



**Università degli Studi di Padova**

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA TRIENNALE

## **Controllo di un satellite in orbita**

Candidato:  
**Andrea Martin**  
Matricola 578170

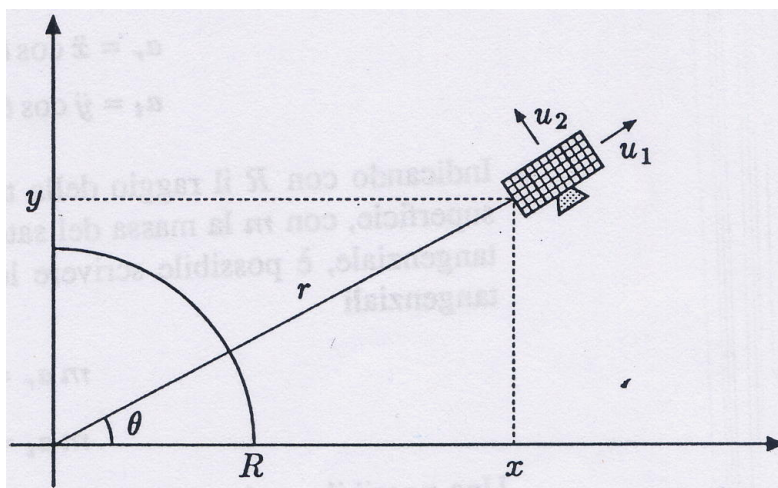
Relatore:  
**Prof. Mauro Bisiacco**

## Indice

<b>1</b>	<b>Descrizione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Controllo a massa costante tramite il modello di stato</b>	<b>4</b>
2.1	Derivazione del modello di stato . . . . .	4
2.2	Linearizzazione e modello di stato . . . . .	5
2.3	Realizzazione del controllore statico . . . . .	7
2.4	Simulazioni del controllo . . . . .	9
2.5	Applicazione del controllore al sistema fisico non lineare . . . .	19
<b>3</b>	<b>Controllo a massa variabile tramite il modello di stato</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>Controllo tramite retroazione a catena chiusa</b>	<b>33</b>
4.1	Controllo del raggio . . . . .	33
4.2	Controllo dell'angolo . . . . .	36

## 1 Descrizione

Si consideri un sistema composto da un satellite di massa  $m(t)$  (variabile nel tempo, in prima ipotesi considereremo un caso specifico in cui essa rimanga costante durante il periodo di osservazione e controllo del nostro sistema, successivamente estenderemo la nostra analisi e il nostro modello ad una massa tempo-variante che possa modificarsi dal valore fissato per le più svariate cause, cercando di rendere il più affidabile possibile il nostro schema di controllo in seguito ad un ulteriore disturbo dei parametri nominali) in orbita attorno alla terra. Assumiamo che il satellite sia posto in un campo di forze centrali (campo gravitazionale) inversamente proporzionali al quadrato della distanza da un punto fisso (che assumiamo essere il centro della terra). Com'è noto esso può permanere in un'orbita circolare intorno alla terra in assenza di perturbazioni dovute ad agenti esterni. Tuttavia, sia il non perfetto raggiungimento dell'orbita (che per come è strutturato il sistema vedremo più avanti tende a spostare su un'altra orbita non geostazionaria la posizione del satellite anche se esso è spostato di 1mm dalla posizione corretta), sia la presenza di agenti esterni fa sì che possa venir modificata la rotta iniziale uscendo dall'orbita. Per contrastare quest'effetto, disponiamo di dispositivi di correzione agenti come forze radiali e tangenziali sul satellite, in modo che possano riportarlo sull'orbita desiderata.



Assumendo un sistema di riferimento ortogonale nel piano dell'orbita con origine nel centro della terra, indichiamo con  $r$  la distanza del satellite dal centro della terra e con  $\theta$  l'elevazione rispetto all'asse  $x$ , esse diventeranno inoltre alcune delle variabili di stato di controllo del nostro sistema. Gli ingressi del sistema  $u_1$  e  $u_2$  sono rispettivamente le forze radiali e quelle tangenziali di controllo che abbiamo già introdotto in precedenza. Fissiamo inoltre come parametro nominale  $\omega$  della velocità angolare del satellite quella di rotazione terrestre, ottenendo così il caso tipico di un satellite geostazionario, ottenendo quindi  $\omega = 7.29 * 10^{-5}$ . Facciamo notare infine che il valore della distanza del satellite dalla Terra (e quindi il raggio dell'orbita) non è prefissato, in quanto l'analisi del sistema porterà a trovarne un unico valore accettabile che soddisfi le condizioni sotto cui ci porremo. Sotto queste condizioni, procediamo dunque allo studio del modello, costruendo di volta in volta un metodo di controllo appropriato per il sistema in esame, simulandone il comportamento e valutando quale dei controlli applicati sia più efficiente. In sintesi:

- Ricaveremo preliminarmente il modello di equazioni differenziali che descrive il sistema preso in esame;
- Dopo aver opportunamente linearizzato, costruiremo il modello di stato  $\Sigma = (F, G, H, D)$  equivalente e ricaveremo la funzione di trasferimento corrispondente;
- Implementeremo un controllo statico basato sul modello di stato e uno dinamico basato sul controllo in retroazione ingresso-uscita a feedback negativo di un sistema SISO;
- Simuleremo il funzionamento dei controllori e daremo un giudizio qualitativo su quale possa essere il migliore da implementare in base a prestazioni, costo, complessità...

## 2 Controllo a massa costante tramite il modello di stato

### 2.1 Derivazione del modello di stato

Riferendoci a coordinate polari  $(r, \theta)$  e partendo dalle elementari relazioni

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

possiamo facilmente derivare le espressioni della velocità e dell'accelerazione tangenziale e di quella radiale (dalla cinematica sappiamo che il valore della velocità radiale si trova derivando il raggio vettore rispetto al tempo, discorso analogo per quella tangenziale. A questo punto è sufficiente utilizzare le relazioni tra le coordinate polari e cartesiane per ricavarsi le accelerazioni) che valgono

$$\begin{cases} v_r &= \dot{r} \\ v_t &= r\dot{\theta} \\ a_r &= \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_t &= \ddot{y} \cos \theta - \ddot{x} \sin \theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

Introducendo adesso la forza newtoniana di gravitazione tra le 2 masse, e assumendo note la massa  $M$  della terra e la costante di gravitazione universale  $G$ , otteniamo le seguenti relazioni, applicando la legge di Newton lungo le due direzioni:

$$\begin{aligned} F_r &= ma_r + \dot{m}v_r = -mGM \\ F_t &= \dot{m}v_t + ma_t = u_2 \end{aligned}$$

dalle quali, sostituendo le espressioni delle accelerazioni ricavate in precedenza ed esprimendo il tutto come funzione di  $\ddot{r}$  e  $\ddot{\theta}$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2} + \frac{u_1}{m} - \frac{\dot{m}\dot{r}}{m} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{u_2}{mr} - \frac{\dot{m}\dot{\theta}}{m} \end{aligned}$$

che sono le equazioni del sistema che noi vogliamo andare ad analizzare.

Per ottenere il modello di stato del sistema il primo passo ora è scegliere convenientemente le variabili di stato.

Una buona scelta è quella di porre

$$x_1 = r$$

$$x_2 = \dot{r}$$

$$x_3 = \theta$$

$$x_4 = \dot{\theta}$$

con tale scelta si ottiene il seguente modello non lineare nello spazio degli stati (ma lineare negli ingressi):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_4^2 - \frac{GM}{x_1^2} + \frac{u_1}{m} - \frac{\dot{m}x_2}{m} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{2x_2x_4}{x_1} + \frac{u_2}{mx_1} - \frac{\dot{m}x_4}{m} \end{cases}$$

siccome in prima analisi ci concentreremo sul caso di un satellite di massa costante  $m_0$ , il sistema di equazioni si semplifica in

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_4^2 - \frac{GM}{x_1^2} + \frac{u_1}{m_0} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{2x_2x_4}{x_1} + \frac{u_2}{m_0x_1} \end{cases}$$

## 2.2 Linearizzazione e modello di stato

Scegliamo ora di linearizzare il modello attorno ad una orbita circolare fissata di raggio  $\rho$ , per la quale abbiamo corrispondenti valori nominali della variabili di stato  $x_i$  (a ingressi ovviamente nulli  $u_1 = u_2 = 0$ ):

$$\begin{cases} x_1 = \rho \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \omega t + \phi_0 \\ x_4 = \omega \end{cases}$$

Notiamo inoltre che  $x_1$  è assunta strettamente positiva, in quanto avendo essa una condizione iniziale  $x_1(0) = \rho$  positiva essa non può mai annullarsi, in quanto sia da un lato prettamente matematico questa condizione porterebbe ad una perdita di significato delle equazioni, sia fisicamente parlando, ciò vorrebbe dire che il satellite ha avuto una collisione con la terra (che è proprio una delle condizioni che vogliamo assolutamente evitare primariamente).

Un'altra relazione parametrica la otteniamo considerando che a ingressi nulli la precedente evoluzione di stato risulta di equilibrio per il sistema, se esso non è stato precedentemente perturbato. Sotto queste ipotesi abbiamo che tre equazioni di stato vengono soddisfatte indipendentemente dal valore

assegnato alle variabili di stato e dalle relazioni tra esse, mentre solamente la seconda necessita di introdurre una imposizione:

$$\rho\omega^2 - \frac{GM}{\rho^2} = 0$$

Questa assunzione ci porta ad affermare che  $\omega = \sqrt{\frac{GM}{\rho^3}}$ .

Per realizzare il modello linearizzato, deriviamo le 4 equazioni di stato e costruiamo lo Jacobiano del sistema, valutandolo nell'orbita di equilibrio prescelta otteniamo la matrice di stato  $F$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\rho\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti al riguardo che a prima vista la dipendenza temporale di una variabile dal tempo dovrebbe introdurre nelle relazioni di stato una dipendenza esplicita da  $t$ , ciononostante in nessuna delle equazioni sovrascritte è presente la variabile  $x_3$  (l'unica che dipende esplicitamente da  $t$ ) in forma diretta, e pertanto sparisce la dipendenza temporale esplicita. Effettuando lo stesso tipo di linearizzazione ci possiamo ricavare anche la matrice  $G$  che mette in relazione stato e ingressi:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

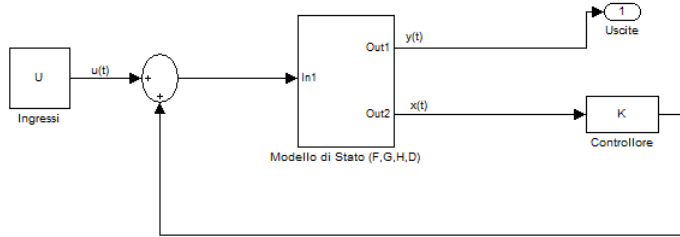
Come uscita del nostro sistema si è soliti considerare lo scostamento angolare del satellite rispetto alla posizione nominale, pochè per motivi di praticità è certamente il più semplice da misurare da Terra. Risulta quindi conveniente osservare direttamente  $x_3$  come uscita e stimare le altre variabili con uno stimatore asintotico, che permetta poi il ricorso ad una retroazione dallo stato stimato. L'obiettivo sarà dunque mantenere (con il controllo) il satellite fermo sulla verticale.

