



Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

TESI DI LAUREA

**Metodi di equalizzazione dell'istogramma
e di mode decomposition per il miglioramento di
immagini biomediche**

Candidato:
Chiara Dalla Gassa
Matricola 1005017

Relatore:
Prof.ssa Mariapia Saccomani

Anno Accademico 2012/2013

*A tutti coloro che mi hanno sempre sostenuta
e hanno sempre creduto in me*

Sommario

La presente tesi descrive alcuni metodi utilizzati nel miglioramento delle immagini biomediche.

Si spiegherà come sia possibile, tramite metodi che attuano l'equalizzazione dell'istogramma dell'immagine digitale, ottenere un'immagine con miglior contrasto di quella originale. Si illustreranno due algoritmi recentemente proposti in letteratura basati entrambi su tecniche di equalizzazione dell'istogramma. Il primo effettua una preelaborazione sull'istogramma originale dell'immagine. Il secondo algoritmo invece applica, dopo l'equalizzazione, la Bidimensional Empirical Mode Decomposition, che verrà spiegata in dettaglio. Questi algoritmi verranno poi confrontati fra loro e con il metodo classico di equalizzazione al fine di valutare i vantaggi e gli svantaggi di ognuno di essi.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Che cos'è un'immagine digitale	1
1.1.1	Definizione	1
1.1.2	Come si ottiene e come si rappresenta	1
1.2	L'elaborazione numerica di un'immagine	2
2	L'equalizzazione dell'istogramma (HE)	5
2.1	Cos'è l'istogramma	5
2.2	Histogram Equalization (HE)	6
2.2.1	La funzione di trasformazione utilizzata	7
2.2.2	Vantaggi e svantaggi	10
2.3	Bi-Histogram Equalization (BHE)	12
2.3.1	Descrizione matematica del metodo	13
2.3.2	Analisi della BHE	15
3	Un nuovo algoritmo basato sulla HE	19
3.1	L'algoritmo	19
3.2	Confronto con HE e BHE	20
4	Bidimensional Empirical Mode Decomposition (BEMD)	23
4.1	L'Empirical Mode Decomposition (EMD)	23
4.1.1	Il processo di sifting	24
4.2	L'estensione al caso bidimensionale: BEMD	27
4.2.1	Il processo di decomposizione	28
5	Un nuovo algoritmo basato sulla HE e sulla BEMD	31
5.1	L'algoritmo	31
5.2	Risultati sperimentali e analisi	35

5.2.1	Confronto con altri metodi	36
6	Conclusione	41

Elenco delle figure

2.1	Esempi di istogrammi	6
2.2	Esempio di istogramma a cui è stata applicata l'HE	9
2.3	Esempio di HE	10
2.4	Esempio di immagine "sbiadita" a causa dell'equalizzazione	11
2.5	Esempio di immagine scurita a causa dell'HE	12
2.6	Bi-Histogram Equalization	13
2.7	Esempio di istogramma a cui è stata applicata la BHE	16
3.1	Applicazione dell' algoritmo basato sulla HE	20
3.2	Confronto tra HE, BHE e l' algoritmo basato sulla HE	21
4.1	Esempio di segnale da decomporre tramite EMD	24
4.2	Esempio di segnale da decomporre tramite EMD con la media tra gli involucri superiore e inferiore	25
4.3	Esempio di segnale decomposto tramite EMD	27
4.4	Esempio di immagine decomposta tramite BEMD	29
5.1	Struttura dell' algoritmo basato sull'HE e sulla BEMD	32
5.2	Processo della BEMD nell' algoritmo proposto	32
5.3	Mirror extension nella BEMD	33
5.4	Schema della localizzazione dei pixels considerati per la de- terminazione degli estremi locali nell' algoritmo basato sulla HE e sulla BEMD	34
5.5	Schema della parte finale dell' algoritmo basato sulla HE e sulla BEMD	35
5.6	Risultati dell' algoritmo basato sulla HE e sulla BEMD	36
5.7	Confronto tra l' algoritmo basato sulla HE e sulla BEMD e altri metodi	37

Capitolo 1

Introduzione

Il *medical imaging*, data la sua caratteristica di noninvasività, è una delle migliori tecniche impiegate sia per la diagnosi che per il monitoraggio delle condizioni di salute delle persone.

In particolare le immagini biomediche vengono utilizzate a scopo diagnostico per la loro capacità di rilevazione di malattie. Infatti, poiché si tratta di immagini digitali, è possibile elaborarle con degli algoritmi al fine di migliorarne la qualità, spesso bassa, e facilitare così la distinzione tra tessuti sani e tessuti patologici e quindi la diagnosi.

1.1 Che cos'è un'immagine digitale

1.1.1 Definizione

Un'*immagine* può essere definita come una funzione bidimensionale $f(x,y)$ da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} , dove x e y sono coordinate spaziali e l'ampiezza di f in ogni coppia di coordinate (x,y) viene chiamata *intensità* o *livello di grigio* dell'immagine in quel punto. Realisticamente si suppone che un'immagine sia tale che f è finita e non negativa ed è osservabile su un'area finita. Quando x , y e i valori di intensità di f sono quantità discrete si dice che l'immagine è un'*immagine digitale*.

1.1.2 Come si ottiene e come si rappresenta

Le immagini possono venire acquisite con diverse strumentazioni biomediche grazie a dei trasduttori, ma dopo l'acquisizione esse devono venire convertite

in forma digitale e questo avviene tramite due processi: il *campionamento* e la *quantizzazione*. Il campionamento discretizza le variabili spaziali x e y , mentre la quantizzazione discretizza le ampiezze. In questo modo si ottiene l'immagine come una funzione da \mathbb{Z}^2 in \mathbb{Z} .

Al fine di elaborare numericamente le immagini digitali esse vengono rappresentate come matrici in cui le coordinate spaziali x e y indicano rispettivamente l'indice di riga e l'indice di colonna, mentre ogni elemento corrisponde al livello di grigio presente in quella posizione nell'immagine e viene detto *picture element (pixel)*. Se l'immagine ha M righe e N colonne (con M ed N interi positivi), allora essa si può indicare come segue:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Il numero L di livelli di grigio è tipicamente una potenza intera di 2 ($L = 2^k$, con k un intero positivo) e si assume che i livelli discreti siano equispaziati e interi nell'intervallo $[0, L - 1]$.

1.2 L'elaborazione numerica di un'immagine

Le immagini digitali possono essere elaborate a computer grazie ad algoritmi sviluppati appositamente a seconda dell'aspetto che si vuole migliorare.

L'obiettivo di ciò che prende il nome di *image enhancement* (miglioramento della qualità dell'immagine) è quello di elaborare l'immagine per renderla più utile per l'applicazione specifica dell'immagine originale e alla base di questo processo c'è il cambiamento dell'intensità dei pixels. Nell'ambito medico l'aumento della qualità è fondamentale dato che si prendono importanti decisioni basate sulle informazioni fornite dalle immagini, perciò è necessario essere in grado di migliorare certi aspetti e rimuovere le caratteristiche non volute. Questo scopo è perseguito con più metodi. Uno tra i più importanti e utilizzati è l'equalizzazione dell'istogramma associato all'immagine perché permette di ottenere un miglior contrasto con relativa semplicità, tuttavia esso presenta anche degli svantaggi. Per ovviare a tali svantaggi, sono stati sviluppati nuovi algoritmi che implementano in modo diverso l'equalizza-

zione (ad esempio la Bi-Histogram Equalization) o che si basano su di essa utilizzando anche altre tecniche, come una preelaborazione dell'istogramma o la Bidimensional Empirical Mode Decomposition.

Nel seguito della tesi questi metodi verranno descritti ed analizzati in dettaglio.

Capitolo 2

L'equalizzazione dell'istogramma (HE)

2.1 Cos'è l'istogramma

L'istogramma di un'immagine digitale con livelli di intensità nell'intervallo $[0, L-1]$ è il grafico di una funzione discreta $h(r_k) = n_k$, dove r_k è il k -esimo livello di grigio e n_k è il numero di pixels nell'immagine con intensità r_k [4]. Si definisce inoltre l'istogramma normalizzato, dividendo ogni valore in ordinata dell'istogramma per il numero totale di pixels dell'immagine, indicato con il prodotto MN , dove M ed N sono rispettivamente il numero di righe e il numero di colonne dell'immagine. Perciò un istogramma normalizzato presenta in ascissa i livelli di grigio r_k , mentre in ordinata si trova la stima della probabilità di occorrenza del livello di grigio r_k , che è definita come:

$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN} \quad (2.1)$$

per $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$. Da quanto detto segue che la somma di tutte le componenti di un istogramma normalizzato è uguale a 1.

Gli istogrammi sono alla base di molte tecniche di image enhancement poiché si possono calcolare in modo automatico con operazioni semplici da implementare e utilizzando solamente l'informazione contenuta nell'immagine. Inoltre i metodi basati sugli istogrammi sono molto meno costosi in confronto ad altri metodi.

É bene notare che ad ogni immagine corrisponde un solo istogramma, ma

non è vero il viceversa.

In Figura 2.1 sono riportati degli esempi di immagini con i relativi istogrammi.

