UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Simmetrie di p-forma della teoria di Maxwell (generalizzata)

Relatore	**Laureando**
Prof. Fabio Apruzzi	**Andrea Zoppi**

Anno Accademico 2022/2023

Indice

1 Introduzione **1**

2 Simmetrie globali ordinarie **2**
2.1 Teorema di Noether per le trasformazioni di simmetria interna . . . 2
2.1.1 Richiami del principio variazionale . . . 2
2.1.2 Teorema di Noether in una teoria di campi classica relativistica . . . 3
2.2 Simmetrie ordinarie globali in QFT . . . 4
2.3 Simmetrie ordinarie globali topologiche in QFT . . . 5
2.3.1 Corrente di Noether . . . 5
2.3.2 Operatore di carica . . . 5
2.3.3 Operatore di simmetria . . . 6
2.3.4 Proprietà dell'operatore di simmetria 0-forma . . . 7
2.3.5 Azione delle simmetrie di 0-forma su operatori carichi . . . 7

3 Simmetrie globali di p-forma **9**
3.1 Corrente conservata (p+1) forma . . . 9
3.2 Operatore di carica . . . 10
3.3 Operatore di simmetria p-forma . . . 10
3.3.1 Proprietà dell'operatore di simmetria p-forma . . . 11
3.3.2 Screening effect . . . 12

4 Simmetria p-forma nella teoria di Maxwell generalizzata **14**
4.1 Richiami della teoria di Maxwell in d-dimensioni in assenza di sorgenti . . . 14
4.2 Simmetrie di p-forma nella teoria di Maxwell . . . 16
4.2.1 simmetrie di 1-forma nella teoria di Maxwell generalizzata 4d . . . 16
4.2.2 simmetrie di 1-forma nella teoria di Maxwell d-dimensionale . . . 19
4.2.3 Simmetrie di p-forma nella teoria di Maxwell generalizzata d-dimensionale . . . 22

5 Simmetrie discrete globali p-forma della teoria d-dimensionale BF **25**
5.1 Simmetrie discrete globali p-forma . . . 25
5.2 Teoria di gauge BF . . . 25
5.3 Simmetrie globali discrete della teoria p-forma BF . . . 27

6 Conclusioni **29**

7 Appendice **30**

Bibliografia **32**

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi anni si sono osservati notevoli progressi nella fisica teorica con la scoperta di nuove forme di simmetria [1, 5, 4], definite simmetrie generalizzate o simmetrie globali di p-forma.
Le simmetrie generalizzate sono abbastanza comuni in molte teorie relativistiche e partono dall'esistenza di una forma differenziale chiusa, definita come una corrente conservata completamente antisimmetrica. Usiamo come notazione per una r-forma w la seguente scrittura w_r, mentre per una corrente conservata r-forma $w^{(r)}$, per andare a esplicitare gli oggetti matematici chiave delle simmetrie globali(per r=1 verranno talvolta omessi gli indici per semplicità). L'antisimmetrica natura della corrente implica che possiamo costruire una carica conservata, integrando su una sottovarietà spaziale differenziabile, a differenza di tutta la varietà spaziale, come per le simmetrie globali ordinarie. Inoltre gli operatori di carica sono topologici, cioè indipendenti da deformazioni della varietà. Come conseguenza gli oggetti carichi non sono più operatori locali definiti su punti della varietà, ma sono operatori supportati da oggetti estesi(linee, superfici...).
Questa tesi è dedicata ad uno studio base delle simmetrie generalizzate in una generica teoria di campo, per poi vedere una loro applicazione nella teoria di Maxwell generalizzata in assenza di sorgenti, di fondamentale importanza nelle teorie di superstringa o la teoria M, che necessitano di uno spazio-tempo undici dimensionale.
L'organizzazione è la seguente,
Nel *Capitolo 2* si riscrivono in sintesi le simmetrie globali ordinarie, nel linguaggio della geometria differenziale [8], che garantisce una facile generalizzazione.
Nel *Capitolo 3* si generalizzano le simmetrie ordinarie a simmetrie globali di p-forma, andando a studiarne le proprietà.
Nel *Capitolo 4* si applica il formalismo ottenuto alla teoria di Maxwell [7] a varie profondità, per prima cosa si analizzano le simmetrie di 1-forma nella teoria di Maxwell in 4 dimensioni, poi in una dimensione d arbitraria ed infine simmetrie di p-forma in una teoria di Maxwell d-dimensionale generalizzata.
Invece nel *Capitolo 5* si analizza nello specifico il caso in cui la simmetria globale è discreta, portando come esempio la teoria BF [6].

Capitolo 2

Simmetrie globali ordinarie

In questo capitolo si presenta il caso di simmetrie globali ordinarie, o simmetrie di 0-forma nel linguaggio delle forme differenziali, essendo il formalismo più adeguato per estendere la trattazione alle simmetrie di p-forma, partendo dal teorema di Noether.

2.1 Teorema di Noether per le trasformazioni di simmetria interna

Consideriamo una generica teoria di campo classica relativistica su una varietà differenziabile d-dimensionale M_d dotata di una metrica euclidea. Inoltre assumiamo che questa abbia una lagrangiana, anche se non sarà essenziale nella discussione dei paragrafi successivi. Richiamiamo i concetti chiave del principio di minima azione.

2.1.1 Richiami del principio variazionale

Una generica teoria di campo classica relativistica descrive il sistema attraverso una densità di Lagrange $\mathcal{L}$, funzione dei campi e delle loro derivate. Definiamo l'azione della lagrangiana su una varietà Riemanniana (M_d,g) come

$$\mathcal{S} = \int_{M_d} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x)\Omega_d \tag{2.1}$$

dove $\phi(x)$ sono i campi definiti sulle coordinate x della varietà, $\partial_\mu \phi(x)$ sono le derivate covarianti dei campi e infine Ω_d è la forma di volume invariante, in coordinate

$$\Omega_d = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d \tag{2.2}$$

dove $|g| = \sqrt{|det(g)|}$[1]. Dal principio di minima azione abbiamo che le equazioni del moto del sistema corrispondono al minimo dell'azione

$$\delta \mathcal{S} = 0 \tag{2.3}$$

[1] Il modulo del determinante viene inserito nel caso in cui definiamo varietà pseudo-riemanniana, dove il determinante della metrica può assumere valori negativi

Imponendo la condizione al contorno che la variazione dei campi a bordo della varietà sia nulla, otteniamo le equazioni del moto del sistema, definite le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0 \tag{2.4}$$

2.1.2 Teorema di Noether in una teoria di campi classica relativistica

Una trasformazione di simmetria è una trasformazione dei campi e delle coordinate

$$\begin{aligned} \phi &\to \widetilde{\phi} \\ x^\mu &\to \widetilde{x}^\mu \end{aligned} \tag{2.5}$$

tale che l'azione $\mathcal{S}$ è invariante

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \int_{M_d} \mathcal{L}(\widetilde{\phi}(\widetilde{x}), \widetilde{\partial}_\mu \widetilde{\phi}(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \widetilde{\Omega}_d = \int_{M_d} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) \Omega_d = \mathcal{S} \tag{2.6}$$

Definiamo le simmetrie interne le trasformazioni che agiscono sui campi e lasciano invariate le coordinate, invece simmetrie esterne le trasformazioni che agiscono sia sulle coordinate che sui campi. Alle trasformazioni di simmetria di un sistema è associato un gruppo, chiamato gruppo di simmetria G.
Sia G un gruppo continuo, allora ad ogni suo generatore, se valgono le equazioni di Eulero-Lagrange, è associata una 1-forma conservata $J^{(1)}$, chiamata anche corrente conservata, tale che, in coordinate:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{2.7}$$

La corrente conservata viene chiamata corrente di Noether.
Dimostriamo parzialmente quanto definito considerando solamente le trasformazioni di simmetria interne, che sono quelle rilevanti per la scopo di questa tesi.
Consideriamo la trasformazione interna infinitesimale di un campo scalare Φ(x)

$$\begin{aligned} \Phi &\to \Phi + \delta\Phi \\ x^\mu &\to x^\mu \end{aligned} \tag{2.8}$$

In questo caso la variazione del campo ha la proprietà di commutare con la derivata parziale, che deriva dal fatto di avere una simmetria interna

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta\Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Phi'(x) - \Phi(x)) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi'(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi(x) = \delta \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi(x) \tag{2.9}$$

Essendo una trasformazione di simmetria l'azione è invariante, considerando che le coordinate non subiscono variazioni, troviamo che la lagrangiana deve essere invariante

$$\widetilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S} = 0 \iff \int_{M_d} (\mathcal{L}(\widetilde{\phi}(x), \partial_\mu \widetilde{\phi}(x), x) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x)) \Omega_d = 0 \tag{2.10}$$

Quindi alla lagrangiana viene aggiunto un termine dovuto alla trasformazione dei campi

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \tag{2.11}$$

dove, nella condizione in cui vale l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu(\delta\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}(\delta\Phi)) = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi + \Big[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\Big]\delta\Phi \overset{\text{E-L}}{=} \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi \quad (2.12)$$

Imponendo che l'azione sia invariante, otteniamo una legge di conservazione

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi = 0 \quad (2.13)$$

In realtà possiamo utilizzare una condizione più debole, cioè che la densità di Lagrange rimanga invariata a meno di una derivata totale, ma il risultato finale non cambia.
Definiamo quindi la corrente conservata, o corrente di Noether la uno forma $J^{(1)} = J_\mu dx^\mu$ tale che

$$J_\mu = g_{\mu\nu}J^\nu \overset{(a)}{=} J^\mu \quad (2.14)$$

Dove in (a) si è definita una metrica euclidea e, in coordinate

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi \quad (2.15)$$

Rimarchiamo la condizione al contorno, cioè che $J_\mu = 0$ ai bordi della varietà liscia su cui sono definiti i campi.
Una conseguenza fondamentale del teorema di Noether è l'esistenza di una quantità conservata, la carica di Noether Q che, definendo la coordinata temporale la componente zero,

$$Q = \int_{(M|_{spazio})_{d-1}} J^0 \quad (2.16)$$

definita come l'integrale sulla parte spaziale della componente temporale della corrente di Noether.

