UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"Tullio Levi Civita"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Aste nei mercati elettrici: strategie, efficienza ed energie rinnovabili.

Relatore:
Prof.ssa Giorgia Callegaro
Correlatore:
Prof. Tiziano Vargiolu

Laureando:
Gaetano Adamo, 1103359

7 Luglio 2017

Anno Accademico 2016-2017

Introduzione

Il processo di vendita dell'energia elettrica a breve termine è organizzato sotto forma di aste. I fornitori che partecipano a tali aste competono sulla base delle offerte che propongono al banditore: in base allo stato della domanda, indipendentemente e simultaneamente offrono un prezzo minimo per MWh relativo alla quantità di energia elettrica che possono fornire. Quando l'asta si chiude a ciascun fornitore viene assegnata una quantità di energia da produrre tenendo conto della competitività dei prezzi che questi hanno proposto: i fornitori che offrono prezzi più competitivi si aggiudicheranno quantità maggiori di energia. In questo lavoro ci occuperemo in particolare dello studio di due formati d'asta che ad oggi sono realmente utilizzati per la vendita dell'energia elettrica: *l'asta discriminatoria* e *l'asta uniforme*.

Lo studio delle aste, sebbene materia recente, è in realtà un argomento molto vasto che spazia dallo studio dei prezzi di equilibrio, al confronto fra i vari tipi di aste. Noi ci concentreremo in particolar modo sulla costruzione di modelli atti a rappresentare le aste in oggetto in situazioni di informazione completa ed incompleta.

Strumento indispensabile per affrontare tali studi è la *Teoria dei giochi.* Utilizzando la *Teoria dei giochi ad informazione completa* costruiremo, un modello per rappresentare le aste come *giochi strategici* nel caso in cui tutti i parametri del gioco (ovvero dell'asta), e in particolare i costi marginali, siano noti a tutti i giocatori (ovvero ai fornitori che partecipano all'asta). Il modello che costruiremo si adatterà anche ai casi di vendita di energia rinnovabile, la cui caratteristica è quella di avere costi marginali nulli.

La *Teoria dei giochi ad informazione incompleta*, e in particolare la *Teoria dei giochi Bayesiani*, sarà sfruttata per costruire una variante del modello che ci permetterà di rappresentare le aste come *giochi bayesiani,* e in particolare analizzeremo cosa succede nella circostanza in cui i partecipanti all'asta siano ignari dei costi di produzione altrui (*informazione incompleta*). Questo approccio ci consentirà di confrontare le due aste in esame e di stabilire quale delle due garantisca ai fornitori profitti maggiori.

Evidenziamo qui il fatto che non sempre è possibile determinare dei *prezzi di equilibrio*, formalmente detti *«equilibri in strategia pura»*, ovvero non è sempre possibile determinare quali prezzi devono proporre i fornitori al fine di garantire a tutti il guadagno «migliore». In alcuni casi, infatti, il meglio che si può fare è determinare una distribuzione di probabilità che garantisca i «migliori» profitti medi ogni volta che i giocatori scelgono le loro azioni seguendo tale distribuzione che, formalmente, è detta *«equilibrio di Nash in strategia mista».*

Storicamente si è discusso a lungo sulla effettiva utilità degli *equilibri in strategia mista,* pertanto è bene specificare come questi possano essere interpretati e quindi qual è la loro reale utilità.

La prima obiezione in merito all'utilizzo delle strategie miste sta nel fatto che le persone non si comportano in maniera casuale. D'altra parte, ci sono molte circostanze in cui il comportamento di un individuo può sembrare casuale ad altri individui. Si pensi, per esempio, alla presenza di un posto di blocco su una strada piuttosto che su un'altra: ciò può sembrare casuale ad un automobilista ma non è certamente casuale per gli agenti della pattuglia.

Inoltre se i giocatori si trovano nella circostanza di effettuare le loro scelte comportamentali basandosi su strategie miste, ovvero se si trovano di fronte alla situazione di dover scegliere cosa fare seguendo una distribuzione di probabilità su tutte le azioni che hanno a disposizione, ciò vuol dire che sono indifferenti ad almeno due azioni. Basta che uno dei partecipanti al gioco non scelga la giusta distribuzione di probabilità sulle sue possibili azioni, ovvero che uno solo dei giocatori non si comporti seguendo gli equilibri in strategia mista, che anche i suoi avversari avranno un incentivo a comportarsi senza seguire il criterio suggerito dagli equilibri. Tuttavia si potrebbe pensare che i giocatori non abbiano alcun interesse a scegliere una distribuzione di probabilità, ovvero una strategia mista, in funzione degli altri giocatori. Questa obiezione sembra vanificare la possibilità che un equilibrio di Nash in strategia mista possa essere una buona previsione.

Ci sono due risposte a tali obiezioni. La prima è dovuta ad Harsanyi ([6]). Egli ha osservato che tipicamente i giocatori razionali scelgono cosa fare, ovvero scelgono le loro azioni, cercando di massimizzare i propri profitti e che l'esigenza della ricerca di equilibri in strategie miste da parte di un giocatore nasce dall'incertezza sul payoff[1] degli avversari, il quale payoff influenza anche il suo profitto. In altre parole se, per esempio, consideriamo un gioco con due giocatori, la ricerca della strategia mista del giocatore 1

[1]Con la parola «payoff» intendiamo la funzione con la quale un giocatore calcola il suo profitto

non deriva dall'incertezza da parte del giocatore 1 sull'esito del suo payoff, ma dall'incertezza del giocatore 2 sulle azioni del giocatore 1. Dunque secondo Harsanyi la ricerca degli equilibri in strategie miste è dovuta al fatto che un giocatore è incerto sulla scelta delle azioni del suo rivale, la quale scelta dipende a sua volta dal payoff del rivale stesso.

La seconda osservazione che possiamo fare sulle strategie miste è che queste potrebbero sorgere da una convenzione sociale: ogni giocatore razionale crede che tutti i suoi avversari utilizzeranno le distribuzioni di probabilità in equilibrio, al fine di massimizzare i propri profitti. Quindi, finché viene mantenuta complessivamente la stessa convenzione sociale, non importa cosa farà ogni singolo individuo, a patto che la frequenza con cui sceglie le proprie azioni rispetti la legge stabilita dall'equilibrio.

I risultati ottenuti in questo lavoro saranno così suddivisi:

- Nei capitoli 1 e 2 saranno descritti i principali risultati della *Teoria dei giochi ad informazione completa* e della *Teoria dei giochi bayesiani.*

- Nel capitolo 3 rappresenteremo le aste come giochi strategici e ne analizzeremo gli equilibri in strategia pura e in strategia mista in situazione di informazione completa. Dapprima considereremo il caso discreto: nella realtà i fornitori possono proporre prezzi che hanno due cifre decimali e quindi le possibili offerte saranno quantizzate con un salto di 0,01 (€). In questo contesto vedremo che in asta uniforme è sempre possibile trovare equilibri in strategia pura, mentre in asta discriminatoria tali equilibri non sempre esistono.
  Motivati da ciò cercheremo gli equilibri in strategia mista per l'asta discriminatoria ottenendo una coppia di funzioni di ripartizione che rappresentano gli equilibri cercati. Estenderemo poi la ricerca degli equilibri in strategia mista per l'asta discriminatoria al caso continuo. Sebbene la costruzione del modello (nel caso continuo) prenda spunto dal lavoro di Fabra N., von der Fehr N.-H M., Harbord D. (2006) (vedi [3]), in questo lavoro siamo riusciti a generalizzare i risultati trovati in [3]: nel nostro caso gli equilibri in strategia mista non dipendono dallo stato della domanda di mercato.

- Nel capitolo 4, sfruttando la *Teoria dei giochi bayesiani,* in condizioni di simmetria sui fornitori (i.e. stessa capacità produttiva) determineremo gli unici *equilibri di Bayes-Nash «simmetrici»,* in strategia pura, nel caso in cui i costi di produzioni siano variabili aleatorie (informazione incompleta). Tali equilibri, in tutti e due i formati d'asta, saranno

rappresentati da «*funzioni di offerta*» strettamente crescenti che dipendono solo dai costi marginali. Le funzioni di offerta trovate, in particolare, sono valide sia se i costi marginali sono variabili indipendenti sia se sono variabili *affiliate.* La proprietà di affiliazione, descritta in appendice, è stata introdotta per la prima volta da Milgrom e Webern in [11] ed è ampiamente usata in ambito economico per studiare quei sistemi in cui la correlazione non è sufficiente a descrivere i fenomeni oggetti di studio.
Grazie alle funzioni di offerta riusciremo anche a studiare l'efficienza delle aste nel senso dei profitti: scopriremo che l'asta discriminatoria garantisce guadagni maggiori.

Indice

Capitolo 1

Teoria dei giochi

Lo scopo della teoria dei giochi è quello di analizzare i comportamenti di individui (giocatori) che interagiscono perseguendo obiettivi comuni, diversi o in conflitto tra loro. La soluzione di un gioco è l'identificazione di una o più strategie, da parte dei diversi giocatori, compatibili con determinate assunzioni di razionalità e intelligenza dei giocatori stessi: ogni giocatore compie sempre la migliore azione in base al vantaggio che pensa di poterne trarre. Formalizziamo nel seguito queste idee seguendo l'approccio usato in [8] e in [9].

1.1 Giochi strategici con preferenze ordinate

In questa sezione presentiamo alcuni concetti fondamentali di Teoria dei Giochi.

Definizione 1. Una **preferenza** $\succeq$ su un insieme è una relazione binaria, completa e transitiva.

Definizione 2. Un **gioco strategico** consiste in:

1. un insieme di N giocatori;
2. un insieme A_i di azioni o strategie possibili per ogni giocatore $i = 1, \ldots, N$;
3. un criterio di preferenza, per ogni giocatore, sull'insieme $A = \prod_{i=1}^{N} A_i$ di tutte le azioni possibili

Tipicamente, la relazione di preferenza di ciascun giocatore sull'insieme A può essere espressa attraverso una funzione di utilità (o payoff), associata a ciascun giocatore, che fa corrispondere valori più elevati a risultati più graditi.

Definizione 3. Il vettore $a = (a_1, \dots, a_N)$ formato dalle azioni di ogni giocatore è detto **profilo d'azione**. Una funzione:

$$u_i : A \to \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

dove $A = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i\}$ è l'insieme dei profili di azione è detta funzione **payoff**. Inoltre $\forall a, b \in A$

$$u_i(a) \geq u_i(b) \Longleftrightarrow a \succeq_i b$$

ovvero $u_i(a) \geq u_i(b)$ se e solo se il giocatore i *preferisce* il profilo a al profilo b.

Dato un profilo d'azione $a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_N)$ denotiamo con (a'_i, a_{-i}) il profilo d'azione $(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_N)$ in cui a_j rimane immutato $\forall j \neq i$, mentre il giocatore i sceglie a'_i.

Dunque se A_i è l'insieme delle possibili azioni fra le quali il giocatore i può scegliere, la funzione di utilità $u_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$ $\forall x_i \in A_i$, in qualche modo fornisce una misura della soddisfazione derivante dalla scelta x_i. Un giocatore razionale sceglierà l'azione in corrispondenza della quale ottiene il valore massimo della sua funzione di utilità, cioè sceglierà l'azione x_i^* tale che $u(x_1, \dots, x_i^*, \dots, x_N) = \max_{x_i \in A_i} u_i(x)$.

In generale l'esito della scelta del giocatore i dipende anche dalle decisioni degli altri giocatori (ovvero da un profilo di azione), sulle quali il giocatore i non ha alcun controllo. Inoltre dato un insieme di azioni non c'è un unico modo per definire la funzione di utilità, pertanto le preferenze indotte dal payoff sono spesso da considerarsi qualitative più che quantitative.

Uno degli obiettivi dello studio dei giochi strategici è quello di individuare particolari profili d'azione detti equilibri di Nash.

Definizione 4. In un gioco strategico il profilo d'azione $a^* = (a_1^*, \dots, a_N^*)$ è:

$i)$ un **equilibrio di Nash** se per ogni $i = 1, \dots, N$

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \qquad \forall a_i \in A_i \tag{1.1.2}$$

$ii)$ un **equilibrio di Nash stretto** se per ogni $i = 1, \ldots, N$ si ha:

$$u_i(a^*) > u_i(a_i, a^*_{-i}) \qquad \forall a_i \in A_i,\ a_i \neq a^*_i \tag{1.1.3}$$

Esempio 1. [Dilemma del prigioniero] Uno dei giochi strategici più conosciuti è il cosiddetto Dilemma del prigioniero. Due persone accusate di aver commesso un reato sono detenute in celle separate in modo da non poter comunicare. Ognuno dei due detenuti può confessare (C) o tacere (T) e la scelta di ciascuno dei due influenza anche il destino dell'altro: se entrambi confessano saranno condannati a 10 anni di prigione; se entrambi tacciono avranno una pena ridotta a 7 anni; se uno confessa e l'altro tace, chi ha confessato avrà la libertà e chi ha taciuto avrà la massima pena (30 anni).

Possiamo esprimere tramite le funzioni di utilità u_1 e u_2 le preferenze dei prigionieri su tali eventi:

$$u_1(C,T) > u_1(T,T) > u_1(C,C) > u_1(T,C)$$

$$u_2(T,C) > u_2(T,T) > u_2(C,C) > u_2(C,T)$$

Potremo specificare tali preferenze ponendo, per esempio,

$$u_1(C,T) = 0,\ u_1(T,T) = -7,\ u_1(C,C) = -10 \text{ e } u_1(T,C) = -30$$

e analogamente per il secondo sospettato

$$u_2(T,C) = 0,\ u_2(T,T) = -7,\ u_2(C,C) = -10 \text{ e } u_2(C,T) = -30$$

Date queste assunzioni, si può descrivere il gioco in maniera compatta come in Tabella 1.1.1. Le righe sono le possibili azioni del primo sospettato, le colonne quelle del secondo, mentre gli elementi della tabella sono i payoff dei giocatori per i profili d'azione.

	T	**C**
T	(-7,-7)	(-30,0)
C	(0,-30)	(-10,-10)

Tabella 1.1.1: Dilemma del prigioniero

Il gioco sembrerebbe suggerire il tacito accordo a non collaborare e quindi a considerare (T, T) come una buona situazione di compromesso, tuttavia la possibilità che entrambi i giocatori hanno di aumentare il proprio payoff non lo rende un equilibrio. Data la scelta del secondo giocatore, il primo ci guadagna a confessare sia che il secondo confessi, sia che questo taccia. Lo stesso vale per il secondo giocatore se fissiamo la scelta del primo. Dunque il profilo (C, C) è l'unico equilibrio di Nash (stretto) perché rispetta la condizione 1.1.3 per entrambi i giocatori, essendo $u_1(C, C) > u_1(T, C)$ e $u_2(C, C) > u_2(C, T)$.

Definizione 5. Per ogni giocatore i la funzione

$$B_i : A_{-i} \to \mathcal{P}(A_i)$$

definita ponendo

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i}) \forall a'_i \in A_i\} \tag{1.1.4}$$

dove a_{-i} sono le azioni del profilo d'azione a, meno a_i, è detta *funzione di miglior risposta.*

Tale funzione permette al giocatore i di associare ad ogni azione altrui quelle ottimali per lui. É chiaro che questa è molto simile alla relazione della condizione 1.1.2 e ci permette quindi di capire quando un profilo d'azione sia effettivamente un equilibrio di Nash.

Proposizione 1. *Il profilo d'azione a^* è un equilibrio di Nash di un gioco strategico se e solo se l'azione di ogni giocatore è la miglior risposta alle azioni degli altri giocatori, ovvero*

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}) \qquad \forall i \tag{1.1.5}$$

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Per ipotesi a^* è un equilibrio di Nash quindi

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i}) \qquad \forall i, \forall a_i \in A_i$$

ora $B_i(a^*_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a^*_{-i}) \geq u_i(a'_i, a^*_{-i}) \forall a'_i \in A_i\}$ e quindi per la definizione dell'equilibrio di Nash si ha $a^*_i \in B_i(a^*_{-i})$ essendo $(a^*_i, a^*_{-i}) = a^*$.

$(\Leftarrow)$ Sia $a^*_i \in B_i(a^*_{-i})$ $\forall i$. Poniamo per assurdo che a^* non sia equilibrio di Nash, ovvero $\exists\, i$ per cui $u_i(a^*) < u_i(\bar{a}_i, a^*_{-i})$ per un certo $\bar{a}_i \in A_i$, ma poiché $a^*_i \in B_i(a^*_{-i})$ si ha

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_i, a^*_{-i}) \geq u_i(\bar{a}_i, a^*_{-i})$$

Il che è assurdo. □

In giochi con molte azioni possibili, per esempio quando viene permessa la scelta di numeri reali, è utile definire ulteriori proprietà per le scelte del giocatore. Introduciamo il concetto di dominazione allo scopo di scartare o tenere conto di decisioni che sono, in ogni circostanza, rispettivamente peggiori o migliori di altre.

Definizione 6. In un gioco strategico con preferenze ordinate l'azione a_i'' del giocatore i **domina strettamente** un'altra sua azione a_i' se

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}), \text{ per ogni } a_{-i} \in A_{-i} \tag{1.1.6}$$

Nell'Esempio 1 per entrambi i giocatori l'azione "confessare" domina strettamente l'azione "tacere".

Definizione 7. In un gioco strategico l'azione a_i'' del giocatore i **domina debolmente** un'altra sua azione a_i' se

$$u_i(a_i'', a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i}), \text{ per ogni } a_{-i} \in A_{-i} \tag{1.1.7}$$

e se

$$\exists\, \bar{a}_{-i} \in A_{-i} \text{ tale che } u_i(a_i'', \bar{a}_{-i}) > u_i(a_i', \bar{a}_{-i}) \tag{1.1.8}$$

Ovviamente la dominanza stretta implica quella debole.

Proposizione 2. *Valgono le seguenti:*

1. *Sia $\bar{a}$ un profilo d'azione in cui $\bar{a}_i$ domina debolmente ogni altra azione in A_i per ogni i. Allora $\bar{a}$ è un equilibrio di Nash.*

2. *Dato i, se $\bar{a}_i$ è dominato strettamente da a_i' allora $\bar{a} = (\bar{a}_1, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_N)$ non è un equilibrio di Nash per ogni $\bar{a}_{-i} \in A_{-i}$*

Dimostrazione. Ragioniamo in entrambi i casi per assurdo:

1. Se $\bar{a}$ non fosse equilibrio di Nash allora esisterebbe i e $a_i' \in A_i$ tale che $u_i(a_i', \bar{a}_{-i}) > u_i(\bar{a})$. Ma per ipotesi $\bar{a}_i$ domina debolmente ogni altra azione in A_i, quindi $u_i(\bar{a}_i, \bar{a}_{-i}) \geq u_i(a_i', \bar{a}_{-i})$. Da cui $u_i(\bar{a}_i, \bar{a}_{-i}) > u_i(\bar{a})$. Assurdo.

2. Se $\bar{a} = (\bar{a}_1, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_N)$ fosse un equilibrio di Nash, allora $u_i(\bar{a}) \geq u_i(a_i, \bar{a}_{-i})$ per ogni i, per ogni $a_i \in A_i$. Ma sappiamo che $u_i(a_i', a_{-i}) > u_i(\bar{a}_i, a_{-i})$ per ogni $a_{-i} \in A_{-i}$, quindi in particolare $u_i(a_i', \bar{a}_{-i}) > u_i(\bar{a}_i, \bar{a}_{-i}) = u_i(\bar{a})$. Assurdo.

□

1.2 Strategie miste

Nella sezione precedente abbiamo analizzato giochi in cui la scelta di un'azione definiva completamente il comportamento del giocatore. In situazioni più complesse un giocatore assegna una probabilità a ciascuna azione a sua disposizione, dando luogo ad una strategia mista. Di conseguenza le strategie pure, ovvero la scelta (certa) di una singola azione, sarà vista come un caso particolare di strategie miste. Formalmente:

Definizione 8. Una **strategia mista** di un giocatore i, per $i = 1, \dots, N$, in un gioco strategico è una distribuzione di probabilità ρ_i sulle sue azioni possibili A_i. L'insieme di tutte le sue strategie miste viene indicato con $\mathcal{A}_i$. Dunque $\rho_i(a_i)$ è la probabilità assegnata all'azione $a_i \in A_i$ del giocatore i dalla strategia mista. Una **strategia pura** è una strategia mista in cui si assegna probabilità 1 ad una singola azione.

Per definire i giochi strategici in cui può essere presente una componente aleatoria è necessario precisare come ogni giocatore possa effettivamente caratterizzare la propria strategia. Se nel caso deterministico lo faceva scegliendo un'azione, ora, come abbiamo visto negli esempi precedenti, lo fa precisando che probabilità assegnare ad ogni sua azione:

Definizione 9. Un **gioco strategico con preferenze di von Neumann-Morgenstern (vNM)** consiste in:

1. un insieme di N giocatori;
2. un insieme A_i di azioni possibili per ogni giocatore $i = 1 \dots N$;
3. un insieme di distribuzioni di probabilità ρ_i, strategia mista, che il giocatore i definisce sull'insieme A_i delle proprie azioni possibili, per ogni $i = 1, \dots, N$;
4. un criterio di preferenza, per ogni giocatore, sull'insieme $\mathcal{A}$ di tutti i profili di strategia mista $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)$.

Questi ultimi saranno rappresentati dalla funzione utilità di vNM, $U_i(\rho)$, definita come il valore atteso delle funzioni di utilità calcolate sui profili d'azione $(a_1, \dots, a_N)$, ognuno dei quali ha probabilità definita da $\rho(a)$:

$$U_i(\rho) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \rho(a) u_i(a) = \mathbb{E}^{\rho}[u_i(a)]$$

Definiamo ora i giochi strategici in presenza di aleatorietà e il concetto di equilibrio di Nash nel caso di strategie miste.

Definizione 10. Un profilo di strategie miste $\rho^* = (\rho_1^*, \ldots, \rho_N^*) \in \mathcal{A}$ in un gioco strategico con preferenze di vNM è un **equilibrio di Nash a strategia mista** se, per ogni giocatore i e per ogni strategia mista ρ_i del giocatore i,

$$U_i(\rho^*) \geq U_i(\rho_i, \rho_{-i}^*) \tag{1.2.1}$$

dove $U_i(\rho)$ è la funzione del giocatore i per il profilo di strategia mista ρ.

Esempio 2. Nel famoso gioco «sasso, carta, forbici» due giocatori si sfidano scegliendo uno dei tre segni. Ricordiamo che il sasso vince sulla forbice, la forbice vince sulla carta, la carta vince sul sasso e c'è pareggio tra simili. Per entrambi i giocatori la vittoria ha payoff 1, il pareggio 0, la sconfitta -1. E' evidente che con qualunque combinazione di azioni, almeno uno dei due giocatori è incentivato a cambiare per poter vincere. La Tabella 2 rende chiaro che non sono presenti equilibri di Nash.

Se permettiamo però di assegnare aleatorietà alle varie azioni, vediamo che se entrambi i giocatori assegnano probabilità $\frac{1}{3}$ ad ogni azione, ogni cambiamento della strategia non fa variare la funzione utilità e quindi si trova una condizione di equilibrio. Detta α tale strategia, mostriamo che questa è un equilibrio. Si ha

$$U_1(\alpha) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(0+1-1) + \frac{1}{3}(-1+0+1) + \frac{1}{3}(1-1+0)\right] = 0$$

e analogamente si procede per $U_2(\alpha)$. Se il giocatore 1 variasse la propria strategia scegliendo delle probabilità qualsiasi $p$per carta q per forbice e $1-p-q$ per sasso, questa nuova strategia, che chiamiamo α', avrebbe utilità:

$$U_1(\alpha') = \frac{1}{3}\left[(0+q-1+p+q) + (-p+0+1-p-q) + (p-q+0)\right] = 0$$

che è comunque nulla indipendentemente dai valori di p e q. Entrambi i giocatori non hanno quindi motivo per cambiare la strategia α e questo la rende un equilibrio di Nash. Infatti se per esempio il giocatore 2 gioca una strategia diversa da $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, per esempio $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, allora le tre azioni del giocatore 1 non sono più equivalenti per lui: poiché il giocatore 2 gioca sasso più spesso che carta o forbici, per il giocatore 1 sarà più conveniente giocare sempre carta, ovvero scegliere la strategia $(0, 1, 0)$ piuttosto che la strategia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Tabella 1.2.1: Sasso,Carta,Forbice

Giocatore 2 \ Giocatore 1	C	F	S
C	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
F	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
S	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Analogamente alla Definizione 5 nel caso deterministico, è utile costruire una funzione di miglior risposta $B_i(\rho_{-i})$ che indichi l'insieme delle migliori strategie miste per il giocatore i, date le strategie miste ρ_{-i} degli altri giocatori, al fine di trovare equilibri di Nash misti in giochi strategici con preferenze vNM.

Definizione 11. La funzione di miglior risposta in un gioco strategico a preferenze vNM è definita come

$$B_i : \mathcal{A}_{-i} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}_i)$$

$$B_i(\rho_{-i}) = \{\rho_i \in \mathcal{A}_i : U_i(\rho_i, \rho_{-i}) \geq U_i(\rho'_i, \rho_{-i}) \forall \rho'_i \in \mathcal{A}_i\} \tag{1.2.2}$$

Proposizione 3. *Il profilo di strategie miste ρ^* è un equilibrio di Nash a strategia mista se e solo se ρ^*_i è un elemento di $B_i(\rho^*_{-i})$ per ogni giocatore i.*

$$\rho^*_i \in B_i(\rho^*_{-i}) \ \forall i \tag{1.2.3}$$

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione della Proposizione 1. □

Proposizione 4. *In un gioco strategico con preferenze di vNM, nel quale ognuno degli N giocatori ha a disposizione una quantità numerabile di azioni, l'utilità di un giocatore per il profilo di strategie miste ρ è la media pesata dei payoff attesi per tutti i profili di strategie miste del tipo (a_i, ρ_{-i}), dove il peso assegnato ad ogni addendo è la probabilità $\rho_i(a_i)$ fissata dalla strategia mista ρ_i del giocatore i:*

$$U_i(\rho) = \sum_{a_i \in A_i} \rho_i(a_i) U_i(a_i, \rho_{-i}) \tag{1.2.4}$$

dove A_i è l'insieme delle azioni possibili per il giocatore i e $U_i(a_i, \rho_{-i})$ è il payoff atteso in cui il giocatore i sta utilizzando la strategia pura a_i.

