UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Scienze Statistiche

Corso di laurea in
Statistica e Gestione delle Imprese

Tesi di laurea

Giochi differenziali: definizioni di equilibrio ed esempi

Differential games: definitions of equilibria and examples

Relatore Prof.ssa Giulia Treu

Laureando Filippo Baldin
Matricola N. 600364 - GEI

Anno accademico 2010-11

Indice

1 - Introduzione

In molte situazioni ci sono N individui che devono prendere decisioni con l'obiettivo di massimizzare ciascuno la propria utilità. Queste situazioni sono l'oggetto di studio della **teoria dei giochi**. Un gioco è definito nel seguente modo

Ipotesi:

- N giocatori
- $x_i \in X_i$ è la scelta dell'i-esimo giocatore, e X_i è l'insieme di tutte le scelte possibili
- Ogni giocatore conosce tutte le regole del gioco
- Ogni giocatore è razionale, cioè fa le proprie scelte secondo logica

Obiettivo:

- L'i-esimo cerca di massimizzare la propria utilità definita come

  $$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

  dove $i=1,2,\ldots,N$.

In particolare le scelte che ogni giocatore effettua possono influenzare (positivamente o negativamente) quelle degli altri soggetti presenti nel gioco. Si parla di "gioco" ma solitamente non viene inteso in senso stretto, in quanto la teoria dei giochi ha applicazioni in diversi campi quali quello economico, quello politico, quello biologico etc..

In generale non esiste una N-pla $x_1,\ldots, x_N$ che massimizza l'utilità di tutti. Infatti un risultato può essere ottimo per alcuni, ma pessimo per altri. Per questo, a seconda dei diversi tipi di gioco, si studiano diversi tipi di soluzione quali l'**Ottimo paretiano,** gli **equilibri di Nash** e gli **equilibri di Stackelberg.** Facciamo degli esempi nei giochi con due giocatori

Definizione: ottimo paretiano

Una coppia di strategie (x_1, x_2*) è detta ottimo paretiano se non esistono coppie (x_1, x_2) tali che*

$$\Phi_1(x_1, x_2) > \Phi_1(x_1^*, x_2^*) \qquad e \qquad \Phi_2(x_1, x_2) \geq \Phi_2(x_1^*, x_2^*)$$

o

$$\Phi_1(x_1, x_2) \geq \Phi_1(x_1^*, x_2^*) \qquad e \qquad \Phi_2(x_1, x_2) > \Phi_2(x_1^*, x_2^*)$$

In altre parole non è possibile aumentare l'utilità di un giocatore senza diminuire l'utilità dell'altro.

In un gioco che si svolge in condizioni di asimmetria informativa, cioè in cui il giocatore 2 conosce la strategia del giocatore 1 e non viceversa, si parla di punto di equilibrio di Stackelberg. Per farlo definiamo:

Definizione

$R_1(x_2) := \{x_1 \in X_1 : \Phi_1(x_1, x_2) = max_{\omega \in X_1}(\omega, x_2)\}$

$R_2(x_1) := \{x_2 \in X_2 : \Phi_2(x_1, x_2) = max_{\omega \in X_2}(x_1, \omega)\}$

Definizione: equilibrio di Stackelberg

Una coppia di strategie (x_1, x_2*) è detta equilibrio di Stackelberg se*

$$x_2^* \in R_2(x_1^*)$$

e

$$\Phi_1(x_1, x_2) \leq \Phi_1(x_1^*, x_2^*) \text{ per ogni } (x_1, x_2) \text{ con } x_2 \in R_2(x_1).$$

Secondo questa definizione il secondo giocatore compie una scelta che massimizza la propria utilità conoscendo x_1, mentre il giocatore 1 compie una scelta in modo che tale da massimizzare

$$x_1 \longmapsto \Phi_1(x_1, \beta(x_1)),$$

dove $\beta(x_1) \in R_2(x_1)$.

Se invece nessuno dei due conosce la strategia dell'altro, la definizione di equilibrio più adatta è quella di equilibrio di Nash.

Definizione (equilibrio di Nash)

Una coppia di strategie (x_1^*, x_2^*) è detta equilibrio di Nash se

$$\Phi_1(x_1, x_2^*) \leq \Phi_1(x_1^*, x_2^*) \text{ e } \Phi_2(x_1^*, x_2) \leq \Phi_2(x_1^*, x_2^*).$$

In altre parole nessuno dei due giocatori può aumentare la propria utilità cambiando solamente la propria scelta.

Esempio 1 (dilemma del prigioniero – equilibrio di Nash e ottimo paretiano)

Due prigionieri devono essere separatamente interrogati in merito ad un crimine. Entrambi hanno due opzioni: confessare (C) o non confessare (N). Essendo separati gli interrogatori, i due non hanno modo di cooperare. Le utilità per i due giocatori sono date dalla matrice in Figura 1. Le utilità sono negative in quanto esprimono gli anni di carcere che sconteranno a seconda dei casi. Ogni giocatore ragionerà nel seguente modo: "Se l'altro giocatore confessa, sconterò 6 anni se anch'io confesso, e 8 anni in caso contrario, quindi mi conviene confessare. Se invece non confessa, o sono libero (se confesso) o sconterò un anno (se non confesso). Perciò ancora una volta mi converrà confessare.". L'altro si trova in una situazione perfettamente simmetrica, quindi (C, C) sarà un punto di equilibrio di Nash. Questa scelta può sembrare paradossale, ma è assolutamente razionale. Inoltre, (C, C) non è un punto di ottimo paretiano in quanto entrambi possono aumentare la propria utilità nel punto (N, N) in quanto invece di scontare entrambi 6 anni, passeranno solo un anno in carcere. (N, N), (C, N) e (N, C) sono tutti e tre punti di ottimo di pareto non potendo aumentare simultaneamente le utilità di entrambi i giocatori.

		Giocatore 2	
		C	N
Giocatore 1	C	-6, -6	0, -8
	N	-8, 0	-1, -1

Figura 1

Esempio 2 (equilibrio di Stackelberg)

Due giocatori devono dividere un pezzo di torta. Il giocatore A divide in due parti la torta e il giocatore B sceglie la fetta che preferisce. Lo scopo di entrambi i giocatori è di mangiare più torta possibile.

Ipotizziamo che:

- Il giocatore A divide la torta esattamente in due parti
- Le superfici delle due fette sono perfettamente misurabili e quindi confrontabili
- S è l'area della torta
- $x_A \epsilon [0, S]$ è l'area di uno dei due pezzi di torta dopo il taglio effettuato dal giocatore A
- $x_B \epsilon [0, S]$ è l'area del pezzo di torta che il giocatore B sceglierà

Il giocatore B, dato il taglio del giocatore A, sceglierà la fetta più grande, quindi il set delle migliori risposte di B sarà

$$R^B(x_A) = \{x_B : \frac{S}{2} \leq x_B \leq S]\}$$

Di conseguenza il giocatore A avrà la fetta più piccola, e quindi l'insieme la fetta di torta che mangerà avrà una superficie compresa tra 0 e $\frac{S}{2}$.

