



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi Civita”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Titolo

Quantizzazione per deformazioni

Relatore

Prof. Paolo Rossi

Laureando

Manuel Dell’Anna

Anno Accademico 2021/2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Varietà di Poisson</b>	<b>1</b>
2.1	Definizioni . . . . .	1
2.2	Esempi di strutture di Poisson . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Quantizzazione per deformazione</b>	<b>5</b>
3.1	Introduzione . . . . .	5
3.2	Star products . . . . .	6
3.2.1	Esempi di star products . . . . .	8
3.3	$\star$ -products canonici . . . . .	9
3.3.1	Spazio degli stati . . . . .	10
3.3.2	Analisi di Weyl . . . . .	10
3.3.3	Stati puri, misti e valori di aspettazione . . . . .	11
3.3.4	Evoluzione temporale di un sistema quantistico . . . . .	12
3.4	Teorema di Kontsevich . . . . .	12



# Capitolo 1

## Introduzione

In questa tesi verrà esposta la quantizzazione per deformazioni e la cosiddetta "meccanica quantistica dello spazio delle fasi", tutto ciò unito agli strumenti matematici necessari per descriverli.

Nella seconda parte verrà presentato il formalismo degli "star products", cruciali per la comprensione dell'enunciato del teorema di Kontsevich, il quale classifica gli star-products deformando l'algebra delle osservabili classiche, e la sua formula combinatoria.



# Capitolo 2

## Varietà di Poisson

### 2.1 Definizioni

La varietà di Poisson rappresentano l'ambiente matematico su cui poggia il formalismo degli star-products e sono necessarie alla comprensione del teorema di M. Kontsevich, per tale motivo, si rende necessario un delineamento delle varie definizioni e teoremi che le caratterizzano e attraverso i quali verranno presentati gli aspetti fondamentali di tale teoria.

**Definizione 2.1.** *Un'algebra di Poisson  $(P, \{\cdot, \cdot\})$  è un'algebra commutativa e associativa  $P$  dotata di una struttura di algebra di Lie  $\{\cdot, \cdot\}$  soddisfacente la regola di Leibniz  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}, \forall f, g, h \in P$ .*

**Definizione 2.2.** *Una varietà di Poisson  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  è una varietà differenziale  $M$  dotata di una struttura di algebra di Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  sull'algebra associativa e commutativa  $C^\infty(M)$ .*

**Esempio.** *Una varietà simplettica  $(M, \omega)$  con parentesi di Poisson*

$$\{f, g\} = \omega^{-1}(df, dg)$$

*è una varietà di Poisson.*

**Nota.** *Grazie alla regola di Leibniz,  $\{f, g\}|_p$  dipende esclusivamente da  $df|_p$  e da  $dg|_p$ . Antisimmetria e bilinearità garantiscono poi l'esistenza di un tensore  $\Pi|_p \in T_pM \wedge T_pM$  tale per cui*

$$\{f, g\}|_p = \Pi|_p(df|_p, dg|_p)$$

.

**Nota.** *E' possibile estendere la nozione di parentesi di Lie per campi vettoriali alle parentesi di Schouten-Nijenhuis per campi multivettoriali le quali assumono la forma:*

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(\bigwedge^m TM) \otimes \Gamma(\bigwedge^n TM) \rightarrow \Gamma(\bigwedge^{m+n-1} TM) \quad (2.1)$$

*ottenute estendendo*

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(\bigwedge^1 TM) \otimes \Gamma(\bigwedge^1 TM) \rightarrow \Gamma(\bigwedge^1 TM) \quad (2.2)$$

*ed*

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(\bigwedge^1 TM) \otimes \Gamma(\bigwedge^0 TM) \rightarrow \Gamma(\bigwedge^0 TM) \quad (2.3)$$

*attraverso bilinearità ed antisimmetria gradata*

$$[A, B] = -(-1)^{(|A|-1)(|B|-1)}[B, A]$$

*e regola di Leibniz gradata*

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{|B|(|A|-1)} B \wedge [A, C]$$

**Definizione 2.3.** L'unico campo tensoriale  $\Pi : M \rightarrow TM \wedge TM$  tale per cui  $\{f, g\} = \Pi(df, dg)$  viene detto  *tensore di Poisson*.

**Nota** Un bivettore antisimmetrico  $\Pi$  è di Poisson  $\iff [\Pi, \Pi] = 0$

**Esempio.** Per la struttura di Poisson associata ad una struttura simplettica  $(M, \omega)$ , il tensore di Poisson è  $\omega^{-1}$ .

**Definizione 2.4.** Una funzione  $f \in C^\infty(M)$  tale per cui  $\{f, g\} = 0, \forall g \in C^\infty(M)$  viene detta *funzione di Casimir*.

**Nota.** Una varietà simplettica non possiede funzioni di Casimir a causa della non degenerazione di  $\omega \in \Omega^2(M)$ .

**Teorema 2.1** (Weinstein). Sia  $(M, \Pi)$  una varietà di Poisson,  $p \in M$ , allora esiste una carta

$$(U, x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n, y^1, \dots, y^k)$$

centrata in  $p$  tale per cui:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} c^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \wedge \frac{\partial}{\partial y^j} \\ c^{ij}(p) &= 0 \end{aligned}$$

**Nota.** La nozione di campo vettoriale Hamiltoniano è facilmente generalizzata alle varietà di Poisson

$$f \in C^\infty(M) \rightarrow X_f = \Pi(df) \in \mathfrak{X}(M)$$

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$$

dove si è posto

$$\Pi(df) := \Pi(\cdot, df)$$

**Definizione 2.5.** Un punto  $p \in M$  è detto *regolare* per la varietà di Poisson  $(M, \Pi)$  se esiste un intorno  $U$  di  $p$  tale per cui

$$rk(\Pi|_x) = rk(\Pi|_p) \quad \forall x \in U$$

Mentre i punti che non sono regolari vengono detti *singolari*.

**Proposizione 2.1.** L'insieme dei punti regolari  $M_{reg} \subset M$  per una varietà di Poisson è aperto e denso.

**Teorema 2.2.** Sia  $(M, \Pi)$  una varietà di Poisson con  $\Pi$  di rango costante. Allora la distribuzione

$$Im(\Pi : T^*M \rightarrow TM)$$

è integrabile e considerando un'immersione  $i : S \rightarrow M$  si ha che per ogni "foglia"  $S$  esiste un'unica struttura di varietà simplettica su  $S$  indotta da  $M$ , ovvero

$$\exists! \omega \in \Omega^2(M) : i_*(\omega^{-1}) = (\Pi)|_{i(S)}$$

**Definizione 2.6.** Un campo vettoriale  $X \in \mathfrak{X}(M)$  viene detto di Poisson se soddisfa  $\mathcal{L}_X \Pi = 0$

**Proposizione 2.2.**

- Sia  $\phi_t$  il flusso associato ad un campo vettoriale di Poisson  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , allora

$$(\phi_t)_* \Pi = \Pi$$

- I campi vettoriali Hamiltoniani sono di Poisson.

