi^T\nu[t] + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right). \quad (7.3)$$

Nella trattazione successiva si trascurerà il termine infinitesimale. Questo fatto rende sia il vettore delle tensioni nodali  $u$  che il vettore dei moduli quadri normalizzati  $v$  funzioni affini delle variabili decisionali  $q_G$ .

Si considerino dunque le equazioni di aggiornamento

$$\nu[t] = [\nu[t-1] + 2\gamma(\Phi q_G[t-1] + b)]_+, \quad (7.4)$$

per le variabili duali, e

$$q_G[t] = -M^{-1}Nq_L - M^{-1}\Phi^T\nu[t], \quad (7.5)$$

per le variabili primali.

È possibile considerare (7.4) come il vettore che minimizza la derivata parziale di una funzione Lagrangiana rispetto alle variabili primali  $q_G$ , tale funzione può essere ad esempio

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial q_G} = \frac{1}{2}q_G^T M q_G + q_G^T N q_L + \nu^T (\Phi q_G + b)$$

Dunque le equazioni appena trovate possono essere adattate ad un problema di ORPF (*Optimal Reactive Power Flow*) ottenendo il seguente problema di ottimizzazione quadratico strettamente convesso in vincoli lineari

$$\min_{q_G} q_G^T \frac{M}{2} q_G + q_G^T N q_L \quad (7.6a)$$

$$\text{subject to } \Phi q_G + b \leq 0, \quad (7.6b)$$

per il quale vale la dualità forte.

L'equilibrio  $(q_G^*, \nu^*)$  di (7.4)-(7.5) per essere tale deve verificare

$$\begin{aligned}\Phi q_G^* + b &\leq 0 \\ q_G^* + M^{-1}Nq_L + M^{-1}\Phi^T\nu^* &= 0.\end{aligned}$$

È utile definire  $\sigma_{min}$  e  $\sigma_{max}$  come gli autovalori rispettivamente minimo e massimo di  $M$ . Vale il seguente risultato:

**Teorema 7.1.1.** *Si consideri il problema di ottimizzazione (7.6) ed il sistema dinamico descritto dalle equazioni di aggiornamento (7.4) e (7.5). Allora la traiettoria  $t \mapsto q(t)$  converge alla soluzione ottima primale  $q_G^*$  se*

$$\gamma \leq \frac{1}{\rho(\Phi M^{-1}\Phi^T)},$$

dove

$$\rho(\Phi M^{-1}\Phi^T) = 2 \max\{\sigma_{min}^{-1} + \sin^2(\theta)\sigma_{min}, \sigma_{max}^{-1} + \sin^2(\theta)\sigma_{max}\}$$

è l'autovalore dominante di  $\Phi M^{-1}\Phi^T$ .

Per la dimostrazione del teorema si rimanda a [3].

## 7.2 Limiti dell'algoritmo *dist*

Come assicura il Teorema 7.1.1, nel caso in cui una soluzione *feasible* sia effettivamente presente, l'algoritmo distribuito presentato in questa Sezione consente alla rete di configurarsi in modo tale da rispettare i vincoli imposti. Dunque lo scambio di informazioni tra agenti permette di superare i limiti degli algoritmi locali, ossia la necessità di poter disporre di iniezioni di potenza reattiva arbitrariamente elevate in valore assoluto.

Tuttavia l'utilizzo di questo approccio può essere considerato in qualche misura comunque svantaggioso, infatti, sebbene a regime garantisca di rispettare i vincoli di tensione, il comportamento nel transitorio risulta peggiore di quello ad esempio dell'algoritmo *loc2*.

**Esempio 6.** *Si supponga di trovarsi nelle stesse condizioni di Esempio 5, ossia che i carichi ai PQ bus siano i medesimi di quelli considerati nell'esempio precedente precedenti e che ciascun microgeneratore sia in grado di iniettare una potenza reattiva in modulo inferiore a 0.4 MVAR. Dopo un tempo sufficientemente lungo (4000 iterazioni), tutte le tensioni, controllate con l'algoritmo *dist*, si stabilizzano su valori interni all'intervallo  $[u_{min}, u_{max}]$ , dove  $u_{min} = 0.965$  e  $u_{max} = 1.035$ . Tale proprietà non viene mostrata in figura*

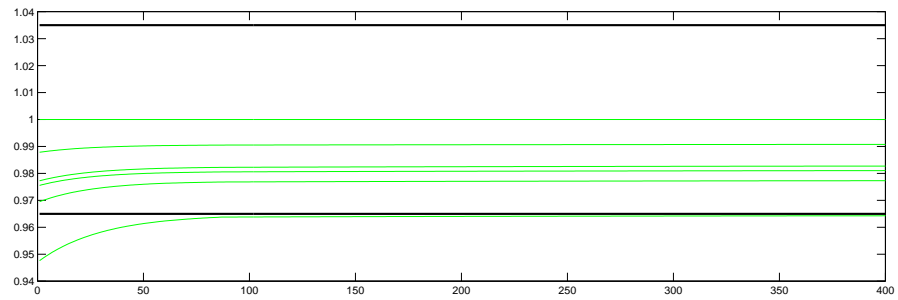


Figura 7.1: *Traiettorie delle tensioni nodali controllate con l'algoritmo dist*

*in quanto sarebbe poco significativa, si preferisce concentrarsi sul transitorio iniziale.*

*Tuttavia, confrontando Figura 7.1 e Figura 5.2b, si nota che l'algoritmo loc2 presenta un comportamento molto più apprezzabile durante il transitorio.*

■

# Capitolo 8

## Algoritmo *misto*

Numerose simulazioni sulla rete elettrica di [8] (topologia) con diverse scelte dell'insieme dei compensatori e diverse *power demand* (richieste di potenza) hanno fatto emergere un problema: soprattutto l'algoritmo *loc1* (Sezione 5.1) ma anche l'algoritmo *loc2* (Sezione 5.2), seppur qualitativamente e quantitativamente meno, non sono sempre in grado di riportare le tensioni entro le soglie richieste.