Il modello a tempo continuo che schematizza il nostro sistema pertanto è:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\rho\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ] \quad D = [ 0 \ 0 ]$$

### 2.3 Realizzazione del controllore statico



Il primo passo è studiare l'evoluzione dello stato del sistema. Si nota facilmente che il polinomio caratteristico della matrice di stato  $F$  vale  $\Delta_F(s) = s^2(s^2 + \omega^2)$  e quindi gli autovalori valgono  $\lambda_i = +i\omega, -i\omega, 0, 0$ . Di questi autovalori, possiamo vedere che l'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione unitaria e pertanto, siccome gli altri autovalori sono distinti, la forma di Jordan di  $F$  vale:

$$J = \begin{bmatrix} +i\omega & & & \\ & -i\omega & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

e la conseguente matrice esponenziale ha la seguente forma:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & & & \\ & e^{-i\omega t} & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

I modi relativi all'evoluzione di stato sono quindi  $1, t, \cos\omega t, \sin\omega t$ . Come era lecito aspettarsi, la matrice  $F$  non è asintoticamente stabile, e nemmeno semplicemente, in quanto il modo  $t$  destabilizza il sistema in seguito a variazioni di stato (anche infinitesime). Possiamo quindi valutare se un controllo dello stato possa eventualmente sopperire a tali problematiche; il sistema  $(F, G)$  è raggiungibile, in quanto la matrice di raggiungibilità  $R = [G|FG|F^2G|F^3G]$  ha rango 4. Questa proprietà ci permette quindi di poter allocare gli autovalori dove li riteniamo più opportuni.

Per eseguire un primo controllore statico, facciamo una osservazione molto importante: si nota infatti che il sistema  $(F, g_2)$  è raggiungibile, pertanto possiamo operare il controllo del sistema attraverso soltanto una spinta tangenziale. Grazie a questa osservazione, possiamo progettare un controllore basato unicamente sull'ingresso  $u_2$ ; come in precedenza osservato, possiamo ora allocare gli autovalori della matrice di stato  $F$  dove noi preferiamo, ad esempio una prima soluzione potrebbe essere quella di ottenere il polinomio caratteristico  $\Delta_{F+g_2K}(s) = (s + \omega)^4$ , che garantirebbe la stabilità



cercata. Dopo alcuni passaggi matriciali, operando il passaggio alla forma compagna della matrice di stato e riallocando gli autovalori, si ottiene che la matrice di retroazione  $K$  vale

$$K = \begin{bmatrix} -8m\omega^2 & -\frac{8m\omega}{3} & \frac{m\rho\omega^2}{3} & -4\rho\omega m \end{bmatrix}$$

e la matrice di stato retroazionato

$$F + g_2K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\omega^2}{\rho} & -\frac{14\omega}{3\rho} & \frac{\omega^2}{3} & -3\omega \end{bmatrix}$$

Questo primo controllore ha il vantaggio di poter stabilizzare il sistema tramite un solo ingresso, quindi ha una minore complessità realizzativa.

Realizziamo ora un secondo controllore statico, questa volta sfruttando entrambi gli ingressi del sistema. Dalla matrice di stato  $F$  utilizziamo una matrice di retroazione  $K_2$  che allочи sempre gli autovalori del polinomio minimo in  $-\omega$ , però cercando di variare la forma di Jordan del sistema. Infatti, se si osserva che la forma di Jordan della matrice di stato  $F + g_2K_1$  ha la forma

$$J_{F+g_2K_1} = \begin{bmatrix} -\omega & 1 & & \\ & -\omega & 1 & \\ & & -\omega & 1 \\ & & & -\omega \end{bmatrix}$$

potremmo chiederci se modificandola (e quindi eliminando alcune componenti che “rallentano” la stabilizzazione) si ottengano benefici significativi. A tal scopo utilizziamo una matrice di retroazione  $K_2$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4m\omega^2 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m\rho\omega^2 & -2m\rho\omega \end{bmatrix}$$

in modo tale, la matrice di stato retroazionata  $F + GK_2$  vale

$$F + GK_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & -2\omega \end{bmatrix}$$

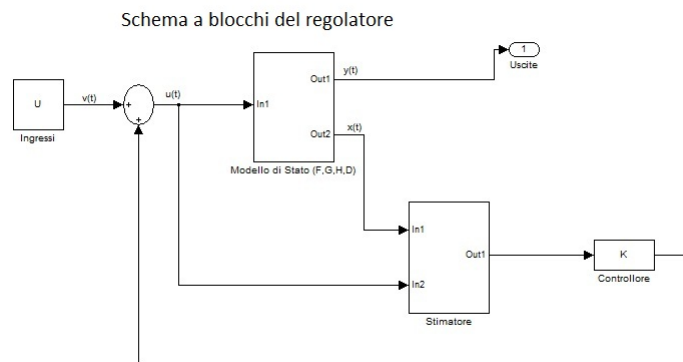
che, come si può facilmente notare per similitudine, ha la forma di Jordan del tipo

$$J_{F+GK_2} = \begin{bmatrix} -\omega & 1 & & \\ & -\omega & & \\ & & -\omega & 1 \\ & & & -\omega \end{bmatrix}$$

Facciamo notare però che questi controllori è possibile implementarli solamente sotto la condizione (stringente, come abbiamo già detto) che il sistema sia osservabile, poichè tramite questa proprietà ci è permesso quindi costruire uno Stimatore in catena chiusa di Luenberger. Infatti, dalla teoria dei sistemi, sappiamo che è possibile costruire uno stimatore asintotico del sistema se e solo se esiste una matrice di retroazione  $L$  tale che la matrice  $F + LH$  sia asintoticamente stabile. Una matrice che renda ciò possibile è per esempio una del tipo

$$L = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{8\omega\rho}{3} & 0 & -4\omega & -5\omega^2 \end{array} \right]$$

In questo caso, ci rendiamo conto che la scelta di considerare l'angolazione  $\theta$  l'uscita del nostro sistema è particolarmente redditizia, dal momento che rende il nostro sistema osservabile.



## 2.4 Simulazioni del controllo

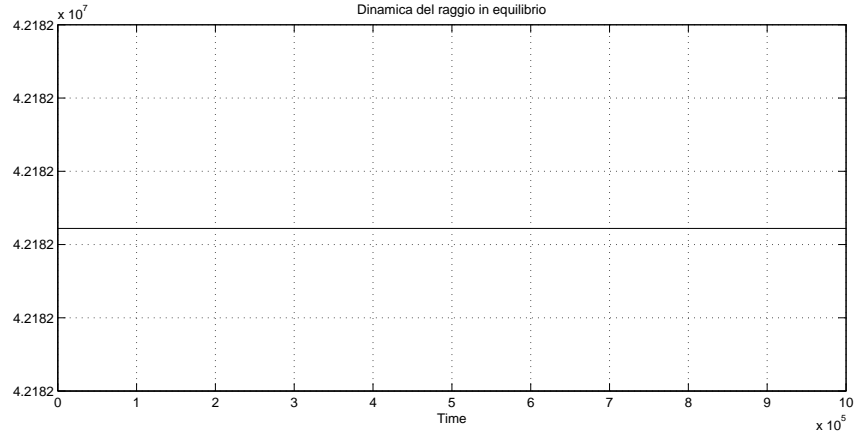
Effettuiamo ora una serie di simulazioni volte a rilevare il comportamento e le prestazioni dei 2 controllori costruiti in precedenza. Tramite Simulink, vediamo come si comporta il nostro sistema in base alle seguenti situazioni:

1. Comportamento del sistema con condizioni iniziali e ingressi nulli, già posto nell'orbita di equilibrio
2. Comportamento del sistema in seguito a particolari condizioni iniziali differenti dall'orbita di equilibrio
3. Comportamento del sistema in seguito all'applicazione di un gradino o di una serie di impulsi agli ingressi

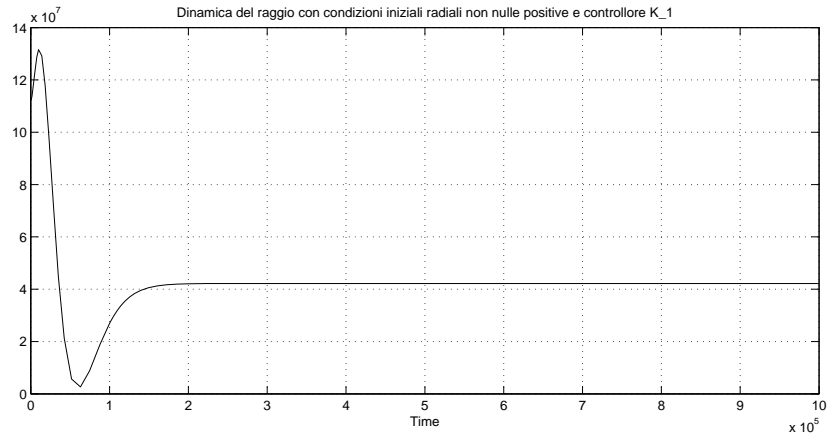
### Dinamica del raggio

Inizialmente valutiamo come si comportano i sistemi quando si trovano già nell'orbita di equilibrio. Sia il controllore  $K_1$  che  $K_2$  si mantengono in perfetto equilibrio, come ci si poteva aspettare, pertanto i nostri calcoli