Quindi ciò che al giocatore A conviene fare è dividere la torta in due parti uguali, in modo che il giocatore B scelga necessariamente una fetta di torta di area $\frac{S}{2}$, e quindi uguale sarà l'area della fetta del giocatore A.

Esempio 3 (equilibrio di Stackelberg)

È dato un gioco con due partecipanti, A e B. Le decisioni che possono prendere sono rispettivamente x_1 e x_2. Le funzioni di utilità sono invece

$$\phi^A = a_1x_1 + a_2x_2 - [a_{11}\frac{x_1^2}{2} + a_{12}x_1x_2 + a_{22}\frac{x_2^2}{2}]$$

$$\phi^B = b_1x_1 + b_2x_2 - [b_{11}\frac{x_1^2}{2} + b_{12}x_1x_2 + b_{22}\frac{x_2^2}{2}]$$

con $a_{11} > 0$ *e* $b_{22} > 0$.

Cerchiamo un punto (x_1^*, x_2^*) tale che

$$x_2^* \in R(x_1^*) \text{ e } \phi^A(x_1, x_2) \leq \phi^A(x_1^*, x_2^*).$$

Cerchiamo quindi la miglior risposta del giocatore B dato x_A.

(i) Deriviamo la funzione $\phi^B(x_1, \omega)$ per ω:

$$\frac{\partial\phi^B}{\partial\omega}(x_1, \omega) = b_2 - b_{22}\omega - b_{12}x_1.$$

(ii) Studiamo gli intervalli di monotonia

- $\frac{\partial\phi^B}{\partial\omega}(x_1, \omega) = b_2 - b_{22}\omega - b_{12}x_1 > 0$ se e solo se $\omega < \frac{b_2 - b_{12}x_1}{b_{22}}$

- $\frac{\partial \phi^B}{\partial \omega}(x_1, \omega) = b_2 - b_{22}\omega - b_{12}x_1 < 0$ se e solo se $\omega > \frac{b_2 - b_{12}x_1}{b_{22}}$

(iii) Perciò il punto di massimo per questa funzione sarà

$$x_2^* = \frac{b_2 - b_{12}x_1}{b_{22}}$$

Essendo la funzione monotona crescente per valori minori di quel punto e monotona crescente per valori maggiori di quel punto.

Ora dobbiamo massimizzare la funzione

$$\phi^A(x_1, x_2^*) = a_1x_1 + a_2\frac{b_2 - b_{12}x_1}{b_{22}} - a_{11}\frac{x_1^2}{2} - a_{12}x_1\frac{b_2 - b_{12}x_1}{b_{22}} - a_{22}\frac{(b_2 - b_{12}x_1)^2}{2b_{22}^2}.$$

(i) Deriviamo la funzione per x_1

$$\frac{\partial \phi^A}{\partial x_1}(x_1, x_2^*(x_1)) = a_1 - \frac{a_2b_{12}}{b_{22}} - a_{11}x_1 - \frac{a_{12}b_2}{b_{22}} + 2\frac{a_{12}b_{12}}{b_{22}}x_1 + a_{22}b_{12}\frac{b_2 - b_{12}x_1}{b_{22}^2} =$$

$$\left(a_1 - \frac{a_2b_{12}}{b_{22}} - \frac{a_{12}b_2}{b_{22}} - \frac{a_{22}b_{12}b_2}{b_{22}^2}\right) - \left(a_{11} - 2\frac{a_{12}b_{12}}{b_{22}} + \frac{a_{22}b_{12}^2}{b_{22}^2}\right)x_1 =$$

$$(a_1b_{22}^2 - a_2b_{12}b_{22} - a_{12}b_2b_{22} - a_{22}b_{12}b_2) - (a_{11}b_{22}^2 - 2a_{12}b_{12}b_{22} + a_{22}b_{12}^2)x_1.$$

(ii) Studiamo gli intervalli di monotonia

- $(a_1b_{22}^2 - a_2b_{12}b_{22} - a_{12}b_2b_{22} - a_{22}b_{12}b_2) - (a_{11}b_{22}^2 - 2a_{12}b_{12}b_{22} + a_{22}b_{12}^2)x_1 > 0$ se e solo se $x_1 < \frac{a_1b_{22}^2 - a_2b_{12}b_{22} - a_{12}b_2b_{22} - a_{22}b_{12}b_2}{a_{11}b_{22}^2 - 2a_{12}b_{12}b_{22} + a_{22}b_{12}^2}$
- $(a_1b_{22}^2 - a_2b_{12}b_{22} - a_{12}b_2b_{22} - a_{22}b_{12}b_2) - (a_{11}b_{22}^2 - 2a_{12}b_{12}b_{22} + a_{22}b_{12}^2)x_1 < 0$ se e solo se $x_1 > \frac{a_1b_{22}^2 - a_2b_{12}b_{22} - a_{12}b_2b_{22} - a_{22}b_{12}b_2}{a_{11}b_{22}^2 - 2a_{12}b_{12}b_{22} + a_{22}b_{12}^2}$

(iii) Perciò il punto di massimo di questa funzione sarà

$$\mathrm{x}_1^* = \frac{b_{22}^2 a_1 - a_2 b_{12} b_{22} - a_{12} b_2 b_{22} - a_{22} b_{12} b_2}{a_{11} b_{22}^2 + 2a_{12} b_{12} b_{22} - a_{22} b_{12}^2}.$$

Perciò la coppia di punti che esprime l'equilibrio di Stackelberg è la seguente:

$$\mathrm{x}_1^* = \frac{b_{22}^2 a_1 - a_2 b_{12} b_{22} - a_{12} b_2 b_{22} - a_{22} b_{12} b_2}{a_{11} b_{22}^2 + 2a_{12} b_{12} b_{22} - a_{22} b_{12}^2}$$

$$x_2^* = \frac{b_2}{b_{22}} - (\frac{b_{12}}{b_{22}})(\frac{b_{22}^2 a_1 - a_2 b_{12} b_{22} - a_{12} b_2 b_{22} - a_{22} b_{12} b_2}{a_{11} b_{22}^2 + 2a_{12} b_{12} b_{22} - a_{22} b_{12}^2}$$

2 – Teoria dei giochi differenziali

Quelli che sono stati descritti nel paragrafo precedente sono esempi di **gioco statico,** altrimenti detto one-shot game, in quanto ogni giocatore effettua una sola scelta $x_i \in X_i$ e queste determinano l'utilità di tutti i partecipanti. Tuttavia in alcuni casi, il gioco si svolge in un intervallo di tempo e tutti i giocatori adottano le proprie strategie in tale intervallo. Si parla di strategia nel senso che a differenza dei giochi statici, i giocatori non devono compiere una sola scelta in un istante, bensì una serie di scelte distribuite in un intervallo di tempo. È proprio di questi tipi di problemi che si occupa la **teoria dei giochi differenziali** (o **dinamici**). La strategia adottata dai giocatori è descritta dalla funzione di controllo u_i, dove u_i proviene da un determinato set di scelte possibili U_i, e dipende dalla discrezionalità del giocatore, cioè dalle scelte che compie in base alle conoscenze circa le strategie degli altri partecipanti e dello stato del sistema. Lo stato del sistema cambia col tempo ed è descritto dalla seguente equazione differenziale ordinaria (EDO)

$$\dot{x} = f\,(t, x(t), u_1,u_2,\ldots,u_N) \qquad t \in [0,T].$$

Data una condizione iniziale

$$x(0) = x_0,$$

lo scopo dell'i-esimo giocatore è quella di massimizzare la propria utilità

$$J_i(u_1,u_2,\ldots,u_N) = \psi_i(x(T)) - \int_0^T L_i(t,x(t),u_1(t),u_2(t),\ldots,u_N(t))\, dt$$

Dove ψ_i è l'utilità finale e L_i è il costo di gestione dell'i-esimo giocatore.