Tuttavia, le stesse simulazioni hanno portato alla luce anche una caratteristica molto interessante dell'algoritmo *loc2* ovvero la sua velocità nel portare le tensioni in prossimità dei limiti richiesti. Si sono dunque cercati di fondere in un unico approccio quelli presentati in [18] e [3] in modo da unire le buone prestazioni in transitorio dell'algoritmo *loc2* con le proprietà di convergenza dei controllori, in questo caso sincroni, di tipo *dist*.

Nello specifico si è optato per l'utilizzo di una combinazione convessa delle iniezioni di potenza reattiva. L'idea è dunque quella di computare, ad ogni istante  $t$  in cui siano disponibili le misure di tensione e potenza, le iniezioni di potenza reattiva  $q_G[t]$  consigliate dagli algoritmi *loc2* e *dist*, secondo gli aggiornamenti proposti rispettivamente in (5.7) e (7.2).

Una volta note queste grandezze si procede a determinare l'iniezione di potenza reattiva calcolata componente per componente, mediante la formula

$$q_{misto,j}[t] = c_j(u_j[t-1])q_{loc2,j}[t] + (1 - c_j(u_j[t-1]))q_{dist,j}[t], \quad j \in \mathcal{C}, \quad (8.1)$$

dove  $c_j(u_j[t])$  e  $1 - c_j(u_j[t])$  sono i coefficienti della combinazione convessa. D'ora in avanti, per non appesantire la notazione, si potrà fare riferimento a loro semplicemente con  $c_j$  ed  $1 - c_j$ . Tali coefficienti sono vincolati ad assumere valori interni all'intervallo  $[0, 1]$ . Per sfruttare appieno le proprietà di ciascun algoritmo è bene che  $c_j \simeq 1$  quando  $u_j \ll u_{min,j}$  o  $u_j \gg u_{max,j}$  e viceversa  $c_j \simeq 0$  quando  $u_j \simeq 1$ .

Se la notazione *per-unit* presenta un'unica quantità base di tensione  $U_N$  è ragionevole che anche i valori di  $u_{min}$  e  $u_{max}$  siano comuni a tutti i compensatori e siano definiti tramite

$$u_{min} = 1 - \beta \quad \text{e} \quad u_{max} = 1 + \beta. \quad (8.2)$$

A questo punto si definisca il parametro  $\beta_i < \beta$ . Ad esso, procedendo in maniera analoga a (8.2), è possibile far corrispondere i valori  $u_{min}^i$  e  $u_{max}^i$ , definiti da

$$u_{min}^i = 1 - \beta_i \quad \text{e} \quad u_{max}^i = 1 + \beta_i. \quad (8.3)$$

Per determinare le iniezioni di potenza consigliate dall'algoritmo *dist* si utilizzano i valori canonici di  $u_{min}$  e  $u_{max}$  come limiti dell'intervallo dei valori di tensione consentiti. Invece, per ragioni che verranno chiarite in seguito, le iniezioni di potenza consigliate dall'algoritmo *loc2* sono calcolate utilizzando i valori  $u_{min}^i$  e  $u_{max}^i$ .

Si definisce anche il parametro  $\beta_o > \beta$  a cui corrispondono i valori  $u_{min}^o$  e  $u_{max}^o$ , definiti da

$$u_{min}^o = 1 - \beta_o \quad \text{e} \quad u_{max}^o = 1 + \beta_o. \quad (8.4)$$

In particolare  $u_{min}^o < u_{min}$  è utilizzato per regolare la transizione dei coefficiente da 1 a 0 ed analogamente  $u_{max}^o > u_{max}$  per regolare la transizione dei coefficienti da 0 a 1.<sup>1</sup>

Il coefficiente della combinazione convessa  $c_j$  al generico nodo  $j$  segue il seguente andamento

$$c_j(u_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } |u_j| \leq u_{min}^o, \\ g_{min}(|u_j|) & \text{se } u_{min}^o \leq |u_j| \leq u_{min}, \\ 0 & \text{se } u_{min} \leq |u_j| \leq u_{max}, \\ g_{max}(|u_j|) & \text{se } u_{max} \leq |u_j| \leq u_{max}^o, \\ 1 & \text{se } |u_j| \geq u_{max}^o, \end{cases} \quad (8.5)$$

dove  $g_{min}(\cdot)$  e  $g_{max}(\cdot)$  sono delle funzioni incaricate di mettere in relazione il generico valore di tensione rilevato al nodo, con un adeguato valore del coefficiente della combinazione convessa.

Tali funzioni sono definite attraverso una serie di condizioni che impongono il passaggio per i punti  $(u, g(|u|))$ . Si osserva che al variare dei punti presi in considerazione, varia anche la forma della *spline* che gestisce la transizione.

<sup>1</sup> L'apice o il pedice *i* (*inner*) stanno ad indicare che si fa riferimento ad un valore interno all'intervallo  $u_{min}, u_{max}$ , mentre l'apice o il pedice *o*, (*outer*) indicano che ci si riferisce ad un valore esterno alle soglie.

Inoltre è richiesto che la derivata prima agli estremi degli intervalli di transizione  $[u_{min}^o, u_{min}]$  e  $[u_{max}, u_{max}^o]$  sia nulla, in modo da garantire un comportamento più regolare delle funzioni  $c_j(\cdot)$  definite a tratti in (8.5).

In Figura 8.1 si mostra un esempio della funzione che lega  $|u_j|$  a  $c_j$ , in questo caso la transizione dei valori dei coefficienti non è sbilanciata né a favore dell'algoritmo *loc2*, né a favore del *dist*.