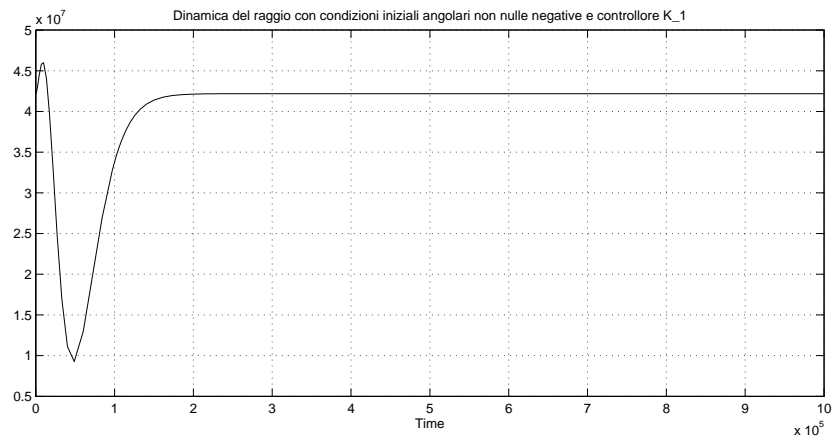
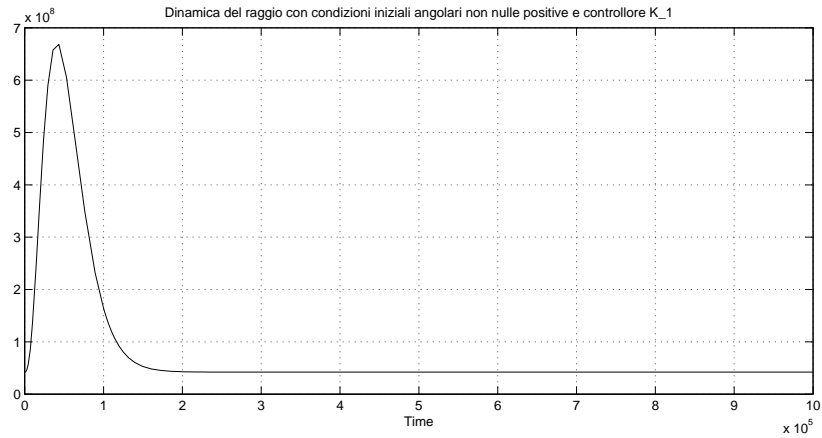
preliminari hanno trovato riscontro nella simulazione, per ingressi nulli (e nessun disturbo) il satellite si mantiene stabile sulla sua orbita circolare geostazionaria.



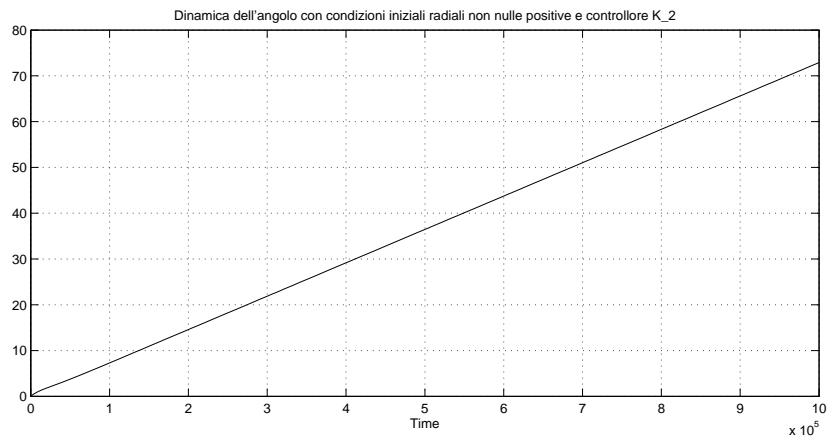
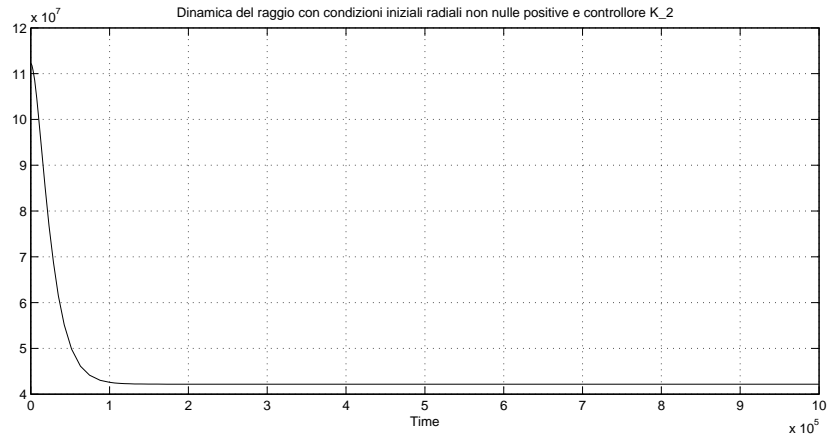
Valutiamo ora la stabilizzazione in seguito a differenti condizioni iniziali delle variabili di stato, in particolare varieremo sia simultaneamente che non raggio e angolazione. Il controllore  $K_1$  reagisce ad eventuali posizionamenti fuori rotta effettuando una prima sovraelongazione per poi sistemarsi esponenzialmente dopo un'altra sottoelongazione. In particolare, questa sottoelongazione determina il massimo valore oltre il quale non è possibile posizionarlo, onde evitare possibili collisioni con la Terra, ossia  $7 * 10^7$  metri.



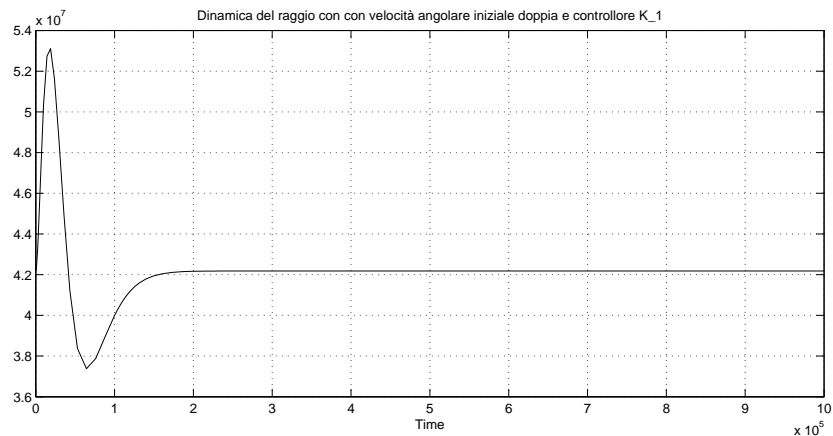
Significativo è inoltre il comportamento dello stesso controllore quando ad essere diverso dal valore nominale è l'angolo: infatti si osserva una fortissima sovraelongazione di assestamento, conseguenza della difficoltà nel variare il raggio da parte della sola forza tangenziale. Questo ci permette di considerare questa condizione iniziale come predominante, in quanto gli effetti della dinamica di assestamento in questo caso mascherano quasi completamente quelli di un raggio errato. In particolare, si fa notare come una posizione errata di  $-5\text{rad}$  comprometta nuovamente la stabilità del sistema.



Per quanto riguarda  $K_2$  invece, facciamo notare che la possibilità di agire con la sola forza radiale renda indipendenti le condizioni di non equilibrio e pertanto si analizzano i soli scostamenti radiali (dai grafici sottostanti si vede chiaramente che una condizione iniziale diversa dal raggio di equilibrio non alteri minimamente l'andamento dell'angolazione); per quanto ne riguarda si nota un comportamento esponenziale molto rapido nell'assestamento, sicuramente migliore del controllore precedente



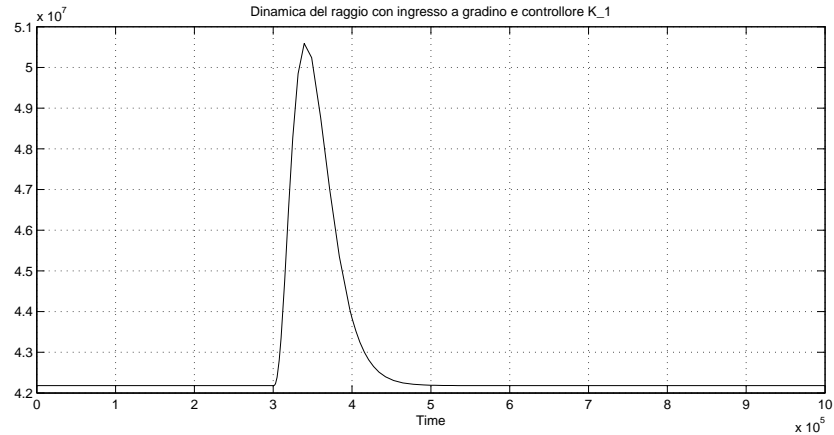
Altre condizioni di assestamento iniziale possono derivare per esempio da una velocità angolare iniziale doppia di quella prevista (cioè  $\omega$ ); come possiamo notare  $K_1$  reagisce eseguendo una forte variazione del raggio prima di ristabilirsi correttamente sulla propria orbita con la velocità prevista



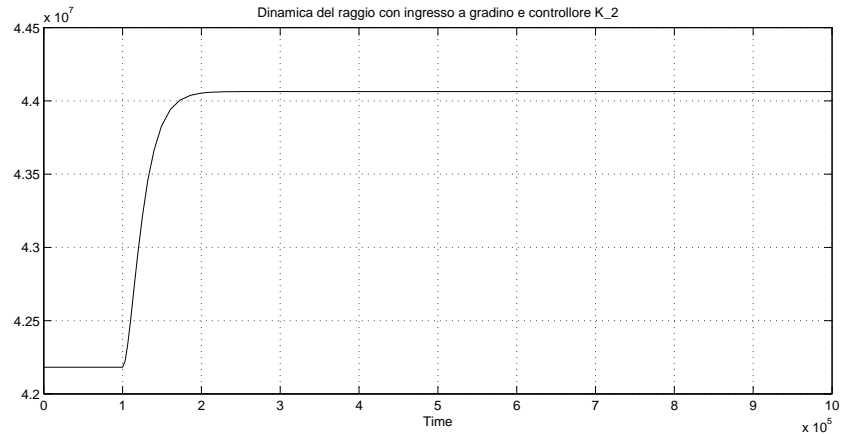
Eseguendo lo stesso tipo di simulazione sul controllore  $K_2$  si nota invece che la velocità viene ristabilita esattamente senza modificare l'orbita di

equilibrio.