3 – Le strategie open loop

Quando i giocatori non hanno la possibilità di osservare lo stato del sistema né la strategia adottata dagli altri giocatori, il solo fattore che può influenzare la scelta è il tempo. Le sole componenti di cui i giocatori sono a conoscenza sono il tempo e le condizioni iniziali del gioco. Si parla in questo caso di strategie open loop. Il controllo $u_i \in U_i$ è funzione solamente del tempo $t \in [0,T]$. Lo scopo dell'i-esimo giocatore rimane ancora massimizzare la propria utilità J_i, solo che la strategia dipenderà solo dal tempo.

3.1 – L'equilibrio di Nash (con due partecipanti)

È dato un gioco open loop con due partecipanti, dove lo stato del sistema si evolve secondo l'equazione

$$\dot{x}(t) = f\,(t, x, u_1,u_2) \quad t \in [0,T],$$

con dati iniziali

$$x(0) = x_0 \qquad x,x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Definizione

Si dice ***equilibrio di Nash*** *una combinazione di funzioni di controllo dipendenti solo dal tempo $t \mapsto (u_1^*(t),u_2^*(t))$ tali che*

(i) u_1^* risulta il controllo che massimizza

$$J_1(u_1,u_2^*) = \psi_1(x(T)) - \int_0^T L_1(t,x(t),u_1(t),u_2^*(t))\, dt$$

per $\dot{x}(t) = f\,(t, x(t), u_1,u_2^*(t))$ con $x(0) = x_0$.

(ii) u_2^* risulta il controllo che massimizza

$$J_2(u_1^*,u_2) = \psi_1(x(T)) - \int_0^T L_1(t,x(t),u_1^*(t),u_2(t))\, dt$$

per $\dot{x}(t) = f\,(t, x(t), u_1^*(t), u_2)$ con $x(0) = x_0$.

In altre parole nessun giocatore può aumentare la propria utilità cambiando marginalmente solo la propria strategia.

Sempre tenendo in considerazione il caso in cui N=2, per trovare il punto d'equilibrio di Nash, bisogna risolvere simultaneamente due problemi di ottimo. Tuttavia potrebbe non esistere un punto tale da rispettare le condizioni precedentemente enunciate. Assumendo la continuità e la differenziabilità delle funzioni f, ψ_1, ψ_2, L_1, L_2 dobbiamo aggiungere altre condizioni per l'ottimalità delle soluzioni u_i^*. Sono riportati qui di seguito alcuni teoremi circa l'ottimalità delle soluzioni.

Il teorema di massimo di Pontryagin fornisce le condizioni necessarie per l'ottimalità delle soluzioni.

Teorema 1 (Principio di massimo di Pontryagin (PMP) con i punti terminali liberi)

Data la funzione di controllo ottima $t \mapsto u^*(t)$ e la corrispondente traiettoria $t \mapsto x^*(t)$ per il seguente problema

$$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad u(t) \in U \qquad t \in [t_0,T]$$

con condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0$$

si consideri il problema di ottimizzazione

$$\text{massimizzare:} \quad J(u,t_0,x_0) = \psi(x(T)) - \int_{t_0}^{T} L(t,x(t),u(t))\, dt$$

con f continua e differenziabile per ogni $t \in [0,T]$ ed esiste $C \in \mathbb{R}^N$ tale che $|f(t,x,u)| \leq C(1 + |x|)$. Definiamo il vettore $t \mapsto p(t)$ come la soluzione del sistema lineare

$$\dot{p}(t) = -p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x^*(t),u^*(t)) + \frac{\partial L}{\partial x}(t,x^*(t),u^*(t)),$$

con condizioni terminali

$$p(t) = \nabla\psi\,(x(T)).$$

Allora, per q.o. $t \in [t_0,T]$*, la seguente condizione di massimalità è rispettata:*

$p(t) \cdot f(t,x^*(t),u^*(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t)) = \max_{u \in U} \{ p(t) \cdot f(t,x^*(t),\omega) - L(t,x^*(t),\omega)\}$.

Teorema 2 (Principio di massimo di Pontryagin (PMP) con punti iniziali e terminali fissi)

Sia $t \mapsto u^*(t)$ *una funzione di controllo ottima e limitata e sia* $t \mapsto x^*(t)$ *la corrispondente traiettoria ottimale per il problema*

$$\text{Massimizzare:} \quad J=\varphi(x(0))+ \psi(x(T)) -\int_0^T L(t,x(t),u(t))\, dt,$$

soggetto a

$$\dot{x} = f\,(t,x,u) \qquad\qquad u(t) \in U,$$

con condizioni iniziali e terminali

$$x(0) \in S_0 \quad x(T) \in S_T.$$

Allora valgono le seguenti condizioni.

(i) *Esiste un vettore* $t \mapsto p(t)=(p_0,p_1,\dots,p_n)(t)$ *con* $p_0 \geq 0$ *costante che soddisfa*

$$\dot{p}_i(t)=-\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial}{\partial x} f_j(t,x^*(t),u^*(t))+p_0\frac{\partial}{\partial xi}L(t,x^*(t),u^*(t)) \quad i=1,\dots,n.$$

(ii) *I valori iniziali e finali di p soddisfano*

$$\begin{cases} (p_0,p_1,\dots,p_n)(0)= p_0\nabla \varphi(x^*(0))+n_0 \\ (p_0,p_1,\dots,p_n)(T)= p_0 \nabla \varphi(x^*(T))+n_T \end{cases}$$

con n_0 *e* n_T *ortogonali rispettivamente a* S_0 *(nel punto iniziale* $x^*(0)$*) e* S_T *(nel punto finale* $x^*(T)$*).*

(iii) *La condizione di massimalità*

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\cdot f_j(t,x^*(t),u^*(t))-p_0L(t,x^*(t),u^*(t))=$$
$$= \max_{u \in U}\{ \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, f_j(t,x^*(t),u^*(t))+p_0L(t,x^*(t),u^*(t))\}$$

è rispettata q.o. per $t \in [0,T]$*.*

Facciano un'ulteriore assunzione:

(A1) Per ogni $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$ e due vettori $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^N$ esiste un'unica coppia di (u_1^*, u_2^*) tale che

$$u_1^* = \operatorname{argmax}_{\omega \in U_1}\{q_1 \cdot f(t, x, \omega, u_2^*) - L_1(t, x, \omega, u_2^*)\},$$

$$u_2^* = \operatorname{argmax}_{\omega \in U_2}\{q_2 \cdot f(t, x, u_1^*, \omega) - L_2(t, x, u_1^*, \omega)\}.$$

L'assunzione (A1) significa che per ogni istante t ogni giocatore sceglie la propria strategia $u_i(t)$ per massimizzare il proprio guadagno istantaneo

$$\phi_i(u_1, u_2) = q_i \cdot f(t, x, u_1, u_2) - L_1(f(t, x, u_1, u_2) \qquad i = 1,2$$

e questa scelta è unica.

