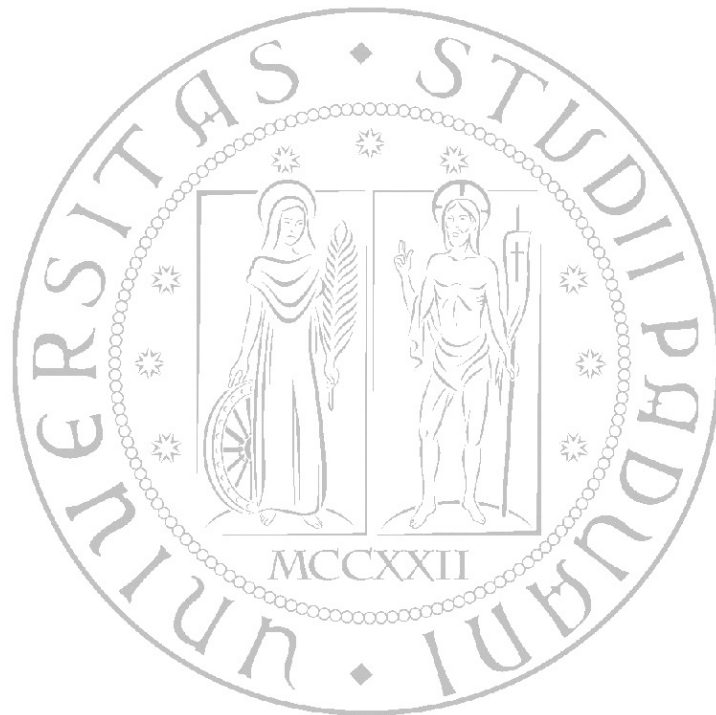




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
*Dipartimento di Matematica*  
*Corso di Laurea Magistrale in Matematica*

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

# Connessioni su Fibrati e Teorie di Gauge



*Candidato*

**Francesca De Gol**  
N. di matricola: 1130410

*Relatore*

**Prof. Francesco Bottacin**

---

DATA UFFICIALE SESSIONE DI LAUREA: 22 SETTEMBRE 2017  
ANNO ACCADEMICO 2016/2017



# Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il professore Francesco Bottacin, relatore di questa tesi, per l'eccezionale disponibilità e cortesia dimostratami e per l'aiuto fornitomi durante la stesura.

Un ringraziamento speciale va ai miei genitori, che mi hanno sostenuto nel mio percorso universitario e in ogni altra occasione; ai miei fratelli, che sono stati il mio primo esempio e qualcuno su cui poter sempre contare; ai miei nonni, anche a quelli che non ci sono più e a quelli acquisiti, per quanto mi hanno insegnato con le parole e i fatti; e alle mie zie, che hanno aiutato i miei genitori prendendosi cura di me e non solo.

Senza nominarli uno a uno, grazie di cuore a tutti i miei amici, a quelli di una vita e a quelli incontrati in questi anni padovani. A modo suo ognuno di loro mi ha aiutato, standomi vicino nella vita privata, dandomi una mano nello studio o distraendomi da esso. In particolare, chi ha saputo fare tutto questo è stato Sasse, che ringrazio anche per altri motivi, troppi e troppo privati per essere detti in queste poche righe.

Francesca.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1 Fibrati Principali e Connessioni</b>	<b>11</b>
1.1 Gruppi di Lie . . . . .	11
1.2 Algebre di Lie . . . . .	13
1.3 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie . . . . .	14
1.4 L'applicazione esponenziale . . . . .	15
1.5 Equazione di Maurer-Cartan . . . . .	16
1.6 Azioni di un gruppo su una varietà . . . . .	17
1.7 Fibrati principali . . . . .	18
1.8 Connessioni su un fibrato principale . . . . .	20
1.9 1-forma di connessione . . . . .	21
1.10 Cambio di coordinate . . . . .	23
1.11 Trasporto parallelo . . . . .	24
1.12 Forma di curvatura e equazione di Cartan . . . . .	25
1.13 Fibrato vettoriale associato a un fibrato principale . . . . .	28
<b>2 Teorie di Gauge dell'Elettromagnetismo</b>	<b>31</b>
2.1 Lagrangiana ed Hamiltoniana in un campo elettromagnetico . . . . .	32
2.2 L'equazione di Schrödinger . . . . .	33
2.3 Formalizzazione matematica . . . . .	36
2.4 Interpretazione fisica della curvatura . . . . .	39
2.5 Equazioni di Maxwell . . . . .	40
2.6 Effetto Aharonov-Bohm . . . . .	42
2.7 Il Monopolo di Dirac . . . . .	43
2.8 Il fibrato del monopolo di Dirac . . . . .	46
<b>3 Teorie di Yang-Mills</b>	<b>49</b>
3.1 Simmetria di spin isotopico . . . . .	49
3.2 Simmetrie locali e campi di Yang-Mills . . . . .	51
3.3 Equazioni di Yang-Mills . . . . .	53

3.4	Analogia tra la Teoria di Yang-Mills e l'Elettromagnetismo . . . . .	54
3.5	Accenni alla Cromodinamica Quantistica . . . . .	55
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>

# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di dare una descrizione matematica rigorosa delle connessioni sui fibrati principali su varietà e di utilizzare tali costruzioni nella modellizzazione di alcuni fenomeni fisici.

L'importanza matematica dei fibrati principali sta nel fatto che essi sono la base per costruire altri tipi di fibrati, ad esempio i fibrati vettoriali; quando poi dotiamo i fibrati principali di una connessione siamo in grado di generalizzare il concetto di derivata su una varietà.

Queste strutture hanno inoltre un interesse fisico, poiché ci permettono di dare una descrizione intrinseca di alcuni fenomeni naturali e rappresentano il linguaggio in cui sono espresse alcune teorie della fisica moderna che descrivono le interazioni tra particelle elementari, dette teorie di gauge.

Come noto le equazioni del campo gravitazionale di Einstein sono espresse in termini della curvatura della metrica Lorentziana che descrive lo spazio-tempo<sup>1</sup>. Qualcosa di simile accade con le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo e con quelle di Yang-Mills, che descrivono i campi che danno origine alle forze nucleari debole e forte.

Le equazioni di Maxwell e Yang-Mills, infatti, sono espresse in termini della curvatura di una connessione su di un fibrato principale, che in linguaggio fisico verrà detta campo di gauge; il campo elettromagnetico e le interazioni nucleari saranno quindi l'“increspatura” del campo di gauge.

In questa introduzione vogliamo dare un'idea intuitiva della geometria che interviene nella modellizzazione dell'elettromagnetismo e della forza nucleare forte, i quali verranno poi trattati in dettaglio nel seguito del presente lavoro. L'idea alla base è di associare ad ogni punto dell'universo un elemento di un gruppo di Lie dalla cui algebra di Lie far discendere diversi elementi di interesse fisico per la descrizione di queste forze fondamentali.

Ad esempio, pensiamo ad un fotone come ad un'onda polarizzata e suppo-

---

<sup>1</sup>Per una trattazione di questo argomento consultare [8].

niamo di dotarlo di una struttura interna che ne rifletta le simmetrie interne; tale struttura sarà ovviamente il gruppo  $U(1)$ , ossia il gruppo di isometrie di una circonferenza in se stessa che ne preservano il verso di percorrenza, il quale generalmente viene identificato con la circonferenza unitaria  $S^1$ . Nel 1954 Yang e Mills mostrarono che, come  $U(1)$  rappresenta la struttura interna di un fotone che interagisce con un elettrone (quindi con un campo elettromagnetico), il gruppo  $SU(2)$  rappresenta la struttura interna di un nucleone che interagisce con altri nucleoni, ed è quindi fondamentale per descrivere l'interazione forte.

In ogni punto dello spazio-tempo la particella che stiamo considerando si troverà in un determinato stato, descritto da un elemento di  $U(1)$  o di  $SU(2)$  a seconda del caso trattato. Chiamiamo  $P$  l'insieme di tali stati. In due punti diversi gli stati non sono identificabili, dunque  $P$  sarà una collezione di copie del gruppo di struttura (che notiamo essere un gruppo di Lie), ognuna delle quali sarà detta fibra;  $P$  è esattamente quello che chiamiamo fibrato principale.

Le leggi del moto in fisica coinvolgono delle derivate, o degli spostamenti infinitesimi. Sul fibrato  $P$  è dunque necessario introdurre una connessione che rappresenti uno spostamento da una fibra sopra un punto ad una fibra sopra un altro punto infinitesimamente vicino al primo. Ricordando che una fibra è una copia di un gruppo di Lie, tali spostamenti saranno rappresentati da un operatore a valori in un insieme di campi vettoriali di questo gruppo, che come vedremo sarà identificabile con l'algebra di Lie del gruppo stesso. L'operatore in questione sarà detto 1-forma di connessione.

L'idea fondamentale ora è che un campo "sposti" ogni fibra in modo indipendente l'una dall'altra, distorcendone l'allineamento relativo. Il modo matematico di misurare tale distorsione è la curvatura, che può essere pensata come una deformazione prodotta dal campo, o può essere identificata con il campo stesso se misuriamo quest'ultimo tramite i suoi effetti locali.

Nelle teorie di gauge, dunque, i campi vengono identificati con la distorsione di un oggetto matematico che in un certo senso viene sovrapposto allo spazio-tempo. Questa è la differenza tra queste teorie e la teoria della Relatività Generale di Einstein, in cui il campo gravitazionale è identificato con la distorsione dello spazio-tempo stesso.

Nel presente scritto si è supposto che il lettore abbia una buona conoscenza delle costruzioni classiche della geometria differenziale, quali le varietà differenziabili, i fibrati vettoriali, le connessioni sui fibrati vettoriali e le varietà Riemanniane<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Per un manuale su tali argomenti, si veda [1].



Il lavoro è organizzato in tre Capitoli. Il primo introdurrà la nozione di fibrati principali e connessioni, nonché gli strumenti matematici utili a costruirli e studiarli. In particolare nelle sezioni [1.1-2-3] definiremo i gruppi di Lie e le algebre di Lie e mostreremo come associare ad un gruppo di Lie un'algebra di Lie, la quale sarà identificabile con un insieme di campi vettoriali, e in [1.4] definiremo le curve integrali di tale insieme. Nella sezione [1.5] vedremo come definire gli elementi dello spazio duale di un'algebra di Lie e ne studieremo l'equazione strutturale. Successivamente, in [1.6], definiremo l'azione di gruppo su una varietà, che sarà fondamentale nella definizione di fibrato principale, data in [1.7]. Nelle sezioni [1.8-9-10] daremo le definizioni di connessione e di 1-forma di connessione e mostreremo le leggi di trasformazione di quest'ultima per un cambio di coordinate. Successivamente, in [1.11], mostreremo come la connessione ci permette di introdurre il concetto di trasporto parallelo, per mezzo del quale possiamo identificare fibre diverse del fibrato. In [1.12] definiremo la 2-forma di curvatura e dimostreremo l'equazione di struttura di Cartan e l'identità di Bianchi; fondamentale quest'ultima per la derivazione delle equazioni di Maxwell e di Yang-Mills. Infine, nella sezione [1.13], mostreremo come associare un fibrato vettoriale a uno principale e a una rappresentazione del gruppo strutturale.

Nel secondo Capitolo tratteremo la teoria di gauge dell'elettromagnetismo. Inizieremo, in [2.1], col richiamare la nozione di Lagrangiana in un campo elettromagnetico, e in [2.2] mostreremo perché, da un punto di vista fisico, sia utile introdurre i fibrati principali. Nella sezione [2.3] daremo poi una formalizzazione matematica che userà i concetti sviluppati nel primo capitolo, per concludere (in [2.4]) che essa porta a considerare il campo elettromagnetico come la manifestazione fisica della curvatura di una connessione definita su un fibrato. In [2.5] vedremo brevemente la derivazione delle equazioni di Maxwell dalla teoria di gauge sopra esposta. Nella sezione [2.6], poi, descriveremo l'effetto Aharonov-Bohm, che dimostra che anche la connessione stessa ha una manifestazione rilevabile sperimentalmente, almeno nell'ambito della fisica quantistica. Infine nella sezione [2.7] tratteremo il monopolo di Dirac, che mostra che la necessità di introdurre una simmetria nelle equazioni di Maxwell per mezzo dell'ipotesi dell'esistenza di un monopolo magnetico conduce in modo naturale alla quantizzazione della carica elettrica e all'introduzione di un fibrato sullo spazio-tempo, che verrà descritto in [2.8].

Nel terzo e ultimo Capitolo studieremo le teorie originali di Yang-Mills dell'interazione forte. Passeremo dalla descrizione delle simmetrie globali, in [3.1], a quella delle simmetrie locali, in [3.2]. La teoria di gauge corrispondente ci permetterà di ricavare le equazioni di Yang-Mills ([3.3]), che, come vedremo nella sezione [3.4], sono una generalizzazione delle equazioni di Maxwell. Infine in [3.5] descriveremo brevemente la Cromodinamica Quantistica, una

teoria di Yang-Mills per la forza nucleare forte di formulazione più moderna.

Concludiamo dicendo che le teorie di gauge hanno ottenuto un enorme successo, permettendo l'unificazione dell'interazione elettromagnetica con le forze nucleari in un unico riferimento teorico denominato modello standard. Esso descrive l'elettromagnetismo e le interazioni nucleari tramite il gruppo strutturale  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ , dove  $U(1) \times SU(2)$  descrive le interazioni elettromagnetiche e deboli (unificate nell'interazione elettrodebole) e  $SU(3)$  descrive le interazioni forti.

# Capitolo 1

## Fibrati Principali e Connessioni

In questo Capitolo introduciamo tutti i concetti matematici che verranno utilizzati nel seguito del lavoro.

Inizialmente daremo le definizioni di gruppo di Lie e di algebra di Lie, nonché le loro principali proprietà, che saranno fondamentali per introdurre le nozioni di fibrato principale e di connessione su un fibrato principale. Quest'ultima sarà la protagonista delle modellizzazioni fisiche che vedremo nel secondo e nel terzo Capitolo.