**Proposizione 2.3.** *Sia  $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$  un tensore di Poisson, allora*

$$[\Pi, [\Pi, A]] = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{X}^k(M)$$

**Definizione 2.7.** *Sia  $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M) := \Gamma(\wedge^2 TM)$ , definiamo*

$$\begin{aligned} d_\Pi : \mathfrak{X}^k(M) &\rightarrow \mathfrak{X}^{k+1}(M) \\ A &\rightarrow d_\Pi(A) = [\Pi, A] \end{aligned}$$

ed il gruppo di coomologia di Poisson come:

$$H_\Pi^k := \frac{\text{Ker}(d_\Pi : \mathfrak{X}^k(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{k+1}(M))}{\text{Im}(d_\Pi : \mathfrak{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^k(M))} = \frac{Z^k}{B^k} \quad (2.4)$$

Perciò il gruppo di coomologia  $H_\Pi^2$  classifica le deformazioni infinitesime del tensore di Poisson  $\Pi$  a meno di cambi di coordinate infinitesimi.

**Nota.** *La condizione per la quale una deformazione al primo ordine di  $\Pi$  sia ancora di Poisson. Sia*

$$\Delta \in \mathfrak{X}^2(M) \quad [\Pi + \epsilon\Delta, \Pi + \epsilon\Delta] = [\Pi, \Pi] + 2[\Pi, \Delta]\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \rightarrow \Delta \in Z^2$$

Per quanto riguarda le deformazioni provenienti da un cambiamento(infinitesimo) di coordinate:

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon^X : M &\rightarrow M \\ (\Phi_\epsilon)_* \Pi &= \Pi + \epsilon \mathcal{L}_X \Pi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \rightarrow \Delta = \mathcal{L}_X \Pi \rightarrow \Delta \in B^2 \end{aligned}$$

## 2.2 Esempi di strutture di Poisson

- Sia  $M = \mathbb{R}^{2n+k}$  con coordinate  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, y^1, \dots, y^k)$

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$$

- Sia  $M = \mathbb{R}^{n+l}$  con coordinate  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_l)$ , in questo caso il tensore di Poisson assume la forma

$$\Pi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

dove  $a_{ij}$  è una matrice skew-simmetrica

- Sia  $M = \mathbb{R}^n$  con coordinate  $(x^1, \dots, x^n)$  e tensore di Poisson

$$\Pi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Restringendo l'azione del tensore su  $\mathbb{R}_+^n := \{(x^1, \dots, x^n) : x^i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\}$

si ha che, per  $h \in C^\infty(M)$  data da

$$h = \sum_{i=1}^n \nu^i x^i - k_i \log(x^i) \quad \{\nu_i\}_{i=1, \dots, n}, \{k_i\}_{i=1, \dots, n} \subset \mathbb{R}$$

il vettore associato ad  $h$

$$X_h = \Pi(\cdot, dh)$$

descrive l'evoluzione nel tempo del numero di n specie biologiche. (sistema preda-predatore di Lotka-Volterra).

- Sia  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$  un'algebra di Lie, allora  $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\})$  eredita una struttura di varietà di Poisson da  $\mathfrak{g}$ , si veda [2] per una referenza, ponendo

$$\{f, g\}|_{\xi} = \langle [df|_{\xi}, dg|_{\xi}]_{\mathfrak{g}}, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^* \quad (2.5)$$

Si noti che, da questa definizione si ha

$$\Pi^{ij} = \{x^i, x^j\}|_{\xi} = \langle [dx^i|_{\xi}, dx^j|_{\xi}]_{\mathfrak{g}}, \xi \rangle$$

Considerando in particolare  $M = \mathfrak{so3}^*$ , usando la catena di isomorfismi  $\mathfrak{so3}^* \simeq \mathbb{R}^{3*} \simeq \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so3}$  è possibile sfruttare il fatto in (2.5) e scrivere le parentesi di poisson tra  $f, g \in C^{\infty}(\mathfrak{so3}^3)$  come

$$\{f, g\}|_{(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

con

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

travando l'espressione in coordinate del tensore di Poisson:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

Questa struttura di Poisson viene anche detta struttura di Lie-Poisson. In particolare prendendo in esame l'hamiltoniana

$$h \in C^{\infty}(\mathfrak{so3}^*) \quad h(x, y, z) = \frac{x^2}{2I_x} + \frac{y^2}{2I_y} + \frac{z^2}{2I_z}$$

è possibile derivare poi le equazioni del moto di un corpo rigido con un punto fisso considerando il campo vettoriale associato ad  $h$  tramite  $\Pi$ , ovvero

$$X_h = \frac{I_y - I_z}{I_y I_z} yz \frac{\partial}{\partial x} + \frac{I_z - I_x}{I_z I_x} xz \frac{\partial}{\partial y} + \frac{I_x - I_y}{I_x I_y} xy \frac{\partial}{\partial z}$$

Poichè inoltre

$$\mathfrak{Ker}\Pi|_{(x,y,z)} = \langle (x, y, z) \rangle \rightarrow \mathfrak{Imm}\Pi|_{(x,y,z)} = \langle (x, y, z) \rangle^{\perp}$$

si deduce che

$$\mathcal{C}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

è una funzione di Casimir per  $\Pi$  pertanto le superfici sferiche  $\mathcal{C}^{-1}(r)$  sono foglie simplittiche ed il campo vettoriale hamiltoniano è tangente su ognuna di esse a  $\mathcal{C}^{-1}(r) \cap h^{-1}(E)$ .

## Capitolo 3

# Quantizzazione per deformazione

### 3.1 Introduzione

In meccanica classica, un sistema fisico è solitamente descritto da una funzione  $h \in C^\infty(M)$  su una varietà di Poisson  $(M, \Pi)$ , la sua evoluzione essendo data dal flusso

$$\phi^{X_h} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

del campo vettoriale  $X_h = \Pi(dh) := \Pi(\cdot, dh)$ .

Una osservabile è qualsiasi altra funzione  $f \in C^\infty(M)$  ed il suo valore su uno stato (un punto  $p \in M$  spazio delle fasi) evolve secondo la regola

$$\frac{df}{dt} = \{f, h\}$$

**[1]** Per il teorema di Darboux-Weinstein, esistono nell'intorno di ogni punto  $p \in M$  delle coordinate locali "canoniche"  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, \xi^1, \dots, \xi^k)$  tali per cui  $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$ .

D'altra parte un sistema quantistico "vive" in uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$  e viene descritto da un operatore Hamiltoniano  $H$  lineare sullo spazio di Hilbert.

Uno stato è dato da un vettore (in effetti da un raggio-vettore  $[v] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ ) e la sua evoluzione temporale è data dal flusso lineare

$$\begin{aligned} \phi^H : \mathcal{H} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{H} \\ (v, t) &\longmapsto v(t). \end{aligned}$$

del campo vettoriale lineare

$$V|_v := \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H(v(t)) \quad (3.1)$$

Il valore di una osservabile (ovvero un altro operatore lineare) su uno stato  $v \in \mathcal{H}$  non è univocamente definito, i risultati della misura di una osservabile corrispondono al set degli autovalori, che devono essere reali, compatibilmente con la richiesta che le osservabili siano auto-aggiunte rispetto al prodotto interno  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

La richiesta di auto-aggiuntezza fa sì che anche il valore di aspettazione di una osservabile  $\hat{O}$  sia reale, quest'ultimo definito da

$$\langle \hat{O} \rangle_v = \langle v | \hat{O} v \rangle \quad v \in \mathcal{H} \quad (3.2)$$

dove si richiede la condizione di normalizzazione  $\langle v | v \rangle = \|v\|^2 = 1$ . Come nel caso classico, è possibile assumere il punto di vista in cui siano le osservabili (piuttosto che gli stati) ad evolvere nel tempo, in tale caso, la **3.1** diventa:

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{O}(t), \hat{H}] \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>in particolare  $f(x, t) := f \circ \phi_t^{X_h}(x) \quad \frac{df(x, t)}{dt} = (\phi_t^* f)(x)$

in particolare, da quest'ultima equazione,  $\hat{H}(t) = \hat{H}$ .