2.2 Simmetrie ordinarie globali in QFT

Il teorema di Noether per una teoria di campi classica relativistica può essere esteso ad una teoria di campi quantistica tramite la quantizzazione canonica, in cui i campi $\Phi(P)$ vengono promossi ad operatori locali $\hat{\Phi}(P)$, dove P è un punto della varietà su cui sono definiti i campi. In questa sezione definiamo il concetto di operatore di simmetria che agisce su operatori locali definiti su una varietà differenziabile. Dal teorema di Wigner sappiamo che in un teoria quantistica le trasformazioni di simmetria, continue e discrete, sono associate in maniera univoca ad un raggio operatore unitario o antiunitario.
Per le simmetrie continue l'operatore unitario che implementa la corrispondente trasformazione può essere costruito dalla carica di Noether Q

$$U = e^{i\alpha Q} \quad (2.17)$$

che agisce sui campi mappando

$$\phi \to \phi' = U\phi U^\dagger \quad (2.18)$$

Da questa breve introduzione discutiamo il significato topologico delle simmetrie ordinarie, che è il mezzo per cui si può agilmente descrivere le simmetrie globali di p-forma.

2.3 Simmetrie ordinarie globali topologiche in QFT

2.3.1 Corrente di Noether

Le trasformazioni di simmetria formano un gruppo G che può essere abeliano o non abeliano. Se il gruppo è continuo per ogni generatore c'è una corrente di Noether conservata $J^{(1)} := J = J_\mu dx^\mu$, come discusso nel paragrafo precedente, tale che

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad oppure \quad d * J = 0 \tag{2.19}$$

le due proprietà sono equivalenti:

$$\begin{aligned} d * J &= d\left(\frac{\sqrt{|g|}}{(d-1)!1!} J_\mu \epsilon^\mu_{\nu_2 \dots \nu_d} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_d} \right) = \\ &= \frac{1}{(d-1)!} (\partial_\alpha J^\mu) \epsilon_{\mu\nu_2\dots\nu_d} dx^\alpha \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_d} \\ &= \frac{d!}{(d-1)!} (\partial_\alpha J^\mu) \epsilon_{\mu\nu_2\dots\nu_d} \epsilon^{\alpha\nu_2\dots\nu_d} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^d = \\ &\overset{(a)}{=} d!(\partial_\mu J^\mu) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^d = 0 \iff \partial_\mu J^\mu = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

dove abbiamo usato il fatto che la metrica è euclidea in cui $|g| = det(g) = 1$, la convenzione $\epsilon^{12\dots D} = +1$ e in (a) le proprietà del simbolo di Levi-Civita,

$$\epsilon_{\mu\nu_2\dots\nu_d} \epsilon^{\alpha\nu_2\dots\nu_d} = (d-1)! {\delta_\mu}^\alpha \tag{2.21}$$

Dal momento che queste simmetrie ordinarie agiscono su oggetti 0-dimensionali, cioè operatori locali supportati sui punti della varietà, vengono definite simmetrie di 0-forma.
Una conseguenza fondamentale del teorema di Noether è che ad una simmetria del sistema è associata un'osservabile conservata.

2.3.2 Operatore di carica

Data una corrente di Noether $J^{(1)}$, definiamo l'operatore di carica

$$Q(M_{d-1}) = \int_{M_{d-1}} *J^{(1)} \tag{2.22}$$

dove l'utilizzo dell'operatore di Hodge ci garantisce il fatto che stiamo integrando una (d-1) forma differenziale su una varietà (d-1) dimensionale. In coordinate

$$Q(M_{d-1}) = \int_{M_{d-1}} \frac{\sqrt{|g|}}{(d-1)!} \epsilon_{\mu_1\dots\mu_d} J^{\mu_1} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \tag{2.23}$$

dove M_{d-1} è un sottospazio di M_d che divide quindi la varietà in due parti, una varietà differenziabile Riemanniana (con la metrica indotta da quella euclidea) di dimensione d-1, non necessariamente compatta.

Utilizzando una metrica euclidea non abbiamo una direzione di tempo privilegiata, come per esempio in una metrica di Minkowski, che ci garantisce maggior generalità.
Se la corrente di Noether è conservata allora l'operatore di carica si conserva, usando (2.19):

$$dQ = \int_{M_{d-1}} d * J = 0 \tag{2.24}$$

Nella forma non generalizzata, per sottolineare il significato fisico dell'operatore di carica, diamo una direzione privilegiata al tempo, per convenzione la componente zero. Quindi l'operatore di carica si esprime come l'integrale sullo spazio ad un istante di tempo t fissato:

$$Q = \int_{M|_{spazio}} J^0 \tag{2.25}$$

dove J^0 è la componente di tipo tempo della corrente di Noether.
Immediata la conservazione della carica nel tempo:

$$\partial_0 Q = \int_{(M|_{spazio})_{d-1}} \partial_0 J^0 \overset{(a)}{=} -\int_{(M|_{spazio})_{d-1}} \partial_i J^i \overset{(b)}{=} -\oint_{\partial(M|_{spazio})_{d-1}} J^i = 0 \tag{2.26}$$

dove in (a):

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0 \Rightarrow \partial_0 J^0 = -\partial_i J^i \tag{2.27}$$

ed in (b) il teorema di Gauss multidimensionale, l'integrale va a zero per la condizione al contorno della corrente Noether, che tende a zero a bordo della varietà.
Una proprietà importante dell'operatore di carica consiste nel fatto che è un operatore topologico, cioè che rimane invariato dopo una deformazione differenziabile della varietà. Prendo quindi la varietà M_d deformata, indicata con $\widetilde{M}_d$, definisco X_d la regione il cui bordo è composto da M_d e $\widetilde{M}_d$. Quindi

$$Q(M_{d-1}) - Q(\widetilde{M}_{d-1}) = \int_{M_{d-1}} *J - \int_{\widetilde{M}_{d-1}} *J = \int_{X_d} d(*J) = 0 \tag{2.28}$$

In altre parole, se M_{d-1} e $\widetilde{M}_{d-1}$ sono varietà omotope, cioè se è possibile deformare con continuità una varietà nell' altra, allora $Q(M_{d-1}) = Q(\widetilde{M}_{d-1})$
Consideriamo un gruppo associato ad una trasformazione di simmetria interna globale G. Quindi le trasformazioni di simmetria agiscono sugli operatori locali carichi, cioè definiti su un punto della varietà M_{d-1}, e dal fatto che la simmetria è globale la trasformazione non dipende dal punto in cui i campi sono applicati.
Nel linguaggio delle simmetrie globali di p-forma, G si definisce il gruppo della simmetria interna globale 0-forma G^0.

2.3.3 Operatore di simmetria

Sia il gruppo della simmetria globale interna G, e consideriamo il caso in cui il gruppo sia abeliano. Consideriamo una trasformazione di simmetria come un operatore associato alla varietà $U_g(M_{d-1})$ con $g \epsilon G$. Nel caso di un gruppo G continuo si definisce l'operatore di simmetria tramite l'esponente dell'operatore di carica Q

$$U_g(M_{d-1}) = e^{i\alpha Q(M_{d-1}))} \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.29}$$

dove

$$g = e^{i\alpha} \tag{2.30}$$

è la rappresentazione del gruppo nella trasformazione dei campi. In generale l'operatore di simmetria è definito anche per un gruppo di simmetria discreto, dove non è definita una corrente di Noether. Fisicamente $U_g(M_{d-1})$ implementa l'azione del gruppo G sugli operatori locali carichi sotto questa simmetria.

2.3.4 Proprietà dell'operatore di simmetria 0-forma

- L'operatore di simmetria (0-forma) soddisfa alla legge di composizione del gruppo, quindi

$$U_{g_1}(M_{d-1})U_{g_2}(M_{d-1}) = U_{g_1 g_2}(M_{d-1}) \tag{2.31}$$

  dove $g_1, g_2, g' \in G$, con $g' = g_1 g_2$.

- L'operatore di simmetria è topologico, discende dal fatto che la corrente di Noether è conservata, cioè $d * J = 0$. Prendiamo una varietà differenziabile M_{d-1} ed $\widetilde{M}_{d-1}$, dove quest'ultima è ottenuta tramite una deformazione differenziabile.
  Dal fatto che G è un gruppo, ogni elemento $g \in G$ ammette un inverso g^{-1}, quindi

$$U_g(M_{d-1})U_{g^{-1}}(\widetilde{M}_{d-1}) = e^{i\alpha(Q(M_{d-1}) - Q(\widetilde{M}_{d-1}))} \tag{2.32}$$

  Utilizzando il fatto che l'operatore di carica Q è topologico come mostrato in (2.28),in assenza di operatori carichi otteniamo che

$$U_g(M_{d-1})U_{g^{-1}}(\widetilde{M}_{d-1}) = \mathbb{I} \tag{2.33}$$

  che implica il fatto che l'operatore di simmetria è topologico

L'operatore di simmetria 0-forma $U_g(M_{d-1})$ implementa l'azione del gruppo G su un operatore con carica q che agisce localmente su $\mathcal{P}$ quando M_{d-1}, tramite una deformazione differenziabile, attraversa il punto $\mathcal{P}$.

2.3.5 Azione delle simmetrie di 0-forma su operatori carichi

Si analizza un caso di particolare interesse, utilizzando come gruppo di simmetria globale G=U(1), quindi le equazioni del moto dei campi rimangono invariate se i campi sono definiti a meno di una fase che non dipende dal punto della varietà.
Un generico elemento $g \in$ U(1) è un numero complesso di modulo unitario, prendiamo come rappresentativo $g = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$,il cui elemento inverso è $g^{-1} = e^{-i\theta}$.
Definiamo come varietà una sfera $M_{d-1} := \mathcal{S}^{d-1}$,che circonda un punto $\mathcal{P}$, definiamo l'operatore di simmetria $U_g(\mathcal{S}^{d-1})$ e un operatore locale con carica q, $\mathcal{O}(\mathcal{P})$, dove $\mathcal{P} \notin \mathcal{S}^{d-1}$.
Adesso consideriamo di muovere $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ lungo un cammino che attraversi $(\mathcal{S}^{d-1})$,o equivalentemente una deformazione della sfera che trapassi l'operatore di carica come in (2.37). A causa dell'operatore carico l'operatore di simmetria non rimane invariato. Definisco $\widetilde{\mathcal{S}}^{d-1}$ la sfera deformata tale per cui il punto $\mathcal{P}$ viene trapassato ($\mathcal{P} \notin (\widetilde{\mathcal{S}}^{d-1})$).