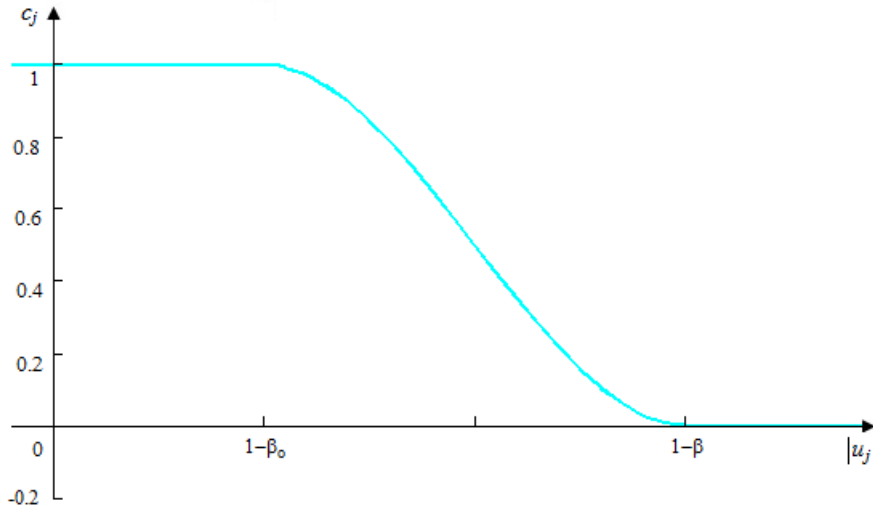


Figura 8.1: *Transizione dei coefficiente  $c_j$  in prossimità di  $u_{min}$ .*

L'equazione (8.1) può essere compattata, in forma matriciale, in

$$q_{G,misto} = C(u_G)q_{G,loc2} + (I - C(u_G))q_{G,dist},$$

dove è stata omessa la dipendenza temporale e  $C(u_G) = \text{diag}(c_j(u_j), j \in \mathcal{C})$ .

A questo punto è possibile fare un ragionamento sull'opportunità di utilizzare altri valori delle soglie oltre ai consueti  $u_{min}$ ,  $u_{max}$ .

In primo luogo vi è la necessità di definire i valori esterni  $u_{min}^o$ ,  $u_{max}^o$  che regolano la transizione dei coefficienti della combinazione convessa. Come già sottolineato in precedenza il difetto dell'algoritmo *dist* sta nella sua lentezza in transitorio, quando cioè i vincoli sono violati. Per risolvere questo problema quindi si opta per affidarsi tanto più al controllore di tipo *loc2* quanto maggiore è l'entità della violazione. Nel caso limite, per  $|u_j| \notin [u_{min}^o, u_{max}^o]$  il contributo dell'algoritmo *dist* non viene preso in considerazione e  $q_{G,misto} = q_{G,loc2}$ .

Risulterebbe insoddisfacente considerare  $u_{min}^i = u_{min}$ ,  $u_{max}^i = u_{max}$ , dove con  $[u_{min}, u_{max}]$  si intende l'intervallo delle tensioni tollerabili per la determinazione di  $q_{G,loc2}$ . Alcune simulazioni hanno infatti messo in evidenza come spesso, sotto questa ipotesi, i valori di tensione vengano riportati molto velocemente in prossimità degli estremi dell'intervallo delle tensioni tollerabili. Ciò comporta dunque una transizione quasi totale verso l'algoritmo *dist* dopo poche iterazioni, con lo svantaggio di trovarsi nella situazione in cui i valori dei moltiplicatori  $\lambda_G$  non sono ancora sufficientemente elevati ed un conseguente rallentamento della convergenza ad una soluzione *feasible*, con risultati addirittura peggiori di quelli dell'algoritmo *dist*.

Per completezza si mostra un esempio di utilizzo dell'algoritmo *misto*, nelle stesse condizioni della rete proposte in Esempio 5 ed Esempio 6.

**Esempio 7.** *Si supponga di trovarsi nelle stesse condizioni di Esempio 5, ossia che i carichi ai PQ bus siano i medesimi di quelli considerati negli esempi precedenti e che ciascun microgeneratore sia in grado di iniettare una potenza reattiva in modulo inferiore a 0.4 MVAR. Dopo un tempo sufficientemente lungo (alcune migliaia di iterazioni), tutte le tensioni, controllate con l'algoritmo misto, si stabilizzano su valori interni all'intervallo  $[u_{min}, u_{max}]$ , dove  $u_{min} = 0.965$  e  $u_{max} = 1.035$ . Tale proprietà non viene mostrata in figura in quanto sarebbe poco significativa, si preferisce concentrarsi sul transitorio iniziale.*

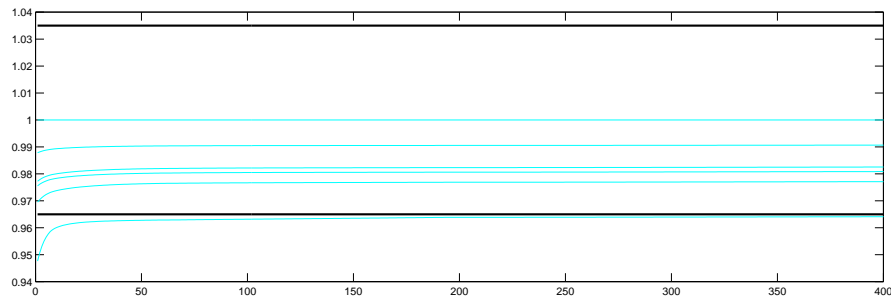


Figura 8.2: Traiettorie delle tensioni nodali controllate con l'algoritmo *dist*

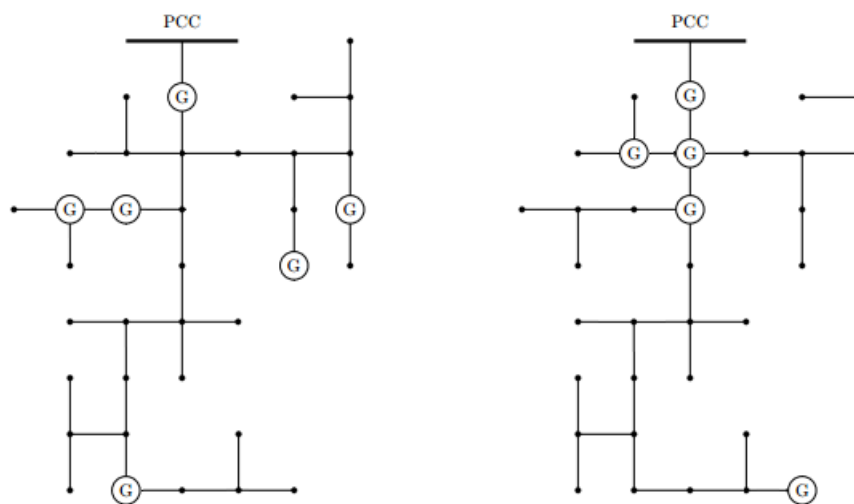
Confrontando Figura 5.2b, Figura 7.1 e Figura 8.2, si nota che l'algoritmo misto presenta un comportamento più apprezzabile di *dist* durante il transitorio e meno apprezzabile di *loc2*, anche se utilizzando quest'ultima strategia di controllo non è assicurata la convergenza. ■



