

# Università degli studi di Padova

Facoltà di Ingegneria  
Corso di laurea in Ingegneria Biomedica

## Tesi di Laurea Triennale

### La controllabilità dei sistemi e la progettazione della retroazione del sistema a catena chiusa

Laureando:  
Matteo Malafa (1187617)

Relatore:  
Prof. Augusto Ferrante

Anno accademico 2022/2023

# Sommario

Introduzione .....	3
Capitolo 1 .....	4
Sistemi e modelli.....	4
1.1 Sistemi di stato .....	4
1.2 Classificazione dei sistemi .....	4
1.3 Modelli di stato.....	5
1.5 Scelte delle variabili.....	8
Capitolo 2 .....	10
Equazioni di stato.....	10
2.1 Soluzione equazione differenziale scalare del primo ordine .....	10
2.2 Soluzione equazione del sistema di stato .....	11
Capitolo 3 .....	14
Controllabilità .....	14
3.1 Controllo dei sistemi continui .....	14
3.2 Gradi di controllabilità .....	18
3.3 Codice Matlab per controllabilità.....	20
3.4 Popov-Belevitch-Hautus .....	21
3.5 Codice Matlab per PBH test.....	22
Capitolo 4 .....	25
Retroazione dallo stato e allocazione degli autovalori.....	25
4.1 Equazione di stato per un sistema feedback .....	25
4.2 Forma canonica di controllo.....	26
4.3 Collocazione autovalori: caso $m=1$ .....	29
Bibliografia .....	33



# Introduzione

Il presente lavoro di tesi si propone di illustrare il concetto di controllabilità per i sistemi dinamici lineari tempo invarianti, soffermandosi solamente sui sistemi a tempo continuo e, successivamente, analizzare gli effetti che la retroazione dello stato può avere sulla dinamica di questi sistemi.

Nella prima parte vengono introdotti gli argomenti relativi ai modelli di stato, sottolineando l'importanza del modello matematico.

A seguire verrà dimostrato come si possono derivare le soluzioni delle equazioni di stato e le sue relative evoluzioni libere e forzate.

Nel terzo capitolo invece, si espone il concetto di controllabilità affrontando il problema di analizzare in quale misura sia possibile influire sulla dinamica dei sistemi attraverso le variabili di ingresso.

Nel quarto capitolo invece, si passerà a vedere come è possibile considerare sistemi in cui l'ingresso porta con sé una componente determinata istante per istante dallo stato in cui il sistema si trova.

# Capitolo 1

## Sistemi e modelli

---

### 1.1 Sistemi di stato

Un sistema è un complesso, normalmente costituito di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze di stato soggette a evolvere nel tempo e/o nello spazio. Queste grandezze vengono indicate semplicemente con il nome di variabili. Nei sistemi l'evoluzione di alcune variabili è conseguenza di quella di altre: si identificano *variabili di ingresso* o *variabili indipendenti* o *cause* e *variabili di uscita* o *variabili dipendenti* o *effetti*. Un sistema in cui le variabili siano suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita viene detto *orientato*. Una classe molto ampia di sistemi è quella in cui il legame fra ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$  è espresso da una coppia di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

dove  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$  viene definito stato del sistema. Il numero  $n$  di componenti dello stato

$x(t)$  è detto ordine del sistema.

### 1.2 Classificazione dei sistemi

Per quanto riguarda l'*asse dei tempi*  $T$  si hanno, sostanzialmente, i due casi dei *sistemi a tempo*

*continuo* e dei *sistemi a tempo discreto*. Si parla di sistemi a tempo continuo quando la variabile  $t$  assume valori sui reali (o su un loro intervallo):  $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ , mentre si parla di sistemi a tempo discreto se la variabile  $t$  assume valori sugli interi o su un loro sottoinsieme:  $t \in T \subseteq \mathbb{Z}$ .

**Definizione 1.2.1** Un sistema si dice *lineare* quando soddisfa la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*. In caso contrario il sistema si dice *non lineare*.

Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che per un sistema l'effetto di una somma di perturbazioni in ingresso deve essere uguale alla somma degli effetti prodotti da ogni singola perturbazione.

**Definizione 1.2.2** Il sistema (1.1.1) si dice *invariante nel tempo*, o anche *stazionario*, nel caso in cui le funzioni  $f$  e  $h$  non dipendano esplicitamente dal tempo.

Per esempio, il seguente sistema con  $x(t)$  scalare è *tempo-invariante*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \cos(x(t)) + u(t) \\ y(t) = x(t) - u(t) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

I sistemi che sono sia lineare che invariante nel tempo vengono chiamati anche *sistemi LTI*, (*Linear Time-invariant*) e possono essere rappresentati dalla seguente coppia di relazione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

dove  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}$ .

### 1.3 Modelli di stato

Un modello di un sistema è una descrizione dell'oggetto e della variazione nel tempo e nello spazio delle grandezze che lo caratterizzano. La descrizione di un sistema serve essenzialmente per formulare e risolvere problemi. I modelli di un sistema si possono classificare in due gruppi: modelli fisici e modelli astratti. Fra i modelli astratti rivestono particolarmente importanza i

cosiddetti modelli matematici.

Le grandezze caratteristiche del modello preso in considerazione si dividono in *parametri* e *variabili*.