Dimostrazione. Il payoff atteso è ben definito poiché i payoff associati ai profili d'azione sono limitati: $\exists M > 0$ tale che $u_i(a) < M$ per ogni $a = (a_1, ..., a_N) \in A$ e quindi si ha

$$U_i(\rho) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{i \leq N} \rho_i(a_i) < M \sum_{a \in A} \prod_{i \leq N} \rho(a) = M$$

Utilizzando le proprietà del valore atteso si ottiene quindi la tesi. □

Pertanto in presenza di aleatorietà sugli esiti del gioco, l'utilità attesa associata alla strategia mista ρ_i del giocatore i a fronte delle altre $N-1$ strategie ρ_i.

In altre parole per determinare le preferenze dei giocatori sulle varie strategie si utilizza il valore atteso di una funzione di utilità calcolata sulle azioni del gioco nel caso deterministico. Tale sistema di preferenze porta il nome di von Neumann e Morgenstern, che lo introdussero per la prima volta nel 1944[1].

Questa riscrittura del payoff atteso rende evidenti alcune importanti proprietà che le strategie miste devono soddisfare per essere equilibri di Nash.

Proposizione 5. *In un gioco strategico con preferenze vNM, nel quale ognuno degli N giocatori ha a disposizione una quantità numerabile di azioni, un profilo di strategie miste ρ^* è un equilibrio di Nash a strategia mista se e solo se per ogni giocatore i valgono le seguenti:*

1. *Dato ρ^*_{-i}, nessuna azione in A_i garantisce al giocatore i un payoff atteso maggiore di $U_i(\rho^*)$.*

2. *Dato ρ^*_{-i}, all'insieme delle azioni che garantiscono al giocatore i un payoff atteso minore di $U_i(\rho^*)$ viene assegnata dalla strategia mista ρ^*_i probabilità nulla.*

La dimostrazione che proponiamo di seguito è una rielaborazione di quella presente in [9].

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Essendo ρ^* equilibrio di Nash, si ha che vale la relazione 1.2.1 e quindi $U_i(\rho^*) \geq U_i(\rho_i, \rho^*_{-i})$ $\forall i$ e $\forall \rho_i \in \mathcal{A}_i$.

[1]le funzioni di utilità che abbiamo analizzato nella sezione precedente, su valori deterministici, sono dette di Bernoulli.

Se esistesse $\bar{a}_i \in A_i$ tale che $U_i(\bar{a}_i, \rho^*_{-i}) > U_i(\rho^*)$, avremmo che il profilo di strategie miste $(\bar{\rho}_i, \rho^*_{-i})$, dove $\bar{\rho}_i(\bar{a}_i) = 1$, garantirebbe un'utilità maggiore di ρ^*. Il che è impossibile. Poiché ciò è vero per ogni giocatore i, il punto 1 è mostrato.

Affermiamo che deve esistere almeno un'azione $a'_i \in A_i$ per cui $U_i(a'_i, \rho^*_{-i}) = U_i(\rho^*)$, infatti se così non fosse avremmo che una media dei payoff è maggiore strettamente di ognuno di questi.

Ora se esistesse $\bar{a}_i \in A_i$, con $\rho^*_i(\bar{a}_i) = K > 0$, tale che $U_i(\bar{a}_i, \rho^*_{-i}) < U_i(\rho^*)$, potremmo costruire una strategia mista α'_i nel seguente modo:

$$\rho'_i(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } a_i = \bar{a}_i \\ \bar{\rho}_i(a'_i) + K & \text{se } a_i = a'_i \\ \bar{\rho}_i(a_i) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove a'_i è un'azione tale che $U_i(a'_i, \rho^*_{-i}) = U_i(\rho^*)$ ed esiste per il ragionamento precedente. Ma allora avremmo un profilo di strategia mista (ρ'_i, ρ^*_{-i}) con utilità maggiore di ρ^*:

$$U_i(\rho^*) = U_i(\rho'_i, \rho^*_{-i}) + K(U_i(\bar{a}_i, \rho^*_{-i}) - U_i(a'_i, \rho^*_{-i})) < U_i(\rho'_i, \rho^*_{-i})$$

essendo che $U_i(a'_i, \rho^*_{-i}) > U_i(\bar{a}_i, \rho^*_{-i})$. Impossibile. Poiché ciò è vero per ogni giocatore i, anche il punto 2 è mostrato.

($\Leftarrow$) Sia ρ^* una strategia mista che rispetti le condizioni 1 e 2. Consideriamo il punto di vista del giocatore i: detto $E = U_i(a_i, \rho^*_{-i})$ il payoff atteso per ogni azione a_i a cui ρ^*_i assegna probabilità positiva, si ha per l'equazione 1.2.4:

$$U_i(\rho^*) = E \tag{1.2.5}$$

In qualunque modo si modifichi la distribuzione di probabilità sulle azioni che hanno già probabilità positiva si avrebbe comunque un'utilità uguale ad E.

Invece se assegnassimo probabilità positiva K ad un'azione $a'_i \in A_i$, tale che $U_i(a'_i, \rho^*_{-i}) \leq E$, a cui era assegnata probabilità zero da α_i, avremmo con la nuova strategia mista ρ'_i:

$$U_i(\rho'_i, \rho^*_{-i}) = U_i(\rho^*) + K(U_i(a'_i, \rho^*_{-i}) - E) \leq U_i(\rho^*) \tag{1.2.6}$$

Quindi poiché tale fatto è vero per ogni i, ρ^* è equilibrio di Nash per 1.2.1.

□

1.3 Condizioni di esistenza per un equilibrio di Nash

Per i giochi strategici nei quali ogni giocatore ha a disposizione un numero finito di azioni possiamo mostrare un altro importante risultato. Abbiamo visto che il profilo di strategie miste ρ^* è un equilibrio di Nash se vale la condizione (1.2.3). Definendo ora la funzione

$$B : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}) \tag{1.3.1}$$

$$B(\rho) = \prod_{i \leq N} B_i(\rho_{-i}) \tag{1.3.2}$$

possiamo riscrivere la (1.2.3) come una condizione su una funzione polidroma:

$$\rho^* \in B(\rho^*) \tag{1.3.3}$$

Quindi, come suggerito in [9], mostrando che tale $\rho^* \in \mathcal{A}$ esiste, possiamo affermare che nei giochi a strategia mista esiste sempre un equilibrio di Nash.

Introduciamo il Teorema di punto fisso di Kakutani che ci servirà per mostrare l'esistenza di $\rho^* \in \mathcal{A}$.

Definizione. Dati due spazi metrici X ed Y, un'applicazione a più valori $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ si dice **chiusa** se per ogni successione (x_n, y_n) con $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ e $y_n \in f(x_n)$, si ha $y_0 \in f(x_0)$.

Teorema 1. *[Teorema di punto fisso di Kakutani] Sia X un sottoinsieme convesso e compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F : X \to \mathcal{P}(X)$ una funzione polidroma tale che:*
$i)$ $\forall x \in X$ si ha che $F(x)$ è un convesso non vuoto;
$ii)$$F$ è chiusa.
Allora $\exists\, x^* \in X$ tale che $x^* \in F(x^*)$

Dimostrazione. Vedi [13] □

Proposizione 6. *Ogni gioco strategico con preferenze vNM in cui gli N giocatori hanno un numero finito di azioni, ammette almeno un equilibrio di Nash in strategia mista.*

La dimostrazione che proponiamo di seguito è una rielaborazione di quella presente in [9].

Dimostrazione. Consideriamo un gioco strategico composto da N giocatori e, per ogni giocatore $i = 1 \ldots N$, chiamiamo m_i la cardinalità di A_i. Possiamo considerare l'insieme $\mathcal{A}_i$ delle strategie miste del giocatore i come l'insieme dei vettori $(p_1, \dots, p_{m_i})$ per cui $p_k \geq 0$ $\forall k$ e $\sum_{k=1}^{m_i} p_k = 1$, dove p_k è la probabilità associata all'azione k-esima del giocatore i. $\mathcal{A}_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ è quindi non vuoto, convesso e compatto $\forall i$ e dunque lo è anche $\mathcal{A}$.

Possiamo perciò affermare, per ogni $\rho_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$, che $B_i(\rho_{-i})$ è non vuoto poiché $U_i(\rho_i, \rho_{-i})$ ammette sempre un massimo in $\mathcal{A}_i$. Infatti U_i è continua, perché lineare, e $\mathcal{A}_{-i}$ è compatto, da cui l'esistenza del massimo per il teorema Weierstrass. Di conseguenza anche $B(\rho)$ è non vuoto.

Inoltre $B_i(\rho_{-i})$ è convesso per ogni $\rho_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$. Infatti date β, $\gamma \in B_i(\rho_{-i})$ e fissata $\rho_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}$, le azioni a cui queste strategie assegnano probabilità maggiore di zero devono avere lo stesso payoff atteso, altrimenti si avrebbe una strategia con utilità maggiore assegnando probabilità uno all'azione con payoff più alto. Ora date le due strategie appena definite e fissato $t \in [0, 1]$, $t\beta + (1-t)\gamma \in \mathcal{A}_i$ è la strategia in cui all'azione $\bar{a}_i$ è assegnata probabilità $t\beta(\bar{a}_i) + (1-t)\gamma(\bar{a}_i)$ per ogni $\bar{a}_i \in A_i$. L'utilità di qualsiasi combinazione lineare di β e γ è quindi, per l'uguaglianza 1.2.4, una combinazione lineare di payoff dal medesimo valore e quindi $U_i(\beta, \rho_{-i}) = U_i(\gamma, \rho_{-i}) = U_i(t\beta + (1-t)\gamma, \rho - i)$ con $t \in [0, 1]$, da cui $t\beta + (1-t)\gamma \in B_i(\rho - i)$. Perciò $B_i(\rho - i)$ è convessa $\forall i$ e quindi anche $B(\rho)$ è convessa.

Infine B è una funzione a grafico chiuso: consideriamo $\{\alpha^n\}_n$ e $\{\beta^n\}_n$ successioni in $\mathcal{A}$ tali che $\beta^n \in B(\alpha^n)$ per ogni $n > 0$, α^n converge ad α e β^n a β. Per ogni i possiamo considerare $\{\alpha^n_{-i}\}_n$ e $\{\beta^n_i\}_n$ successioni in $\mathcal{A}_{-i}$ e $\mathcal{A}_i$. Vale anche per queste successioni che $\beta^n_i \in B_i(\alpha^n_{-i})$ per ogni $n > 0$, α^n_{-i} converge alla strategia α_{-i} e β^n_i alla strategia β_i. Si ha da (1.2.2) che

$$U_i(\beta^n_i, \alpha^n_{-i}) \geq U_i(\gamma, \alpha^n_{-i}) \ \forall \gamma \in \mathcal{A}_i, \forall n > 0 \tag{1.3.4}$$

Quindi essendo U_i continua è anche vero che

$$U_i(\beta_i, \alpha_{-i}) \geq U_i(\gamma, \alpha_{-i}) \ \forall \gamma \in \mathcal{A}_i \tag{1.3.5}$$

da cui $\beta_i \in B_i(\alpha_{-i})$. Poiché questa conclusione è vera per ogni i, abbiamo che $\beta \in B(\alpha)$. Quindi $\{(\alpha, \beta) | \beta \in B(\alpha)\}$ è un chiuso di $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ nella topologia prodotto e questo prova che B è una funzione a grafico chiuso.

Avendo provato le ipotesi del Teorema 1 possiamo concludere che B ammette punto fisso che è quindi equilibrio di Nash per la condizione (1.2.3). □

L'importanza di questo teorema è evidente: anche giochi che notoriamente non ammettono equilibri di Nash in strategie pure, come il gioco della moneta in cui bisogna scegliere testa o croce, hanno sicuramente almeno un equilibrio in strategie miste. Inoltre, è possibile che un gioco possieda più equilibri, alcuni in strategie pure e altri in strategie miste. Da un punto di vista pratico, occorre però essere in grado di calcolare questi equilibri. A questo proposito, vale il seguente fondamentale risultato.

Proposizione 7. *Si consideri un profilo di strategie miste $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$. Questo costituisce un equilibrio di Nash se e solo se ogni strategia pura nel supporto di ρ_i è una miglior risposta a ρ_{-i}.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ un equilibrio di Nash, e supponiamo per assurdo che $a_k \in A_i$ faccia parte del supporto di ρ_i, ma che non sia una miglior risposta a ρ_i. Osservando che l'espressione dell'utilità attesa è lineare rispetto alle probabilità, possiamo allora decrementare la probabilità $\rho_i(a_k)$ a favore di un'azione che sia invece una miglior risposta a ρ_{-i}: ossia, ρ_i non sarebbe una miglior risposta a ρ_{-i}, contraddicendo il fatto che fa parte di un equilibrio di Nash.

($\Rightarrow$)Supponiamo ora che ogni strategia pura nel supporto di ρ_i sia una miglior risposta a ρ_{-i}, ma che il profilo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ non sia un equilibrio di Nash, ossia supponiamo che esista una strategia mista $\hat{\rho}_i$ che dà luogo ad un'utilità attesa per i superiore a quella di ρ_i in risposta a ρ_{-i}. Sempre per la linearità dell'utilità attesa, deve esserci dunque nel il supporto di $\hat{\rho}_i$ almeno una strategia pura avente utilità attesa superiore a qualche strategia nel supporto di ρ_i , il che però contraddice l'ipotesi che tutte le strategie pure nel supporto di ρ_i sono migliori risposte a ρ_{-i}. □

La conseguenza di questo teorema è che tutte le strategie pure contenute nel supporto di una strategia mista, all'equilibrio, danno luogo alla stessa utilità attesa della strategia mista. Questo fatto può essere utilizzato per calcolare l'equilibrio di Nash in molti casi: imponendo le condizioni corrispondenti, si vede se esiste o meno un vettore di probabilità per ogni giocatore tale da soddisfare le condizioni della Proposizione 7. Tuttavia questo non basta a concludere che siamo in presenza di un equilibrio di Nash: deve anche verificarsi che ciascuna strategia pura nel supporto di ρ_i sia la miglior risposta alle altre ρ_{-i}.

1.4 Dominanza stretta e debole

Sebbene l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash in giochi a strategia mista sia stata provata, trovare tutti gli equilibri non è così immediato: infatti la condizione della Proposizione 3 richiede di calcolare la funzione di miglior risposta B_i per ogni giocatore i, che per un numero di azioni elevato è un'operazione molto lunga e complessa, e anche nella Proposizione 5 la verifica delle condizioni 1 e 2 non è di rapida verifica. Analogamente a quanto fatto per il caso discreto nella Sezione 1.1 con le Definizioni 6 e 7, introduciamo il concetto di dominanza in situazione di aleatorietà per poter eliminare dalla nostra analisi le azioni che per un giocatore sono sconvenienti a priori rispetto ad altre.

Definizione 12. In un gioco strategico con preferenze vNM, la strategia mista ρ_i del giocatore i **domina strettamente** l'azione a_i' se

$$U_i(\rho_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}), \text{ per ogni } a_{-i} \in A_{-i} \tag{1.4.1}$$

dove u_i è la funzione payoff del giocatore i e $U_i(\rho_i, a_{-i})$ è la funzione utilità quando il giocatore i usa la strategia ρ_i e le azioni scelte dagli altri giocatori sono date da a_{-i}.

Proposizione 8. *In un equilibrio di Nash a strategia mista, un'azione strettamente dominata non è nell'equilibrio con probabilità positiva.*

Dimostrazione. Supponiamo che l'azione a_i' del giocatore i sia strettamente dominata dalla strategia mista ρ_i. La sua funzione utilità $U_i(\rho_i, \rho_{-i})$, calcolata quando il giocatore i usa la strategia mista ρ_i mentre gli altri giocatori adottano le strategie miste ρ_{-i}, è la media pesata delle funzioni $U_i(\rho_i, a_{-i})$, dove a_{-i} varia in A_{-i}, dove il peso associato ad ogni azione a_{-i} è uguale alla probabilità con la quale essa occorre date le strategie miste ρ_{-i}. La funzione utilità del giocatore i, quando i usa l'azione a_i' e gli altri giocatori adottano le strategie miste ρ_{-i}, è una media calcolata analogamente: i pesi sono gli stessi, ma i termini da considerare sono della forma $u_i(a_i', a_{-i})$. Il fatto che a_i' sia strettamente dominato da ρ_i implica la validità dell'Equazione 1.4.1 e quindi $U_i(\rho_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$ per ogni possibile combinazione a_{-i} di azioni degli altri giocatori. Dunque, dato ρ_{-i}, la funzione utilità del giocatore i quando adotta la strategia mista ρ_i supera il valore di quando usa l'azione a_i'. □

Possiamo perciò concludere che nella ricerca degli equilibri di Nash a strategia mista si possono escludere tutte le azioni strettamente dominate da qualunque strategia.

Definizione 13. In un gioco strategico con preferenze vNM, la strategia mista ρ_i del giocatore i **domina debolmente** la sua azione a_i' se

$$U_i(\rho_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i}), \text{ per ogni } a_{-i} \in A_{-i} \tag{1.4.2}$$

e se

$$\exists\, \bar{a}_{-i} \in A_{-i} \text{ tale che } U_i(\rho_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \tag{1.4.3}$$

dove u_i è la funzione payoff del giocatore i e $U_i(\rho_i, a_{-i})$ è la funzione utilità calcolata come valore atteso di u_i quando il giocatore i usa la strategia ρ_i e le azioni scelte dagli altri giocatori sono date da a_{-i}.

Dunque un'azione debolmente dominata deve comunque essere tenuta in considerazione perché può essere usata in un equilibrio di Nash. La proposizione seguente ci assicura che esistono giochi in cui la strategia di un giocatore, in un equilibrio di Nash a strategia mista, può non essere debolmente dominata.

Proposizione 9. *Ogni gioco strategico con preferenze vNM nel quale ogni giocatore può scegliere fra un numero finito di azioni ha un equilibrio di Nash a strategia mista nel quale nessun giocatore ha strategie dominate debolmente.*

Dimostrazione. Vedi [8] □

Vediamo ora qual'è l'impatto sugli equilibri di Nash qualora il gioco possa essere modificato assegnando una probabilità alle azioni. Chiamiamo G il gioco strategico della Definizione 2 e G' il gioco della Definizione 9 che ha gli stessi giocatori e le stesse azioni di G.

Proposizione 10. *Dato a^* equilibrio di Nash di G, sia ρ_i^* la strategia mista in cui il giocatore i assegna probabilità 1 all'azione a_i^*. Allora ρ^* è un equilibrio di Nash a strategia mista di G'. Viceversa dato ρ^* un equilibrio di Nash a strategia mista di G' nel quale la strategia di ogni giocatore i è quella di assegnare probabilità 1 ad una singola azione a_i^*, allora a^* è un equilibrio di Nash di G.*

Dimostrazione. Vedi [9].

Consideriamo ora un gioco composto da 2 giocatori e indichiamo con F_i, per $i = 1, 2$ le strategie miste. □

Definizione 14. Detta μ_{F_i} la misura definita come

$$\mu_{F_i}(A) := \mathbb{P}(b_i \in A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

definiamo il *supporto della strategia mista* F_i, o equivalentemente di μ_{F_i}, il più piccolo insieme chiuso $S(F_i) = S_i$ tale che

$$\mu(S_i^c) = 0$$

Proposizione 11. *Se (F_1^*, F_2^*) è un equilibrio di Nash esiste un profitto atteso h_i, ovvero una costante h_i, per $i = 1, 2$, tali che*

$$\pi_i(b, F_j^*) = h_i \quad \mu_{F_i^*} - \text{q.o.} \quad b \in S_i^* \tag{1.4.4}$$

dove $S_i^* = S(F_i^*)$

Dimostrazione. Sia $h_i := \max_b \pi_i(b, F_j^*)$ e consideriamo l'insieme

$$A_i^* := \left\{ b \in \left[c_i, \overline{P} \right] : \pi_i(b, F_j^*) = h_i \right\}$$

allora $S_i^* \subseteq A_i^*$. Sia $D := S_i^* \smallsetminus A_i^*$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_{S_i^*} \pi_i(b, F_j^*(b)) dF_i^*(b) &= \int_D \pi_i(b, F_j^*(b)) dF_i^*(b) + \int_{D^c} \pi_i(b, F_j^*(b)) dF_i^*(b) = \\ &= \int_D h_i dF_i^*(b) + \int_{D^c} h_i dF_i^*(b) < h_i\end{aligned}$$

a meno di supporre, per assurdo, $\mu_{F_i^*}(D) = 0$. Ma allora definendo $\overline{F}_i^*$ con supporto A_i^* otteniamo

$$\int_{A_i^*} \pi_i(b, F_j^*(b)) d\overline{F}_i^*(b) = h_i > \int_{D^c} \pi_i(b, F_j^*(b)) dF_i^*(b)$$

il che è assurdo, pertanto $A_i^* = S_i^*$. $\square$

Capitolo 2

Giochi ad informazione incompleta

In un gioco con informazione completa le funzione dei payoff dei giocatori sono note a tutti. Tutte le situazioni in cui almeno un giocatore è incerto sulla funzione di payoff di un altro giocatore vanno sotto il nome di *giochi ad informazione incompleta.* In queste circostanze le strategie da attuare sono decise sulla base di payoff attesi condizionati alle informazioni che si hanno a disposizione. Come è stato visto nel Capitolo 1, in un gioco ad informazione completa (con mosse simultanee), la strategia di un giocatore è data semplicemente da un'azione, pertanto possiamo rappresentare un gioco specificando semplicemente lo spazio delle azioni e i payoff di ogni giocatore. Pertanto per denotare un gioco G sarà sufficiente scrivere $G = \{A_1, \ldots, A_N; u_1, \ldots, u_N\}$, dove A_i è lo spazio delle azioni del giocatore i e $u_i(a_1, \ldots, a_N)$ è il payoff del giocatore i quando i giocatori scelgono simultaneamente le azioni $(a_1, \ldots, a_N)$. Dunque le fasi in cui si sviluppa un gioco ad informazione completa sono essenzialmente 2:

1. i giocatori scelgono simultaneamente le azioni (il giocatore i sceglie l'azione $a_i \in A_i$);

2. vengono ricevuti i payoff $u_i(a_1, \ldots, a_N)$

Sviluppiamo ora la rappresentazione di un gioco ad informazione incompleta in forma normale (con mosse simultanee), detto anche gioco (statico) Bayesiano.

Per prima cosa dobbiamo rendere matematicamente il concetto di informazione incompleta, ovvero l'idea che ogni giocatore possa essere incerto sulle funzioni dei payoff legate agli altri giocatori e/o alla sua stessa funzione payoff. Per fare ciò introdurremo il concetto di *tipo* o *segnale* e quindi il concetto di *spazio dei segnali*. L'idea è che ogni giocatore può usare i suoi *segnali* per far corrispondere ad ognuno di essi una diversa funzione payoff ed un diverso insieme di azioni ammissibili. Per esempio dire che il giocatore i conosce la sua funzione payoff sarà equivalente a dire che il giocatore i conosce il proprio *tipo*. Analogamente, affermare che il giocatore i è incerto sulle funzioni payoff degli altri giocatori equivale a dire che il giocatore i è incerto sui *tipi* degli altri giocatori.

Se $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ è lo *spazio della natura,* l'insieme dei tipi del giocatore i, T_i, è deciso da una funzione $\tau_i \colon \Omega \to T_i$ che per ogni giocatore $i = 1, \ldots, N$ e ad ogni stato del mondo, associa un insieme di tipi.

Indichiamo con $(T_i, \mathcal{T}_i)$ lo *spazio dei segnali* dell'i-mo giocatore e consideriamo lo spazio misurabile $(T, \mathcal{F})$ dove $T = \prod_{j=1}^N T_j$, $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{T}_i$. Sia p una probabilità su $(T, \mathcal{F})$, detta probabilità a *priori* o *ex-ante*.

Un altro problema da affrontare è la trattazione di tale incertezza rispetto ai payoff altrui. Questa può essere rappresentata mediante le probabilità soggettive dei singoli giocatori, dette *credenze*, che dipendono dalle informazioni da lui acquisite, ovvero dai *segnali*. Indichiamo con $\mathbf{t}_{-i} = (t_1 \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_N)$ i tipi degli «altri» giocatori e con T_{-i} l'insieme di tutti i possibili valori di t_{-i} . Le *credenze* del giocatore i relative ai tipi degli altri giocatori, $\mathbf{t}_{-i}$, data la conoscenza del proprio tipo t_i, sono indicate dalla probabilità $p_i(t_{-i}|t_i)$, definita[1] da

$$p_i(\mathbf{t}_{-i}|t_i) := \frac{p(\mathbf{t})}{\sum_{\mathbf{t}_{-i} \in T_{-i}} p(\mathbf{t}_{-i}, t_i)}$$

Dunque nello stimare il proprio payoff, il giocatore i deve tener conto della possibilità che lui stesso e gli altri giocatori possano essere più o meno informati e deve far dipendere il suo payoff non solo dalle azioni $(a_1, \ldots, a_N)$ ma anche da tutti i *tipi* $(t_i, \ldots, t_N)$, pertanto i payoff avranno una forma del tipo $u_i(a_1, \ldots, a_N; t_i, \ldots, t_N)$.

Mettendo insieme il concetto di *tipo* e di *credenza* possiamo allora descrivere le fasi di un gioco ad informazione incompleta come segue:

1. la *natura* estrae un vettore di *tipi* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N)$ dove t_i è estratto da un insieme di possibili tipi T_i;

[1] Nel caso continuo, avremo una densità congiunta $f(\mathbf{t})$ e le *credenze* si definiscono come

$$f_i(\mathbf{t}_{-i}|t_i) = \frac{f(\mathbf{t})}{\int_{\mathbf{t}_{-i} \in T_{-i}} f(\mathbf{x}_{-i}, x_i) d\mathbf{x}_{-i}}$$

2. la *natura* rivela t_i al giocatore i e a nessun altro giocatore;
3. i giocatori scelgono simultaneamente le azioni (il giocatore i sceglie l'azione a_i nell'insieme ammissibile A_i);
4. si ricevono i payoff $u_i(a_1, \dots, a_N; t_i, \dots, t_N)$

Formalizziamo quanto detto finora dando le seguenti definizioni.