L'azione di $U_g(\mathcal{S}^{d-1})$ su $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ [2] si calcola esplicitamente :

$$
\begin{aligned}
U_g(\mathcal{S}^{d-1})\mathcal{O}(\mathcal{P})U_{g^{-1}}(\widetilde{\mathcal{S}}^{d-1}) &= e^{i\theta(Q(\mathcal{S}^{d-1})-Q(\widetilde{\mathcal{S}}^{d-1}))}\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \\
&= e^{i\theta\int_{X_d} d*J}\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \\
&= e^{i\theta\int_{X_d} q\delta^d(\mathcal{P})}\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \\
&= e^{i\theta q}\mathcal{O}(\mathcal{P})
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

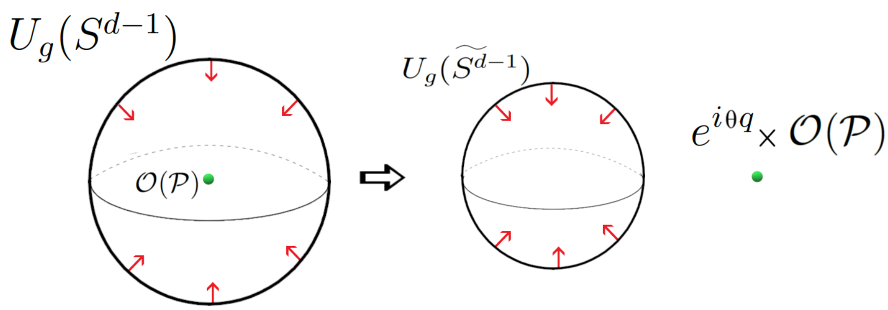
dove X_d è una varietà con bordo $\mathcal{S}^{d-1}$ e $\widetilde{\mathcal{S}}^{d-1}$ e si è utilizzato il fatto che nel punto in cui l' operatore locale viene trapassato dalla sfera la legge di conservazione della corrente viene violata dalla presenza della sorgente, per cui

$$d * J = q\delta^d(\mathcal{P}) \tag{2.35}$$

Quindi l'azione del gruppo U(1) è quella di moltiplicare l'operatore locale con una fase

$$\mathcal{O}(\mathcal{P}) \rightarrow e^{i\theta q}\mathcal{O}(\mathcal{P}) \tag{2.36}$$

dove $e^{i\theta}$ è il rappresentativo del gruppo U(1).



(2.37)

Dopo che la sfera ha trapassato l'operatore locale carico, la si può restringere ad un punto tramite mappe differenziabili e, se non ci sono altre sorgenti interne, non modifica ulteriormente $\mathcal{O}(\mathcal{P})$.

Nota: più in generale, quindi considerando anche il caso in cui il gruppo G non è abeliano, $U_g(\mathcal{S}^{d-1})$ agisce sugli operatori di carica nel modo seguente, in componenti:

$$U_g(\mathcal{S}^{d-1})\mathcal{O}_i(\mathcal{P}) = R(g)_i^j\mathcal{O}(\mathcal{P})_j U_g(\widetilde{\mathcal{S}}^{d-1}) \tag{2.38}$$

dove $R(g)$ è il rappresentativo del gruppo G.

Nota: la costruzione fatta per le simmetrie ordinarie globali continue e discrete dà un interessante prospettiva sulle simmetrie nelle teorie relativistiche, cioè

$$\textit{Generatore di simmetria} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \textit{Operatori topologici} \tag{2.39}$$

Capitolo 3

Simmetrie globali di p-forma

Il concetto di simmetria globale ordinaria, o di 0-forma, si può generalizzare nel concetto di simmetria globale p-forma.
Una simmetria globale generalizzata, o anche detta simmetria globale p-forma, è una simmetria globale che agisce su operatori di carica V(Γ_p) supportati su varietà differenziabili p-dimensionali Γ_p.
Per espandere il formalismo useremo varietà di dimensione d > (p+1), con metrica euclidea senza definire una direzione temporale privilegiata.
In maniera contraria a quanto visto per le simmetrie ordinarie, partiamo dalle correnti conservate per arrivare al gruppo di simmetria.

3.1 Corrente conservata (p+1) forma

Definisco una corrente (p+1)-forma $J^{(p+1)}$ conservata, cioè un tensore di rango (0,p+1) la cui espressione in coordinate

$$J^{(p+1)} = J_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots dx^{\mu_{p+1}} \tag{3.1}$$

che è una (p+1) forma differenziale chiusa, cioè una corrente conservata

$$\partial_{\mu_1} J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad d * J^{(p+1)} = 0 \tag{3.2}$$

Le due definizioni sono equivalenti, seguendo gli stessi passaggi dell'equazione (2.20).

$$\begin{aligned}
d * J^{(p+1)} &= \frac{1}{(d-p-1)!(p+1)!}\big(\partial_\alpha J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}\big)\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}\nu_{p+2}\dots\nu_d} dx^\alpha \wedge dx^{\nu_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_d} = \\
&= \frac{(d-p)!}{(d-p-1)!(p+1)!}\big(\partial_\alpha J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}\big)\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}\nu_{p+2}\dots\nu_d} \epsilon^{\alpha\nu_{p+2}\dots\nu_d} dx^1 \wedge dx^{p+2} \wedge \dots \wedge dx^d = \\
&= \frac{(d-p)!}{(p+1)!}\big(\partial_{\mu_1} J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}\big) dx^1 \wedge dx^{p+2} \wedge \dots \wedge dx^d \\
&\Rightarrow d * J^{(p+1)} = 0 \iff \partial_{\mu_1} J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Operatore di carica

Data una corrente conservata $J^{(p+1)}$ definisco l'operatore di carica

$$Q(M_{d-p-1}) = \int_{M_{d-p-1}} *J^{(p+1)} \tag{3.4}$$

la cui espressione in coordinate

$$Q(M_{d-p-1}) = \int_{M_{d-p-1}} \frac{1}{(d-p-1)!(p+1)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \tag{3.5}$$

L'operatore di carica è supportato da una sottovarietà di dimensione (d-p-1),la coodimensione è ovviamente (p+1). Analogamente a quanto visto per le simmetrie di 0-forma, l'operatore di carica si conserva,

$$dQ = \int_{M_{d-p-1}} d * J^{(p+1)} = 0 \tag{3.6}$$

Inoltre, sempre dal fatto che la corrente $J^{(p+1)}$ è una (p+1) forma chiusa, l'operatore di carica è topologico. Considero una varietà deformata $\widetilde{M}_{d-p-1}$:

$$Q(M_{d-p-1}) - Q(\widetilde{M}_{d-p-1}) = \int_{M_{d-p-1}} *J^{(p+1)} - \int_{\widetilde{M}_{d-p-1}} *J^{(p+1)} = \int_{X_{d-p}} d(*J^{(p+1)}) = 0 \tag{3.7}$$

dove X_{d-p} è una varietà con bordo $\widetilde{M}_{d-p-1}$ e $\widetilde{M}_{d-p-1}$, quindi l'operatore di carica è invariante se deformo in maniera differenziabile la varietà o equivalentemente se due varietà sono omotope. Adesso che abbiamo definito un operatore di carica, definiamo l'operatore di simmetria associato alla corrente conservata. Dal teorema di Wigner sappiamo che l'operatore associato ad una trasformazione di simmetria è unitario o anti-unitario. Nel caso continuo l'operatore è necessariamente unitario.

3.3 Operatore di simmetria p-forma

L'operatore di simmetria è definito come l'esponenziale dell'operatore di carica

$$U_g(M_{d-p-1}) = e^{i\alpha Q(M_{d-p-1})} \quad , \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

dove

$$g = e^{i\alpha} \tag{3.9}$$

è la rappresentazione del gruppo di simmetria globale p-forma. In generale l'operatore di simmetria è definito anche per un gruppo di simmetria discreto, dove non è definita una corrente conservata $J^{(p+1)}$.

Fisicamente $U_g(M_{d-p-1})$ implementa l'azione del gruppo sugli operatori carichi sotto questa simmetria, il cui supporto è una varietà p-dimensionale. Dall'analisi delle proprietà dell'operatore riusciamo a definire il gruppo di simmetria continua

3.3.1 Proprietà dell'operatore di simmetria p-forma

- L'operatore di simmetria p-forma deve soddisfare la legge di composizione del gruppo, quindi

$$U_{g_1}(M_{d-p-1})U_{g_2}(M_{d-p-1}) = U_{g_1 g_2}(M_{d-p-1}) \tag{3.10}$$

  dove $g_1, g_2, g' \in G^p$, con $g' = g_1 g_2$.

- Gli operatori di simmetria sono operatori topologici, la verifica segue analogamente dalla equazione (2.32)

- Dal fatto che sono operatori topologici, tramite una deformazione differenziabile in cui non attraversano operatori di carica p-dimensionali (su cui gli operatori di simmetria implementano l'azione del gruppo), gli operatori rimangono invariati. Ma questo implica, per questioni dimensionali che le simmetrie di p-forma, con p $>$ 0, sono sempre abeliane :

  - Per le simmetrie di 0-forma, gli operatori di simmetria sono definiti su varietà di codimensione 1, per cui tramite una deformazione differenziabile non sempre riesco ad invertire l'ordine senza che le due varietà si intersecano.
    Ad esempio consideriamo l'azione di due operatori di simmetria definiti su due sfere che agiscono su un operatore locale. L'ordine con cui agiscono i due operatori viene rappresentato con due sfere una contenuta nell'altra. Quindi,tramite deformazioni continue, non posso fare in modo di scambiare le due sfere senza che queste si intersechino. Allora gli operatori di simmetria non sono necessariamente invarianti se scambio l'ordine di applicazione.
    Le simmetrie di 0-forma non sono necessariamente abeliane.

  - Invece per le simmetrie di p-forma, a causa della codimensione $>$ 1, gli operatori di simmetria possono essere sempre scambiati di ordine tramite una deformazione continua, come evidenziato in figura, senza intersecarsi in alcun punto.
    Da ciò consegue che le simmetrie di p-forma sono necessariamente abeliane.

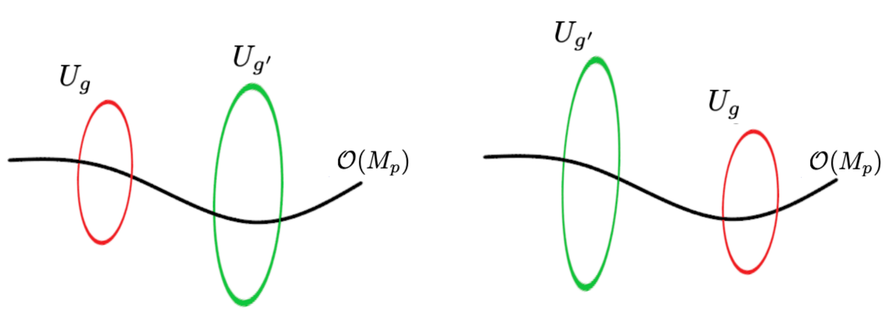


Figura 3.1: Le simmetrie di p-forma sono abeliane

Il fatto che gli operatori di carica sono topologici implica che gli operatori di simmetria sono abeliani. Questo comporta necessariamente che il gruppo di simmetria globale continuo è un gruppo

U(1), poichè il gruppo delle matrici $N \times N$ su campo complesso è abeliano solo per N = 1.
Se il gruppo è discreto non riusciamo a definire un'operatore topologico di carica, quindi il gruppo globale associato sarà un sottogruppo di U(1).