### 1.1 Gruppi di Lie

In questa sezione introduciamo i gruppi di Lie, una classe particolare di varietà dotate di una struttura di gruppo. Precisamente:

**1.1 Definizione.** *Un gruppo di Lie  $G$  è un gruppo dotato di una struttura di varietà differenziabile tale che il prodotto e l'inverso siano applicazioni differenziabili. Equivalentemente*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto ab^{-1} \end{aligned}$$

*è un'applicazione differenziabile.*

Vediamo ora alcuni esempi di gruppi di Lie, che ci torneranno utili nel seguito.

*1.2 Esempio.* Sia  $G = GL(n, \mathbb{R})$  il gruppo lineare generale, ossia l'insieme delle matrici invertibili di ordine  $n$  sui reali. Esso è una varietà differenziabile di dimensione  $n^2$ , ma anche un gruppo non commutativo. Inoltre il prodotto e l'inverso sono funzioni differenziabili, dunque  $G$  è un gruppo di Lie.

*1.3 Esempio.*  $G = U(1, \mathbb{C}) = \{A \in M_1(\mathbb{C}) | A^\dagger A = \bar{A}^T A = \mathbb{1}\}$  è una varietà differenziabile di dimensione 1, che può essere identificata con la circonferenza unitaria, infatti:

$$G = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a^2 + b^2 = 1\} = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\} = S^1$$

Le operazioni di gruppo su  $S^1$  sono:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\phi} &= e^{i(\theta+\phi)} \\ (e^{i\theta})^{-1} &= e^{-i\theta} \end{aligned}$$

e dunque sono differenziabili.

Quindi  $U(1, \mathbb{C}) = S^1$  è un gruppo di Lie<sup>1</sup>.

*1.4 Esempio.*  $G = SU(2, \mathbb{C}) = \{A \in U(2, \mathbb{C}) | \det(A) = 1\}$  è un gruppo di Lie di dimensione 3, che può essere identificato con la sfera 3-dimensionale, infatti:

$$G \cong \{z \in \mathcal{H} | |z| = 1\} \cong S^3$$

dove con  $\mathcal{H}$  indichiamo l'insieme dei quaternioni<sup>2</sup>.

Vediamo ora le definizioni di omomorfismo di gruppi di Lie e di isomorfismo di gruppi di Lie e facciamo alcuni esempi.

**1.5 Definizione.** *Dati due gruppi di Lie  $G$  ed  $H$ , un omomorfismo di gruppi di Lie  $F: G \rightarrow H$  è un'applicazione differenziabile che sia anche un omomorfismo di gruppi.*

*Un isomorfismo di gruppi di Lie è un diffeomorfismo che sia anche un isomorfismo di gruppi.*

Nel seguito useremo spesso le seguenti mappe:

**1.6 Definizione.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie e sia  $a \in G$ .*

- *La traslazione sinistra per  $a$  è:*

$$\begin{aligned} L_a: G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto L_a(x) = ax \end{aligned}$$

<sup>1</sup>In generale  $U(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | A^\dagger A = \mathbb{1}\}$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n^2$ .

<sup>2</sup>In generale  $SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in U(n, \mathbb{C}) | \det(A) = 1\}$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n^2 - 1$ .

- La traslazione destra per  $a$  è:

$$\begin{aligned} R_a: G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto R_a(x) = xa \end{aligned}$$

- Il coniugio per  $a$  è:

$$\begin{aligned} \text{ad } a: G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto (\text{ad } a)(x) = axa^{-1} \end{aligned}$$

Notiamo che le traslazioni destra e sinistra sono dei diffeomorfismi di  $G$ , ma non sono isomorfismi di gruppi di Lie, in quanto non sono omomorfismi di gruppi. Infatti, dati  $a, x, y \in G$ , in generale  $L_a(xy) \neq L_a(x)L_a(y)$  e  $R_a(xy) \neq R_a(x)R_a(y)$ .

Il coniugio invece è un diffeomorfismo e un automorfismo del gruppo  $G$ , infatti  $(\text{ad } a)(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = (\text{ad } a)(x)(\text{ad } a)(y)$ ,  $\forall a, x, y \in G$ . Dunque è un automorfismo di gruppo di Lie.

## 1.2 Algebre di Lie

Introduciamo ora le definizioni di algebra di Lie e di omomorfismo di algebre di Lie.

**1.7 Definizione.** *Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  dotato di un'applicazione bilineare detta parentesi, o bracket, di Lie*

$$\begin{aligned} [ \ , \ ]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

*antisimmetrica e tale che valga l'identità di Jacobi, ossia tale che  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  si abbia:*

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

**1.8 Definizione.** *Date due algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}'$ , un omomorfismo di algebre di Lie è un'applicazione lineare  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  compatibile con la parentesi di Lie, ossia tale che  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$*

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$$

### 1.3 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie

In questa sezione vediamo come associare ad un gruppo di Lie  $G$  un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , che sarà definita come l'insieme dei campi vettoriali di  $G$  invarianti a sinistra o, equivalentemente, come lo spazio tangente a  $G$  nell'identità. Iniziamo dando la seguente definizione:

**1.9 Definizione.** *Sia  $X$  un campo vettoriale sul gruppo di Lie  $G$ .  $X$  si dice invariante a sinistra se è invariante per tutte le traslazioni sinistre  $L_a$ ,  $a \in G$ , cioè se  $\forall x \in G$*

$$d(L_a)_x(X) = X_{L_a(x)} = X_{ax}$$

Analogamente possiamo definire i campi vettoriali su  $G$  invarianti a destra.

**1.10 Proposizione.** *Se  $X$  e  $Y$  sono due campi vettoriali invarianti a sinistra (rispettivamente a destra), allora anche i campi  $X+Y$ ,  $\lambda X$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $[X, Y]$  sono invarianti a sinistra (risp. a destra).*

*Dimostrazione.* Le prime due affermazioni seguono dalla linearità del differenziale. Inoltre<sup>3</sup>  $dL_a[X, Y] = [dL_a(X), dL_a(Y)] = [X, Y]$  perché  $X$  e  $Y$  sono invarianti a sinistra; dunque anche  $[X, Y]$  è invariante a sinistra.  $\square$

Da queste proprietà si può notare che l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra ha la struttura di un'algebra di Lie, dunque possiamo dare la seguente definizione:

**1.11 Definizione.** *L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di un gruppo di Lie  $G$  è l'insieme dei campi vettoriali di  $G$  invarianti a sinistra con le usuali operazioni di addizione, moltiplicazione per uno scalare e parentesi di Lie.*

Il seguente Teorema ci dice inoltre che l'algebra  $\mathfrak{g}$  di  $G$  può essere identificata con lo spazio tangente a  $G$  nell'identità  $e$ .

**1.12 Teorema.** *Indicata con  $e$  l'identità del gruppo  $G$ , la mappa*

$$\begin{aligned} \phi: \mathfrak{g} &\longrightarrow T_e(G) \\ X &\longmapsto X_e \end{aligned}$$

*è un isomorfismo di spazi vettoriali. Dunque  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di Lie di dimensione  $n = \dim(G)$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{X}(G)$  dei campi vettoriali su  $G$ <sup>4</sup>.*

<sup>3</sup>Ricordiamo che se  $F: M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo tra varietà differenziabili e  $X, Y$  sono campi vettoriali su  $M$ , allora  $[dF(X), dF(Y)] = dF[X, Y]$ .

<sup>4</sup>Per una dimostrazione consultare [4, sez. 15.3a, pag. 402].

## 1.4 L'applicazione esponenziale

In questa sezione vediamo come costruire le curve integrali<sup>5</sup> di un campo dell'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie  $G$ . Iniziamo definendo i sottogruppi ad 1 parametro di  $G$ :

**1.13 Definizione.** *Un sottogruppo ad 1 parametro del gruppo di Lie  $G$  è un omomorfismo differenziabile del gruppo additivo dei reali nel gruppo  $G$ , cioè una mappa*

$$\begin{aligned} a: \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto a(t) \end{aligned}$$

tale che  $\forall s, t \in \mathbb{R}$

$$a(s+t) = a(s)a(t)$$

Se ad esempio  $G$  è un gruppo di matrici, differenziando quest'ultima equazione rispetto ad  $s$  e ponendo  $s = 0$  otteniamo:

$$a'(t) = a(t)a'(0) \tag{1.1}$$

Dato che  $a'(0)$  è costante otteniamo:

$$a(t) = a(0) \exp(ta'(0)) = \exp(ta'(0))$$

che è la forma generale di un sottogruppo a un 1 parametro per un gruppo di matrici  $G$ .

Possiamo generalizzare la formula (1.1) ad un qualunque gruppo di Lie, ottenendo:

$$a'(t) = dL_{a(t)}a'(0)$$

Dunque, dato un vettore  $X_e$  tangente a  $G$  nell'identità  $e$ , il sottogruppo ad 1 parametro di  $G$  il cui vettore tangente in  $e$  sia  $X_e$  è la curva integrale passante per  $e$  del campo vettoriale invariante a sinistra  $X$  su  $G$  ottenuto dalla traslazione sinistra di  $X_e$  su  $G$ .

Quindi ogni elemento  $A \in \mathfrak{g}$  dell'algebra di Lie di  $G$  genera un sottogruppo ad 1 parametro di  $G$ , indicato con  $a_t = \exp(tA)$ .

---

<sup>5</sup>Ricordiamo che se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è un campo vettoriale su una varietà  $M$  e  $p \in M$  è un punto di  $M$ , una curva integrale di  $X$  uscente da  $p$  è una curva  $\sigma: I \rightarrow M$ , dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo reale contenente l'origine, tale che  $\sigma(0) = p$  e  $\sigma'(t) = X(\sigma(t))$ ,  $\forall t \in I$ .

## 1.5 Equazione di Maurer-Cartan

Vediamo ora come possiamo definire lo spazio duale di un'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie e mostriamo l'equazione di Maurer-Cartan, ossia l'equazione di struttura per gli elementi di tale spazio duale.

Ricordiamo che una  $k$ -forma differenziale su una varietà  $M$  è una sezione del fibrato  $\bigwedge^k T^*M$ <sup>6</sup>.

**1.14 Definizione.** *Una forma differenziale  $\omega$  su  $G$  è detta invariante a sinistra se per ogni elemento  $a$  di  $G$  si ha*

$$(L_a)^*\omega = \omega$$

Lo spazio vettoriale  $\mathfrak{g}^*$  formato dalle 1-forme invarianti a sinistra è lo spazio duale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , dunque se  $A \in \mathfrak{g}$  e  $\omega \in \mathfrak{g}^*$ , abbiamo che  $\omega(A)$  è costante in  $G$ . Inoltre se  $\omega$  è invariante a sinistra, anche  $d\omega$  lo sarà, dal momento che il differenziale esterno commuta con i pull-back.

**1.15 Proposizione.** *Equazione di Maurer-Cartan.*  
 $\forall \omega \in \mathfrak{g}^*$  e  $\forall A, B \in \mathfrak{g}$

$$d\omega(A, B) = -\frac{1}{2}\omega([A, B])$$

*Dimostrazione.* Abbiamo

$$d\omega(A, B) = \frac{1}{2}A(\omega(B)) - \frac{1}{2}B(\omega(A)) - \frac{1}{2}\omega([A, B])$$

e, dal momento che  $\omega(A)$  e  $\omega(B)$  sono costanti,  $A(\omega(B)) = B(\omega(A)) = 0$ .  $\square$

**1.16 Definizione.** *La 1-forma canonica  $\theta$  su  $G$  è una 1-forma a valori in  $\mathfrak{g}$  (dunque una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valutata) univocamente determinata da*

$$\theta(A) = A, \quad \forall A \in \mathfrak{g}.$$

Siano  $E_1, \dots, E_r$  una base per  $\mathfrak{g}$ , allora  $\theta = \theta^i E_i$ . Allora  $\theta^1, \dots, \theta^r$  formano una base per lo spazio delle 1-forme invarianti a sinistra su  $G$ . Dunque:

$$[E_j, E_k] = c_{jk}^i E_i$$

---

<sup>6</sup>Consultare [1, sez. 3.2, pag. 144].



**1.17 Definizione.** Le  $c_{jk}^i$  sono dette costanti di struttura di  $\mathfrak{g}$  rispetto alla base  $E_1, \dots, E_r$ .

Usando tali costanti possiamo riscrivere la Proposizione (1.15) come:

$$d\theta^i = -\frac{1}{2}c_{jk}^i\theta^j \wedge \theta^k$$

Infatti abbiamo:

$$d\theta^i(E_j, E_k) = -\frac{1}{2}\theta^i[E_j, E_k] = -\frac{1}{2}\theta^i(c_{jk}^h E_h) = -\frac{1}{2}c_{jk}^i$$

## 1.6 Azioni di un gruppo su una varietà

Spesso i gruppi di Lie appaiono come gruppi di simmetria di una varietà e possono essere usati per costruire nuove varietà, come vedremo nella prossima sezione. Vediamo dunque cosa intendiamo con azione di un gruppo su una varietà.

**1.18 Definizione.** Diciamo che un gruppo di Lie  $G$  agisce da destra su una varietà  $M$  se:

- ogni elemento  $a$  di  $G$  induce una trasformazione su  $M$ , denotata da  $x \rightarrow R_a(x) = xa$ ,  $x \in M$ ;
- $(a, x) \in G \times M \rightarrow R_a(x) = xa \in M$  è una mappa differenziabile;
- $R_{ab}(x) = R_b(R_a(x)) \forall a, b \in G$  e  $\forall x \in M$ .

Analogamente definiamo le azioni sinistre.

Notiamo che  $R_{ab} = R_b \circ R_a$  e che  $R_a$  è una biiezione, dunque  $R_e$  è la trasformazione identica di  $M$ .

**1.19 Definizione.** Diciamo che  $G$  agisce effettivamente su  $M$  se  $R_a x = x$ ,  $\forall x \in M$ , implica  $a = e$ .

Diciamo che  $G$  agisce liberamente su  $M$  se  $R_a x = x$  per qualche  $x \in M$  implica  $a = e$ .

Se  $G$  agisce su  $M$  da destra, assegniamo ad ogni elemento  $A \in \mathfrak{g}$  il campo vettoriale  $A^*$  indotto su  $M$  dal gruppo ad 1 parametro  $a_t$ <sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Per ogni punto  $p \in M$ ,  $A_p^*$  è il vettore tangente alla curva  $a_t(p)$  in  $p$ .