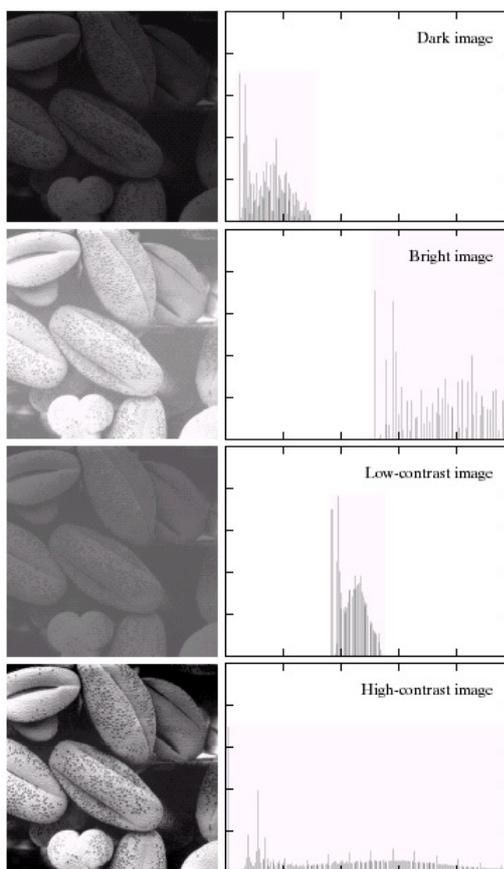


Figura 2.1: Esempi di immagini (a sinistra) con i corrispondenti istogrammi (a destra)

2.2 Histogram Equalization (HE)

L'equalizzazione dell'istogramma o Histogram Equalization (HE) ha come scopo l'aumento del *contrasto* nell'immagine di partenza, o equivalentemente l'aumento del *range dinamico* dell'immagine. Per *contrasto* si intende la differenza in intensità tra il livello di grigio maggiore e quello minore dell'immagine, mentre si definisce *range dinamico* il rapporto tra il massimo valore misurabile di intensità (detto *saturatione*) e il minimo livello distinguibile (detto *rumore*). Quindi quando un'immagine ha un apprezzabile

numero di pixels con grande range dinamico ci possiamo aspettare che essa abbia un elevato contrasto. Quando invece un'immagine ha un piccolo range dinamico, tipicamente presenta un basso contrasto.

2.2.1 La funzione di trasformazione utilizzata

L'idea che sta alla base dell'Histogram Equalization è operare una trasformazione che, nell'immagine elaborata, distribuisca uniformemente i livelli di grigio, cioè aumenti il contrasto “appiattendolo” l'istogramma di partenza e aumentando il range dinamico [4].

Al fine di trovare la trasformazione adeguata, si considerino inizialmente continui i valori dell'intensità e sia r la variabile che indica i livelli di grigio dell'immagine. Si ipotizzi come al solito che r appartenga all'intervallo $[0, L - 1]$, con $r = 0$ che rappresenta il nero e $r = L - 1$ che rappresenta il bianco. r può essere vista come una variabile casuale e perciò essa è descritta dalla sua funzione di densità di probabilità (PDF), che si indicherà con $p_r(r)$. Sia T la funzione di trasformazione applicata ai livelli di grigio dell'immagine originale (si assuma che T sia monotona crescente nell'intervallo $[0, L - 1]$) e sia s la variabile casuale che rappresenta i livelli di grigio dell'immagine elaborata, pertanto si può scrivere $s = T(r)$. Anche ad s sarà associata una funzione di densità di probabilità che si indicherà con $p_s(s)$. Un risultato fondamentale della teoria della probabilità è che se $p_r(r)$ e $T(r)$ sono conosciute, e $T(r)$ è continua e differenziabile nell'intervallo di valori di interesse, allora la funzione di densità di probabilità di s si può ottenere usando la seguente formula:

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (2.2)$$

Si può notare che la funzione di densità di probabilità di s è determinata dalla PDF delle intensità in input e dalla funzione di trasformazione usata (si ricordi che r ed s sono messe in relazione da T).

Si consideri ora la seguente funzione di trasformazione:

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad (2.3)$$

Il membro a destra dell'equazione è la funzione di distribuzione cumulativa (CDF) della variabile casuale r . Poichè le funzioni di densità di probabilità

sono sempre positive e, dato che l'integrale di una funzione è l'area sottesa dalla funzione stessa, segue che la funzione di trasformazione definita è monotona crescente perché l'area sottesa non può diminuire se r aumenta, e quando l'estremo superiore dell'integrale è $r = L - 1$, l'integrale vale 1, così il massimo valore di s è $L - 1$.

Ora per ottenere $p_s(s)$ si possono utilizzare le Eq. (2.2) e (2.3) e la Regola di Leibniz, secondo cui la derivata di un integrale definito rispetto al suo estremo superiore è l'integrando valutato nel suddetto estremo, perciò si ha:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = (L - 1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w) dw \right] = (L - 1)p_r(r) \quad (2.4)$$

e sfruttando questo risultato si ricava $p_s(s)$:

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \frac{1}{(L - 1)p_r(r)} \right| = \frac{1}{L - 1}, \quad 0 \leq s \leq L - 1 \quad (2.5)$$

La forma di $p_s(s)$ ottenuta è quella della funzione di densità di probabilità uniforme, che è proprio ciò a cui si vuole giungere tramite l'equalizzazione dell'istogramma, perciò la trasformazione che si deve applicare è la funzione T definita in precedenza.

Nella pratica però si hanno valori discreti di grigio, quindi r_k è una variabile casuale discreta che rappresenta i livelli di grigio in $[0, L - 1]$ e

$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN} \quad (2.6)$$

per $k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$ è la componente dell'istogramma normalizzato corrispondente al valore di r_k , come già visto in precedenza. Da questo segue che si ha a che fare con probabilità e sommatorie, invece che con funzioni di densità di probabilità e integrali. Perciò l'Eq. (2.3) nel caso discreto assume la seguente forma:

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \frac{(L - 1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1 \quad (2.7)$$

La funzione di trasformazione $T(r_k)$ così definita prende il nome di *equalizzazione dell'istogramma*. In Figura 2.2 nella pagina successiva viene mostrato un esempio di istogramma prima e dopo l'applicazione di questa trasforma-

zione, mentre in Figura 2.3 nella pagina seguente è riportato un esempio di immagine a cui è stata applicata l'Histogram Equalization.

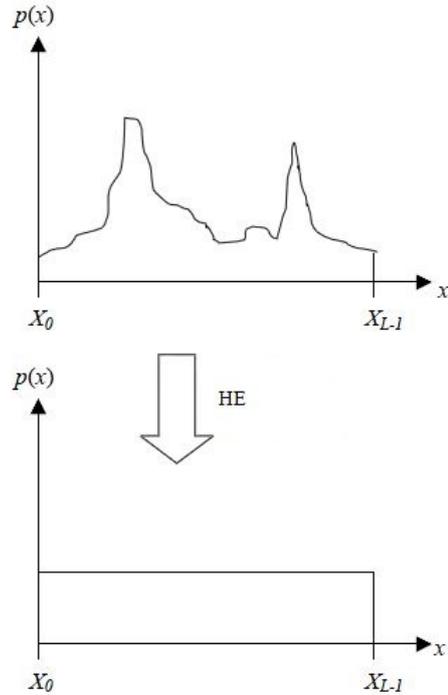


Figura 2.2: Istogramma dell'immagine di partenza (in alto) e istogramma dopo l'applicazione dell'HE (in basso)

Spesso per indicare l'equalizzazione dell'istogramma viene utilizzata una notazione equivalente che viene riportata qui di seguito poichè verrà richiamata nella spiegazione della Bi-Histogram Equalization [8].

Si chiamerà $\mathbf{X} = \{X(i,j)\}$ l'immagine di partenza composta da L livelli discreti di grigio che apparterranno all'insieme $\{X_0, X_1, \dots, X_{L-1}\}$. $X(i,j)$ rappresenta l'intensità dell'immagine nel punto di coordinate spaziali (i,j) e perciò appartiene all'insieme appena definito. Per l'immagine \mathbf{X} assegnata si utilizzerà sempre l'Eq. (2.1) per indicare la stima della probabilità di occorrenza del livello di grigio r_k che ora si indicherà con X_k . Inoltre MN verrà indicato con n . Invece la funzione di trasformazione $T(r_k)$, che si denoterà con $f(X_k)$, si definirà nel seguente modo:

$$f(X_k) = X_0 + (X_{L-1} - X_0) \sum_{j=0}^k p(X_j) \quad (2.8)$$



Figura 2.3: Immagine originale con il corrispondente istogramma (a sinistra) ed immagine elaborata tramite HE con il relativo istogramma (a destra)

Quindi l'immagine elaborata \mathbf{Y} dopo l'equalizzazione dell'istogramma, potrà essere espressa come

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = \{f(X(i, j)) | \forall X(i, j) \in \mathbf{X}\} \quad (2.9)$$

2.2.2 Vantaggi e svantaggi

Come già notato in precedenza l'Histogram Equalization è una tecnica molto utilizzata perché permette di migliorare il contrasto delle immagini in modo semplice, automatico e poco costoso, ottenendo tuttavia dei buoni risultati, dato che è in grado di ampliare il range dinamico dell'immagine di partenza. Un altro vantaggio rilevante è che questo metodo utilizza solamente informazioni contenute nell'immagine.

Nonostante ciò esso presenta anche degli svantaggi non trascurabili [1] [6] [8] [12]. Infatti l'equalizzazione dell'istogramma può cambiare eccessivamente la luminosità dell'immagine. Questo è dovuto al fatto che la funzione di trasformazione applicata è tale per cui un livello di grigio dell'immagine di partenza viene mappato in un livello di grigio che è proporzionale alla funzione di distribuzione cumulativa calcolata nel livello di grigio in input,

senza considerare quest'ultimo. Questo vuol dire che se ad esempio un'immagine ha il maggior numero di pixels concentrati nelle intensità più basse, il risultato sarà che ai livelli di grigio minori verranno assegnati dei valori corrispondenti a intensità più alte, conferendo all'immagine elaborata un effetto "sbiadito", come si può osservare in Figura 2.4.

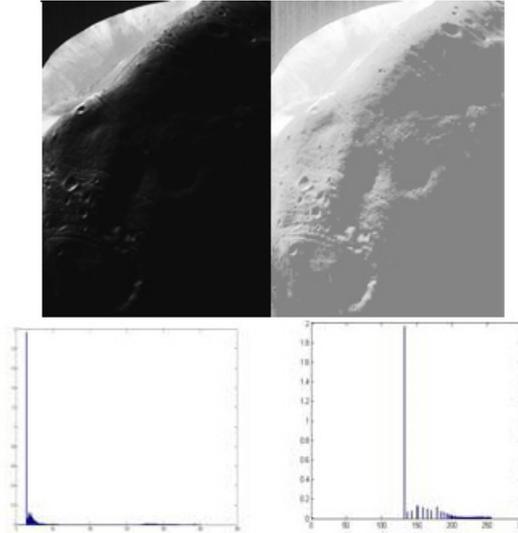


Figura 2.4: Immagine originale con il corrispondente istogramma (a sinistra) ed immagine elaborata tramite HE con il relativo istogramma (a destra)

Il viceversa accade se la maggiore densità di pixels nell'immagine di partenza si ha nei livelli di intensità maggiori, dato che i livelli più chiari verranno mappati in livelli più scuri. Un esempio di ciò si può osservare in Figura 2.5 nella pagina seguente.