Dal punto di vista computazionale, per trovare un equilibrio di Nash si può utilizzare il PMP seguendo due passi:

(i) Ottenere il controllo ottimo u_i^* per ogni giocatore e la corrispondente traiettoria x^*

(ii) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u_1^*, u_2^*) \\ \dot{q}_1 = -q_1 \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, u_1^*, u_2^*) + \frac{\partial}{\partial x} L_1(t, x, u_1^*, u_2^*) \\ \dot{q}_2 = -q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, u_1^*, u_2^*) + \frac{\partial}{\partial x} L_2(t, x, u_1^*, u_2^*) \end{cases}$$

con condizioni iniziali e finali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ q_1(T) = \nabla\psi_1(x(T)) \\ q_2(T) = \nabla\psi_2(x(T)) \end{cases}$$

Bisogna comunque tenere a mente che PMP à solo una condizione necessaria per l'ottimalità, cioè una coppia di controlli $t \mapsto (u_1^*(t), u_2^*(t))$ che risulta essere un equilibrio di Nash, deve portare ad una soluzione dei sistemi sopra descritti. Invece, se abbiamo una soluzione del sistema in questione, questo non garantisce che la coppia (u_1^*, u_2^*) sia un equilibrio di Nash. Una condizione sufficiente per l'ottimalità è fornita dal seguente teorema.

Teorema 3 (PMP + concavità ⇒ ottimalità)

Si consideri la funzione Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(t, x, u, p) \doteq p \cdot f(t, x, u) - L(t, x, u)$$

E la sua forma ridotta

$$H(t, x, p) = max_{u \in U} \{p \cdot f(t, x, u) - L(t, x, u)\}.$$

Dato il seguente problema

$$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad u(t) \in U \qquad t \in [t_0,T]$$

con condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0$$

si consideri il problema di ottimizzazione

$$\text{massimizzare:} \quad J(u,t_0,x_0) = \psi(x(T)) - \int_{t0}^{T} L(t,x(t),u(t))\, dt$$

Si consideri una funzione misurabile $t \longmapsto u^*(t) \in U$ *e due funzioni continue* $x^*(\cdot)$, $p(\cdot)$ *che soddisfano il problema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u^*(t)) \\ \dot{p}(t) = -p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u^*(t)) + \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, u^*(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ p(T) = \nabla\psi(x(T)) \end{cases}$$

assieme alla funzione di massimalità

$p(t)\cdot f(t,x^*(t),u^*(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t)) = max_{u\in U}\{ p(t)\cdot f(t,x^*(t),\omega) - L(t,x^*(t),\omega)\}$

Si assuma che l'insieme U è convesso e che le funzioni

$$x \longmapsto H(t, x, p(t)) \qquad\qquad x \longmapsto \psi(x)$$

sono concave.

Allora $u^*(\cdot)$ è un controllo ottimo e $x^*(\cdot)$ è la corrispondente traiettoria.

Prendiamo ora in analisi un caso particolare: supponiamo che le funzioni f e L abbiano le seguenti strutture

$$f(t,x,u_1,u_2) = f_0(t,x) + M_1(t,x)u_1 + M_2(t,x)u_2$$

$$L_i(t,x,u_1,u_2) = L_{i1}(t,x,u_1) + L_{i2}(t,x,u_2)$$

Teorema 4

È dato un gioco open loop con due partecipanti, dove la variabile di stato e il costo di gestione sono gestiti da

$$f(t,x,u_1,u_2) = f_0(t,x) + M_1(t,x)u_1 + M_2(t,x)u_2$$

$$L_i(t,x,u_1,u_2) = L_{i1}(t,x,u_1) + L_{i2}(t,x,u_2) \qquad\qquad i = 1,2.$$

Date inoltre le seguenti ipotesi:

- *U_1, U_2 insiemi chiusi e convessi contenuti in $\mathbb{R}^m$*
- *M_1 e M_2 matrici N x m dipendenti da t e x*
- *Le funzioni $u_i \mapsto L_{ii}(t, x, u_i)$ strettamente convesse con i = 1,2*
- *Per ogni i = 1,2 o U_i è compatto o L_{ii} ha una crescita del tipo*

$$lim_{|\omega|\to\infty} \frac{L_{11}(t,x,\omega)}{|\omega|} = +\infty.$$

Allora vale l'assunzione (A1).

Dimostrazione

È data la funzione continua

$$g_1(\omega) := q_1 \cdot f\,(t, x, \omega, u_2) - L_1(t, x, \omega, u_2)$$

che in questo caso è equivalente a

$$g_1(\omega) = q_1 \cdot [f_0\,(t, x) + M_1(t,x)\omega + M_2(t,x)u_2] - L_{11}(t,x,\omega) - L_{12}(t,x,u_2).$$

Distinguiamo i due casi:

(i) U_1 compatto: la compattezza di U_1 implica la sua chiusura e la sua limitatezza, ed inoltre sono soddisfatte le condizione per il teorema di Weierstrass, perciò la funzione ammette massimo assoluto. La funzione L_{11}è una funzione convessa Essendo la derivata di g_1 una funzione monotona decrescente, g_1 sarà una funzione concava. Il massimo sarà unico e sarà uno dei due estremi nel caso g_1 sia monotona in tutto U_1, oppure sarà un punto interno ad U_1 in quanto unico punto di sella, e come conseguenza del teorema di Weierstrass.

(ii)$\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{L_{11}(t,x,\omega)}{|\omega|} = +\infty$: studiamo il seguente limite

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{q_1[f_0(t,x)+M_1(t,x)\omega+M_2(t,x)u_2]-L_{11}(t,x,\omega)-L_{12}(t,x,u_2)}{|\omega|}.$$

- $\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{q_1[f_0(t,x)+M_2(t,x)u_2]-L_{12}(t,x,u_2)}{|\omega|} = 0$
- $\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{q_1 M_1(t,x)\omega}{|\omega|} = \pm q_1 M_1(t,x)$ a seconda del segno di ω, e quindi è finito
- $\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{-L_{11}(t,x,\omega)}{|\omega|} = -\infty$, pertanto la funzione g_1 tende a $-\infty$ al divergere di ω.