**1.20 Proposizione.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie che agisce da destra sulla varietà  $M$ . La mappa*

$$\begin{aligned}\sigma : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ A &\longmapsto A^*\end{aligned}$$

*è un omomorfismo di algebre di Lie. Se  $G$  agisce effettivamente su  $M$ , allora  $\sigma$  è un omomorfismo iniettivo. Se  $G$  agisce liberamente su  $M$ , allora  $\sigma(A)$  non si annulla mai su  $M$  (se  $A \neq 0$ ).*

## 1.7 Fibrati principali

Abbiamo detto che un gruppo di Lie può essere usato per costruire nuove varietà; in particolare, data una varietà e un gruppo di Lie, possiamo costruire un fibrato principale su tale varietà, ossia una generalizzazione di un fibrato vettoriale<sup>8</sup>.

**1.21 Definizione.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $G$  un gruppo di Lie. Un fibrato principale su  $M$  con gruppo strutturale  $G$  consiste in una varietà differenziabile  $P$  e in un'azione di  $G$  su  $P$  tale che:*

- $G$  agisce su  $P$  liberamente da destra;
- $M \cong P/G$  è lo spazio quoziente di  $P$  sulla relazione di equivalenza indotta da  $G$ ;
- la proiezione canonica  $\pi: P \rightarrow M$  è differenziabile;
- $P$  è localmente triviale, cioè ogni punto  $x \in M$  ha un intorno aperto  $U$  tale che esiste un diffeomorfismo

$$\begin{aligned}\psi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ u &\longmapsto (\pi(u), \varphi(u))\end{aligned}$$

dove  $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow G$  è una mappa compatibile con l'azione del gruppo, ossia tale che  $\varphi(R_a u) = R_a(\varphi(u))$ ,  $\forall u \in \pi^{-1}(U)$  e  $\forall a \in G$ .

---

<sup>8</sup>Per una trattazione sui fibrati vettoriali consultare [1, sez. 3.1, pag. 134].

Un fibrato principale verrà indicato con  $P(M, G, \pi)$ , dove  $P$  è detto spazio totale del fibrato,  $M$  spazio di base,  $G$  gruppo di struttura e  $\pi$  proiezione.

Per ogni punto  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x)$  è una sottovarietà chiusa di  $P$ , detta fibra sopra  $x$ . Se  $u \in \pi^{-1}(x)$ , allora  $\pi^{-1}(x)$  è l'insieme dei punti del tipo  $ua$ , dove  $a \in G$ , ed è detta fibra passante per  $u$ . Ogni fibra è diffeomorfa a  $G$ , anche se non in modo canonico.

Dal momento che lo spazio totale  $P$  è localmente triviale possiamo scegliere un ricoprimento aperto  $\{U_\alpha\}$  di  $M$  e una famiglia di diffeomorfismi

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times G \\ u &\longmapsto (\pi(u), \varphi_\alpha(u)) \end{aligned}$$

tali che  $\varphi_\alpha(R_a(u)) = R_a(\varphi_\alpha(u))$ ,  $\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$  e  $\forall a \in G$ .

Se  $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ , allora  $\varphi_\beta(R_a(u))(\varphi_\alpha(R_a(u)))^{-1} = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$  dipende unicamente da  $\pi(u)$  e non da  $u$ ; possiamo allora dare la seguente definizione:

**1.22 Definizione.** *Le mappe*

$$\begin{aligned} \psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow G \\ u &\longmapsto \psi_{\beta\alpha}(\pi(u)) = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} \end{aligned}$$

sono dette mappe di transizione del fibrato  $P(M, G, \pi)$  associate al ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  di  $M$ .

**1.23 Proposizione.** *Per ogni  $u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  si ha:*

$$\psi_{\gamma\alpha}(u) = \psi_{\gamma\beta}(u)\psi_{\beta\alpha}(u)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma\alpha}(u) &= \psi_{\gamma\alpha}(\pi(u)) = \varphi_\gamma(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} \\ &= \varphi_\gamma(u)(\varphi_\beta(u))^{-1}\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} = \psi_{\gamma\beta}(\pi(u))\psi_{\beta\alpha}(\pi(u)) \\ &= \psi_{\gamma\beta}(u)\psi_{\beta\alpha}(u) \end{aligned}$$

□

**1.24 Teorema.** *Siano  $M$  una varietà differenziabile,  $\{U_\alpha\}$  un suo ricoprimento aperto e  $G$  un gruppo di Lie. Per ogni  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  siano date delle mappe  $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  tali che per ogni  $u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  si abbia  $\psi_{\gamma\alpha}(u) = \psi_{\gamma\beta}(u)\psi_{\beta\alpha}(u)$ . Allora possiamo costruire un fibrato principale  $P(M, G, \pi)$  che abbia le funzioni  $\psi_{\beta\alpha}$  come funzioni di transizione<sup>9</sup>.*

<sup>9</sup>Per una dimostrazione consultare [5, cap. 1, Prop. 5.2, pag. 52].

## 1.8 Conessioni su un fibrato principale

Vogliamo ora definire il concetto di derivazione su un fibrato principale. Sappiamo che, dati un aperto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , una funzione  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  e un vettore  $v$  tangente a  $X$  in un punto  $x \in X$ , la derivata di  $f$  lungo la direzione  $v$  nel punto  $x$  è

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + vh) - f(x)}{h}$$

Lavorando in un fibrato principale, però, non possiamo definire una derivata in questo modo intrinseco. Questo accade perché ora  $f$  mappa ogni elemento  $x$  della varietà di base  $M$  in un elemento della fibra  $\pi^{-1}(x)$  sopra  $x$  del fibrato  $P$  e non possiamo confrontare elementi appartenenti a fibre diverse. Dunque il limite scritto sopra, e particolarmente la differenza  $f(x + vh) - f(x)$ , non hanno senso; dobbiamo allora introdurre un nuovo operatore, detto connessione<sup>10</sup>.

**1.25 Definizione.** *Sia  $P(M, G, \pi)$  un fibrato principale. Per ogni  $u \in P$  indichiamo con  $T_u(P)$  lo spazio tangente a  $P$  in  $u$  e con  $G_u$  il sottospazio di  $T_u(P)$  formato dai vettori tangenti alla fibra passante per  $u$ . Una connessione  $\Gamma$  su  $P$  assegna ad ogni  $u \in P$  un sottospazio  $Q_u$  di  $T_u(P)$  in modo che:*

- $T_u(P) = G_u(P) \oplus Q_u(P)$ ;
- $Q_{R_a u} = dR_a(Q_u)$ ,  $\forall u \in P$  e  $\forall a \in G$ ;
- $Q_u$  dipende in modo differenziabile da  $u$ .

Chiamiamo  $G_u$  il sottospazio verticale di  $T_u(P)$  e  $Q_u$  il sottospazio orizzontale di  $T_u(P)$ . Un vettore  $X \in G_u$  è detto verticale e un vettore  $X \in Q_u$  orizzontale.

Notiamo che la seconda condizione della definizione precedente ci dice che la distribuzione  $u \rightarrow Q_u$  è invariante per  $G$ . Inoltre dalla prima condizione abbiamo che ogni vettore  $X \in T_u(P)$  può essere scritto in modo unico come:

$$X = vX + hX$$

<sup>10</sup>Come vedremo nella sezione [1.11], questo ci permetterà di identificare due diverse fibre tramite il trasporto parallelo.

dove  $vX \in G_u$  è detta componente verticale di  $X$  e  $hX \in Q_u$  è detta componente orizzontale di  $X$ .

Vediamo ora come definire una connessione su un sottoinsieme di una varietà su cui sia definito un fibrato principale ed enunciamo un teorema che ci dice che ogni varietà paracompatta, cioè tale che ogni suo ricoprimento aperto ammetta un raffinamento localmente finito, ammette una connessione.

**1.26 Definizione.** *Sia  $P(M, G, \pi)$  un fibrato principale e  $N$  un sottoinsieme di  $M$ . Diciamo che una connessione è definita su  $N$  se  $\forall u \in P$  tale che  $\pi(u) \in N$ , esiste un sottospazio  $Q_u$  di  $T_u(P)$  che soddisfa le prime due condizioni della definizione di connessione e tale che  $\forall x \in N$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  e una connessione sul fibrato principale  $\pi^{-1}(U)(U, G, \pi)$ <sup>11</sup> tale che il sottospazio orizzontale in ogni  $u \in \pi^{-1}(N)$  sia lo spazio  $Q_u$ .*

**1.27 Teorema.** *Sia  $P(M, G, \pi)$  un fibrato principale e  $N$  un sottoinsieme chiuso, eventualmente vuoto, di  $M$ . Se  $M$  è paracompatto ogni connessione definita su  $N$  può essere estesa ad una connessione su  $P$ ; in particolare  $P$  ammette una connessione<sup>12</sup>.*

## 1.9 1-forma di connessione

Ricordando ora la Proposizione (1.20) possiamo dire che l'azione del gruppo di struttura  $G$  sul fibrato principale  $P$  induce un omomorfismo di algebre di Lie  $\sigma$  di  $\mathfrak{g}$  nell'algebra di Lie  $\mathfrak{X}(P)$  dei campi vettoriali su  $P$ .

**1.28 Definizione.** *Per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ ,  $\sigma(A) = A^*$  è detto campo fondamentale corrispondente ad  $A$ .*

Dato che l'azione di  $G$  manda ogni fibra in se stessa ed è libera si ha che  $A_u^*$  è tangente alla fibra  $\forall u \in P$ , e  $A^*$  non si annulla mai in  $P$  (se  $A \neq 0$ ). Dunque la mappa

$$\begin{aligned} \sigma_u: \mathfrak{g} &\longrightarrow G_u \\ A &\longmapsto A_u^* \end{aligned}$$

è un isomorfismo lineare.

<sup>11</sup>Dal fatto che  $P(M, G, \pi)$  è localmente triviale si ottiene che questo è un fibrato principale, detto restrizione di  $P$  a  $U$ .

<sup>12</sup>Per una dimostrazione consultare [5, cap. 2, Teo. 2.1, pag. 67].

**1.29 Proposizione.** *Sia  $A^*$  il campo fondamentale corrispondente ad  $A \in \mathfrak{g}$ . Per ogni  $a \in G$ ,  $dR_a(A^*)$  è il campo fondamentale corrispondente all'elemento  $(ad(a^{-1}))A \in \mathfrak{g}$ .*

*Dimostrazione.* Dato che  $A^*$  è indotto dal sottogruppo ad 1 parametro di trasformazioni  $R_{a_t}$ , dove  $a_t = \exp(tA)$ , il campo vettoriale  $dR_a(A^*)$  è indotto da  $R_a R_{a_t} R_{a_t}^{-1} = R_{a^{-1}a_t a}$ , ossia del sottogruppo ad 1 parametro generato da  $(ad(a^{-1}))A$ .  $\square$

Se sul fibrato principale  $P(M, G, \pi)$  è assegnata una connessione  $\Gamma$ , ossia un campo di spazi orizzontali, grazie all'isomorfismo  $\sigma_u$  siamo in grado di assegnare ad ogni  $X \in T_u(P)$ ,  $u \in P$ , l'elemento dell'algebra  $\mathfrak{g}$  corrispondente a  $vX$ . Possiamo allora definire  $\Gamma$  tramite una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valutata nel seguente modo:

**1.30 Definizione.** *Dati  $u \in P$  e  $X \in T_u(P)$ , definiamo  $\omega(X)$  come l'unico  $A \in \mathfrak{g}$  tale che  $A_u^* = vX$ . Allora  $\omega$  è detta 1-forma di connessione di  $\Gamma$ .*

**1.31 Proposizione.** *Sia  $\omega$  la 1-forma di connessione di  $\Gamma$  su  $P$ . Allora:*

1.  $\omega(X) = 0$  se e solo se  $X$  è orizzontale;
2.  $\omega(A^*) = A$ ,  $\forall A \in \mathfrak{g}$ ;
3.  $(R_a)^*\omega = ad(a^{-1})\omega$ , cioè  $\omega(dR_a(X)) = ad(a^{-1}) \cdot \omega(X)$  per ogni  $a \in G$  e per ogni campo vettoriale  $X$  su  $P$ ;
4. se  $\bar{\omega}$  è una 1-forma a valori in  $\mathfrak{g}$  che soddisfa le condizioni (2) e (3), allora esiste un'unica connessione  $\Gamma$  in  $P$  la cui forma di connessione sia  $\bar{\omega}$ .

*Dimostrazione.* I primi due punti seguono immediatamente dalla definizione di  $\omega$ .

Verifichiamo il terzo punto: dato che ogni campo vettoriale su  $P$  si può decomporre nella somma diretta di un campo verticale e di un campo orizzontale ci basta verificare che il terzo punto valga nel caso in cui  $X$  sia verticale e nel caso in cui  $X$  sia orizzontale.

Se  $X$  è orizzontale  $dR_a(X)$  è orizzontale  $\forall a \in G$ ; allora

$$\omega(dR_a(X)) = ad(a^{-1}) \cdot \omega(X) = 0$$

Se  $X$  è verticale possiamo supporre che esso sia il campo fondamentale  $A^*$  associato a un certo  $A \in \mathfrak{g}$ , dunque dalla Proposizione (1.29) e dai punti (1) e (2) otteniamo:

$$\begin{aligned} (R_a^*\omega)_u(X) &= \omega_{R_a(u)}(dR_a(X)) = \omega_{R_a(u)}(dR_a(A^*)) \\ &= ad(a^{-1})(\omega_u(A^*)) = ad(a^{-1})(\omega_u(X)) \end{aligned}$$

Per il quarto punto possiamo definire una connessione la cui forma di connessione sia  $\bar{\omega}$  come

$$u \rightarrow Q_u = \{X \in T_u(P) : \bar{\omega}(X) = 0\}$$

□

## 1.10 Cambio di coordinate

Vediamo ora come si trasformano i coefficienti della 1-forma di connessione cambiando le coordinate sulla varietà.

Supponiamo che il fibrato principale  $P(M, G, \pi)$  sia dotato di una connessione  $\Gamma$ ; allora sappiamo che la proiezione  $\pi: P \rightarrow M$  induce una mappa lineare  $d\pi: T_u(P) \rightarrow T_{\pi(u)}(M)$ ,  $\forall u \in P$ , che mappa  $Q_u$  in modo isomorfo in  $T_{\pi(u)}(M)$ .