La ragione principale che si trova dietro questi effetti è che l'equalizzazione dell'istogramma non prende in considerazione la luminosità media dell'immagine di partenza e questo si può dimostrare. Infatti si supponga che \mathbf{X} sia una variabile casuale continua, cioè $L = \infty$, allora anche l'output dell'Histogram Equalization, \mathbf{Y} , sarà una variabile casuale. Si sa che l'equalizzazione dell'istogramma produce un'immagine i cui livelli di grigio hanno una densità uniforme, cioè,

$$p(x) = \frac{1}{X_{L-1} - X_0}, \quad X_0 \leq x \leq X_{L-1} \quad (2.10)$$

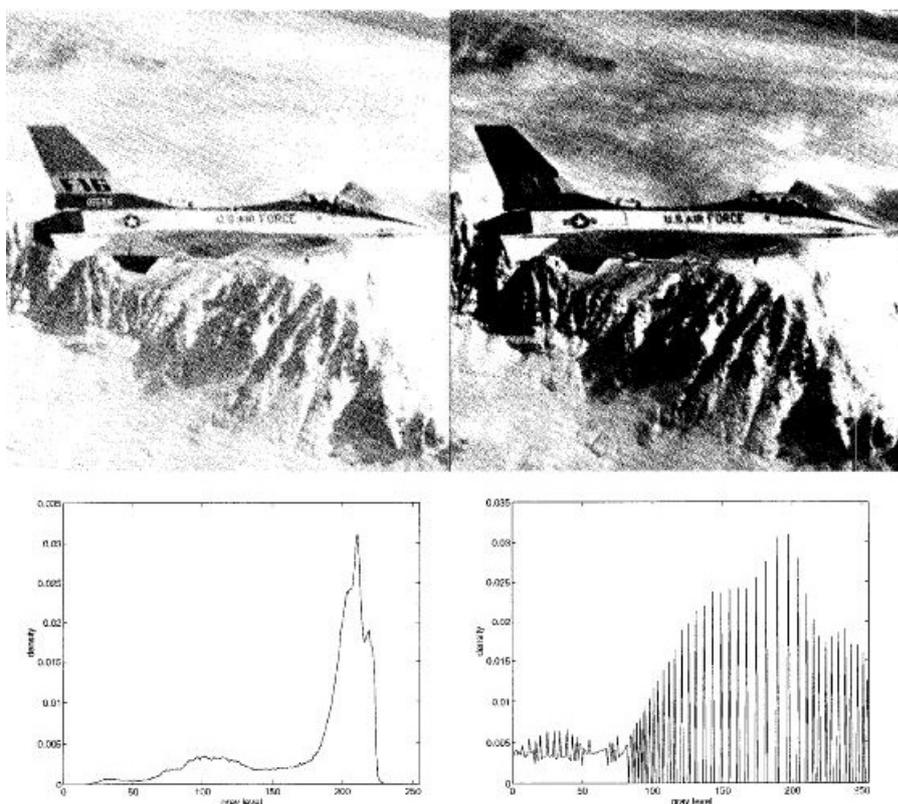


Figura 2.5: Immagine originale con relativo istogramma (a sinistra) ed immagine elaborata tramite HE con relativo istogramma (a destra)

Detto questo è facile dimostrare che la luminosità media dell'immagine elaborata tramite HE è il livello di grigio medio, infatti basta calcolare il valore atteso di \mathbf{Y} :

$$E(\mathbf{Y}) = \int_{X_0}^{X_{L-1}} xp(x) dx = \int_{X_0}^{X_{L-1}} \frac{x}{X_{L-1} - X_0} dx = \frac{X_0 + X_{L-1}}{2} \quad (2.11)$$

Perciò la media dell'output non ha nulla a che fare con l'immagine originale, o, in altre parole, essa è sempre il livello di grigio medio, non importa quanto l'immagine di partenza sia chiara o scura.

2.3 Bi-Histogram Equalization (BHE)

Al fine di superare gli artefatti dovuti all'equalizzazione dell'istogramma, è stato sviluppato un nuovo metodo di equalizzazione chiamato *Bi-Histogram*

Equalization (BHE) o anche *Brightness Preserving Bi-Histogram Equalization* (BBHE) [1] [8]. Lo scopo di questo metodo è preservare la luminosità media di un'immagine pur migliorandone il contrasto.

La BHE prima di tutto divide l'istogramma dell'immagine di partenza in due parti in base alla media delle intensità di tutti i pixels che compongono l'immagine, come mostrato in Figura 2.6, dove X_T indica proprio la media delle intensità.

Dopo questo processo di separazione si hanno due istogrammi: il primo copre l'intervallo di valori dal livello di grigio minimo fino alla media (compresa) e il secondo copre l'intervallo di valori dalla media (esclusa) fino al livello di grigio massimo. Questi due istogrammi vengono poi equalizzati indipendentemente, così che l'intensità media dell'immagine risultante si troverà tra l'intensità media dell'immagine in input e il livello medio di grigio. L'equalizzazione avviene con il vincolo che gli elementi del primo istogramma vengano mappati nell'intervallo dal livello di grigio minimo fino all'intensità media dell'input (compresa), mentre quelli del secondo istogramma vengano mappati nell'intervallo che ha come inizio la media (esclusa) e fine il livello di grigio massimo. Infine i due istogrammi equalizzati vengono riuniti intorno alla media per ottenere l'istogramma dell'immagine elaborata e quindi l'immagine stessa.

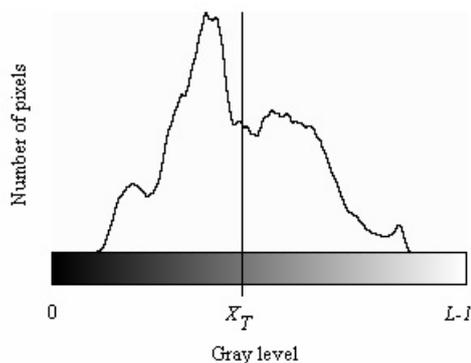


Figura 2.6: BHE. L'istogramma dell'immagine con intensità nell'intervallo $[0, L-1]$ viene diviso in due parti in funzione della media X_T

2.3.1 Descrizione matematica del metodo

Similmente a come si è visto per l'Histogram Equalization si può descrivere matematicamente in cosa consiste la Bi-Histogram Equalization [1] [8].

Si indichi con X_m la media delle intensità dei pixels dell'immagine \mathbf{X} e si assuma che $X_m \in \{X_0, X_1, \dots, X_{L-1}\}$. Basandosi sulla media, l'immagine di partenza viene decomposta in due immagini \mathbf{X}_L e \mathbf{X}_U , cioè

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_L \cup \mathbf{X}_U \quad (2.12)$$

dove

$$\mathbf{X}_L = \{X(i, j) | X(i, j) \leq X_m, \forall X(i, j) \in \mathbf{X}\} \quad (2.13)$$

e

$$\mathbf{X}_U = \{X(i, j) | X(i, j) > X_m, \forall X(i, j) \in \mathbf{X}\} \quad (2.14)$$

Si noti che \mathbf{X}_L è composta dai valori di intensità appartenenti all'insieme $\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$, mentre \mathbf{X}_U è composta dalle intensità appartenenti a $\{X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{L-1}\}$.

In seguito si definiscono le stime delle probabilità di occorrenza dei livelli di grigio sia per \mathbf{X}_L che per \mathbf{X}_U :

$$p_L(X_k) = \frac{n_L^k}{n_L} \quad (2.15)$$

dove $k = 0, 1, \dots, m$ e

$$p_U(X_k) = \frac{n_U^k}{n_U} \quad (2.16)$$

dove $k = m+1, m+2, \dots, L-1$. n_L^k e n_U^k rappresentano il rispettivo numero di pixels di intensità X_k in \mathbf{X}_L e in \mathbf{X}_U , mentre n_L e n_U sono rispettivamente il numero totale di pixels in \mathbf{X}_L e in \mathbf{X}_U . Quindi il numero totale di pixels nell'immagine iniziale è $n = n_L + n_U$. Le rispettive funzioni di distribuzione cumulative per \mathbf{X}_L e \mathbf{X}_U sono definite come:

$$c_L(x) = \sum_{j=0}^k p_L(X_j) \quad (2.17)$$

e

$$c_U(x) = \sum_{j=m+1}^k p_U(X_j) \quad (2.18)$$

dove $X_k = x$.

Analogamente a come si è fatto con l'Histogram Equalization si definiscono

le seguenti funzioni di trasformazione:

$$f_L(x) = X_0 + (X_m - X_0)c_L(x) \quad (2.19)$$

e

$$f_U(x) = X_{m+1} + (X_{L-1} - X_{m+1})c_U(x) \quad (2.20)$$

Basandosi su queste funzioni di trasformazione i due istogrammi ottenuti vengono equalizzati indipendentemente e la composizione dei due istogrammi equalizzati costituisce l'output della BHE, cioè l'immagine elaborata \mathbf{Y} è espressa dalla seguente formula:

$$\mathbf{Y} = \{Y(i, j)\} = f_L(\mathbf{X}_L) \cup f_U(\mathbf{X}_U) \quad (2.21)$$

dove

$$f_L(\mathbf{X}_L) = \{f_L(X(i, j)) | \forall X(i, j) \in \mathbf{X}_L\} \quad (2.22)$$

e

$$f_U(\mathbf{X}_U) = \{f_U(X(i, j)) | \forall X(i, j) \in \mathbf{X}_U\} \quad (2.23)$$

Se si nota che $0 \leq c_L(x), c_U(x) \leq 1$, è facile comprendere che $f_L(\mathbf{X}_L)$ equalizza \mathbf{X}_L nell'intervallo (X_0, X_m) , mentre $f_U(\mathbf{X}_U)$ equalizza \mathbf{X}_U nell'intervallo (X_{m+1}, X_{L-1}) . Come conseguenza l'immagine \mathbf{X} viene equalizzata sull'intero range dinamico (X_0, X_{L-1}) con il vincolo che i pixels con intensità minore dell'intensità media di \mathbf{X} siano mappati in (X_0, X_m) , mentre quelli con intensità maggiore della media in (X_{m+1}, X_{L-1}) .