Definizione 15. Un **gioco statico ad informazione incompleta (o Bayesiano)** consiste in:

1. un insieme di N giocatori;
2. Un insieme non vuoto A_i di azioni o strategie possibili per ogni giocatore $i = 1, \dots, N$;
3. Un insieme non vuoto di *tipi* T_i per ogni giocatore $i = 1, \dots, N$;
4. Detti $A = \prod_{i=1}^{N} A_i$ una funzione *payoff,* $u_i : A \times T \to \mathbb{R}$;
5. Una distribuzione di probabilità p su T.

Definizione 16. Sia $G = \{A_1, \dots A_N; T_1 \dots T_N; p; u_1, \dots u_N\}$ un gioco statico ad informazione incompleta. Una **strategia** per un giocatore i è una funzione $s_i : T_i \to A_i$ che manda segnali in azioni.

In altre parole una strategia, per ogni $t_i \in T_i$, specifica l'azione appartenente all'insieme ammissibile A_i che il tipo t_i sceglierebbe qualora venisse estratto dalla *natura.*

Osservazione 1. Nel contesto delle aste, che vedremo più avanti, l'insieme dei giocatori è ovviamente quello degli agenti o dei fornitori, alle azioni corrispondono le offerte mentre i segnali codificano le informazioni disponibili ai fornitori prima dell'asta, ovvero i costi marginali, che a loro volta dipendono dalla *natura* dell'impianto che possiede il fornitore.

Definizione 17. Detto T l'insieme di tutti i segnali, una strategia s_i **domina debolmente** la strategia s_i' se per ogni $\mathbf{t} \in T$ e per ogni s_{-i}

$$u_i\left(s_i(t_i), \mathbf{s}_{-i}; \mathbf{t}\right) \geq u_i\left(s_i'(t_i), \mathbf{s}_{-i}; \mathbf{t}\right)$$

e diciamo che s_i **domina strettamente** s_i' se c'è disuguaglianza stretta per qualche $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}_{-i}$.

La strategia s_i è **dominante** se domina ogni altra strategia s'_i. Se ogni giocatore ha una strategia dominante s^*_i allora diremo che $\mathbf{s}^*$ è un **equilibrio di strategie dominanti.** Una strategia s_i è **non dominata** se non esiste alcuna strategia s'_i che domina s_i.

Notiamo che, a differenza di quanto accade nei giochi ad informazione completa, nei giochi Bayesiani gli spazi delle strategie non sono dati nella rappresentazione in forma normale del gioco, ma vengono costruiti a partire dallo spazio dei tipi e delle azioni: l'insieme S_i delle possibili strategie[2] (pure) del giocatore i è l'insieme di tutte le funzioni con dominio T_i e a valori in A_i.

Notiamo pure che il fatto che una strategia specifichi una azione ammissibile per ogni tipo è essenziale: potrebbe sembrare che la realizzazione di un segnale, per un dato giocatore i, possa fargli perdere interesse nei confronti delle azioni che i avrebbe scelto se la realizzazione fosse stata diversa, ma è bene tener presente che il giocatore i è interessato anche a quello che faranno tutti gli altri, il che dipende, a sua volta, da ciò che gli altri pensano che lui farà per ogni segnale $t_i \in T_i$. Quindi per decidere cosa fare anche quando il tipo è stato già estratto, il giocatore i dovrà pensare a ciò che egli avrebbe fatto se ognuno degli altri tipi in T_i fosse stato estratto.

Chiarito ciò diamo la definizione di equilibrio di Nash Bayesiano che apparirà più complicata nella forma ma non nella sostanza: analogamente al caso di informazione completa, chiederemo che, in equilibrio, la strategia di ogni giocatore sia la risposta ottima alle strategie degli altri, ovvero un equilibrio di Nash-Bayes può essere rivisto come un equilibrio di Nash per un gioco Bayesiano.

Definizione 18. Un **equilibrio di Nash-Bayes** di un gioco ad informazione incompleta è un vettore di strategie $\mathbf{s}^* = (s^*_1, \ldots, s^*_n)$ tale che per ogni giocatore i e per ogni $t_i \in T_i$, $s^*_i(t_i)$ risolva il problema

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{\mathbf{t}_{-i} \in T_{-i}} u_i\left(s^*_1(t_1), \ldots, s^*_{i-1}(t_{i-1}), a_i, s^*_{i+1}(t_{i+1}), \ldots, s^*_n(t_n); \mathbf{t}\right) p_i(\mathbf{t}_{-i}|t_i)$$

o equivalentemente per ogni giocatore i, per ogni $t_i \in T_i$ e per ogni $a_i \in A_i$

$$\mathbb{E}\left[u_i\left(\mathbf{s}^*(\mathbf{t}), \mathbf{t}\right)|t_i\right] \geq \mathbb{E}\left[u_i\left(a_i, \mathbf{s}^*{}_{-i}(\mathbf{t}_{-i}), \mathbf{t}\right)|t_i\right] \tag{2.0.1}$$

dove $\mathbf{s}^*(\mathbf{t}) = (s^*_i(t_i))_{i \in N}$ denota il vettore delle azioni di tutti i giocatori e $\mathbf{s}^*_{-\mathbf{i}}(\mathbf{t}_{-\mathbf{i}}) = \left(s^*_j(t_j)\right)_{j \neq i}$ denota il vettore di tutte le azioni degli altri giocatori.

[2] Sebbene non sia fondamentale ai nostri scopi citiamo qui due diversi approcci strategici: *separating* e *pooling*. Nelle strategie separating ogni tipo $t_i \in T_i$ sceglie una diversa azione $a_i \in A_i$, invece nelle strategie pooling tutti i tipi scelgono la stessa azione.

Dunque, in una situazione di equilibrio, in analogia a quanto visto nel caso di giochi ad informazione completa, nessun giocatore è disposto a cambiare la propria strategia nemmeno se tale cambiamento riguardasse una sola azione da parte di un tipo.

Osservazione 2. Nelle notazione della Definizione 18 sia s_i tale che $s_i \neq s_i^*$. Allora per ogni i e per ogni t_i la relazione (2.0.1) vale anche per $a_i = s_i(t_i)$. Dunque applicando il valore atteso ad ambo i lati della (2.0.1) abbiamo che se $\mathbf{s}^*$ è un equilibrio di Nash-Bayes allora per ogni i e per ogni strategia s_i

$$\mathbb{E}\left[u_i\left(\mathbf{s}^*(\mathbf{t}), \mathbf{t}\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[u_i\left(s_i(t_i), \mathbf{s}^*{}_{-i}(\mathbf{t}_{-i}), \mathbf{t}\right)\right] \tag{2.0.2}$$

La disuguaglianza (2.0.1) dice che per ogni i, la strategia s_i^* è ottimale rispetto ad $\mathbf{s}^*{}_{-i}$ quando è valutata in uno *stato intermedio*, ovvero quando i giocatori conoscono i loro segnali. Invece la disuguaglianza (2.0.2) dice che s_i^* è ottimale rispetto ad $\mathbf{s}^*_{-\mathbf{i}}$ quando è valutata in uno *stato ex-ante*, cioè prima che i giocatori conoscano i loro segnali. In questo senso possiamo dire che *l'ottimalità intermedia* implica *l'ottimalità ex-ante*.

Nel seguito con il termine *equilibrio* ci riferiremo sempre ad un equilibrio di Nash-Bayes.

Definizione 19. Un **equilibrio ex post** è un equilibrio di Nash-Bayes $\mathbf{s}^*$ tale che per ogni i, per ogni $\mathbf{t} \in T$ e per ogni a_i,

$$u_i(\mathbf{s}^*(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \geq u_i(a_i, \mathbf{s}^*{}_{-i}(\mathbf{t}_{-i}), \mathbf{t})$$

In altre parole un equilibrio ex post è un particolare equilibrio tale che se i segnali di tutti gli altri giocatori sono conosciuti dal giocatore i, sarà ancora ottimale, per i, scegliere l'azione $\mathbf{s}_i^*(t_i)$. Ovvero ancora, le azioni $(s_i^*(t_i))_{i=1,\dots,N}$ costituiscono un equilibrio di Nash in cui ogni giocatore i scelga un'azione $a_i \in A_i$ e ha la funzione $u_i(\cdot, \mathbf{t})$ come payoff.

2.1 Esistenza di equilibri in strategia pura in giochi ad informazione incompleta

Nelle applicazioni è estremamente importante il ruolo che rivestono gli equilibri in strategia pura. Pensiamo ai casi, come ad esempio le aste, in cui i giocatori devono decidere il prezzo da proporre per aggiudicarsi un bene. In questi i giocatori vorrebbero determinare un (unico) prezzo da proporre, ovvero ancora vorrebbero che gli equilibri del gioco fossero strategie pure.

Presenteremo qui alcuni risultati, dovuti a Susan Athey [1], che forniscono delle condizioni per l'esistenza di equilibri in strategia pura per una classe di giochi ad informazione incompleta, tra cui rientrano anche i formati d'asta che analizzeremo in seguito.

Per brevità omettiamo le dimostrazioni che sono comunque ben esposte in [1].

Cominciamo considerando un gioco ad informazione incompleta come nella Definizione 15 in cui il giocatore i osserva il suo segnale $t_i \in T_i \equiv [\underline{t}_i, \bar{t}_i] \subset \mathbb{R}$ e sceglie la sua azione a_i in un insieme compatto $A_i \subset \mathbb{R}$. Siano $\bar{a}_i = \max A_i$ e $\underline{a}_i = \min A_i$. Indichiamo ancora con u_i il payoff del giocatore i e con $f(\mathbf{t})$ la densità di probabilità ex-ante e con $f_i(\mathbf{t}_{-i}|t_i)$ la *credenza* del giocatore i. Indicate con $s_j : [\underline{t}_j, \bar{t}_j] \to A_j$ le strategie degli avversari di i, $\forall j \neq i$, definiamo la funzione obiettivo:

$$U_i(a_i, t_i, \mathbf{s_{-i}}(\cdot\,)) \equiv \int_{\mathbf{t}_{-i}} u_i((a_i, \mathbf{s}_{-i}(\mathbf{t}_{-i})), \mathbf{t}) f_i(\mathbf{t}_{-i}|t_i) d\mathbf{t}_{-i} = E\left[u_i((a_i, \mathbf{s}_{-i}(\mathbf{t}_{-i})), \mathbf{t})|t_i\right]$$

Definizione 20. Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathit{\Sigma})$ e una misura μsu tale spazio, un insieme $A \subset \Omega$ in $\mathit{\Sigma}$ è detto **atomo** se $\mu(A) > 0$ e se per ogni sottoinsieme misurabile $B \subset A$, si ha che $\mu(B) \in \{0, \mu(A)\}$. Una misura σ-finita μ è detta **atomica** se esiste una partizione di Ω in una quantità numerabile insiemi misurabili che sono atomi o di misura nulla. Una misura μ è **non-atomica** se non ha atomi.

Assunzione 1. (A1) Assumiamo che i segnali abbiano densità congiunta che sia limitata e **non-atomica** e che

$$\int_{x_{-i} \in S} u_i((a_i, \mathbf{s}_{-i}(\mathbf{t}_{-i})), \mathbf{t}) f(\mathbf{t}_{-i}|t_i) d\mathbf{t}_{-i}$$

esiste finito in ogni sottoinsieme convesso S e per ogni funzione misurabile $s_j : [\underline{t}_j, \bar{t}_j] \to A_j$, $j \neq i$.

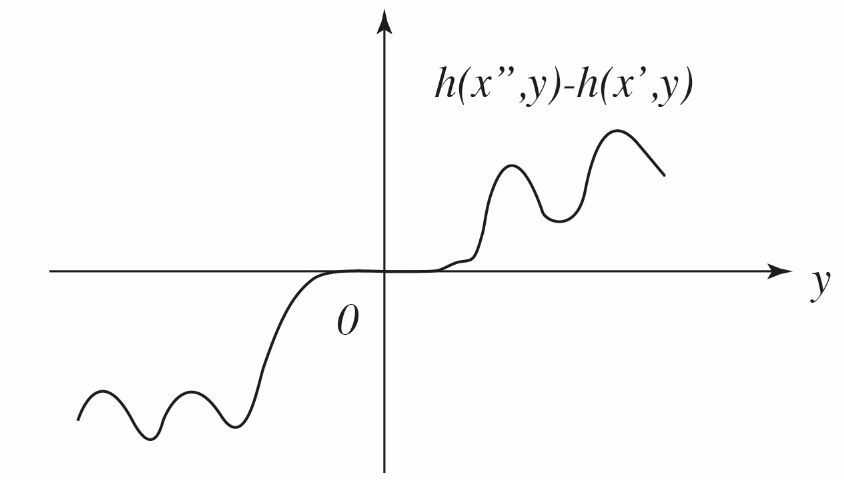
Definizione 21. Consideriamo una funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Diremo che $h(x, y)$ soddisfa la proprietà[3] **«Single Crossing Property of Incremental Returns» (SCP-IR)** in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se per ogni $x'' > x'$ e per ogni $y'' > y'$ tali che $h(x'', y') - h(x', y') \geq 0$ implica $h(x'', y'') - h(x', y'') \geq 0$ oppure con la disuguaglianza stretta: $h(x'', y') - h(x', y') > 0$ implica $h(x'', y'') - h(x', y'') > 0$

[3]Dovuta a Milgrom e Shannon, vedi [10].

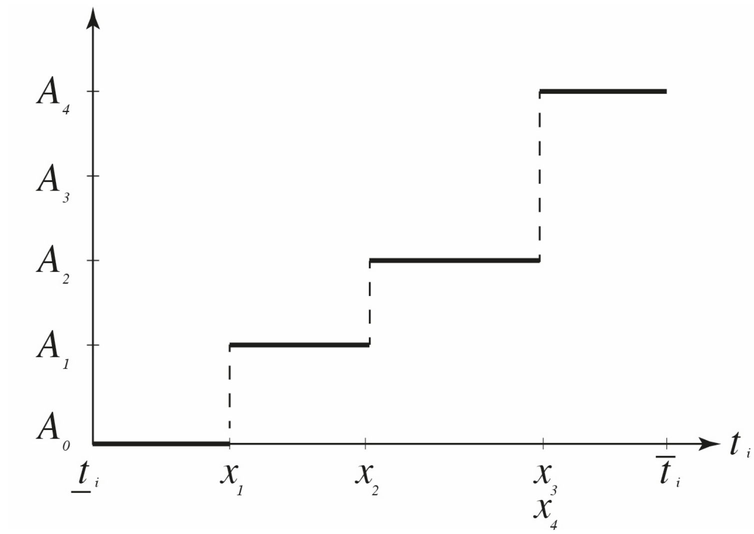
Diremo che $h(x,y)$ soddisfa la proprietà **SCP-IR debole** se per ogni $x'' > x'$ e per ogni $y'' > y'$ tali che $h(x'',y') - h(x',y') > 0$ implica $h(x'',y'') - h(x',y'') \geq 0$.

La definizione di SCP-IR richiede che gli incrementi di h rispetto alla x attraversino lo zero al massimo una volta, dal basso, come funzione di y.



Definizione 22. Diremo che un gioco ad informazione incompleta soddisfa la condizione **«Single Crossing Condition» SCC** se per ogni giocatore i la funzione obiettivo $U_i(a_i, t_i, \mathbf{s}_{-i}(\cdot\,))$ soddisfa la proprietà SCP-IR in (a_i, t_i), qualora ogni suo avversario $j \neq i$ usi una strategia $s_j : [\underline{t}_j, \bar{t}_j] \to A_j$ non decrescente.

Osserviamo che quando l'insieme delle azioni è finito ogni strategia non decrescente $s_i(t_i)$ è una funzione a scalini.



La strategia può essere descritta semplicemente dal valore del segnale t_i nel quale il giocatore «salta» da una azione alla successiva (più grande).

Grazie a questa osservazione, usando il teorema di punto fisso di Kakutani e il concetto di miglior risposta, in [1] si dimostra che:

Teorema 2. *Assumiamo che valgano A1 e SCC. Se A_i è finito per ogni i il gioco ha un equilibrio in strategia pura, dove le strategie di ogni giocatore $s_i(t_i)$ sono non decrescenti come funzioni di t_i.*

Dimostrazione. Per i dettagli della dimostrazione si veda [1]. Qui notiamo che l'ipotesi sulle azioni finite gioca due ruoli fondamentali ai fini dell'esistenza di tali equilibri:

1) garantisce che esiste una azione ottima per ogni segnale;

2) semplifica la descrizione delle strategie che possono essere rappresentate come vettori finito-dimensionali. □

Questo teorema apre la strada per costruire equilibri di giochi con un «continuum» di azioni.

Teorema 3. *Assumiamo che valga A1. Supponiamo che:*

i) per ogni giocatore i, $A_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$;

ii) per ogni giocatore i, $u_i(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ è continuo in $\mathbf{a}$ su $A = \prod_{i=1}^{N} A_i$ e per ogni $\mathbf{t} \in T = \prod_{i=1}^{N} T_i$;

iii) per ogni sottoinsieme $A' \subset A$ finito esiste un equilibrio in strategie non decrescenti.

Allora esiste un equilibrio in strategia pura con strategie non decrescenti nel gioco in cui i giocatori scelgono azioni dall'insieme A

Dimostrazione. La dimostrazione procede facendo vedere che il limite di una successione di equilibri in giochi con azioni finite è un equilibrio del gioco limite. Per i dettagli si veda [1]. □

Corollario 1. *Assumiamo che valga A1 e che sia soddisfatta la condizione SCC. Supponiamo che:*

i) per ogni giocatore i, $A_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$;

ii) per ogni giocatore i, $u_i(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ è continuo in $\mathbf{a}$ su $A = \prod_{i=1}^{N} A_i$ e per ogni $\mathbf{t} \in T = \prod_{i=1}^{N} T_i$;

Allora esiste un equilibrio in strategia pura con strategie non decrescenti.

Dimostrazione. Si veda [1]. □

Notiamo esplicitamente che questo corollario stabilisce che l'assunzione fatta nel Teorema 2 sul numero finito di azioni può essere omessa per i giochi che soddisfano la condizione SCC. Nella Sezione 2.2 ci occuperemo della caratterizzazione dei giochi che soddisfano tale proprietà.

2.2 Caratterizzazione dei giochi SCC

I risultati che presentiamo in questa sezione serviranno per classificare una classe di giochi, tra cui rientrano le aste che analizzeremo in seguito, che soddisfano la condizione SCC. Tali risultati fanno uso delle nozioni di funzioni *supermodulari*, *log-supermodulari* e della nozione di variabili aleatorie *affiliate* che sono trattate in appendice.

Teorema 4. *Assumiamo A1 e supponiamo che:*

i) per ogni i il payoff u_i sia supermodulare in $\mathbf{a}$e (a_i, t_j), $j = 1, \ldots, N$;

ii) i segnali sono affiliati.

Allora il gioco soddisfa la SCC.

Dimostrazione. Si veda [1]. □

Questo teorema si applica ai giochi il cui payoff è additivamente separabile, (si pensi ai casi in cui si ha un costo tale che il payoff è della forma $u_i(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = h_i(\mathbf{a}) - c_i(a_i, t_i)$ oppure $u_i(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = h_i(\mathbf{a}, t_i) - c_i(a_i,)$, in quanto la somma preserva la supermodularità). Payoff di questo genere sono tipici nelle situazioni di oligopolio in cui due o più aziende cercano una strategia che determini la quantità di bene da produrre (oligopolio alla Curnot) o il prezzo da proporre per aggiudicarsi o vendere il bene in questione (oligopolio alla Bertrand).

Per i giochi in cui il payoff è moltiplicativamente separabile (si pensi ai casi in cui si ha un costo tale che il payoff è della forma $u_i(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = h_i(\mathbf{a}) \cdot c_i(a_i, t_i)$ oppure $u_i(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = h_i(\mathbf{a}, t_i) \cdot c_i(a_i, t_i)$, in quanto la moltiplicazione preserva la supermodularità) vale il seguente:

Teorema 5. *Assumiamo A1 e supponiamo che:*
i) per ogni i il payoff $u_i(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ *sia log-supermodulare e non negativo;*
ii) i segnali sono affiliati.
Allora il gioco soddisfa la SCC.

Dimostrazione. Si veda [1]. □

Capitolo 3

Aste con fornitori asimmetrici

In letteratura il primo modello che può essere applicato ad aste in cui la domanda del mercato, relativa al bene venduto, è indipendente dal prezzo dello stesso bene (come avviene di fatto nei mercati elettrici) è il modello del matematico francese Joseph Louis François Bertrand, e risale al 1883. Tale modello è stato ripreso e adattato ai mercati energetici da von der Fehr e Harbord nel 1993 in [15] e poi perfezionato nel 2006 da Fabra, von der Fehr e Harbord nell'articolo «Designing electricity auctions»[3].

In questo capitolo, usando essenzialmente la teoria dei giochi ad informazione completa, esposta nel Capitolo 1, ci proponiamo di costruire un modello per la ricerca degli equilibri di Nash, simile nella sostanza a quello descritto in [3].

Sebbene tale modello non aderisca a pieno alla realtà è comunque molto interessante in quanto suggerisce un buon metodo per la ricerca degli equilibri anche in situazioni più generali. Di fatto l'approccio proposto da von der Fehr e Harbord, ovvero studiare gli equilibri dividendo la loro analisi in base allo stato della domanda, ha avuto molto successo in letteratura in quanto rende più agevole anche il confronto tra i vari formati d'asta e quindi lo studio della loro efficienza.

I formati d'asta di cui noi ci occuperemo sono le **aste discriminatorie** (quelle aste in cui il prezzo pagato è pari al prezzo offerto) e le **aste uniformi** (dove il prezzo pagato è pari al prezzo accettato più competitivo). La regola di allocazione del bene, in ogni tipo di asta, è implicita, nel senso che non dipende dal formato d'asta, quanto piuttosto dalle offerte dei singoli partecipanti: chi fa offerte più competitive si aggiudicherà quantità maggiori di bene a prescindere dal pagamento finale (la ricezione del payoff), che invece dipende dal tipo di asta.

Per semplicità analizzeremo gli equilibri solo in situazione di duopolio (due soli partecipanti all'asta). In effetti, nella maggior parte dei casi reali, si osserva che ci sono al più due grandi fornitori che si dividono la maggior parte della domanda di mercato e una serie di piccoli produttori minori che competono per la domanda residuale, ovvero quella che non è coperta dalla capacità produttiva dei grandi fornitori (in altre parole i casi reali rientrano spesso nelle classi monopolistiche e duopolistiche).

3.1 Il duopolio di base e il paradosso di Bertrand

Iniziamo con il caso più semplice e più estremo di competizione: due aziende producono un bene omogeneo senza vincoli sulla quantità e ad un prezzo fissato. Assumiamo che se le imprese fissano lo stesso prezzo si dividono il mercato in parti uguali e che non abbiano costi fissi. È facile rendersi conto che l'impresa che fissa il prezzo più basso cattura tutto il mercato, assumiamo allora che il costo marginale sia lo stesso per tutti e indichiamo tale costo marginale con $c_i = c$, per $i = 1, 2$ e che la capacità k_i, per $i = 1, 2$, delle due aziende sia sufficientemente grande da soddisfare la domanda di mercato. Formalmente possiamo dire che la capacità delle due imprese appartiene all'insieme

$$\mathbb{K} = \left\{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2_+ : k_i > \theta, i = 1, 2\right\}$$

Quindi ogni imprese dovrà scegliere il prezzo, $b_i \in \mathbb{R}_+$, a cui vendere il bene, in modo da massimizzare il proprio payoff, che coincide con i profitti[1]:

$$\pi_i(b_i) = \begin{cases} \theta(b_i - c) & \text{se} \quad b_i < b_j \\ \dfrac{\theta}{2}(b_i - c) & \text{se} \quad b_i = b_j \\ 0 & \text{se} \quad b_i > b_j \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Per trovare l'equilibrio di Nash che risolve il modello, procediamo verificando se, per ogni possibile combinazione (b_1, b_2) esiste una deviazione

[1]Nel caso di oligopolio con n aziende il profitto espresso nella formula 3.1.1 diventa

$$\pi_i(b_i) = \begin{cases} (b_i - c)\theta & \text{se} \quad b_i = \min_{j=1,\dots n}\{b_j\} \\ \dfrac{1}{k}(b_i - c)\theta & \text{se} \quad k \leq n \quad \text{aziende} \quad \text{fissano} \quad b_i = \min_{j=1,\dots n}\{b_j\} \\ 0 & \text{se} \quad b_i > \min_{j=1,\dots n}\{b_j\} \end{cases}$$

profittevole per almeno uno dei due giocatori. Quindi, per $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, sono possibili i seguenti casi:

1. Sia $b_i > b_j > c$. Allora $\pi_i(b_i) = 0$ e $\pi_j(b_j) = \theta(b_j - c)$. Ma $\exists\, b'_i$ tale che $c < b'_i < b_j \Rightarrow \pi_i(b_i) > 0$. Quindi b'_i costituisce una deviazione profittevole per i.

2. Sia $b = b_i = b_j > c$. Allora $\pi_i(b_i) = \dfrac{\theta}{2}(b - c) = \pi_j(b_j)$. Ma $\exists\, b'_i$ tale che $c < b'_i < b_j \Rightarrow \pi_i(b_i) = \theta(b_i - c) > \pi_j(b_j)$. Quindi b'_i costituisce una deviazione profittevole per i. (e analogamente scambiando gli indici i e j $\exists\, b'_j$ tale che $c < b'_j < b_i$ che costituisce una deviazione profittevole per i).

3. Sia $b_i = b_j = c$. Allora $\pi_i(b_i) = 0 = \pi_j(b_j)$. Questa volta $\forall\, b'_i < b_j = c$ si avrebbe $\pi_i(b_i) < 0$ e analogamente $\forall b'_i < b_j = c$ si avrebbe comunque $\pi_i(b_i) = 0$ e lo stesso vale per j. ovvero ogni ribasso o rialzo di b_i e b_j darebbe un payoff negativo o comunque nullo, quindi non esiste una deviazione profittevole per entrambi i giocatori.

Pertanto l'offerta $b = b_1 = b_2 = c$ è l'equilibrio di Nash e la soluzione del modello.

Osservazione 3. Notiamo la non continuità del modello di Bertrand: un cambiamento marginale nel prezzo sposta completamente la domanda da un produttore ad un altro.

il risultato a cui porta questo modello va sotto il nome di *paradosso di Bertrand.* Nella realtà questo risultato non si verifica quasi mai, sia perché i beni potrebbero non essere perfettamente omogenei[2], sia per il fenomeno di collusione tra le grandi imprese che impongono cartelli sui prezzi e, soprattutto, perché nella quasi totalità dei casi, i costi marginali sono informazione privata delle imprese e le imprese hanno vincoli sulla capacità produttiva. In altre parole, nella realtà, un cambiamento marginale del prezzo non è sufficiente a spostare tutta la domanda di mercato nel mondo reale.