# Capitolo 9

## Simulazioni

Sono state effettuate numerose simulazioni per esaminare le prestazioni degli algoritmi al variare di alcuni parametri. In particolare sono state considerate diverse possibili configurazioni di microgeneratori (in Figura 9.1a e 9.1b se ne danno due esempi), si è variato il numero di agenti del *cyber layer*, l'entità delle iniezioni di potenza reattiva ed i vincoli per il controllo sulle tensioni.



(a) *Configurazione 1 dei microgeneratori.*

(b) *Configurazione 2 dei microgeneratori.*

Figura 9.1: *Possibili configurazioni dei microgeneratori.*

Nelle simulazioni successive si è fatta particolare attenzione a configurare il sistema di controllo in modo da garantire l'esistenza una soluzione *feasible*. Nel caso in cui nemmeno un controllore centralizzato sia in grado di stabilizzare le tensioni all'interno dei vincoli proposti è necessario aumentare il numero di microgeneratori o le entità della massima generazione di potenza reattiva di ciascuno di essi.

Per confrontare l'andamento degli algoritmi proposti si utilizzano tre criteri:

- Numero di violazioni dei vincoli lungo le traiettorie della tensione nodale;
- Entità della violazione dei vincoli di tensione, intesa come l'area della curva compresa tra la soglia di tolleranza e la traiettoria della tensione nodale nel caso in cui il vincolo sia violato;
- Perdite di potenza nelle linee della rete.

Si noti che l'ultima figura di merito è riconducibile ad un comportamento globale della rete, mentre le prime fanno riferimento ai singoli nodi che non rispettano i vincoli di tensione e devono dunque essere prese in considerazione per ogni agente del *cyber layer*.

Ci si pone innanzitutto in una situazione di carico non variabile nel tempo. Si assume come insieme di microgeneratori quello mostrato in Figura 9.1a, inoltre si fissano  $\beta = 0.03$ ,  $\beta_i = 0.0225$ ,  $\beta_o = 0.0375$ ,  $q_{max} = 0.3$ ,  $q_{min} = -0.3$  (MVAR) in modo da garantire l'esistenza di una soluzione *feasible*. La transizione dei coefficienti della combinazione convessa su cui si basa l'algoritmo *misto* è bilanciata tra le strategie di controllo *loc2* e *dist*, ossia è simile a quella presentata in Figura 8.1.

In Figura 9.2b si può notare come, nella situazione descritta, i vincoli di tensione siano violati nel caso in cui non si faccia uso di un controllore (traiettorie gialle).

Invece l'algoritmo *loc2* (contraddistinto dal colore fucsia) è il primo a riportare le tensioni all'interno delle soglie di tolleranza ed il primo ad assestarsi su dei valori a regime. Si tratta di valori ben all'interno dell'intervallo  $[u_{min}, u_{max}]$ , tuttavia le perdite di potenza nella rete assumono valori molto maggiori rispetto all'utilizzo degli altri algoritmi, come risulta chiaro guardando Figura 9.2a. Il controllore di tipo *loc1* (contraddistinto dal colore blu) mostra un comportamento sostanzialmente opposto: riesce a mantenere le perdite ad un valore limitato, ma trascurando il controllo di tensione, cioè l'obiettivo del loro utilizzo.

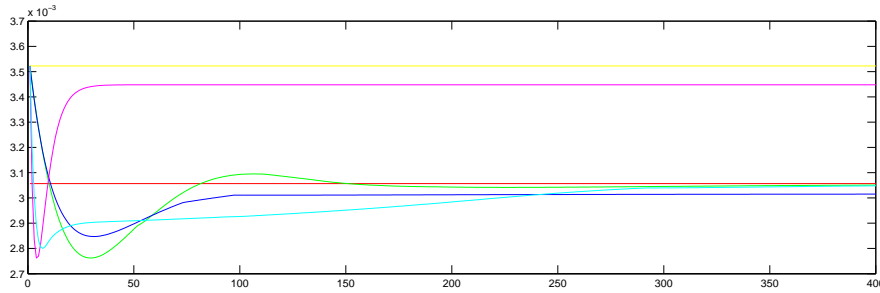
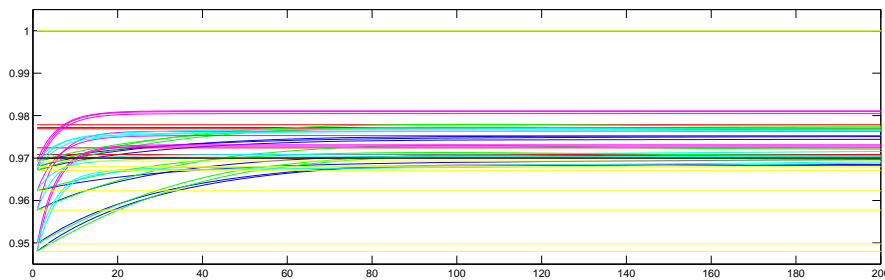
(a) *Andamento delle perdite di potenza.*(b) *Andamento dei moduli di tensione nodali, la linea nera corrisponde al vincolo sulla tensione minima.*