Le prime descrivono la struttura fisica del problema mentre le seconde descrivono l'evoluzione spaziale e temporale del comportamento di un determinato sistema. Parametri e variabili di un modello matematico devono essere tutte grandezze quantificate, cioè corrispondere in genere a numeri interi o a numeri reali con o senza dimensione.

Esiste inoltre una interessante distinzione per quanto riguarda i modelli matematici, che possono essere suddivisi in modelli statici e dinamici.

Un modello matematico statico è costituito da relazioni algebriche e viene spesso detto modello matematico algebrico. Sono considerati modelli statici anche quei modelli dove la variazione nel tempo degli ingressi è sufficientemente lenta in rapporto ai tempi di risposta del sistema.

I modelli matematici dinamici descrivono la relazione fra l'ingresso, costante o variabile nel tempo, e l'uscita variabile nel tempo. Le relazioni fra le variabili di ingresso e di uscita sono costituite da equazioni differenziali. Un modello dinamico viene anche detto *con memoria* in quanto l'uscita ad un dato istante non dipende solamente dall'ingresso allo stesso istante ma anche dall'andamento dell'ingresso precedente l'istante considerato.

## 1.4 Costruzione di un modello di stato

La costruzione di un modello matematico a partire da un sistema fisico è un'operazione molto importante che deve tenere conto di due esigenze: quella di avere un modello semplice e quella di avere un modello accurato. Per ottenere un modello di stato, oltre alle variabili di ingresso e di uscita, devono essere fissate anche le variabili di stato. Per definire le variabili di stato non ci sono regole predefinite.

### **Esempio 1.4.1**

Si consideri il seguente circuito elettrico rappresentato in figura 1.1. Si prenda come variabile di ingresso la corrente indotta dal generatore di corrente  $u(t) = i(t)$  e come variabile di uscita la tensione ai capi del condensatore  $y(t) = v(t)$

Si scelgano ora le variabili di stato nel seguente modo:

$$x_1(t) = i_L(t) \quad (1.4.1)$$

$$x_2(t) = v(t)$$

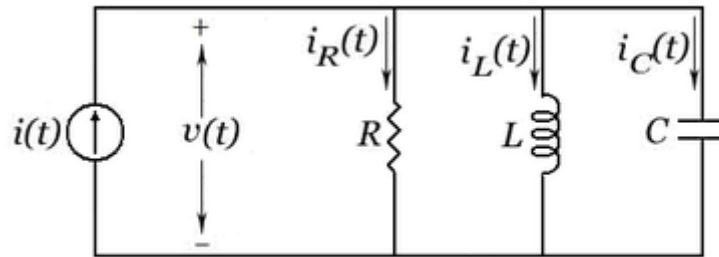


Figura 1.1 Rappresentazione di un circuito elettrico RLC

Si osservi che in questo esempio la tensione sul condensatore coincide con la tensione di ogni componente elettrico a causa della configurazione parallela.

Con queste variabili di stato si ottiene la seguente relazione relativa alla tensione per l'induttanza L:

$$x_2(t) = L\dot{x}_1(t) \quad (1.4.2)$$

Applicando ora la legge di Kirchhoff al nodo del morsetto positivo si ottiene:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \\ u(t) &= \frac{1}{R}x_2(t) + x_1(t) + C\dot{x}_2(t) \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Si riscrivono ora le due equazioni ottenute per isolare le variabili di stato derivate:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}x_2(t) \quad (1.4.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{RC}x_2(t) + \frac{1}{C}u(t) \quad (1.4.5)$$

Dalle seguenti relazioni, insieme all'equazione della variabile di uscita, si ottiene il modello di stato relativo al circuito elettrico.



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} u(t) \quad (1.4.6)$$

Per quanto riguarda le equazioni di uscita si ottiene:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.4.7)$$

Le matrici corrispondenti sono:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (1.4.8)$$

## 1.5 Scelte delle variabili

Analizziamo ora il problema delle scelte delle variabili e della formulazione delle equazioni di stato. Le variabili di stato forniscono quanto è necessario sapere della situazione interna del sistema per poterne calcolare l'uscita.

Nei sistemi fisici la situazione interna è spesso determinata da accumuli di energia e perciò è opportuno scegliere come variabili di stato quelle variabili che sono in relazione con questi accumuli di energia. Pertanto, nei modelli dei circuiti elettrici, è conveniente scegliere come variabili di stato le tensioni ai morsetti dei condensatori, come nell'Esempio 1.4.1, perché da queste dipende l'energia elettrica accumulata. Sempre per quanto riguarda i circuiti elettrici è consigliato scegliere come variabili di stato anche le correnti che fluiscono negli induttori perché da esse dipende l'energia magnetica accumulata nel loro interno.

Invece, nei modelli dei sistemi meccanici può convenire scegliere come variabili di stato posizioni e velocità dei vari elementi presenti nel sistema fisico, in quanto tali variabili sono legate ad accumuli di energia potenziale ed energia cinetica.

È opportuno sottolineare che le variabili e le equazioni di stato di un sistema dinamico non sono definite in maniera unica. Infatti, alcune, come quelle sopracitate, potranno essere più comode per una scrittura immediata delle equazioni di stato.