In Figura 2.7 nella pagina seguente è riportato un esempio di istogramma ottenuto con la BHE.

2.3.2 Analisi della BHE

Si supponga che \mathbf{X} sia una variabile casuale con distribuzione simmetrica attorno alla sua media X_m [8]. Quando le immagini \mathbf{X}_L e \mathbf{X}_U vengono equalizzate indipendentemente, la luminosità media dell'output \mathbf{Y} della BHE può essere espressa come segue:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}) &= E(\mathbf{Y} | \mathbf{X} \leq X_m)P(\mathbf{X} \leq X_m) + E(\mathbf{Y} | \mathbf{X} > X_m)P(\mathbf{X} > X_m) \\ &= \frac{1}{2} [E(\mathbf{Y} | \mathbf{X} \leq X_m) + E(\mathbf{Y} | \mathbf{X} > X_m)] \end{aligned} \quad (2.24)$$

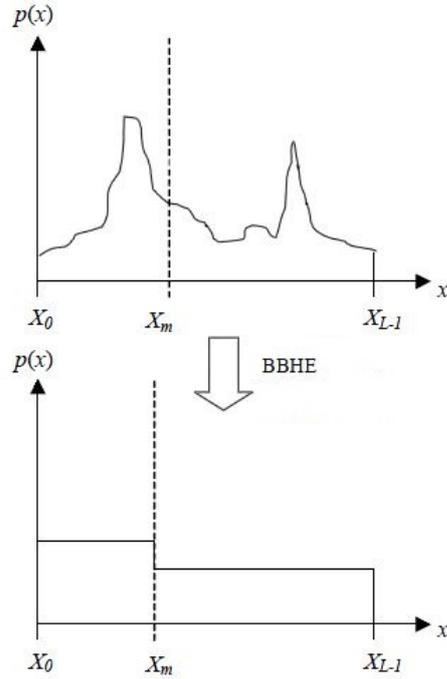


Figura 2.7: Istogramma dell'immagine di partenza (in alto) e istogramma dopo l'applicazione della BHE (in basso)

Nell' Eq. (2.24) si è utilizzato il fatto che \mathbf{X} ha una distribuzione simmetrica rispetto a X_m e perciò $P(\mathbf{X} \leq X_m) = P(\mathbf{X} > X_m) = \frac{1}{2}$.

Analogamente a come si è ottenuta l'Eq. (2.11) che indica il valore atteso dell'intensità dell'immagine elaborata tramite HE, si ricava che

$$E(\mathbf{Y}|\mathbf{X} \leq X_m) = \frac{X_0 + X_m}{2} \quad (2.25)$$

e

$$E(\mathbf{Y}|\mathbf{X} > X_m) = \frac{X_m + X_{L-1}}{2} \quad (2.26)$$

Sostituendo le espressioni calcolate nell'Eq. (2.24) e chiamando $X_G = \frac{X_0 + X_{L-1}}{2}$ il livello medio di grigio, si ricava:

$$E(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}(X_m + X_G) \quad (2.27)$$

il che implica che la media delle intensità dell'immagine elaborata tramite BHE si localizza a metà tra la media delle intensità dell'immagine originale e il livello medio di grigio. Quindi la Bi-Histogram Equalization, in confronto

2.3. BI-HISTOGRAM EQUALIZATION (BHE)

con l'Histogram Equalization, preserva la luminosità dell'immagine da cui si parte, pur aumentandone il contrasto.

Tuttavia questo metodo presenta un limite nel calcolo dell'intensità media dell'immagine elaborata poiché dà lo stesso peso all'intensità media dell'immagine da elaborare e al livello medio di grigio X_G .

Capitolo 3

Un nuovo algoritmo basato sulla HE

All'International Conference on Biomedical Engineering and Informatics del 2008 è stato presentato da un Gruppo di ricerca della Amirkabir University of Technology (Tehran, Iran) un algoritmo per aumentare la qualità delle immagini mediche basato sull'equalizzazione dell'istogramma [12]. Esso promette migliori risultati rispetto all'HE e alla BHE.

3.1 L'algoritmo

Il primo passo consiste in una preelaborazione dell'istogramma dell'immagine prima di equalizzarlo. A tal fine prima si trova il livello di grigio a cui corrisponde il massimo numero di pixels nell'istogramma. Dopodiché si crea un nuovo istogramma in cui il numero di pixels corrispondente ad ogni livello di grigio è uguale alla media del numero di pixels dei livelli di grigio attorno a quello specifico livello. Questa operazione di media viene svolta a partire dal livello di grigio in corrispondenza al massimo numero di pixels. Essa viene ripetuta tre volte utilizzando per il calcolo una volta un intorno destro, una volta un intorno sinistro e un'altra volta un intorno centrato nel punto considerato. In tutti e tre i casi si ripete la stessa operazione per tutti i livelli di grigio.

In seguito si normalizzano i valori nei nuovi istogrammi ottenuti, così che la somma dei nuovi valori sia uguale a 1.

Successivamente si esegue l'equalizzazione dell'istogramma per tutti e tre gli

istogrammi e si costruiscono tre nuove immagini sulla base degli istogrammi equalizzati.

Infine si seleziona la miglior immagine tra le tre ottenute.

In Figura 3.1 è riportato un esempio di applicazione di questo algoritmo.

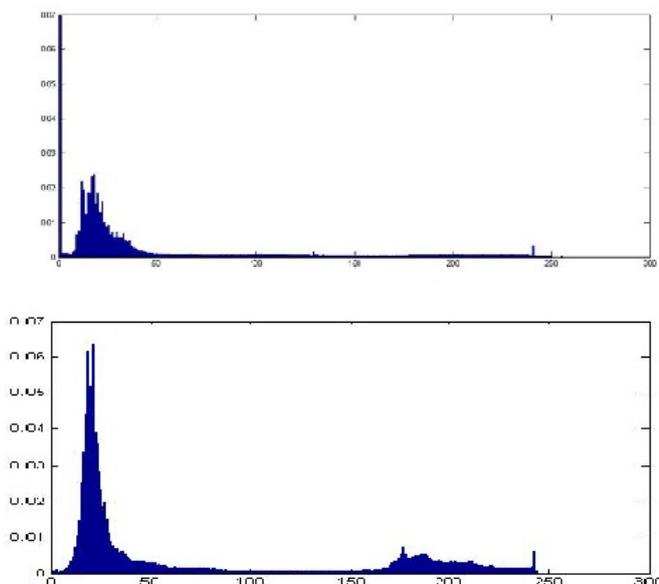


Figura 3.1: Istogramma sopra: prima dell'elaborazione, istogramma sotto: dopo l'applicazione dell'algoritmo

3.2 Confronto con HE e BHE

L'algoritmo esposto nel paragrafo precedente, l'Histogram Equalization e la Bi-Histogram Equalization sono stati applicati su un database comprendente 220 immagini mediche, previa riduzione del rumore. È stato considerato un criterio quantitativo per confrontare i tre metodi ed individuare così la miglior immagine ottenuta dopo l'elaborazione. Il criterio utilizzato è il seguente:

$$PixDis = \frac{1}{N_{Pix}(N_{Pix} - 1)} \sum_{i=0}^{L-2} \sum_{j=i+1}^{L-1} H(i)H(j-1) \quad \text{per } i, j \in [0, L-1] \quad (3.1)$$

ove $H(i)$ rappresenta il numero di pixels nell'immagine il cui livello di grigio è i , N_{Pix} è il numero totale di pixels dell'immagine e $[0, L-1]$ è, come

al solito, l'intervallo di livelli di grigio. Più elevato è il valore di $PixDis$, migliore è il contrasto nell'immagine. In Figura 3.2 è riportato un esempio di applicazione dell'algorithm proposto e anche i risultati dell'applicazione dell'HE e della BHE. Sono stati indicati anche i relativi valori di $PixDis$. Come si può notare l'immagine elaborata con l'algorithm presenta un valore di $PixDis$ (45.86) più elevato di quello che si ottiene tramite l'utilizzo della BHE ($PixDis = 35.19$) e della HE ($PixDis = 41.2$), stando così ad indicare che si è ottenuta un'immagine con miglior contrasto.



Figura 3.2: (a) Immagine originale dopo l'eliminazione del rumore; (b) Immagine dopo l'applicazione dell'HE ($PixDis = 41.2$); (c) Immagine dopo l'applicazione della BHE ($PixDis = 35.19$); (d) Immagine dopo l'applicazione dell'algorithm proposto ($PixDis = 45.86$)

Per confrontare ulteriormente questo algorithm e la BHE è stato definito un parametro rappresentante una misura del miglioramento ottenuto rispetto

alla sola applicazione dell'Histogram Equalization:

$$\frac{PixDis(metodo) - PixDis(HE)}{PixDis(HE)} \times 100 \quad (3.2)$$

Nella formula 3.2 la variabile *metodo* sta ad indicare la BHE o l'algoritmo qui presentato a seconda del metodo per cui si sta calcolando il parametro. La Tabella 3.1 mostra i risultati del confronto in base a questo parametro. Come si può vedere l'algoritmo proposto presenta dei risultati migliori rispetto alla BHE. Il miglioramento notato si può spiegare con il fatto che con questo algoritmo il numero di pixels per ogni livello di grigio è la media del numero di pixels intorno al suddetto livello, così il cambiamento nel numero di pixels da un livello al successivo è graduale.