3.3.1.1 Azione delle simmetrie di p-forma sugli operatori carichi

Definiamo $M_{d-p-1} = S^{d-p-1}$ e sia un operatore locale $\mathcal{O}(M_p)$ definito in una sottovarietà M_p con carica q, circondato da S^{d-p-1}. Prendiamo come gruppo di simmetria $G^p := U(1)$, con rappresentativo $g = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'azione è descritta come segue:

$$U_g(M_{d-p-1})\mathcal{O}(M_p) = e^{i\alpha q}\mathcal{O}(M_p). \tag{3.11}$$

Questo perché, dopo aver trapassato l'operatore, otteniamo come nel caso delle simmetrie ordinarie:

$$d(*J^{(p+1)}) = q\delta^d(M_p). \tag{3.12}$$

Successivamente restringiamo la sfera ad un punto senza variazioni se non ci sono ulteriori operatori carichi locali p-dimensionali.

3.3.2 Screening effect

Un ultima proprietà peculiare delle simmetrie globali di p-forma è la rottura dello "screening effect". Consideriamo il caso di un operatore locale p-dimensionale $\mathcal{O}(M_p)$, con carica q, che termina con un operatore carico (p-1) dimensionale $\mathcal{O}(M_{p-1})$),come raffigurato in figura.
Sia il gruppo di simmetria globale G^p = U(1). I due seguenti casi vengono entrambi soddisfatti dall'operatore di simmetria (d-p-1) dimensionale $U_g(M_{d-p-1})$, che è concatenato con $\mathcal{O}(M_p)$, come raffigurato in figura.
Il primo è che $U_g(M_{d-q-1})$ trapassi M_p,

$$U_g(M_{d-p-1})\mathcal{O}(M_p) = e^{i\alpha q}\mathcal{O}(M_p) \tag{3.13}$$

Il secondo caso, assumendo che l'operatore sia topologico, si ottiene deformando in maniera continua M_{d-q-1}, in modo tale che si possa restringere a zero senza trapassare M_p.

$$U_g(\widetilde{M}_{d-p-1})\mathcal{O}(M_p) = \mathcal{O}(M_p) \tag{3.14}$$

dove $\widetilde{M}_{d-p-1}$ è la varietà deformata tale per cui posso contrarla ad un punto senza attraversare l'operatore semi-infinito. Dal momento che queste due relazioni devono valere entrambe, concludiamo che l'operatore di simmetria $U_g(M_{d-q-1})$ non è più topologico e non rappresenta una simmetria.

Conclusione
Il concetto di simmetria p-forma è essenzialmente una generalizzazione del teorema di Noether, infatti è definita dall'esistenza di un operatore di carica Q definito su una varietà a cui associamo, tramite il teorema di Wigner, un operatore topologico unitario dal fatto che il gruppo è continuo.
La globalità della simmetria è dovuta al fatto che l'operatore di carica è definito come l'integrale su tutta la varietà ed è topologico, quindi, da un punto di vista geometrico, la sua azione sull'operatore carico non dipende dal punto in cui viene trapassato.
Inoltre la simmetria globale è U(1), in quanto abbiamo dimostrato dalla conservazione della corrente che gli operatori di simmetria p-forma sono abeliani.

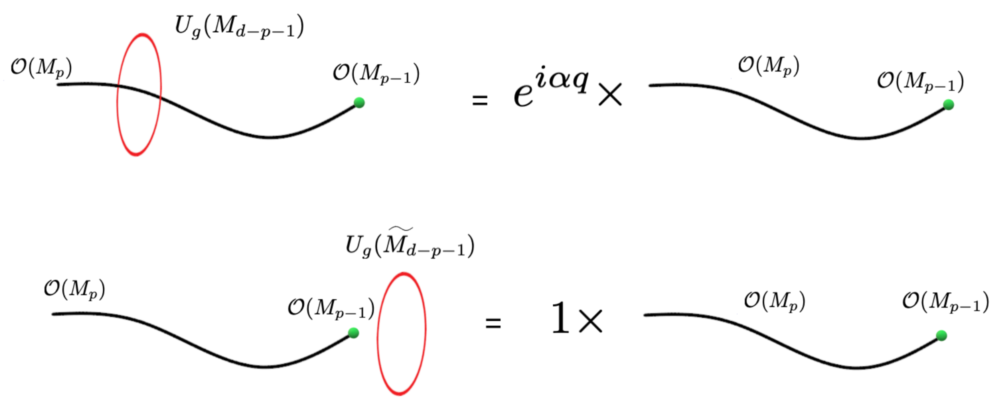


Figura 3.2: Rottura dello screening effect

Capitolo 4

Simmetria p-forma nella teoria di Maxwell generalizzata

In questa sezione applichiamo i concetti delle simmetrie di p-forma alla teoria di Maxwell in assenza di sorgenti, che descrive le leggi fondamentali del campo elettromagnetico.

4.1 Richiami della teoria di Maxwell in d-dimensioni in assenza di sorgenti

Ricapitoliamo in breve i fondamenti della teoria di Maxwell, con il linguaggio della geometria differenziale.
Definiamo il tensore di Maxwell un tensore di tipo (0,2) totalmente antisimmetrico:

$$F_2 = \frac{F_{\mu\nu}}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{4.1}$$

dove in d-dimensioni le componenti del tensore sono i campi elettromagnetici, definendo una direzione privilegiata per il tempo come la convenzionale componente zero

$$\begin{aligned} F^{00} &= 0 \\ F^{i0} &= E^i \\ F^{ij} &= -\epsilon^{ijk} B^k \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le due equazioni fondamentali per il campo elettromagnetico sono, in assenza di sorgenti,

$$d * F_2 = 0 \quad \text{Equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti} \tag{4.3}$$

$$dF_2 = 0 \quad \text{Identità di Bianchi} \tag{4.4}$$

dove l'equazione di Maxwell rappresenta l'equazione del moto del campo elettromagnetico, che viene ricavata nei paragrafi successivi a partire dall'azione del campo in equazione (4.41)

Dal fatto che il potenziale di Maxwell soddisfa all'identità di Bianchi otteniamo che esiste una uno-forma $A_1 = A_\mu dx^\mu$, definita potenziale vettore o campo di gauge, tale che

$$F_2 = dA_1 \tag{4.5}$$

In coordinate locali, sfruttando l'antisimmetria del prodotto esterno e poi rinominando gli indici contratti, si può riscrivere come

$$F_2 = \partial_\nu A_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}{2} dx^\nu \wedge dx^\mu \tag{4.6}$$

Il potenziale vettore è definito a meno di una trasformazione di Gauge, cioè se A è un campo di gauge e Λ è una 0-forma (cioè un campo scalare), allora

$$A_1' = A_1 + d\Lambda \tag{4.7}$$

risolve l'identità di Bianchi e quindi le equazioni del moto del campo elettromagnetico sono invarianti sotto trasformazioni di Gauge. Infatti:

$$F_2 = dA_1' = dA_1 + d^2\Lambda = dA_1 \tag{4.8}$$

dove d^2 è la mappa nulla.
L'azione dell'elettromagnetismo su una varietà (pseudo)Riemanniana M di dimensione d,in assenza di sorgenti,si definisce come

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2g^2} \int_{M_d} F_2 \wedge *F_2 \tag{4.9}$$

dove g è la costante di accoppiamento, la cui dimensione è $[g]^2$ = (4-d). In componenti si ha che, definita Ω_d la forma di volume invariante per una varietà con metrica euclidea, per una teoria di Maxwell definita in d-dimensioni :

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2g^2} \int_{M_d} F_2 \wedge *F_2 = -\frac{1}{4g^2} \int_{M_d} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Omega_d \tag{4.10}$$

Infatti

$$\begin{aligned} F_2 \wedge *F_2 =& \frac{1}{(2!)^2} F_{\mu_1\mu_2} F_{\nu_1\nu_2} \frac{1}{(d-2)!} \epsilon^{\nu_1\nu_2}{}_{\mu_3\ldots\mu_d} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \ldots \wedge dx^{\mu_d} \\ =& \frac{1}{2!} \sum_{\mu\nu} F_{\mu_1\mu_2} F^{\nu_1\nu_2} \frac{1}{(d-2)!2!} \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_d} \epsilon_{\nu_1\nu_2\mu_3\ldots\mu_d} dx^1 \wedge \ldots dx^m \\ =& \frac{1}{2!} F_{\mu_1\mu_2} F^{\mu_1\mu_2} dx^1 \wedge \ldots dx^m \end{aligned} \tag{4.11}$$

dove si è usata la relazione

$$\sum_{\mu\nu} \epsilon_{\nu_1\nu_2\mu_3\ldots\mu_d} \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_d} dx^1 \wedge \ldots dx^m = \epsilon^{\nu_1\nu_2}{}_{\mu_3\ldots\mu_d} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \ldots \wedge dx^{\mu_d} \tag{4.12}$$

4.2 Simmetrie di p-forma nella teoria di Maxwell

Per studiare le simmetrie di p-forma nella teoria di Maxwell ci poniamo nel caso in cui siamo in assenza di sorgenti, per cui analizziamo il sistema fisico di propagazione nel vuoto del campo elettromagnetico.
Analizziamo le simmetrie di p-forma della teoria di Maxwell in tre livelli:

1. simmetrie di 1-forma nella teoria di Maxwell U(1) in 4d
2. simmetrie di 1-forma nella teoria di Maxwell U(1) in d-dimensioni
3. simmetrie di p-forma nella teoria di Maxwell U(1) generalizzata d-dimensionale

4.2.1 simmetrie di 1-forma nella teoria di Maxwell generalizzata 4d

Consideriamo un campo di gauge U(1) per la teoria di Maxwell,rimandiamo in appendice una discussione completa sul gruppo U(1), restringendoci a 4 dimensioni con una varietà differenziabile M con metrica euclidea.
In questo specifico caso utilizziamo le già note equazioni del moto a partire dalla lagrangiana, mentre nei successivi paragrafi deriveremo tutto dall'azione del campo elettromagnetico. La densità di Lagrange del campo elettromagnetico in 4 dimensioni in assenza di sorgenti,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.13}$$

dove F è il tensore di Maxwell che soddisfa l'identità di Bianchi in assenza di sorgenti

$$dF_2 = 0 \Rightarrow \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{4.14}$$

Quindi possiamo esprimere $F_2 = dA_1$, dove $A_1 = A_\mu dx^\mu$ è un campo di gauge U(1), cioè la trasformazione di gauge consiste in

$$A_1 \to A'_1 = A_1 + d\lambda \quad \lambda \epsilon U(1) \tag{4.15}$$

cioè λ è una funzione a valori in $\mathcal{S}^1$.
L'equazione di Maxwell si ricava dall'equazione di Euler-Lagrange, manipolando il termine della lagrangiana

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ &= \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu = \\ &\stackrel{(a)}{=} 2(\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) \end{aligned} \tag{4.16}$$

dove in (a) si sono rinominati gli indici contratti negli ultimi due termini ($\mu \leftrightarrow \nu$). Le equazioni del moto seguono dall'equazione di Euler-Lagrange, notando che la lagrangiana dipende unicamente dalla derivata covariante del tensore di Maxwell,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{g^2} \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{4.17}$$

In forma differenziale l'equazione di Maxwell si scrive come

$$d * F_2 = 0 \tag{4.18}$$

la cui derivazione verrà mostrata nel capitolo successivo tramite il variazionale dell'azione nel linguaggio differenziale.
In 4 dimensioni nella teoria di Maxwell possiamo identificare una simmetria globale uno forma $U(1)_e \times U(1)_m$, chiamate rispettivamente simmetria elettrica 1-forma e simmetria magnetica 1-forma.