Prima di esaminare una "via di fuga" dal paradossale risultato di Bertrand, consideriamo cosa accadrebbe in una versione oligopolistica, con $n > 2$ imprese. In tale situazione l'equilibrio di Nash prevede che almeno due imprese scelgano il prezzo uguale al costo marginale, e tutte le altre dovranno

[2]e quindi un consumatore sceglierà da che impresa acquistare, non solo in base al prezzo, ma tendendo conto di una serie di caratteristiche del prodotto (area geografica, qualità, etica di produttiva, ecc.)

scegliere un qualunque prezzo non inferiore, ma poiché siamo in una condizione di informazione completa sui costi marginali e l'interesse principale dei fornitori rimane quello di massimizzare il profitto, gli stessi argomenti usati per trovare l'equilibrio in caso di duopolio, portano all'irrilevanza del numero di imprese che partecipano all'asta: tutti proporranno un prezzo pari al costo marginale c

3.2 Vincoli sulle capacità e strategie miste

In questo paragrafo cercheremo di superare il paradosso di Bertrand imponendo vincoli sulla capacità produttiva e faremo assunzioni più realistiche sui costi marginali che non supporremo identici per ogni fornitore.

Supponiamo che due produttori competano per fornire il mercato elettrico e che ognuno di essi sia a conoscenza dei costi marginali e delle capacità produttive di tutti i partecipanti all'asta.

Per $i = 1, 2$ chiamiamo:

- $k_i > 0$ la capacità dei fornitori.
- $c_i \geq 0$ il costo marginale.
- $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \subseteq (0, k_1 + k_2)$ la quantità di energia elettrica richiesta dal mercato.
- $\bar{P}$ il prezzo di riserva del mercato, ovvero il prezzo massimo fissato dal banditore oltre il quale le offerte non saranno accettate.
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ il profilo di offerta, dove b_i è il prezzo minimo a cui il fornitore i è disposto a vendere tutta la sua capacità, ovvero ogni fornitore fa una sola offerta[3] e $c_i \leq b_i \leq \bar{P}$.

Questa situazione può essere interpretata come un gioco strategico in cui i giocatori sono i fornitori, le strategie sono i prezzi possibili e il payoff è dato dal profitto.

Sulla base del profilo $\mathbf{b}$ possono verificarsi le seguenti evenienze:

1. Se i fornitori presentano offerte diverse, supponiamo per esempio che il fornitore i proponga l'offerta più bassa ($b_i < b_j$), allora i si aggiudica la vendita della quantità di energia pari a $\min\{\theta, k_i\}$. Se la capacità del fornitore i non è in grado di soddisfare la domanda totale, cioè se $\theta > k_i$, il fornitore j si aggiudicherà la vendita della quantità $\theta - k_i$.

[3] In altre parole lo spazio delle strategie di ogni fornitore è l'intervallo $[c_i, \bar{P}]$

2. Se i fornitori inviano la stessa offerta allora il fornitore i è messo al primo posto se è stato il primo ad inviare l'offerta. Assumiamo che ciò accada con probabilità $p_i = \frac{1}{2}$, per $i = 1, 2$.

Le quantità attese assegnate ai fornitori, per $i \neq j$ e $i, j = 1, 2$, possono essere formalizzate come segue:

$$q_i(\theta, \mathbf{b}) = \begin{cases} \min\{\theta, k_i\} & \text{se} \quad b_i < b_j \\ p_i \min\{\theta, k_i\} + (1 - p_i) \min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} & \text{se} \quad b_i = b_j \\ \min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} & \text{se} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Il profitto dell'impresa i, per $i \neq j$ e $i, j = 1, 2$, è dato da:

1. **Asta Discriminatoria**: il pagamento ricevuto dal fornitore i per ogni quantità positiva è pari al prezzo che ha offerto ogni volta che l'offerta è accettata in toto o in parte:

$$\pi_i^d(\theta, \mathbf{b}) = q_i(\theta, b)[b_i - c_i]$$

2. **Asta Uniforme**: il pagamento ricevuto dal fornitore i per ogni quantità positiva è pari al prezzo più alto accettato in asta: dato un valore di θ e un profilo $\mathbf{b}$ il profitto per il fornitore $i = 1, 2$ con $i \neq j$ si ha

$$\pi_i^u(\theta, b) = \begin{cases} q_i(\theta, \mathbf{b})[b_j - c_i] & \text{se } b_i < b_j \text{ e } \theta > k_i \\ q_i(\theta, \mathbf{b})[b_i - c_i] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che, a differenza del modello visto nella sezione precedente questa volta il profitto dipende non solo dai prezzi offerti ma anche dalle capacità produttive delle imprese. Ciò ci consentirà di individuare dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}_+^2$ che garantiranno l'esistenza di equilibri di Nash in strategia mista, che garantiscono profitti medi positivi, ogni volta che le capacità produttive saranno elementi di tali insiemi.

Analizzeremo gli equilibri di Nash in base allo stato della domanda distinguendo il caso in cui lo spazio delle azioni (prezzi) è discreto dal caso in cui lo spazio delle azioni è un intervallo di $\mathbb{R}$. Nella realtà i prezzi offerti possono avere al più due cifre decimali quindi, nel caso discreto, quantizzeremo le offerte possibili indicando con $\varepsilon = 0,01$ la minima differenza tra due azioni.

Notiamo subito che, sia nel caso continuo che nel caso discreto e in tutti e due i formati d'asta, se $\theta \geq k_1 + k_2$ allora la capacità totale dei fornitori non basta a soddisfare la domanda di mercato, pertanto entrambi i fornitori si aggiudicheranno tutta la loro capacità al prezzo più alto possibile $\overline{P}$, ovvero possiamo enunciare il seguente

Lemma 1. *Se la domanda di mercato θ è tale $\theta \geq k_1 + k_2$, allora, in tutti e due i formati d'asta, il profilo d'offerta $(\overline{P}, \overline{P})$ rappresenta l'unico equilibrio di Nash in strategia pura.*

3.2.1 Caso Discreto

Iniziamo osservando che se $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2_+ : k_i > \theta, i = 1, 2\}$, ovvero se $\theta < \min\{k_1, k_2\}$, e se j è il fornitore meno efficiente, ovvero il fornitore con il costo marginale più alto, allora, in tutte e due i formati d'asta, egli non si aggiudica alcuna quantità di energia elettrica in quanto il suo avversario con l'offerta $(c_j - \varepsilon)$ si aggiudica tutta la domanda di mercato. La non arbitrarietà di ε fa si che l'offerta $(c_j - \varepsilon)$ sia effettivamente un equilibrio in strategia pura in quanto ogni deviazione da tale quantità non è profittevole per il fornitore i, mentre il fornitore j ha comunque profitto nullo. Dunque abbiamo provato che:

Lemma 2. *Se $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2_+ : k_i > \theta, i = 1, 2\}$, e se $c_2 < c_1$ allora il fornitore 1, con l'offerta $(c_2 - \varepsilon)$ si aggiudica tutta la domanda di mercato θ.*

Rimane il caso in cui $\min\{k_1, k_2\} \leq \theta < k_1 + k_2$. In questa situazione le condizioni dei fornitori non sono simmetriche: lo spazio delle azioni non è lo stesso, e questo è dovuto al fatto che i costi di produzione e le capacità produttive non sono identiche per tutti i fornitori.

Supponiamo in particolare che $c_1 < c_2 - \varepsilon < c_2$ e che $c_2 = \overline{P} - n\varepsilon$ per un opportuno $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo subito che per questo stato della domanda il fornitore 1 non sceglierà mai l'azione (prezzo) c_1 poiché può sempre scegliere l'azione $c_2 - \varepsilon$ che è la più grande azione non ammissibile per il fornitore 2 (perché più piccola del costo di produzione c_2). Questo, come vedremo, assicura guadagni minimi non nulli al fornitore 1. In altre parole il prezzo minimo che sceglierà il fornitore 1 sarà $c_2 - \varepsilon$.

Per $l = -1, 0, \ldots, n$ definiamo le quantità:

$$b^{(l)} := c_2 + l\varepsilon.$$

Si noti che la successione $\{b^{(l)}\}_{l=-1,\ldots,n}$ è crescente e che la famiglia:

$$\begin{aligned}
b^{(-1)} &= c_2 - \varepsilon = \overline{P} - (n+1)\varepsilon \\
b^{(0)} &= c_2 = \overline{P} - n\varepsilon \\
b^{(1)} &= c_2 + \varepsilon = \overline{P} - (n-1)\varepsilon \\
b^{(2)} &= c_2 + 2\varepsilon = \overline{P} - (n-2)\varepsilon \\
&\dots \\
b^{(n-2)} &= c_2 + (n-2)\,\varepsilon = \overline{P} - 2\varepsilon \\
b^{(n-1)} &= c_2 + (n-1)\,\varepsilon = \overline{P} - \varepsilon \\
b^{(n)} &= c_2 + n\varepsilon = \overline{P}
\end{aligned}$$

per $l = -1, \dots, n$ rappresenta le possibili azioni del fornitore 1, mentre per $l = 0, \dots, n$ rappresenta le possibili azioni del fornitore 2.

Siano inoltre, per $i = 1, 2$:

1. $A_i := \min\{\theta, k_i\}$ la quantità di energia che si aggiudica il fornitore i se la sua offerta è più bassa di quella del fornitore j.
2. $C_i := [\theta - k_j]^+$ la quantità che si aggiudica il fornitore i se la sua offerta è più alta di quella del fornitore j.
3. $B_i := \dfrac{A_i + C_i}{2}$ la quantità (attesa) che si aggiudicano i fornitori se propongono offerte identiche.
4. $p_i^l := b^{(l)} - c_i$ il guadagno per unità di energia elettrica che si aggiudica in asta il fornitore i con l'offerta $b^{(l)}$.

Così facendo il payoff dei fornitori può essere scritto come il prodotto tra i p_i^l e le quantità A_i, B_i e C_i. Si noti pure che $p_i^{-1} < p_i^0 < \dots < p_i^{n-1} < p_i^n$.

Si osservi pure che $A_i > C_i$ ovvero:

$$\min\{\theta, k_i\} > [\theta - k_j]^+ \tag{3.2.1}$$

Infatti sono possibili i seguenti due casi:

1. Se $\min\{\theta, k_i\} = k_i$, cioè
$$\theta \geq k_i,$$
allora per la validità della (3.2.1) vorremo che
$$k_i > (\theta - k_j)^+$$
che è sempre verificata per questo stato della domanda ($\theta < k_1 + k_2$). Dunque nel primo caso la (3.2.1) è vera.

2. Se $\min\{\theta, k_i\} = \theta$, cioè
$$k_i \geq \theta,$$
allora per la validità della (3.2.1) vorremo che
$$\theta > (\theta - k_j)^+$$
che è sempre vero perché $\theta > 0$ e $k_j > 0$. Dunque anche nel secondo caso la (3.2.1) è vera.

Inoltre essendo B_i la media di A_i e C_i si ha $A_i > B_i > C_i$.

Divideremo l'analisi degli equilibri in strategia pura in tre casi:

1. Nel primo caso analizziamo la situazione in cui la domanda di mercato è tale da rendere non nulli i residui di domanda C_1 e C_2, ovvero quando $\theta > \min\{k_1, k_2\}$.

2. Nel secondo caso analizziamo la situazione in cui $C_1 = 0$ e $C_2 \neq 0$.

3. Nel terzo caso avremo $C_1 \neq 0$ e $C_2 = 0$.

Il caso in cui $C_1 = C_2 = 0$, ovvero il caso di bassa domanda, è stato già analizzato in precedenza e abbiamo trovato un equilibrio di Nash in strategia pura.

Per trovare gli equilibri di Nash in strategia pura rappresentiamo le aste in oggetto come giochi in forma strategica in ciascuno dei 3 casi in esame. Nella prima colonna di ogni tabella ci sono le possibili azioni del fornitore 1 mentre nella prima riga ci sono le possibili azioni del fornitore 2. Nelle caselle ci sono le coppie del tipo $\left(\pi_1^l, \pi_2^m\right)$, con $l = -1 \ldots, n$ e $m = 0, \ldots, n$, che corrispondono ai valori dei payoff relativi alle azioni scelte in quella casella dai rispettivi fornitori.

3.2.1.1 Equilibri in strategia pura per l'asta discriminatoria

In questa sezione analizziamo gli equilibri in strategia pura per l'asta discriminatoria.

Caso 1: $C_1, C_2 \neq 0$

In questa situazione, per $i, j = 1, 2$ e $j \neq i$, abbiamo $A_i = k_i$ e $C_i = \theta - k_j$. La prima cosa che emerge dalla tabella in Figura (3.2.1) è che l'offerta c_2 rappresenta un'azione dominata per il fornitore 2 in quanto, per qualunque offerta scelta dal fornitore 1, il fornitore 2 ottiene comunque un

Tabella 3.2.1: Rappresentazione dell'asta discriminatoria come gioco in forma strategica nel Caso 1

Fornitore 2

Fornitore 1		c_2	$c_2+\varepsilon$	$\dots$	$\bar{P}-\varepsilon$	$\bar{P}$
	$c_2-\varepsilon$	$(p_1^{-1}A_1, 0)$	$(p_1^{-1}A_1, p_2^1 C_2)$	$\dots$	$(p_1^{-1}A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^{-1}A_1, p_2^n C_2)$
	c_2	$(p_1^0 B_1, 0)$	$(p_1^0 A_1, p_2^1 C_2)$	$\dots$	$(p_1^0 A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^0 A_1, p_2^n C_2)$
	$c_2+\varepsilon$	$(p_1^1 C_1, 0)$	$(p_1^1 B_1, p_2^1 B_2)$	$\dots$	$(p_1^1 A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^1 A_1, p_2^n C_2)$
	$c_2+2\varepsilon$	$(p_1^2 C_1, 0)$	$(p_1^2 C_1, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(p_1^2 A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^2 A_1, p_2^n C_2)$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\bar{P}-2\varepsilon$	$(p_1^{n-2} C_1, 0)$	$(p_1^{n-2} C_1, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-2} A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^{n-2} A_1, p_2^n C_2)$
	$\bar{P}-\varepsilon$	$(p_1^{n-1} C_1, 0)$	$(p_1^{n-1} C_1, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1} B_1, p_2^{n-1}B_2)$	$(p_1^{n-1} A_1, p_2^n C_2)$
	$\bar{P}$	$(p_1^n C_1, 0)$	$(p_1^n C_1, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(p_1^n C_1, p_2^{n-1}A_2)$	$(p_1^n B_1, p_2^n B_2)$

payoff nullo. Dunque possiamo cancellare la relativa colonna nelle azioni del fornitore 2 e automaticamente l'azione $(c_2 - \varepsilon)$ diventa un'azione dominata per il fornitore 1, e quindi possiamo cancellare dalla tabella la relativa riga.

In generale l'esistenza di equilibri in strategia pura dipende dal valore dai parametri c_2, c_1, k_1 e k_2. Per esempio supponiamo che il fornitore 1 scelga l'azione c_2. Il fornitore 2 in tale situazione sceglierà l'offerta $\bar{P}$ in quanto massimizza il suo guadagno ottenendo il pagamento massimo per il residuo di domanda (il fornitore 2 non sceglierà mai l'azione c_2 in quanto, come già visto, è un'azione dominata). Siamo dunque nello stato $(c_2, \bar{P})$. Dallo stato $(c_2, \bar{P})$ il fornitore 1 vorrebbe spostarsi dove il suo guadagno è certamente maggiore rispetto a quello che otterrebbe nello stato $(c_2, \bar{P})$, ovvero nello stato $(\bar{P} - \varepsilon, \bar{P})$, oppure nello stato $(\overline{P}, \overline{P})$ se

$$p_1^n B_1 \geq p_1^{n-1} A_1$$

da cui

$$p_1^n \left[\frac{A_1 + C_1}{2} \right] \geq p_1^{n-1} A_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$p_1^n C_1 \geq \left(2p_1^{n-1} - p_1^n \right) A_1$$

e poiché

$$p_1^l = c_2 + l\varepsilon - c_1 = (c_2 - c_1) + l\varepsilon$$

e, in questo caso, $A_1 = k_1$ e $C_1 = \theta - k_2$, sostituendo otteniamo

$$[(c_2 - c_1) + \varepsilon n]\,(\theta - k_2) \geq [2\,(c_2 - c_1) + 2\varepsilon\,(n-1) - (c_2 - c_1) - \varepsilon n]\,k_1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$[(c_2 - c_1) + \varepsilon n]\,(\theta - k_2) \geq [(c_2 - c_1) + \varepsilon(n-2)]\,k_1$$

ovvero

$$k_1 \leq \frac{(c_2 - c_1) + \varepsilon n}{(c_2 - c_1) + \varepsilon(n-2)}\,(\theta - k_2)$$

Supponiamo che il fornitore 1 trovi più conveniente scegliere l'azione $\left(\bar{P} - \varepsilon\right)$ (viceversa i ragionamenti che seguono saranno analoghi).

Allo stato $(\bar{P} - \varepsilon, \bar{P})$ il fornitore 2 potrebbe preferire lo stato $(\bar{P} - \varepsilon, \bar{P} - \varepsilon)$ dove la maggior quantità (media) di energia che riesce ad aggiudicarsi potrebbe far aumentare il suo payoff. Ciò in particolare accade se

$$p_2^{n-1} B_2 \geq p_2^n C_2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$p_2^{n-1}\left[\frac{A_2 + C_2}{2}\right] \geq p_2^n C_2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$p_2^{n-1} A_2 \geq \left(2p_2^n - p_2^{n-1}\right) C_2$$

e poiché $p_2^l = (c_2 + l\varepsilon) - c_2 = l\varepsilon$, $A_2 = k_2$, $C_2 = \theta - k_1$

$$\varepsilon\,(n-1)\,k_2 \geq \varepsilon\,[2n - (n-1))]\,(\theta - k_1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$[(n-1)]\,k_2 \geq [n+1)]\,(\theta - k_1)$$

ovvero se e solo se

$$k_2 \geq \frac{n+1}{n-1}\,(\theta - k_1) \tag{3.2.2}$$

Se la (3.2.2) non vale allora, poiché nessuno dei due fornitori ha incentivo a cambiare offerta, lo stato $(\bar{P} - \varepsilon, \bar{P})$ è un equilibrio di Nash. Se invece la (3.2.2) è verificata allora dallo stato $(\bar{P} - \varepsilon, \bar{P})$ arriviamo nello stato $(\bar{P} - \varepsilon, \bar{P} - \varepsilon)$. Analogamente a prima il fornitore 1 potrebbe preferire, allo stato $(\bar{P} - \varepsilon, \bar{P} - \varepsilon)$, lo stato $(\bar{P} - 2\varepsilon, \bar{P} - \varepsilon)$ a patto che

$$p_1^{(n-2)} A_1 \geq p_1^{(n-1)} B_1$$

che, con calcoli analoghi ai precedenti, equivale a

$$k_1 \geq \frac{(c_2 - c_1) + \varepsilon(n-1)}{(c_2 - c_1) + \varepsilon(n-3)} (\theta - k_2) \tag{3.2.3}$$

In generale i fornitori sono incentivati a tagliare la loro offerta ogni volta che

$$p_i^{(l)} A_i \geq p_i^{(l+1)} B_i \tag{3.2.4}$$

con $l = 1, \ldots, n-1$ se $i = 1$ e $l = 2, \ldots, n-1$ se $i = 2$, e ogni volta che

$$p_i^{(l)} B_i \geq p_i^{(l+1)} C_i \tag{3.2.5}$$

con $l = 0, \ldots, n-1$ se $i = 1$ e $l = 1, \ldots, n-1$ se $i = 2$.

In particolare se le relazioni (3.2.4) e (3.2.5) valgono per ogni stato, con calcoli analoghi a quelli già visti, si ha che

$$k_2 \geq \frac{3}{2}(\theta - k_1) \quad \text{e} \quad k_1 \geq \frac{(c_2 - c_1)}{(c_2 - c_1) - 2\varepsilon} (\theta - k_2) \tag{3.2.6}$$

e se ciò accade non esistono equilibri di Nash in strategia pura.

Quindi, per quanto visto finora, vale il seguente teorema.

Teorema 6. *In asta discriminatoria, vista come gioco strategico ad informazione completa descritto sopra, se la domanda di mercato θ è tale che $\theta < k_1 + k_2$ e per $i = 1, 2$, si ha che*

$$\theta - k_i > 0$$

l'offerta $\left(b^{l-1}, b^l\right)$ è un equilibrio di Nash in strategia pura se l è il più grande intero positivo tale che $1 \leq l \leq n$ e tale che

$$k_1 < \frac{(c_2 - c_1) + \varepsilon l}{(c_2 - c_1) + \varepsilon(l-2)} (\theta - k_2), \quad k_2 < \frac{l+1}{l-1}(\theta - k_1)$$

Se invece valgono le diseguaglianze:

$$k_2 \geq \frac{3}{2}(\theta - k_1), \quad k_1 \geq \frac{(c_2 - c_1)}{(c_2 - c_1) - 2\varepsilon} (\theta - k_2)$$

allora non esiste alcun equilibrio di Nash in strategia pura.

Tabella 3.2.2: Rappresentazione dell'asta discriminatoria come gioco in forma strategica nel Caso 2

Fornitore 2

Fornitore 1	c_2	$c_2+\varepsilon$	$\dots$	$\bar{P}-\varepsilon$	$\bar{P}$
$c_2-\varepsilon$	$(p_1^{-1}A_1, 0)$	$(p_1^{-1}A_1, p_2^1 C_2)$	$\dots$	$(p_1^{-1}A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^{-1}A_1, p_2^n C_2)$
c_2	$(p_1^0 B_1, 0)$	$(p_1^0 A_1, p_2^1 C_2)$	$\dots$	$(p_1^0 A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^0 A_1, p_2^n C_2)$
$c_2+\varepsilon$	$(0,0)$	$(p_1^1 B_1, p_2^1 B_2)$	$\dots$	$(p_1^1 A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^1 A_1, p_2^n C_2)$
$c_2+2\varepsilon$	$(0,0)$	$(0, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(p_1^2 A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^2 A_1, p_2^n C_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{P}-2\varepsilon$	$(0,0)$	$(0, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-2}A_1, p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^{n-2}A_1, p_2^n C_2)$
$\bar{P}-\varepsilon$	$(0,0)$	$(0, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}B_1, p_2^{n-1}B_2)$	$(p_1^{n-1}A_1, p_2^n C_2)$
$\bar{P}$	$(0,0)$	$(0, p_2^1 A_2)$	$\dots$	$(0, p_2^{n-1}A_2)$	$(p_1^n B_1, p_2^n B_2)$

Caso 2: $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$

Questo caso è del tutto analogo al Caso 1: l'esistenza degli equilibri in strategia pura dipende dal valore dei parametri. Come nel caso precedente, infatti, se analizziamo stato per stato tutte le possibili evenienze del gioco, si vede che, in riferimento alla tabella (3.2.2), l'esistenza degli equilibri di Nash in strategia pura dipende dalle condizioni (3.2.4) e (3.2.5): i fornitori sono incentivati a spostarsi dalle caselle della tabella situate in basso a destra per muoversi verso le caselle in alto a sinistra finché valgono le condizioni (3.2.4) e (3.2.5), in particolare se tali condizioni valgono per ogni possibile stato allora non esistono equilibri di Nash in strategia pura. In altre parole, per i ragionamenti già visti nel Caso 1, vale il seguente teorema:

Teorema 7. *In asta discriminatoria, vista come gioco strategico ad informazione completa descritto sopra, se la domanda di mercato θ è tale che $\theta < k_1 + k_2$ e se si ha che*

$$\theta - k_1 > 0, \quad \theta - k_2 \leq 0$$

l'offerta $\left(b^{l-1}, b^l\right)$ è un equilibrio di Nash in strategia pura se l è il più grande intero positivo tale che $1 \leq l \leq n$ e tale che

$$k_1 < \frac{(c_2 - c_1) + \varepsilon l}{(c_2 - c_1) + \varepsilon(l-2)}(\theta - k_2), \quad k_2 < \frac{l+1}{l-1}(\theta - k_1)$$

Tabella 3.2.3: Rappresentazione dell'asta discriminatoria come gioco in forma strategica nel Caso 3

Fornitore 2

Fornitore 1	c_2	$c_2+\varepsilon$	$\dots$	$\bar{P}-\varepsilon$	$\bar{P}$
$c_2-\varepsilon$	$(p_1^{-1}A_1,0)$	$(p_1^{-1}A_1,0)$	$\dots$	$(p_1^{-1}A_1,0)$	$(p_1^{-1}A_1,0)$
c_2	$(p_1^0B_1,0)$	$(p_1^0A_1,0)$	$\dots$	$(p_1^0A_1,0)$	$(p_1^0A_1,0)$
$c_2+\varepsilon$	$(p_1^1C_1,0)$	$(p_1^1B_1,p_2^1B_2)$	$\dots$	$(p_1^1A_1,0)$	$(p_1^1A_1,0)$
$c_2+2\varepsilon$	$(p_1^2C_1,0)$	$(p_1^2C_1,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(p_1^2A_1,0)$	$(p_1^2A_1,0)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{P}-2\varepsilon$	$(p_1^{n-2}C_1,0)$	$(p_1^{n-2}C_1,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-2}A_1,0)$	$(p_1^{n-2}A_1,0)$
$\bar{P}-\varepsilon$	$(p_1^{n-1}C_1,0)$	$(p_1^{n-1}C_1,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}B_1,p_2^{n-1}B_2)$	$(p_1^{n-1}A_1,0)$
$\bar{P}$	$(p_1^nC_1,0)$	$(p_1^nC_1,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(p_1^nC_1,p_2^{n-1}A_2)$	$(p_1^nB_1,p_2^nB_2)$

Se invece valgono le diseguaglianze:

$$k_2 \geq \frac{3}{2}(\theta - k_1)\,, \quad k_1 \geq \frac{(c_2-c_1)}{(c_2-c_1)-2\varepsilon}(\theta - k_2)$$

allora non esiste alcun equilibrio di Nash in strategia pura.