Quindi

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{q_1[f_0(t,x)+M_1(t,x)\omega+M_2(t,x)u_2]-L_{11}(t,x,\omega)-L_{12}(t,x,u_2)}{|\omega|} = -\infty.$$

L'ipotesi di continuità ci permette di dire che

$$\exists\, N \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall k > 0, g_1 \ \leq N,$$

che significa che la funzione g_1 è superiormente limitata.

Per il massimo assoluto possiamo quindi restringerci ad un intorno di 0 di raggio k, $k \in \mathbb{R}$ che contenga tutta la propria frontiera

$$U_1 \cap \overline{B(0,k)}.$$

Quindi

Il punto di massimo lo troviamo agli estremi di U_1(nel caso U_1sia compatto) o di $U_1 \cap \overline{B(0,k)}$ (nell'altro caso), oppure in un punto interno in cui

$$\frac{\partial g_1}{\partial \omega} = 0.$$

Abbiamo pertanto dimostrato l'esistenza del punto di massimo, ora ci resta da dimostrare la sua unicità.

Cerchiamo il massimo di questa funzione rispetto a ω derivando

$$\frac{\partial g_1}{\partial \omega} = q_1 M_1(t,x) - \frac{\partial L_{11}}{\partial \omega}(t,x,\omega)$$

Sappiamo dalle ipotesi che la funzione L_{11} è strettamente convessa, che implica che la sua derivata prima rispetto a ω è monotona crescente. Essendo che l'addendo $q_1 M_1(t,x)$ non dipende da ω, lo possiamo considerare come una semplice costante additiva $c(x)$. Perciò la derivata della funzione g_1' è monotona strettamente decrescente (in quanto dipende negativamente da L_{11}). Il segno della derivata prima di g_1' rispetto a ω implica che g_1' è concava, pertanto il punto di massimo è unico ed è un punto a derivata nulla nel caso vi siano punti con derivata sia positiva che negativa, o un punto di frontiera nel caso l'insieme contenga punti a derivata solo positiva o solo negativa.

Per la funzione

$$g_2 \coloneqq q_2 f(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{u}_1,\omega) - \mathrm{L}_2(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{u}_1,\omega),$$

il ragionamento è analogo. □

Corollario

È dato un gioco open loop con due partecipanti, dove la variabile di stato e il costo di gestione sono determinati da

$$f(t,x,u_1,u_2) = f_0(t,x) + M_1(t,x)u_1 + M_2(t,x)u_2$$

$$L_i(t,x,u_1,u_2) = L_{i1}(t,x,u_1) + L_{i2}(t,x,u_2) \qquad i = 1,2.$$

Allora

$$u_1^* = argmax_{\omega\in U_1}\{q_1 M_1(t,x)\omega - L_{11}(t,x,\omega)\},$$

$$u_2^* = argmax_{\omega\in U_2}\{q_2 M_2(t,x)\omega - L_{22}(t,x,\omega)\}.$$

Dimostrazione

È data la funzione

$$g_1 \coloneqq q_1 f(\mathrm{t,x,\omega,u_1}) - \mathrm{L_1(t,x,\omega,u_1)},$$

che equivale alla funzione

$$g_1 = q_1[f_0(t,x) + M_1(t,x)\omega + M_2(t,x)u_2] - L_{11}(t,x,\omega) - L_{12}(t,x,u_2).$$

Gli addendi $q_1 f_0(t,x)$, $M_2(t,x)u_2$ e $L_{12}(t,x,u_2)$ non dipendono da ω, pertanto possiamo includerli in una costante $c(t,x,u_2)$ che non dipende da ω

$$g_1 = q_1 M_1(t,x)\omega - L_{11}(t,x,\omega) + c(t,x,u_2).$$

Richiamando quanto detto nella dimostrazione del Teorema 4, nel caso in cui U_1 (o un suo sottoinsieme $U_1 \cap \overline{B(0,k)}$) sia compatto, il punto di massimo è un punto di frontiera, che quindi non è influenzato da costanti additive, o un punto a derivata prima rispetto a ω nulla (che non considera le costanti additive in quanto si annullano derivando).

Lo stesso ragionamento vale per il secondo giocatore. □

Esempio 4 (gioco tra produttore e consumatore)

Sia p(t) il prezzo di un bene al tempo t. Assumiamo che questo bene sia prodotto secondo la quantità $u_1(t)$ e consumato secondo la quantità $u_2(t)$. La variazione di prezzo espressa dalla seguente EDO

$$\dot{p} = (u_2 - u_1)\, p.$$

Se $u_2 > u_1$ allora la variazione di prezzo è positiva e quindi il prezzo cresce in quanto la domanda è maggiore dell'offerta. In caso contrario, la domanda è minore dell'offerta perciò è ragionevole assumere che il prezzo diminuisca.

Le funzioni di utilità dei due giocatori possono essere descritte da

$$J_1 = \int_0^T [p(t)u_2(t) - c(u_1(t))]\, dt \qquad c(s) = \frac{s^2}{2},$$

$$J_2 = \int_0^T [\Phi(u_2(t)) - p(t)(u_2(t))]\, dt \qquad \Phi(s) = 2\sqrt{s}.$$

J_1 esprime il guadagno del produttore, cioè l'integrale nell'intervallo [0,T] della differenza tra il ricavo della quantità venduta (u_2) al prezzo p, e i costi di produzione sostenuti per la quantità prodotta (u_1), il tutto all'istante di tempo t.

J_2 invece esprime l'utilità del consumatore, in quanto il termine dentro il segno d'integrale è la differenza tra il beneficio derivato dall'utilizzo della quantità acquistata (u_2) ed il prezzo con cui è stata pagata al tempo t.

In questo problema p rappresenta la variabile di sistema, mentre u_1 e u_2 sono le funzioni di controllo con dominio $U_1 = U_2 = [0, +\infty)$. Poiché sia la funzione L_i che la variabile di stato sono descritti da somme, allora per trovare la coppia (u_1*, u_2*) che esprime il massimo di Pontryagin utilizziamo la seguente espressione:

$$u_i^* = \text{argmax}_{\omega \in U_i} \{q_i M_i(t,x)\omega - L_{ii}(t,x,\omega)\}\, i = 1,2.$$

Nel nostro caso:

- $M_1(t, x) = -p$

- $M_2(t, x) = p$
- $L_{11}(t, x, u_1) = \frac{u_1^2}{2}$
- $L_{22}(t, x, u_2) = u_2\, p - 2\sqrt{u_2}$

Assumiamo inoltre che

- $p > 0$
- $q_1 \leq 0$
- $q_2 < 1$

Cerchiamo u_1*:

(i) Deriviamo l'espressione

$\frac{\partial}{\partial\omega}\{q_1 M_1(t,x)\omega - L_{11}(t,x,\omega)\} = \frac{\partial}{\partial\omega}\{-q_1 p\omega - \frac{\omega^2}{2}\} = - q_1 p - \omega$

(ii) Studiamo la monotonìa:

- $- q_1 p - \omega > 0 \Leftrightarrow \omega < - q_1 p$
- $- q_1 p - \omega < 0 \Leftrightarrow \omega > - q_1 p$
- $- q_1 p - \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = - q_1 p$

(iii) Perciò u_1*= $-q_1$p è punto di massimo assoluto, in quanto la funzione è crescente per valori minori di $-q_1$p, decrescente per valori maggiori, e continua è in U_1.