**1.32 Definizione.** *Il rialzamento orizzontale di un campo vettoriale  $X$  su  $M$  è quell'unico campo vettoriale  $X^*$  su  $P$  orizzontale e tale che  $d\pi(X_u^*) = X_{\pi(u)}$ ,  $\forall u \in P$ .*

**1.33 Proposizione.** *Sia data una connessione  $\Gamma$  su  $P$  e un campo vettoriale  $X$  su  $M$ , allora esiste un unico rialzamento orizzontale  $X^*$  di  $X$ , inoltre esso è invariante per ogni traslazione destra  $R_a$ ,  $a \in G$ .*

*Viceversa, ogni campo orizzontale  $X^*$  su  $P$  invariante per ogni traslazione destra  $R_a$ ,  $a \in G$ , è il rialzamento orizzontale di un campo  $X$  su  $M$ .*

**1.34 Proposizione.** *Siano  $X^*$  e  $Y^*$  i rialzamenti orizzontali di  $X$  e  $Y$  rispettivamente. Allora:*

1.  $X^* + Y^*$  è il rialzamento orizzontale di  $X + Y$ ;
2. per ogni funzione  $f$  su  $M$ ,  $f^*X^*$  è il rialzamento orizzontale di  $fX$ , dove  $f^* = f \circ \pi$ ;
3. la componente orizzontale di  $[X^*, Y^*]$  è il rialzamento orizzontale di  $[X, Y]$ .

Sia ora  $x^1, \dots, x^n$  un sistema di coordinate locali in un aperto  $U$  di  $M$ . Per ogni  $i$  sia  $X_i^*$  il rialzamento orizzontale di  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  in  $\pi^{-1}(U)$ . Allora  $X_1^*, \dots, X_n^*$  formano una base locale per la distribuzione  $u \rightarrow Q_u$  in  $\pi^{-1}(U)$ . Sia  $\{U_\alpha\}$  un ricoprimento aperto di  $M$  dotato di una famiglia di isomorfismi  $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$  e della corrispondente famiglia di funzioni di transizione  $\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ .

Per ogni  $\alpha$  sia  $\sigma_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$  la sezione su  $U_\alpha$  definita da  $\sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e)$ ,  $\forall x \in U_\alpha$ .

Sia inoltre  $\theta$  la 1-forma canonica su  $G$ .

Allora per ogni  $U_\alpha \cap U_\beta$  non vuoto possiamo definire la seguente 1-forma a valori in  $\mathfrak{g}$ :

$$\theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^* \theta$$

Per ogni  $U_\alpha$  definiamo inoltre una 1-forma a valori in  $\mathfrak{g}$ :

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega$$

**1.35 Proposizione.** *Su  $U_\alpha \cap U_\beta$  abbiamo:*

$$\omega_\beta = ad(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$$

*Viceversa data una famiglia di 1-forme  $\{\omega_\alpha\}$  definite su  $U_\alpha$  e soddisfacenti la precedente relazione, esiste un'unica forma di connessione  $\omega$  su  $P$  che determina la famiglia  $\{\omega_\alpha\}$ .*

## 1.11 Trasporto parallelo

Una volta definita una connessione  $\Gamma$  su di un fibrato principale  $P(M, G, \pi)$  siamo in grado di definire il concetto di trasporto parallelo.

**1.36 Definizione.** *Sia  $\tau = x_t, t \in [a, b]$ , una curva  $C^1$  a tratti sulla varietà di base  $M$ . Un rialzamento parallelo di  $\tau$  è una curva orizzontale  $\tau^* = u_t, t \in [a, b]$ , sullo spazio totale  $P$  tale che  $\pi(u_t) = x_t, \forall t \in [a, b]$ ; dove con curva orizzontale intendiamo una curva  $C^1$  a tratti tale che i suoi vettori tangenti siano orizzontali.*

Notiamo che se  $X^*$  è il rialzamento di un campo vettoriale  $X$  su  $M$ , allora la curva integrale di  $X^*$  passante per un punto  $u_0 \in P$  è il rialzamento orizzontale della curva integrale di  $X$  passante per il punto  $x_0 = \pi(u_0) \in M$ .



Inoltre dati una curva  $\tau = x_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , di classe  $C^1$  in  $M$  e un punto  $u_0 \in P$  tale che  $\pi(u_0) = x_0$ , esiste un unico rialzamento orizzontale  $\tau^* = u_t$  di  $\tau$  uscente da  $u_0$ <sup>13</sup>.

Usando queste osservazioni possiamo dare la seguente definizione di trasporto parallelo:

**1.37 Definizione.** *Siano  $\tau = x_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , una curva di classe  $C^1$  in  $M$  e  $u_0$  un punto di  $P$  tale che  $\pi(u_0) = x_0$ . L'unico rialzamento parallelo  $\tau^*$  di  $\tau$  uscente da  $u_0$  avrà come punto finale un punto  $u_1 \in P$  tale che  $\pi(u_1) = x_1$ . Variando  $u_0$  all'interno della fibra  $\pi^{-1}(x_0)$ , otteniamo una mappa*

$$\tilde{\tau}: \pi^{-1}(x_0) \longrightarrow \pi^{-1}(x_1)$$

che manda  $u_0$  in  $u_1$ , detto trasporto parallelo lungo  $\tau$ .

**1.38 Teorema.** *Il trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva  $\tau$  di classe  $C^1$  in  $M$  è un isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che ogni curva orizzontale è mappata dalla traslazione destra  $R_a$ ,  $a \in G$ , in una curva orizzontale.

Dunque il trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva  $\tau$  commuta con l'azione di  $G$  su  $P$  e, di conseguenza, è un isomorfismo.  $\square$

Questo Teorema ci permette dunque di identificare due diverse fibre di  $P$ , risolvendo il problema di definire una derivata su un fibrato tramite rapporto incrementale che abbiamo esposto all'inizio della sezione [1.8].

## 1.12 Forma di curvatura e equazione di Cartan

In questa sezione definiamo la derivata esterna covariante di una  $r$ -forma (pseudo-)tensoriale. Nel caso in cui la forma in questione sia la 1-forma di connessione, la sua derivata esterna covariante sarà detta forma di curvatura. Per iniziare diamo la seguente definizione:

**1.39 Definizione.** *Sia  $P(M, G, \pi)$  un fibrato principale e  $\rho$  una rappresentazione di  $G$  in uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita<sup>14</sup>.*

<sup>13</sup>Per una dimostrazione di questo fatto, consultare [5, Prop. 3.1, pag. 69].

<sup>14</sup>Ossia un omomorfismo di gruppi  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ .

Una forma pseudo-tensoriale di grado  $r$  e di tipo  $(\rho, V)$  in  $P$  è una  $r$ -forma  $\varphi$  a valori in  $V$  tale che:

$$R_a^* \varphi = \rho(a^{-1}) \cdot \varphi, \quad \forall a \in G.$$

Una forma tensoriale è una forma pseudo-tensoriale tale che  $\varphi(X_1, \dots, X_r) = 0$  quando almeno uno dei vettori  $X_i$  è verticale, ossia tangente alla fibra.

**1.40 Proposizione.** Sia  $\Gamma$  una connessione su  $P(M, G, \pi)$ . Siano  $G_u$  e  $Q_u$  rispettivamente il sottospazio verticale e il sottospazio orizzontale di  $T_u(P)$  e sia  $h: T_u(P) \rightarrow Q_u$  la proiezione. Se  $\varphi$  è una  $r$ -forma pseudo-tensoriale di tipo  $(\rho, V)$  in  $P$ , allora:

1. la forma  $\varphi h$  definita da  $(\varphi h)(X_1, \dots, X_r) = \varphi(hX_1, \dots, hX_r)$ ,  $X_i \in T_u(P)$ , è una  $r$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ ;
2.  $d\varphi$  è una  $(r+1)$ -forma pseudo-tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ ;
3.  $D\varphi = (d\varphi)h$  è una  $(r+1)$ -forma tensoriale di tipo  $(\rho, V)$ .

*Dimostrazione.*

1. Dato che  $R_a \circ h = h \circ R_a$ ,  $\forall a \in G$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} R_a^*(\varphi h)(X_1, \dots, X_r) &= (\varphi h)(dR_a(X_1, \dots, X_r)) = \varphi(dR_a(hX_1, \dots, hX_r)) \\ &= R_a^* \varphi(hX_1, \dots, hX_r) = \rho(a^{-1}) \cdot (\varphi h)(X_1, \dots, X_r) \end{aligned}$$

Inoltre  $(\varphi h)(X_1, \dots, X_r) = 0$  se uno dei campi  $X_i$  è verticale.

2. Dato che  $R_a^* \circ d = d \circ R_a^*$ ,  $\forall a \in G$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} R_a^*(d\varphi(X_1, \dots, X_r)) &= d(R_a^* \varphi)(X_1, \dots, X_r) = d(\rho(a^{-1}) \cdot \varphi(X_1, \dots, X_r)) \\ &= \rho(a^{-1}) \cdot d\varphi(X_1, \dots, X_r) \end{aligned}$$

3. Segue dai primi due punti. □

**1.41 Definizione.** La forma  $D\varphi = (d\varphi)h$  è detta derivata esterna covariante di  $\varphi$  e  $D$  è detto differenziale esterno covariante.

Se  $\rho$  è la rappresentazione aggiunta di  $G$  nell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , una forma (pseudo-)tensoriale di tipo  $(\rho, \mathfrak{g})$  è detta forma di tipo  $G$ . Dunque la 1-forma di connessione  $\omega$  è una 1-forma pseudo-tensoriale di tipo  $G$  e  $D\omega$ , detta forma di curvatura di  $\omega$ , è una 2-forma tensoriale di tipo  $G$ .

Le forme di connessione e di curvatura soddisfano un'equazione strutturale detta di Cartan, inoltre la forma di curvatura soddisfa l'identità di Bianchi. Le vediamo qui nello specifico.

**1.42 Teorema.** *Equazione di struttura di Cartan.*

Sia  $\omega$  la 1-forma di connessione di una connessione  $\Gamma$  su un fibrato principale  $P$  e sia  $\Omega$  la corrispondente 2-forma di curvatura, allora  $\forall X, Y \in T_u(P)$  e  $\forall u \in P$

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y)$$

*Dimostrazione.* Ci basta verificare i tre seguenti casi:

1.  $X$  e  $Y$  entrambi orizzontali:

$$\begin{aligned}\omega(X) &= \omega(Y) = 0 \\ \Omega(X, Y) &= d\omega(hX, hY) = d\omega(X, Y)\end{aligned}$$

2.  $X$  e  $Y$  entrambi verticali: possiamo supporre che essi siano i campi fondamentali associati a  $A, B \in \mathfrak{g}$ , rispettivamente. Allora per il punto (2) della Proposizione (1.31) abbiamo:

$$\begin{aligned}2d\omega(A^*, B^*) &= A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A^*, B^*]) \\ &= -\omega([A, B]^*) = -[A, B] = -[\omega(A^*), \omega(B^*)]\end{aligned}$$

3.  $X$  orizzontale e  $Y = A^*$  verticale: la parte destra dell'equazione è nulla, inoltre

$$2d\omega(X, A^*) = X(\omega(A^*)) - A^*(\omega(X)) - \omega([X, A^*]) = -\omega([X, A^*]) = 0$$

perché  $[X, A^*]$  è orizzontale<sup>15</sup>.

□

**1.43 Teorema.** *Identità di Bianchi.*

*Nelle notazioni del Teorema precedente,*

$$D\Omega = 0$$

*Dimostrazione.* Siano  $X, Y, Z$  vettori orizzontali. Applicando il differenziale esterno  $d$  alla Proposizione (1.42), otteniamo:

$$0 = dd\omega^i = -\frac{1}{2}c_{jk}^i d\omega^j \wedge \omega^k + \frac{1}{2}c_{jk}^i \omega^j \wedge d\omega^k + d\Omega^i$$

Dal momento che  $\omega^i(X) = 0$  se  $X$  è orizzontale, troviamo  $d\Omega^i(X, Y, Z) = 0$ .

□

---

<sup>15</sup>Per la dimostrazione di questo fatto, consultare [5, sez. 2.5, pag 78].

### 1.13 Fibrato vettoriale associato a un fibrato principale

Concludiamo questo Capitolo vedendo brevemente il rapporto tra fibrati vettoriali e principali. In particolare mostreremo che ad ogni fibrato principale su cui sia definita una connessione è possibile associare un fibrato vettoriale dotato di una connessione.

Se  $P(M, G, \pi)$  è un fibrato principale e  $F$  è una varietà su cui il gruppo  $G$  agisce da sinistra, allora  $G$  agisce da sinistra su  $P \times F$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P \times F &\longrightarrow P \times F \\ (u, \xi) &\longmapsto (ua, a^{-1}\xi) \end{aligned}$$

Sia  $E = P \times_G F$  lo spazio quoziente di  $P \times F$  sulla relazione di equivalenza indotta dall'azione di  $G$ ; la proiezione  $\pi$  induce allora una mappa  $\pi_E: E \rightarrow M$  e, per ogni elemento  $x \in M$ ,  $\pi_E^{-1}(x)$  verrà detto fibra di  $x$  in  $E$ .

Per ogni aperto  $U$  di  $M$  l'insieme  $\pi_E^{-1}(U)$  è isomorfo a  $U \times F$  e quindi possiamo introdurre una struttura di varietà differenziabile in  $E$  tale che la mappa  $\pi_E$  sia un diffeomorfismo<sup>16</sup>.

**1.44 Definizione.**  $E(M, F, G, P)$  è detto fibrato di base  $M$ , con fibra  $F$  e gruppo di struttura  $G$ , associato al fibrato principale  $P$ .

**1.45 Proposizione.** Per ogni  $u \in P$  e per ogni  $\xi \in F$ , sia  $u\xi$  l'immagine di  $(u, \xi) \in P \times F$  tramite la proiezione canonica  $P \times F \rightarrow E$ . Allora ogni  $u \in P$  è una mappa di  $F$  in  $F_x = \pi_E^{-1}(x)$ , dove  $x = \pi(u)$ . Inoltre  $\forall u \in P, a \in G, \xi \in F$ , si ha:  $(ua)\xi = u(a\xi)$

**1.46 Definizione.** Un isomorfismo della fibra  $F_x, x \in M$ , nella fibra  $F_y, y \in M$ , è un diffeomorfismo che può essere rappresentato nella forma  $v \circ u^{-1}$ , dove  $u \in \pi^{-1}(x)$  e  $v \in \pi^{-1}(y)$  sono mappe da  $F$  in  $F_x$  e  $F_y$ , rispettivamente.