Caso 3: $C_1 \neq 0$**,** $C_2 = 0$

Come nei Casi 1 e 2 si ha che l'azione c_2 è una azione dominata per il fornitore 2 e che l'azione $(c_2-\varepsilon)$ è dominata per il fornitore 1. Pertanto nella tabella (3.2.3) possiamo cancellare la prima riga e la prima colonna.

Poiché $C_2 = 0$, dire che

$$p_i^{(l)}A_i \geq p_i^{(l+1)}B_i$$

con $l = 1,\dots,n-1$ se $i = 1$ e $l = 2,\dots,n-1$ se $i = 2$, e che

$$p_i^{(l)}B_i \geq p_i^{(l+1)}C_i$$

con $l = 0,\dots,n-1$ se $i = 1$ e $l = 1,\dots,n-1$ se $i = 2$, equivale a dire che

$$k_1 \geq \frac{(c_2-c_1)}{(c_2-c_1)-2\varepsilon}(\theta - k_2) \tag{3.2.7}$$

Se ciò accade allora solamente il fornitore 1, con l'offerta c_2, ha incentivo a partecipare all'asta, mentre il fornitore 2 non produce niente. Infatti il fornitore 1, proponendo un'offerta inammissibile per il fornitore 2, si aggiudica tutta la domanda di mercato e quindi rende sempre nullo il payoff del fornitore 2. Dunque abbiamo un equilibrio di Nash in strategia pura in cui solo il fornitore più efficiente partecipa all'asta (analogamente a quanto visto in bassa domanda). Se invece la (3.2.7) non vale si procede all'analisi degli equilibri in strategia pura analizzando tutti gli stati come visto nel Caso 1. In definitiva, per quanto detto, possiamo enunciare il seguente

Teorema 8. *In asta discriminatoria, vista come gioco strategico ad informazione completa descritto sopra, se la domanda di mercato θ è tale che $\theta < k_1 + k_2$ e se si ha che*

$$\theta - k_1 \leq 0, \quad \theta - k_2 > 0$$

l'offerta $\left(b^{l-1}, b^l\right)$ è un equilibrio di Nash in strategia pura se l è il più grande intero positivo tale che $1 \leq l \leq n$ e tale che

$$k_1 < \frac{(c_2 - c_1) + \varepsilon l}{(c_2 - c_1) + \varepsilon(l-2)}(\theta - k_2)\,, \quad k_2 < \frac{l+1}{l-1}(\theta - k_1)$$

Se invece vale le diseguaglianza:

$$k_1 \geq \frac{(c_2 - c_1)}{(c_2 - c_1) - 2\varepsilon}(\theta - k_2)$$

allora l'offerta c_2 rappresenta un equilibrio di Nash in strategia pura per il fornitore 1 per ogni possibile offerta del fornitore 2.

3.2.1.2 Equilibri in strategia mista per l'asta discriminatoria

Motivati dal fatto che non sempre esistono equilibri in strategia pura per l'asta discriminatoria, ci proponiamo qui di trovare gli equilibri in strategia mista. Per la Proposizione 9 vista nel Capitolo 1 sappiamo che, se le azioni dei giocatori sono finite, esiste sempre un equilibrio di Nash in strategia mista. Ricordando che una strategia mista è una distribuzione di probabilità definiamo, per $i = 1, 2$, la funzione non decrescente

$$F_i(b) := \mathbb{P}(b_i \leq b)$$

di supporto $S_i \subseteq \left\{b^{(l)} = c_2 + l\varepsilon, \quad l = -1, \ldots, n\right\}$. Osserviamo che $F_i(c_i) = 0$ in quanto le offerte minori o uguali al costo di produzione, poiché rendono il payoff negativo o nullo, sono azioni dominate e pertanto non appartengono al supporto delle strategie miste. Inoltre poiché le offerte non possono superare il prezzo di riserva di mercato deve essere $F_i(\bar{P}) = 1$.

Osserviamo pure che la probabilità che il fornitore i scelga un prezzo uguale a b' è

$$\mathbb{P}(b_i = b') = F_i(b') - F_i(b'^-) \geq 0$$

dove

$$F_i(b'^-) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} F_i(b' + \varepsilon) = F_i(b - \varepsilon)$$

Il payoff atteso del fornitore i, per ogni $b \in S_i$, può essere scritto come segue:

$$\begin{aligned} \pi_i(b, F_j) = {} & \underline{v}_i(b) F_j(b^-) + v_i(b) \left[F_j(b) - F_j(b^-)\right] + \bar{v}_i(b) \left[1 - F_j(b)\right] = \\ & = \underline{v}_i(b) F_j(b - \varepsilon) + v_i(b) \left[F_j(b) - F_j(b - \varepsilon)\right] + \bar{v}_i(b) \left[1 - F_j(b)\right] \end{aligned}$$

dove:

- $\underline{v}_i(b) := (b - c_i) \min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} = (b - c_i) C_i$ è il valore del payoff quando il fornitore i offre un prezzo più alto del fornitore j;
- $v_i(b) := (b - c_i) \dfrac{1}{2} \left(\min\{\theta, k_i\} + \min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\}\right) = (b - c_i) B_i$ è il valore del payoff se i due fornitori propongono lo stesso prezzo;
- $\bar{v}_i(b) := (b - c_i) \min\{\theta, k_i\} = (b - c_i) A_i$ è il valore del payoff se il fornitore i offre un prezzo più basso del fornitore j.

Per la Proposizione (11), indicati con F_1^* F_2^* gli equilibri in strategia mista e con S_1^* e S_2^* i relativi supporti, per $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$ si ha

$$\pi_i(b, F_j^*) = h_i \quad \forall b \in S_i^*$$

con h_i costante. Dunque

$$h_i = \underline{v}_i(b) F_j^*(b - \varepsilon) + v_i(b) \left[F_j^*(b) - F_j^*(b - \varepsilon)\right] + \bar{v}_i(b) \left[1 - F_j^*(b)\right]$$

da cui, usando il fatto che

$$\underline{v}_i(b) - v_i(b) = v_i(b) - \bar{v}_i(b) = \frac{1}{2}(b - c_i) \left(\min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} - \min\{\theta, k_i\}\right)$$

si ha, $\forall b \in S_i^*$:

$$\begin{aligned} h_i &= \underline{v}_i(b) F_j^*(b - \varepsilon) + v_i(b) \left[F_j^*(b) - F_j^*(b - \varepsilon)\right] + \bar{v}_i(b) \left[1 - F_j^*(b)\right] = \\ &= F_j^*(b) \left(v_i(b) - \bar{v}_i(b)\right) + F_j^*(b - \varepsilon) \left(\underline{v}_i(b) - v_i(b)\right) + \bar{v}_i(b) = \\ &= \left(F_j^*(b) + F_j^*(b - \varepsilon)\right) \left(v_i(b) - \bar{v}_i(b)\right) + \bar{v}_i(b) = \\ &= \left(F_j^*(b) + F_j^*(b - \varepsilon)\right) \frac{1}{2}(b - c_i) \left(\min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} - \min\{\theta, k_i\}\right) + \min\{\theta, k_i\} \end{aligned}$$

ovvero

$$h_i = \left(F_j^*(b) + F_j^*(b-\varepsilon)\right) \frac{1}{2} (b - c_i) \left(\min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} - \min\{\theta, k_i\}\right) + \min\{\theta, k_i\} \tag{3.2.8}$$

da cui segue facilmente che

$$\frac{F_j^*(b) + F_j^*(b-\varepsilon)}{2} = \frac{(b-c_i)\min\{\theta, k_i\} - h_i}{(b-c_i)\left(\min\{\theta, k_i\} - \min\left\{[\theta-k_j]^+, k_i\right\}\right)} = \tag{3.2.9}$$
$$= \frac{(b-c_i)A_i - h_i}{(b-c_i)(A_i - C_i)}$$

Definiamo ora la funzione

$$G_j(b) := \frac{F_j^*(b) + F_j^*(b-\varepsilon)}{2} = \frac{(b-c_i)A_i - h_i}{(b-c_i)(A_i - C_i)}$$

Affinché la (3.2.9) descriva bene la funzione di ripartizione F_j^* la funzione G_j deve essere crescente in b, ovvero $\forall b', b'' \in S_j^*$ tali che $b' \le b''$ deve essere

$$G(b') \le G(b'')$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{(b'-c_i)A_i - h_i}{(b'-c_i)(A_i - C_i)} \le \frac{(b''-c_i)A_i - h_i}{(b''-c_i)(A_i - C_i)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(b''-c_i\right)\left(b'-c_i\right)A_i - \left(b''-c_i\right)h_i \le \left(b''-c_i\right)\left(b'-c_i\right)A_i - \left(b'-c_i\right)h_i$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(b'-c_i\right)h_i \le \left(b''-c_i\right)h_i$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$h_i \ge 0$$

e notiamo che h_i è sempre non negativo in quanto, per definizione, rappresenta il *payoff medio* del fornitore i quando sceglie l'azione $b \in S_j^*$, ma per ogni azione $b \in S_j^*$ il payoff del fornitore i è non negativo come si evince dalle tabelle viste nel paragrafo precedente.

Lemma 3. *Se* (F_1^*, F_2^*) *è equilibrio di Nash in strategia mista, per* $i = 1, 2$, *si ha che* $\underline{b} := \min S_1^* = \min S_2^*$ *e* $\bar{b} := \max S_1^* = \max S_2^*$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\min S_i^* = \underline{b} < \min S_j^*$ allora si ha immediatamente che $\pi_i(\underline{b}, F_j^*) = \bar{v}_i(\underline{b})$ ovvero, per ogni $b \in \left\{\min S_i^*, \min S_i^* + \varepsilon, \ldots, \min S_j^*\right\}$ otteniamo

$$\pi_i(b, b-\varepsilon, F_j^*) = \bar{v}_i(b) = (b - c_i)\min\{\theta, k_i\}$$

che non è una funzione costante per $b \in \left\{\min S_i^*, \min S_i^* + \varepsilon, \min S_i^* + 2\varepsilon, \ldots, \min S_j^*\right\}$.
Analogamente se $\max S_j^* < \bar{b} = \max S_i^*$ per ogni $b \in \left\{\max S_j^*, \max S_j^* + \varepsilon, \ldots, \max S_i^*\right\}$ si ha $\pi_i(b, F_j^*) = \underline{v}_i(b)$ con $\underline{v}_i(b)$ non costante per ogni $b \in \left\{\max S_j^*, \max S_j^* + \varepsilon, \ldots, \max S_i^*\right\}$.
□

Nel seguito indichiamo con S^* l'insieme che contiene tutte le possibili azioni nel supporto degli equilibri in strategia mista. La cardinalità di S^* è certamente finita, supponiamo in particolare che S^* abbia $m+1$ elementi, ovvero che sia $\underline{b} + m\varepsilon = \bar{b}$ e quindi

$$\begin{aligned} S^* &= \{\underline{b}, \underline{b}+\varepsilon, \underline{b}+2\varepsilon, \ldots, \underline{b}+(m-1)\,\varepsilon, \underline{b}+m\varepsilon\} = \\ &= \left\{\bar{b}-m\varepsilon, \bar{b}-(m-1)\,\varepsilon \ldots, \bar{b}-2\varepsilon, \bar{b}-\varepsilon, \bar{b}\right\} \end{aligned}$$

Poiché una strategia pura è nel supporto delle strategie miste solo se è scelta con probabilità positiva, e poiché abbiamo visto nella sezione 3.2.1.1, relativa all'analisi degli equilibri in strategia pura, che la minima offerta[4] proposta dal fornitore 2 è $c_2 + \varepsilon$, per il lemma 3 segue immediatamente che la che la (3.2.9) è ben definita per ogni $b \in S^*$ in quanto, per $i = 1, 2$, si ha $\underline{b} \neq c_i$.

Con abuso di notazione, per $l = 0, \ldots, m$, indichiamo ancora con $b^{(l)} = \underline{b} + l\varepsilon$ gli elementi di S^*. La (3.2.9) può essere riscritta come segue:

$$F_j^*(b^{(l)}) + F_j^*(b^{(l-1)}) = 2\left(\frac{(b^{(l)} - c_i)A_i - h_i}{\left(b^{(l)} - c_i\right)(A_i - C_i)}\right) = 2\left(\frac{A_i - h_i^{(l)}}{A_i - C_i}\right) \tag{3.2.10}$$

dove

$$h_i^{(l)} := \frac{h_i}{b^{(l)} - c_i} \tag{3.2.11}$$

[4] Si ricordi che $c_2 + \varepsilon$ è la più piccola offerta non dominata per il fornitore 2 in tutti e tre i casi in analisi

Ora poiché $F_j^*(\bar{b}) = F_j^*(b^m) = 1$ si ha

$$F_j^*(b^m) + F_j^*(b^{(m-1)}) = 2\left(\frac{A_i - h_i^{(m)}}{A_i - C_i}\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} F_j^*(b^{(m-1)}) &= 2\left(\frac{A_i - h_i^{(m)}}{A_i - C_i}\right) - 1 = \\ &= 2\left(\frac{A_i - C_i + C_i - h_i^{(m)}}{A_i - C_i}\right) - 1 = \\ &= 2\left(1 + \frac{C_i - h_i^{(m)}}{A_i - C_i}\right) - 1 = \\ &= 1 - 2\left(\frac{h_i^{(m)} - C_i}{A_i - C_i}\right) \end{aligned}$$

Usando $F_j^*(b^{(m-1)})$ possiamo ricavare $F_j^*(b^{m-2})$, infatti dalla (3.2.10):

$$F_j^*(b^{m-1}) + F_j^*(b^{(m-2)}) = 2\left(\frac{A_i - h_i^{(m-1)}}{A_i - C_i}\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} F_j^*(b^{(m-2)}) &= 2\left(\frac{A_i - h_i^{(m-1)}}{A_i - C_i}\right) - 1 + 2\left(\frac{h_i^{(m)} - C_i}{A_i - C_i}\right) = \\ &= 1 + 2\left(\frac{h_i^{(m)} - h_i^{(m-1)}}{A_i - C_i}\right) = \\ &= 1 + 2\left(\frac{h_i^{(m)} - C_i}{A_i - C_i}\right) - 2\left(\frac{h_i^{(m-1)} - C_i}{A_i - C_i}\right) \end{aligned}$$

e con calcoli analoghi si ottiene

$$F_j^*(b^{(m-3)}) = 1 - 2\left(\frac{h_i^{(m)} - C_i}{A_i - C_i}\right) + 2\left(\frac{h_i^{(m-1)} - C_i}{A_i - C_i}\right) - 2\left(\frac{h_i^{(m-2)} - C_i}{A_i - C_i}\right)$$

Più in generale, per $l = 0, \dots, m-1$, si ha

$$F_j^*(b^l) = 1 + (-1)^l \sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k \, 2 \left(\frac{h_i^{(k)} - C_i}{A_i - C_i} \right) \tag{3.2.12}$$

Altro modo per determinare F_j^* è il seguente. Definiamo $b^{-1} := b^0 - \varepsilon = \underline{b} - \varepsilon$, e poiché $F_j^*(b^{-1}) = 0$ si ha

$$F_j^*(b^{(0)}) = 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(0)}}{A_i - C_i} \right)$$

da cui, sfruttando la formula

$$F_j^*(b^{(1)}) + F_j^*(b^{(0)}) = 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(1)}}{A_i - C_i} \right)$$

possiamo ricavare $F_j^*(b^1)$:

$$F_j^*(b^{(1)}) = 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(1)}}{A_i - C_i} \right) - 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(0)}}{A_i - C_i} \right)$$

Analogamente si ottiene

$$F_j^*(b^{(2)}) = 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(2)}}{A_i - C_i} \right) - 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(1)}}{A_i - C_i} \right) + 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(0)}}{A_i - C_i} \right)$$

e più in generale

$$F_j^*(b^{(l)}) = (-1)^l \sum_{k=0}^{l} (-1)^{(k)} \, 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(k)}}{A_i - C_i} \right) \tag{3.2.13}$$

Calcoliamo ora la costante h_i che grazie alla (3.2.11) consente di calcolare le $\left\{ h_i^{(l)} \right\}_{l=0,\dots,m}$ che a loro volta ci permettono di determinare completamente la F_j^*. A tale scopo imponiamo l'uguaglianza delle formule (3.2.12) e (3.2.13):

$$1 + (-1)^l \sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k \, 2 \left(\frac{h_i^{(k)} - C_i}{A_i - C_i} \right) = (-1)^l \sum_{k=0}^{l} (-1)^{(k)} \, 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(k)}}{A_i - C_i} \right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 + \frac{2\,(-1)^l}{A_i - C_i} \left[\sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k \left(h_i^{(k)} - C_i \right) - \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \left(A_i - h_i^{(k)} \right) \right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 + \frac{2\,(-1)^l}{A_i - C_i} \left[\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \, h_i^{(k)} - A_i \sum_{k=0}^{l} (-1)^{(k)} - C_i \sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k \right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{A_i - C_i}{2\,(-1)^l} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \, h_i^{(k)} - A_i \sum_{k=0}^{l} (-1)^k - C_i \sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \, h_i^{(k)} = A_i \sum_{k=0}^{l} (-1)^k + C_i \sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k - \frac{A_i - C_i}{2\,(-1)^l} \tag{3.2.14}$$

e usando la (3.2.11) otteniamo

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \, h_i^{(k)} = h_i \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{b^{(k)} - c_i} = h_i M \tag{3.2.15}$$

per una costante

$$M := \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{b^{(k)} - c_i}$$

Dunque usando la (3.2.15) la (3.2.14) diventa

$$h_i M = A_i \sum_{k=0}^{l} (-1)^k + C_i \sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k - \frac{A_i - C_i}{2\,(-1)^l}$$

Se m è pari otteniamo:

- per l pari

$$h_i M = A_i + 0 - \frac{A_i - C_i}{2} = \frac{A_i + C_i}{2}$$

- per l dispari

$$h_i M = 0 + C_i + \frac{A_i - C_i}{2} = \frac{A_i + C_i}{2}$$

e quindi per m pari abbiamo

$$h_i = \frac{A_i + C_i}{2M}$$

Se m è dispari otteniamo:

- per l pari

$$h_i M = A_i - C_i - \frac{A_i - C_i}{2} = \frac{A_i - C_i}{2}$$

- per l dispari

$$h_i M = 0 - 0 + \frac{A_i - C_i}{2} = \frac{A_i - C_i}{2}$$

e quindi per m dispari si ha:

$$h_i = \frac{A_i - C_i}{2M}$$

In conclusione possiamo affermare che:

Teorema 9. *In asta discriminatoria, vista come gioco strategico ad informazione completa descritto sopra, esiste un equilibrio di Nash in strategia mista del tipo* (F_1^*, F_2^*)*, dove, per* $i = 1, 2$ *e per* $l = 0, \ldots, m$*, si ha*

$$F_i^*(b^{(l)}) = 1 + (-1)^l \sum_{k=l+1}^{m} (-1)^k \, 2 \left(\frac{h_i^{(k)} - C_i}{A_i - C_i} \right) = (-1)^l \sum_{k=0}^{l} (-1)^{(k)} \, 2 \left(\frac{A_i - h_i^{(k)}}{A_i - C_i} \right)$$

con

$$h_i^{(l)} := \frac{h_i}{b^{(l)} - c_i}$$

dove

$$h_i = \begin{cases} \dfrac{A_i - C_i}{2M} & \text{se} \quad m \quad \text{è} \quad \text{dispari} \\ \dfrac{A_i + C_i}{2M} & \text{se} \quad m \quad \text{è} \quad \text{pari} \end{cases}$$

Tabella 3.2.4: Rappresentazione dell'asta uniforme come gioco in forma strategica nel Caso 1

Fornitore 2

Fornitore 1	c_2	$c_2+\varepsilon$	$\dots$	$\bar{P}-\varepsilon$	$\bar{P}$
$c_2-\varepsilon$	$(p_1^0 A_1, 0)$	$(p_1^1 A_1, p_2^1 C_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1} A_1, p_2^{n-1} C_2)$	$(p_1^n A_1, p_2^n C_2)$
c_2	$(p_1^0 B_1, 0)$	$(p_1^1 A_1, p_2^1 C_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1} A_1, p_2^{n-1} C_2)$	$(p_1^n A_1, p_2^n C_2)$
$c_2+\varepsilon$	$(p_1^1 C_1, p_2^1 A_2)$	$(p_1^1 B_1, p_2^1 B_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1} A_1, p_2^{n-1} C_2)$	$(p_1^n A_1, p_2^n C_2)$
$c_2+2\varepsilon$	$(p_1^2 C_1, p_2^2 A_2)$	$(p_1^2 C_1, p_2^2 A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1} A_1, p_2^{n-1} C_2)$	$(p_1^n A_1, p_2^n C_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{P}-2\varepsilon$	$(p_1^{n-2} C_1, p_2^{n-2} A_2)$	$(p_1^{n-2} C_1, p_2^{n-2} A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1} A_1, p_2^{n-1} C_2)$	$(p_1^n A_1, p_2^n C_2)$
$\bar{P}-\varepsilon$	$(p_1^{n-1} C_1, p_2^{n-1} A_2)$	$(p_1^{n-1} C_1, p_2^{n-1} A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1} B_1, p_2^{n-1} B_2)$	$(p_1^n A_1, p_2^n C_2)$
$\bar{P}$	$(p_1^n C_1, p_2^n A_2)$	$(p_1^n C_1, p_2^n A_2)$	$\dots$	$(p_1^n C_1, p_2^n A_2)$	$(p_1^n B_1, p_2^n B_2)$

3.2.1.3 Equilibri in strategia pura per l'asta uniforme

Passiamo all'analisi degli equilibri per l'asta uniforme.

Caso 1: C_1,$C_2 \neq 0$

Teorema 10. *In asta uniforme, vista come gioco strategico ad informazione completa descritto sopra, se la domanda di mercato θ è tale che $\theta < k_1 + k_2$ e per $i = 1, 2$, si ha che*

$$\theta - k_i > 0$$

i profili di offerta $(c_2 - \varepsilon, \bar{P})$ e $(c_2, \bar{P})$ sono un equilibri di Nash in strategia pura.

Dimostrazione. Nei profili di offerta in oggetto il fornitore 1 ottiene il massimo valore possibile per il suo payoff proponendo un'offerta inammissibile o non redditizia per il fornitore 2, mentre il fornitore 2, che in tali situazioni compete solo per il residuo di domanda, non può che proporre il prezzo di riserva del mercato per guadagnare il più possibile, ovvero per massimizzare il suo payoff.

□

Caso 2: $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$

Fornitore 2

Fornitore 1	c_2	$c_2+\varepsilon$	$\dots$	$\bar{P}-\varepsilon$	$\bar{P}$
$c_2-\varepsilon$	$(p_1^0A_1,0)$	$(p_1^1A_1,p_2^1C_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}A_1,p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^nA_1,p_2^nC_2)$
c_2	$(p_1^0B_1,0)$	$(p_1^1A_1,p_2^1C_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}A_1,p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^nA_1,p_2^nC_2)$
$c_2+\varepsilon$	$(0,0)$	$(p_1^1B_1,p_2^1B_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}A_1,p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^nA_1,p_2^nC_2)$
$c_2+2\varepsilon$	$(0,0)$	$(0,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}A_1,p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^nA_1,p_2^nC_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{P}-2\varepsilon$	$(0,0)$	$(0,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}A_1,p_2^{n-1}C_2)$	$(p_1^nA_1,p_2^nC_2)$
$\bar{P}-\varepsilon$	$(0,0)$	$(0,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(p_1^{n-1}B_1,p_2^{n-1}B_2)$	$(p_1^nA_1,p_2^nC_2)$
$\bar{P}$	$(0,0)$	$(0,p_2^1A_2)$	$\dots$	$(0,p_2^{n-1}A_2)$	$(p_1^nB_1,p_2^nB_2)$

Teorema 11. *In asta uniforme, vista come gioco strategico ad informazione completa descritto sopra, se la domanda di mercato θ è tale che $\theta < k_1 + k_2$ e se si ha che*

$$\theta - k_1 > 0, \quad \theta - k_2 \leq 0$$

i profili di offerta $(c_2 - \varepsilon, \bar{P})$ e $(c_2, \bar{P})$ sono un equilibri di Nash in strategia pura.

Dimostrazione. Osserviamo che la quantità C_1 rappresenta il residuo di domanda che potrebbe aggiudicarsi il fornitore 1 qualora offrisse un prezzo più alto del fornitore 2. D'altra parte, come nel caso precedente, il fornitore 1 può sempre scegliere un'offerta inammissibile o non redditizia per il fornitore 2, il quale potendo competere solo per aggiudicarsi la quantità C_2 proporrà il prezzo di riserva del mercato $\overline{P}$ per guadagnare il più possibile. Dunque il fatto che C_1 sia nullo non incide sugli equilibri trovati nel Caso 1.

□

Caso 3: $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$

In questa situazione le dinamiche del gioco dipendono dai parametri e ragionando come sopra si ha che:

Teorema 12. *In asta discriminatoria, vista come gioco strategico ad informazione completa descritto sopra, se la domanda di mercato θ è tale che $\theta < k_1 + k_2$ e se si ha che*

$$\theta - k_1 \leq 0, \quad \theta - k_2 > 0$$

allora:

Tabella 3.2.5: Rappresentazione dell'asta uniforme come gioco in forma strategica nel Caso 3

Fornitore 1 \ Fornitore 2	c_2	$c_2+\varepsilon$	...	$\bar{P}-\varepsilon$	$\bar{P}$
$c_2-\varepsilon$	$(p_1^{-1}A_1, 0)$	$(p_1^{-1}A_1, 0)$	...	$(p_1^{-1}A_1, 0)$	$(p_1^{-1}A_1, 0)$
c_2	$(p_1^0 B_1, 0)$	$(p_1^0 A_1, 0)$	...	$(p_1^0 A_1, 0)$	$(p_1^0 A_1, 0)$
$c_2+\varepsilon$	$(p_1^1 C_1, p_2^1 A_2)$	$(p_1^1 B_1, p_2^1 B_2)$	...	$(p_1^1 A_1, 0)$	$(p_1^1 A_1, 0)$
$c_2+2\varepsilon$	$(p_1^2 C_1, p_2^2 A_2)$	$(p_1^2 C_1, p_2^2 A_2)$	...	$(p_1^2 A_1, 0)$	$(p_1^2 A_1, 0)$
...	...	...	...	...	...
$\bar{P}-2\varepsilon$	$(p_1^{n-2}C_1, p_2^{n-2}A_2)$	$(p_1^{n-2}C_1, p_2^1 A_2)$	...	$(p_1^{n-2}C_1 A_1, 0)$	$(p_1^{n-2}C_1 A_1, 0)$
$\bar{P}-\varepsilon$	$(p_1^{n-1}C_1, p_2^{n-1}A_2)$	$(p_1^{n-1}C_1, p_2^{n-1}A_2)$	...	$(p_1^{n-1}B_1, p_2^{n-1}B_2)$	$(p_1^{n-1}A_1, 0)$
$\bar{P}$	$(p_1^n C_1, p_2^n A_2)$	$(p_1^n C_1, p_2^n A_2)$	...	$(p_1^n C_1, p_2^n A_2)$	$(p_1^n B_1, p_2^n B_2)$

1. *se* $p_1^{-1}A_1 > p_1^n C_1$, *ovvero*[5] *se*

$$\theta < \left(\frac{c_2 + n\varepsilon - c_1}{n+1}\right) k_2$$

allora il fornitore 1 con l'offerta $c_2 - \varepsilon$ *si aggiudica tutta la quantità di energia elettrica messa al bando, mentre il fornitore 2 non ha incentivo a partecipare all'asta;*

2. *Se viceversa* $p_1^n C_1 \geq p_1^{-1}A_1$ *ovvero se*

$$\theta \geq \left(\frac{c_2 + n\varepsilon - c_1}{n+1}\right) k_2$$

allora lo stato $\left(\overline{P}, c_2\right)$ *è un equilibrio di Nash in strategia pura in quanto entrambi i fornitori ottengono il payoff più alto possibile.*

Dunque in asta uniforme, in tutti e tre i casi, abbiamo trovato equilibri in strategia pura.