Si precisa infine che, questa trattazione euristica non prevede lo studio di particolari proprietà degli operatori sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  (quali ad esempio, la possibile esistenza di uno spettro continuo) non essendo questo lo scopo della tesi.

## 3.2 Star products

L'idea della quantizzazione per deformazione è di descrivere il passaggio dell'algebra associativa e commutativa  $C^\infty(M)$  ad un'algebra non commutativa e associativa, senza il bisogno di avere a che fare con la rappresentazione lineare dell' "algebra delle osservabili" tramite uno spazio di Hilbert. La richiesta dell'esistenza di un limite classico per  $\hbar \rightarrow 0$  comporta che una tale algebra astratta non commutativa debba essere una deformazione (pesata da  $\hbar$ ) dell'algebra commutativa delle osservabili classiche.

**Definizione 3.1.** *Sia  $K$  un anello commutativo (e.g.  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ).*

Una serie di potenze formale è una sequenza  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  che scriviamo come  $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . L'insieme delle serie di potenze formali  $K[[x]]$  eredita una struttura di anello attraverso

$$a \pm b = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \quad ab = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

**Definizione 3.2.** *Sia  $A$  un'algebra associativa su un anello commutativo  $K$ . Si consideri l'algebra  $A[[\hbar]]$  con il prodotto naturale sopra definito.*

Una deformazione formale di  $A$  è un'algebra associativa  $(A[[\hbar]], \star)$  dove il prodotto  $\star$  è  $K[[\hbar]]$ -bilineare e  $a \star b = ab + O(\hbar) \quad \forall a, b \in A[[\hbar]]$ .

**Proposizione 3.1.** *Sia data una deformazione formale di un'algebra associativa  $A$  su un anello  $K$ :*

$$a \star b = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(a, b) \hbar^n \tag{3.4}$$

$$\mu_0(a, b) = ab \tag{3.5}$$

si ha:

$$\sum_{k=0}^n \mu_k(\mu_{n-k}(a, b), c) = \sum_{k=0}^n \mu_k(a, \mu_{n-k}(b, c)) \tag{3.6}$$

**Definizione 3.3.** *Uno star-product su una varietà differenziale  $M$  è una deformazione formale dell'algebra commutativa associativa unitaria  $C^\infty(M)[[\hbar]]$  data da:*

$$f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(f, g) \hbar^n \quad \forall f, g \in C^\infty(M)[[\hbar]] \tag{3.7}$$

dove  $B_n$  è un operatore bidifferenziale  $\forall n \in \mathbb{N}$  tale per cui:

$$1 \star f = f \star 1 \quad \forall f \in C^\infty(M)[[\hbar]] \tag{3.8}$$

Si noti che la condizione [3.5](#) garantisce che, nel limite in cui  $\hbar \rightarrow 0$  il prodotto star si riduca al prodotto puntuale di due funzioni, mentre la condizione [3.6](#) garantisce l'associatività di tale prodotto.

**Proposizione 3.2.** *Sia  $A$  un'algebra commutativa e associativa e*

$$a \star b = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(a, b) \hbar^n \quad \mu_0(a, b) = ab$$

*una deformazione formale associativa, allora le parentesi*

$$\{a, b\} = \mu_1(f, g) - \mu_1(g, f) \quad \forall f, g \in A$$

*definiscono una struttura di algebra di Poisson su  $A$ .*

Quest'ultima proprietà ha almeno due risvolti: matematicamente associa la struttura di varietà di Poisson all'algebra del nuovo prodotto; fisicamente fornisce un collegamento tra il comportamento classico e quantistico di un dato sistema fisico. Difatti, tale proprietà può essere riscritta come:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_{\star} = \{f, g\}$$

la quale è la forma corretta del principio di corrispondenza. Un'altra proprietà che usualmente per applicazioni fisiche si richiede, è che il prodotto star sia hermitiano:

$$\overline{f \star g} = \bar{g} \star \bar{f} \quad (3.9)$$

Data la non unicità di uno star product per una data varietà  $M$ , ci si potrebbe chiedere se esista un modo per poterli studiare sistematicamente classificandoli, da qui la seguente

**Definizione 3.4.** *Due star products  $\star, \star'$  su una varietà  $M$  si dicono equivalenti se esiste un operatore differenziale lineare*

$$D : C^{\infty}(M)[[\hbar]] \rightarrow C^{\infty}(M)[[\hbar]]$$

$$D(f) = f + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(f) \hbar^n \quad (3.10)$$

*tale per cui il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}(M)[[\hbar]] & \times & C^{\infty}(M)[[\hbar]] \xrightarrow{\star'} C^{\infty}(M)[[\hbar]] \\ \downarrow D & & \downarrow D \\ C^{\infty}(M)[[\hbar]] & \times & C^{\infty}(M)[[\hbar]] \xrightarrow{\star} C^{\infty}(M)[[\hbar]] \end{array}$$

*commuta, ovvero tale per cui valga  $D(f \star' g) = D(f) \star D(g)$ .*

**Lemma 3.1.** *Sia  $\star$  uno star product su una varietà differenziale  $M$ , allora*

- *Le parentesi di Poisson*

$$\{f, g\} = B_1(f, g) - B_1(g, f) \quad (3.11)$$

*dipendono solo dalle classi di equivalenza di  $\star$ .*

- *Esiste uno star product equivalente  $\star'$  tale per cui  $B'_1(f, g) = -B'_1(g, f)$ . In particolare questo implica che  $B'_1(f, g) = \frac{\{f, g\}}{2}$ .*

*L'algebra  $C^{\infty}(M)[[\hbar]]$  dotata di  $\star$ -moltiplicazione e parentesi:*

$$[[f, g]] = \frac{1}{i\hbar} [f, g]_{\star} \quad (3.12)$$

con

$$[f, g]_\star = f \star g - g \star f \quad (3.13)$$

verrà denotata  $\mathcal{A}_Q$ .