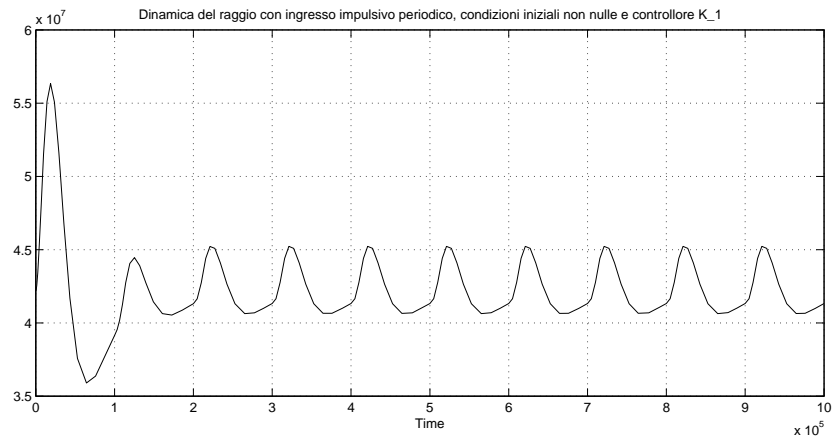
Inseriamo ora agli ingressi un segnale a gradino di ampiezza 1000 e valutiamo come la posizione radiale si comporta:



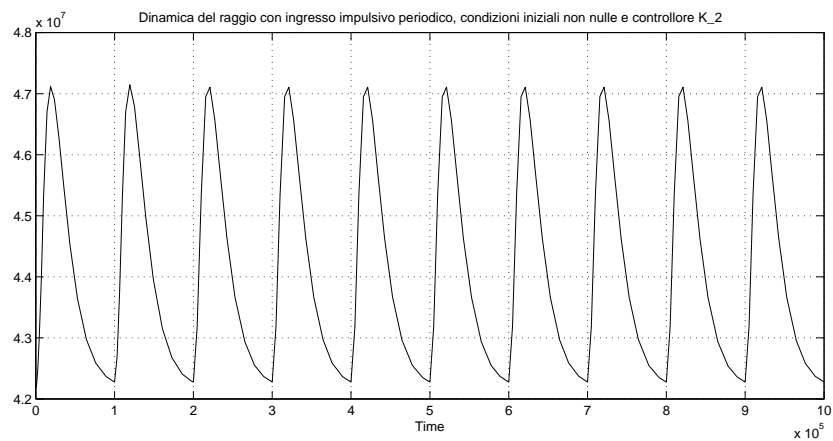
nel primo caso, anche qui si assiste ad una forte sovraelongazione radiale di quasi  $10^7$  metri, ma successivamente ad una rapida stabilizzazione sulla rotta predefinita (si ricorda infatti che il gradino in questo caso agisce solo sulla forza tangenziale, visto che per scelta abbiamo considerato il solo ingresso  $u_2$  in questo sistema). Diverso il caso del secondo sistema: infatti considerando un gradino sull'ingresso  $u_1$  vediamo un rapidissimo assestamento verso un altro valore, generalmente molto maggiore dell'orbita iniziale.



Generiamo ora in ingresso una serie di impulsi (sempre con condizioni iniziali non nulle, per confrontare l'ordine di grandezza dei 2 disturbi) e valutiamone il comportamento: in entrambi i casi si assiste ad un andamento esponenziale, generalmente sullo stesso ordine di tempo (sempre sui diecimila secondi).

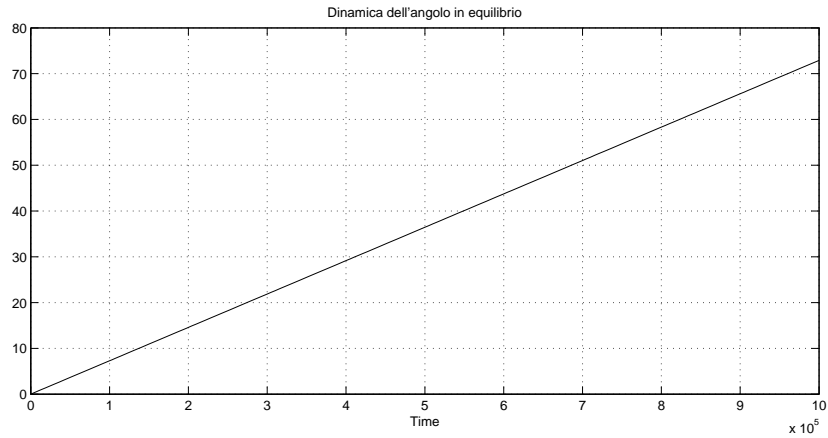


Il secondo controllore, come più volte rimarcato, ha il pregio di non avere la sovraelongazione iniziale, che è quella che poi all'atto pratico pregiudica il funzionamento del primo controllore oltre un certo valore iniziale delle variabili di stato

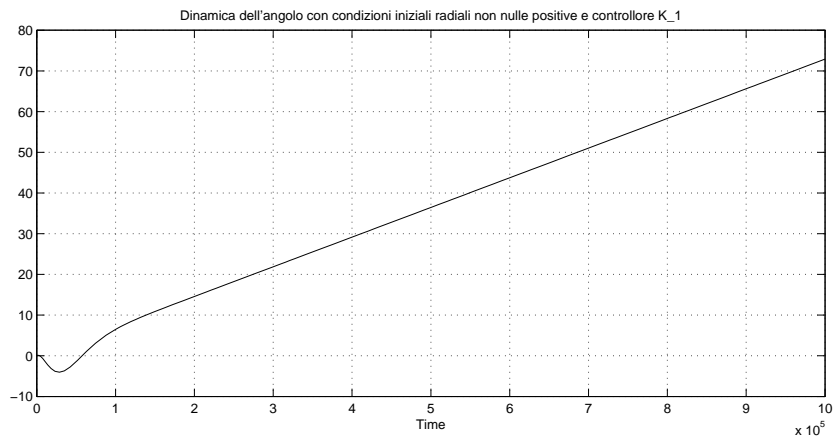


### Dinamica dell'angolo

Analizziamo ora come si comportano i 2 sistemi in questione quando è l'angolo a doversi stabilizzare. Come vedremo, questo aspetto avrà prestazioni migliori di quelle forniteci dal raggio. Cominciamo al solito ponendo il satellite nell'orbita di equilibrio e valutiamo come si comportano i 2 sistemi: come nel caso precedente, anche qui entrambi i controllori mantengono la propria perfetta orbita di equilibrio senza nessun tipo di variazione che possa essere dovuta ad esempio da approssimazioni di calcolo. Come possiamo notare l'andamento è perfettamente lineare, come ci aspettavamo

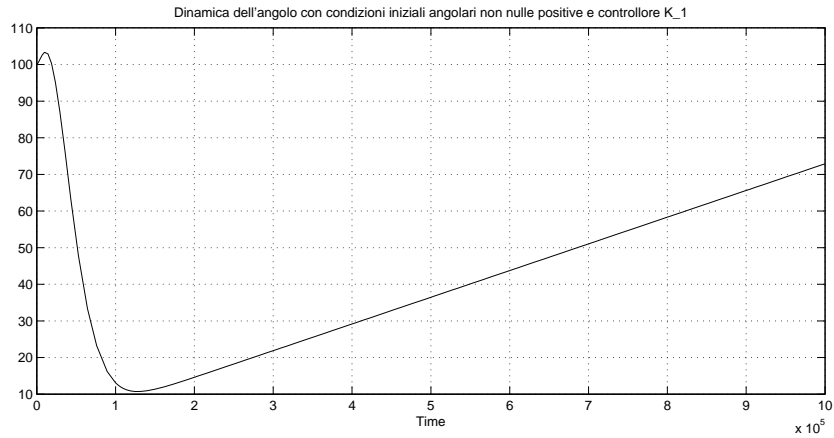


Applichiamo adesso delle condizioni iniziali in modo che il satellite si trovi fuori dall'orbita. Come già rimarcato in precedenza, con il controllore  $K_1$  in presenza di una non nominalità del valore del raggio dell'orbita anche l'angolo ne risente, infatti come possiamo notare c'è bisogno di un piccolo tempo di assestamento (ovviamente la variazione dell'angolo è minima se la si confronta con la sovralongazione radiale)

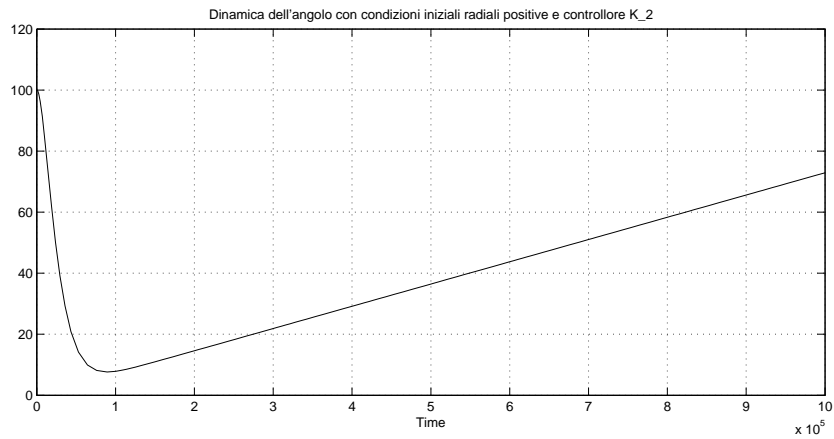


Applichiamo ora uno sfasamento iniziale e vediamo che entrambi i sistemi si portano abbastanza velocemente con andamento esponenziale verso la linearità dell'angolo

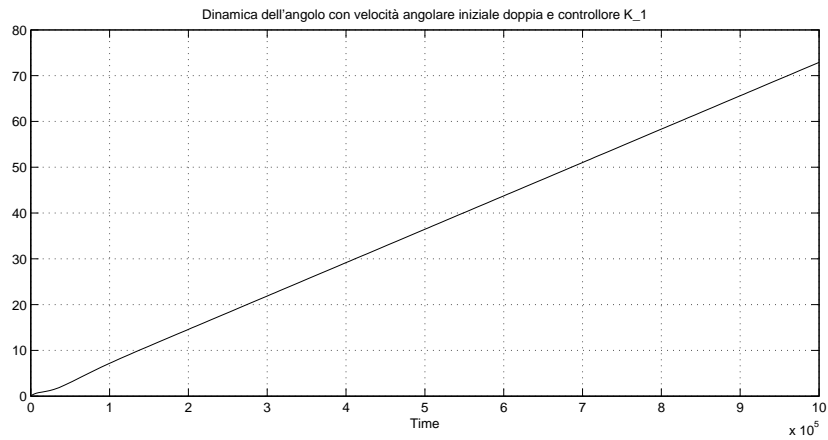




praticamente non ci sono grandi differenze tra i controllori, se non che il secondo non ha bisogno di crescere inizialmente prima di stabilizzarsi