Altre invece potranno essere più adatte ad uno studio analitico delle proprietà del sistema. Quest'ultime potranno portare addirittura a definire lo stato non in campo reale, ma in campo complesso, ponendo  $x \in \mathbb{C}^n$ .

È importante sottolineare che tutte le scelte stabiliranno la stessa relazione tra ingresso e uscita del sistema. Inoltre, neppure il numero di variabili di stato, cioè l'ordine del sistema, è fissato a priori; esistono infatti più sistemi dinamici associati allo stesso sistema fisico da modellizzare.

## Capitolo 2

# Equazioni di stato

---

In questo capitolo verrà analizzato il comportamento dei sistemi per i quali il legame fra ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$  è espresso dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.0.1)$$

dove  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}$ .

Uno degli aspetti più interessanti da calcolare di un modello così definito consiste nell'evoluzione futura dello stato e dell'uscita. Prima di calcolare la risoluzione per il sistema (2.0.1) per il caso *n-dimensionale*, rivediamo le soluzioni di un'equazione differenziale scalare del primo ordine.

### 2.1 Soluzione equazione differenziale scalare del primo ordine

Si consideri il sistema dato dalla seguente equazione differenziale scalare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

dove  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $u(t)$  sia un ingresso scalare.

La seconda equazione del sistema (2.1.1) rende noto lo stato all'istante iniziale  $t_0$ :  $x(t_0) = x_0$

La soluzione può essere derivata usando una proprietà fondamentale della funzione esponenziale, ovvero:

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at} dt \quad (2.1.2)$$

e

$$\frac{d}{dt}e^{-at} = -ae^{-at} dt \quad (2.1.3)$$

Considerando ora il sistema e sapendo che  $e^{-at} \neq 0$  si può scrivere:

$$e^{-at}\dot{x}(t) - ae^{-at}x(t) = e^{-at}bu(t) \quad (2.1.4)$$

Integrando poi la precedente equazione nell'intervallo di tempo  $[t_0, t]$  si ottiene:

$$e^{-at}x(t) = e^{-at_0}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau \quad (2.1.5)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (2.1.6)$$

Senza perdita di generalità si può assumere  $t_0 = 0$  ottenendo

$$x(t) = e^{-at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (2.1.7)$$

## 2.2 Soluzione equazione del sistema di stato

Si consideri ora un generico sistema di stato *LTI* con le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dove  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}$ .

La prima equazione rappresenta un set di  $n$  equazioni differenziali che devono essere risolte per il vettore di stato  $x(t)$  essendo dati lo stato iniziale del sistema  $t_0: x(t_0) = x_0$  e il segnale di ingresso  $u(t)$ . Una volta risolta l'equazione per  $x(t)$  possiamo trovare  $y(t)$  molto facilmente usando la seconda equazione. Prima di iniziare la risoluzione è importante sottolineare le seguenti proprietà dell'esponenziale di matrice  $e^{At}$  con  $A$  matrice reale di dimensione  $n \times n$ :  
se

1.  $e^{At}$  è l'unica funzione a valori matriciali che soddisfa  $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$
2.  $\forall t_1, t_2, e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$ , quindi  $\forall t I = e^{A(0)} = e^{A(t-t)} = e^{At}e^{-At}$ . È possibile affermare allora che  $e^{At}$  è invertibile per ogni  $t$  con inversa  $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$
3.  $A$  e  $e^{At}$  commutano rispetto al prodotto tra matrici, cioè  $Ae^{At} = e^{At}A \forall t$
4.  $[e^{At}]^T = e^{A^T t} \forall t$
5. Per ogni matrice reale  $B$  di dimensione  $n \times n$  vale:  $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \forall t$  se e solo se  $AB = BA$

Tenendo conto delle proprietà sopracitate si può ottenere la soluzione del sistema di stato in maniera analoga a quella dell'equazione differenziale scalare. L'evoluzione dello stato per  $t \geq t_0$  risulta:

$$x(t) = e^{F(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau)d\tau \quad (2.2.2)$$

mentre l'evoluzione dell'uscita per  $t \geq t_0$  è data da:

$$y(t) = He^{F(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t He^{F(t-\tau)} Gu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (2.2.3)$$

Anche in questo caso si può assumere  $t_0 = 0$ , cosicché la (2.2.2), nota come *Formula di Lagrange*, si potrà scrivere:

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau)d\tau \quad (2.2.4)$$

mentre per l'equazione (2.2.3) per l'uscita diventa:

$$y(t) = He^{Ft}x(0) + \int_0^t He^{F(t-\tau)} Gu(\tau)d\tau + Du(\tau) \quad (2.2.5)$$

Si noti come le evoluzioni di  $x(t)$  e di  $y(t)$  siano formate rispettivamente dalla somma di due componenti che possono essere descritte nella seguente maniera:

$$x_l(t) = e^{Ft}x_0 \quad (2.2.6)$$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau)d\tau \quad (2.2.7)$$

Il termine descritto nell'equazione (2.2.6) viene definito *evoluzione libera* e dipende solamente dallo stato iniziale  $x(t_0)$  mentre il secondo definito dalla (2.2.7) esso viene chiamato *evoluzione forzata* del sistema e dipende solamente dal valore dell'ingresso  $u(t)$ .