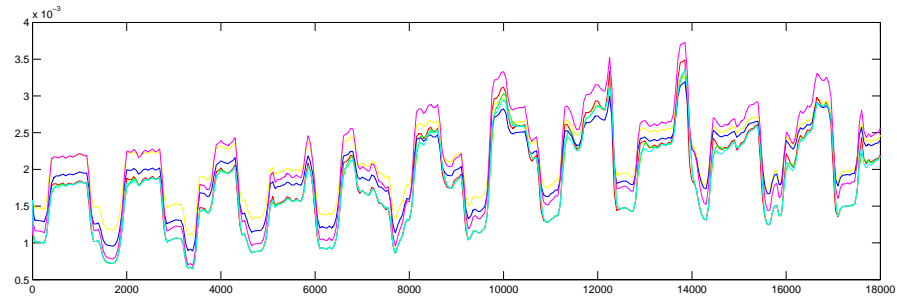
Figura 9.2: Simulazione di un controllo a carico fisso con l'insieme dei generatori mostrato in Figura 9.1a,  $\beta = 0.03$ ,  $\beta_i = 0.0225$ ,  $\beta_o = 0.0375$ ,  $q_{max} = 0.35$ ,  $q_{min} = -0.35$ . In giallo l'andamento delle grandezze della rete non controllate, in rosso il controllo ottimo centralizzato, in blu il controllo con l'algoritmo *loc1*, in fucsia l'algoritmo *loc2*, in verde l'algoritmo *dist* ed in azzurro l'algoritmo *misto*.

Gli algoritmi distribuiti (colori verde ed azzurro in Figura 9.2) invece assicurano la convergenza dei moduli delle tensioni nodali a valori interni alle soglie di tolleranza e delle dissipazioni nelle linee della rete al valore ottenuto mediante un controllore centralizzato. In particolare, in Figura 9.2, si può osservare come il transitorio dell'algoritmo *misto* (azzurro) sia contraddistinto da una convergenza più rapida nelle prime iterazioni, nonostante le strategie di controllo distribuito comportino circa lo stesso numero di violazioni dei vincoli.

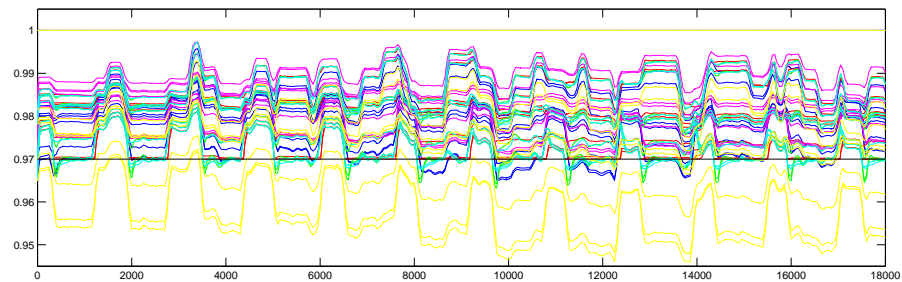
Questo fatto è in accordo con le considerazioni teoriche in quanto, nel caso al generico nodo  $j$  si presenti una situazione del tipo  $|u_j| \ll u_{min}$ , l'algoritmo *misto* si occupa prevalentemente di controllare la tensione e solo in misura minore di minimizzare le perdite. Tuttavia una volta riportato  $|u_j|$  in prossimità di  $u_{min}$  il moltiplicatore  $\lambda_j$ , relativo al vincolo di tensione su

$|u_j|$  è contraddistinto da un valore più basso rispetto allo stesso parametro dell'algoritmo *dist*.

La simulazione appena presentata è significativa per comprendere da un punto di vista qualitativo quali possano essere le prestazioni degli algoritmi di controllo esaminati. Tuttavia nelle applicazioni pratiche i carichi ai vari nodi cambiano nel corso della giornata. Si è optato dunque per testare le strategie di controllo presentate in una situazione di carico variabile. Il profilo dei carichi è fatto variare in modo che siano circa contemporanei i massimi ed i minimi delle potenze attive e reattive richieste dagli utilizzatori, proprio come avviene di norma nelle reti di distribuzione. Non si tratta dunque di dati veri raccolti sulla rete elettrica descritta in [8], ma di profili comunque significativi.



(a) *Andamento delle perdite di potenza.*

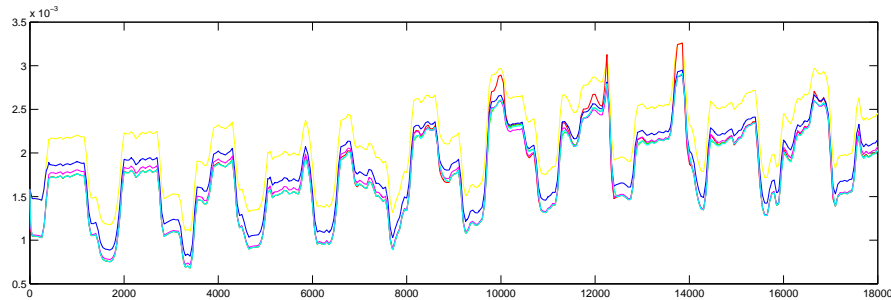


(b) *Andamento dei moduli di tensione nodali, la linea nera corrisponde al vincolo sulla tensione minima.*

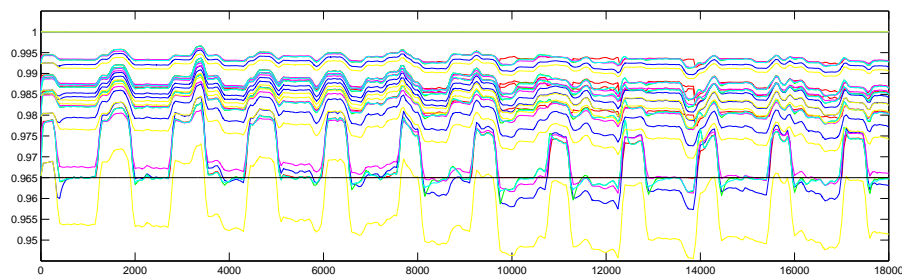
Figura 9.3: *Simulazione di un controllo a carico variabile con l'insieme dei generatori mostrato in Figura 9.1a,  $\beta = 0.03$ ,  $\beta_i = 0.0225$ ,  $\beta_o = 0.0375$ ,  $q_{max} = 0.35$ ,  $q_{min} = -0.35$ . In giallo l'andamento delle grandezze della rete non controllate, in rosso il controllo ottimo centralizzato, in blu il controllo con l'algoritmo *loc1*, in fucsia l'algoritmo *loc2*, in verde l'algoritmo *dist* ed in azzurro l'algoritmo misto.*