Si noti che le [3.12](#), al primo ordine in  $\hbar$ , coincidono con [3.11](#), conferendo dunque ad  $M$  una struttura di varietà di Poisson. L'involutione dell'algebra  $(\mathcal{A}_Q, \star)$  verrà introdotta come deformazione della coniugazione complessa di funzioni, e sarà denotata  $\dagger$ , inoltre sarà denotato con  $\mathcal{O}_Q \subset \mathcal{A}_Q$  l'insieme delle funzioni auto-aggiunte rispetto a  $\dagger$ . Si definisce infine l'algebra  $\hat{\mathcal{A}}_Q$  di tutti gli operatori definiti su  $C^\infty(M)$  della forma  $\hat{A} = A \star$  con  $A \in \mathcal{A}_Q$ . L'algebra  $\hat{\mathcal{A}}_Q$  ha una struttura di algebra di Lie con parentesi di Lie definite da

$$[[\hat{A}, \hat{B}]] := [[A, B]] \star \quad \hat{A}, \hat{B} \in \hat{\mathcal{A}}_Q \quad (3.14)$$

Tutti gli operatori di  $\hat{\mathcal{A}}_Q$  indotti da funzioni auto-aggiunte sono perciò definiti come osservabili ammissibili e formano uno spazio denotato con  $\hat{\mathcal{O}}_Q \subset \hat{\mathcal{A}}_Q$ .

**Nota.** In questa trattazione non si studierà il problema della convergenza in  $\mathcal{A}_Q$ . Si assumerà che l'algebra  $\mathcal{A}_Q$  sia dotata di un'appropriata topologia nella quale lo  $\star$ -product e l'operazione di involuzione  $\dagger$  siano continue e nella quale tutti i limiti delle funzioni che prendono valori in  $\mathcal{A}_Q$  siano convergenti.

### 3.2.1 Esempi di star products

Sia  $M = \mathbb{R}^2$  con coordinate  $q, p$

- Standard star product:

$$f \star_s g = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (-i\hbar)^r \frac{\partial^r f}{\partial p^r} \frac{\partial^r g}{\partial q^r} = f e^{-i\hbar \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q} g$$

Tale prodotto deriva dall'ordine standard di quantizzazione di  $\mathbb{C}[p, q]$ . Considerando infatti la mappa

$$\rho_s : \mathbb{C}[p, q] \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{R})_{poly}$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$q \longrightarrow Q := q$$

$$p \longrightarrow P := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}$$

$$q^m p^n \longrightarrow Q \circ P$$

$\star_s$  viene ristretto a  $\mathbb{C}[p, q]$  come  $f \star_s g = \rho_s^{-1}(\rho_s(f) \circ \rho_s(g))$

- Moyal star product:

$$f \star_M g := \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{a=0}^r \frac{1}{r!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^r \binom{r}{a} (-1)^{r-a} \frac{\partial^r f}{\partial q^a \partial p^{r-a}} \frac{\partial^r g}{\partial q^{r-a} \partial p^a} = f e^{-\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q - \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p)} g$$

Questo star product deriva dall'ordinamento di quantizzazione di Weyl per  $\mathbb{C}[p, q]$ . Considerando infatti la seguente mappa:

$$\rho_{Weyl} : \mathbb{C}[p, q] \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{R})_{poly}$$

$$q^m p^n \longrightarrow \frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in S_{m+n}} A_{\sigma(1)} \circ \dots \circ A_{\sigma(m+n)}$$

(3.15)

$$A_k = \begin{cases} Q & 1 \leq k \leq m \\ P & m+1 \leq k \leq m+n \end{cases} \quad (3.16)$$

$\star_M$  viene ristretto a  $\mathbb{C}[p, q]$  come

$$f \star_M g = \rho_{Weyl}^{-1}(\rho_{Weyl}(f) \circ \rho_{Weyl}(g)) \quad (3.17)$$

**Nota.** Al contrario del prodotto standard, il prodotto di Moyal soddisfa anche la proprietà [3.9](#).

- Wick star product:

$$\text{Sia } z = q + ip, \quad \frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p} = \frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$f \star_W g := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\hbar)^r}{r!} \frac{\partial^r f}{\partial z^r} \frac{\partial^r g}{\partial \bar{z}^r} = f e^{2\hbar \overleftarrow{\partial}_z \overrightarrow{\partial}_{\bar{z}}} g$$

deriva da l'ordinamento di Wick per la quantizzazione di  $\mathbb{C}[p, q]$ , considerando infatti la mappa:

$$\rho_{Wick} : \mathbb{C}[p, q] \longrightarrow Diff(\mathbb{R})_{poly}$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$z \longrightarrow A := 2\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\bar{z} \longrightarrow A^\dagger := \bar{z}.$$

$$z^m \bar{z}^n \longrightarrow A^{\dagger m} A^n$$

$\star_W$  viene ristretto a  $\mathbb{C}[p, q]$  come  $f \star_W g = \rho_{Wick}^{-1}(\rho_{Wick}(f) \circ \rho_{Wick}(g))$ .

### 3.3 $\star$ -products canonici

In questa sezione verrà presentata una  $\sigma$ -famiglia di star products nel caso in cui la varietà differenziale considerata sia  $M = \mathbb{R}^2$ , si veda [1](#) per una referenza. Nel caso specifico, il tensore di Poisson è della forma

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p} \quad (3.18)$$

La più naturale deformazione dell'algebra  $C^\infty(M)$  dotata di prodotto puntuale e parentesi di Poisson definita da  $\Pi$ , è della seguente forma:

$$f \star_\sigma g = f e^{i\hbar \left( \sigma \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \bar{\sigma} \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q \right)} g \quad (3.19)$$

dove  $\sigma \in \mathbb{R}$  è un parametro ed  $\bar{\sigma} = 1 - \sigma$ . Il prodotto appena descritto soddisfa tutte le proprietà elencate nella sezione precedente, perciò è uno star-product ben definito. Si noti che due prodotti star  $\star_\sigma$  ed  $\star_{\sigma'}$  sono equivalenti, con l'operatore in [3.10](#) che assume la forma:

$$S_{\sigma-\sigma'} = e^{i\hbar(\sigma'-\sigma)\partial_q\partial_p} \quad (3.20)$$

In particolare, per  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}$  abbiamo i sopracitati, rispettivamente, prodotto standard e prodotto Moyal. Il  $\star_\sigma$  può altresì essere scritto nella forma integrale qualora le funzioni soddisfino le ipotesi necessarie a garantire la convergenza di tale integrale:

$$(f \star_\sigma g)(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int \mathcal{F}f(\mu, \nu) g(x - \bar{\sigma}\nu, p - \sigma\mu) e^{\frac{i}{\hbar}(\mu x - \nu p)} d\mu d\nu \quad (3.21)$$

Tale forma è valida qualora le funzioni considerate soddisfino le ipotesi necessarie a garantire la convergenza di tale integrale. Tale prodotto, gode delle seguenti utili proprietà

**Teorema 3.1.** *Siano  $f, g \in \mathcal{A}_Q$  tali per cui  $f \star_\sigma g$  e  $g \star_\sigma f$  siano funzioni integrabili. Allora valgono le seguenti:*

$$\int \int (f \star_\sigma g)(q, p) dq dp = \int \int (g \star_\sigma f)(q, p) dq dp \quad (3.22)$$

**Teorema 3.2.** *Siano  $f, g \in \mathcal{A}_Q$ , allora vale:*

$$(f \star_\sigma g)^* = g^* \star_{\bar{\sigma}} f^* \quad (3.23)$$

$$\partial_q(f \star_\sigma g) = (\partial_q f) \star_\sigma g + f \star_\sigma (\partial_q g) \quad \partial_p(f \star_\sigma g) = (\partial_p f) \star_\sigma g + f \star_\sigma (\partial_p g) \quad (3.24)$$