Tabella 3.1: Confronto tra la BHE e l'algoritmo proposto per il miglioramento del contrasto nelle immagini mediche

<i>Metodo</i>	<i>Minimo miglioramento</i>	<i>Massimo miglioramento</i>	<i>Media</i>
BHE	-18.7%	93.91%	7.41%
Algoritmo proposto	-2.86%	95.32%	18.2%

Capitolo 4

Bidimensional Empirical Mode Decomposition (BEMD)

Molte tecniche di miglioramento delle immagini mediche utilizzano un metodo di decomposizione delle immagini chiamato *Bidimensional Empirical Mode Decomposition* (BEMD) o, tradotto, *Modalità di Decomposizione Empirica Bidimensionale*.

La BEMD è l'estensione al caso bidimensionale di un altro metodo: l'*Empirical Mode Decomposition* (EMD). Si rende perciò necessario introdurre prima quest'ultimo metodo.

4.1 L'Empirical Mode Decomposition (EMD)

L'Empirical Mode Decomposition è un metodo che è stato introdotto da N.E. Huang et al. nel 1998 per analizzare dati non lineari e non stazionari [5]. Il suo scopo è decomporre i segnali monodimensionali in componenti di frequenza chiamate *Funzioni di Modalità Intrinseca* o *Intrinsic Mode Functions* (IMF). Questo metodo di decomposizione ha il vantaggio di essere intuitivo, diretto e adattativo, dove con adattativo si intende che la definizione della base deve essere basata e derivata dai dati, ovvero definita a posteriori, a differenza della maggior parte delle tecniche di decomposizione dei dati che si basano sulla formulazione di basi a priori (come le funzioni trigonometriche nell'analisi di Fourier).

Una funzione di modalità intrinseca è una funzione che soddisfa le seguenti due condizioni:

1. Nell'intero segnale il numero di estremi e il numero di volte in cui la funzione si annulla devono coincidere, o al massimo differire di uno;
2. Per ogni punto il valore medio tra la funzione di involuppo definita dai massimi locali e la funzione di involuppo definita dai minimi locali deve essere zero.

Ogni IMF viene ottenuta dal segnale per mezzo di un algoritmo detto di "sifting" (setacciamento) [2] [5] [11].

4.1.1 Il processo di sifting

Dato un segnale di partenza $x(t)$ (vedi Figura 4.1) l'algoritmo inizia con l'identificazione di tutti i massimi e i minimi locali. Successivamente tutti i massimi locali vengono connessi attraverso una spline cubica di interpolazione così da formare l'involuppo superiore e questa operazione viene ripetuta anche per i minimi locali, in modo da ottenere l'involuppo inferiore. La funzione spline cubica di interpolazione deve rispettare alcune proprietà che sono riportate qui di seguito [7]. Supponiamo di avere una funzione $y = f(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$ e di conoscerne $n + 1$ punti (x_k, y_k) (con $k = 0, 1, \dots, n$ e $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$) da voler interpolare con una funzione $s(x)$. Questa funzione è una spline cubica se soddisfa le seguenti proprietà:

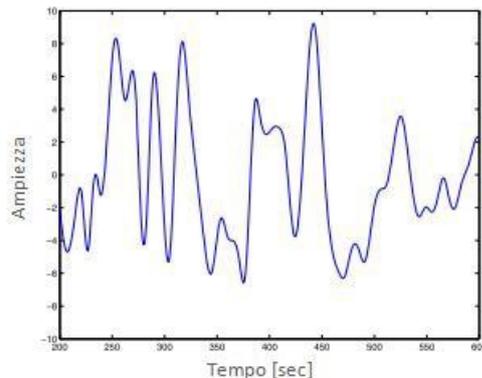


Figura 4.1: Esempio di un possibile segnale di partenza

4.1. L'EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION (EMD)

1. $s(x)$ è una funzione cubica in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1, 2, \dots, n$;
2. $s(x)$, $s'(x)$ e $s''(x)$ sono continue in $[a, b]$;
3. $s(x_k) = y_k$, con $k = 0, 1, \dots, n$.

Successivamente viene calcolata la media m_1 tra l'involuppo superiore ($e_{\max}(t)$) e l'involuppo inferiore ($e_{\min}(t)$):

$$m_1 = \frac{e_{\max}(t) + e_{\min}(t)}{2} \quad (4.1)$$

In Figura 4.2 è riportato il segnale di partenza con gli involuipi superiore e inferiore e la loro media.

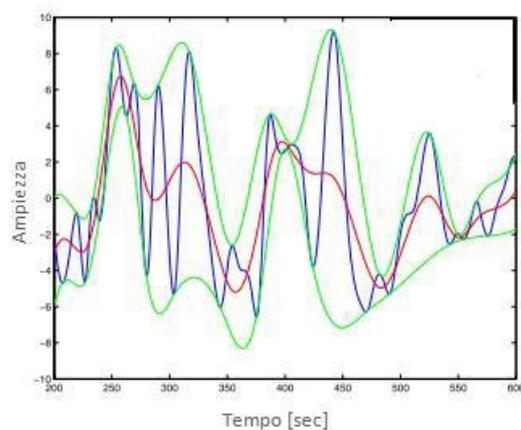


Figura 4.2: In blu è rappresentato il segnale di partenza, in verde le funzioni di involuppo e in rosso la media tra i due involuipi

In seguito si calcola la differenza tra il segnale di ingresso ed m_1 ottenendo il primo candidato ad essere una IMF, indicato con h_1 :

$$h_1 = x(t) - m_1 \quad (4.2)$$

Idealmente, per come viene costruita, h_1 dovrebbe soddisfare la definizione di IMF, tuttavia per rendere maggiormente simmetrico il profilo dell'onda calcolata, il processo di sifting deve essere ripetuto più volte in modo che il segnale estratto soddisfi la definizione di IMF. Nella seconda iterazione h_1

viene trattato come dato, ovvero:

$$h_{11} = h_1 - m_{11} \quad (4.3)$$

dove m_{11} è la media tra gli inviluppi superiore e inferiore di h_1 , calcolata come descritto precedentemente.

Si continua a ripetere questa procedura k volte finchè h_{1k} è una IMF. Quindi si avrà:

$$c_1 = h_{1k} = h_{1(k-1)} - m_{1k} \quad (4.4)$$

la prima componente IMF del segnale di partenza $x(t)$. Un passo fondamentale consiste nello scegliere quante volte ripetere il processo appena descritto, cioè dopo quante iterazioni fermarsi e considerare il segnale ottenuto una IMF. A questo scopo si definisce la deviazione standard (SD) calcolata dai risultati di due processi di sifting consecutivi:

$$SD = \sum_{t=0}^T \left[\frac{|h_{1(k-1)}(t) - h_{1k}(t)|^2}{h_{1(k-1)}^2(t)} \right] \quad (4.5)$$

e si limita tale valore. Quando SD è minore o uguale ad un certo valore SD_{\max} imposto (di solito compreso tra 0.2 e 0.3) si considera trovata una IMF.

La prima componente IMF (c_1) contiene la componente del segnale avente periodo più breve (quindi frequenza maggiore) e può essere separata dal resto dei dati:

$$r_1 = x(t) - c_1 \quad (4.6)$$

Poiché il residuo (r_1) contiene le componenti del segnale aventi periodo più lungo (ovvero frequenza minore), esso può essere considerato come un nuovo segnale di partenza ed essere fornito in ingresso all'algoritmo di decomposizione fin qui descritto. Questa procedura può essere ripetuta per tutti i residui successivi r_i . Il processo di sifting si conclude quando il residuo r_n diventa una funzione monotona dalla quale non possono essere estratte altre componenti IMF. Il risultato finale è:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i + r_n \quad (4.7)$$

ovvero il segnale di partenza può essere espresso come sommatoria delle n componenti IMF in cui viene decomposto, a cui si aggiunge il segnale residuo calcolato all' n -esimo passo dell'algoritmo.

In Figura 4.3 è riportato un esempio di segnale decomposto tramite EMD. Sono raffigurati il segnale di partenza, le sue componenti IMF e il segnale residuo.

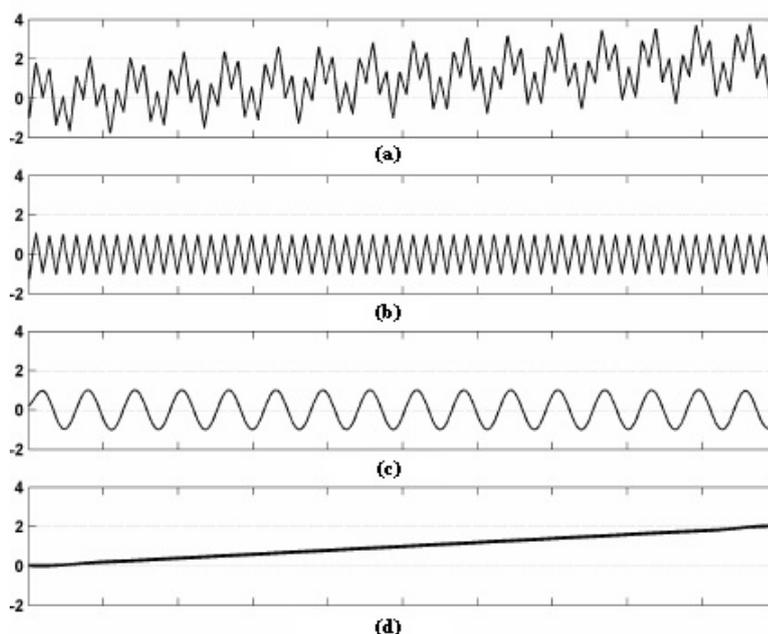


Figura 4.3: EMD. (a) Segnale di partenza; (b) Prima IMF; (c) Seconda IMF; (d) Segnale residuo

4.2 L'estensione al caso bidimensionale: BEMD

Nel 2003 J.C. Nunes ha proposto il concetto della Bidimensional Empirical Mode Decomposition con lo scopo di poter decomporre le immagini digitali (quindi segnali bidimensionali) in più componenti, così da poter elaborare queste ultime per ottenere il miglioramento delle immagini di partenza [10]. Questo metodo presenta gli stessi vantaggi esposti nel caso dell'Empirical Mode Decomposition, cioè è utile nell'analisi di dati non lineari e non stazionari, è semplice da implementare e, soprattutto, è adattativo.