In figura 9.3b si nota come ancora una volta sia necessario un controllore per mantenere i moduli delle tensioni nodali all'interno delle soglie di tolleranza. Ad eccezione di brevi intervalli, le strategie di controllo distribuite riescono a mantenere i valori delle tensioni nodali all'interno delle soglie di tolleranza. Si nota inoltre che con l'algoritmo *misto* la violazione del vincolo media è leggermente inferiore a quella ottenuta utilizzando l'algoritmo *dist*.

Anche gli algoritmi puramente locali il più delle volte sono in grado di garantire la *voltage regulation*, tuttavia le perdite di potenza nelle linee in questo caso risultano molto più elevate, come sottolinea Figura 9.3a. Inoltre i risultati del controllo sono fortemente dipendenti dall'insieme dei microgeneratori e dalle loro proprietà. Si può infatti notare in Figura 9.4 che le prestazioni delle strategie di controllo puramente locali peggiorano mentre restano sostanzialmente inalterate quelle degli algoritmi distribuiti.



(a) Andamento delle perdite di potenza.

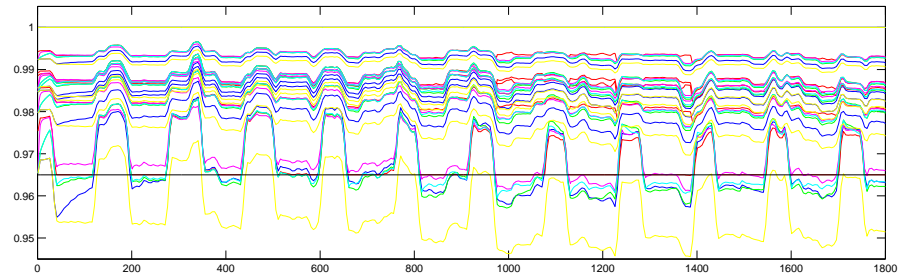


(b) Andamento dei moduli di tensione nodali, la linea nera corrisponde al vincolo sulla tensione minima.

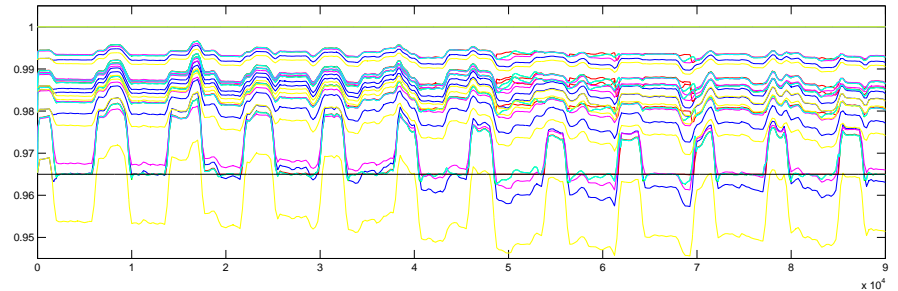
Figura 9.4: Simulazione di un controllo a carico variabile con l'insieme dei generatori mostrato in Figura 9.1a,  $\beta = 0.035$ ,  $\beta_i = 0.02625$ ,  $\beta_o = 0.04375$ ,  $q_{max} = 0.4$ ,  $q_{min} = -0.4$  e 18000 iterazioni. In giallo l'andamento delle grandezze della rete non controllate, in rosso il controllo ottimo centralizzato, in blu il controllo con l'algoritmo *loc1*, in fucsia l'algoritmo *loc2*, in verde l'algoritmo *dist* ed in azzurro l'algoritmo *misto*.

Le traiettorie delle tensioni controllate dagli algoritmi distribuiti sono invece dipendenti dal numero di iterazioni compiute dagli algoritmi. Come emerge da Figura 9.4b, Figura 9.5a, Figura 9.5b, le prestazioni dell'algoritmo *dist* migliorano all'aumentare del numero di iterazioni. Questo fatto si spiega ricordando la lentezza che contraddistingue l'algoritmo *dist* rispetto ad esempio all'algoritmo *loc2*.

Nel caso di carichi variabili nel tempo la strategia di controllo *dist* non è in grado di operare un controllo efficace nel caso in cui non disponga di un numero elevato di misure. In questo caso infatti i moltiplicatori  $\nu$  vengono aggiornati più frequentemente e le iniezioni di potenza reattiva consigliate sono più aderenti alla reale situazione di carico.



(a) Andamento dei moduli di tensione nodali usando 1800 acquisizioni, la linea nera corrisponde al vincolo sulla tensione minima.



(b) Andamento dei moduli di tensione nodali usando 90000 acquisizioni, la linea nera corrisponde al vincolo sulla tensione minima.

Figura 9.5: Simulazione di un controllo a carico variabile con l'insieme dei generatori mostrato in Figura 9.1a,  $\beta = 0.035$ ,  $\beta_i = 0.02625$ ,  $\beta_o = 0.04375$ ,  $q_{max} = 0.4$ ,  $q_{min} = -0.4$ . In giallo l'andamento delle grandezze della rete non controllate, in rosso il controllo ottimo centralizzato, in blu il controllo con l'algoritmo *loc1*, in fucsia l'algoritmo *loc2*, in verde l'algoritmo *dist* ed in azzurro l'algoritmo *misto*.