L'involuzione dell'algebra  $(\mathcal{A}_Q, \star_\sigma)$  è definita infine dall'equazione:

$$A^\dagger := S_{\sigma-\sigma'} A^* \quad (3.25)$$

### 3.3.1 Spazio degli stati

Qui si discuterà il problema di definire lo spazio degli stati. In analogia con la meccanica classica, si potrebbe cercare di definire gli stati ammissibili come delle distribuzioni probabilistiche sullo spazio delle fasi. Dopo averlo fatto tuttavia ci si renderebbe conto della necessità di estendere lo spazio degli stati ammissibili alle distribuzioni pseudo-probabilistiche, vale a dire funzioni a valori complessi le quali sono normalizzate, ma che non hanno bisogno di essere non-negative. Perciò, si postula che lo spazio che contiene tutti gli stati ammissibili, sia  $L^2(M)$  dove nel caso specifico,  $M = \mathbb{R}^2$  e la misura è quella di Lebesgue. E' possibile introdurre lo  $\star_\sigma$ -product tra funzioni in  $L^2(M)$ , come creare un'algebra da  $L^2(M)$  rispetto alla  $\star_\sigma$  moltiplicazione. Si noti prima che, facendo uso della forma integrale di  $\star_\sigma$  può essere definito lo  $\star_\sigma$ -product tra due funzioni di Schwartz, perciò  $S(M)$  è un'algebra rispetto alla  $\star_\sigma$ -moltiplicazione. Si ricordi che lo spazio di Schwartz  $S(M)$ , è lo spazio di tutte le funzioni  $f \in C^\infty(M)$  tali per cui  $\|q^n p^m \partial_q^r \partial_p^s f\|_\infty < +\infty \forall n, m, r, s \in \mathbb{N}$ .

Si nota in seguito che per  $f, g \in S(M)$  valgono le seguenti:

$$\partial_q(f \star_\sigma g) = (\partial_q f) \star_\sigma g + f \star_\sigma (\partial_q g) \quad (3.26)$$

$$\partial_p(f \star_\sigma g) = (\partial_p f) \star_\sigma g + f \star_\sigma (\partial_p g) \quad (3.27)$$

$$q(f \star_\sigma g) = f \star_\sigma (qg) + i\hbar \bar{\sigma} (\partial_p f) \star_\sigma g \quad (3.28)$$

$$p(f \star_\sigma g) = f \star_\sigma (pg) - i\hbar \bar{\sigma} (\partial_q f) \star_\sigma g \quad (3.29)$$

Dunque per induzione da queste formule, si ha che  $f \star_\sigma g \in S(M)$

**Teorema 3.3.** *Per  $\Psi, \Phi \in S(M)$  vale*

$$\|\Psi \star_\sigma \Phi\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \|\Psi\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2}. \quad (3.30)$$

*Esiste inoltre un'unica estensione di  $\star_\sigma$  da  $S(M)$  a  $L^2(M)$  tale per cui [3.30](#) vale.*

### 3.3.2 Analisi di Weyl

Durante una procedura di quantizzazione, vi è bisogno di assegnare ad una data funzione di variabili commutanti rispettivi operatori, vale a dire funzioni di variabili non commutanti. Questo può essere fatto per mezzo dell'analisi operatoriale di Weyl. La regola di corrispondenza di Weyl, la quale associa ad un simbolo (una funzione definita sullo spazio delle fasi) un operatore definito sullo spazio di Hilbert, può essere espressa per mezzo delle rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Heisenberg. In

questa sezione tuttavia, verrà adottato un approccio equivalente, e relativamente più semplice. Per definizione, una funzione operatore assegnata ad una funzione  $A \in \mathcal{A}_Q$ , è data dall'equazione:

$$A_\sigma(\hat{q}, \hat{p}) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int \mathcal{F}A(\xi, \mu) e^{\frac{i}{\hbar}(\xi\hat{q} - \mu\hat{p})} e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{1}{2} - \sigma)\xi\mu} d\xi d\mu \quad (3.31)$$

Usando la forma integrale del prodotto  $\star_\sigma$  è possibile definire un left ed un right prodotto  $\star_\sigma$  di una funzione  $A \in \mathcal{A}_Q$  con una funzione in qualche sottospazio di  $L^2(M)$  ricevendo come risultato ancora una funzione di  $L^2(M)$ , questo significa che è possibile trattare un operatore dell'algebra  $\mathcal{A}_Q$  come un operatore definito sullo spazio di Hilbert  $L^2(M)$ . Si può inoltre mostrare che l'azione da sinistra di una qualche funzione  $A \in \mathcal{A}_Q$ , attraverso il prodotto  $\star_\sigma$  su una qualche funzione  $\Psi \in L^2(M)$  può essere trattata come l'azione di una funzione operatore  $A_\sigma(\hat{q}_\sigma, \hat{p}_\sigma)$  sulla stessa funzione  $\Psi$ , dove  $\hat{q}_\sigma, \hat{p}_\sigma$  sono operatori definiti sullo spazio di Hilbert  $L^2(M)$ .

Similmente, l'azione da destra di  $A \in \mathcal{A}_Q$  attraverso il prodotto  $\star_\sigma$ , su una generica  $\Psi \in L^2(M)$ , può essere trattata come l'azione di una funzione operatore  $A_\sigma(\hat{q}_\sigma^*, \hat{p}_\sigma^*)$  su  $\Psi$ . In particolare, vale il seguente

**Teorema 3.4.** *Per ogni funzione  $A \in \mathcal{A}_Q$  vale:*

$$A_L \star_\sigma = A_\sigma(\hat{q}_\sigma, \hat{p}_\sigma) = A(q - i\hbar\sigma\partial_p, p + i\hbar\sigma\partial_q) \quad (3.32)$$

$$A_R \star_\sigma = A_\sigma(\hat{q}_\sigma^*, \hat{p}_\sigma^*) = A(q + i\hbar\sigma\partial_p, p - i\hbar\sigma\partial_q) \quad (3.33)$$

### 3.3.3 Stati puri, misti e valori di aspettazione

Qui verrà presentata la definizione di stato nello schema di quantizzazione canonico. Gli stati puri sono definiti come funzioni  $\Psi_{pure} \in L^2(M)$  (nel caso specifico verrà sempre mantenuta  $M = \mathbb{R}^2$ ) i quali soddisfano i seguenti requisiti:

- $\Psi_{pure} \star_\sigma = (\Psi_{pure} \star_\sigma)^\dagger$
- $\Psi_{pure} \star_\sigma \Psi_{pure} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \Psi_{pure}$
- $\|\Psi\|_{L^2(M)} = 1$

Si definiscono altresì gli stati misti  $\Psi_{mix} \in L^2(M)$  come una combinazione lineare, anche infinita, di una qualche famiglia di stati puri  $\Psi_{pure}^\lambda$

$$\Psi_{mix} = \sum_\lambda p_\lambda \Psi_{pure}^\lambda \quad (3.34)$$

dove  $0 \leq p_\lambda \leq 1$  ed  $\sum_\lambda p_\lambda = 1$ .