Si può fare un ragionamento analogo per l'evoluzione dell'uscita

$$y_l(t) = He^{Ft}x_0 \quad (2.2.8)$$

$$y_f(t) = \int_0^t He^{F(t-\tau)} Gu(\tau)d\tau + Du(\tau) \quad (2.2.9)$$

Il primo valore descritto nella (2.2.8) è definito *evoluzione libera* dell'uscita o *risposta libera* del sistema e dipende solamente dallo stato iniziale  $x(t_0)$ . Infine, l'ultimo termine descritto viene chiamato *evoluzione forzata* dell'uscita del sistema e dipende solamente dal valore dell'ingresso  $u(t)$ .

## Capitolo 3

# Controllabilità

---

In questo capitolo analizzeremo l'interazione fra le variabili di ingresso e un sistema di stato *LTI n-dimensionale*, cercando di capire quali evoluzioni di stato possono essere controllate da un segnale di ingresso. Specificatamente, deriveremo le condizioni per le quali partendo da qualsiasi valore dello stato iniziale l'evoluzione dello stato potrà essere indirizzata nell'origine da un segnale di ingresso continuo. Se questo è possibile, allora sarà possibile controllare l'evoluzione dello stato e ottenere qualsiasi stato finale desiderato in un intervallo di tempo finito.

### 3.1 Controllo dei sistemi continui

Si consideri il sistema di stato lineare e a tempo invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

dove l'equazione di uscita viene omessa in quanto non avrà nessuna importanza nella analisi.

**Definizione 3.1.1** Uno stato  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  è *controllabile a zero* nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_f]$  se esiste un segnale di ingresso  $u(t)$  tale che  $x(t_0) = x_0 \Rightarrow x(t_f) = 0$ .

La definizione richiede solamente che l'ingresso sia in grado di condurre lo stato dal punto iniziale all'origine. La traiettoria che esso assumerà non viene richiesta.

Possiamo ora definire l'insieme degli stati controllabili:

$$X_t^C = \{x \in \mathbb{R}^n: x \text{ è controllabile a zero nell'intervallo } [0, t]\}$$

Gli stati che appartengono a questo insieme sono quelli per i quali esiste un ingresso  $u(\tau)$ ,  $u \in [0, t]$  tale che la seguente equazione è verificata:

$$0 = e^{Ft}x + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau \quad (3.1.2)$$

**Definizione 3.1.2** Il sistema si dice controllabile se  $X_t^C = \mathbb{R}^n \quad \forall t > 0$ .

Ora considerando che l'inversa di  $e^{Ft}$  è  $e^{-Ft}$ , come illustrato nel secondo capitolo, otteniamo:

$$x = -e^{-Ft} \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau = - \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)d\tau \quad (3.1.3)$$

Si noti come  $X_t^C$  sia un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ .

Basandosi solamente su questi risultati, determinare quale caratteristiche deve avere un segnale di ingresso per la controllabilità del sistema non è semplice. L'obiettivo principale è quello di tramutare la proprietà di controllabilità dell'equazione di stato in un'equivalente proprietà algebrica lineare sulle matrici  $F$  e  $G$  dell'equazione.

**Definizione 3.1.3** Si definisce matrice di controllabilità per il sistema (3.1.1) la seguente matrice:

$$\mathcal{R} = [G|FG|F^2G|\dots|F^{n-1}G]$$

**Teorema 3.1.1** Il sistema di stato è controllabile se e solo se:

$$\text{rank}[G|FG|F^2G|\dots|F^{n-1}G] = n \quad (3.1.4)$$

Si osservi come la matrice di controllabilità è definita solamente dai coefficienti matriciali delle equazioni di stato del sistema. Il teorema appura che la matrice  $\mathcal{R}$  abbia rango pieno, riducendo la verifica della controllabilità a un problema di algebra lineare.



### Esempio 3.1.1

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

dove la coppia  $(F, G)$  sono definite nel seguente modo:

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Con questi valori otteniamo che la matrice di controllabilità sia:

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, FG = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è controllabile perché la matrice di controllabilità  $\mathcal{R}$  è formata da due vettori linearmente dipendenti e non si espande in  $\mathbb{R}^2$ . In questo caso, anche prima di verificare il rango della matrice di controllabilità, è evidente che il sistema di stato non sarebbe controllabile in quanto gli stati  $x_1$  e  $x_2$  sono completamente disaccoppiati e il segnale di ingresso  $u$  influenza solamente il secondo stato.

### Esempio 3.1.2

Consideriamo ora il circuito elettrico in Figura (3.1.2).

Si prenda come variabile di ingresso la corrente del generatore di corrente  $u(t) = j(t)$  e come variabile di uscita la caduta di tensione dell'ultimo ramo  $y(t) = v(t)$

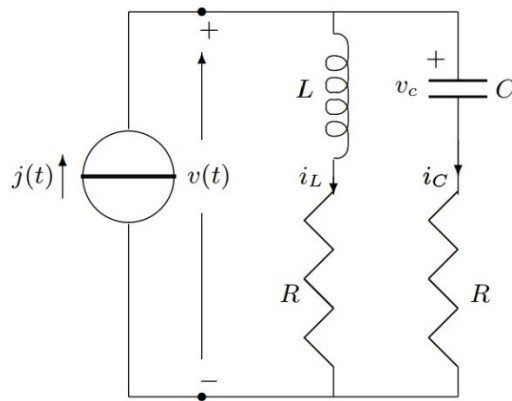


Figura 3.1.2 Circuito RLC

Secondo quanto considerato nel paragrafo (1.5) è conveniente scegliere le variabili di stato come segue:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= i_L(t) \\ x_2(t) &= v(t) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Risulta poi

$$C \frac{dv_C}{dt} = j - i_L \quad (3.1.6)$$

che rappresenta l'equazione di Kirchhoff per il nodo al morsetto positivo.