**1.47 Proposizione.** Il gruppo degli automorfismi della fibra  $F_x$  è isomorfo al gruppo di struttura  $G$ .

*Dimostrazione.* Un automorfismo di  $F_x$  è una mappa nella forma  $v \circ u^{-1}$ , dove  $u, v \in \pi^{-1}(x)$ . Dunque esiste un elemento  $a \in G$  tale che  $v = ua$ . Di conseguenza ogni automorfismo di  $F_x$  può essere espresso nella forma  $u \circ a \circ u^{-1}, a \in G$ .  $\square$

<sup>16</sup>Per i particolari consultare [5, sez. 1.5].

**1.48 Definizione.** Una sezione del fibrato  $E(M, F, G, P)$  associato al fibrato principale  $P$  è una mappa  $\sigma: M \rightarrow E$  tale che  $\pi_E \circ \sigma$  sia la trasformazione identica di  $M$ .

Sia ora  $F$  il campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  oppure il campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ . Il gruppo  $GL(n, F)$  agisce in modo naturale da sinistra su  $F^n$ , dunque per quanto detto sopra possiamo dare la seguente definizione:

**1.49 Definizione.** Sia  $P(M, G, \pi)$  un fibrato principale e  $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$  una rappresentazione di  $G$  in  $GL(n, F)$ , dove  $F = \mathbb{R}$  (risp.  $F = \mathbb{C}$ ). Chiamiamo  $E(M, F^n, G, P)$  un fibrato vettoriale reale (risp. complesso) su  $M$ .

Allora il fibrato vettoriale  $E = P \times_{\rho} F^n$  associato a  $P(M, G, \pi)$  è ottenuto identificando i punti  $(u, v)$  e  $(ua, \rho(a)^{-1}v)$ , dove  $u \in P$ ,  $a \in G$  e  $v \in F^n$ . Possiamo inoltre dotare  $E$  della proiezione

$$\begin{aligned} \pi_E: E &\longrightarrow M \\ (u, v) &\longmapsto \pi(u) \end{aligned}$$

la quale è ben definita; infatti, se  $(u, v) = (ua, \rho(a)^{-1}v)$ , dalla definizione di  $\pi$  otteniamo:

$$\pi_E(ua, \rho(a)^{-1}v) = \pi(ua) = \pi(u) = \pi_E(u, v)$$

Inoltre le trivializzazioni locali per ogni aperto  $U_{\alpha}$  di  $M$  sono date da

$$\psi_{\alpha}: \pi_E \longrightarrow U_{\alpha} \times G$$

e le funzioni di transizione per  $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$  sono  $\rho \circ \psi_{\alpha\beta}$ , dove le  $\psi_{\alpha\beta}$  sono le funzioni di transizione di  $P$ .

Infine se  $P$  ammette una connessione, allora possiamo definire in maniera univoca una connessione su  $E$ <sup>17</sup>.

Viceversa a partire da un fibrato vettoriale di dimensione  $n$ , eventualmente dotato di una connessione, possiamo costruirne uno principale con gruppo strutturale  $GL(n, \mathbb{R})$  oppure  $GL(n, \mathbb{C})$ .

---

<sup>17</sup>Per una trattazione indipendente delle connessioni sui fibrati vettoriali consultare [1, cap. 6]. La costruzione della connessione sul fibrato vettoriale associato a  $P$  è fatta in [5, sez. 3.1].



## Capitolo 2

# Teorie di Gauge dell'Elettromagnetismo

In questo Capitolo andiamo ad applicare quanto esposto nel Capitolo precedente al caso di una particella in un campo elettromagnetico.

Dopo aver richiamato la nozione di Lagrangiana e il suo ruolo nel descrivere il moto di un sistema fisico, mostreremo che la Lagrangiana di una particella in presenza di un campo elettromagnetico è invariante per trasformazioni del gruppo  $U(1, \mathbb{C})$ . Questo ci permetterà di introdurre una struttura di fibrato principale dotato di una connessione e di interpretare il campo elettromagnetico come la manifestazione della sua curvatura. Successivamente descriveremo brevemente l'effetto Aharonov-Bohm, che mostra come tale connessione coincida effettivamente con un campo fisico quantistico. Infine presenteremo il Monopolo di Dirac, che mostra che l'introduzione di un monopolo magnetico conduce in modo naturale all'introduzione di un fibrato sullo spazio-tempo.

Per quello che riguarda le notazioni, considereremo lo spazio-tempo come la varietà  $\mathbb{R}^4$  dotata dell'usuale metrica di Minkowski

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le coordinate verranno indicate da lettere greche:  $\mathbf{x} = x^\mu$ , con  $\mu = 0, \dots, 3$ , dove  $x^0 = ct$  ( $c$  è la velocità della luce) e  $(x^1, x^2, x^3)$  sono le usuali coordinate spaziali. Quando poi sarà necessario distinguere la coordinata temporale da quelle spaziali indicheremo queste ultime con lettere latine:  $x = x^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

## 2.1 Lagrangiana ed Hamiltoniana in un campo elettromagnetico

Ricordiamo che indicando con  $T$  l'energia cinetica di un sistema e con  $U$  la sua energia potenziale, possiamo definire l'Hamiltoniana (o energia totale) del sistema come  $H = T + U$  e la Lagrangiana come  $L = T - U$ .

La Lagrangiana ci permette di descrivere il moto di una particella nel sistema, infatti per il Principio Variazionale di Hamilton abbiamo che una curva  $x(t)$  rappresenta tale moto tra due istanti  $t_0$  e  $t_1$  dello spazio delle configurazioni se minimizza il funzionale d'azione

$$\mathcal{S}[x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt \quad (2.1)$$

Questo accade se e solo se  $x(t)$  risolve le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Ricordiamo ora il seguente teorema<sup>1</sup>:

**2.1 Teorema.** *Sia  $H = H(x, p, t)$  l'Hamiltoniana di una particella di carica  $e$ , in assenza di campo elettromagnetico, e sia introdotto un campo elettromagnetico di potenziale  $A = \phi dt + A_j dx^j$ . Definiamo una nuova quantità di moto*

$$p'_j = p_j + eA_j(t, x)$$

*e una nuova Hamiltoniana*

$$H'(x, p', t) = H(x, p, t) - e\phi(t, x) = H(x, p' - eA, t) - e\phi(t, x)$$

*Allora la particella carica soddisfa le seguenti equazioni di Hamilton:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p'} \\ \frac{dp'}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial x} \\ \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial t} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Consultare [4, sez. 16.4b, pag. 438].



In funzione di  $H$  la Lagrangiana del sistema si può scrivere come

$$L(x, \dot{x}) = p\dot{x} - H(x, p)$$

Dunque lungo una curva  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  abbiamo:

$$L(x, \dot{x})dt = p dx - H(x, p)dt$$

In presenza di un campo elettromagnetico possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned} L'(x, \dot{x})dt &= p'dx - H(x, p')dt \\ &= (p_j + eA_j)dx^j - [H(p, x) - e\phi]dt \\ &= [p_j dx^j - H(x, p)dt] + e[\phi dt + A_j dx^j] \end{aligned}$$

**2.2 Corollario.** *Una particella in un campo elettromagnetico soddisfa le seguenti equazioni di Lagrange:*

$$\frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 0$$

dove la Lagrangiana  $L'$  è

$$L'(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) + e[\phi + A_j \dot{x}^j]$$

## 2.2 L'equazione di Schrödinger

Nel 1924 Louis de Broglie ipotizzò che le particelle potessero avere comportamento ondulatorio, stabilendo il cosiddetto dualismo onda-particella, ossia la doppia natura, corpuscolare e ondulatoria, della materia e della radiazione elettromagnetica<sup>2</sup>.

Possiamo dunque pensare che l'energia di una particella oscilli seguendo uno stato interno della particella stessa, descritto da una funzione d'onda generalmente indicata con  $\Psi$ . Tale funzione d'onda non ha un diretto significato fisico e non rappresenta alcuna quantità osservabile, tuttavia nel 1926 Max Born ne fornì una valida interpretazione, stabilendo che la probabilità di trovare sperimentalmente un corpo descritto da una funzione d'onda  $\Psi$  nel

---

<sup>2</sup>Tale ipotesi venne confermata da diversi esperimenti, tra i quali quelli di Davisson e Germer del 1927, e valse a De Broglie il premio Nobel; per una trattazione esaustiva consultare [2].

punto  $(x^1, x^2, x^3)$  al tempo  $t$  è proporzionale al valore di  $|\Psi|^2$  in quel dato punto e tempo.

L'equazione fondamentale della meccanica quantistica, che governa il comportamento della funzione d'onda, è l'equazione di Schrödinger.

Consideriamo una particella con traiettoria  $\mathbf{x}$  e momento generalizzato  $\mathbf{p}$ , di massa  $m$  e quantità di moto  $p$ , che si muove in un potenziale  $V$  in  $\mathbb{R}^3$ ; allora l'equazione di Schrödinger per la sua funzione d'onda  $\Psi$  è:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (2.2)$$

dove  $\hbar$  è la costante di Planck ridotta e  $\hat{H}$  è l'operatore Hamiltoniano, ossia l'operatore associato all'energia totale del sistema, che in meccanica classica è data dall'Hamiltoniana

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x})$$

Inoltre, la quantità di moto in coordinate cartesiane è rappresentata dall'operatore differenziale

$$\hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Se ora consideriamo una particella di carica  $e$  immersa in un campo elettromagnetico, l'Hamiltoniana  $H'$  del sistema sarà data dal Teorema (2.1) e l'equazione di Schrödinger (2.2) diventerà:

$$i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) \phi \right] \Psi = - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \sum_j \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) A_j \right]^2 \Psi + V \Psi \quad (2.3)$$

Notiamo che quest'ultima coinvolge dunque un potenziale  $A' = A_\mu dx^\mu = \phi dt + A_j dx^j$  che dipende dal sistema di riferimento scelto. Dunque in ogni aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^4$  abbiamo una differente equazione di Schrödinger, ognuna con una propria soluzione locale. Possiamo allora riscrivere tale equazione nella seguente forma:

$$i\hbar \nabla_0 \Psi = - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \sum_j \nabla_j \nabla_j \Psi + V \Psi$$

dove abbiamo introdotto la derivata covariante

$$\begin{aligned} \nabla_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \omega_\mu \\ \omega_\mu &= - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) A_\mu \end{aligned}$$

Dal momento che  $dA$  rappresenta il campo elettromagnetico è ben definito;  $A$ , invece, è un potenziale e quindi è definito a meno di sommargli una forma differenziale chiusa.

Consideriamo ora due aperti  $U$  e  $V$  in cui siano definiti i potenziali  $A_U$  e  $A_V$ , rispettivamente. La forma differenziale  $A_U - A_V$  è chiusa e quindi, per il Lemma di Poincaré, abbiamo che se  $U \cap V$  è semplicemente connesso la forma  $A_U - A_V$  è esatta. Possiamo quindi scrivere

$$A_V = A_U + df_{UV}$$

per una opportuna funzione  $f_{UV}: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora troviamo:

$$\omega_V = -\frac{ie}{\hbar}A_V = -\frac{ie}{\hbar}A_U - \frac{ie}{\hbar}df_{UV} = \omega_U - \frac{ie}{\hbar}df_{UV}$$

Definiamo ora le funzioni

$$c_{UV}(x) = \exp \left[ - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) f_{UV} \right] \quad (2.4)$$

e supponiamo di avere tre aperti  $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ , allora:

$$\begin{aligned} c_{UV}(x)c_{VW}(x) &= \exp \left[ - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) f_{UV} \right] \exp \left[ - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) f_{VW} \right] \\ &= \exp \left[ - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) (f_{UV} + f_{VW}) \right] \\ &= c_{UW}(x) \end{aligned}$$

Per il Teorema (1.24) possiamo quindi costruire un fibrato  $L$  (che in questo caso sarà un fibrato in rette complesso) che abbia le funzioni  $c_{UV}$  come funzioni di transizione. Su tale fibrato possiamo inoltre definire una connessione tale che  $\omega$  sia la sua 1-forma di connessione; vediamo infatti che le regole di trasformazione di  $\omega$  sono esattamente quelle mostrate nella Proposizione (1.35):

$$\omega_V = \omega_U - \frac{ie}{\hbar}df_{UV} = \omega_U + c_{UV}^{-1}dc_{UV} = c_{UV}^{-1}\omega_U c_{UV} + c_{UV}^{-1}dc_{UV}$$

Possiamo allora concludere che la funzione d'onda è in realtà una famiglia di funzioni tali che in  $U \cap V \neq \emptyset$

$$\Psi_V(x) = c_{VU}(x)\Psi_U(x) = \exp \left[ \left( \frac{ie}{\hbar} \right) f_{UV} \right] \Psi_U(x)$$

ossia è una sezione del fibrato  $L$ , come si può vedere dalla sezione [1.13].

Questo ci fornisce il seguente Principio dell'invarianza di gauge di Weyl: se  $\Psi$  soddisfa l'equazione di Schrödinger (2.3), allora

$$\exp \left[ \left( \frac{ie}{\hbar} \right) f(x) \right] \Psi$$

soddisfa l'equazione di Schrödinger in cui  $A$  è sostituito da  $A + df$ .

Notiamo infine che le funzioni di transizione (2.4) del fibrato  $L$  sono numeri complessi di modulo unitario, dunque il gruppo di struttura del fibrato è  $U(1)$ . Questo implica che  $|\Psi_V|^2 = |\Psi_U|^2$ , giustificando quindi l'interpretazione di  $|\Psi|^2$  come una probabilità.

## 2.3 Formalizzazione matematica

L'equazione di Schrödinger introdotta nella sezione precedente non è relativistica, poiché non tiene conto della possibilità di creare o distruggere dinamicamente particelle, e inoltre diventa molto complicata se estesa a un gran numero di particelle. Per questi motivi agli inizi del XX secolo si sviluppò la Teoria Quantistica dei Campi, che interpreta le particelle come stati eccitati di campi sottostanti.