4.2.1.1 Simmetria elettrica globale 1-forma

A partire dall'equazione di Maxwell

$$d * F_2 = 0 \tag{4.19}$$

associamo alla corrente (elettrica) 2-forma chiusa $J_e^{(2)}$ la simmetria globale U(1), dove

$$J_e^{(2)} = F_2 \tag{4.20}$$

che è conservata,

$$d * J_e^{(2)} = d * F_2 = 0 \tag{4.21}$$

Quindi in coordinate $\partial_\mu J_e^{\mu\nu} = 0$. L'operatore di carica elettrica conservato è definito su una varietà due dimensionale

$$Q(M_2)_e = \int_{M_2} *J_e^{(2)} \quad \text{tale che} \quad dQ(M_2) = 0 \tag{4.22}$$

Prendiamo una direzione di tempo privilegiata e una varietà $M_2 = S^2$ totalmente spaziale. La carica conservata $Q(S^2)_e$ è il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S^2

$$\begin{aligned} Q(S^2)_e &= \int_{S^2} \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}dx^\mu \wedge dx^\nu \overset{(a)}{=} \int_{S^2} \frac{1}{4}\epsilon_{ij\rho\sigma}F^{\rho\sigma}dx^i \wedge dx^j = \\ &= \int_{S^2} (\frac{1}{2}\epsilon_{ij0k}\epsilon^{ij}F^{0k} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijko}\epsilon^{ij}F^{k0})dx^1 \wedge dx^2 = \\ &\overset{(b)}{=} \int_{S^2} \epsilon_{ij0k}\epsilon^{ij}F^{0k}dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dove in (a) l'integrazione è solo sulla componente spaziale (quindi con i,j = 1,2,3) mentre in (b) sfruttiamo il fatto che il termine $\epsilon_{ij0k}\epsilon^{ij}F^{0k}$ è simmetrico per lo scambio tra la componente 0 e la componente k perché prodotto di due tensori antisimmetrici. Il termine $\epsilon_{ij0k}\epsilon^{ij}$ è simmetrico sotto scambio degli indici i e j, inoltre dalla proprietà del tensore di Maxwell in equazione (4.2) si ottiene

$$Q(S^2)_e = \int_{S^2} \epsilon_{ij0k}\epsilon^{ij}F^{0k}dx^1 \wedge dx^2 = \int_{S^2} (dS^2)_k E^k \tag{4.24}$$

dove abbiamo definito l'elemento di volume (oppure di superficie vista la dimensione della sfera) per S^2 come $(dS^2)_i = \epsilon_{ij0k}\epsilon^{ij}dx^1 \wedge dx^2$. L'espressione finale risulta essere il flusso del campo elettrico attraverso la sfera.
Il gruppo di simmetria globale elettrico 1-forma è definito come $G_e^1 = U(1)_e$, quindi associamo un operatore di simmetria $U_{ge}(M_2)$, con rappresentativo $g = e^{i\alpha}$

$$U_{e,e^{i\alpha}}(M_2) = e^{i\alpha Q_e(M_2)} = e^{i\alpha \int_{M_2} *J_e^{(2)}} \tag{4.25}$$

dove $\alpha \sim \alpha + 2\pi$ è una fase. Il fatto che associamo alla corrente una simmetria globale U(1) si traduce nel fatto che il parametro α è continuo. I corrispondenti operatori con carica elettrica q sotto questa simmetria sono le "Wilson line" W(q,γ)

$$W(q,\gamma) = e^{iq\int_\gamma A_1}, \quad q \in \mathbb{Z} \tag{4.26}$$

dove γ è un loop o una linea infinita. Fisicamente le Wilson line possono essere viste come una linea di universo di una particella super massiva stabile con carica elettrica.
Sono invarianti sotto trasformazioni di gauge, derivante dal fatto che

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\lambda \in \mathbb{Z} \tag{4.27}$$

allora

$$W(q,\gamma)' = e^{iq\int_\gamma A_1'} = e^{iq(\int_\gamma A_1 + \int_\gamma d\lambda)} = e^{iq\int_\gamma A_1} = W(q,\gamma) \tag{4.28}$$

L'azione dell'operatore di simmetria sul operatore di carica segue quanto visto in equazione (3.11), presa una sfera $M_2 := S^2$ che è concatenata con la linea,o loop, γ.

$$U_{e,e^{i\alpha}}(S^2)W(q,\gamma) = e^{i\alpha q}W(q,\gamma) \tag{4.29}$$

In sintesi l'operatore di simmetria elettrica globale 1-forma agisce sulle variabili dinamiche del campo di gauge effettuando una traslazione

$$A_1 \to A_1 + \lambda_1 \tag{4.30}$$

dove λ_1 è una uno forma tale che $\int_\gamma \lambda_1 = \alpha$, lo si vede dal conto esplicito

$$U_{e,e^{i\alpha}}(S^2)W(q,\gamma) = e^{iq(\int_\gamma A_1 + \int_\gamma \lambda_1)} = e^{iq(\int_\gamma \lambda_1)}W(q,\gamma) = e^{i\alpha q}W(q,\gamma) \tag{4.31}$$

4.2.1.2 Simmetria magnetica globale 1-forma

A partire dall' identità di Bianchi

$$dF_2 = 0 \tag{4.32}$$

associamo alla corrente (magnetica) 2-forma chiusa $J_m^{(2)}$ la simmetria globale U(1), dove

$$J_m^{(2)} = *F_2 \tag{4.33}$$

che è conservata, usando una metrica euclidea

$$d * {J_m}^{(2)} = d * *F_2 = (-1)^{2(4-2)}dF_2 = dF_2 = 0 \tag{4.34}$$

In coordinate la conservazione della corrente si esprime come $\partial_\mu J_m^{\mu\nu} = 0$.
L'operatore di carica magnetica conservato è definito su una varietà 2-dimensionale

$$Q(M_2)_m = \int_{M_2} *J_m^{(2)} = \int_{M_2} F_2 \quad \text{tale che} \quad dQ(M_2)_m = 0 \tag{4.35}$$

Prendiamo una direzione di tempo privilegiata e una varietà $M_2 = S^2$. La carica conservata $Q(S^2)_m$ è il flusso del campo magnetico attraverso la superficie S^2, integro lungo la parte spaziale

$$\begin{aligned} Q_m(S^2) &= \frac{1}{4}\int_{S^2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{4}\int_{S^2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = \\ &= \frac{1}{2}\int_{S^2} F_{ij}\epsilon^{ij} dx^1 \wedge dx^2 = \frac{1}{2}\int_{S^2} \epsilon_{ijk} B^k \epsilon^{ij} dx^1 \wedge dx^2 = \\ &= \int_{S^2} (dS^2)_k B^k \end{aligned} \tag{4.36}$$

I passaggi sono analoghi a quelli della carica elettrica.
Il gruppo di simmetria globale 1-forma è definito come $G^1_m = U(1)_m$, quindi associamo un operatore di simmetria $U_{gm}(M_2)$, con rappresentativo $g = e^{i\alpha}$

$$U_{m,e^{i\alpha}}(M_2) = e^{i\alpha Q_m(M_2)} = e^{i\alpha \int_{M_2} *J^{(2)}_m} = e^{i\alpha \int_{M_2} F_2} \tag{4.37}$$

dove $\alpha \in [0, 2\pi)$ è una fase e $\int_{M_2} *J^{(2)}_m$ è il flusso del campo magnetico attraverso M_2. Dalla dualità tra campo elettrico e magnetico, ci aspettiamo una "Wilson line " magnetica parametrizzata con una carica $q \in \mathbb{Z}$. Da definizione, gli operatori carichi sotto questa simmetria sono le "Hooft lines", operatori di linea nel caso 4-dimensionale. Le Hooft lines sono definite come

$$T[q, \Gamma_1] = e^{iq \int_{\Gamma_1} \widetilde{A_1}}, \quad q \in \mathbb{Z} \tag{4.38}$$

dove $\widetilde{A}$ è un campo di gauge definito a partire dal duale di Hodge del tensore di Maxwell che soddisfa la seguente relazione

$$*F_2 = d\widetilde{A}_1 \tag{4.39}$$

In sintesi, quello che è stato effettuato è stato un cambio di campo di gauge, per cui abbiamo definito un nuovo campo di gauge esprimendo l'azione in funzione di $\widetilde{A}_1$ invece che di A_1. In questo modo essenzialmente l'equazione di Maxwell e l'identità di Bianchi si scambiano i ruoli: il fatto che $d * F_2$ sia nullo mi definisce l'esistenza del campo di gauge per $*F_2$ e l'identità di Bianchi la nuova equazione del moto ricavata dal principio di minima azione lungo il campo $\widetilde{A}_1$. Per approfondimento riportiamo all'articolo presente nella bibliografia [5].
Fisicamente le Hooft line possono essere viste come una linea di universo di una particella super massiva stabile con carica magnetica, nel caso 4-dimensionale.