Analizzando inoltre la caduta di tensione nella seconda maglia si ottiene l'equazione:

$$L \frac{di_L}{dt} = v_C + Ri_C - Ri_L = v_C + R(j - i_L) - Ri_L = v_C - 2Ri_L + Rj \quad (3.1.7)$$

Ora calcoliamo il valore dell'uscita

$$v = v_C + Ri_C = v_C - Ri_L + Rj \quad (3.1.8)$$

Da queste equazioni otteniamo il seguente modello di stato:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} j(t) \quad (3.1.9)$$

$$y(t) = [-R \quad 1]x(t) + Rj(t) \quad (3.1.10)$$

La matrice di controllabilità per il seguente stato, che è

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & -\frac{2R^2}{L^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{R}{L} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix} \quad (3.1.11)$$

ha rango pieno, eccetto quando  $R^2 = \frac{L}{C}$ , che corrisponde alla eguaglianza delle costanti di tempo dei due lati in parallelo.

## 3.2 Gradi di controllabilità

Il metodo della matrice di controllabilità consiste in un semplice test che verifica solamente se il rango della matrice  $\mathcal{R}$  sia  $n$ . Tuttavia, esistono *gradi di controllabilità* che stabiliscono come alcuni stati  $x$  siano più facili da controllare.

Per identificare quali stati siano più o meno controllabili, viene introdotta la *Matrice Gramiana* così definita:

$$W_c(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} G G^T e^{F^T(t-\tau)} d\tau \in R^{n \times n} \quad (3.2.1)$$

La matrice Gramiana è quadrata di dimensione  $n \times n$ , simmetrica e semidefinita positiva.

**Definizione 3.2.1** La coppia  $(F, G)$  definita nel sistema (3.1.1) è controllabile *se e solo se* la matrice Gramiana è non singolare: cioè  $W_c(t)$  ha rango pieno per  $t > 0$ .

Ora per analizzare quali stati siano più facilmente controllabili rispetto ad altri bisogna studiare l'autodecomposizione della matrice Gramiana. L'autodecomposizione è un meccanismo, che si può effettuare solamente con matrici diagonalizzabili, dove la matrice studiata viene

rappresentata solamente in funzione dei suoi autovalori e autovettori.

In pratica, sia  $F$  una matrice quadrata  $n$ -dimensionale con  $n$  autovettori linearmente indipendenti; allora  $F$  può essere riscritta nella seguente maniera:

$$F = Q\Lambda Q^{-1} \quad (3.2.2)$$

dove  $Q$  è una matrice  $n \times n$  in cui la colonna  $i$ -esima corrisponde all'autovettore  $i$ -esimo della matrice  $F$ .

La matrice  $\Lambda$  invece è una matrice diagonale in cui gli elementi presenti sulla diagonale corrispondono ai rispettivi autovalori  $i$ -esimi.

Questa scomposizione può essere derivata dalle proprietà fondamentali degli autovettori:

$$\begin{aligned} Fv &= \lambda v \\ FQ &= Q\Lambda \\ F &= Q\Lambda Q^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Poiché la matrice Gramiana è semidefinita positiva e simmetrica sappiamo che avrà autovalori positivi che possono essere ordinati. Gli autovettori che corrispondono agli autovalori più grandi rappresentano le traiettorie più facilmente controllabili che lo stato può assumere, cioè quelle traiettorie dove è possibile condurre il sistema più lontano sul piano di stato con un segnale di ingresso a energia fissata.

La *Matrice Gramiana* è anche utile nel determinare l'energia minima del segnale di ingresso che permetta di navigare lo stato del sistema da  $x(0)$  a  $x(t)$  ottenendo come risultato:

$$u(\tau) = G^T e^{F^T(t-\tau)} W_c^{-1} (x(t) - e^{Ft} x(0)) \quad (3.2.4)$$

Generalmente è poco pratico calcolare la *Matrice Gramiana* usando l'equazione descritta in (3.2.1). Invece, è importante sottolineare che la *Matrice Gramiana* è la soluzione della seguente equazione di *Lyapunov*:

$$FW_c(\infty) + W_c(\infty)F^T + GG^T = 0 \quad (3.2.5)$$

### 3.3 Codice Matlab per controllabilità

Vengono ora illustrate alcune funzioni di MATLAB utili per la verifica della controllabilità:

<b><math>\mathcal{R} = \text{ctrb}(A,B)</math></b>	Calcola la matrice di controllabilità $\mathcal{R}$ associata al sistema LTI. La funzione per calcolare il risultato usa solamente le matrici A, B
<b><math>\text{rank}(\mathcal{R})</math></b>	Calcola il rango della matrice $\mathcal{R}$
<b><math>\text{size}(A, 1)</math></b>	Determina l'ordine $n$ del sistema