D'altronde la strategia di controllo di tipo *misto*, tenendo conto sia del-

l'algoritmo *loc2* che di quello *dist*, presenta dei profili di tensione abbastanza aderenti ai vincoli, tanto in Figura 9.5a quanto in Figura 9.5b. L'influenza del numero di iterazioni utilizzate, cioè del numero delle misure fasoriali da parte dei PMU, è minore rispetto al caso dell'algoritmo *dist*. Si può dire quindi che le prestazioni del controllo *misto* siano più robuste rispetto alla disponibilità dei dati, anche se comunque sono migliori all'aumentare delle acquisizioni.

Infine si può osservare che in presenza di un elevato numero di dati gli algoritmi distribuiti *dist* e *misto* riescono a controllare le tensioni in maniera molto simile a quanto faccia un controllore centralizzato. A tal proposito si faccia riferimento a Figura 9.4b e Figura 9.5b.





# Capitolo 10

## Conclusioni

In questo elaborato si sono studiate le prestazioni di diverse strategie orientate al controllo di tensione in *smart grid* tramite l'iniezione di potenza reattiva da parte di alcuni *bus* detti microgeneratori.

Sono stati considerati alcuni controllori proposti in lavori precedenti ([10], [18], [3]). Una volta unificata la notazione, sono stati comparati due algoritmi puramente locali con uno di tipo distribuito in grado anche di minimizzare le perdite di potenza nella rete. Si è dimostrato, mediante alcune simulazioni, che le strategie di controllo locali non sono sempre in grado di garantire la *voltage regulation*, nonostante esista una soluzione *feasible* determinabile ricorrendo ad un algoritmo centralizzato. Le cause del fallimento di queste tecniche vanno cercate nel posizionamento dei microgeneratori all'interno della rete o nei limiti di potenza erogabile degli stessi.

D'altra parte si è notato che la convergenza dell'algoritmo di tipo distribuito a valori interni all'intervallo di tolleranza delle tensioni è piuttosto lenta. Per questa ragione si è pensato di elaborare una strategia di controllo distribuita, in modo da sfruttare la comunicazione tra i microgeneratori, ma in grado di basare il controllo sulle informazioni locali in caso di violazioni considerevoli dei vincoli di tensione. Poiché la soluzione a regime si basa sulla risoluzione di un ORPF, tale strategia di controllo è anche in grado di minimizzare le perdite di potenza della rete.

Numerose simulazioni hanno mostrato che l'algoritmo proposto è in grado di stabilizzare i moduli dei fasori di tensione in un intervallo fissato. Inoltre sono stati conseguiti buoni risultati sia nel caso in cui l'algoritmo possa disporre di dati temporalmente vicini tra loro, sia nel caso in cui la frequenza di acquisizioni sia più ridotta.

L'analisi presentata in questo elaborato non è focalizzata sulla robustezza rispetto all'errore di misura dei PMU ed all'incertezza parametrica sulle componenti della rete, tali aspetti si prestano ad essere trattati in lavori futuri.

Inoltre sarebbe interessante sviluppare un algoritmo distribuito finalizzato alla sola *voltage regulation*, tramite iniezioni di potenza reattiva, in modo da impiegarlo, al posto della strategia di controllo *loc2*, nella combinazione convessa su cui si fonda il controllore *misto*.

# Appendice A

## Dimostrazione di Proposizione 7.1.1

Fondamentalmente la dimostrazione consiste in una verifica, dall'equazione (6.9), si ha che

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial q_G} = \frac{\partial \bar{u}^T Y u}{\partial q_G} + \left( \frac{\partial v_G}{\partial q_G} \right)^T (\lambda_{max} - \lambda_{min}) + \left( \frac{\partial w_G}{\partial q_G} \right)^T (\mu_{max} - \mu_{min}). \quad (\text{A.1})$$

Per la derivazione del primo termine a secondo membro conviene introdurre la scomposizione  $u = (u' + iu'')e^{i(\theta+\phi)}$  che porge, ricorrendo a (4.5)

$$u' = \text{Re} [ue^{-i(\theta+\phi)}] = \cos \phi \mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N \\ 0 & N^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p_G \\ p_L \end{bmatrix} + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right),$$
$$u'' = \text{Im} [ue^{-i(\theta+\phi)}] = -\sin \phi \mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N \\ 0 & N^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_G \\ q_L \end{bmatrix} + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right).$$

Poiché  $\bar{u}^T Y u = u'^T Y u' + u''^T Y u''$  si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}^T Y u}{\partial q_G} &= 2 \left( \frac{\partial u'}{\partial q_G} \right)^T Y u' + 2 \left( \frac{\partial u''}{\partial q_G} \right)^T Y u'' \\
&= -2 [0 \quad M \quad N] Y u'' \\
&= 2 [0 \quad M \quad N] Y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N \\ 0 & N^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_G \\ q_L \end{bmatrix} + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right). \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Poiché  $X$  è stata determinata in Lemma 4.1.1 come la matrice che soddisfa  $YX = I - \mathbf{1}_0 \mathbf{1}^T$  e  $X \mathbf{1}_0 = 0$  (e dunque anche  $[0 \quad M \quad N] \mathbf{1}_0 = 0$ ), è possibile riscrivere l'equazione (A.2) come

$$\frac{\partial \bar{u}^T Y u}{\partial q_G} = 2(Mq_G + Nq_L) + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right). \quad (\text{A.3})$$

A partire da (5.1) è possibile ricavare

$$\frac{\partial v_G}{\partial q_G} = 2 \sin \phi M + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right), \quad (\text{A.4})$$

inoltre

$$\frac{\partial w_G}{\partial q_G} = \frac{2}{U_N^2} I. \quad (\text{A.5})$$

Quindi, utilizzando (A.1), (A.3), (A.4), e (A.5), si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_G, \nu)}{\partial q_G} = 2 [Mq_G + Nq_L + M \sin \phi (\lambda_{max} - \lambda_{min}) + \mu_{max} - \mu_{min}] + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right). \quad (\text{A.6})$$

Si nota che la matrice

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T M^{-1} \mathbf{1}^T & -\mathbf{1} M^{-1} \\ -M^{-1} \mathbf{1} & M^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

soddisfa il sistema di equazioni di Lemma 4.1.2.