Tale definizione riflette l'assenza di conoscenza riguardo lo stato del sistema, sicché le  $p_\lambda$  rappresentano le probabilità di trovare il sistema nello stato  $\Psi_{pure}^\lambda$ . Per un generico stato  $\Psi \in L^2(M)$  si definisce una funzione di distribuzione quantistica  $\rho \in L^2(M)$  definita da:

$$\rho := \frac{1}{2\pi\hbar} \Psi \quad (3.35)$$

tala funzione, gode della seguente proprietà che la classifica come funzione di distribuzione quasi-probabilistica:

$$\int \int \rho(q, p) dq dp = 1 \quad (3.36)$$

Le funzioni  $\rho$  sono l'analogo delle funzioni di distribuzione classiche che rappresentano gli stati in un sistema Hamiltoniano classico.

La differenza tra il caso classico e quantistico è che, nell'ultimo caso, le funzioni  $\rho$  non hanno bisogno di essere definite positive ovunque su  $M$ .

Questo è espressione del fatto che le coordinate  $q, p$  non commutano rispetto al prodotto  $\star_\sigma$ , il che significa, dal principio di indeterminazione di Heisenberg, che è impossibile misurare simultaneamente

posizione e momento di una particella.

D'altra parte, si possono definire le seguenti distribuzioni marginali:

$$P(q) := \int \rho(q, p) dp \quad P(p) := \int \rho(q, p) dq \quad (3.37)$$

le quali possono invece essere interpretate come densità di probabilità. Il valore di aspettazione di un'osservabile  $A \in \mathcal{A}_Q$  in uno stato  $\Psi \in L^2(M)$  può essere definito in analogia al caso classico come :

$$\langle \hat{A} \rangle_\Psi = \int \int (\hat{A}\rho)(q, p) dq dp = \int \int (\hat{A} \star_\sigma \rho)(q, p) dq dp \quad (3.38)$$

### 3.3.4 Evoluzione temporale di un sistema quantistico

Di seguito verrà affrontato il problema dell'evoluzione di un sistema quantistico, nel caso in cui siano esclusivamente gli stati ad evolvere nel tempo (Schrodinger picture). Una trattazione analogo può essere eseguita anche nel caso in cui siano le osservabili a variare nel tempo (Heisenberg picture). Sia  $H \in \hat{\mathcal{O}}_Q$ , l'evoluzione temporale di un sistema quantistico può essere definito in analogia con la sua controparte classica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \llbracket H, \rho \rrbracket \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]_{\star_\sigma} \quad (3.39)$$

Nel caso in cui lo stato  $\Psi$  in questione non variasse nel tempo, vale a dire  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ , segue che

$$[H, \Psi]_\sigma = 0 \quad (3.40)$$

Se lo stato (stazionario)  $\Psi$  è anche uno stato pure, l'equazione [3.40](#) si può dimostrare essere equivalente alla coppia di equazioni agli  $\star_\sigma$ -autovalori

$$H \star_\sigma \Psi = E\Psi \quad \Psi \star_\sigma H = E\Psi \quad (3.41)$$

Dove  $E \in \mathbb{R}^2$  è l'energia del sistema nello stato  $\Psi$ . La soluzione formale alla [3.39](#) prende la forma:

$$\rho(t) = U(t) \star_\sigma \rho(0) \star_\sigma U(-t) \quad (3.42)$$

dove

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{i}{\hbar}t\right)^k H_{\star_\sigma}^k \quad (3.43)$$

è una funzione unitaria, essendo  $\hat{H}$  una osservabile. Da [3.39](#) segue infine che il valore di aspettazione di una ossevabile  $\hat{A} \in \hat{\mathcal{O}}_Q$  in uno stato  $\rho(t)$  soddisfa la seguente:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\rho(t)} = \langle \llbracket \hat{A}, \hat{H} \rrbracket \rangle_{\rho(t)} \quad (3.44)$$

## 3.4 Teorema di Kontsevich

Qui si cercherà di studiare il legame esistente tra le deformazioni formali di una struttura di Poisson su di una varietà differenziale  $M$ , quest'ultima codificata dal tensore di Poisson  $\Pi$ , e le classi di equivalenza degli star-product definiti su di essa. Si dimostra che tali deformazioni, almeno a livello infinitesimo, sono classificate dal gruppo di omologia  $H_{\Pi}^2(M)$ . Le deformazioni finite sono più complicate da studiare, tuttavia, vorremo classificarle in base a dei diffeomorfismi  $\phi : M \rightarrow M$  con la proprietà che  $\Pi' = \phi_* \Pi$ . Ad ogni modo, la teoria formale è più semplice da trattare, perciò la seguente

**Definizione 3.5** (Struttura di Poisson formale). *Una struttura di Poisson formale è una struttura di Poisson sull'algebra commutativa e associativa  $C^\infty(M)[[\hbar]]$  della forma:*

$$\{f, g\}_\hbar = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{\substack{i, j, k=0 \\ i+j+k=n}}^n \Pi_i(df_j, dg_k)$$

con

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j f_j \quad g = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k g_k \in C^\infty(M)[[\hbar]]$$

ed

$$\Pi_i \in \mathfrak{X}^2(M) \quad \forall i \geq 0$$

La serie di potenze formale  $\Pi_\hbar = \Pi_0 + \hbar\Pi_1 + \hbar^2\Pi_2 + \dots \in \mathfrak{X}^2(M)[[\hbar]]$  viene detta *deformazione formale del tensore di Poisson*  $\Pi_0$ .

**Definizione 3.6.** (*Campo vettoriale formale*) Un campo vettoriale formale è una serie di potenze formale

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \hbar^k \in \mathfrak{X}(M)[[\hbar]]$$

$$X_k \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall k \geq 0$$

.

I campi vettoriali formali formano un'algebra di Lie sotto l'estensione naturale delle parentesi di Lie per campi vettoriali ad  $\mathfrak{X}(M)[[\hbar]]$ .

Il gruppo di Lie corrispondente è l'insieme dei simboli

$$\{\exp(\hbar X)\} \quad X \in \mathfrak{X}(M)[[\hbar]]$$

la cui struttura di gruppo deriva dalla formula di Baker-Campbell-Hausdorff. Questo gruppo è chiamato gruppo dei diffeomorfismi formali su  $M$  e agisce sulle deformazioni formali dei tensori di Poisson come segue:

$$\exp(\hbar X)_* \Pi_\hbar = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^m \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i+j+k=m}}^m (\mathcal{L}_{X_i}^j) \Pi_k$$

queste definizioni forniscono ora un modo per classificare le strutture di Poisson formali:

**Definizione 3.7.** Due strutture di Poisson formali  $\Pi'_\hbar, \Pi_\hbar$  si dicono equivalenti se esiste un campo vettoriale formale  $X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \hbar^k$  tale per cui:

$$\Pi'_\hbar = \exp(\hbar X)_* \Pi_\hbar$$

Avendo dunque un modo per classificare sia strutture di Poisson formali che star-products, si enuncia il seguente:

**Teorema 3.5.** (*Kontsevich '03*)

Data una varietà di Poisson  $(M, \Pi)$ , esiste una biiezione  $[\Pi_\hbar] \rightarrow [\star_{\Pi_\hbar}]$  tra le classi di equivalenza delle strutture formali di Poisson della forma:

$$\Pi_\hbar = \Pi + \hbar\Pi_1 + \hbar^2\Pi_2 + \dots$$

e le classi di equivalenza degli star-products su  $M$  della forma  $\cdot \star_{\Pi_\hbar} \cdot = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\cdot, \cdot) \hbar^n$ ; in virtù di tale biiezione inoltre si ha

$$B_1(f, g) - B_1(g, f) = \{f, g\}_\Pi.$$

La classe di equivalenza degli star-products associata alla deformazione nulla  $[\Pi_\hbar = \Pi]$  è detta canonica.