#### Esempio 3.3.1

```
clear all
close all
clc

A = [1 2 3,
     2 1 0,
     0 2 4]
B = [1,
     2]

%Calcolo la matrice di controllabilità

R = ctrb(A,B)

%Verifico controllabilità del sistema

if (rank(R) == size(A,1))
    disp('System is controllable')
else
    disp('System is not controllable')
end
```

A =

```
1 2 3
2 1 0
0 2 4
```

B =

1  
1  
2

R =

1 9 45  
1 3 21  
2 10 46

System is controllable

---

*Published with MATLAB® R2020b*

### 3.4 Popov-Belevitch-Hautus

Esistono molti test per verificare la controllabilità di un sistema. Uno dei più utili e usati consiste nel Popov-Belevitch-Hautus (PBH) test.

**Teorema 3.4.1** Il sistema di stato formato dalle matrici di stato  $(F, G)$  è controllabile *se e solo se*  $rg([F - \lambda I|G]) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$  dove  $n$  è la dimensione dello stato.

Si noti come l'oggetto definito da  $(F - \lambda I)$  non ha rango  $n$  quando ha determinante nullo. Il polinomio  $p(\lambda)$ , chiamato polinomio caratteristico, è ottenuto da  $det(F - \lambda I)$  e i suoi coefficienti dipendono dagli elementi di  $F$ .

L'equazione invece definita  $det(F - \lambda I) = 0$ , chiamata equazione caratteristica, fornisce come soluzioni  $\lambda_i$  gli autovalori della matrice  $F$ . Questo risultato è di fondamentale importanza perché limita la verifica di  $rg([F - \lambda I|G]) = n$  solamente agli autovalori e non più a tutto il piano dei complessi. Infatti, quando  $det(F - \lambda I) \neq 0$ , il rango di  $(F - \lambda I)$  è già  $n$ , e quindi lo è a maggior ragione il rango di  $[F - \lambda I|G]$ .

Quando la matrice  $(F - \lambda I)$  ha determinante nullo è interessante sottolineare alcune caratteristiche che deve avere la matrice  $G$  per rendere il sistema controllabile.

Infatti, le colonne della matrice  $G$  devono avere almeno alcune componenti in ciascuna direzione degli autovettori, generati dagli autovalori  $\lambda_i$  cosicché la matrice  $[(F - \lambda I)]$  avrà  $n$  righe o colonne linearmente indipendenti.

Un altro aspetto interessante da notare è che, se  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è casuale e  $G$  è un vettore casuale:

$$\gg F = \text{randn}(n) \quad (3.4.1)$$

$$\gg G = \text{randn}(n, 1)$$

allora la coppia formata da  $(F, G)$  sarà controllabile con probabilità molto elevata. In pratica, generando un vettore casuale  $G$  si ha una alta probabilità che almeno alcune delle sue componenti si espandono nelle direzioni degli autovettori di  $F$ .

### 3.5 Codice Matlab per PBH test

```
clear all
close all
clc

A = [2 -1 1,
     -1 1 0,
     1 0 1]
B = [0 1,
     1 -1,
     1 0]

%Calcolo autovalori e autovettori della matrice A

[V,D] = eig(A);

lambda1 = D(1,1)
lambda2 = D(2,2)
lambda3 = D(3,3)

v1 = V(:,1);
v2 = V(:,2);
v3 = V(:,3);

%Calcolo il rango della matrice

ranklambda1 = rank([A-lambda1*eye(3) B])
ranklambda2 = rank([A-lambda2*eye(3) B])
ranklambda3 = rank([A-lambda3*eye(3) B])

%Verifico controllabilità del sistema
if (ranklambda1 == ranklambda2 == ranklambda3 == size(A,1))
    disp('System is controllable')
```

```
else
    disp('System is not controllable')
end
```

A =

```
2 -1 1
-1 1 0
1 0 1
```

B =

```
0 1
1 -1
1 0
```

lambda1 =

```
9.9966e-17
```

lambda2 =

```
1
```

lambda3 =

```
3
```

ranklambda1 =

```
2
```

ranklambda2 =

```
3
```

ranklambda3 =

```
3
```

System is not controllable





## Capitolo 4

# Retroazione dallo stato e allocazione degli autovalori

---

Nel capitolo precedente abbiamo analizzato il problema della determinazione di una legge di controllo per portare lo stato del sistema da un valore iniziale a un valore finale assegnati. La soluzione ottenuta è di tipo *catena aperta* nel senso che è predeterminata sulla base dei valori iniziali e finali dello stato e delle caratteristiche del sistema, e non tiene conto della dinamica del sistema stesso nel periodo in cui il controllo agisce. Richiedere che nella determinazione della legge di controllo si tenga conto dell'evoluzione del sistema comporta l'utilizzo di informazioni relative alle variabili di stato e di uscita e quindi di imporre strutture del tipo a catena chiusa con reazione all'uscita.