Sulla base di essa le equazioni (7.2) possono essere riassunte in forma matriciale da

$$\begin{aligned}
q_G \leftarrow q_G - \sin(\phi)(\lambda_{max} - \lambda_{min}) - M^{-1}(\mu_{max} - \mu_{min}) + \\
+ \operatorname{Im} \left[ e^{-i\phi} \operatorname{diag}(\bar{u}_G) [-M^{-1}\mathbf{1} \quad M^{-1}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_G \end{bmatrix} \right] + o\left(\frac{1}{U_N^2}\right). \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Utilizzando l'approssimazione introdotta in Proposizione 4.1.1 si può mostrare che

$$[-M^{-1}\mathbf{1} \quad M^{-1}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_G \end{bmatrix} = e^{i\phi} M^{-1}(M\bar{s}_G + N\bar{s}_L)$$

quindi, a meno di termini del tipo  $o\left(\frac{1}{U_N^2}\right)$ , l'equazione di aggiornamento (A.8) può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
q_G \leftarrow q_G - \sin(\phi)(\lambda_{max} - \lambda_{min}) - M^{-1}(\mu_{max} - \mu_{min}) - (q_G + M^{-1}Nq_L) \\
\leftarrow -\sin(\phi)(\lambda_{max} - \lambda_{min}) - M^{-1}(\mu_{max} - \mu_{min}) - M^{-1}Nq_L, \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

che sostituita in (A.6) porge la tesi. ■



# Bibliografia

- [1] Mesut E Baran and Felix F Wu. Optimal capacitor placement on radial distribution systems. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 4(1):725–734, 1989.
- [2] Mesut E Baran and Felix F Wu. Optimal sizing of capacitors placed on a radial distribution system. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 4(1):735–743, 1989.
- [3] Saverio Bolognani, Ruggero Carli, Guido Cavraro, and Sandro Zampieri. Distributed reactive power feedback control for voltage regulation and loss minimization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 60(4):966–981, 2015.
- [4] Saverio Bolognani and Sandro Zampieri. A distributed control strategy for reactive power compensation in smart microgrids. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 58(11):2818–2833, 2013.
- [5] Andrea Carta. Sincronizzazione dei sistemi di misura distribuiti nelle reti elettriche. 2008.
- [6] Massimo Guarnieri. *Elementi di elettronica circuitale*. Progetto, 2010.
- [7] Anthony Kam and James Simonelli. Stability of distributed, asynchronous var-based closed-loop voltage control systems. In *PES General Meeting— Conference & Exposition, 2014 IEEE*, pages 1–5. IEEE, 2014.
- [8] William H Kersting. Radial distribution test feeders. In *Power Engineering Society Winter Meeting, 2001. IEEE*, volume 2, pages 908–912. IEEE, 2001.
- [9] Javad Lavaei, Anders Rantzer, and SH Low. Power flow optimization using positive quadratic programming. *Proc. 18th IFAC World Congr*, pages 10481–10486, 2011.

- [10] Na Li, Guannan Qu, and Munther Dahleh. Real-time decentralized voltage control in distribution networks. In *Communication, Control, and Computing (Allerton), 2014 52nd Annual Allerton Conference on*, pages 582–588. IEEE, 2014.
- [11] Syed A Nasar and Frederick C Trutt. *Electric power systems*. CRC Press, 1998.
- [12] Pietro Romano and Mario Paolone. An enhanced interpolated-modulated sliding dft for high reporting rate pmus. In *Applied Measurements for Power Systems Proceedings (AMPS), 2014 IEEE International Workshop on*, pages 1–6. Ieee, 2014.
- [13] L Schenato, G Barchi, D Macii, R Arghandeh, K Poolla, and A Von Meier. Bayesian linear state estimation using smart meters and pmus measurements in distribution grids. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2014 IEEE International Conference on*, pages 572–577. IEEE, 2014.
- [14] Johannes Schiffer, Darina Goldin, Jorg Raisch, and Tevfik Sezi. Synchronization of droop-controlled microgrids with distributed rotational and electronic generation. In *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 2334–2339. IEEE, 2013.
- [15] Johannes Schiffer, Romeo Ortega, Alessandro Astolfi, Jörg Raisch, and Tevfik Sezi. Conditions for stability of droop-controlled inverter-based microgrids. *Automatica*, 50(10):2457–2469, 2014.
- [16] Johannes Schiffer, Thomas Seel, Jorg Raisch, and Tevfik Sezi. Voltage stability and reactive power sharing in inverter-based microgrids with consensus-based distributed voltage control. 2014.
- [17] Petr Sulc, Scott Backhaus, and Michael Chertkov. Optimal distributed control of reactive power via the alternating direction method of multipliers. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 29(4):968–977, 2014.
- [18] Konstantin Turitsyn, Scott Backhaus, Michael Chertkov, et al. Options for control of reactive power by distributed photovoltaic generators. *Proceedings of the IEEE*, 99(6):1063–1073, 2011.
- [19] Konstantin Turitsyn, Petr Šulc, Scott Backhaus, and Michael Chertkov. Distributed control of reactive power flow in a radial distribution circuit with high photovoltaic penetration. In *Power and Energy Society General Meeting, 2010 IEEE*, pages 1–6. IEEE, 2010.



- [20] Domenico Villacci, Gianluca Bontempi, and Alfredo Vaccaro. An adaptive local learning-based methodology for voltage regulation in distribution networks with dispersed generation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 21(3):1131–1140, 2006.
- [21] Baosen Zhang, Alejandro D Dominguez-Garcia, and David Tse. A local control approach to voltage regulation in distribution networks. In *North American Power Symposium (NAPS), 2013*, pages 1–6. IEEE, 2013.
- [22] Ray D Zimmerman and Carlos E Murillo-Sánchez. Matpower 4.1 user’s manual. *Power Systems Engineering Research Center, Cornell University, Ithaca, NY*, 2011.