4.2.1 Il processo di decomposizione

La BEMD, in modo analogo all'EMD, decompone un'immagine nelle sue funzioni di modalità intrinseca (IMF), che sono in questo caso funzioni bidimensionali, e in un residuo (anch'esso bidimensionale). Le IMF devono rispettare le stesse condizioni esposte nel paragrafo 4.1.

Il processo di sifting si estende al caso bidimensionale come viene descritto in seguito [3].

Sia $f(x, y)$, $x = 0, \dots, M - 1$ e $y = 0, \dots, N - 1$, l'immagine da decomporre. I passi del processo sono i seguenti:

1. Si definiscono $r_0(x, y) = f(x, y)$ e $j = 1$;
2. Si estrae la j -esima IMF:
 - (a) Si definiscono $h_0(x, y) = r_{j-1}(x, y)$ e $k = 1$;
 - (b) Si identificano tutti i massimi e i minimi locali di h_{k-1} ;
 - (c) Si calcolano le funzioni di involuppo superiore e inferiore $u_{\max}(x, y)$ e $u_{\min}(x, y)$ interpolando, rispettivamente, i massimi e i minimi locali di h_{k-1} ;
 - (d) Si calcola la media tra i due involuppi appena definiti:

$$m(x, y) = \frac{u_{\max}(x, y) + u_{\min}(x, y)}{2} \quad (4.8)$$

- (e) Si pone $h_k(x, y) = h_{k-1}(x, y) - m(x, y)$;
- (f) Si calcola il valore della deviazione standard (SD) per capire se $h_k(x, y)$ è una IMF. SD è data da:

$$SD = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[\frac{|h_{k-1}(x, y) - h_k(x, y)|^2}{h_{k-1}^2(x, y)} \right] \quad (4.9)$$

- (g) Se $SD \leq SD_{\max}$, dove SD_{\max} è un valore imposto come nel caso dell'EMD, si considera trovata la j -esima IMF che si definisce come $c_j(x, y) = h_k(x, y)$. In caso contrario si pone $k = k + 1$ e si ripetono le operazioni dal punto (b) al punto (g);

3. Si definisce il residuo $r_j = r_{j-1} - c_j$;

4. Se il numero di estremi in r_j è maggiore o uguale a due, allora si ripetono i passi (2) e (3) con $j = j + 1$, altrimenti la decomposizione è terminata e r_j è il residuo;
5. Infine il risultato della BEMD è il seguente:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i(x, y) + r_n(x, y) \quad (4.10)$$

In Figura 4.4 si può vedere la decomposizione tramite BEMD di un'immagine del cervello ottenuta con la Risonanza Magnetica per Imaging (MRI).

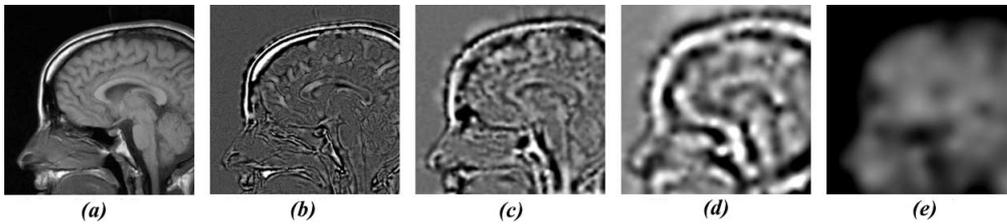


Figura 4.4: BEMD. (a) Immagine originale; (b) Prima IMF; (c) Seconda IMF; (d) Terza IMF; (e) Residuo

Capitolo 5

Un nuovo algoritmo basato sulla HE e sulla BEMD

Nel 2012 un Gruppo di ricerca della Northeastern University in Cina ha sviluppato un algoritmo per il miglioramento delle immagini mediche che combina l'equalizzazione dell'istogramma con la Bidimensional Empirical Mode Decomposition [7].

5.1 L'algoritmo

É già stato osservato in precedenza che la maggior parte delle immagini biomediche presenta un basso contrasto, cioè la differenza tra i livelli di grigio dei diversi organi e delle loro parti interne non è apprezzabile. Questo è il motivo per cui applicare direttamente la Bidimensional Empirical Mode Decomposition all'immagine non permetterebbe di raggiungere un buon risultato, dato che un basso contrasto nell'immagine di partenza rende difficile estrarre le informazioni riferite alle frequenze contenute nell'immagine, ovvero le IMF, che l'algoritmo elabora per ottenere l'immagine migliorata. Perciò l'applicazione della BEMD senza una preelaborazione influirebbe negativamente sulla qualità della decomposizione e quindi anche sul miglioramento finale dell'immagine. Inoltre essa richiederebbe un tempo relativamente lungo. Ecco perchè il primo passo dell'algoritmo consiste nell'equalizzazione dell'istogramma dell'immagine di partenza.

Successivamente viene applicata la BEMD e infine le singoli componenti IMF così ricavate vengono migliorate utilizzando una trasformazione lineare

per ottenere l'immagine migliorata. In Figura 5.1 è riportata la struttura dell'algoritmo.

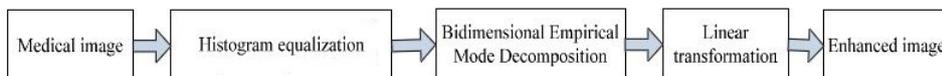


Figura 5.1: Struttura dell'algoritmo

Il processo della BEMD si può osservare in Figura 5.2.

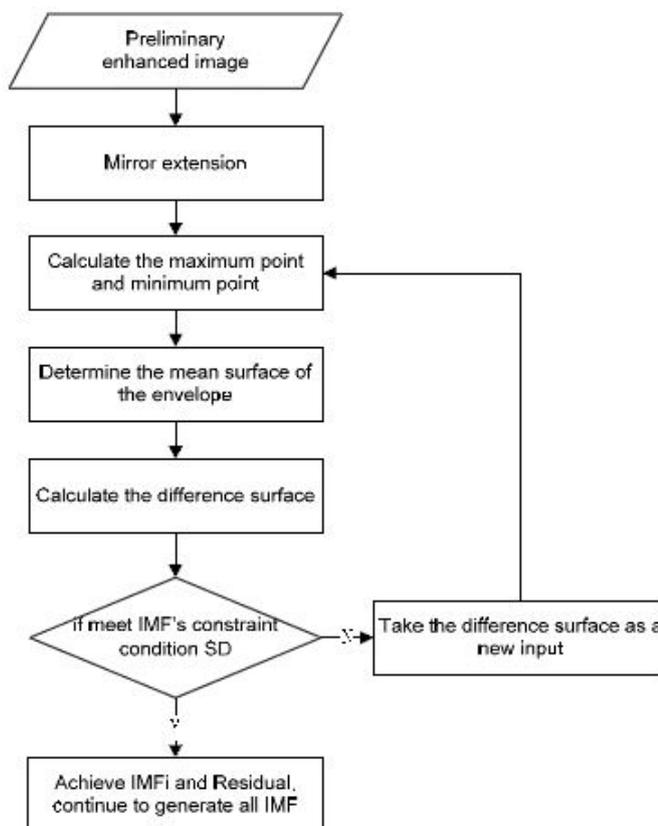


Figura 5.2: Processo della Bidimensional Empirical Mode Decomposition utilizzata nell'algoritmo

Il passo che viene chiamato “mirror extension” (estensione a specchio) ha come scopo ridurre gli effetti di bordo, che sono un problema cruciale della BEMD [9]. Infatti poiché il numero degli estremi locali è limitato e dato che l'interpolazione avviene solamente tra questi punti, gli involucri generati non possono coprire l'intera regione dell'immagine e ciò porta a valori

di involuppo non definiti sui bordi dell'immagine. Inoltre gli effetti di bordo si propagherebbero anche nella parte più interna dell'immagine durante le iterazioni del processo di sifting.

Per risolvere questo problema l'algoritmo proposto "specchia" l'immagine lungo 8 direzioni, in modo che la dimensione dell'immagine diventi nove volte quella originale. Così facendo tutti i punti di bordo si trovano all'esterno dell'area che interessa elaborare e si evita l'effetto di bordo.

Data la dimensione che raggiunge l'immagine dopo essere stata specchiata, la quantità di operazioni richieste per calcolare le superfici di involuppo è molto elevata, e questo si traduce in un aumento del tempo necessario allo svolgimento dell'intero processo. Perciò in questo algoritmo è stato scelto di non lavorare direttamente sull'immagine ottenuta dopo la mirror extension, ma di limitare quest'ultima ad una dimensione quattro volte maggiore di quella originale. In questo modo si evitano gli effetti di bordo e si mantiene anche una buona velocità di esecuzione dell'algoritmo. In Figura 5.3 è mostrato un esempio del risultato di questo procedimento.

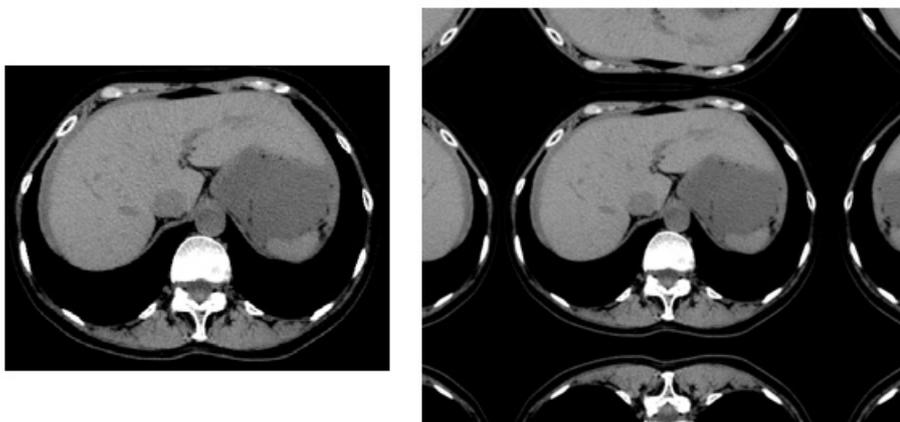


Figura 5.3: Immagine originale (a sinistra) e immagine dopo l'applicazione della mirror extension con limitazione delle dimensioni (a destra)

Dopo aver specchiato l'immagine per calcolare i massimi e i minimi locali viene utilizzato un metodo di confronto dei livelli di grigio tra i pixels posti nell'intorno del pixel che si sta studiando e il pixel stesso. A seconda di dove si trova quest'ultimo verranno presi in considerazione punti diversi. É necessario perciò fissare un sistema di riferimento per l'analisi.