### 4.1 Equazione di stato per un sistema feedback

Si consideri il sistema di stato a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

dove  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Assumiamo che tutte le variabili di stato necessarie per la realizzazione della legge di controllo siano a disposizione. La più semplice legge di controllo è quella dove le componenti di ingresso  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  sono combinazioni lineari dei valori delle variabili di stato e dei valori di nuovi ingressi  $v_i(t)$ :

$$u_i(t) = k_{i1}x_1(t) + k_{i2}x_2(t) + \dots + k_{in}x_n(t) + v_i(t) \quad (4.1.2)$$

con  $i = 1, 2, \dots, m$ .

In altre parole, la legge di controllo più semplice può essere scritta in forma matriciale nella seguente maniera:

$$u(t) = Kx(t) + v(t) \quad (4.1.3)$$

dove la matrice  $K$  ha dimensione  $m \times n$ .

Sostituendo a  $u(t)$  l'espressione (4.1.3) si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

che rappresenta l'equazione di stato del nuovo sistema.

## 4.2 Forma canonica di controllo

Per studiare la reazione di stato è molto utile considerare un sistema controllabile che sia espresso in particolari forme canoniche. Per i sistemi a ingresso singolo la forma canonica viene detta *forma canonica di controllo*, e viene matematicamente espressa nel seguente modo:

$$F_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, G_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

dove  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico  $\Delta(s)$ .

**Teorema 4.2.1** Indipendentemente dai valori assunti dei coefficienti del polinomio caratteristico la coppia  $(F_C, G_C)$  è controllabile.

### Dimostrazione

La matrice di controllabilità per la coppia  $(F_c, G_c)$  risulta essere:

$$\mathcal{R}_c = [G_c | F_c G_c | F_c^2 G_c | \dots | F_c^{n-1} G_c] \quad (4.2.2)$$

che sviluppando i calcoli diventa:

$$\mathcal{R}_c = \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \alpha_{n-1} \\ & 0 & & \cdot & \alpha_{n-1} & (\alpha_{n-1})^2 \\ & & & \cdot & \cdot & (\alpha_{n-1})^2 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \alpha_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{n-1} & (\alpha_{n-1})^2 & \cdot & \cdot & (\alpha_{n-1})^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Si noti come il determinante di questa matrice sia o uguale a 1 oppure a -1.

A questo punto si può concludere che la matrice ha rango massimo e la coppia  $(F_c, G_c)$  è controllabile.

**Teorema 4.2.2** Un sistema a ingresso singolo definito dalla coppia  $(F, G)$  è controllabile *se e solo se* è algebricamente equivalente a un sistema  $(F_c, G_c)$  dove la coppia  $(F_c, G_c)$  sono in forma canonica.

### Dimostrazione

Se il sistema  $(F, G)$  *n-dimensionale* è controllabile, allora i vettori colonna della matrice di controllabilità  $\mathcal{R}$  sono linearmente indipendenti e costituiscono una base ciclica in  $\mathbb{R}^n$ .

Rispetto a questa base, si ha il sistema equivalente  $\mathcal{R}^{-1}F\mathcal{R}, \mathcal{R}^{-1}G$  con:

$$\mathcal{R}^{-1}F\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & -\alpha_0 \\ 1 & & & & & -\alpha_1 \\ 0 & \cdot & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ 0 & & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \mathcal{R}^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

Per ottenere la forma canonica bisogna effettuare un altro cambiamento di base  $v_1, v_2, \dots, v_n$  appartenente a  $\mathbb{R}^n$  a partire dalla base di partenza.

Si introducano ora le  $n$  colonne linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} v_1 &= F^{n-1}G + \alpha_{n-1}F^{n-2}G + \dots + \alpha_2FG + \alpha_1G \\ v_2 &= F^{n-2}G + \alpha_{n-1}F^{n-3}G + \dots + \alpha_2G \\ &\dots \\ v_{n-1} &= FG + \alpha_{n-1}G \\ v_n &= G \end{aligned}$$

La base così definita può essere ottenuta direttamente dalla base di partenza a cui è riferito il sistema introducendo la matrice di trasformazione:

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] = [G_c | F_c G_c | F_c^2 G_c | \dots | F_c^{n-1} G_c] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & & & \alpha_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & 1 & & \\ \alpha_{n-1} & & & & 0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

È immediato verificare che, rispetto alle basi  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  il sistema assume la forma canonica di controllo:

$$T^{-1}FT = F_c, \quad T^{-1}G = G_c \tag{4.2.5}$$

Dal momento che la coppia  $(F_c, G_c)$  è controllabile, come dimostrato nel teorema (4.2.1), anche la coppia  $(F, G)$  deve essere controllabile, dato che il rango della matrice di controllabilità non cambia rispetto a un cambiamento di base in  $X$ .

Si noti ora che se la coppia  $(F, G)$  è controllabile, per ottenere la matrice  $F_c$  nella rispettiva forma canonica di controllo è sufficiente conoscere i coefficienti del polinomio caratteristico  $\Delta_F(s)$ . Questo risultato semplifica molto l'operazione perché non è necessario determinare la matrice di trasformazione  $T$ .

Se il problema, per essere risolto, richiede la conoscenza della matrice di trasformazione, essa può essere ottenuta dalle matrici di controllabilità  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_c$  relative a  $(F, G)$  e  $(F_c, G_c)$ .