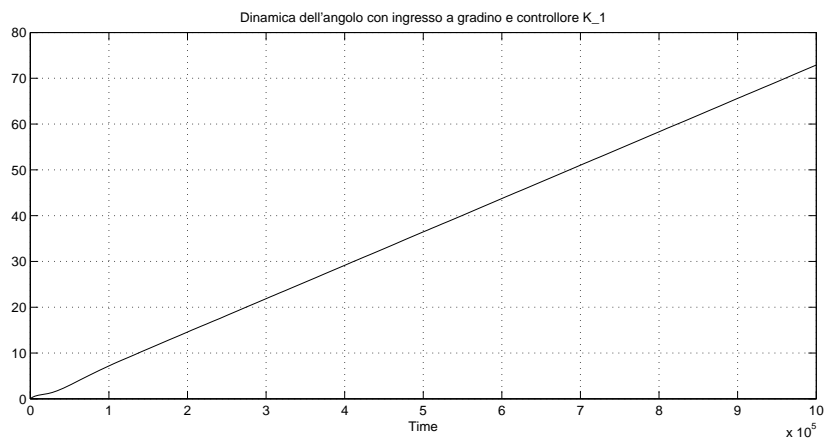


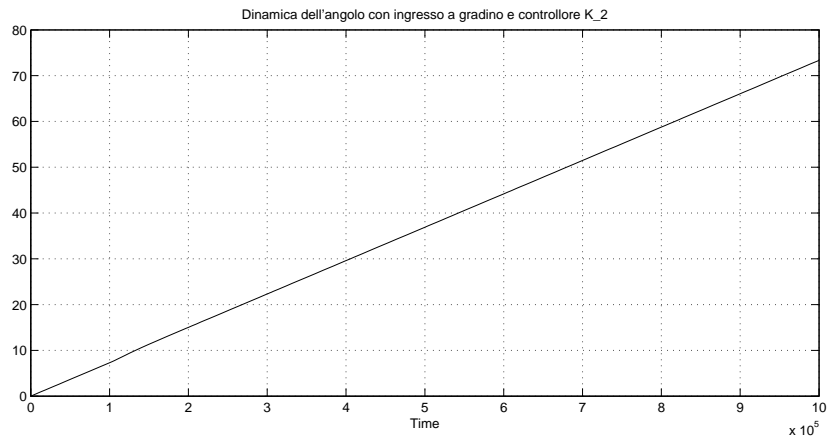
Una ultima curiosa situazione è come precedentemente visto per il raggio la dinamica del raggio quando il satellite si trova inizialmente a velocità doppia di quella prevista: anche qui come visto prima  $K_1$  esegue una elongazione iniziale per rallentare, per poi stabilizzarsi ottimamente con andamento lineare



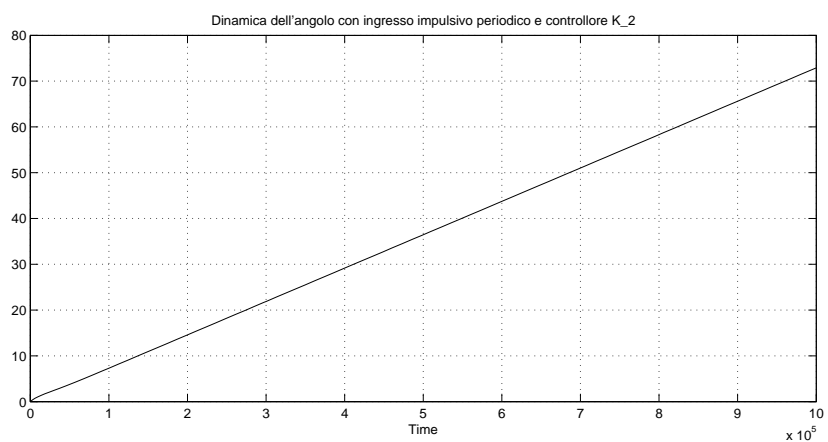
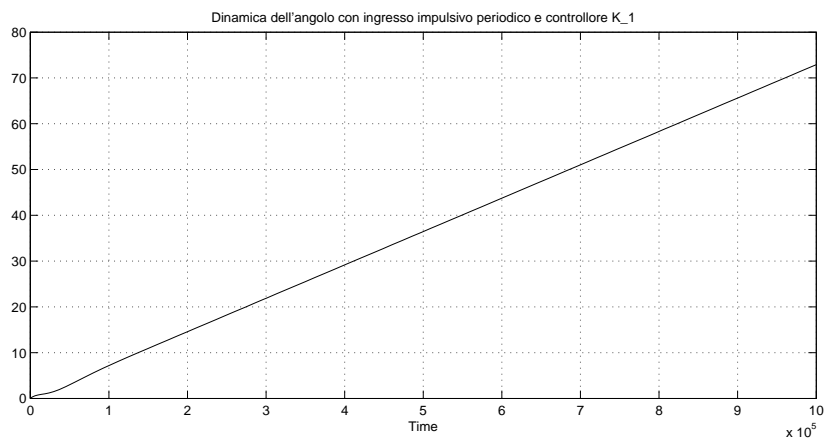
Diverso il caso di  $K_2$  che come per il raggio non esegue nessuna variazione, visto che potendo contare su una forza sia radiale che tangenziale riesce a rallentarsi direttamente sull'orbita di equilibrio.

Applichiamo ora un ingresso a gradino di ampiezza 1000 a  $u_2$  e valutiamone l'uscita: come si nota, gli effetti sono pressochè nulli, il sistema non ne risente e tende a perseverare sulla sua orbita di equilibrio, sia per il primo che per il secondo controllore. Bisogna alzare ulteriormente l'ampiezza (almeno a 10000) per vedere delle leggere modifiche alla linearità





Stesso discorso vale per un ingresso a impulsi periodici di ampiezza 1000 e frequenza  $10^5 Hz$ , come già detto, il sistema tende a rimanere nella propria orbita di equilibrio



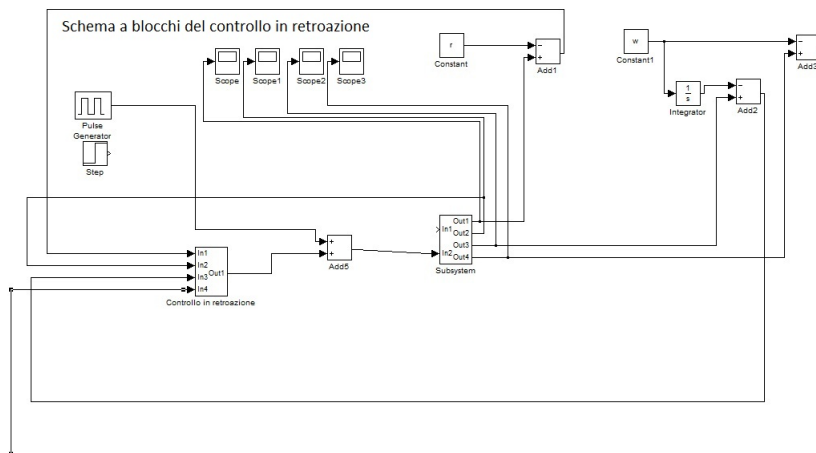
Vogliamo comunque rimarcare una piccola ma importante caratteristica di queste simulazioni: esse sono effettuate tutte sul sistema linearizzato, pertanto sebbene esse offrano delle prestazioni notevoli, anche per grandi

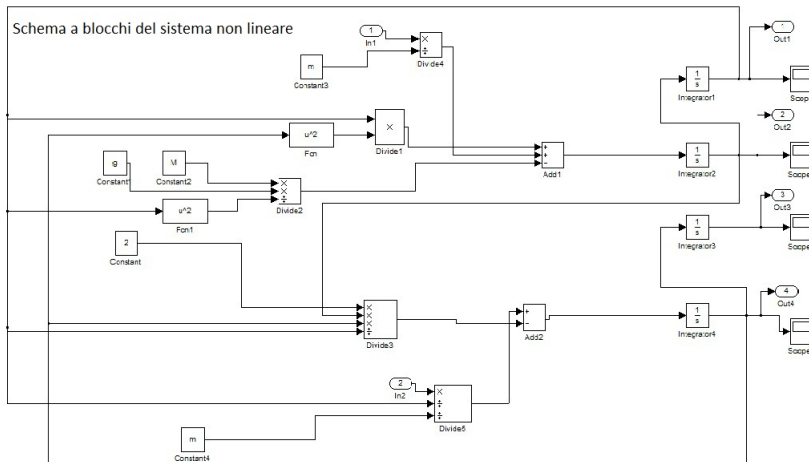
variazioni delle condizioni iniziali o degli ingressi, è bene ricordare che nel caso (fisicamente corretto) del sistema originale non lineare i risultati potrebbero peggiorare (lo vedremo più avanti dove lo simuleremo direttamente), in alcuni casi notevolmente fino anche a portare all'instabilità. Bisogna considerare quindi questo funzionamento solo in un intorno locale delle condizioni di equilibrio, mentre in condizioni diverse il risultato potrebbe essere meno entusiasmante. Inoltre, queste simulazioni hanno avuto la possibilità di osservare direttamente il comportamento temporale delle varie variabili di stato, con una semplice implementazione tecnica; nella realtà solamente la variabile  $x_3$  sarà misurabile direttamente, in quanto coincidente con l'uscita del sistema, mentre le altre variabili di stato dovranno essere stimate asintoticamente tramite il già citato Stimatore in catena chiusa di Luenberger, il quale rende molto più sofisticato e complesso il controllo del sistema.

## 2.5 Applicazione del controllore al sistema fisico non lineare

Ora che abbiamo costruito un controllore sufficientemente affidabile, è interessante studiare quale sia il suo comportamento reale, ossia utilizzandolo direttamente sul sistema fisico originale piuttosto che su quello linearizzato attorno all'orbita di equilibrio. Pertanto cercheremo di vedere sotto quali condizioni esso funzioni ancora ottimamente e sotto quali il nostro satellite diverga fuggendo dall'orbita prevista (come già affermato, ci aspettiamo che le prestazioni del controllore siano notevolmente attenuate).

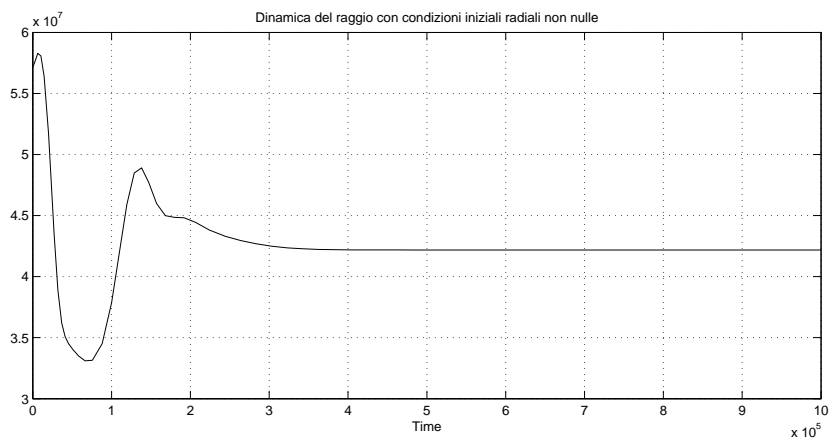
Assemblando quindi il relativo schema a blocchi su Simulink (riportato nella figura sottostante) simuliamo varie condizioni di funzionamento al fine di trovare i limiti di ottimale efficienza del nostro controllore.