3.2.2 Caso continuo

In questa sezione affronteremo l'analisi degli equilibri di Nash in strategia mista nel caso in cui l'insieme delle azioni dei fornitori è un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$, ovvero supponiamo che le possibili offerte del fornitore i, per $i = 1, 2$,

[5] essendo $A_1 = \theta$ e $C_1 = \theta - k_2$

siano i punti dell'intervallo $\left[c_i, \overline{P}\right]$. Analogamente al caso discreto definiamo, per $i = 1, 2$, la funzione non decrescente

$$F_i(b) := \mathbb{P}(b_i \leq b)$$

Ovviamente, dalle assunzioni fatte sopra, si ha che $F_i(c_i) = 0$ e che $F_i(\bar{P}) = 1$. Inoltre, per ogni $b \in \left[c_i, \bar{P}\right]$, la funzione $F_i(b)$ è continua a destra ma non necessariamente continua a sinistra.

Osserviamo che se F_i è continua in $b \in \left[c_i, \bar{P}\right]$ allora la probabilità che il fornitore i scelga un prezzo uguale a b è nulla. Viceversa se F_i non è continua in qualche $b = b'$ allora la probabilità che il fornitore i scelga un prezzo uguale a b' è

$$\mathbb{P}(b_i = b') = F_i(b') - F_i(b'^-) > 0$$

dove

$$F_i(b'^-) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} F_i(b' + \varepsilon)$$

3.2.2.1 Equilibri in strategia mista per l'asta discriminatoria

Come già visto, in asta discriminatoria il *profitto atteso* del fornitore i quando sceglie la strategia pura b e il fornitore $j \neq i$ sceglie la strategia mista $F_j(b)$ può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} \pi_i(b, F_j) &= \underline{v}_i(b) \left[\lim_{\varepsilon \to 0^-} F_j(b+\varepsilon)\right] + v_i(b) \left[F_j(b) - \lim_{\varepsilon \to 0^-} F_j(b+\varepsilon)\right] + \bar{v}_i(b) \left[1 - F_j(b)\right] = \\ &= \underline{v}_i(b) F_j(b^-) + v_i(b) \left[F_j(b) - F_j(b^-)\right] + \bar{v}_i(b) \left[1 - F_j(b)\right] \quad (3.2.16) \end{aligned}$$

dove:

- $\underline{v}_i(b) := (b - c_i) \min \left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\}$ è il valore del payoff quando il fornitore i offre un prezzo più alto del fornitore j;
- $v_i(b) := (b - c_i) \frac{1}{2} \left(\min\{\theta, k_i\} + \min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\}\right)$ è il valore del payoff se i due fornitori propongono lo stesso prezzo;
- $\bar{v}_i(b) := (b - c_i) \min\{\theta, k_i\}$ è il valore del payoff se il fornitore i offre un prezzo più basso del fornitore j.

I seguenti risultati sono di fondamentale importanza ai fini della caratterizzazione delle strategie miste.

Lemma 4. *Se* (F_1^*, F_2^*) *è equilibrio di Nash in strategia mista, posto* $S_i^* = S(F_i^*)$, *per* $i = 1, 2$, *si ha che* $\underline{b} := \min S_1^* = \min S_2^*$ *e* $\bar{b} := \max S_1^* = \max S_2^*$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\min S_i^* = \underline{b} < \min S_j^*$ allora si ha immediatamente che $\pi_i(\underline{b}, F_j^*) = \bar{v}_i(\underline{b})$ ovvero, per ogni $b \in \left[\min S_i^*, \min S_j^*\right]$ otteniamo

$$\pi_i(b, F_j^*) = \bar{v}_i(b) = (b - c_i) \min\{\theta, k_i\}$$

che non è una funzione costante per $b \in \left[\min S_i^*, \min S_j^*\right]$ in contraddizione con la Proposizione 11. Analogamente se $\max S_j^* < \bar{b} = \max S_i^*$ per ogni $b \in \left[\max S_j^*, \max S_i^*\right]$ si ha $\pi_i(b, F_j^*) = \underline{v}_i(b)$ con $\underline{v}_i(b)$ non costante su $\left[\max S_j^*, \max S_i^*\right]$. □

Lemma 5. *Se* (F_1^*, F_2^*) *è equilibrio di Nash in strategia mista,* S_1^* *coincide con* S_2^* *ed è un intervallo di* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Iniziamo osservando che, per il Lemma 4, S_i^* e S_j^* contengono i punti $\underline{b}$ e $\bar{b}$, e quindi S_i^* e S_j^* sono contenuti nell'intervallo $\left[\underline{b}, \bar{b}\right]$. Supponiamo per assurdo che $S_i^* \neq S_j^*$ e consideriamo l'insieme dei punti (ovvero delle strategie pure) che sono in S_i^* e che non sono in S_j^*, ovvero consideriamo l'insieme $S_i^* \setminus S_j^*$. Per definizione di supporto la funzione $F_j^*(b)$ è costante sulle componenti connesse di $S_i^* \setminus S_j^*$ e in particolare, su $S_i^* \setminus S_j^*$, si ha $F_j^*(b) = F_j^*(b^-)$.

Consideriamo ora la funzione $H_i(b) = \pi_i(b, F_j^*)$ che, per la Proposizione 11, è quasi certamente costante su S_i^* e in particolare è quasi certamente costante sulle componenti connesse di $S_i^* \setminus S_j^*$. Per ogni $b \in S_i^* \setminus S_j^*$ la funzione H_i può essere scritta come segue:

$$\begin{aligned} H_i(b) :&= \underline{v}_i(b) F_j^*(b^-) + v_i(b)\left[F_j^*(b) - F_j^*(b^-)\right] + \bar{v}_i(b)\left[1 - F_j^*(b)\right] = \\ &= \underline{v}_i(b) F_j^*(b) + \bar{v}_i(b)\left[1 - F_j^*(b)\right] = \\ &= (b - c_i)\left(\min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} F_j^*(b) + \min\{\theta, k_i\}\left(1 - F_j^*(b)\right)\right) = \\ &= (b - c_i)\, A \end{aligned}$$

dove $A := \left(\min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} F_j^*(b) + \min\{\theta, k_i\}\left(1 - F_j^*(b)\right)\right)$ è costante sulle componenti connesse di $S_i^* \setminus S_j^*$ e $(b - c_i)$ è crescente. Quindi su $S_i^* \setminus S_j^*$ la funzione H_i non è costante in contraddizione con la Proposizione 11. Pertanto le componenti connesse di $S_i^* \setminus S_j^*$ devono essere punti. Siccome

S_i^* e S_j^* sono chiusi dobbiamo avere che $S_i^* \setminus S_j^* = \emptyset$, ovvero non esistono elementi di S_i^* che non sono elementi di S_j^*, ovvero ancora $S_i^* \subseteq S_j^*$. Con lo stesso ragionamento, invertendo gli indici, si dimostra che $S_j^* \subseteq S_i^*$ da cui $S_i^* = S_j^* = S^*$.

Ora se S^* non fosse un intervallo potremmo considerare due punti b',b'' $\in S^*$ tali che $\underline{b} < b' < b'' < \bar{b}$ e tali che l'intervallo (b', b'') e l'insieme S^* siano disgiunti, ovvero $(b', b'') \cap S^* = \emptyset$. Come prima la funzione $F_j^*(b)$ è costante su (b', b''), quindi, con lo stesso calcolo fatto sopra, si ha:

$$H_i(b) = (b - c_i)\, A \quad \forall b \in (b', b'')$$

Ma allora

$$h_i = H_i(\underline{b}) = H_i(b') < H_i(b) < H_i(b'') = H_i(\bar{b}) = h_i \quad \forall b \in (b', b'')$$

il che è assurdo. Pertanto $S_i^* = S_j^* = S^* = \left[\underline{b}, \bar{b}\right]$. □

Nel seguito indichiamo con $S^* \left(= S_i^* = S_j^*\right)$ il supporto delle strategie miste in equilibrio.

Corollario 2. *Se (F_1^*, F_2^*) è equilibrio di Nash in strategia mista allora F_1^* e F_2^* sono funzioni strettamente crescenti su S^*.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la funzione F_j^*, che è non decrescente per definizione, non sia strettamente crescente su S^*, ma che sia costante su (b', b''). Considerando di nuovo la funzione $H_i(b)$, come nel Lemma precedente, $\forall b \in (b', b'')$ si ha

$$H_i(b) = (b - c_i)\, A$$

che non è una funzione costante in contraddizione con la Proposizione 11. □

Per quanto visto finora possiamo scrivere:

$$h_i = \underline{v}_i(b) F_j^*(b^-) + v_i(b) \left[F_j^*(b) - F_j^*(b^-)\right] + \bar{v}_i(b) \left[1 - F_j^*(b)\right] \quad \mu_{F_i^*}-\text{q.o.} \quad b \in S^*$$

e quindi

$$h_i = F_j^*(b^-) \left(\underline{v}_i(b) - v_i(b)\right) + F_j^*(b) \left(v_i(b) - \bar{v}_i(b)\right) + \bar{v}_i(b) \quad \mu_{F_i^*}-\text{q.o.} \quad b \in S^*$$

e poiché

$$\underline{v}_i(b) - v_i(b) = v_i(b) - \bar{v}_i(b) = \frac{1}{2}\,(b - c_i) \left(\min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\} - \min\{\theta, k_i\}\right)$$

allora

$$h_i = \frac{1}{2}(b-c_i)\left(\min\left\{[\theta-k_j]^+, k_i\right\} - \min\{\theta, k_i\}\right)\left(F_j^*(b^-)+F_j^*(b)\right)+\bar{v}_i(b) \quad \mu_{F_i^*}\text{−q.o.} \quad b \in S^*$$

da cui

$$\frac{F_j^*(b)+F_j^*(b^-)}{2} = \frac{(b-c_i)\min\{\theta,k_i\} - h_i}{(b-c_i)\left(\min\{\theta,k_i\} - \min\left\{[\theta-k_j]^+, k_i\right\}\right)} \qquad b \in S^* \tag{3.2.17}$$

Lemma 6. *Se $F_j^*(b)$ non è continua sull'interno di S^* allora la funzione $\frac{F_j^*(b)+F_j^*(b^-)}{2}$ non è continua sull'interno di S^*.*

Dimostrazione. Supponiamo che F_j^* non sia continua in $\tilde{b} \in \text{int}S^*$. Poiché la funzione F_j^* è monotona allora la discontinuità in $\tilde{b}$ è di prima specie e poiché F_j^* è crescente e continua da destra si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} F_j(\tilde{b}+\varepsilon) < F(\tilde{b})$$

Definiamo ora $G_j(b) := \frac{F_j^*(b)+F_j^*(b^-)}{2}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0^-} G_j(\tilde{b}+\tilde{\varepsilon}) &= \lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0^-} \frac{F_j^*(\tilde{b}+\tilde{\varepsilon})+F_j^*(\tilde{b}^-+\tilde{\varepsilon})}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0^-}\left(F_j^*(\tilde{b}+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0^-} F_j^*(\tilde{b}+\varepsilon+\tilde{\varepsilon})\right) = \\
&= \lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0^-} F_j^*(\tilde{b}+\tilde{\varepsilon}) = \\
&= F_j^{*-}(\tilde{b})
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0^-} G_j(\tilde{b}+\tilde{\varepsilon}) = \frac{F_j^*(\tilde{b}^-)+F_j^*(\tilde{b}^-)}{2} < \frac{F_j^*(\tilde{b})+F_j^*(\tilde{b}^-)}{2} = G_j(\tilde{b})$$

e quindi G_j non è continua in $\tilde{b}$. □

Corollario 3. $F_j^*(b) = F_j^{*-}(b)$ *sull'interno di S^*.*

Dimostrazione. Poiché la funzione definita dalla (3.2.17) è continua, la tesi segue immediatamente dal Lemma 6. □

Alla luce del Corollario 9 la (3.2.17) può essere riscritta come segue:

$$F_j^*(b) = \frac{(b - c_i)\min\{\theta, k_i\} - h_i}{(b - c_i)\left(\min\{\theta, k_i\} - \min\left\{[\theta - k_j]^+, k_i\right\}\right)} \qquad b \in \mathrm{int}S^*$$

Capitolo 4

Aste come giochi bayesiani

In questo capitolo, sfruttando la teoria vista nel Capitolo 2, rappresenteremo l'asta uniforme e l'asta discriminatoria come giochi ad informazione incompleta. Sebbene semplificheremo il modello dal punto di vista dei parametri, in quanto supporremo che i partecipanti all'asta abbiano la stessa capacità produttiva, non faremo alcuna assunzione sui costi marginali che verrano trattati come variabili aleatorie. Così facendo otterremo un modello che ci porterà a determinare delle funzioni di offerta e tali funzioni saranno gli unici equilibri di Nash-Bayes in strategia pura. Infine questo approccio ci permetterà anche di confrontare le due aste e quindi di stabilire quale di queste offre profitti maggiori ai fornitori.

4.1 Il Modello

Due fornitori competono per soddisfare la domanda di mercato che indicheremo nel seguito con $\theta \in \mathbb{R}^+$. Tale quantità è resa nota entro gli ultimi 30 minuti di asta. Il fornitore i, per $i = 1, 2$, può produrre una quantità di energia elettrica pari a K_i megawattora (MWh), dove $K_i = K \in \mathbb{R}^+$, per ogni $i = 1, 2$, è noto a tutti i fornitori. Ogni fornitore ha costi marginali costanti, che denotiamo con c_i, per $i = 1, 2$. Tali costi di produzione sono informazione privata dei fornitori e non sono noti a priori (potrebbero dipendere dal costo di materie prime come gas o petrolio, e quindi dai prezzi che queste materie prime avranno al momento della effettiva produzione o del loro acquisto). Dunque le c_i sono le realizzazioni di variabili aleatorie che indicheremo con C_i. Assumeremo tali variabili aleatorie *indipendenti* oppure *affiliate* e, in tal caso, la funzione di densità $f(c_1, c_2)$ sarà supposta essere due volte continuamente differenziabile, positiva, simmetrica e di supporto

$[\underline{c}, \overline{c}]^2 \subset (\mathbb{R}^+)^2$ con $\underline{c}$ e $\overline{c}$ noti e con $\underline{c} < \overline{c}$. In particolare per non appesantire la notazione, avendo supposto la funzione di densità simmetrica, indicheremo la densità condizionata con

$$f(c_i|c_j) = \begin{cases} \dfrac{f(c_i, c_j)}{f_{C_j}(c_j)} & \text{se } f_{C_j}(c_j) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove

$$f_{C_j}(c_j) = \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} f(c_i, c_j) dc_i$$

è la densità marginale di C_j e quindi avremo che

$$F(c_j|c_i) = \int_{\underline{c}}^{c_j} f\left(x\,|c_i\right) dx.$$

L'affiliazione[1] è giustificata dal fatto che ogni fornitore può sapere che tipi di impianti sono impiegati dagli altri e ciò è sufficiente per predire l'intervallo in cui cadono i costi marginali. Dunque le variabili aleatorie C_i possono essere interpretate come *variabili di informazione*, ovvero, nel linguaggio della teoria dei giochi bayesiani sono i *segnali* dei fornitori.

Per partecipare all'asta ogni fornitore deve proporre il prezzo minimo (espresso in €/MWh) a cui è disposto a vendere la quantità di energia K.

Il banditore fissa una quantità $\bar{P}$ (*prezzo di riserva del mercato*) oltre la quale le offerte non saranno accettate, dunque poiché i partecipanti all'asta sono interessati a massimizzare il loro profitto e non vogliono subire perdite economiche, avremo $c_i \leq b_i \leq \overline{P}$, per $i = 1, 2$. In particolare possiamo interpretare $b_i = b(c_i)$, come una funzione strettamente crescente che chiameremo *funzione di offerta*, che, nel linguaggio della teoria dei giochi, rappresenta la *strategia* dei fornitori.

Osservazione 4. Notiamo che la funzione di offerta $b(\cdot)$ deve essere la stessa per entrambi i fornitori in quanto l'asta vista come gioco Bayesiano, è un gioco simmetrico rispetto a ciascun fornitore. Osserviamo infine che data una tale strategia $b(c_i)$ strettamente crescente, abbiamo automaticamente definito anche la funzione inversa $c_i = b^{-1}(b_i)$.

[1]Si veda la Definizione 25 in appendice.

Anche in questo capitolo ci occuperemo dell'asta discriminatoria e di quella uniforme. In particolare nella Sezione 4.2 troveremo le funzioni di offerta candidate ad essere equilibri di Nash-Bayes e faremo ciò sfruttando le usuali condizioni di ottimalità del primo e del secondo ordine. Nella Sezione 4.3 verificheremo che le funzioni di offerta trovate sono effettivamente gli (unici) equilibri di Nash-Bayes e infine, nella Sezione 4.4, confronteremo i due formati d'asta.

4.2 Funzioni di offerta

Assumendo che ciascun fornitore abbia a disposizione tutte le informazioni eccetto i costi marginali del concorrente, possiamo analizzare l'asta in base allo stato della domanda:

- **Scenario A:** $\theta \in (0, K]$
  Per questo stato della domanda basta un solo fornitore a soddisfare tutta la domanda di mercato, dunque in questa situazione ci sarà un solo vincitore.

- **Scenario B:** $\theta \in (K, 2K)$
  Entrambi i fornitori sono necessari a servire il mercato. Uno dei due utilizzerà tutta la sua capacità produttiva e l'altro, con il prezzo di offerta più alto, coprirà il residuo di domanda $(\theta - K)$

- **Scenario C:** $\theta \geq 2K$
  La domanda eccede la capacità totale dei fornitori. Questo è un caso banale: con l'offerta $(\overline{P}, K)$ entrambi i fornitori riescono ad aggiudicarsi la quantità K massimizzando il payoff, pertanto $(\overline{P}, K)$ è l'unico equilibrio di Nash in strategia pura per entrambi i fornitori.

Prima di addentrarci nella ricerca delle offerte ottime, che dimostreremo essere gli unici equilibri di Nash-Bayes, definiamo le quantità di energia elettrica α, β e γ come segue:

$$
\begin{aligned}
\alpha &:= \min\{\theta, K\} \\
\beta &:= \min\{\theta - \alpha, K\} \\
\gamma &:= \alpha - \beta
\end{aligned}
$$

dove $\alpha \in (0, K]$ è quantità di energia elettrica che si aggiudica il fornitore che propone l'offerta più bassa e β è quella del perdente, con $\beta \in [0, K)$ se $\theta < 2K$ e $\beta = K$ se $\theta \geq 2K$. Infine $\gamma \in (0, K]$ se $\theta < 2K$ e $\gamma = 0$ se $\theta \geq 2K$.

Notiamo inoltre che la funzione di offerta ottima, $b : [\underline{c}, \bar{c}] \to \left[\underline{c}, \bar{P}\right]$, (strettamente crescente rispetto al costo marginale) associa ad ogni valutazione del costo marginale (segnale) un prezzo da offrire in asta (strategia), dunque l'informazione di j vista da i è data da $b^{-1}(b_j)$.

4.2.1 Asta Discriminatoria

Per determinare la funzione di offerta dobbiamo innanzitutto scrivere il payoff del fornitore i. Poiché le offerta proposte dai fornitori i e j sono un vettore aleatorio con densità e b_i è il prezzo offerto dal fornitore i, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(b_j = b_i\right) &= \mathbb{P}\left(b(c_j) = b(c_i)\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(c_j = c_i\right) = \\ &= 0\end{aligned}$$

. Pertanto il profitto atteso del fornitore i può essere scritto come segue:

$$\begin{aligned}\pi_i^d\left(b_i, c_i\right) &= \mathbb{E}\left[\left(b_i - c_i\right)\alpha 1_{\{b_i < b_j\}} + \beta\left(b_i - c_i\right) 1_{\{b_i > b_j\}} | C_i = c_i\right] = \\ &= \left(b_i - c_i\right)\mathbb{E}\left[\alpha - \alpha 1_{\{b_i > b_j\}} + \beta 1_{\{b_i > b_j\}} | C_i = c_i\right] = \\ &= \left(b_i - c_i\right)\left(\alpha - \gamma\mathbb{E}\left[1_{\{b_i > b_j\}} | C_i = c_i\right]\right) = \\ &= \left(b_i - c_i\right)\left[\alpha - \gamma\mathbb{P}\left(b_i > b_j | C_i = c_i\right)\right] = \\ &= \left(b_i - c_i\right)\left[\alpha - \gamma\mathbb{P}\left(b_i > b(c_j) | C_i = c_i\right)\right] = \\ &= \left(b_i - c_i\right)\left[\alpha - \gamma\mathbb{P}\left(b^{-1}(b_i) > c_j | C_i = c_i\right)\right] = \\ &= \left(b_i - c_i\right)\left(\alpha - \gamma\int\limits_{\underline{c}}^{b^{-1}(b_i)} f(x\,|c_i)dx\right)\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Introducendo la seguente funzione:

$$y\left(c_j|c_i\right) := \alpha - \gamma\int\limits_{\underline{c}}^{c_j} f\left(x\,|c_i\right)dx = \alpha - \gamma F(c_j|c_i) \tag{4.2.2}$$

la (4.2.1) diventa

$$\pi_i^d\left(b_i, c_i\right) = \left(b_i - c_i\right) y\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)$$

Condizioni di ottimalità del primo ordine e funzione di offerta

Il nostro obiettivo è determinare la funzione di offerta che massimizza il profitto. Per fare ciò iniziamo derivando il profitto attesto rispetto a b_i:

$$\frac{\partial \pi_i^d\left(b_i, c_i\right)}{\partial b_i} = \left(y\left(b^{-1}\left(b_i\right)|c_i\right) + \frac{b_i - c_i}{b'\left(b^{-1}\left(b_i\right)\right)} y_j\left(b^{-1}\left(b_i\right)|c_i\right) \right) \tag{4.2.3}$$

dove $b'(\cdot)$ è la derivata prima della funzione di offerta e $y_j(\cdot|\cdot)$ è la derivata rispetto alla prima componente della funzione $y(\cdot|\cdot)$, ovvero:

$$y_j\left(c_j|c_i\right) = \frac{\partial y\left(c_j|c_i\right)}{\partial c_j} = -\gamma f\left(c_j|c_i\right) \tag{4.2.4}$$

Ora sostituendo la (4.2.4) nell'espressione data dalla (4.2.3) e imponendo $\dfrac{\partial \pi_i^d}{\partial b_i} = 0$ (condizione necessaria per l'ottimalità) e $b_i = b(c_i)$ (che deve valere per equilibri di Nash-Bayes simmetrici), otteniamo la seguente equazione differenziale lineare:

$$b'\left(c\right) + b(c)\frac{y_j\left(c|c\right)}{y\left(c|c\right)} = c\frac{y_j\left(c|c\right)}{y\left(c|c\right)} \tag{4.2.5}$$

dove, per brevità abbiamo indicato $c = c_i$. La soluzione generale della (4.2.5) è

$$b\left(c\right) = b_0 \exp\left(-\int_d^c \frac{y_j\left(\tau|\tau\right)}{y\left(\tau|\tau\right)} d\tau \right) + \int_d^c t\frac{y_j\left(t|t\right)}{y\left(t|t\right)} e^{\int_d^t -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)}d\tau} dt \tag{4.2.6}$$

con b_0 e d tali che $b(d) = b_0$.