4.2.2 simmetrie di 1-forma nella teoria di Maxwell d-dimensionale

Generalizziamo in d-dimensioni, con d arbitrario, ricavando le equazioni del moto a partire dall'azione, considerando sempre la teoria di Maxwell non generalizzata, quindi il tensore di Maxwell è una 2-forma F_2. Continua a valere l'identità di bianchi in assenza di sorgenti, quindi posso esprimere

$$F_2 = dA_1 \tag{4.40}$$

con un campo di gauge U(1).
Analizziamo la variazione lungo la uno forma A_1 dell'azione con la solita condizione che $\delta A_1 = 0$

ai bordi della varietà, da cui ricaviamo le equazioni di Maxwell. Svolgiamo il conto nel dettaglio, in modo che i passaggi banali verranno dati per scontato nei prossimi paragrafi

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{S} = &-\frac{1}{2g^2}\left(\int_{M_d} \delta(F_2) \wedge *F_2 + \int_{M_d} F_2 \wedge \delta(*F_2)\right) \\
&\overset{(a)}{=} -\frac{1}{2g^2}\left(\int_{M_d} \delta(F_2) \wedge *F_2 \int_{M_d} F_2 \wedge *\delta(F_2)\right) \\
&= -\frac{1}{g^2}\int_{M_d} \delta(dA_1) \wedge *F_2 \\
&= -\frac{1}{g^2}\int_{M_d} \delta(dA_1) \wedge *F_2 \\
&\overset{(b)}{=} -\frac{1}{g^2}\int_{M_d} d(\delta(A_1)) \wedge *F_2 \\
&\overset{(c)}{=} -\frac{1}{g^2}\left(\int_{M_d} d(\delta(A_1) \wedge *F_2) + \delta(A_1) \wedge d(*F_2)\right) \\
&\overset{(d)}{=} -\frac{1}{g^2}\int_{M_d} \delta(A_1) \wedge d(*F_2)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

dove in (a), dopo aver notato che il variazionale soddisfa alla regola di Liebniz, sono stati svolti i seguenti passaggi

$$
F_2 \wedge \delta(*F_2) \overset{(i)}{=} F_2 \wedge *\delta(F_2) \overset{(ii)}{=} \delta(F_2) \wedge *F_2 S \tag{4.42}
$$

espandiamo i conti, che poi daremo per verificati nei paragrafi successivi

(i) il variazionale non si applica sulle coordinate scelte

$$
\delta * F_2 = \delta(\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\delta(F^{\rho\sigma})dx^\mu \wedge dx^\nu = *\delta F_2 \tag{4.43}
$$

(ii) ricapitoliamo i risultati ottenuti in (4.12), generalizzando il conto prendendo due r-forme F_r e T_r su un varietà d-dimensionale,

$$
\begin{aligned}
F_r \wedge *T_r &= \frac{1}{(r!)^2}F_{\mu_1\ldots\mu_r}T_{\nu_1\ldots\nu_r}\frac{1}{(d-r)!}\epsilon^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\mu_{r+1}\ldots\mu_d}dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{\mu_{r+1}} \wedge \ldots dx^{\mu_d} \\
&= \frac{1}{r!}F_{\mu_1\ldots\mu_r}T^{\mu_1\ldots\mu_r}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Questa espressione mostra che il prodotto esterno è simmetrico

$$
F_r \wedge *T_r = T_r \wedge *F_r \tag{4.45}
$$

Quindi nel nostro caso specifico, visto che il variazione non influisce sul rango del tensore antisimmetrico su cui si applica

$$
F_2 \wedge *\delta F_2 = \delta F_2 \wedge *F_2 \tag{4.46}
$$

Invece in (b) $\delta(dA_1) = d(\delta(A_1))$ perché stiamo considerando simmetrie interne, in (c) viene usata la relazione seguente, visto che A è una 1-forma

$$d(\delta A_1) \wedge *F_2 = d(\delta A_1 \wedge *F_2) + (-1)^2 \delta(A_1) \wedge d(*F_2) \tag{4.47}$$

ed in (d) il termine con il differenziale totale è nullo, usando il teorema di Stokes e l'usale condizione al contorno

$$\int_{M_d} d(\delta(A_1) \wedge *F_2) = \int_{\partial M_d} \delta(A_1) \wedge *F_2 = 0 \tag{4.48}$$

Si ricava allora l'equazione del moto

$$\delta \mathcal{S} = 0 \Rightarrow d * F_2 = 0 \tag{4.49}$$

Possiamo quindi definire due correnti conservate, chiamate la corrente magnetica ed elettrica, associate ad una simmetria globale uno-forma elettrica ed una (d-3)-forma magnetica, che evidenziamo nella seguente notazione, $U(1)^1_e \times U(1)^{(d-3)}_m$.

4.2.2.1 Simmetria elettrica globale 1-forma in d-dimensioni

Definiamo una corrente elettrica 2-forma chiusa J^2_e, associata ad una simmetria globale 1-forma U(1), analoga al caso 4 dimensionale

$$J^{(2)}_e = F_2 \qquad \text{tale che} \qquad d * F_2 \overset{E.O.M}{=} 0 \tag{4.50}$$

L'operatore di carica elettrico è definito su una varietà di dimensione d-2 :

$$Q_e(M_{d-2}) = \int_{M_{d-2}} *J^{(2)}_e = \int_{M_{d-2}} *F_2 \tag{4.51}$$

da cui definiamo l'operatore di simmetria 1-forma elettrico

$$U_{e,e^{i\alpha}}(M_{d-2}) = e^{i\alpha Q_e(M_{d-2})} = \exp\left(i\alpha \int_{M_{d-2}} *F_2 \right) \tag{4.52}$$

L'operatore di simmetria agisce sugli operatori supportati su una varietà 1-dimensionale $V(\Gamma_1)$ con carica q sotto questa simmetria globale U(1). Gli operatori locali di carica sono le Wilson line W(q, Γ_1) supportati su una varietà 1-dimensionale

$$W(q, \Gamma_1) = e^{iq \int_{\Gamma_1} A}, \qquad q \in \mathbb{Z} \tag{4.53}$$

In maniera analoga al caso 4d l'operatore di simmetria elettrico (definito su una varietà M_{d-2} concatenata con la linea Γ_1), agisce sulle variabili dinamiche del campo di gauge quando trapassa la Wilson line traslando

$$A_1 \to A_1 + \lambda_1 \tag{4.54}$$

dove λ_1 è una uno forma tale che $\oint \lambda_1 \in U(1)$. Quindi

$$U_{e,e^{i\alpha}}(M_{d-2}) W(q, \Gamma_1) = e^{i\alpha q} W(q, \Gamma_1) \tag{4.55}$$

4.2.2.2 Simmetria magnetica globale (d-3)-forma in d-dimensioni

A differenza del caso 4-d, a causa dell'hodge operator,la corrente magnetica è una (d-2) forma chiusa associata ad un gruppo di simmetria (d-3)-forma globale $G^{d-3} = U(1)_m$,

$$J_m^{(d-2)} = *F_2 = \widetilde{F}_{d-2} \qquad \text{tale che} \qquad d * J_m^{(d-2)} = d * *F_2 = dF_2 \overset{BianchiId.}{=} 0 \tag{4.56}$$

L'operatore di carica magnetica è definito su una varietà 2-dimensionale

$$Q_m(M_2) = \int_{M_2} *J_m^{(d-2)} = \int_{M_2} * * F_2 = \int_{M_2} F_2 \tag{4.57}$$

con l'usuale metrica euclidea.

Definiamo l'operatore di simmetria (d-3)-forma magnetico

$$U_{m,e^{i\alpha}}(M_2) = e^{i\alpha Q_m(M_2)} = \exp\left(i\alpha \int_{M_2} F_2\right) \tag{4.58}$$

L'operatore di simmetria magnetico agisce sugli operatori supportati su una varietà (d-3)-dimensionale $V(\Gamma_{d-3})$ con carica q sotto questa simmetria globale (d-3) forma U(1). Gli operatori carichi sotto questa simmetria sono chiamati operatori 't Hooft lines però, a differenza del caso 4-dimensionale, è un operatore supportato su una varietà (d-3) dimensionale espresso come

$$T(\Gamma_{d-3}, q) = e^{iq \int_{\Gamma_{d-3}} \widetilde{A}_1} \tag{4.59}$$

dove abbiamo definito $\widetilde{A}$ una uno forma tale che

$$*F_2 = d\widetilde{A}_1 \tag{4.60}$$

L'azione dell'operatore di simmetria non è tradotto in un semplice shift del campo di gauge, però l'azione sugli operatori con carica magnetica sotto questa simmetria è definito come nel caso elettrico, prese due varietà concatenate M_2 e Γ_{d-3}, quando trapassano

$$U_{m,e^{i\alpha}}(M_2) T(\Gamma_{d-3}, q) = e^{i\alpha q} T(\Gamma_{d-3}, q) \tag{4.61}$$

4.2.3 Simmetrie di p-forma nella teoria di Maxwell generalizzata d-dimensionale

Utilizziamo una teoria di Maxwell generalizzata d-dimensionale, e definiamo un tensore di Maxwell come una (p+1)-forma differenziale con $0 \leq p < (p+1) < d$.
Quindi il tensore di Maxwell F_{p+1} si esprime in coordinate come

$$F_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots dx^{\mu_{p+1}} \tag{4.62}$$

Possiamo definire il campo elettrico e magnetico generalizzati, che saranno rispettivamente tensori di rango (0,p) e (0,p+1). Prendendo una direzione di tempo privilegiata

$$\begin{aligned} F^{i_1 \dots i_p 0} &= E^{i_1 \dots i_p} \\ F^{i_1 \dots i_p i_{p+1}} &= B^{i_1 \dots i_p i_{p+1}} \end{aligned} \tag{4.63}$$

Alla simmetria globale p-forma G^p = U(1) è associata una corrente conservata (p+1) forma, che si ricava dalle equazioni del moto. Continua a valere l'identità di Bianchi in assenza di sorgenti

$$dF_{p+1} = 0 \Rightarrow \partial_\nu F_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = 0 \tag{4.64}$$

posso definire quindi una p-forma differenziale A_p, chiamato in maniera analoga campo di gauge, tale che

$$F_{p+1} = dA_p \tag{4.65}$$

Definita a meno di una trasformazione di gauge, nel nostro caso definiamo un campo di gauge U(1). Quindi se A_p soddisfa alla relazione $F_{p+1} = dA_p$ allora

$$A'_p = A_p + d\Lambda_{p-1} \tag{4.66}$$

soddisfa all'identità di Bianchi $F_{p+1} = dA'_p$, dove $\frac{\oint_{\Sigma_{p-1}} \Lambda_{p-1}}{2\pi} \in \mathbb{Z}$
Sia M una varietà differenziabile d-dimensionale, definisco l'azione del campo elettromagnetico libero, con la usuale costante di accoppiamento g, che ha dimensione $[g]^2$ = (-d +2(p+1))

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2g^2} \int_{M_d} F_{p+1} \wedge *F_{p+1} \tag{4.67}$$