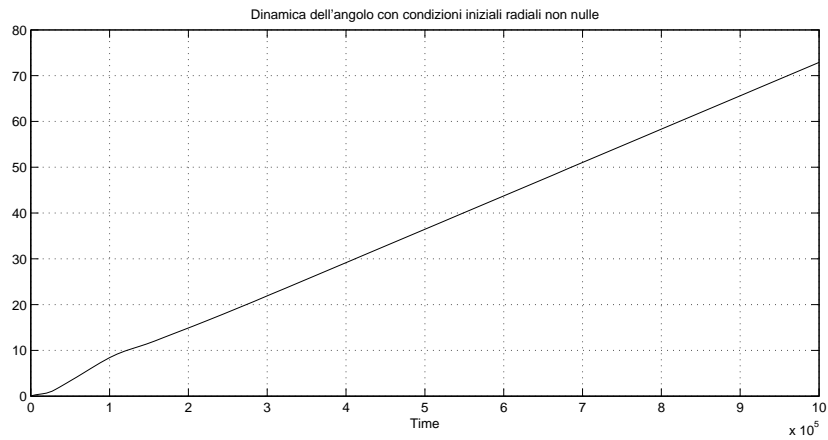




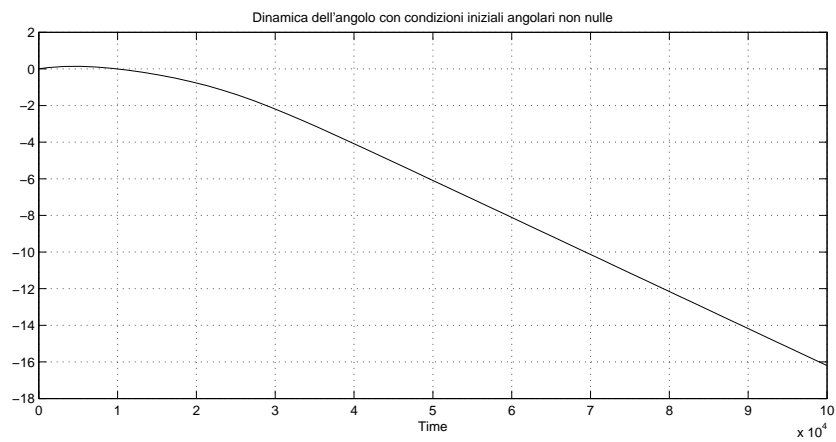
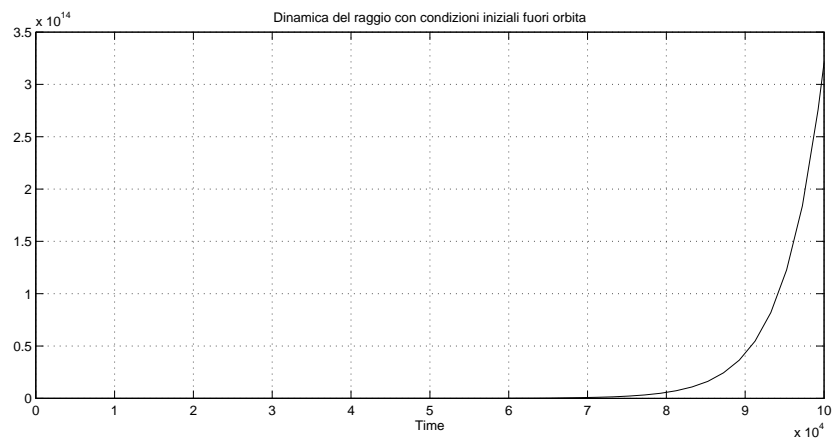
Innanzitutto poniamo il satellite in condizioni iniziali leggermente fuori orbita e vediamo fin dove esso si stabilizza correttamente:

Impostando una variazione del raggio di  $1.5 \cdot 10^7 m$  si vede come il sistema si comporti già diversamente da quello linearizzato, infatti si assiste ad una sovralongazione aggiuntiva e ad un rallentamento del raggiungimento dell'orbita corretta. Meno disturbata invece la dinamica di stabilizzazione dell'angolo, dove la linearità viene raggiunta quasi istantaneamente.



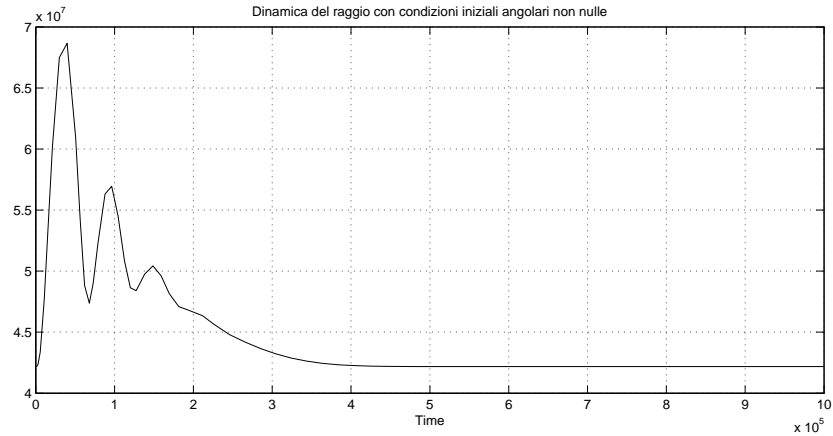


Se impostiamo una condizione iniziale eccessiva (valori che nel sistema linearizzato non avrebbero comunque dato problemi di nessun tipo) vediamo come il satellite sfugga al controllo e diverga all'infinito, anche piuttosto velocemente (eseguimo una simulazione più corta, abbassando di un ordine di grandezza la durata dell'osservazione)

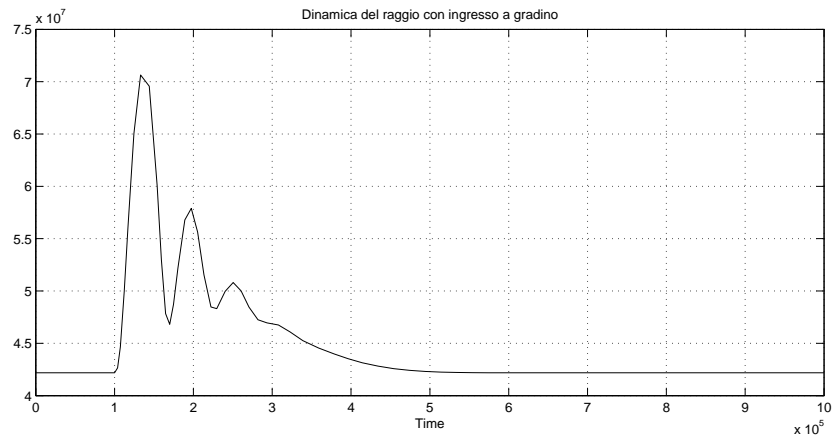


Anche nel caso di una variazione angolare iniziale, possiamo vedere come

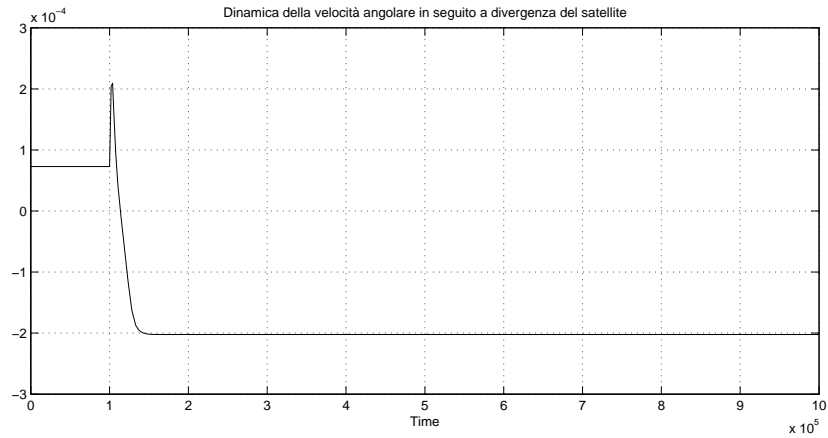
sia il modo di assestarsi che la variazione tollerata peggiorino; infatti possiamo notare che il raggio esegue più oscillazioni (anche elevate) prima di stabilizzarsi, ed inoltre già per piccole variazioni (4 radianti per le positive, 0.5 per le negative) si ha una decisa divergenza (si omettono i grafici dell'angolo sia perchè essi sono meno significativi sia perchè in caso di fuga del satellite dall'orbita la sua variazione rimane lineare, anche se cambia il segno della tangente alla funzione)



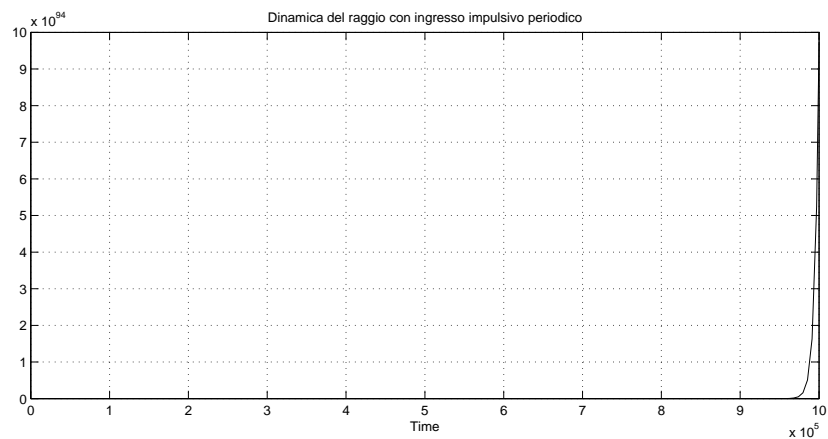
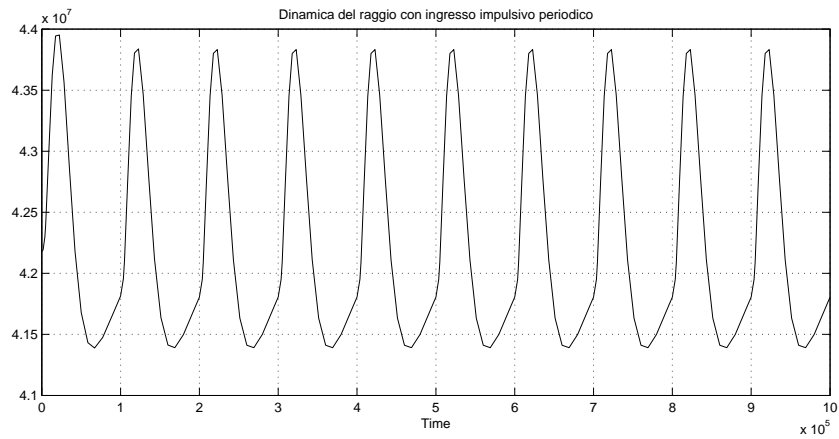
Studiamo ora le risposte a gradino: vediamo che oltre una ampiezza di 3000 l'ingresso provoca una fuga del satellite dall'orbita, mentre con valori minori anche stavolta si osservano (come in precedenza) delle elongazioni aggiuntive rispetto allo studio linearizzato.