In questa formalizzazione si costruisce una Lagrangiana a partire da una densità Lagrangiana  $\mathcal{L}(\Psi(\mathbf{x}), \partial_\mu \Psi(\mathbf{x}))$ , dove  $\Psi$  è il campo sottostante (l'analogo della funzione d'onda della sezione precedente), il funzionale d'azione si definisce ancora come in (2.1) e continua a valere il Principio Variazionale di Hamilton.

A partire da quest'ultimo si ricavano quindi delle nuove equazioni di Eulero-Lagrange, nella seguente forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_k)} \right)$$

Una particella relativistica di massa  $m$  libera, cioè che non abbia interazioni con campi o con altre particelle, è descritta da una densità Lagrangiana del tipo<sup>3</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - m^2 \Psi \bar{\Psi} \right)$$

---

<sup>3</sup>Per alleggerire le notazioni, in questa sezione usiamo delle unità di misura in cui  $c = \hbar = 1$ .

Notiamo che allora  $\mathcal{L}$  è invariante per trasformazioni del tipo

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) = e^{i\alpha}\Psi(\mathbf{x}) \\ \bar{\Psi}(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\bar{\Psi}}(\mathbf{x}) = e^{-i\alpha}\bar{\Psi}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

ossia per l'azione del gruppo  $U(1, \mathbb{C}) = U(1)$ .

Possiamo quindi introdurre un fibrato principale  $P$  con gruppo di struttura  $U(1)$  e, dal momento che  $U(1)$  agisce in modo naturale su  $\mathbb{C}$ , associare a  $P$  un fibrato vettoriale complesso  $L$  di rango 1 (ossia un fibrato in rette complesse), secondo quanto esposto nella sezione [1.13]. Il campo  $\Psi$  sarà una sezione di  $L$ ; più precisamente, fissata una base locale  $l$  per  $L$ , una sezione  $s$  si scriverà nella forma  $s = \Psi l$ ,  $\Psi \in \mathcal{C}^\infty$ .

Le trasformazioni introdotte sopra sono globali, dunque violano il principio di località, dal momento che una trasformazione globale dello spaziotempo implica che l'informazione si possa propagare istantaneamente in tutto lo spazio. Matematicamente diciamo che non è possibile confrontare l'azione di  $U(1)$  su due fibre diverse, dunque dobbiamo ammettere che tale azione dipenda anche dal punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ ; cioè dobbiamo avere una densità Lagrangiana invariante per azione del tipo:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) = e^{i\alpha(\mathbf{x})}\Psi(\mathbf{x}) \\ \bar{\Psi}(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\bar{\Psi}}(\mathbf{x}) = e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\bar{\Psi}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Notiamo che la densità  $\mathcal{L}$  definita precedentemente non soddisfa tale richiesta, dunque dobbiamo introdurre una nuova densità Lagrangiana. Per fare questo introduciamo un campo  $A$ , detto potenziale di gauge, che trasformi secondo:

$$A_\mu \longrightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

dove  $q$  è la carica elettrica della particella descritta da  $\Psi$ .

Sostituiamo allora la vecchia densità Lagrangiana  $\mathcal{L}$  con

$$\mathcal{L}'(\Psi, \nabla_\mu\Psi, A, \partial_\mu A) = \mathcal{L}(\Psi, \nabla_\mu\Psi) + \mathcal{L}_1(A, \partial_\mu A) \quad (2.6)$$

dove  $\nabla_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  è una connessione su  $L^4$  e  $\mathcal{L}_1$  è definita in modo da essere invariante per le trasformazioni del potenziale di gauge indicate sopra<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Ora  $\Psi$  è una sezione di un fibrato vettoriale (di rango 1), quindi la densità Lagrangiana non dipenderà più dalle sue derivate, che in generale non hanno senso, ma dalle derivate covarianti, le quali si possono ottenere introducendo una connessione.

<sup>5</sup>Dal momento che abbiamo introdotto il potenziale di gauge  $A$ , dobbiamo ammettere che la nuova Lagrangiana abbia un termine che dipende da questo campo. Vedremo la definizione di  $\mathcal{L}_1$  nella sezione seguente.

**2.3 Teorema.** *La densità Lagrangiana  $\mathcal{L}'$  è invariante per l'azione di  $U(1)$*

*Dimostrazione.* Sappiamo che se  $L$  è un fibrato in rette su di una varietà  $M$ ,  $\nabla: \mathcal{T}(M) \times L(M) \rightarrow L(M)$  una connessione,  $l \in L(M)$  un riferimento locale per  $L$  su un aperto  $U$  di  $M$  e  $(x^1, \dots, x^n)$  un sistema di coordinate locali su  $M$ , si ha:

$$\nabla_{\partial_i} l = \Gamma_{i1}^1 l = \Gamma_i l$$

e i coefficienti  $\Gamma_i$  sono le componenti della 1-forma differenziale di connessione:  $\omega = \Gamma_i dx^i$ .

Ogni sezione  $s \in L(U)$  si scrive nella forma  $s = fl$ , dove  $f \in C^\infty$ , allora si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i}(fl) &= (\partial_i f)l + f\nabla_{\partial_i} l = (\partial_i f)l + f\Gamma_i l = (\partial_i f + \Gamma_i f)l \\ \Rightarrow \quad \nabla_{\partial_i} &= \partial_i + \Gamma_i \end{aligned}$$

Nel nostro caso, dal momento che  $\nabla_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ , otteniamo che i coefficienti della connessione sul fibrato in rette sono

$$\Gamma_\mu = iqA_\mu$$

Per definizione  $\mathcal{L}_1$  è invariante, occupiamoci dunque di<sup>6</sup>:

$$\mathcal{L}(\Psi, \nabla_\mu \Psi) = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \overline{\nabla_\nu \Psi} - m^2 \Psi \bar{\Psi})$$

Dobbiamo mostrare come trasformano  $\nabla_\mu \Psi$  e  $\overline{\nabla_\nu \Psi}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\Psi} &= (\partial_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu) \tilde{\Psi} = (\partial_\mu + iq\tilde{A}_\mu) \tilde{\Psi} \\ &= \left( \partial_\mu + iq \left( A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha \right) \right) (e^{i\alpha} \Psi) \\ &= (\partial_\mu + iqA_\mu - i\partial_\mu \alpha) (e^{i\alpha} \Psi) \\ &= \partial_\mu (e^{i\alpha} \Psi) + iqA_\mu e^{i\alpha} \Psi - ie^{i\alpha} \Psi \partial_\mu \alpha \\ &= ie^{i\alpha} \Psi \partial_\mu \alpha + e^{i\alpha} \partial_\mu \Psi + iqA_\mu e^{i\alpha} \Psi - ie^{i\alpha} \Psi \partial_\mu \alpha \\ &= e^{i\alpha} (\partial_\mu + iqA_\mu) \Psi \\ &= e^{i\alpha} \nabla_\mu \Psi \end{aligned}$$

Analogamente otteniamo:

$$\overline{\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\Psi}} = e^{-i\alpha} \overline{\nabla_\mu \Psi}$$

---

<sup>6</sup>Per semplicità di notazione non indichiamo la dipendenza di  $\Psi$  e  $\alpha$  dal punto  $\mathbf{x}$

In definitiva:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \mathcal{L}(\tilde{\Psi}, \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\Psi}) = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\Psi} \overline{\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\Psi}} - m^2 \tilde{\Psi} \overline{\tilde{\Psi}}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\mu\nu} e^{i\alpha} \nabla_\mu \Psi e^{-i\alpha} \overline{\nabla_\nu \Psi} - m^2 e^{i\alpha} \Psi e^{-i\alpha} \overline{\Psi}) = \mathcal{L}(\Psi, \nabla_\mu \Psi)\end{aligned}$$

□

Notiamo infine che le trasformazioni ammesse per il potenziale di gauge sono giustificate dal fatto che le sue componenti sono proporzionali ai coefficienti della connessione, infatti se  $\tilde{l}$  è un'altra base locale per il fibrato vettoriale  $L$ , una sezione  $s$  di  $L$  si scrive come

$$s = \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) \tilde{l} = e^{i\alpha(\mathbf{x})} \Psi(\mathbf{x}) \tilde{l}$$

dunque otteniamo:

$$\tilde{l} = e^{-i\alpha(\mathbf{x})} l$$

Allora scrivendo  $\nabla_\mu \tilde{l} = \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{l}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \tilde{l} &= \nabla_\mu (e^{-i\alpha} l) = \partial_\mu (e^{-i\alpha}) l + e^{-i\alpha} \nabla_\mu l \\ &= -i(\partial_\mu \alpha) e^{-i\alpha} l + e^{-i\alpha} \Gamma_\mu l \\ &= -i(\partial_\mu \alpha) e^{-i\alpha} e^{i\alpha} \tilde{l} + e^{-i\alpha} \Gamma_\mu e^{i\alpha} \tilde{l} \\ &= (\Gamma_\mu - i\partial_\mu \alpha) \tilde{l} \\ \Rightarrow \tilde{\Gamma}_\mu &= \Gamma_\mu - i\partial_\mu \alpha(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Dunque:

$$\tilde{A}_\mu = -\frac{i}{q} \tilde{\Gamma}_\mu = -\frac{i}{q} (\Gamma_\mu - i\partial_\mu \alpha(\mathbf{x})) = -\frac{i}{q} \Gamma_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(\mathbf{x})$$

## 2.4 Interpretazione fisica della curvatura

Nelle notazioni della sezione precedente andiamo ora a calcolare la forma di curvatura  $\Omega = \Omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  della connessione  $\nabla$  su  $L$ . Ricordando<sup>7</sup> che  $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu$ , otteniamo:

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu (iqA_\nu) - \partial_\nu (iqA_\mu) = iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

---

<sup>7</sup>Consultare [1, cap. 6].

Poniamo ora

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.7)$$

Questo è un tensore antisimmetrico invariante sotto l'azione di  $U(1)$  le cui componenti sono<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} F_{\mu\mu} &= 0, \quad \forall \mu \\ F_{01} &= -F_{10} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \\ F_{02} &= -F_{20} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} \\ F_{03} &= -F_{30} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} \\ F_{12} &= -F_{21} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \\ F_{13} &= -F_{31} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \\ F_{23} &= -F_{32} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \end{aligned}$$

A questo punto possiamo interpretare il potenziale di gauge  $A$  come il potenziale vettore dell'elettromagnetismo, mentre  $F_{01}$ ,  $F_{02}$  e  $F_{03}$  saranno le tre componenti del campo elettrico (divise per  $c$  e a meno del segno) e  $F_{12}$ ,  $F_{13}$  e  $F_{23}$  le tre componenti del campo magnetico (a meno del segno). In definitiva il tensore  $F_{\mu\nu}$ , le cui componenti sono proporzionali ai coefficienti della 2-forma di curvatura, rappresenta il tensore elettromagnetico. Da questo punto di vista, il campo elettromagnetico è la manifestazione fisica della curvatura di una connessione definita su un fibrato in rette complesso.

## 2.5 Equazioni di Maxwell

Nelle notazioni della sezione precedente il termine  $\mathcal{L}_1$  della Lagrangiana introdotta in (2.6) è

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

---

<sup>8</sup>Ricordando che  $x^0 = ct$  e dunque  $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$



In definitiva, la densità Lagrangiana  $\mathcal{L}'$  introdotta nella sezione [2.1] ha la seguente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\overline{\nabla_\nu\Psi} - m^2\Psi\bar{\Psi}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}[g^{\mu\nu}(\partial_\mu + iqA_\mu)\Psi(\partial_\nu - iqA_\nu)\bar{\Psi} - m^2\Psi\bar{\Psi}] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}[g^{\mu\nu}(\partial_\mu\Psi\partial_\nu\bar{\Psi} - iqA_\nu\bar{\Psi}\partial_\mu\Psi + iqA_\mu\Psi\partial_\nu\bar{\Psi} + q^2A_\mu A_\nu\Psi\bar{\Psi}) - m^2\Psi\bar{\Psi}] \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

In questa scrittura il termine  $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\bar{\Psi}$  è il termine cinetico della particella descritta da  $\Psi$ ,  $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(-iqA_\nu\bar{\Psi}\partial_\mu\Psi + iqA_\mu\Psi\partial_\nu\bar{\Psi} + q^2A_\mu A_\nu\Psi\bar{\Psi})$  sono termini dovuti alle interazioni tra questa particella e il campo di gauge,  $-\frac{1}{2}m^2\Psi\bar{\Psi}$  è il termine di massa della particella e  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  è dovuto alla sola presenza del campo di gauge.

Notiamo che  $\mathcal{L}_1$  è invariante per le trasformazioni (2.5), perché  $F_{\mu\nu}$  è invariante; inoltre con tale scelta le equazioni di Eulero-Lagrange che si ottengono dal Principio Variazionale di Hamilton per la Lagrangiana (2.6) sono esattamente le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2 A_j - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} &= -\mu\rho v_j, \quad j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

dove  $\rho$  è la densità di carica elettrica,  $\mathbf{v}$  è la velocità di deriva delle cariche,  $\varepsilon$  è la permittività elettrica e  $\mu$  la permeabilità magnetica.

Indicando con  $\mathbf{E}$  il campo elettrico e con  $\mathbf{B}$  quello magnetico, otteniamo la più familiare scrittura

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}\end{aligned}$$

## 2.6 Effetto Aharonov-Bohm

L'esperimento della doppia fenditura di Young del 1801 dimostrò il comportamento ondulatorio dei fotoni. Esperimenti simili condotti verso la metà del XX secolo mostrarono che anche gli elettroni, passando attraverso due fenditure poste su di una lastra, danno luogo a fenomeni di interferenza, dimostrando così la dualità onda-particella della materia.

Supponiamo ora di inserire dietro le fenditure un solenoide idealmente infinito, attraversato da corrente e schermato in modo che gli elettroni non lo possano attraversare, come rappresentata nella figura sottostante. Classicamente non dovremmo vedere variazioni nella figura di interferenza data dagli elettroni, in quanto nella regione esterna al solenoide il campo elettromagnetico è trascurabile (idealmente nullo); tuttavia sperimentalmente si osserva uno shift in tale figura. Tale fenomeno è conosciuto come effetto Aharonov-Bohm e dimostra che il potenziale di gauge e, di conseguenza, la connessione del fibrato di cui abbiamo parlato nelle sezioni precedenti, sono entità fisiche rilevabili, e non delle mere modellizzazioni matematiche.