L'equazione del moto deriva dal principio di minima azione, prendendo come variabile il campo di gauge A_p

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S} &= -\frac{1}{2g^2}\left(\int_{M_d} \delta(F_{p+1}) \wedge *F_{p+1} + \int_{M_d} F_{p+1} \wedge \delta(*F_{p+1}) \right) \\
&\overset{(a)}{=} -\frac{1}{g^2} \int_{M_d} \delta(dA_p) \wedge *F_{p+1} \\
&= -\frac{1}{g^2} \int_{M_d} d\delta(A_p) \wedge *F_{p+1} \\
&\overset{(b)}{=} -\frac{1}{g^2}\left(\int_{M_d} d(\delta(A_p) \wedge *F_{p+1}) + (-1)^{p+1} \int_{M_d} \delta(A_p) \wedge d(*F_{p+1}) \right) \\
&\overset{(c)}{=} \frac{(-1)^p}{g^2} \int_M \delta(A_p) \wedge d(*F_{p+1})
\end{aligned} \tag{4.68}$$

dove in (a) viene utilizzata l'equazione (4.42),in (b)

$$d(\delta A_p \wedge *F_{p+1}) = d(\delta A_p) \wedge *F_{p+1} + (-1)^p \delta(A_p) \wedge d(*F_{p+1}) \tag{4.69}$$

ed in (c) il termine con il differenziale totale è nullo, usando l'usale condizione al contorno. Si ricava allora l'equazione del moto generalizzata

$$\delta\mathcal{S} = 0 \Rightarrow d(*F_{p+1}) = 0 \tag{4.70}$$

Possiamo quindi definire due correnti chiuse, la corrente magnetica ed elettrica, associate ad una simmetria globale $U(1)^p_e \times U(1)^{d-p}_m$,

$$J_e^{(p+1)} = F_{p+1}, \qquad J_m^{(d-p-1)} = *F_{p+1} \tag{4.71}$$

tale che

$$d * J_e^{(p+1)} \overset{E.O.M}{=} 0, \qquad d * J_m^{(d-p-1)} \overset{Id.\ di\ Bianchi}{=} 0 \tag{4.72}$$

La corrente elettrica conservata definisce una simmetria elettrica globale p-forma $U(1)_e$ tramite l'operatore di carica elettrico

$$Q_e(M_{d-p-1}) = \int_{M_{d-p-1}} *J_e^{(p+1)}, \qquad U_{e,e^{i\alpha}}(M_{d-p-1}) = e^{i\alpha Q_e(M_{d-p-1})} = \exp\left(i\alpha \int_{M_{d-p-1}} *F_{p+1}\right) \tag{4.73}$$

L'operatore carico sotto questa simmetria è l'analogo dell'operatore di Wilson $W(q,\gamma)$, definito su una varietà p-dimensionale Γ_p

$$W(q,\Gamma_p) = e^{iq\int_{\Gamma_p} A_p}, \qquad q \in \mathbb{Z} \tag{4.74}$$

L'azione dell'operatore di simmetria è quella di traslare il campo di gauge, per cui

$$U_{e,e^{i\alpha}}(M_{d-p-1})W(q,\Gamma_p) = e^{i\alpha q}W(q,\Gamma_p) \tag{4.75}$$

La corrente magnetica conservata definisce una simmetria magnetica globale (d-p-2)-forma $U(1)_m$

$$Q_m(M_{p+1}) = \int_{M_{p+1}} *J_m^{(d-p-1)}, \qquad U_{m,e^{i\alpha}}(M_{p+1}) = e^{i\alpha Q_m(M_{p+1})} = \exp\left(i\alpha \int_{M_{p+1}} F_{p+1}\right) \tag{4.76}$$

L'operatore carico sotto la simmetria (d-p-2)-forma magnetica è analogamente il duale dell'operatore definito precedentemente, però l'azione dell'operatore di simmetria magnetica è più complicato rispetto all'analogo elettrico. Gli operatori con carica q sotto la simmetria globale (d-p-2)-forma magnetica sono gli operatori 't Hooft, che possiamo definire come

$$T(q,\Gamma_{d-p-2}) = e^{i\alpha\int_{\Gamma_{d-p-2}} \widetilde{A}_{d-p-2}} \tag{4.77}$$

dove $\widetilde{A}_{d-p-2}$ è una (d-p-2)-forma differenziale tale che

$$*F_{p+1} = d\widetilde{A}_{d-p-2} \tag{4.78}$$

Capitolo 5

Simmetrie discrete globali p-forma della teoria d-dimensionale BF

Le simmetrie discrete globali differiscono dalle simmetrie continue in quanto non è possibile definire una corrente continua associata alla simmetria discreta, quindi non è ben definito un operatore di carica.
Però è possibile definire un operatore di simmetria che implementa la trasformazione, vediamo un esempio di particolare interesse nella teoria BF, dopo aver riassunto le proprietà delle simmetrie globali discrete

5.1 Simmetrie discrete globali p-forma

Le simmetrie globali discrete [2] presentano una rilevante differenza rispetto alle simmetrie globali continue, la ragione è che generalmente non hanno una corrente conservata.
Come nel caso continuo,ad una teoria con una simmetria discreta globale di p-forma è associato un operatore di simmetria (d-p-1) dimensionale $U_g(M_{d-p-1})$ che implementa la simmetria discreta su operatori p-dimensionali con carica q sotto la simmetria, $W_q(\Gamma_p)$.
Analogamente l'operatore di simmetria obbedisce alla legge di composizione del gruppo, preso g_1, g_2 elementi del gruppo di simmetria discreta,

$$U_{g_1}(M_{d-p-1})U_{g_2}(M_{d-p-1}) = U_{g_1 g_2}(M_{d-p-1}) \tag{5.1}$$

dove $g_1 g_2$ è ancora all' interno del gruppo. Nella fisica, le più comuni teorie di gauge discrete sono le $\mathbb{Z}_N$ teorie di gauge, con N un numero intero diverso da 0,1.

5.2 Teoria di gauge BF

Le fasi topologiche della materia sono stati che si differenziano dalla fase solida, liquida e gassosa e sono caratterizzate dell'esistenza di invarianti topologici. Queste sono descritte universalmente da teorie di campo topologiche [3]. La teoria BF è una teoria topologica, cioè una teoria che calcola invarianti topologici e risulta essere efficace nella descrizione degli isolanti in 3 dimensioni.

Una teoria di gauge BF è una teoria descritta da un campo di gauge U(1) p-forma A_p e un campo di gauge U(1) (d-p-1)-forma B_{d-p-1}, definita dalla seguente azione,

$$\mathcal{S} = -\frac{iN}{2\pi}\int_{M_d} B_{d-p-1} \wedge dA_p \qquad N \in \mathbb{N} \tag{5.2}$$

I due campi di gauge sono indipendenti, per cui ricaviamo le equazioni del moto dal principio di minima azione. Ricaviamo le equazioni della dinamica del campo A_p

$$\begin{aligned}
\delta_{A_p}\mathcal{S} &= -\frac{iN}{2\pi}\int_{M_d} B_{d-p-1} \wedge \delta(dA_p) = \\
&= -\frac{iN}{2\pi}\int_{M_d} B_{d-p-1} \wedge d\delta(A_p) = \\
&= \frac{iN}{2\pi}(-1)^{d-p}\left(\int_{M_d} d(B_{d-p-1} \wedge \delta(A_p)) - d(B_{d-p-1}) \wedge \delta(A_p)\right) = \\
&= \frac{iN}{2\pi}(-1)^{d-p+1}\int_{M_d} d(B_{d-p-1}) \wedge \delta(A_p)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Invece per il variazionale lungo il campo B_{d-p-1} si ottiene

$$\delta_{B_{d-p-1}}\mathcal{S} = -\frac{iN}{2\pi}\int_{M_d} \delta(B_{d-p-1}) \wedge dA_p \tag{5.4}$$

Quindi le equazioni del moto dei due campi

$$\begin{aligned}
\delta_{A_p}\mathcal{S} = 0 &\Rightarrow \frac{N}{2\pi} dB_{d-p-1} = 0 \\
\delta_{B_{d-p-1}}\mathcal{S} = 0 &\Rightarrow \frac{N}{2\pi} dA_p = 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

L'azione è invariante sotto le seguenti trasformazioni di gauge, si evince immediatamente dalle equazioni del moto,

$$\begin{aligned}
B_{d-p-1} \to B'_{d-p-1} &= B_{d-p-1} + d\lambda_{d-p-2} \\
A_p \to A'_p &= A_p + d\lambda_{p-1}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

dove, siccome sono entrambi campi di gauge U(1), le due forme differenziali della trasformazione soddisfano alla richiesta

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_p} \frac{d\lambda_{p-1}}{2\pi} \in \mathbb{Z} \\
&\int_{\Sigma_{d-p-1}} \frac{d\lambda_{d-p-2}}{2\pi} \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

su ogni varietà differenziabile chiusa Σ_k.

5.3 Simmetrie globali discrete della teoria p-forma BF

L'azione BF è invariante sotto una simmetria globale $\mathbb{Z}_N^p \times \mathbb{Z}_N^{d-p-1}$ di shift, cioè che mappa

$$\begin{aligned} Z_N^p: \qquad & A_p \rightarrow A'_p = A_p + \frac{\epsilon_p}{N} \\ Z_N^{d-p-1}: \qquad & B_{d-p-1} \rightarrow B'_{d-p-1} = B_{d-p-1} + \frac{\epsilon_{d-p-1}}{N} \end{aligned} \tag{5.8}$$

dove

$$\int_{\Sigma_p} d\epsilon_{p-1} \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \int_{\Sigma_{d-p-1}} d\epsilon_{d-p-2} \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{5.9}$$

Richiamiamo le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \frac{N}{2\pi} dB_{d-p-1} = 0 \\ \frac{N}{2\pi} dA_p = 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Chiaramente sotto la simmetria $\mathbb{Z}_N^p \times \mathbb{Z}_N^{d-p-1}$ le equazioni del moto sono invarianti, sfruttando sempre il fatto che il differenziale esterno al quadrato è la mappa nulla.
Come già anticipato, non è possibile definire una corrente conservata continua associata ad una trasformazione di simmetria discreta, ma si può definire in maniera consistente un operatore di simmetria. Quindi definiamo le due seguenti "correnti", in analogia al caso continuo

$$\begin{aligned} *j^{(d-p)} &= \frac{NA_p}{2\pi} \\ *J^{(p+1)} &= \frac{NB_{d-p-1}}{2\pi} \end{aligned} \tag{5.11}$$

il cui differenziale esterno è nullo, conseguenza diretta delle equazioni del moto (5.5). Notiamo come le "correnti" non sono invarianti sotto trasformazioni di gauge, in quanto sono esattamente campi di gauge, invece riusciamo a definire un operatore di simmetria che è invariante sotto questa trasformazioni. Quindi al gruppo di simmetria (d-p-1)-forma $G^{(d-p-1)} = \mathbb{Z}_N$ associo un operatore di simmetria $U_g(M_{d-p-1})$ con rappresentativo $g = e^{\frac{2\pi ik}{N}}$, con k = 0,1,...N-1,

$$U_{\frac{2\pi ik}{N}}(M_{d-p-1}) = e^{\frac{2\pi ki}{N}\int_{M_{d-p-1}} \frac{NB_{d-p-1}}{2\pi}} = e^{ik\int_{M_{d-p-1}} B_{d-p-1}} \tag{5.12}$$