Infatti, sfruttando  $\mathcal{R}_c = T^{-1}\mathcal{R}$  si ottiene:

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_C^{-1} \quad (4.2.6)$$

dove l'espressione della matrice  $\mathcal{R}_C^{-1}$  può essere esplicitata dall'equazione della matrice di trasformazione e dall'equazione (4.2.6) e risulta essere:

$$\mathcal{R}_C^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & & & \alpha_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & & 1 & \\ \alpha_{n-1} & & & & 0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

### 4.3 Allocazione autovalori: caso m=1

Si consideri un sistema controllabile  $(F, G)$  e un cambiamento di base  $\bar{x} = T^{-1}x$  affinché si riduca il sistema originario nella forma canonica di controllo. Adottando una legge di controllo del tipo:

$$u(t) = K_c \bar{x}(t) + v(t) \quad (4.3.1)$$

dove

$$K_c = [k_0 \quad k_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad k_{n-1}] \quad (4.3.2)$$

si ottengono le equazioni di stato nelle nuove basi:

$$\dot{\bar{x}}(t) = (F_c + G_c K_c)x(t) + G_c v(t) \quad (4.3.3)$$

dove  $F_c + G_c K_c$  è nella seguente forma canonica:

$$F_c + G_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \\ (-\alpha_0 + k_0) & (-\alpha_1 + k_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (-\alpha_{n-1} + k_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

Si noti che il polinomio caratteristico del sistema a catena chiusa è dato da:

$$\Delta_{F_c+g_cK_c}(s) = (\alpha_0 - k_{c,0}) + (\alpha_1 - k_{c,1})s + \cdots + (\alpha_{n-1} - k_{c,n-1})s^{n-1} + s^n$$

Questo significa che il polinomio può essere equiparato con qualsiasi polinomio dello stesso grado:

$$p(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \cdots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (4.3.5)$$

scegliendo in modo opportuno i parametri della matrice  $K_c$ :

$$k_{c,i} = \alpha_i - p_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.6)$$

Ciò comporta che si possano scegliere i valori di  $K_c$  in modo da far assumere a  $F_c + G_cK_c$  gli autovalori che si desiderano.

La matrice  $K$ , da usare nella legge di controllo per il sistema originario e che fa assumere ad  $F + GK$  gli stessi autovalori, è calcolabile a partire da  $T$  e  $K_c$ .

Poiché

$$F_c + GK_c = T^{-1}FT + T^{-1}GK_cT^{-1}T = T^{-1}(F + G(K_cT^{-1}))T \quad (4.3.7)$$

e poiché lo spettro di una matrice è invariante rispetto alla similarità, gli autovalori di  $F_c + G_cK_c$  coincidono con quelli di  $F + G(K_cT^{-1})$ , cosicché basterà scegliere:

$$K = K_cT^{-1} \quad (4.3.8)$$

**Teorema 4.3.1** Sia dato un sistema  $(F, G, H)$   $n$ -dimensionale e controllabile. Per ogni polinomio di ordine  $n$ :

$$p(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \cdots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n \in \mathbb{R}[s]$$

esiste una matrice  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tale che il polinomio caratteristico di  $F + GK$  sia  $p(s)$ .

### Esempio 4.3.1

Si consideri un sistema di stato  $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$  dove

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

La matrice di controllabilità risulta:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con rango 3. Si può dire che la coppia  $(F, G)$  è controllabile.

Il polinomio caratteristico di  $F$  risulta essere:

$$\Delta_F(s) = (s^2 + 1)(s - 1) = s^3 - s^2 + s - 1 = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Ora si può facilmente ottenere la forma canonica di controllo che si configura come segue:

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base che riduce la coppia  $(F, G)$  nella forma canonica di controllo è  $T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$  mentre la sua inversa risulta:

$$T^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si supponga che si vogliano allocare gli autovalori del sistema a catena chiusa  $(F + GK, G)$  in  $-2, -2, -1$  o, in modo equivalente, si voglia imporre che il polinomio caratteristico della matrice  $F + GK$  sia:

$$p(s) = (s + 2)^2(s + 1) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$



A tal fine si consideri lo stesso problema per la forma canonica di controllo stabilendo che il polinomio caratteristico della matrice:

$$F_c + G_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 + k_{c,0} & -1 + k_{c,1} & 1 + k_{c,2} \end{bmatrix}$$

coincida con  $p(s)$  sopra definito.

Per fare ciò i coefficienti  $k_i$  di  $K_c$  devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} -4 &= 1 + k_{c,0} \\ -8 &= -1 + k_{c,1} \\ -5 &= 1 + k_{c,2} \end{aligned}$$

Otteniamo così:

$$K_c = [k_{c,0} \quad k_{c,1} \quad k_{c,2}] = [-5 \quad -7 \quad -6]$$

e

$$K = K_c T^{-1} = [-5 \quad -1 \quad -7]$$

## Bibliografia

1. E. Fornasini, G. Marchesini, *Appunti di Teoria dei Sistemi*, Edizione Libreria Progetto, Padova.
2. M. Bisiacco, S. Braghetto, *Teoria dei sistemi dinamici*, Esculapio, Bologna.
3. G. Capitani, M. Tibaldi, *Elementi di Analisi e Controllo di Sistemi Dinamici Lineari*, Pitagora Editrice, Bologna.
4. Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz, *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical System and Control*, Cambridge University Press.