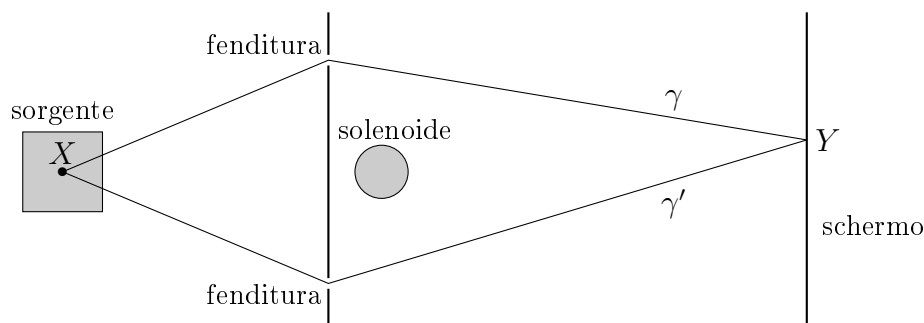


Figura 2.1: Due diversi cammini di un elettrone passante per una doppia fenditura nell'esperimento Aharonov-Bohm

Supponiamo che la corrente lungo il solenoide generi al suo interno un campo magnetico costante e parallelo all'asse del solenoide stesso. Indicando con  $b$  il flusso magnetico attraverso il solenoide, possiamo definire il potenziale vettore (o di gauge) del campo magnetico all'esterno del solenoide  $A = \frac{b}{2\pi} d\theta$ . Esso è tale che  $\oint A = b$  e  $dA = 0$ .

La funzione d'onda di un elettrone passante attraverso una delle due fenditure è:

$$\Psi[\gamma] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma} L dt\right)$$

dove indichiamo con  $\gamma$  il cammino dell'elettrone e con  $L$  la Lagrangiana del sistema quando nel solenoide non scorre corrente.

Osserviamo la Figura (2.1): se l'elettrone si muove dalla sorgente posta nel punto  $X$  ad un punto  $Y$  sullo schermo, può seguire due differenti percorsi classici, indicati con  $\gamma$  e  $\gamma'$ . Ad ognuno di questi percorsi sarà associata una differente funzione d'onda, e la differenza di fase delle due funzioni, ossia la differenza del loro argomento, darà luogo a fenomeni di interferenza.

Se nel solenoide scorre corrente, in virtù del Corollario (2.2), dobbiamo introdurre una nuova Lagrangiana  $L' = L + e[\phi - A_j \dot{x}^j]$ . In questa nuova situazione la differenza di fase diventa dunque:

$$\frac{1}{\hbar} \oint_{\gamma-\gamma'} (L dt + eA \cdot dx)$$

Dunque la nuova differenza di fase si scosta dalla precedente di un termine proporzionale al flusso attraverso il solenoide:

$$\frac{e}{\hbar} \int B = \frac{eb}{\hbar}$$

Dal momento che tale termine è indipendente dal punto  $Y$  sullo schermo, la figura di interferenza che si ottiene quando scorre corrente è la stessa figura che si ottiene in assenza di corrente, shiftata per una costante. Il potenziale vettore  $A$  è dunque un campo fisico osservabile sperimentalmente, almeno nell'ambito della meccanica quantistica.

## 2.7 Il Monopolo di Dirac

In questa sezione studiamo un caso in cui l'introduzione della connessione elettromagnetica è resa necessaria dalla struttura fisica e geometrica del sistema, ossia il monopolo di Dirac. Esso fu introdotto da Dirac stesso nel 1931, per rendere "simmetriche" le equazioni di Maxwell; come si può notare

dalla sezione [2.5], infatti, l'equazione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  nega l'esistenza di cariche magnetiche, mentre sappiamo che esistono le cariche elettriche.

Consideriamo una particella di carica  $e$  che si muove in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ <sup>9</sup> in presenza di un monopolo magnetico (ossia di una carica magnetica) di forza  $q$  posta nell'origine.

Possiamo parametrizzare  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  con le coordinate sferiche  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$  tali che:

$$\begin{aligned}x^1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\x^2 &= r \sin \theta \sin \varphi \\x^3 &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Allora il campo magnetico  $\mathbf{B}$  generato dal monopolo è:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}$$

Quindi il potenziale vettore avrà la forma<sup>10</sup>

$$A_U = q(1 - \cos \theta)d\varphi$$

e sarà definito solamente nell'aperto  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 \leq 0\} = \{(r, \theta, \varphi) \mid \theta \in [0, \pi[ \}$ .

Per poter definire il potenziale anche nei punti dell'asse delle  $x^3$  negative, nell'aperto  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 \geq 0\} = \{(r, \theta, \varphi) \mid \theta \in ]0, \pi] \}$  possiamo usare delle nuove coordinate

$$\begin{aligned}\theta' &= \pi - \theta \\ \varphi' &= -\varphi\end{aligned}$$

e ottenere quindi il potenziale vettore

$$A_V = -q(1 + \cos \theta)d\varphi$$

A questo punto siamo obbligati ad introdurre un fibrato in rette  $L$  dotato di una connessione la cui 1-forma indichiamo con  $\omega$ , come fatto nelle sezioni precedenti.

<sup>9</sup>In questa sezione non considereremo la coordinata temporale.

<sup>10</sup>Consultare [4, sez. 5.5, pag. 162].

Ricordando allora quanto fatto nella sezione [2.2], possiamo dire che esiste una funzione  $f_{UV}: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$\begin{aligned} A_V &= A_U + df_{UV} \\ \omega_V &= \omega_U - \frac{ie}{\hbar} df_{UV} \\ c_{UV} &= \exp \left[ - \left( \frac{ie}{\hbar} \right) f_{UV} \right] \end{aligned}$$

dove le  $c_{UV}$  sono le funzioni di transizione del fibrato.

In questo caso  $U \cap V = \{(r, \theta, \varphi) \mid \theta \in ]0, \pi[ \}$ , inoltre i potenziali  $A_U$  e  $A_V$  non dipendono dalla coordinata radiale  $r$ , quindi possiamo dire che la funzione  $f_{UV}$  e le funzioni di transizione  $c_{UV}$  dipendono solamente dalla variabile  $\varphi$ . Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} df_{UV}(\varphi) &= A_V - A_U = -2q d\varphi \\ f_{UV}(\varphi) &= -2q\varphi \\ c_{UV}(\varphi) &= \exp \left[ \frac{2ieq}{\hbar} \varphi \right] \end{aligned}$$

Dall'ultima equazione otteniamo che le  $c_{UV}$  sono funzioni a valore singolo se e solo se  $\frac{2eq}{\hbar}$  è un numero intero. Infatti, dal momento che le coordinate  $(r, \theta, \varphi)$  e  $(r, \theta, \varphi + 2\pi)$  identificano lo stesso punto, dobbiamo avere  $c_{UV}(\varphi) = c_{UV}(\varphi + 2\pi)$ ,  $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ . Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{2ieq}{\hbar} \varphi \right] &= \exp \left[ \frac{2ieq}{\hbar} \varphi + \frac{4\pi ieq}{\hbar} \right] = \exp \left[ \frac{2ieq}{\hbar} \varphi \right] \exp \left[ \frac{4\pi ieq}{\hbar} \right] \\ \implies \exp \left[ \frac{4\pi ieq}{\hbar} \right] &= 1 = \exp(2\pi ik), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \implies \frac{4\pi ieq}{\hbar} &= 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \implies \frac{2eq}{\hbar} &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Tale condizione viene detta Condizione di Quantizzazione di Dirac e mostra che la quantizzazione delle cariche elettriche discende in modo naturale dal modello. Se essa non viene soddisfatta non siamo in grado di costruire fibrati in rette le cui sezioni siano le funzioni d'onda di un elettrone in presenza di un monopolo magnetico.

## 2.8 Il fibrato del monopolo di Dirac

Nella precedente sezione abbiamo mostrato che l'ipotesi dell'esistenza delle cariche magnetiche porta all'introduzione di un fibrato su  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  e abbiamo trovato le sue funzioni di transizione. In questa sezione vogliamo costruire operativamente tale fibrato.

Iniziamo col dire che possiamo considerare  $S^2$  come varietà di base per il fibrato, dal momento che  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  e  $S^2$  sono omotopi, cioè si possono deformare con continuità l'uno nell'altro<sup>11</sup>. A sua volta  $S^2$ , tramite la proiezione stereografica, può essere identificato con lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , che rappresenta l'insieme delle rette di  $\mathbb{C}^2$  passanti per l'origine<sup>12</sup> o, equivalentemente, lo spazio  $\mathbb{C}$  a cui sia stato "aggiunto un punto all'infinito".

Su  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  possiamo introdurre le coordinate omogenee  $(z^0 : z^1)$ , che sono definite a meno di proporzionalità. Inoltre possiamo dotare  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  di un atlante  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=0,1}$ , dove  $U_i = \{(z^0 : z^1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \mid z^i \neq 0\}$  e

$$\begin{aligned} \phi_0: U_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z^0 : z^1) &\longmapsto x = \frac{z^1}{z^0} \\ \phi_1: U_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z^0 : z^1) &\longmapsto y = \frac{z^0}{z^1} \end{aligned}$$

Quindi in  $U_0 \cap U_1$  abbiamo

$$x = \frac{1}{y}$$

Motivati da quanto fatto nelle sezioni precedenti, vogliamo ora costruire un fibrato in rette su  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , ossia un fibrato  $L$  tale che ogni fibra sia una retta. D'altra parte, ogni punto  $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  è in realtà una retta di  $\mathbb{C}^2$  passante per l'origine, dunque possiamo dire che per ogni punto  $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , la fibra  $L_P$  sarà la retta rappresentata da  $P$  stesso. Abbiamo quindi costruito un fibrato in

<sup>11</sup>Precisamente un'omotopia tra due funzioni continue  $f, g: X \rightarrow Y$ , dove  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici, è una funzione continua  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tale che,  $\forall x \in X$ ,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . Gli spazi  $X$  e  $Y$  si dicono omotopicamente equivalenti, o omotopi, se esistono due funzioni  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  tali che  $g \circ f$  è omotopa a  $id_X$  e  $f \circ g$  è omotopa a  $id_Y$ .

<sup>12</sup>Abbiamo infatti  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C}^2 / \sim$ , dove  $\sim$  è una relazione di equivalenza definita ponendo  $(z^0, z^1) \sim (\lambda z^0, \lambda z^1)$ ,  $\forall \lambda \neq 0$ .

rette complesso su  $S^2$ , che viene detto fibrato di Hopf o tautologico.

Se  $P \in U_0$ , la retta passante per  $P$  e per l'origine ha coordinate omogenee  $(z^0 : z^1) = (1 : \frac{z^1}{z^0}) = (1 : x)$ , possiamo allora considerare il vettore  $(1, x)^T$  su questa retta e definire il seguente versore, che rappresenta una sezione del fibrato tautologico su  $U_0$ :

$$v_{U_0}(x) = \frac{(1, x)^T}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Analogamente se  $P \in U_1$ , abbiamo  $(z^0 : z^1) = (\frac{z^0}{z^1} : 1) = (y : 1)$  e possiamo definire la sezione

$$v_{U_1}(y) = \frac{(y, 1)^T}{(1 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} v_{U_1}(y) &= \frac{(y, 1)^T}{(1 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y(1, y^{-1})^T}{(1 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-1}(1, x)^T}{(1 + |x|^{-2})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(1, x)^T}{x \left( \frac{|x|^2 + 1}{|x|^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = v_{U_0} \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

Scrivendo  $x$  in coordinate polari nell'aperto  $U_0$ , troviamo:

$$c_{U_1 U_0} = \frac{x}{|x|} = e^{i\varphi}$$

Dunque abbiamo ritrovato le funzioni di transizione della sezione precedente, dove  $\frac{2e\varphi}{\hbar} = 1$ .





# Capitolo 3

## Teorie di Yang-Mills

In questo Capitolo, in analogia con il precedente, mostriamo un modello di teoria di gauge per la forza nucleare forte, o interazione forte, la quale, come suggerisce il nome, è la forza di intensità maggiore tra le quattro fondamentali (forza elettromagnetica, forza gravitazionale, forza nucleare debole e forza nucleare forte). Essa è responsabile dell'esistenza del nucleo atomico; in sua assenza, infatti, un nucleo formato da due o più protoni tenderebbe a disfarsi per effetto della forza elettromagnetica repulsiva tra le cariche positive.

Dopo aver visto che la Lagrangiana dell'interazione forte ammette  $SU(2)$  come gruppo di simmetria globale, andremo a introdurre un fibrato dotato di una connessione, il quale ci permetterà di trovare una nuova Lagrangiana che abbia  $SU(2)$  come gruppo di simmetria locale. Le equazioni del moto derivanti da tale Lagrangiana saranno le equazioni fondamentali della forza nucleare forte e verranno dette di Yang-Mills; come vedremo, esse generalizzano le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo. Infine presenteremo brevemente un modello più moderno di Teorie di Yang-Mills, detto Cromodinamica Quantistica, che ammette  $SU(3)$  come gruppo di simmetria locale.

### 3.1 Simmetria di spin isotopico

Nel 1937, durante i suoi studi sul nucleo atomico e sulla forza nucleare forte, Werner Heisenberg introdusse l'idea di simmetria di spin isotopico, o isospin. Questa teoria è basata sulla similarità delle masse del protone e

del neutrone e consiste nel supporre che questi siano due stati della stessa particella, detta nucleone, e che le forze nucleari siano simmetriche per la sostituzione di protoni e neutroni con arbitrarie sovrapposizioni lineari di questi due stati, che pensiamo come funzioni dello spazio-tempo a valori complessi e che indichiamo con  $p$  (protone) ed  $n$  (neutrone).

Heisenberg postulò che la densità Lagrangiana della forza nucleare forte fosse invariante per trasformazioni in cui venisse tenuto costante  $|p|^2 + |n|^2$ . Dunque la regola della simmetria di isospin è la seguente:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \longrightarrow U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

dove  $U \in SU(2) = \{U \in U(2, \mathbb{C}) \mid \det(U) = 1\}^1$ .