Una dimostrazione di tale teorema può essere trovata in [3]. La forma esplicita della mappa

$$[\Pi_\hbar] \rightarrow [\star_{\Pi_\hbar}]$$

menzionata nel teorema di Kontsevich si ricava attraverso lo studio di determinati grafi e gli operatori  $B_n$  saranno costruiti come delle somme di contributi inerenti  $\Pi_\hbar$  attraverso tali grafi.

**Definizione 3.8.** Un quiver  $\Gamma$  è un dato di :

- Un insieme  $V_\Gamma$  i cui elementi sono chiamati vertici.
- Un insieme  $E_\Gamma$  i cui elementi sono chiamati frecce.
- Due mappe  $s : E_\Gamma \rightarrow V_\Gamma$ ,  $t : E_\Gamma \rightarrow V_\Gamma$  che associano ad una freccia rispettivamente la sua sorgente ed il suo target.

**Definizione 3.9.** Dato un quiver  $\Gamma$ , una freccia  $a \in E_\Gamma$  tale per cui  $s(a) = t(a)$  viene detta loop. Una coppia  $a, b \in E_\Gamma$  è detta doppia freccia se  $s(a) = s(b), t(a) = t(b)$ .

**Esempi:**

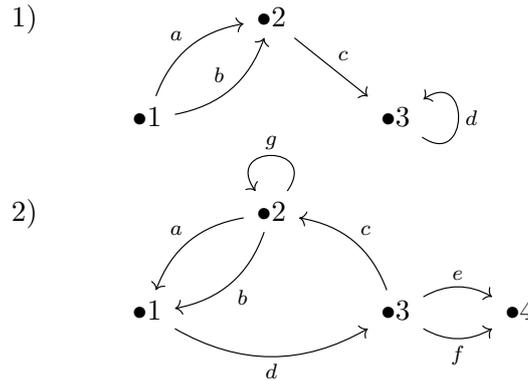


Figura 3.1: Quivers

Sia  $n \geq 0$  definiamo un grafico ammissibile di ordine  $n$  un quiver tale per cui:

- $V_\Gamma = \{1, \dots, n\} \cup \{L, R\}$
- $E_\Gamma = \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$
- $\forall i = 1, \dots, n \quad s(a_i) = s(b_i) = i$
- $\Gamma$  non possiede loop nè doppie frecce.

**Esempi di grafici ammissibili:**

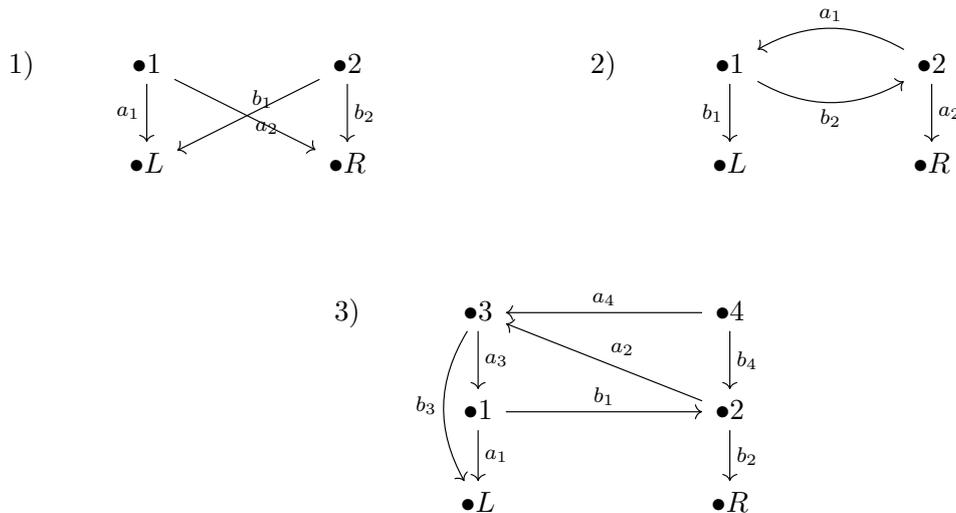


Figura 3.2: Grafici ammissibili

In generale il numero di grafici ammissibili con  $n$  vertici ( $dim(G_n)$ ) è  $|G_n| = (n(n + 1))^n$ .

**Definizione 3.10.** Ad ogni grafico ammissibile  $\Gamma \in G_n$  si associa un operatore bidifferenziale  $B_{\Gamma, \Pi_h}$  la cui espressione in una carta di  $M$  ( $U, x_1, \dots, x_d$ ) è:

$$B_{\Gamma, \Pi_h}(f, g) = \sum_{I: E_{\Gamma} \rightarrow \{1, \dots, d\}} \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{a \in t^{-1}(i)} \partial_{I(a)} \right) \left( \Pi_h^{I(a_i)I(b_i)} \right) \right) \left( \prod_{a \in t^{-1}(L)} \partial_{I(a)} \right) (f) \left( \prod_{a \in t^{-1}(R)} \partial_{I(a)} \right) (g)$$

**Esempio:** L'operatore associato all'ultimo dei grafici ammissibili in [3.2](#) è:

$$B_{\Gamma, \Pi_h}(f, g) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_4=1 \\ j_1, \dots, j_4=1}}^d (\partial_{i_3} \Pi_h^{i_1, j_1}) (\partial_{j_1} \partial_{j_4} \Pi_h^{i_2, j_2}) (\partial_{i_2} \partial_{i_4} \Pi_h^{i_3, j_3}) (\partial_{i_1} \partial_{j_3} f) (\partial_{j_3} g)$$

**Definizione 3.11.** Ad ogni grafico ammissibile  $\Gamma \in G_n$  si associa una costante  $w_{\Gamma} \in \mathbb{R}$  data dalla formula :

$$w_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{H}_n} d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{b_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{a_n} \wedge d\phi_{b_n}$$

dove:

- $\mathcal{H}_n = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{H} : p_i \neq p_j \forall i \neq j\}$
- $\mathcal{H} = \{p \in \mathbb{C} : \text{Im}(p) > 0\}$  (semipiano complesso superiore)
- $\mathcal{H}$  viene dotato della metrica iperbolica di Lobachevsky dove le geodetiche sono date da:
  - semi rette verticali
  - semi circonferenze con centro sull'asse reale.
- La funzione

$$\phi : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi(p, q) = \arg \left( \frac{q-p}{q-\bar{p}} \right)$$

misura l'angolo tra la geodetica che va da  $p$  a  $z = i\infty$  e la geodetica che va da  $p$  a  $q$ .

•

$$\phi_a : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi_a(p_1, \dots, p_n) = \phi(p_{s(a)}, p_{t(a)})$$

dove  $a \in E_{\Gamma}$ ,  $p_L = 0, p_R = 1$ .