Procedimento analogo per u_2*:

(i) $\frac{\partial}{\partial\omega}\{q_2 M_2(t,x)\omega - L_{22}(t,x,\omega)\} = \frac{\partial}{\partial\omega}\{q_2 p\ \omega + 2\sqrt{\omega} - \omega p\} = q_2 p + \frac{1}{\sqrt{\omega}} - p$

(ii) Studiamo la monotonìa:

- $q_2 p + \frac{1}{\sqrt{\omega}} - p > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\omega}} > p(1 - q_2)$. Nel caso in cui $q_2 \geq 1$, allora $\frac{1}{\sqrt{\omega}} > p(1 - q_2)$ per ogni $\omega > 0$. Se invece $q_2 < 1$, allora $\omega < \frac{1}{p^2(1- q_2)^2}$

- q_2p + $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ – p < 0 ⇔ $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ < p(1 - q_2). Nel caso $q_2 \geq 1$, allora non esiste ω ∈ U_2 in grado di soddisfare tale disequazione. Nel caso contrario, invece, ω > $\frac{1}{p^2(1- q_2)^2}$
- q_2p + $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ – p = 0 se e solo se ω = $\frac{1}{p^2(1- q_2)^2}$ e q_2 < 1. Nel caso contrario non esiste ω ∈ U_2 che possa soddisfare la disequazione

(iii) Perciò u_2*= $\frac{1}{p^2(1- q_2)^2}$ per i motivi analoghi ad u_1*.

Una volta trovata la coppia (u_1*, u_2*), non resta che risolvere il seguente sistema applicando le opportune sostituzioni

$$\begin{cases} \dot{p} = (u_2^* - u_1^*)p = \frac{1}{p^2\,(1-q_2)^2} \cdot p + q_1 p^2 = \frac{1}{p(1-q_2)^2} + q_1 p^2 \\ \dot{q}_1 = -q_1(u_2^* - u_1^*) - u_2^* = -q_1\left(\frac{1}{p^2\,(1-q_2)^2} + q_1 p\right) - \frac{1}{p^2\,(1-q_2)^2} = \\ \qquad -q_1^2 p - \frac{(1+q_1)}{p^2\,(1-q_2)^2} \\ \dot{q}_2 = -q_2(u_2^* - u_1^*) + u_2^* = -q_2\left(\frac{1}{p^2\,(1-q_2)^2} + q_1 p\right) + \frac{1}{p^2\,(1-q_2)^2} = \\ \qquad -q_1 q_2 p + \frac{1}{p^2\,(1-q_2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(0) = p_0 \\ q_1(T) = \nabla\psi_1(p(T)) = 0 \\ q_2(T) = \nabla\psi_2(p(T)) = 0 \end{cases}$$

Proviamo come ultima cosa a vedere se la coppia (u_1*, u_2*) risultante dai calcoli garantisce solo condizioni necessarie o anche le condizioni sufficienti per essere un equilibrio di Nash.

Quindi oltre alle ipotesi del PMP, dobbiamo valutare se:

- U_1 e U_2 sono entrambi convessi
- le funzioni p ⟼H_1(t, p, q_1(t)) e p ⟼H_2(t, p, q_2(t)) sono concave

La prima condizione è soddisfatta. Studiamo la seconda:

$$H_1(t, p, q_1(t)) = \max_{\omega\geq 0}\{ q_1(u_2 - \omega)p - \frac{\omega^2}{2} + pu_2\}$$

È una funzione concava dato che varia di un addendo rispetto al termine analizzato in precedenza $q_i M_i(t, x)\omega - L_{ii}(t, x, \omega)$. Lo stesso discorso vale per

$$H_2(t, p, q_2(t)) = \max_{\omega\geq 0}\{ q_2(\omega - u_1)p - p\omega + 2\sqrt{\omega}\}.$$

Quindi sono soddisfatte le soluzioni per il teorema 3. Perciò le condizioni sufficienti per l'ottimalità sono soddisfatte e possiamo affermare che la coppia (u_1*, u_2*) che risulta è un equilibrio di Nash.

3.2 - L'equilibrio di Stackelberg

Assumiamo ora che nel gioco in questione ci sia un giocatore (giocatore 1) che sceglie la propria strategia in anticipo comunicandola e l'altro (giocatore 2) effettua le proprie decisioni di conseguenza. Il secondo effettuerà una scelta in modo da massimizzare il proprio guadagno, quindi a priori diciamo che dato il controllo u_1*

$$u_2^* = \mathrm{argmax}_{\omega\in U_2}\{\psi_2(x(T)) - \int_0^T L_2(t, x(t), u_1^*(t), \omega)\, dt\}$$

soggetto a

$$\dot{x}(t) = f(t,x,u_1,u_2), \qquad x(0) = x_0, \qquad u_2 \in U_2.$$

Dato $u_1^* :[0,T] \mapsto U_1$ definiamo allora $R_2(u_1^*)$ l'insieme delle migliori alternative che il giocatore 2 può dare conoscendo u_1^*. In tal caso la miglior scelta che il giocatore 1 può compiere è di usare il controllo tale che massimizza la propria utilità.

Si definisce **equilibrio di Stackelberg** per un gioco open loop a due partecipanti una coppia di funzioni di controllo $t \mapsto (u_1^*(t), u_2^*(t))$ tale che valgono entrambe le seguenti ambizioni

(i) $u_2^* \in R_2(u_1^*)$

(ii) data una funzione controllo ammissibile $u_1(\cdot)$ per il giocatore 1 e $u_2 \in R_2(u_1)$ per il giocatore 2 si ha che

$$J_1(u_1, u_2) \leq J_1(u_1^*, u_2^*)$$

Per trovare un equilibrio di Stackelberg, il giocatore 1 deve individuare l'insieme delle migliori risposte del giocatore 2 $R_2(u_1)$ per ogni u_1 ammissibile e scegliere il controllo u_1^* più favorevole possibile. Le condizioni necessarie sono ancora una volta fornite dal PMP. Infatti, data $t \mapsto x^*(t)$ la traiettoria determinata da u_1^* e u_2^* e dato che u_2^* è una risposta ottima per il secondo giocatore, il PMP prevede l'esistenza di un vettore $\dot{q}_2^*(\cdot)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t)) \\ \dot{q}_2^*(t) = -q_2^* \frac{\partial}{\partial x} f(t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t)) + \frac{\partial}{\partial x} L_2(t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t)) \end{cases}$$

Con

$$\begin{cases} x^*(0) = x_0 \\ q_2^*(T) = \nabla\psi_2(x^*(T)) \end{cases}$$

Per quanto riguarda il giocatore 1, la condizione necessaria per l'ottimalità è quella prevista dalla seguente condizione:

(A2) Per ogni $(t, x, u_1, q_2) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N \times U_1 \times \mathbb{R}^N$, esiste un'unica funzione di controllo $u_2^* \in U_2$ tale che

$$u_2^*(t, x, u_1, q_2) = \operatorname{argmax}_{\omega\in U_2}\{q_2 \cdot f(t, x, u_1, \omega) - L_2(t, x, u_1, \omega)\}$$

Il problema di ottimizzazione per il giocatore 1 può essere formulato come

Massimizzare: $\psi_1(x(T)) - \int_0^T L_1(t, x(t), u_1(t), u_2^*(t, x(t), u_1(t), q_2(t)))\, dt$

Con

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, u_1, u_2^*(t, x, u_1, q_2)) \\ \dot{q}_2(t) = -q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t,x,u_1,u_2^*(t,x,u_1,q_2)) + \frac{\partial}{\partial x} L_2(t,x,u_1,u_2^*(t,x,u_1,q_2)) \end{cases}$$

E le condizioni iniziali e terminali

$$x(0) = x_0 \qquad q_2(T) = \nabla\psi_2(x(T))$$

Per poter applicare il PMP però, dobbiamo fare ulteriori condizioni di continuità e differenziabilità per x e q_2, e più precisamente

(A3) Per ogni $t \in [0,T]$ e $u_1 \in U_1$,

$(x, q_2) \mapsto \tilde{L}_1(t, x, u_1, q_2) \doteq L_1(t, x, u_1, u_2^*(t, x, u_1, q_2))$

$(x, q_2) \mapsto F(t, x, u_1, q_2) \doteq f(t, x, u_1, u_2^*(t, x, u_1, q_2))$

$(x, q_2) \mapsto G(t, x, u_1, q_2)$

$\doteq -q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, u_1, u_2^*(t, x, u_1, q_2)) + \frac{\partial}{\partial x} L_2(t,x,u_1,u_2^*(t,x,u_1, q_2))$

$x \mapsto \nabla\psi_2(x)$

sono continue e differenziabili.

Teorema 5 :condizioni necessarie per l'equilibrio di Stackelberg per un gioco open loop

Date le ipotesi (A2) e (A3), siano $t \longmapsto (u_1^*(t), u_2^*(t))$ due strategie open-loop che portano ad un equilibrio di Stackelberg. Siano $x^*(\cdot)$ e $q_2^*(\cdot)$ la corrispondente traiettoria ed il vettore per il secondo giocatore che soddisfano le seguenti espressioni

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t))$$

$$\dot{q}_2^*(t) = -q_2^* \frac{\partial}{\partial x} f(t, x^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t)) + \frac{\partial}{\partial x} L_2(t\, x^*(t),u_1^*(t), u_2^*(t)).$$

Allora esiste una costante λ_0 e due vettori continui $\lambda_1(\cdot)$, $\lambda_2(\cdot)$ (non entrambi uguali a zero) che soddisfano le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{L}_1 - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} F - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} G \\ \end{cases}$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial q2} \tilde{L}_1 - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q2} F - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q2} G$$

Per quasi ogni $t \in [0,T]$, assieme alle condizioni

$$\lambda_2(0) = 0 \qquad \lambda_1(T) = \lambda_0 \nabla\psi_1(x^*(T)) - D^2\psi_2(x^*(T))$$

dove con $D^2\psi_2(x)$ si denota la matrice Hessiana delle derivate seconde di ψ_2 al punto x. Inoltre per q. o. $t \in [0,T]$ si ha

$$u_1^*(t) = \operatorname{argmax}_{\omega\in U_1}\{- \lambda_0\tilde{L}_1(t, x^*(t), \omega, q_2^*(t)) + \lambda_1(t)F(t, x^*(t), \omega, q_2^*(t)) + \lambda_2(t)G(t, x^*(t), \omega, q_2^*(t)\}$$

Esempio 5 (crescita economica)

Sia x(t) la ricchezza totale degli imprenditori di una certa area al tempo t. Assumiamo che questa si evolva secondo

$$\dot{x}(t) = ax - u_1x - u_2, \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in [0,T],$$

dove $a > 0$ è la costante del tasso di crescita, $u_2(t)$ è l'ammontare di consumo all'instante t e u_1 è l'aliquota fiscale imposta dal governo. Mentre u_2 è un indice assoluto, cioè esprime la quantità assoluta da consumare, u_1 è un indice relativo. Perciò $U_1 \in [0, 1]$ e $U_2 \in [0, +\infty)$. $\dot{x}(t)$ è la somma di tre addendi:

- ax influisce positivamente sull'aumento di ricchezza
- u_1x influisce negativamente in quanto esprime la quantità di tasse che gli imprenditori devono pagare ed è proporzionale alla ricchezza
- anche u_2 influisce negativamente perché esprime il consumo ma essendo un indice assoluto non è proporzionale alla ricchezza.

Il guadagno per il governo e per gli imprenditori sono rispettivamente

$$J_1 = bx(T) + \int_0^T \phi_1(u_1(t)\, x(t))\, dt$$

$$J_2 = x(T) + \int_0^T \phi_2(u_2(t))$$

Dove ϕ_1 e ϕ_2 sono funzioni di utilità e $\phi_i(s) = k_i\log(s)$.

Dobbiamo trovare un equilibrio di Stackelberg per questo gioco differenziale, in cui è il governo ad annunciare la propria strategia u_1 (l'aliquota) e gli imprenditori a decidere la quantità da consumare (u_2). Per raggiungere un equilibrio di Stackelberg troviamo il controllo u_2^* tale che

$$u_2^*(x, u_1, q_2) = \operatorname{argmax}_{\omega\geq 0}\{ q_2 \cdot f\,(t, x, u_1, \omega) - L_2(t, x, u_1, \omega)\}$$

(i) deriviamo l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\{q_2 \cdot f\,(t, x, u_1, \omega) - L_2(t, x, u_1, \omega)\} =$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\{q_2(ax - u_1 x - \omega) + k_2 \log\omega\} = -q_2 + \frac{k_2}{\omega}\text{[1]}.$$

(ii) Studiamo gli intervalli di monotonìa

- $-q_2 + \frac{k_2}{\omega} > 0 \Leftrightarrow \omega < \frac{k_2}{q_2}$[2]
- $-q_2 + \frac{k_2}{\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega > \frac{k_2}{q_2}$
- $-q_2 + \frac{k_2}{\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{k_2}{q_2}$

(iii) $u_2^* = \frac{k_2}{q_2}$ è il punto di massimo ed è unico, perciò vale l'assunzione (A2).