Osserviamo che poiché il fornitore con il costo marginale più alto non vuole subire perdite e poiché la funzione di offerta è strettamente crescente, egli imporrà che il limite superiore della funzione di offerta debba essere pari ad un valore $\widehat{b} \in \left(\overline{c}, \overline{P}\right]$, cioè dato $\overline{c}$ come costo marginale abbiamo

$$\widehat{b} = b\left(\overline{c}\right).$$

Pertanto, dalla (4.2.6), abbiamo

$$\widehat{b} = b_0 \exp\left(-\int_d^{\bar{c}} \frac{y_j\left(\tau|\tau\right)}{y\left(\tau|\tau\right)} d\tau \right) + \int_d^{\bar{c}} t\frac{y_j\left(t|t\right)}{y\left(t|t\right)} e^{\int_d^t -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)}d\tau} dt$$

da cui

$$b_0 = \left[\widehat{b} - \int\limits_d^{\bar{c}} t \frac{y_j\,(t|t)}{y\,(t|t)} e^{\int_t^{\bar{c}} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt\right] \exp\left(\int\limits_d^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right)$$

e sostituendo nella (4.2.6) otteniamo

$$\begin{aligned}
b\,(c) = & \left[\widehat{b} - \int\limits_d^{\bar{c}} t \frac{y_j\,(t|t)}{y\,(t|t)} \mathrm{e}^{\int_t^{\bar{c}} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt\right] \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) + \int\limits_d^{c} t \frac{y_j\,(t|t)}{y\,(t|t)} \mathrm{e}^{\int_t^{c} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt = \\
& = \widehat{b} \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) - \int\limits_d^{\bar{c}} t \frac{y_j\,(t|t)}{y\,(t|t)} \mathrm{e}^{\int_t^{c} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt + \int\limits_d^{c} t \frac{y_j\,(t|t)}{y\,(t|t)} \mathrm{e}^{\int_t^{c} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt = \\
& = \widehat{b} \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) - \int\limits_c^{\bar{c}} t \frac{y_j\,(t|t)}{y\,(t|t)} \mathrm{e}^{\int_c^{t} \frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt = \\
& = \widehat{b} \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) - \left[t e^{\int_c^{t} \frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau}\right]_c^{\bar{c}} + \int\limits_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_c^{t} \frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt \\
& = \left[\widehat{b} - \bar{c}\right] \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) + \int\limits_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_c^{t} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt + c = \\
& = \left[\widehat{b} - \bar{c} + \int\limits_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_t^{\bar{c}} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt\right] \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) + c
\end{aligned}$$

Dunque

Lemma 7. *In asta discriminatoria, la funzione di offerta che soddisfa la condizione del primo ordine*

$$\frac{\partial \pi_i^d}{\partial b_i} = 0$$

è data da

$$b(c) = \left[\widehat{b} - \bar{c} + \int\limits_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_t^{\bar{c}} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt\right] \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) + c \qquad (4.2.7)$$

Condizioni di ottimalità del secondo ordine

La funzione di offerta (4.2.7) assicura la massimizzazione del profitto solo se la derivata seconda del payoff è negativa. Calcoliamo allora tale derivata usando la (4.2.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \pi_i^d}{\partial b_i^2} &= \left[\frac{y_j\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)} + \frac{\partial}{\partial b_i}\left((b_i - c_i)\frac{y_j\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)}{b'(b^{-1}(b_i))}\right)\right] = \\
&= \frac{y_j\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)} + \frac{y_j\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)} + (b_i - c_i)\frac{y_{jj}\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)}{\left(b'\left(b^{-1}(b_i)\right)\right)^2} + \\
&- (b_i - c_i)\frac{b''\left(b^{-1}(b_i)\right)}{\left(b'\left(b^{-1}(b_i)\right)\right)^3} y_j\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right) = \\
&= \left[2\frac{y_j\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)} + \right. \\
&\left. + \frac{b_i - c_i}{\left[b'\left(b^{-1}(b_i)\right)\right]^2}\left(y_{jj}\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right) - \frac{b''\left(b^{-1}(b_i)\right)}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)} y_j\left(b^{-1}(b_i)\,|c_i\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Poiché in equilibrio l'offerta ottima è data dalla (4.2.7), sostituendo nella formula appena trovata abbiamo che la derivata seconda del payoff è:

$$\frac{\partial^2 \pi_i^d(b(c), c)}{\partial b(c)^2} = \left[2\frac{y_j(c\,|c)}{b'(c)} + \frac{b(c) - c}{\left[b'(c)\right]^2}\left(y_{jj}(c\,|c) - \frac{b''(c)}{b'(c)} y_j(c\,|c)\right)\right] \quad (4.2.8)$$

dove la forma di $b''(c)$ segue dalla (4.2.5) che può essere riscritta come

$$\frac{\partial b(c)}{\partial c} = -(b(c) - c)\frac{y_j(c|c)}{y(c|c)} \quad (4.2.9)$$

Indicando con $y_{ji}(c_j|c_i) = \dfrac{\partial^2 y(c_j\,|c_i)}{\partial c_j \partial c_i}$ e con $y_{jj}(c_j|c_i) = \dfrac{\partial^2 y(c_j\,|c_i)}{\partial c_j^2}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 b(c)}{\partial c^2} &= -\left(b'(c) - 1\right)\frac{y_j(c\,|c)}{y(c\,|c)} - (b(c) - c)\left(\frac{y_{jj}(c\,|c) + y_{ji}(c\,|c)}{y(c\,|c)}\right) + \\
&+ (b(c) - c)\left[\frac{\left(y_j(c\,|c) + y_i(c\,|c)\right) y_j(c\,|c)}{\left(y(c\,|c)\right)^2}\right] = \\
&= \frac{y_j(c\,|c)}{y(c\,|c)} + b'(c)\left(\frac{y_{jj}(c\,|c) + y_{ji}(c\,|c)}{y_j(c\,|c)} - \frac{y_j(c\,|c)}{y(c\,|c)} - \frac{y_j(c\,|c) + y_i(c\,|c)}{(y(c\,|c))}\right) = \\
&= \frac{y_j(c\,|c)}{y(c\,|c)} + b'(c)\left(\frac{y_{jj}(c\,|c) + y_{ji}(c\,|c)}{y_j(c\,|c)} - \frac{2y_j(c\,|c) + y_i(c\,|c)}{y(c\,|c)}\right)
\end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Ora sostituendo la (4.2.10) nella (4.2.8) e usando ancora la relazione (4.2.9) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \pi^d(b(c),c)}{\partial b(c)^2} &= 2\frac{y_j\,(c\,|c)}{b'\,(c)} + \frac{b(c)-c}{[b'\,(c)]^2}\left(y_{jj}\,(c\,|c) - \frac{b''\,(c)}{b'\,(c)} y_j\,(c\,|c)\right) = \\
&= 2\frac{y_j\,(c\,|c)}{b'\,(c)} - \frac{y\,(c\,|c)\,y_{jj}\,(c\,|c)}{b'(c) y_j\,(c\,|c)} + b''(c)\frac{y\,(c\,|c)}{[b'(c)]^2} = \\
&= 2\frac{y_j\,(c\,|c)}{b'\,(c)} - \frac{y\,(c\,|c)\,y_{jj}\,(c\,|c)}{b'(c) y_j\,(c\,|c)} + \frac{y_j\,(c\,|c)}{[b'(c)]^2} + \\
&+ y\,(c\,|c)\,\frac{y_{jj}\,(c\,|c) + y_{ji}\,(c\,|c)}{b'(c) y_j\,(c\,|c)} - 2\frac{y_j\,(c\,|c) + y_i(c|c)}{b'\,(c)} = \\
&= \frac{y\,(c\,|c)\,y_{ji}\,(c\,|c)}{b'\,(c)\,y_j\,(c\,|c)} - \frac{y_i(c|c)}{b'\,(c)} + \frac{y_j(c|c)}{[b'\,(c)]^2} = \\
&= \frac{1}{[b'\,(c)]^2}\left[(b(c)-c)\left(\frac{y_j\,(c\,|c)\,y_i(c|c)}{y\,(c|c)} - y_{ji}\,(c\,|c)\right) + y_j\,(c\,|c)\right]
\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\partial^2 \pi^d}{\partial b(c)^2} < 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(b(c)-c)\left(\frac{y_j\,(c\,|c)\,y_i(c|c)}{y\,(c|c)} - y_{ji}\,(c\,|c)\right) + y_j\,(c\,|c) < 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{y_j\,(c\,|c)\,y_i(c|c)}{y\,(c|c)} - y_{ji}\,(c\,|c) < -\frac{y_j(c|c)}{b(c)-c} \tag{4.2.11}$$

Osservazione 5. Osserviamo che gli elementi della (4.2.11) soddisfano le seguenti proprietà:

1. dalla (4.2.2)
$$y(c_j|c_i) > 0, \quad \forall c_j \neq \overline{c} \tag{4.2.12}$$

2. dalla (4.2.4)
$$y_j\,(c_j|c_i) = \frac{\partial y(c_j|c_i)}{\partial c_j} = -\gamma f\,(c_j\,|c_i\,) < 0, \tag{4.2.13}$$
in quanto $\gamma > 0$ per $\theta < 2K$;

3. la derivata prima della funzione $y\left(c_j|c_i\right)$ rispetto alla variabile c_i, calcolata utilizzando la (4.2.2), è data da

$$y_i\left(c_j|c_i\right)=\frac{\partial y(c_j|c_i)}{\partial c_i}=-\gamma F_i\left(c_j\left|c_i\right.\right) \tag{4.2.14}$$

dove

$$\begin{aligned}F_i\left(c_j|c_i\right)&=\frac{\partial F\left(c_j|c_i\right)}{\partial c_i}=\\&=\int\limits_{\underline{c}}^{c_j} f_i\left(x|c_i\right)dx=\\&=\frac{\int_{\underline{c}}^{c_j} f_i\left(x,c_i\right)dx-F\left(c_j|c_i\right)\int_{\underline{c}}^{\bar{c}} f_i\left(x,c_i\right)dx}{f\left(c_i\right)}\end{aligned}$$

e dove $f_i\left(x,c_i\right)=\dfrac{\partial f(c_j|c_i)}{\partial c_i}$. Ora se C_i e C_j sono *affiliate,* poiché $F\left(c_j|c_i\right)=\dfrac{\int_{\underline{c}}^{c_j} f\left(x,c_i\right)dx}{f(c_i)}$, con $f(\cdot\,,\cdot)$ log-supermodulare, si ha che $F\left(c_j|c_i\right)$ è non decrescente in c_i e quindi $F_i\left(c_j|c_i\right)\leq 0$. Se invece C_i e C_j sono *indipendenti* si ha che $f_i\left(c_j|c_i\right)=\dfrac{\partial f(c_j|c_i)}{\partial c_i}=\dfrac{\partial f(c_j)}{\partial c_i}=0$ pertanto $F_i\left(c_j|c_i\right)=0$ e quindi in particolare si ha

$$F_i\left(c_j|c_i\right)\leq 0; \tag{4.2.15}$$

4. inoltre si ha

$$y_{ji}\left(c_j|c_i\right)=\frac{\partial^2 y(c_j|c_i)}{\partial c_j\partial c_i}=-\gamma\frac{\partial y(c_j|c_i)}{\partial c_i}=-\gamma f_i\left(c_j|c_i\right); \tag{4.2.16}$$

5. infine $b'(c)>0$, perché stiamo supponendo che la funzione di offerta sia strettamente crescente. Dunque:

$$\begin{gathered}b'\left(c\right)=-\left(b\left(c\right)-c\right)\frac{y_j\left(c|c\right)}{y\left(c|c\right)}>0\\\Longleftrightarrow\\\left(b\left(c\right)-c\right)\frac{y_j\left(c|c\right)}{y\left(c|c\right)}<0\end{gathered}$$

e poiché $y_j\,(c_j|c_i) < 0$, si ha

$$b(c) > c. \tag{4.2.17}$$

Pertanto la condizione di ottimalità del secondo ordine (4.2.11), per la (4.2.12) e la (4.2.13) diventa

$$\frac{1}{b(c)-c} > \frac{y_{ji}\,(c\,|c)}{y_j(c|c)} - \frac{y_i(c|c)}{y\,(c|c)}$$

e sostituendo alla funzione $y\,(\cdot\,|\cdot\,)$ la densità $f\,(\cdot\,|\cdot\,)$, ovvero usando la (4.2.2), la (4.2.14) e la (4.2.16) e sfruttando le condizioni (4.2.15) e (4.2.17) si ottiene

$$\frac{1}{b(c)-c} > \frac{f_i\,(c|c)}{f\,(c|c)} + \frac{\gamma F_i\,(c|c)}{\alpha - \gamma F\,(c|c)}$$

Pertanto

Lemma 8. *In asta discriminatoria la funzione*

$$b(c) = \left[\widehat{b} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_t^{\bar{c}} -\frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau} dt\right] \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\,(\tau|\tau)}{y\,(\tau|\tau)} d\tau\right) + c \tag{4.2.18}$$

rappresenta la funzione di offerta ottima se vale la condizione di ottimalità del secondo ordine

$$\frac{1}{b(c)-c} > \frac{f_i\,(c|c)}{f\,(c|c)} + \frac{\gamma F_i\,(c|c)}{\alpha - \gamma F\,(c|c)} \tag{4.2.19}$$

Osservazione 6. Nella (4.2.18) $\widehat{b}$ è una opportuna costante che determiniamo in seguito, mentre la (4.2.19) può essere verificata in quanto stiamo supponendo che la funzione di densità $f(\cdot\,|\cdot\,)$ è nota.

Scenario A

Come già osservato se $\theta \in (0, K]$ si ha che $\beta = 0$, ovvero $\gamma = \alpha$ e la condizione del secondo ordine (4.2.19) può essere riscritta come

$$\frac{1}{b(c)-c} > \frac{f_i\,(c|c)}{f\,(c|c)} + \frac{F_i\,(c|c)}{1 - F\,(c|c)} \tag{4.2.20}$$

Lemma 9. *In asta discriminatoria, se $\theta \in (0, K]$, la funzione di offerta ottima è data da*

$$b(c) = \left(\bar{P} - \bar{c} + \int_{c}^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}} \frac{f(\tau|\tau)}{1-\mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt \right) \exp\left(- \int_{c}^{\bar{c}} \frac{f(\tau|\tau)}{1 - F(\tau|\tau)} d\tau \right) + c \tag{4.2.21}$$

Dimostrazione. Consideriamo la quantità $\dfrac{f(c_j|c_i)}{1 - F(c_j|c_i)}$, detta *hazard rate.* Tale quantità è non crescente[2] in c_i, per cui

$$0 \geq \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{f(c_j|c_i)}{1 - F(c_j|c_i)} \right) = \frac{f_i(c_j|c_i)}{1 - F(c_j|c_i)} + \frac{f(c_j|c_i) F_i(c_j|c_i)}{[1 - F(c_j|c_i)]^2} \tag{4.2.22}$$

e quindi

$$\frac{f_i(c_j|c_i)}{1 - F(c_j|c_i)} + \frac{f(c_j|c_i) F_i(c_j|c_i)}{[1 - F(c_j|c_i)]^2} \leq 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f_i(c_j|c_i) + \frac{f(c_j|c_i) F_i(c_j|c_i)}{1 - F(c_j|c_i)} \leq 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{f_i(c_j|c_i)}{f(c_j|c_i)} + \frac{F_i(c_j|c_i)}{1 - F(c_j|c_i)} \leq 0$$

Dunque il secondo membro della disequazione (4.2.20) è non positivo, mentre, per l'Osservazione 5, il primo membro è strettamente positivo, pertanto la condizione di ottimalità del secondo ordine è sempre soddisfatta e la funzione di offerta ottima è data dalla (4.2.7).

Rimane ora da determinare $\hat{b}$. Poiché i fornitori vogliono massimizzare il profitto si vorrebbe scegliere un $\hat{b}$ tale che $\dfrac{\partial \pi_i^d(b(c_i), c_i)}{\partial \hat{b}} = 0$, ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i^d(b(c_i), c_i)}{\partial \hat{b}} &= y(c_i|c_i) \frac{\partial b(c_i)}{\partial \hat{b}} = \\ &= y(c_i|c_i) \exp\left(\int_{c_i}^{\bar{c}} \frac{y_j(\tau|\tau)}{y(\tau|\tau)} d\tau \right) = 0 \end{aligned}$$

[2] Per i dettagli si veda [7] appendice A pp. 276-287.

che purtroppo non fornisce alcuna condizione su $\hat{b}$. D'altra parte, poiché il payoff è crescente in $\hat{b}$ e i fornitori sono razionali, e quindi vogliono massimizzare il profitto, possiamo porre

$$\hat{b} = \bar{P}$$

che massimizza la (4.2.18) rispettando il vincolo sul prezzo di riserva del mercato $\bar{P}$.

Quindi, sostituendo le espressioni di $y(\cdot\,|\cdot\,)$ e $y_j(\cdot\,|\cdot\,)$ nella (4.2.7), si ha che la funzione di offerta ottima per lo scenario A è data dalla (4.2.21). $\square$

Scenario B

Per questo stato della domanda sono necessari entrambi i fornitori per soddisfare il mercato ed entrambi i fornitori offriranno tutta la loro energia K al prezzo dettato dalla funzione di offerta ottima b da determinare. In particolare, ricapitolando quanto già visto, abbiamo che il profitto atteso del fornitore i può essere scritto come:

$$\pi_i^d\left(b_i, c_i\right) = \left(b_i - c_i\right)\left(\alpha - \gamma \int_{\underline{c}}^{b^{-1}(b_i)} f(x\,|c_i\,)dx\right)$$

e la funzione di offerta che massimizza tale payoff è la (4.2.18)

$$b\left(c\right) = \left[\widehat{b} - \bar{c} + \int_{c}^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\bar{\mathrm{c}}} -\frac{\mathrm{y_j}(\tau|\tau)}{\mathrm{y}(\tau|\tau)}\mathrm{d}\tau} dt\right] \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{y_j\left(\tau|\tau\right)}{y\left(\tau|\tau\right)} d\tau\right) + c$$

a patto che valga la condizione di ottimalità del secondo ordine data dalla (4.2.19), ovvero da

$$\frac{1}{b(c) - c} > \frac{f_i\left(c|c\right)}{f\left(c|c\right)} + \frac{\gamma F_i\left(c|c\right)}{\alpha - \gamma F\left(c|c\right)}$$

Questa volta, poiché $\theta \in (K, 2K)$, si ha $\alpha = K$ e $\beta = \theta - K$, per cui la condizione (4.2.19) diventa

$$\frac{1}{b(c) - c} > \frac{f_i\left(c|c\right)}{f\left(c|c\right)} + \frac{\left(2K - \theta\right) F_i\left(c|c\right)}{K - \left(2K - \theta\right) F\left(c|c\right)}. \tag{4.2.23}$$

Lemma 10. *In asta discriminatoria se $\theta \in (K, 2K)$ si ha che per costi marginali indipendenti la funzione*

$$b(c) = \left(\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}} \frac{(2\mathrm{K}-\theta) f(\tau|\tau)}{\mathrm{K}-(2\mathrm{K}-\theta)\mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt\right) \exp\left(-\int_c^{\bar{c}} \frac{(2K-\theta)\, f(\tau|\tau)}{K-(2K-\theta)\, F(\tau|\tau)} d\tau\right) + c \tag{4.2.24}$$

rappresenta la funzione di offerta ottima. Per cosi marginali affiliati la (4.2.24) rappresenta la funzione di offerta ottima solo se

$$\bar{P} < \bar{c} + \frac{\exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma F(\tau|\tau)} d\tau\right)}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} + \frac{\gamma F_i(c\quad|c)}{\alpha - \gamma F(c|c)}} - \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\bar{\mathrm{c}}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma \mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt. \tag{4.2.25}$$

Dimostrazione. Per provare la tesi dobbiamo verificare la validitá della relazione del secondo ordine (4.2.23). Di fatto se le variabili di informazione sono *indipendenti* la (4.2.19) è sempre soddisfatta[3], ma nel caso di variabili *affiliate* non è possibile determinare alcuna stima sul secondo membro della (4.2.19) per assicurare che sia sempre verificata. D'altra parte la (4.2.19), utilizzando la (4.2.18), può essere riscritta come segue:

$$\frac{1}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} + \frac{\gamma F_i(c\quad|c)}{\alpha - \gamma F(c|c)}} > \left[\left(\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\bar{\mathrm{c}}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma \mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt\right) \exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{-\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma F(\tau|\tau)} d\tau\right)\right]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma F(\tau|\tau)} d\tau\right)}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} + \frac{\gamma F_i(c\quad|c)}{\alpha - \gamma F(c|c)}} > \bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\bar{\mathrm{c}}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma \mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\bar{P} < \bar{c} + \frac{\exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma F(\tau|\tau)} d\tau\right)}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} + \frac{\gamma F_i(c\quad|c)}{\alpha - \gamma F(c|c)}} - \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\bar{\mathrm{c}}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma \mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt$$

[3]Ricordiamo che per l'Osservazione 5 si ha che $b(c) > c$ e se i costi marginali sono indipendenti $f_i(c|c) = 0$ e $F_i(c|c) = 0$

Dunque se vale la (4.2.25) la condizione di ottimalità del secondo ordine data dalla (4.2.23) è sempre soddisfatta e la funzione di offerta ottima, per questo stato della domanda è data dalla (4.2.24). □

4.2.2 Asta Uniforme

Scenario A

Nello scenario A $\left(\text{dove } \theta \in (0, K]\right)$ un solo fornitore sarà sufficiente a soddisfare l'intera domanda di mercato, dunque la funzione di offerta risultante in questo scenario per l'asta uniforme è identica a quella già visto per lo scenario analogo in asta discriminatoria: il payoff atteso da entrambi i fornitori è dato dalla formula (4.2.1) con $\beta = 0$, e quindi la funzione di offerta ottima è data dalla (4.2.21).

Pertanto

Lemma 11. *In asta uniforme, se $\theta \in (0, K]$, la funzione di offerta ottima è data da*

$$b(c) = \left(\bar{P} - \bar{c} + \int_{c}^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}} \frac{f(\tau|\tau)}{1-\mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt\right) \exp\left(-\int_{c}^{\bar{c}} \frac{f\left(\tau|\tau\right)}{1 - F\left(\tau|\tau\right)} d\tau\right) + c$$

Scenario B

Condizioni di ottimalità del primo ordine e funzione di offerta

Se $\theta \in (K, 2K)$ il payoff attesto del fornitore i è dato da:

$$\pi_i^u\left(b_i, c_i\right) = \mathbb{E}\left[\left(K\left(b_j - c_i\right) 1_{\{b_i < b_j\}} + (\theta - K)\left(b_i - c_i\right) 1_{\{b_i > b_j\}}\right) | C_i = c_i\right] \tag{4.2.26}$$

Essendo $b_j = b(c_j)$, si ha:

$$\pi_i^u\left(b_i, c_i\right) = \alpha \int_{b^{-1}(b_i)}^{\bar{c}} \left(b(c_j) - c_i\right) f(c_j|c_i) dc_j + \beta(b_i - c_i) \int_{\underline{c}}^{b^{-1}(b_i)} f(c_j\,|c_i) dc_j =$$

$$= \beta(b_i - c_i) F\left(b^{-1}(b_i)|c_i\right) + \alpha \int_{b^{-1}(b_i)}^{\bar{c}} \left(b(c_j) - c_i\right) f(c_j|c_i) dc_j.$$

Analogamente a quanto già fatto in asta discriminatoria deriviamo il payoff per trovare la condizione di ottimalità del primo ordine. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_i^u(b_i, c_i)}{\partial b_i} &= \beta \left[F(b^{-1}(b_i)|c_i) + (b_i - c_i)\frac{f(b^{-1}(b_i)|c_i)}{b'(b^{-1}(b_i))} \right] - \alpha(b_i - c_i)\frac{f(b^{-1}(b_i)|c_i)}{b'(b^{-1}(b_i))} = \\ &= \beta F(b^{-1}(b_i)|c_i) - \gamma(b_i - c_i)\frac{f(b^{-1}(b_i)|c_i)}{b'(b^{-1}(b_i))}\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\alpha - \beta = \gamma$.

La condizione necessaria per l'ottimo $\dfrac{\partial \pi_i^u(b_i, c_i)}{\partial b_i} = 0$ è equivalente alla seguente:

$$b(b^{-1}(b_i))'\beta F(b^{-1}(b_i)|c_i) - \gamma(b_i - c_i)f(b^{-1}(b_i)|c_i) = 0$$

dove $b_i = b(c_i)$ sarà il candidato equilibrio di Nash-Bayes. Pertanto la funzione di offerta che cerchiamo deve soddisfare la relazione

$$b'(c) - b(c)\frac{\gamma f(c|c)}{\beta F(c|c)} = -c\frac{\gamma f(c|c)}{\beta F(c|c)} \tag{4.2.27}$$

che è una equazione lineare non omogenea la cui soluzione è data da

$$\begin{aligned} b(c) &= b_0 \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_d^c \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) - \frac{\gamma}{\beta}\int_d^c \tau\cdot \frac{f(\tau|\tau)}{F(\tau|\tau)}\cdot \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^c \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau = \\ &= b_0 \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_d^c \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) + \left[\tau\cdot \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^c \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)\right]_d^c - \int_d^c \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^c \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau = \\ &= c + (b_0 - k)\exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_d^c \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) - \int_d^c \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^c \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

dove b_0 e d sono tali che $b(d) = b_0$.

Denotiamo il limite superiore per la funzione di offerta con $\bar{b} = b(\bar{c})$, quindi:

$$\bar{b} = \bar{c} + (b_0 - d)\exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_d^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) - \int_d^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$b_0 = d + \left[\bar{b} - \bar{c} + \int_d^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau\right] \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}\int_d^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)$$

e sostituendo b_0 nella (4.2.28) otteniamo

$$\begin{aligned} b(c) = c &+ \left[\bar{b} - \bar{c} + \int_d^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau\right] \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) + \\ &- \int_d^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau = \\ &= c + \left(\bar{b} - \bar{c}\right)\exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) + \int_d^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{c} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau + \\ &- \int_k^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau = \\ &= c + \left(\bar{b} - \bar{c}\right)\exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{c} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau = \\ &= c + \left[\bar{b} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau\right] \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Verifichiamo che tale funzione di offerta sia strettamente crescente come ci aspettiamo. Dire che $b(c)$ è strettamente crescente equivale a chiedere che $\frac{\partial b(c)}{\partial c} > 0 \; \forall c \in [\underline{c}, \bar{c}]$. La formula per la derivata prima della funzione di offerta segue immediatamente dalla (4.2.27):

$$\frac{\partial b(c)}{\partial c} = \frac{\gamma f(c|c)}{\beta F(c|c)}\left(b(c) - c\right) \tag{4.2.30}$$

e poiché $\frac{f(c|c)}{F(c|c)}$ è sempre positivo si ha che $\frac{\partial b(c)}{\partial c} > 0 \; \forall c \in [\underline{c}, \bar{c}] \Longleftrightarrow b(c) > c$ $\forall c \in [\underline{c}, \bar{c}]$. Dalla (4.2.29) si ha che tale condizione è sempre verificata in quanto, come già visto in asta discriminatoria, deve essere $\overline{b} \in (\overline{c}, \overline{P}]$.