Per un'immagine in scala di grigi si pone l'angolo in alto a sinistra come

origine del sistema che avrà come asse delle ascisse X la direzione orizzontale e come asse delle ordinate Y la direzione verticale. Se si suppone che il pixel di cui si vuole scoprire la condizione di massimo o minimo locale sia quello di coordinate spaziali (i,j) , uno schema della localizzazione dei punti considerati per il confronto si trova in Figura 5.4.

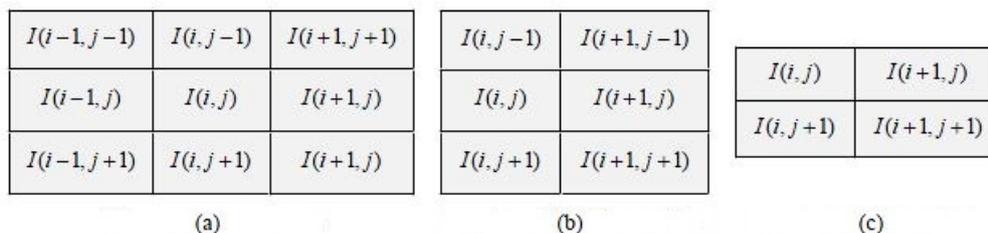


Figura 5.4: Schema dei punti utilizzati nel confronto per trovare i massimi e i minimi locali a seconda della posizione del pixel di coordinate (i,j) .
 (a) Pixel interno all'immagine; (b) Pixel sul contorno dell'immagine;
 (c) Pixel in un angolo dell'immagine

Una volta che sono stati individuati tutti gli estremi locali viene utilizzata l'interpolazione spline cubica (vedi paragrafo 4.1.1) per calcolare le superfici di involucro superiore e inferiore.

Il processo di decomposizione tramite BEMD prosegue poi come già spiegato (vedi paragrafo 4.2.1).

L'ultimo passo dell'algoritmo consiste nel sommare le Intrinsic Mode Functions (IMF) che si sono calcolate, previa la loro elaborazione con un metodo di trasformazione lineare. Quello che è stato scelto è semplicemente un'operazione di moltiplicazione, ovvero:

$$f(x, y) = IMF_1 \times \alpha_1 + \dots + IMF_n \times \alpha_n + Residuo \quad (5.1)$$

dove $f(x,y)$ è il risultato finale, il *Residuo* è $r_n(x,y)$ (vedi Eq. 4.10 a pagina 29), IMF_i è l' i -esima funzione di modalità intrinseca e α_i è il fattore di miglioramento associato all' i -esima IMF.

In Figura 5.5 è riportato uno schema della parte finale dell'algoritmo.

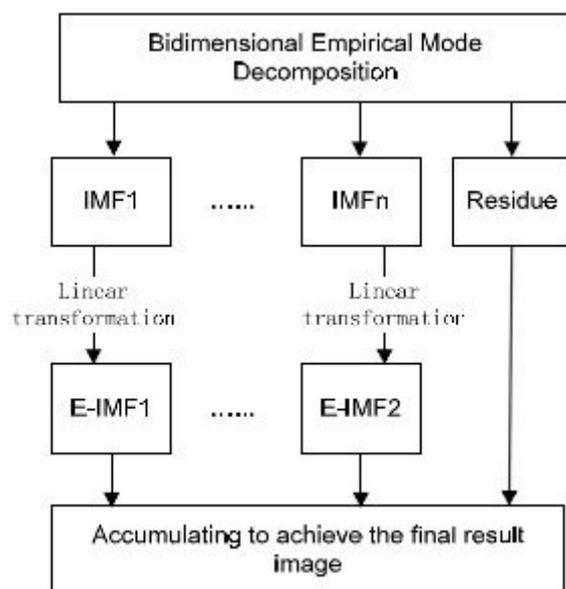


Figura 5.5: Schema che illustra l'ultima parte dell'algoritmo

5.2 Risultati sperimentali e analisi

L'algoritmo proposto è stato applicato su 60 gruppi di immagini ottenute con la tomografia computerizzata (CT) che sono state fornite da un ospedale a Shenyang (Cina). Sono state scelte immagini in cui la struttura interna degli organi non era chiaramente distinguibile.

In Figura 5.6 nella pagina seguente sono riportate tre di queste immagini (in alto) con le rispettive elaborazioni (in basso). Dai risultati si nota subito che le immagini ottenute dopo l'applicazione dell'algoritmo presentano un miglior contrasto. Nell'immagine (d) la struttura interna degli organi addominali, come il fegato e il pancreas, è visibile più chiaramente e anche l'adesione tra le parti degli organi è più evidente rispetto all'immagine iniziale (a). Nell'immagine (e) si può chiaramente osservare la struttura interna del polmone, cosa non possibile nell'immagine di partenza (b). Infine nell'immagine (f), rappresentante il fegato, si può distinguere chiaramente la struttura dei vasi sanguigni a differenza di quanto accade nell'immagine originale (c).

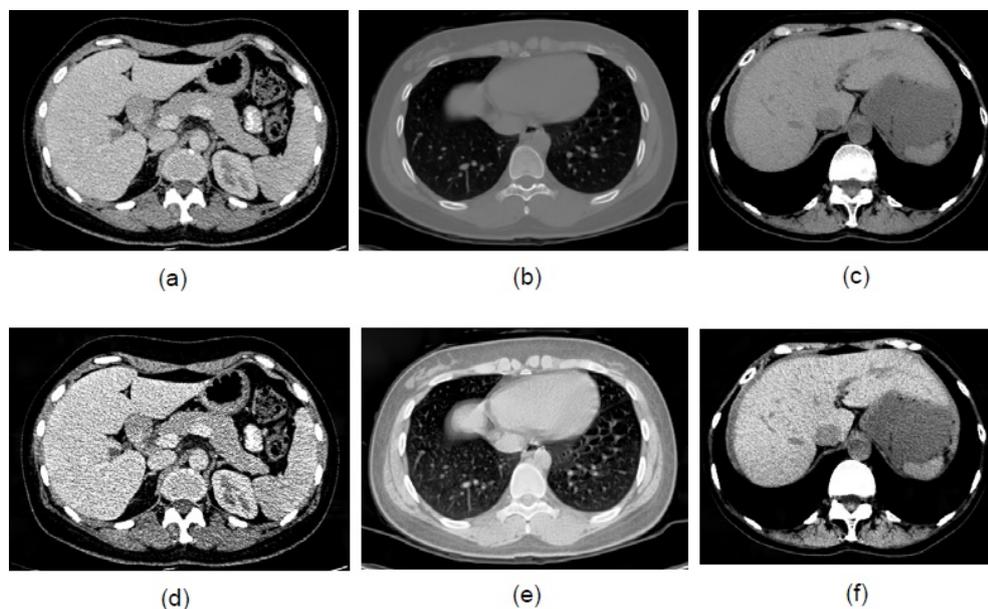


Figura 5.6: Esempio di immagini a cui è stato applicato l'algoritmo (in alto) con i rispettivi risultati (in basso)

5.2.1 Confronto con altri metodi

L'algoritmo proposto è stato confrontato con altri metodi così da poterne evidenziare eventuali vantaggi o svantaggi. I metodi con cui è stato confrontato sono la trasformazione logaritmica dei livelli di grigio, la trasformazione lineare a tratti, la trasformazione sigmoide, la trasformazione lineare e l'equalizzazione dell'istogramma. In Figura 5.7 sono mostrati i risultati dell'applicazione di tutti questi metodi ad un'immagine ottenuta con la tomografia computerizzata. L'immagine (a) è quella di partenza, mentre l'immagine (b) è quella ottenuta utilizzando una trasformazione logaritmica dei livelli di grigio, che, come si può vedere, migliora la luminosità dell'immagine (infatti schiarisce le regioni scure), ma non migliora il contrasto. (c) è l'immagine che risulta dall'applicazione di una trasformazione lineare a tratti che migliora il contrasto, anche se non di molto. Infatti l'effetto di miglioramento dipende dalla forma della funzione, ossia dalle caratteristiche dei tratti lineari da cui è composta, come ad esempio la loro pendenza. Le immagini (d) (trasformazione sigmoide) ed (e) (trasformazione lineare) presentano lo stesso problema della trasformazione lineare a tratti, mentre l'immagine (f) che si ottiene applicando l'equalizzazione dell'istogramma (HE) presenta un

effettivo miglioramento del contrasto. Tuttavia nell'immagine (g), risultante dall'elaborazione con l'algoritmo proposto, sono maggiormente distinguibili le strutture interne degli organi. Perciò questo algoritmo risulta essere migliore degli altri metodi.