Seguendo queste regole è possibile visualizzare un grafico ammissibile  $\Gamma$  come immerso in  $\mathcal{H}$  attraverso una sua realizzazione geodetica, ad esempio:

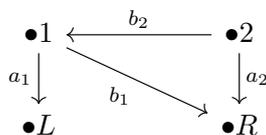


Figura 3.3: Grafico  $\Gamma$

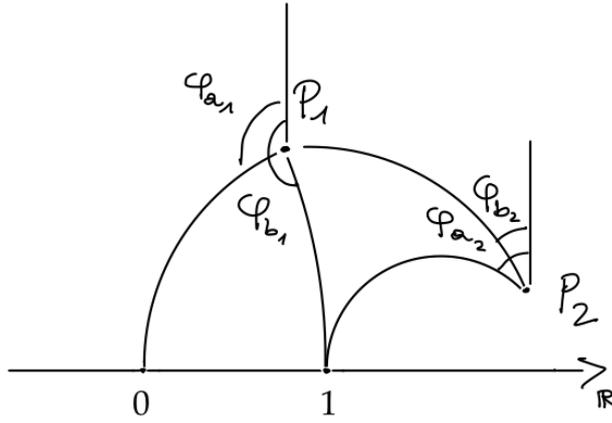


Figura 3.4: Realizzazione geodetica del grafico  $\Gamma$

**Lemma 3.2.** *L'integrale nella definizione di  $\omega_\Gamma$  converge assolutamente.*

**Teorema 3.6.** (Kontsevich '97)

La biiezione  $[\Pi_\hbar] \rightarrow [\star_{\Pi_\hbar}]$  in coordinate locali, è data dalla seguente formula:

$$f \star_{\Pi_\hbar} g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_n} \omega_\Gamma B_{\Gamma, \Pi_\hbar} \tag{3.45}$$

**Esempio.** (Prodotto di Moyal) Nella sezione 3.2.1 è stato esposto il formalismo del prodotto star di Moyal nel caso in cui  $M = \mathbb{R}^2$ .

Vediamo ora come questo prodotto emerga naturalmente applicando la formula di Kontsevich:

Sia

$$\Pi_\hbar = \Pi = \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^j}$$

tale per cui

$$\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial q^k} = 0 \quad \forall i, j, k = 1, \dots, d \tag{3.46}$$

la condizione 3.46 implica che solo i grafici  $\Gamma \in G_n$  con  $t(E_\Gamma) = \{L, R\}$  contribuiscono nella somma 3.45 dal momento che, se ci fosse un  $a \in E_\Gamma$  tale che  $t(a) = k$ ,  $k \in V_\Gamma$  ci sarebbe una derivata che andrebbe ad agire su  $\Pi^{i_k j_k}$ , non contribuendo perciò alla somma.

Pertanto, gli unici grafici che contribuiscono nella somma 3.46 sono della forma seguente:

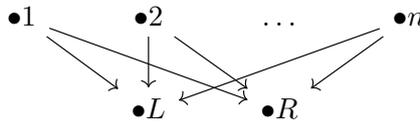
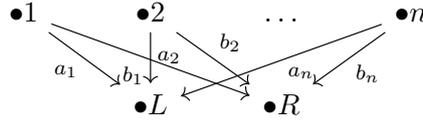


Figura 3.5

Inoltre, scambiando due frecce che partono da  $k \in V_\Gamma$  ( $a_k \longleftrightarrow b_k$ ) la forma

$$d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{b_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{a_n} \wedge d\phi_{b_n}$$

e di conseguenza  $\omega_\Gamma$ , cambia di segno; ma anche lo scambio  $i_k \longleftrightarrow j_k$  in  $\Pi^{i_k j_k}$  nell'espressione di  $B_{\Gamma, \Pi}$  produce un altro cambio di segno, cosicché il contributo totale non cambia. Dunque, se denotiamo  $\Gamma_n$  l' $n$ -esimo grafico ammissibile


 Figura 3.6: Grafico  $\Gamma_n$  ammissibile

si ha :

$$B_n(f, g) = 2^n \omega_{\Gamma_n} B_{\Gamma_n, \Pi}(f, g) \quad (3.47)$$

$$= \frac{2^n}{n!(2\pi)^{2n}} \left( \int_{\mathcal{H}_n} d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{b_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{a_n} \wedge d\phi_{b_n} \right) (\Pi^{i_1 j_1} \dots \Pi^{i_n j_n}) \left( \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q^{i_n}} f \right) \left( \frac{\partial}{\partial q^{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q^{j_n}} g \right) \quad (3.48)$$

dove il termine  $2^n$  misura il numero di contributi dei grafici  $\Gamma_n$  in cui sono stati eseguiti gli scambi  $a_k \longleftrightarrow b_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ . Data infine la forma del grafico in figura 3.6, si ha:

$$\int_{\mathcal{H}_n} d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{b_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{a_n} \wedge d\phi_{b_n} = \left( \int_{\mathcal{H}} d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{a_2} \right)^n$$

considerando inoltre la seguente realizzazione geometrica

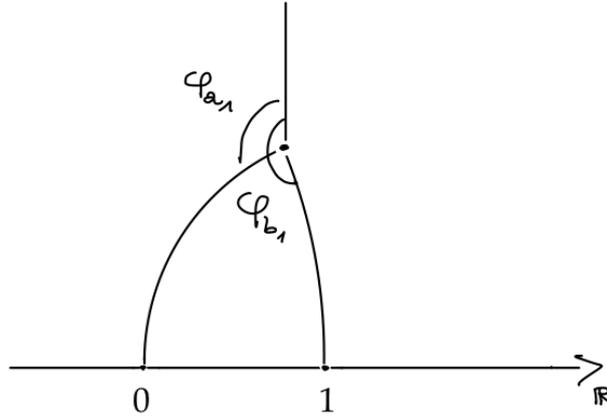


Figura 3.7

si nota che

$$\left( \int_{\mathcal{H}} d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{a_2} \right)^n = \left( \int_{\{0 \leq \phi_{a_1} \leq \phi_{b_1} \leq 2\pi\}} d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{a_2} \right)^n = \left( \frac{2\pi}{2} \right)^n \quad (3.49)$$

Infine, inserendo 3.49 in 3.48, si ottiene :

$$B_n(f, g) = \frac{1}{n!} \Pi^{i_n j_n} \left( \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q^{i_n}} f \right) \left( \frac{\partial}{\partial q^{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial q^{j_n}} g \right) \quad (3.50)$$

dunque

$$f \star_M g = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n B_n = f e^{\hbar \Pi^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j} g \quad (3.51)$$

Quest'ultima è una generalizzazione del prodotto di Moyal trattato nella sezione 3.2.1.



# Bibliografia

- [1] Maciej Blaszkak and Ziemowit Domanski. Phase space quantum mechanics, 2010.
- [2] Giuseppe Dito. Kontsevich star-product on the dual of a lie algebra, 1999.
- [3] Maxim Kontsevich. Deformation quantization of poisson manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 66(3):157–216, 2003.
- [4] Rossi Paolo. *Appunti del corso di Fisica Matematica*. 2022.

[4](#)