Condizioni di ottimalità del secondo ordine

Affinché la (4.2.29) massimizzi il profitto la derivata seconda del payoff rispetto a $b(c)$ deve essere strettamente negativa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \pi_i(b_i,c_i)}{\partial b_i^2} &= \beta \frac{f(b^{-1}(b_i)|c_i)}{b'(b^{-1}(b_i))} - \gamma \frac{f(b^{-1}(b_i)|c_i)}{b'(b^{-1}(b_i))} - \gamma(b_i - c_i)\frac{f_j(b^{-1}(b_i)|c_i)}{[b'(b^{-1}(b_i))]^2} + \\ &+ \gamma(b_i - c_i)\frac{f(b^{-1}(b_i)|c_i) b''(b^{-1}(b_i))}{[b'(b^{-1}(b_i))]^3} = \\ &= (\beta - \gamma)\,\frac{f(b^{-1}(b_i)|c_i)}{b'(b^{-1}(b_i))} - \gamma \frac{(b_i - c_i)}{[b'(b^{-1}(b_i))]^3}(f_j(b^{-1}(b_i)|c_i) b'(b^{-1}(b_i)) + \\ &- f(b^{-1}(b_i)|c_i) b''(b^{-1}(b_i)))\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Ricaviamo $b''(c)$ dalla (4.2.30):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 b(c)}{\partial c^2} &= \frac{\gamma}{\beta}\left(\left(b'(c) - 1\right)\frac{f(c|c)}{F(c|c)} + (b(c) - c)\frac{f_j(c|c) + f_i(c|c)}{F(c|c)} + \right. \\ &- (b(c) - c) f(c|c) \frac{f(c|c) + F_i(c|c)}{(F(c|c))^2} = \\ &= \left(b'(c) - 1\right)\frac{f(c|c)}{F(c|c)} + b'(c)\left(\frac{f_j(c|c) + f_i(c|c)}{F(c|c)} - \frac{f(c|c) + F_i(c|c)}{F(c|c)}\right).\end{aligned}$$

Sostituendo la formula appena trovata nella (4.2.31) e utilizzando anche la

(4.2.29) e la (4.2.30) otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \pi(b(c),c)}{\partial\,(b(c))^2} &= (\beta-\gamma)\,\frac{f(c|c)}{b'(c)} - \gamma(b(c)-c)\frac{f_j(c|c)b'(c)+f(c|c)b''(c)}{(b'(c))^3} = \\
&= (\beta-\gamma)\,\frac{f(c|c)}{b'(c)} - \beta\left(\frac{f_j(c|c)+F(c|c)}{f(c|c)b'(c)} + \frac{F(c|c)b''(c)}{(b'(c))^2}\right) = \\
&= (\beta-\gamma)\,\frac{f(c|c)}{b'(c)} - \beta\frac{f_j(c|c)+F(c|c)}{f(c|c)b'(c)} + \gamma\frac{b'(c)-1}{(b'(c))^2}f(c|c) + \\
&+ \beta\frac{f_j(c|c)+f_i(c|c)}{f(c|c)b'(c)}F(c|c) - \beta\frac{f(c|c)+F_i(c|c)}{b'(c)} = \\
&= (\beta-\gamma)\,\frac{f(c|c)}{b'(c)} + \gamma\frac{b'(c)-1}{(b'(c))^2}f(c|c) + \beta\left(\frac{f_i(c|c)F(c|c)}{f(c|c)b'(c)} - \frac{f(c|c)+F_i(c|c)}{b'(c)}\right) = \\
&= \beta\frac{f_i(c|c)F(c|c)-f(c|c)F_i(c|c)}{f(c|c)b'(c)} - \gamma\frac{f(c|c)}{(b'(c))^2} = \\
&= \frac{\gamma}{(b'(c))^2}\left[(b(c)-c)\left(f_i(c|c) - \frac{f(c|c)F_i(c|c)}{F(c|c)}\right) - f(c|c)\right]
\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Dunque

$$\frac{\partial^2 \pi(b(c),c)}{\partial\,(b(c))^2} < 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(b(c)-c)\left(f_i(c|c) - \frac{f(c|c)F_i(c|c)}{F(c|c)}\right) - f(c|c) < 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{f(c|c)}{(b(c)-c)} > f_i(c|c) - \frac{f(c|c)F_i(c|c)}{F(c|c)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{(b(c)-c)} > \frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} - \frac{F_i(c|c)}{F(c|c)} \tag{4.2.33}$$

Osservazione 7. Poichè la funzione di densità $f(\cdot\,|\cdot\,)$ è nota, è possibile stabilire se vale la (4.2.33) e in tal caso la formula (4.2.29) rappresenta la funzione di offerta che ottimizza il payoff dato dalla (4.2.26).

Notiamo che data la densità $f(c|c)$ è possibile calcolare la quantità $\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} - \frac{F_i(c|c)}{F(c|c)}$. Se tale quantità è non positiva e se i costi marginali sono indipendenti la (4.2.33), per le stesse motivazioni viste in asta discriminatoria, è sicuramente verificata, mentre per tutti i costi marginali tali che

$$\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} - \frac{F_i(c|c)}{F(c|c)} > 0$$

la (4.2.33) può essere riscritta sostituendo a $b(c)$ l'espressione (4.2.29) come segue:

$$\frac{1}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} - \frac{F_i(c|c)}{F(c|c)}} > b(c) - c = \left[\bar{b} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau\right] \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) >$$

$$> \left[\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau\right] \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} - \frac{F_i(c|c)}{F(c|c)}} > \bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\bar{P} < \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)\left(\frac{1}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} - \frac{F_i(c|c)}{F(c|c)}} - \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau\right) + \bar{c} \tag{4.2.34}$$

Quindi, ricordando che per $\theta \in (K, 2K)$, nella (4.2.29) si ha $\alpha = K$ e $\beta = \theta - K$ e quindi possiamo enunciare il seguente lemma.

Lemma 12. *In asta discriminatoria se $\theta \in (K, 2K)$ si ha che per costi marginali indipendenti la funzione*

$$b(c) = c + \left[\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{2K-\theta}{\theta-K}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau\right] \exp\left(-\frac{2K-\theta}{\theta-K}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) \tag{4.2.35}$$

rappresenta la funzione di offerta ottima. Per cosi marginali affiliati la (4.2.35) rappresenta la funzione di offerta ottima solo se

$$\bar{P} < \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_{c}^{\bar{c}}\frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)\left(\frac{1}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)}-\frac{F_i(c|c)}{F(c|c)}}-\int_{c}^{\bar{c}}\exp\left(\frac{\gamma}{\beta}\int_{\tau}^{\bar{c}}\frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau\right)+\bar{c}$$

4.3 Esistenza ed Unicità degli equilibri di Nash-Bayes

Proviamo ora che le funzioni di offerta ottima trovate nella sezione precedente sono effettivamente equilibri di Nash.

4.3.1 Asta Discriminatoria

Per definizione, l'equilibrio esiste solo se tutti i fornitori sono incentivati a partecipare all'asta ovvero se per $i = 1, 2$:

$$\pi_i^d(b(c), c) \geq 0 \tag{4.3.1}$$

La funzione di offerta ottima per l'asta discriminatoria, che massimizza il payoff, può essere scritta in generale come

$$b(c) = \left(\bar{P} - \bar{c} + \int_{c}^{\bar{c}} e^{\int_t^{\bar{c}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma F(\tau|\tau)} d\tau} dt\right)\exp\left(\int_{c}^{\bar{c}}\frac{-\gamma f\left(\tau|\tau\right)}{\alpha-\gamma F\left(\tau|\tau\right)}d\tau\right)+c \tag{4.3.2}$$

e dalla (4.2.1) il payoff diventa:

$$\pi_i^d(b(c), c) = (b(c) - c)y(c|c)$$

che, come già visto, è una quantità positiva.

Si ha un equilibrio di Nash-Bayes solo se nessun fornitore è in grado di incrementare il profitto cambiando la propria strategia. Il profitto è crescente nella funzione di offerta $b(c)$, la quale, a sua volta, è strettamente crescente in c. Quindi abbiamo $b(c) \in [b(\underline{c}), b(\bar{c})]$, pertanto:

$$\pi_i^d(b(c_i), c_i) \geq \pi_i(b(\underline{c}), c_i) \geq \alpha(b(\underline{c}) - c_i)$$

Inoltre se fosse $b(\underline{c}) < 0$ il fornitore i potrebbe «tagliare» leggermente l'offerta più bassa possibile $b(\underline{c})$ e garantirsi la «vittoria», ovvero l'allocazione della quantità massima di energia α.

Sia allora $\varepsilon \in [b(\underline{c}), 0)$

$$\pi_i^d(b(\underline{c}) - \varepsilon, c_i) = \alpha(b(\underline{c}) - \varepsilon - c_i)$$

ma

$$\pi_i^d(b(\underline{c}) - \varepsilon, c_i) < \pi_i(b(\underline{c}), c_i)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\alpha(b(\underline{c}) - \varepsilon - c_i) < \alpha(b(\underline{c}) - c_i)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\varepsilon > 0$$

il che è assurdo in quanto abbiamo supposto $\varepsilon \in [b(\underline{c}), 0)$, ovvero $\varepsilon < 0$, e quindi deve essere $b(\underline{c}) \geq 0$.

L'unicità segue dal fatto che la (4.3.2) contiene solo le variabili che il fornitore usa per scegliere la propria offerta e nessuna altra variabile libera, ovvero dal fatto che è la soluzione di un problema di Cauchy.

Dunque per quanto visto fin qui possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 13. *In asta discriminatoria esiste un unico equilibrio di Nash-Bayes, identico per entrambi i fornitori, rappresentato dalla funzione di offerta b_d che assume la seguente forma:*

- *per $\theta \in (0, K]$ e per costi marginali indipendenti o affiliati*

$$b_d(c) = \left(\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}} \frac{f(\tau|\tau)}{1-\mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt \right) \exp\left(- \int_c^{\bar{c}} \frac{f\left(\tau|\tau\right)}{1 - F\left(\tau|\tau\right)} d\tau \right) + c$$

- *per $\theta \in (K, 2K)$ e per costi marginali indipendenti*

$$b_d(c) = \left(\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}} \frac{(2\mathrm{K}-\theta) f(\tau|\tau)}{\mathrm{K}-(2\mathrm{K}-\theta)\mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt \right) \exp\left(- \int_c^{\bar{c}} \frac{(2K-\theta)\, f\left(\tau|\tau\right)}{K - (2K-\theta)\, F\left(\tau|\tau\right)} d\tau \right) + c \tag{4.3.3}$$

- *per $\theta \in (K, 2K)$ e per costi marginali affiliati la (4.3.3) è un equilibrio di Nash-Bayes se vale la condizione*

$$\bar{P} < \bar{c} + \frac{\exp\left(\int_c^{\bar{c}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma F(\tau|\tau)} d\tau\right)}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} + \frac{\gamma F_i(c \quad |c)}{\alpha - \gamma F(c|c)}} - \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_{\mathrm{t}}^{\bar{\mathrm{c}}} \frac{\gamma f(\tau|\tau)}{\alpha - \gamma \mathrm{F}(\tau|\tau)} \mathrm{d}\tau} dt.$$

4.3.2 Asta Uniforme

Per l'asta uniforme la condizione (4.3.1), che garantisce la partecipazione all'asta da parte dei fornitori (i.e. payoff non negativo), è equivalente alla seguente:

$$\beta(b(c) - c)F(c|c) + \int_c^{\bar{c}} (b(\tau) - c) f(\tau|c) d\tau \geq 0 \tag{4.3.4}$$

dove $b(c)$ è data dalla (4.2.29).

Per quanto visto nella sezione precedente sappiamo che $b(c) > c$ e dunque la disuguaglianza (4.3.4) è sempre verificata, pertanto tutti i fornitori, ottenendo un payoff non negativo, sono incentivati a partecipare all'asta.

Mostriamo ora che la funzione di offerta $b(c)$ data dalla (4.2.29) è un equilibrio di Nash-Bayes facendo vedere cosa accade qualora uno dei fornitori decidesse di non seguire la strategia $b(\cdot)$ nel decidere i prezzi da proporre in asta.

Se il fornitore i volesse offrire un prezzo diverso da $b(c)$, al fine di ottenere profitti più alti, poiché $b(\cdot)$ è già la funzione che massimizza il payoff, non dovrebbe mai offrire prezzi più bassi di $b(\underline{c})$ ne più alti di $b(\overline{c})$. Inoltre un incremento dell'offerta ottima $b(\overline{c})$, rispettando il vincolo imposto dal prezzo di riserva di mercato $\overline{P}$, incrementerebbe il profitto solo se, per $\varepsilon > 0$ e $b(\overline{c}) + \varepsilon < \overline{P} (\Rightarrow b(\overline{c}) < \overline{P})$ fosse

$$\pi(b(\overline{c}) + \varepsilon, c) - \pi(b(c), c) > 0$$

In tal caso

$$\pi_i^u(b(\overline{c}) + \varepsilon, c) = \beta\left(b(\overline{c}) + \varepsilon - c\right) = \beta\left(\overline{b} + \varepsilon - c\right)$$

pertanto

$$\pi_i^u(b(\overline{c}) + \varepsilon, c) - \pi_i^u(b(c), c) = \beta\left(\overline{b} + \varepsilon - c\right) - \beta(b(c) - c)F(c|c) - \int_c^{\bar{c}} (b(\tau) - c) f(\tau|c) d\tau$$

Tale extra rendimento è crescente in ε:

$$\frac{\partial \pi_i^u(b(\bar{c})+\varepsilon, c) - \pi(b(c), c)}{\partial \varepsilon} = \beta > 0$$

ma, essendo $\overline{P}$ il prezzo più alto ammissibile, dalla funzione di offerta data dalla (4.2.29), segue che $b(\bar{c}) = \bar{b} = \overline{P}$, il che è possibile solo se vale la condizione del secondo ordine (4.2.34) che porterebbe di nuovo alla funzione di offerta ottima (4.2.35).

Infine l'unicità segue di nuovo dal fatto che nella (4.2.29) non ci sono variabili libere.

Dunque per quanto visto fin qui possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 14. *In asta uniforme esiste un unico equilibrio di Nash-Bayes, identico per entrambi i fornitori, rappresentato dalla funzione di offerta b_u che assume la seguente forma:*

- *per $\theta \in (0, K]$ e per costi marginali indipendenti o affiliati*

$$b_u(c) = \left(\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \mathrm{e}^{\int_t^c \frac{f(\tau|\tau)}{1-F(\tau|\tau)} d\tau} dt \right) \exp\left(-\int_c^{\bar{c}} \frac{f(\tau|\tau)}{1-F(\tau|\tau)} d\tau \right) + c$$

- *per $\theta \in (K, 2K)$ e per costi marginali indipendenti*

$$b_u(c) = \left[\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{2K-\theta}{\theta-K} \int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)} dt \right) d\tau \right] \exp\left(-\frac{2K-\theta}{\theta-K} \int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)} dt \right) + c \tag{4.3.5}$$

- *per $\theta \in (K, 2K)$ e per costi marginali affiliati la (4.3.5) è un equilibrio di Nash-Bayes se vale la condizione*

$$\bar{P} < \exp\left(\frac{\gamma}{\beta} \int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)} dt \right) \left(\frac{1}{\frac{f_i(c|c)}{f(c|c)} - \frac{F_i(c|c)}{F(c|c)}} - \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta} \int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)} dt \right) d\tau \right) + \bar{c}$$

4.4 Confronto tra le aste

Ci chiediamo ora quale dei due formati d'asta sia più conveniente per i fornitori. Nello Scenario A, in cui basta uno solo dei fornitori a servire la domanda di mercato, la costruzione delle funzioni di offerta ottima dipende solo dai costi di produzione e il profitto finale è identico. Un ragionamento analogo vale per lo Scenario **C** dove la domanda eccede la capacità totale che entrambi i fornitori possono produrre. Ci riduciamo quindi al confronto delle aste nel caso in cui $\theta \in (K, 2K)$.

I fornitori in questa situazione offriranno tutta la loro capacità produttiva seguendo le funzioni di offerta, trovate come sopra,

$$b_d(c) = c + \left[\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\int_\tau^{\bar{c}} \frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right) d\tau\right] \exp\left(-\int_c^{\bar{c}} \frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right)$$

in asta discriminatoria e

$$b_u(c) = c + \left[\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau\right] \exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)$$

in asta uniforme. Si verifica immediatamente che $b_u(\bar{c}) = b_d(\bar{c})$. Invece per i costi marginali minori di $\bar{c}$ vale il seguente teorema:

Teorema 15. *Se $\theta \in (K, 2K)$ per ogni $c \in [\underline{c}, \bar{c})$ si ha $b_u(c) < b_d(c)$.*

Dimostrazione. Affermare che $b_u(c) < b_d(c)\ \forall\ c \in [\underline{c}, \bar{c})$ è equivalente ad affermare che

$$\left[\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int_\tau^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau\right] \exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) <$$

$$< \left[\bar{P} - \bar{c} + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(\int_\tau^{\bar{c}} \frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right) d\tau\right] \exp\left(-\int_c^{\bar{c}} \frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\bar{P} - \bar{c}\right) \exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int_c^{\bar{c}} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int_c^{\tau} \frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right) d\tau <$$

$$< \left(\bar{P} - \bar{c}\right) \exp\left(-\int_c^{\bar{c}} \frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right) + \int_c^{\bar{c}} \exp\left(-\int_c^{\tau} \frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right) d\tau$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\bar{P}-\bar{c}\right)\exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int\limits_{c}^{\bar{c}}\frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)<\left(\bar{P}-\bar{c}\right)\exp\left(-\int\limits_{c}^{\bar{c}}\frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right)$$

e

$$\int\limits_{c}^{\bar{c}}\exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int\limits_{c}^{\tau}\frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)d\tau<\int\limits_{c}^{\bar{c}}\exp\left(-\int\limits_{c}^{\tau}\frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right)d\tau$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int\limits_{c}^{\bar{c}}\frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)<\exp\left(-\int\limits_{c}^{\bar{c}}\frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right)$$

e

$$\exp\left(-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\int\limits_{c}^{\tau}\frac{f(t|t)}{F(t|t)}dt\right)<\exp\left(-\int\limits_{c}^{\tau}\frac{(2k-\theta)f(t|t)}{k-(2k-\theta)F(t|t)}dt\right)\ \forall\tau\in(c,\overline{c}]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\frac{2k-\theta}{\theta-k}\frac{f(c|c)}{F(c|c)}<-\frac{(2k-\theta)f(c|c)}{k-(2k-\theta)F(c|c)}\ \forall\, c\in[\underline{c},\overline{c})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\theta-k)\,F(c|c)<k-(2k-\theta)F(c|c)\ \forall\, c\in[\underline{c},\overline{c})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$F(c|c)<1\ \forall\, c\in[\underline{c},\overline{c})$$

e l'ultima disequazione è sempre valida in quanto la funzione di distribuzione $F(c|c)$, che è strettamente crescente in c e raggiunge il suo massimo, 1, solo in $\overline{c}$. $\square$

Dunque, poiché il guadagno è crescente nelle offerte il Teorema 15 ci dice che, se per soddisfare la domanda di mercato sono necessari entrambi i fornitori, l'asta discriminatoria è la più efficiente dal punto di vista dei guadagni.

Appendice A

Appendice

A.1 Funzioni supermodulari e log-supermodulari

Le funzioni supermodulari e log-supermodulari sono di largo uso in molte applicazioni, soprattutto quelle economiche. In particolare, nella Teoria dei giochi ad informazione incompleta, l'ipotesi di supermodularità della funzione payoff garantisce l'esistenza di un equilibrio di Nash e che la risposta ottima di ogni giocatore sia crescente rispetto alle strategie degli avversari. Trattiamo qui le funzioni supermodulari e log-supermodulari seguendo l'approccio di Topkis [14].

Definizione 23. Sia $(X, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e siano $\vee, \wedge : X \times X \longrightarrow X$ due operazioni binarie associative, commutative e idempotenti e tali che

$$x' \vee x = \begin{cases} x' & \text{se} \quad x' \preceq x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x' \wedge x = \begin{cases} x & \text{se} \quad x' \preceq x \\ x' & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X si dice **reticolo** se per ogni x,$x' \in X$ gli elementi $x \vee x'$ e $x \wedge x'$ sono in X.

Esempio 3. Per ogni intero positivo n, l'insieme $(\mathbb{R}^n, \preceq)$ è un reticolo, dove la relazione $\preceq$ è definita ponendo, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}' =$

$(x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}' \Leftrightarrow x_i \leq x'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove $\leq$ è la usuale relazione di ordine totale su $\mathbb{R}$ e dove

$$x \wedge x' = \big(\min\{x_1, x'_1\}, \dots, \min\{x_n, x'_n\})\big)$$

$$x \vee x' = (\max\{x_1, x'_1\}, \dots, \max\{x_n, x'_n\})$$

Definizione 24. Sia X un reticolo e sia $h : X \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.

1. h è **supermodulare** se per ogni $x, y \in X$ si ha

$$h(x \vee y) + h(x \wedge y) \geq h(x) + h(y)$$

2. h è **log-supermodulare** se per ogni $x, y \in X$ si ha

$$h(x \vee y)h(x \wedge y) \geq h(x)h(y)$$

Teorema 16. *Sia $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione supermodulare (risp. log-supermodulare) e siano $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, per $i = 1, \dots, n$, funzioni non decrescente. Allora $h(b_1(x_1), \dots, b_n(x_n))$ è una funzione supermodulare (risp. log-supermodulare).*

Dimostrazione. Si veda [14]. □

Teorema 17. *Sia m un intero positivo.*

1. *se $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, per $j = 1, \dots, m$, sono funzioni supermodulari, allora*

$$h = \sum_{j=1}^{m} h_j$$

   è una funzione supermodulare.

2. *se $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, per $j = 1, \dots, m$, sono funzioni supermodulari, allora*

$$h = \prod_{j=1}^{m} h_j$$

   è una funzione supermodulare.

Dimostrazione. Si veda [14]. □

A.2 Variabili aleatorie affiliate

La nozione di variabili aleatorie affiliate è stata introdotta da Milgrom e Webern in [11] allo scopo di formalizzare matematicamente, nell'ambito della teoria delle aste, i segnali, ovvero le informazioni, che ricevono i giocatori dal mondo esterno e di cui tengono poi conto nell'implementare le loro strategie. Diamo qui qualche cenno teorico sulla proprietà di affiliazione.

Siano X e Y due variabili aleatorie assolutamente continue, con densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Supponiamo che X e Y ammettono densità congiunta $f(x, y)$. Con abuso di notazione indichiamo con

$$f(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{se } f_Y(y) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità condizionata.

Definizione 25. Siano $Z_1, \ldots, Z_n$ variabili aleatorie e sia $f(z_1, \ldots, z_n)$ la loro densità congiunta. Diremo che le $Z_1, \ldots, Z_n$ sono affiliate se e solo se soddisfano la seguente proprietà:

$$f(\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}')f(\mathbf{z} \vee \mathbf{z}') \geq f(\mathbf{z})f(\mathbf{z}')$$

per μ-quasi ogni $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathbb{R}^{2n}$ dove μ è la misura di Lebesgue e

$$\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}' = (\min\{z_1, z_1'\}, \ldots, \min\{z_n, z_n'\}),$$

$$\mathbf{z} \vee \mathbf{z}' = (\max\{z_1, z_1'\}, \ldots, \max\{z_n, z_n'\}).$$

Cioè le variabili aleatorie $Z_1, \ldots, Z_n$ sono affiliate se e solo se la loro densità congiunta è log-supermodulare. Una caratterizzazione di tale nozione è data dal seguente teorema:

Teorema 18. *Siano $Z_1, \dots, Z_n$ variabili aleatorie e sia f la loro densità congiunta. Supponiamo f due volte continuamente differenziabile, allora le $Z_1, \dots, Z_n$ sono affiliate se per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$, con $i \neq j$,*

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \ln f \geq 0$$

Dimostrazione. Si veda [11]. □

Intuitivamente, l'affiliazione implica che condizionatamente ad alte (basse) osservazioni dei valori di Z_i, c'è un'alta probabilità di osservare alti (bassi) valori per le realizzazioni di Z_j.

Se consideriamo, per esempio, due variabili aleatorie X e Y , l'affiliazione ci dà molte informazioni sulla distribuzione condizionata $f(y|x)$. Se $x \leq x'$ e$y \leq y'$, allora l'affiliazione implica che:

$$f(x', y)f(x, y') \leq f(x, y)f(x', y')$$

da cui

$$\frac{f(x, y')}{f(x, y)} \leq \frac{f(x', y')}{f(x', y)}$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{f(y'|x)}{f(y|x)} \leq \frac{f(y'|x')}{f(y|x')}$$

In questo senso alte (basse) realizzazione di X implicano un'alta probabilità di alte (basse) realizzazioni di Y. Questo è anche il motivo per cui possiamo considerare l'affiliazione più forte della correlazione: essa dà informazioni su tutta la distribuzione condizionata Y rispetto a X, piuttosto che sul solo valore atteso condizionale.

Bibliografia

[1] Athey S. (2001). «Single Crossing Properties of Pure Strategy Equilibria in Games of Incomplete Information». MIT and NBER.

[2] P. Dasgputa, E. Maskyn (1986). «The existence of equilibrium in discontinuous economic games». The Review of Economic Studies Vol. 53, No. 1 (Jan., 1986), pp. 27-41.

[3] Fabra N, von der Fehr N.-H M., Harbord D. (2006). «Designing electricity auctions». Rand Journal of Economics 37, pp. 23–46.

[4] Gibbons R. (1992). «Game theory». Prentice Hall.

[5] Harsanyi J. (1967). «Games with Incomplete Information Played by Baysian Players». Management Science, Vol. 14.

[6] Harsanyi J. (1973).»Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points». International Journal of Game Theory. Vol. 2, pp. 1–23.

[7] Krishna, Vijay (2002). «Auction Theory». Academic Press.

[8] Martin J. Osborne (2009). «An introduction to Game Theory». Oxford university press.

[9] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein (1994). «A course in Game Theory». The MIT press.

[10] Milgrom, Paul, and Chris Shannon (1994). "Monotone Comparative Statics," Econometrica 62.

[11] Milgrom P. and Weber R. J. (1982). «A Theory of Auctions and Competitive Bidding», Econometrica 50.

[12] Pesendorfer J. and Swinkels W. (1997). «The Loser's Curse and Information Aggregation in Common Value Auctions».Econometrica 65.

[13] Shizuo Kakutani (1941). «A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem». Duke Mathematical Journal vol. 8, n° 3, pp. 457–459.

[14] Topkis Donald M. (1998). «Supermodularity and Complementarity». Princeton University Press.

[15] von der Fehr, N.-H. M. and Harbord D. (1993). «Spot Market Competition in the UK Electricity Industry». Economic Journal Vol. 103 , pp. 531–546.

[16] "Testo integrato della disciplina del mercato elettrico" approvato con D.M. del 19 dicembre 2003 come successivamente modificato e integrato. (disponibile al sito: http://www.mercatoelettrico.org/)