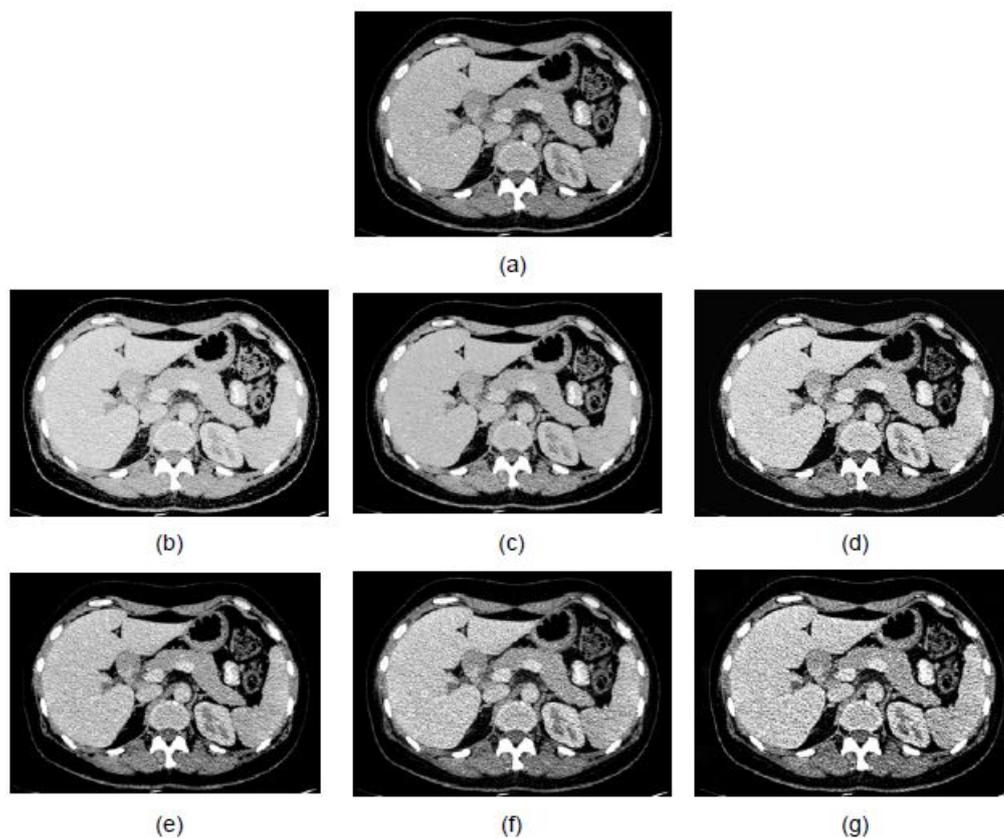


Figura 5.7: Immagini risultanti dall'applicazione di diversi algoritmi. (a) Immagine originale; (b) Trasformazione logaritmica; (c) Trasformazione lineare a tratti; (d) Trasformazione sigmoide; (e) Trasformazione lineare; (f) HE; (g) Algoritmo proposto

Sono state fatte anche delle analisi quantitative per capire quanto migliore sia effettivamente questo algoritmo rispetto agli altri metodi. Per tale valutazione è stato impiegato come indicatore il *Peak Signal to Noise Ratio* (*PSNR*) dato che nell'ambito delle immagini è la misura più oggettiva e ampiamente utilizzata per valutare la qualità di un metodo rispetto ad altri. Il

$PSNR$ è definito come segue:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{Max_i^2}{MSE} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{Max_i}{\sqrt{MSE}} \right) \quad (5.2)$$

dove Max_i è il massimo valore che può assumere un pixel nell'immagine, in particolare se i pixels sono rappresentati utilizzando 8 bits (cioè i livelli di grigio possibili sono 256), $Max_i = 255$. MSE invece è il *Mean Square Error* (cioè l'errore quadratico medio), che è espresso nel seguente modo:

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [I(i, j) - K(i, j)]^2 \quad (5.3)$$

Nell'Eq. (5.3) I è l'immagine originale, mentre K è l'immagine migliorata. Entrambe le immagini sono di dimensione $M \times N$.

Maggiore è il valore di $PSNR$, migliore è l'effetto visivo raggiunto, cioè la qualità dell'immagine ottenuta. Come si può vedere in Tabella 5.1 l'algoritmo proposto presenta il valore più alto di $PSNR$. In particolare si noti che quest'ultimo è maggiore di quello che si ottiene con l'equalizzazione dell'istogramma, che presenta comunque un valore più elevato degli altri metodi.

<i>Metodo</i>	<i>PSNR</i>
Trasformazione logaritmica	18.4
Trasformazione lineare a tratti	26.5
Trasformazione sigmoide	22.9
Trasformazione lineare	26.7
Equalizzazione dell'istogramma	27.2
Algoritmo proposto	34.3

Tabella 5.1: Confronto tra i diversi metodi utilizzati sulla base del $PSNR$

Quindi questo algoritmo permette di giungere ad un'immagine con miglior contrasto rispetto ai metodi analizzati, evitando gli inconvenienti che si hanno con l'equalizzazione dell'istogramma (vedi paragrafo 2.2.2). Inoltre esso migliora l'immagine migliorando indipendentemente le une dalle altre le informazioni associate alle diverse frequenze contenute nell'immagine.

Tuttavia l'algoritmo proposto presenta anche alcune limitazioni. Infatti l'effetto di miglioramento è ancora lontano da quello cercato e inoltre alcuni

parametri devono venire aggiustati manualmente, cosa che costituisce un grosso svantaggio. Ecco perché gli autori di questa ricerca sostengono che l'algoritmo dovrà essere perfezionato prima di poter essere applicato.

Capitolo 6

Conclusione

In questa tesi si è visto come l'equalizzazione dell'istogramma, oltre ad essere già un metodo abbastanza buono per elaborare le immagini, sia anche un punto di partenza per molte tecniche di miglioramento delle immagini mediche.

Essa infatti è molto semplice da implementare, poco costosa e permette di ottenere immagini che presentano un contrasto migliore di quelle originali, cosa molto utile al fine di fare una diagnosi. L'Histogram Equalization, come è stato spiegato, presenta però anche degli svantaggi, poiché, a seconda delle caratteristiche dell'istogramma di partenza, si rischia di ottenere delle immagini con luminosità eccessivamente alterata. Si è visto come la Bi-Histogram Equalization cerchi di superare queste difficoltà riuscendo ad aumentare il range dinamico dell'immagine originale e preservando in modo maggiore la luminosità iniziale.

Un ulteriore miglioramento si ottiene grazie all'algoritmo proposto da un Gruppo di ricerca della Amirkabir University of Technology (Theran, Iran). Questo algoritmo infatti, effettuando una preelaborazione sull'istogramma prima di applicare l'Histogram Equalization, giunge ad un'immagine che presenta un buon contrasto senza gli svantaggi sopraccitati.

Infine è stato descritto l'algoritmo proposto molto recentemente (2012) da un Gruppo di ricerca della Northeastern University (Cina). Esso oltre ad equalizzare l'istogramma dell'immagine da elaborare utilizza la Bidimensional Empirical Mode Decomposition, che costituisce un vantaggio rispetto all'algoritmo precedente. Infatti tramite la BEMD è possibile elaborare indipendentemente e in misura diversa le informazioni associate alle diverse

frequenze contenute nell'immagine. Il risultato finale è un'immagine con contrasto migliore di quello iniziale e di quello che si otterrebbe applicando altre tecniche, come ad esempio l'equalizzazione dell'istogramma, permettendo così di distinguere la struttura interna degli organi. Anche questo algoritmo supera gli artefatti che si rischiano di ottenere con l'Histogram Equalization. Tuttavia esso è più complesso dei precedenti metodi, dato che richiede un numero di operazioni maggiore, e quindi è più difficile da realizzare. Inoltre dovrà essere migliorato prima di poter essere applicato in futuro perché fino ad ora richiede l'aggiustamento manuale di alcuni parametri.

In conclusione è importante notare che ognuno di questi metodi presenta dei pro e dei contro ed è perciò necessario scegliere il metodo più adatto a seconda dei casi e spesso la soluzione migliore consiste nel combinare diverse tecniche.

Bibliografia

- [1] Soong-Der Chen e Abd. Rahman Ramli. “Contrast Enhancement using Recursive Mean-Separate Histogram Equalization for Scalable Brightness Preservation”. In: *IEEE Transactions on Consumer Electronics* 49 (nov. 2003), pp. 1301–1305.
- [2] Massimo Ferrari. “Confronto metodologico per l’estrazione di indici da tracciati elettroencefalografici per la valutazione dell’adattamento motorio”. Tesi di laurea specialistica in Ingegneria Biomedica. Politecnico di Milano, A.A. 2009/2010. Cap. 3, pp. 67–72.
- [3] Guangtao Ge. “The IMF Image Analysis in Bidimensional EMD”. In: *4th International Congress on Image and Signal Processing (CISP), 2011* (ott. 2011), pp. 317–318.
- [4] Rafael C. Gonzales e Richard E. Woods. *Digital Image Processing*. A cura di Inc. Pearson Education. 3^a ed. 2008. Cap. 3, pp. 120–128.
- [5] Norden E. Huang et al. “The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis”. In: *Proceedings of the Royal Society*. A454. London 1998, pp. 915–923.
- [6] Haidi Ibrahim e Nicholas Sia Pik Kong. “Brightness Preserving Dynamic Histogram Equalization for Image Contrast Enhancement”. In: *IEEE Transactions on Consumer Electronics* 53 (nov. 2007), p. 1752.
- [7] Huiyan Jiang, Binbin Lou e Shiyang Liao. “Medical Image Enhancement Method Based on Mode Decomposition”. In: *Advances in Multimedia Technology (AMT)*. Vol. 1. 2012, pp. 21–31.
- [8] Yeong-Taeg Kim. “Contrast Enhancement Using Brightness Preserving Bi-Histogram Equalization”. In: *IEEE Transactions on Consumer Electronics* 43 (feb. 1997), pp. 1–8.

- [9] Wei Liu, Weidong Xu e Lihua Li. “Medical Image Retrieval Based on Bidimensional Empirical Mode Decomposition”. In: *Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Bioinformatics and Bioengineering, 2007. BIBE 2007* (ott. 2007), pp. 641–643.
- [10] J.C. Nunes et al. “Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition”. In: *Image and Vision Computing*. Vol. 21. 2003, pp. 1019–1021, 1024.
- [11] Xujia Qin et al. “Medical Image Enhancement Method Based on 2D Empirical Mode Decomposition”. In: *The 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering, 2008. ICBBE 2008* (mag. 2008), pp. 2533–2535.
- [12] Ali Ziaei et al. “A Novel Approach for Contrast Enhancement in Biomedical Images Based on Histogram Equalization”. In: *International Conference on Biomedical Engineering and Informatics, 2008. BMEI 2008*. Vol. 1. 2008, pp. 855–858.