In questo modo è invariante sotto trasformazioni di gauge se il parametro di trasformazione è $\frac{k}{N}$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\pi ki}{N}\int_{M_{d-p-1}} \frac{NB'_{d-p-1}}{2\pi}} &= e^{\frac{2\pi ki}{N}\left(\int_{M_{d-p-1}} \frac{NB_{d-p-1}}{2\pi} + \int_{M_{d-p-1}} \frac{Nd\lambda_{d-p-2}}{2\pi}\right)} \\ &= e^{ik\int_{M_{d-p-1}} B_{d-p-1} + ik\int_{M_{d-p-1}} d\lambda_{d-p-2}} \\ &= e^{ik\int_{M_{d-p-1}} B_{d-p-1}} \end{aligned} \tag{5.13}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'equazione (5.7). Quindi abbiamo mostrato che nonostante la "corrente" non sia invariante sotto trasformazioni di gauge, l'operatore di simmetria,associato con un parametro $\frac{k}{N}$, è invariante e ben definito.

Analogamente al gruppo di simmetria p-forma $G^p = Z_N$ associo un operatore di simmetria $U'_g(M_p)$ con $g = e^{2\pi i k'}$, con k'= 0,1,..,N-1,

$$U'_{\frac{2\pi i k'}{N}}(M_p) = e^{\frac{2\pi k' i}{N}\int_{M_p}\frac{NA_p}{2\pi}} = e^{ik'\int_{M_p}A_p} \tag{5.14}$$

Anche in questo caso l'operatore di simmetria è invariante sotto trasformazioni di gauge.
L'operatore carico sotto la simmetria $\mathbb{Z}_N^p$, con carica n, sono i Wilson operator definiti su varietà p-dimensionale

$$W_n(\Gamma_p) = e^{in\int_{\Gamma_p}A_p} \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{5.15}$$

Si nota come l'operatore di simmetria che shifta A_p è l'operatore di Wilson costruito su B_{d-p-1}. Verifichiamo esplicitamente,con un conto analogo a quanto visto in (2.34), l'azione di $U_{\frac{2\pi ik}{N}}(M_{d-p-1})$ su $W_n(\Gamma_p)$ dove le due varietà sono concatenate e consideriamo $U_{\frac{2\pi ik}{N}}(\widetilde{M}_{d-p-1})$ la varietà deformata tale per cui viene trapassato l'operatore carico

$$\begin{aligned} U_{\frac{2\pi ik}{N}}(M_{d-p-1})W_n(\Gamma_p)U_{\frac{-i2\pi k}{N}}(\widetilde{M}_{d-p-1}) &= e^{ik\int_{M_{d-p-1}}B_{d-p-1}-\int_{\widetilde{M}_{d-p-1}}B_{d-p-1}}W_n(\Gamma_p) = \\ &= e^{ik\int_{X_{d-p-1}}dB_{d-p-1}}W_n(\Gamma_p) = \\ &\overset{(a)}{=} e^{i(2\pi\frac{nk}{N})}W_n(\Gamma_p) \end{aligned} \tag{5.16}$$

dove X_{d-p-1} è la varietà con bordo M_{d-p-1} e $\widetilde{M}_{d-p-1}$, in (a) viene usato il fatto che inserendo l'operatore di Wilson va a modificare, quando le varietà trapassano, le equazioni del moto per A_p, cioè

$$dB_{d-p-1} = 2\pi\frac{n}{N}\delta^{(d-p)}(\mathcal{P} \in \Gamma_p) \tag{5.17}$$

Analogamente per quanto riguarda la simmetria discreta Z_N^{d-p-1}, gli operatori con carica m sotto questa simmetria sono definiti su varietà (d-p-1)-dimensionali

$$W_m(\Gamma_{d-p-1}) = e^{im\int_{\Gamma_{d-p-1}}B_{d-p-1}} \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{5.18}$$

Analogamente a quanto fatto precedentemente, l'azione dell'operatore di simmetria discreta su W_m comporta l'aggiunta di una fase

$$U_{\frac{i2\pi k'}{N}}(M_p)W_m(\Gamma_{d-p-1}) = e^{\frac{2\pi imk'}{N}}W_m(\Gamma_{d-p-1}) \tag{5.19}$$

Capitolo 6

Conclusioni

Concludiamo riassumendo i concetti chiave,

- *Una simmetria globale di p-forma (continua o discreta) è definita dall'esistenza di un operatore topologico $U_g(M_{d-p-1})$, inoltre le simmetrie di p-forma sono sempre abeliane.*
- *La teoria di Maxwell generalizzata in assenza di sorgenti ha due simmetrie globali U(1) di p-forma, una magnetica e una elettrica, i cui operatori carichi sono le Wilson line e gli operatori t-Hooft*
- *le simmetrie globali discrete ricoprono un ruolo rilevante nella fisica, ad esempio se una simmetria U(1) viene rotta da un termine aggiuntivo dell'azione. Le simmetrie discrete nella teoria topologica BF che abbiamo studiato ricoprono un ruolo importante nella materia condensata, ad esempio nella descrizione dei materiali isolanti a basse energie.*

A partire dai risultati ottenuti si può andare a introdurre un concetto di fondamentale importanza nel campo della QFT, le anomalie, cioè le ostruzioni al "gauging" delle simmetrie globali.
In generale le simmetrie globali di p-forma risiedono in molte teorie di gauge e sono un ingrediente fondamentale per una visione moderna di teorie effettive di campo.
Invece lo studio sulle simmetrie di p-forma nella teoria di Maxwell generalizzata è uno strumento utile per generalizzare concetti che vengono utilizzati nelle teorie definite su dimensioni superiori a 4, come per esempio la teoria di superstringa, definita su 11 dimensioni.

Capitolo 7

Appendice

Teoria di Hodge

Sia M una varietà liscia m-dimensionale su cui è definita una metrica g. Possiamo definire una mappa lineare $*$ che mappa le r-forme sulle (m-r)-forme

$$* : \Omega_r \to \Omega_{m-r} \tag{7.1}$$

dove l'azione sulla base naturale è definita nel seguente modo

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_m}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} \tag{7.2}$$

dove $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_m \nu_{r+1} \ldots \nu m}$ è il tensore totalmente antisimmetrico tale che

$$\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_m} = \begin{cases} +1 \; se \; (\mu_1 \ldots \mu_m) \; è \; una \; permutazione \; pari \; di \; (1 \ldots m) \\ -1 \; se \; (\mu_1 \ldots \mu_m) \; è \; una \; permutazione \; dispari \; di \; (1 \ldots m) \\ 0 \; altrimenti \end{cases} \tag{7.3}$$

Quindi l'azione del hodge operator su una r-forma è definita da

$$*\omega_r = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!r!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_{r+1} \ldots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m} \tag{7.4}$$

Alcune proprietà:

- $** \omega_r = (-1)^{r(m-r)} \omega^{(p)}$ se la metrica è euclidea
- $** \omega_r = (-1)^{1+r(m-r)} \omega^{(p)}$ se la metrica è lorentziana
- Siano ω, η due r-forme, allora

$$\begin{aligned} \omega_r \wedge *\eta_r = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} \eta^{\mu_1 \ldots \mu_r} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \\ \omega_r \wedge *\eta_r = *\eta_r \wedge \omega_r \end{aligned} \tag{7.5}$$

Gruppo U(1) e teoria di gauge U(1)

U(1) è il gruppo delle trasformazioni unitarie uno dimensionali ed è compatto dal fatto che è isomorfo a $\mathbb{S}^1$. La sua rappresentazione irriducibile sono tutte 1-dimensionali e agiscono come moltiplicazione di una fase $e^{i\alpha}$
Un campo di gauge U(1) è una campo che ha come trasformazione di gauge

$$A_1 \to A_1' = A_1 + \lambda \tag{7.6}$$

dove λ è un parametro di gauge che prende valori in $\mathbb{S}^1$, quindi è soggetto all'identificazione $\lambda \sim \lambda + 2\pi$. Inoltre, se consideriamo l'integrale lungo una curva chiusa di $d\lambda$ otteniamo un valori diverso da zero

$$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma d\lambda \qquad \in \mathbb{Z} \tag{7.7}$$

Questo risultato può essere intuito dal fatto che se λ viene integrato lungo un percorso chiuso, esso percorre $\mathbb{S}^1$ un numero intero di volte.

Gruppo $\mathbb{Z}_N$

Il gruppo $\mathbb{Z}_N$, chiamato anche il gruppo ciclico di ordine N, un elemento del gruppo viene rappresentato semplicemente come $g_k = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ con la legge di composizione $g_k \circ g_l = e^{\frac{2\pi i(k+l)}{N}} = g_{k+l \quad mod(n)}$.
Da questa relazione possiamo derivare un affermazione alternativa di $\mathbb{Z}_N$ con l'equivalenza $g+n \sim g$
Il gruppo è abeliano, segue direttamente dalla legge di composizione.

Bibliografia

[1] Fabio Apruzzi. Lectures notes on anomalies, 2022.

[2] T. Daniel Brennan and Sungwoo Hong. Introduction to generalized global symmetries in qft and particle physics, 2023.

[3] Gil Young Cho and Joel E. Moore. Topological BF field theory description of topological insulators. *Annals of Physics*, 326(6):1515–1535, jun 2011.

[4] Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Nathan Seiberg, and Brian Willett. Generalized global symmetries. *Journal of High Energy Physics*, 2015(2), feb 2015.

[5] Pedro R. S. Gomes. An introduction to higher-form symmetries. *SciPost Physics Lecture Notes*, sep 2023.

[6] Anton Kapustin and Nathan Seiberg. Coupling a QFT to a TQFT and duality. *Journal of High Energy Physics*, 2014(4), apr 2014.

[7] K. Lechner. *Classical Electrodynamics*. Springer Cham, 1st edition, 2018.

[8] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 1990.