Abbiamo inoltre che le seguenti funzioni

- $\tilde{L}_1(x, u_1, q_2) = -\phi_1(u_1 x) = -k_1\log(u_1 x)$
- $F(x, u_1, q_2) = f\,(t, x, u_1, \frac{k_2}{q_2}) = ax - u_1 x - \frac{k_2}{q_2}$
- $G(x, u_1, q_2) = -q_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, x, u_1, \frac{k_2}{q_2}\right) + \frac{\partial L_2}{\partial x}(t, x, u_1, \frac{k_2}{q_2}) =$

  $= -q_2 \frac{\partial}{\partial x}(ax - u_1 x - \frac{k_2}{q_2}) + \frac{\partial}{\partial x}(-k_2 \log\frac{k_2}{q_2}) = -q_2(a - u_1)$
- $\nabla\psi_2(x) = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$

sono tutte continue e differenziabili, quindi vale anche l'assunzione (A3).

---

[1] Escludiamo quindi 0 dal campo di esistenza di ω della derivata prima

[2] Escludiamo quindi 0 dal campo di esistenza di q_2

Il governo deve ora risolvere il seguente problema di ottimizzazione esprimendo il controllo u_2 come quello trovato in precedenza.

$$\text{Massimizzare:} \qquad bx(T) + \int_0^T k_1 \log\left(u_1(t)x(t)\right) dt.$$

L'espressione non è cambiata in quanto J_1 non dipende da u_2. Il problema di ottimo è soggetto ad un sistema con due variabili di stato (x, q_2)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - u_1x - k_2/q_2 \\ \dot{q}_2 = -q_2\frac{\partial}{\partial x}\left(ax - u_1x - \frac{k_2}{q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k_2 \log\frac{k_2}{q_2}\right) = -q_2(a - u_1) \end{cases}$$

e le condizioni

$$x(0) = x_0 \qquad\qquad q_2(T) = \frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x(T)) = 1$$

Troviamo un controllo ottimo utilizzando il PMP

$$u_1^* = \operatorname{argmax}_{\omega\geq 0}\{-\lambda_0\tilde{L}_1(t,x^*(t),q_2^*(t),\omega) + \lambda_1(t)\, F(t,x^*(t),q_2^*(t),\omega) + \lambda_2(t)\, G(t, x^*(t), q_2^*(t), \omega)\} =$$

$$\operatorname{argmax}_{\omega\geq 0}\left\{\lambda_0 k_1 \log(\omega x) + \lambda_1\left(ax - \omega x - \frac{k_2}{q_2}\right) - \lambda_2 q_2(a - \omega)\right\}$$

(i) Deriviamo per ω:

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\lambda_0 k_1 \log(\omega x) + \lambda_1\left(ax - \omega x - \frac{k_2}{q_2}\right) - \lambda_2 q_2(a - \omega)\right] =$$

$$\frac{\lambda_0 k_1}{\omega} - \lambda_1 x + \lambda_2 q_2$$

(ii) Studiamo gli intervalli di monotonìa

- $\frac{\lambda_0 k_1}{\omega} - \lambda_1 x + \lambda_2 q_2 > 0 \Leftrightarrow \omega < \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2}$ [3]
- $\frac{\lambda_0 k_1}{\omega} - \lambda_1 x + \lambda_2 q_2 < 0 \Leftrightarrow \omega > \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2}$
- $\frac{\lambda_0 k_1}{\omega} - \lambda_1 x + \lambda_2 q_2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2}$

(iii) Perciò $u_1^* = \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2}$ è un controllo ottimo

Bisogna ora risolvere il seguente sistema

[3] Escludiamo quindi 0 dal campo di esistenza di ω della derivata prima

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - u_1{*}x - \frac{k_2}{q_2} \\ \dot{q}_2 = -q_2 \frac{\partial}{\partial x}(ax - u_1{*}x - \frac{k_2}{q_2}) + \frac{\partial}{\partial x}(-k_2 \log \frac{k_2}{q_2}) \\ \dot{\lambda}_1 = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}[-k_1 \log(u_1{*}x)] - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}(ax - u_1{*}x - \frac{k_2}{q_2}) - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}[-q_2(a - u_1{*})] \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial q_2}[-k_1 \log(u_1{*}x)] - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q_2}(ax - u_1^{*}x - \frac{k_2}{q_2}) - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q_2}[-q_2(a - u_1{*})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - u_1{*}x - \frac{k_2}{q_2} = (a - \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2})x - \frac{k_2}{q_2} \\ \dot{q}_2 = -q_2(a - u_1{*}) = -q_2(a - \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2}) \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{\lambda_0 k_1}{x} - \lambda_1(a - u_1{*}) = \frac{\lambda_0 k_1}{x} - \lambda_1(a - \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2}) \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \frac{k_2}{q_2} + \lambda_2(a - u_1{*}) = -\lambda_1 \frac{k_2}{q_2} + \lambda_2(a - \frac{\lambda_0 k_1}{\lambda_1 x - \lambda_2 q_2}) \end{cases}$$

con condizioni iniziali e finali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ q_2(T) = \frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x(T)) = 1 \\ \lambda_2(0) = 0 \\ \lambda_1(T) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x) - \lambda_2(T)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} bx - \lambda_2(T)\frac{\partial^2}{\partial x^2} bx \\ \qquad = \lambda_0 b \end{cases}$$

4 - Conclusione

Un problema alla base di tutta la modellistica è quello di verificare la correttezza del modello stesso. Per studiare questo problema bisogna saper risolvere o, almeno, saper studiare qualitativamente le soluzioni delle equazioni ottenute. Il confronto con i dati osservati, fatto anche attraverso metodi statistici, consente di correggere eventualmente le equazioni fino a giungere a un modello ragionevolmente corretto.

Negli esempi relativi ai giochi differenziali presentati in questa tesi si può osservare che la soluzione delle equazioni differenziali è piuttosto difficile sotto diversi aspetti. Un primo problema è quello dell'esistenza delle soluzioni, in quanto i teoremi classici prevedono problemi di Cauchy con condizioni iniziali, mentre negli esempi citati ci troviamo spesso ad avere a che fare con problemi con condizioni sia iniziali che finali. Le equazioni non possono essere risolte esplicitamente, me si dovrebbero usare metodi numerici che forniscono soluzioni approssimate. In particolare ci sono alcune difficoltà legate alle equazioni dei punti della teoria dei giochi: dato che per trovare i punti di equilibrio si usa spesso il PMP, cioè una condizione necessaria ma non sufficiente per l'ottimalità, non abbiamo la garanzia che un punto sia un massimo, e conseguentemente non abbiamo nemmeno la garanzia che il punto in questione sia un punto di equilibrio. Inoltre il PMP introduce alcune variabili ausiliarie e, come si può vedere dagli esempi 3 e 4, spesso le variabili da esplicitare dipendono da quelle ausiliarie introducendo ulteriori problemi alla risoluzione dei sistemi di EDO.

Bibliografia

- Bressan, A. (2010) *Lecture Notes on Differential Games.*
- Bressan & B. Piccoli, *Introduction to the Mathematical Theory of Control,* AIMS Series in Applied Mathematics, Springfield Mo. 2007.
- J. Nash, Non-cooperative games*, Ann. of Math. 2* (1951), 286-295.
- J. von Neumann & O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour.* Third edition. Princeton University Press, 1980.