Se scriviamo  $\phi = (p, n)^T$ , la densità Lagrangiana dell'interazione forte si scrive come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - m^2 \phi^\dagger \phi \right)$$

e, per quanto detto sopra, è invariante per trasformazioni del tipo

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\phi}(\mathbf{x}) = U\phi(\mathbf{x}) \\ \phi^\dagger(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{x}) = \phi^\dagger(\mathbf{x})U^\dagger \end{aligned}$$

In primo luogo notiamo che, essendo la matrice  $U$  costante, tale trasformazione è globale, cioè gli stati  $p$  ed  $n$  che vi compaiono si riferiscono ad una definizione di protone e neutrone che deve essere condivisa da tutti gli osservatori dell'Universo, e che viene trasformata dalla matrice  $U$  in tutti i punti simultaneamente.

Secondariamente notiamo che il gruppo  $SU(2)$  non è abeliano, dunque se eseguiamo in sequenza due trasformazioni del tipo (3.1), il risultato che otteniamo dipende dall'ordine in cui queste sono state eseguite.

---

<sup>1</sup>Si è scelto il gruppo  $SU(2)$  al posto di  $U(2)$  perché  $(p, n)^T$  e  $(e^{ia}p, e^{ia}n)^T$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , rappresentano la stessa composizione nucleonica, e dunque possiamo scegliere la matrice  $U$  in modo tale che abbia determinante unitario.

## 3.2 Simmetrie locali e campi di Yang-Mills

Nel Capitolo precedente abbiamo visto come passare da un'invarianza globale a una locale, applicando quello che potremmo chiamare "Principio di gauge": se una Lagrangiana di un qualche campo è invariante per un gruppo di trasformazioni globali, allora possiamo introdurre un fibrato su cui sia definita una connessione e sostituire le derivate presenti nella Lagrangiana con derivate covarianti, ottenendo così una nuova Lagrangiana invariante per trasformazioni locali.

Nella sezione precedente abbiamo detto che i nucleoni ammettono  $SU(2)$  come gruppo di gauge (ossia di simmetria) globale. Dunque, seguendo quanto fatto da Yang e Mills nel 1954, possiamo applicare il Principio di gauge al caso dell'isospin, e supporre che la corretta densità Lagrangiana della forza nucleare forte ammetta  $SU(2)$  come gruppo di simmetria locale, ossia che sia invariante per trasformazioni del tipo

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\phi}(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \\ \phi^\dagger(\mathbf{x}) &\longrightarrow \tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{x}) = \phi^\dagger(\mathbf{x})U^\dagger(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto nella sezione [2.3], consideriamo il campo  $\phi(\mathbf{x})$ , che rappresenta i nucleoni, come una sezione di un fibrato  $P$  di fibra  $\mathbb{C}^2$  e gruppo strutturale  $SU(2)$  in cui sia definita una connessione  $\nabla$ . La 1-forma di connessione  $\omega$  in questo caso avrà valori nell'algebra di Lie di  $SU(2)$ , che indichiamo con  $\mathfrak{su}(2)$ . Questa consiste delle matrici anti-Hermitiane  $2 \times 2$  di traccia nulla e ha come base  $\{i\sigma_a\}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , dove  $\sigma_a$  sono le matrici di Pauli, ossia:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Seguendo quanto fatto per l'elettromagnetismo diciamo che la 1-forma di connessione  $\omega$  è correlata al potenziale di gauge  $\mathbf{A}$  dalla seguente equazione:

$$\omega = -iq\mathbf{A}$$

dove  $q$  è detta carica generalizzata.

Ognuna delle componenti di  $\omega$  è dunque nella seguente forma:

$$\omega_\mu = -iq\mathbf{A}_\mu = -iq\sigma_a A_\mu^a = -iq(\sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2 + \sigma_3 A_\mu^3)$$

Per mediare la forza nucleare forte abbiamo quindi introdotto non un unico potenziale di gauge ma tre campi vettoriali,  $A^1$ ,  $A^2$  e  $A^3$ , detti campi di Yang-Mills. Dal momento che essi sono proporzionali ai coefficienti di una connessione, le cui regole di trasformazione sono state date nella sezione [1.10], trasformeranno secondo la seguente regola<sup>2</sup>:

$$\mathbf{A}_\mu \longrightarrow \mathbf{A}'_\mu = U \left( \sigma_a A_\mu^a + \frac{i}{q} \partial_\mu \right) U^{-1} \quad (3.2)$$

Possiamo dunque introdurre una nuova densità Lagrangiana

$$\mathcal{L}'(\phi, \nabla_\mu \phi, \mathbf{A}, \partial_\mu \mathbf{A}) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_\mu \phi) + \mathcal{L}_1(\mathbf{A}, \partial_\mu \mathbf{A})$$

dove  $\nabla_\mu = \partial_\mu - iq\mathbf{A}_\mu = \partial_\mu - iq\sigma_a A_\mu^a$  è una connessione su  $P$  e  $\mathcal{L}_1$  è definita in modo da essere invariante per le trasformazioni (3.2) del potenziale di gauge<sup>3</sup>.

**3.1 Teorema.** *La densità Lagrangiana  $\mathcal{L}'$  è invariante per l'azione locale di  $SU(2)$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue quella del Teorema (2.3). Mostriamo quindi come trasforma

$$\mathcal{L}(\phi, \nabla_\mu \phi) = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}(\nabla_\mu \phi)^\dagger \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} &= (\partial_\mu - iq\tilde{\mathbf{A}}_\mu)\tilde{\phi} \\ &= \left[ \partial_\mu - iqU \left( \sigma_a A_\mu^a + \frac{i}{q} \partial_\mu \right) U^{-1} \right] (U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)\phi + U\partial_\mu \phi - iqU\sigma_a A_\mu^a \phi + U(\partial_\mu U^{-1})U\phi \\ &= [\partial_\mu U + U(\partial_\mu - iq\sigma_a A_\mu^a) - \partial_\mu U]\phi \\ &= U(\partial_\mu - iq\sigma_a A_\mu^a)\phi \\ &= U\nabla_\mu \phi \end{aligned}$$

Analogamente si trova

$$(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi})^\dagger = (U\nabla_\mu \phi)^\dagger = (\nabla_\mu \phi)^\dagger U^\dagger$$

<sup>2</sup>Per semplificare le notazioni da qui in poi non indicheremo più la dipendenza di  $\phi$  e  $U$  dal punto  $\mathbf{x}$ .

<sup>3</sup>Vedremo la definizione esplicita di  $\mathcal{L}_1$  nella sezione seguente.

Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \mathcal{L}(\tilde{\phi}, \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi}) = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi})^\dagger \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\phi} - m^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}(\nabla_\mu \phi)^\dagger U^\dagger U \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^\dagger U^\dagger U \phi) = \mathcal{L}\end{aligned}$$

Dal momento che abbiamo posto  $\mathcal{L}_1$  invariante per le trasformazioni (3.2), possiamo concludere.  $\square$

### 3.3 Equazioni di Yang-Mills

Nella sezione precedente abbiamo introdotto una connessione la cui forma di connessione è  $\omega$ ; allora, per l'equazione di struttura di Cartan (1.42), abbiamo che le componenti della 2-forma di curvatura  $\Omega$  sono:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu} &= d\omega(\partial_\mu, \partial_\nu) + \omega \wedge \omega(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\mu \omega_\nu - \omega_\nu \omega_\mu \\ &= \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + [\omega_\mu, \omega_\nu] \\ &= \partial_\mu(-iq\mathbf{A}_\nu) - \partial_\nu(-iq\mathbf{A}_\mu) + [-iq\mathbf{A}_\mu, -iq\mathbf{A}_\nu] \\ &= -iq\partial_\mu \mathbf{A}_\nu + iq\partial_\nu \mathbf{A}_\mu - q^2[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \\ &= -iq(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - iq[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu])\end{aligned}$$

Chiamiamo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - iq[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (3.3)$$

tensore di Yang-Mills, e notiamo che esso generalizza la definizione (2.7) del tensore elettromagnetico; in questo caso, infatti, la parentesi di Lie  $[A_\mu, A_\nu]$  non si annulla perché stiamo lavorando in un gruppo non commutativo.

In funzione di questo tensore la Lagrangiana  $\mathcal{L}_1$  introdotta nella precedente sezione si scrive come

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

ed è invariante per le trasformazioni del potenziale di gauge, dal momento che il tensore (3.3) lo è.

Ricordiamo ora che, per il Principio Variazionale di Hamilton trattato nella sezione [2.1], le equazioni del moto, ossia le equazioni di Eulero-Lagrange, si possono ricavare ponendo  $S'[\omega] = 0$ , dove  $S$  è il funzionale di Yang-Mills

$$S[\omega] = \frac{1}{4} \int -Tr(\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}) vol^4 = \frac{1}{2}(\Omega, \Omega)$$

In questo caso le equazioni del moto verranno dette equazioni di Yang-Mills e, in funzione di  $F_{\mu\nu}$ , saranno<sup>4</sup>:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - iq[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0 \quad (3.4)$$

### 3.4 Analogia tra la Teoria di Yang-Mills e l'Elettromagnetismo

Vogliamo ora mostrare che le equazioni di Yang-Mills sono una generalizzazione delle equazioni di Maxwell presentate nella sezione [2.5]. Per fare ciò riscriviamo il tensore di Yang-Mills nelle notazioni tipiche dell'elettromagnetismo, ossia poniamo

$$\begin{aligned} F^{0j} &= E^j, & j &= 1, 2, 3 \\ F^{12} &= B^3, \dots \end{aligned}$$

Se nell'equazione di Yang-Mills (3.4) poniamo  $\nu = 0$  otteniamo

$$\nabla_0 F^{\mu 0} = iq[A_\mu, F^{\mu 0}]$$

che equivale a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = iq(\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{A})$$

Questa è un'analogo dell'equazione di Gauss, dove  $iq(\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{A})$  gioca il ruolo di una "densità di carica", anche in assenza di fonti esterne. A causa della non abelianità del gruppo  $SU(2)$  abbiamo  $[\mathbf{A}, \mathbf{E}] \neq 0$ , quindi il campo di Yang-Mills  $\mathbf{E}$  e il potenziale  $\mathbf{A}$  agiscono come sorgenti del campo di Yang-Mills stesso.

---

<sup>4</sup>Per i dettagli consultare [4, sez. 20.4e e sez. 20.5a].

Consideriamo ancora l'equazione (3.4), questa volta facendo variare  $\nu$  tra i soli indici spaziali ( $\nu = k = 1, 2, 3$ ). Otteniamo

$$\nabla_0 F^{0k} + \nabla_j F^{jk} - iq[A_0, F^{0k}] - iq[A_j, F^{jk}] = 0$$

che equivale a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - iq(A_0 \mathbf{E} - \mathbf{E}A_0) + iq(\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

Questa è l'analogo dell'equazione di Ampere-Maxwell, in cui ci sono due nuovi contributi alla corrente.

Oltre all'equazione di Yang-Mills possiamo scrivere l'identità di Bianchi che, come abbiamo dimostrato in (1.43), è valida per ogni 2-forma di curvatura. Essa, in funzione di  $F_{\mu\nu}$ , sarà:

$$\partial_\eta F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\eta\mu} + \partial_\mu F_{\nu\eta} - iq([A_\eta, F_{\mu\nu}] + [A_\nu, F_{\eta\mu}] + [A_\mu, F_{\nu\eta}]) = 0 \quad (3.5)$$

Analogamente a quanto fatto per l'equazione di Yang-Mills, poniamo  $\nu = 0$  in (3.5) e mostriamo che così facendo otteniamo una generalizzazione della legge di Faraday:

$$\partial_\eta F_{\mu 0} + \partial_\mu F_{0\eta} + \partial_0 F_{\eta\mu} = iq([A_\eta, F_{\mu 0}] + [A_\mu, F_{0\eta}]) + iq[A_0, F_{\eta\mu}]$$

che equivale a

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = iq[(\mathbf{A} \times \mathbf{E} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) + (A_0 \mathbf{B} - \mathbf{B}A_0)]$$

Infine, facendo variare gli indici nell'identità di Bianchi tra i soli indici spaziali, otteniamo l'analogo dell'equazione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , dove in questo caso, però, esisterebbero cariche magnetiche isolate:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = iq(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

### 3.5 Accenni alla Cromodinamica Quantistica

Al giorno d'oggi, il modello della forza nucleare forte presentato nelle sezioni precedenti risulta obsoleto. La teoria accettata modernamente è infatti

quella della Cromodinamica Quantistica, in inglese Quantum Chromo Dynamics (QCD)<sup>5</sup>, secondo cui ogni nucleone è formato da una tripletta di quark e ogni tipo, o sapore, di quark può apparire in tre diversi stati: rosso, blu o verde.

In questa teoria il campo  $\phi = (R, B, G)^T$  dato dagli stati dei quark rappresenta l'analogo del campo dato dagli stati dei nucleoni presentati precedentemente. La teoria "geometrica" che se ne ricava è del tutto equivalente alla precedente, ma questa volta il gruppo di struttura del fibrato non è  $SU(2)$ , bensì  $SU(3)$ . L'algebra di Lie di questo gruppo è  $\mathfrak{su}(3)$  e consiste nelle matrici anti-Hermitiane  $3 \times 3$  di traccia nulla, la cui base è  $\{i\lambda_b\}$ ,  $b = 1, \dots, 8$ , dove le  $\lambda_b$  sono dette matrici di Gell-Mann. Dunque i coefficienti della connessione  $\omega$  sono:

$$\omega_\mu = -iq\lambda_b A_\mu^b$$

dove  $q$  è una costante di interazione.

In questo caso abbiamo dunque otto campi di Gauge, detti gluoni, che mediano la forza tra i quark.

---

<sup>5</sup>Per un'introduzione all'argomento consultare [6], per una trattazione formale [4, appendice C].



# Bibliografia

- [1] M. Abate, F. Tovena. *Geometria differenziale*. Springer-Verlag Italia, 2011.
- [2] A. Beiser. *Concepts of Modern Physics. Sixth Edition*. Mc. Graw Hill, 2003.
- [3] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications. Part I*. Springer Science+Business Media New York, 1984.
- [4] T. Frankel. *The Geometry of Physics. An introduction. Second Edition*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. Volume I*. Interscience Publishers, 1963.
- [6] L. Maiani. *Sessant'anni di Yang-Mills*, in *Il nuovo saggiatore*. vol 31, 2015, 22-32.
- [7] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics. Second Edition*. IOP Publishing Ltd, 2003.
- [8] B. Schutz. *A First Course in General Relativity. Second Edition*. Cambridge University Press, 2009.