Una caratteristica interessante da notare è che la velocità angolare di fuga del satellite si assesti sempre su una velocità costante fissa  $\omega_{fuga} = -2 * 10^{-4} \frac{rad}{sec}$



Sotto un ingresso a impulsi invece il sistema si comporta praticamente identicamente a quello lineare per i valori accettabili di ampiezza (circa  $10^4$ ), mentre vi è la solita divergenza rapida per valori maggiori



In conclusione, abbiamo visto come il nostro sistema si comporti tutto sommato bene anche nel sistema non lineare originale; se però prima il nostro unico problema era evitare ingressi troppo elevati per non far collid-



ere il satellite con la Terra, ora si è aggiunto il problema della fuga di esso dall'orbita dell'equilibrio. Questo evidenzia come le proprietà di stabilità del nostro sistema siano solamente locali e non globali, ma tuttavia più che buone. Si rammenta inoltre come vi sia un complessivo peggioramento delle prestazioni, minore tolleranza a ingressi o condizioni iniziali non di equilibrio e comparsa di elongazioni aggiuntive nella dinamica della stabilizzazione.

### 3 Controllo a massa variabile tramite il modello di stato

Estendiamo ora la nostra analisi del controllo ad un caso generalizzato, che tenga in considerazione una non idealità che possa apparire durante il movimento del nostro satellite. Consideriamo il caso che la massa  $m$  di esso possa variare durante il tempo, sia cioè considerabile come una massa tempo-variante  $m(t)$ . Modifichiamo dunque il nostro modello di stato come conseguenza dell'introduzione di una nuova equazione differenziale nel nostro sistema e valutiamo se il nostro controllore  $K_1$  costruito in precedenza possa funzionare bene anche a seguito di eventuali disturbi non controllati.

Per ottenere una realizzazione fisica di questi disturbi incontrollati, consideriamoli come un ingresso aggiuntivo che faccia variare la nostra massa. Aggiungiamo quindi un nuovo ingresso  $u_3$  di disturbo tale che

$$u_3 = \dot{m}(t)$$

in questo modo, possiamo aggiungere una quinta variabile di stato  $x_5 = m$  (con  $m$  parametro di equilibrio prefissato nominale, in questo caso utilizzeremo il valore usato in precedenza di  $10^4 kg$ ), ed ottenere infine un sistema di equazioni differenziali tale che:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_4^2 - \frac{GM}{x_1^2} + \frac{u_1}{x_5} - \frac{u_3 x_2}{x_5} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{x_5 x_1} - \frac{u_3 x_4}{x_5} \\ \dot{x}_5 &= u_3 \end{cases}$$

Se ora linearizziamo nuovamente il sistema attorno ad una orbita di equilibrio di parametri fissati (utilizziamo gli stessi valori utilizzati precedentemente, assumendo come valore nominale della massa quella solita, ossia  $m_0 = 10^4 kg$ ) otteniamo il seguente modello di stato:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2\omega}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\rho} & -\frac{\omega}{m} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ]$$

Si potrebbe ora pensare di poter retroazionare completamente il sistema, dato che come si può notare facilmente la matrice di raggiungibilità ha rango 5, e quindi si ha la raggiungibilità, ma scegliamo di riutilizzare nuovamente il controllo  $K_1$  progettato precedentemente per vari motivi:

- L'ingresso  $u_3$  è in linea di principio un ingresso sconosciuto dovuto ad un disturbo variabile nel tempo ed indesiderato, pertanto non ne possiamo modificare la dinamica
- Vogliamo rilevare quale sia la stabilità del controllore anche se disturbata da questo tipo di variazioni di massa
- Vogliamo rilevare inoltre quale sia la rilevanza del valore della massa in questo sistema, se la sua variazione comporti una variazione significativa o irrilevante del comportamento del modello

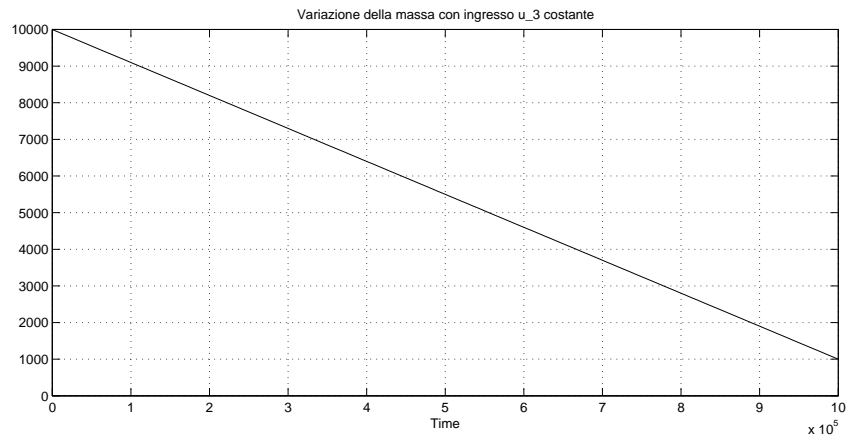
Il controllore rimane quindi  $K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8m\omega & -\frac{8m\omega}{3} & \frac{m\rho\omega^2}{3} & -4\omega\rho m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e

la matrice di stato retroazionata  $F+GK_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{8\omega^2}{\rho} & -\frac{14\omega}{3\rho} & \frac{\omega^2}{3} & -4\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

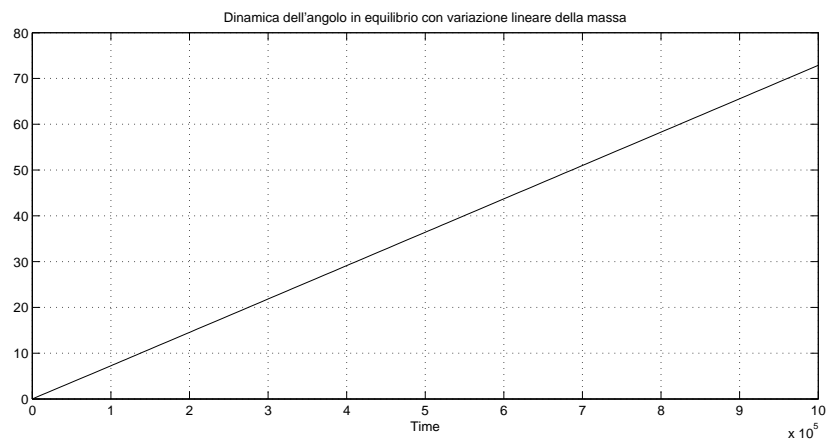
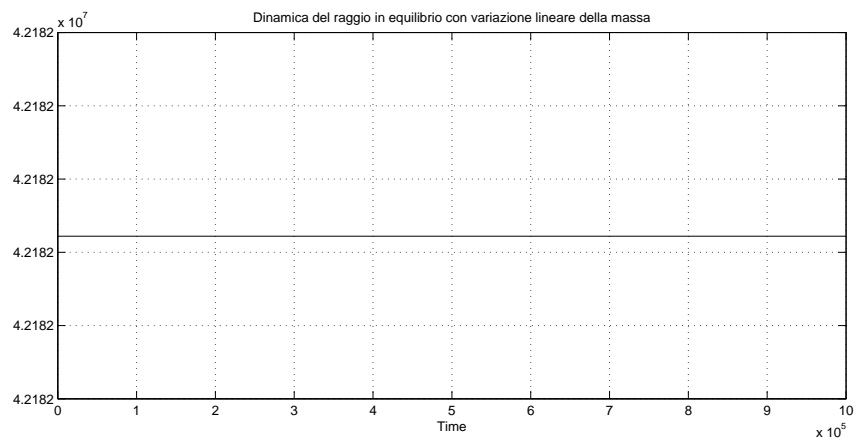
Effettuiamo ora la solita serie di simulazioni del sistema (rispettivamente in condizioni di equilibrio, con condizioni iniziali non nulle, con un ingresso a gradino e con una serie di impulsi), variando però l'ingresso  $u_3$  facendo in modo che la massa  $m(t)$  possa variare nel tempo linearmente, sinusoidalmente oppure parabolicamente (condizioni fisiche difficilmente realizzabili, ma di interesse ingegneristico per l'analisi del controllo progettato) inserendo rispettivamente in ingresso un parametro costante, una rampa lineare ed un seno.

## Variazione della massa lineare

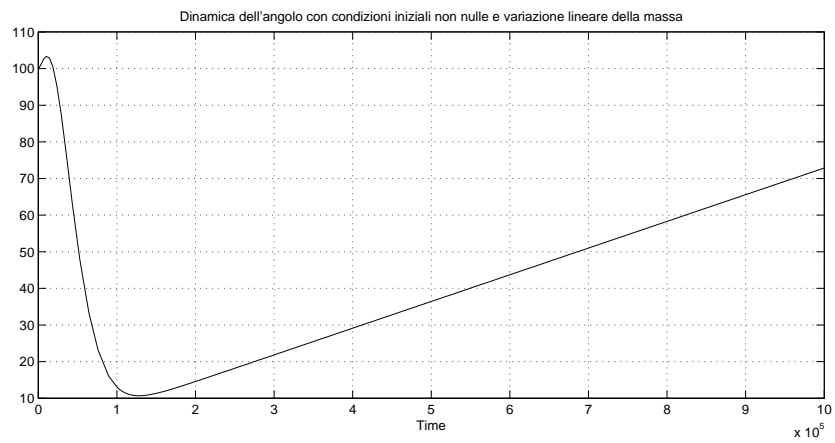
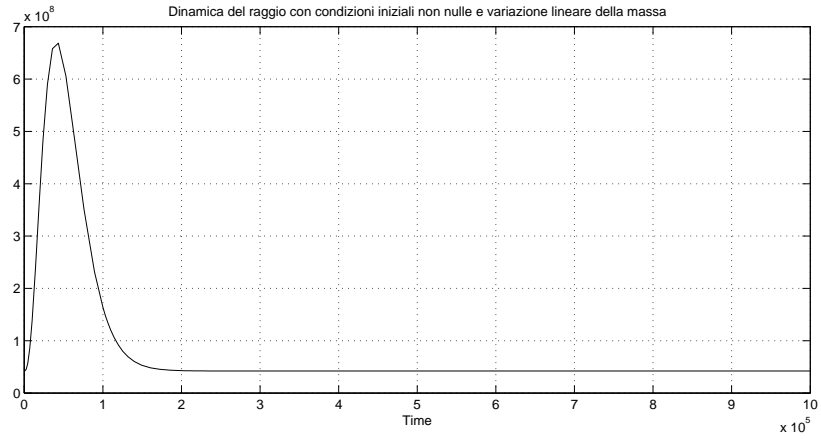
Facciamo variare linearmente la massa dal valore nominale ad un valore di 1000 Kg in  $10^6$  secondi:



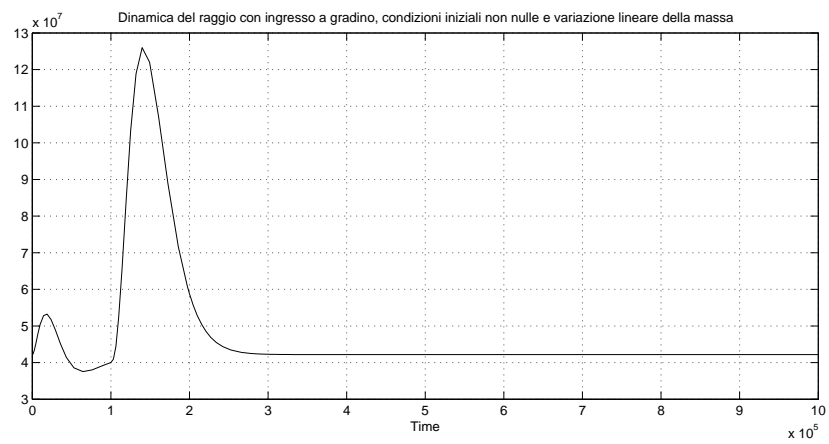
## Condizioni iniziali di equilibrio

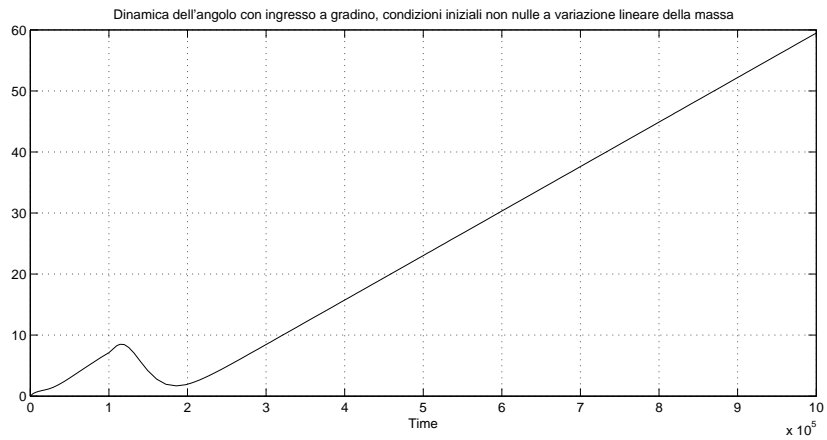


### Condizioni iniziali con variazioni fuori orbita

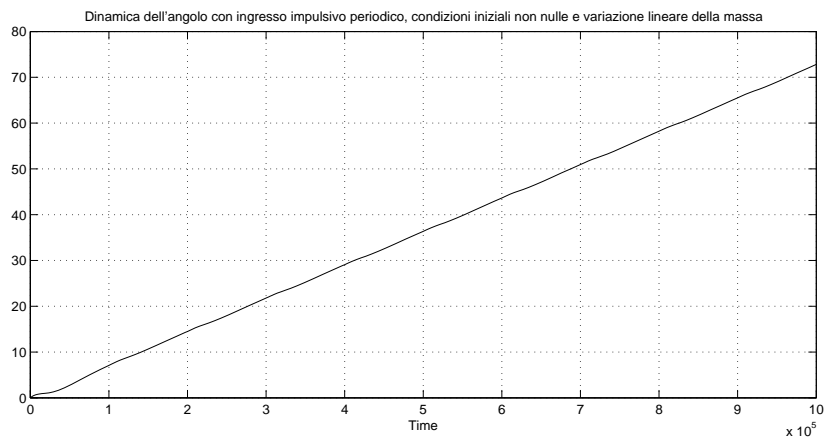
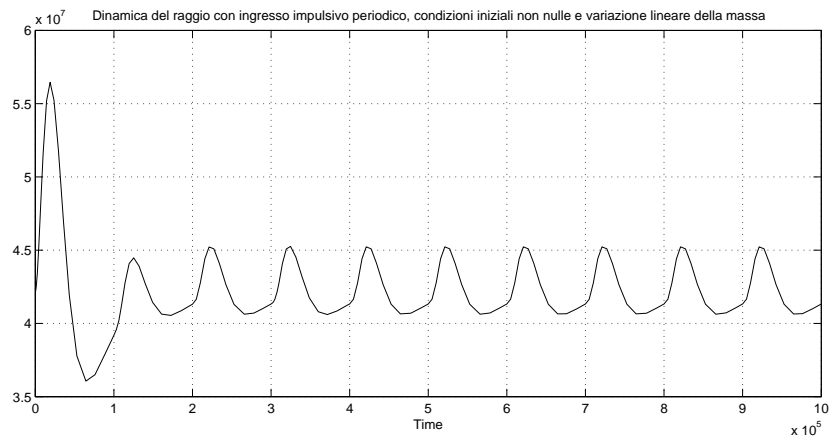


### Ingresso a gradino di ampiezza 10000 con condizioni iniziali non nulle





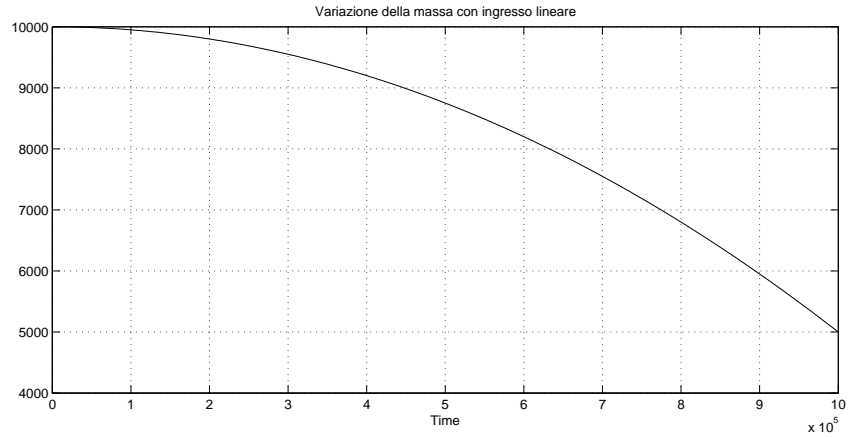
Ingresso a sequenza di impulsi di ampiezza 1000 e frequenza  $10^5 Hz$  con condizioni iniziali non nulle



Come possiamo notare facilmente, i risultati sono praticamente identici a quelli ottenuti precedentemente nel caso della massa costante, possiamo quindi affermare che variazioni lineari (anche repentine, in questo caso il satellite perde il 90% del proprio carico) non influiscono con rilevanza nella

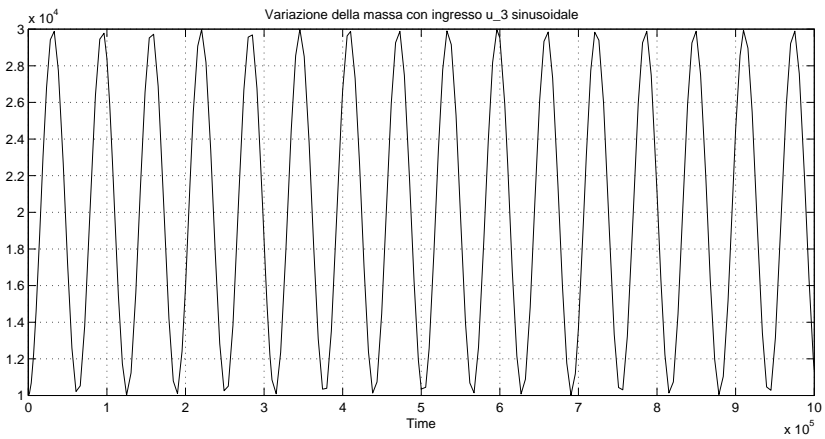
dinamica del satellite

Per quanto riguarda una variazione parabolica, se si fa variare la massa secondo un andamento come graficato sotto si nota che nemmeno in questo caso vi sono modifiche rilevanti agli andamenti delle variabili di stato (se ne omettono pertanto i grafici poichè sono sostanzialmente identici a quelli riportati sopra)

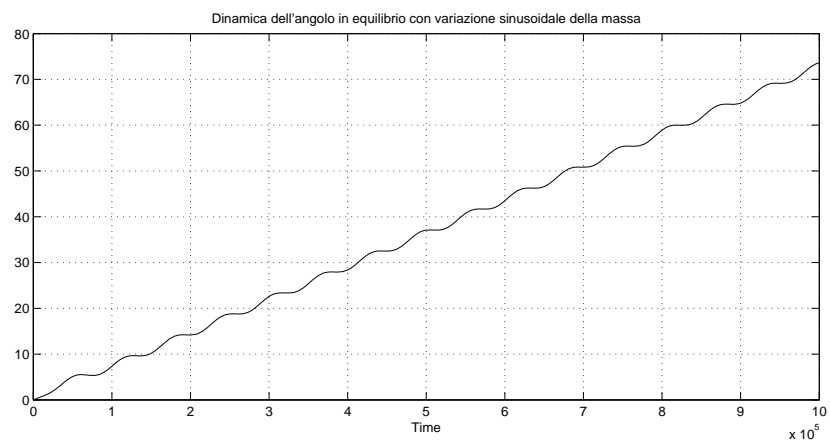
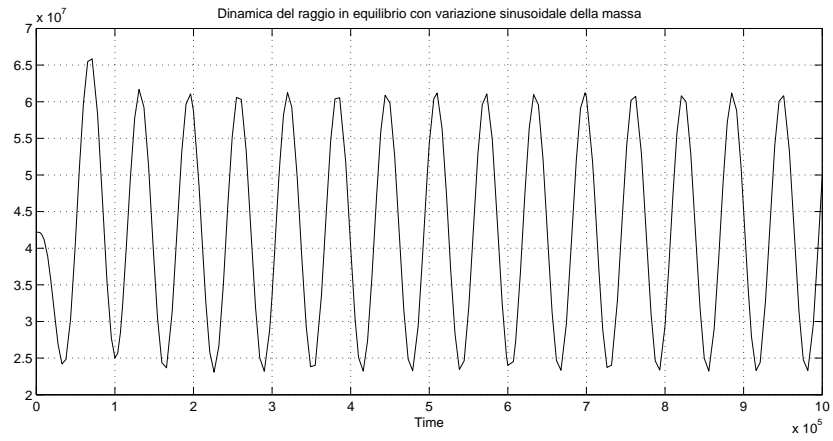


### Variazione della massa sinusoidale

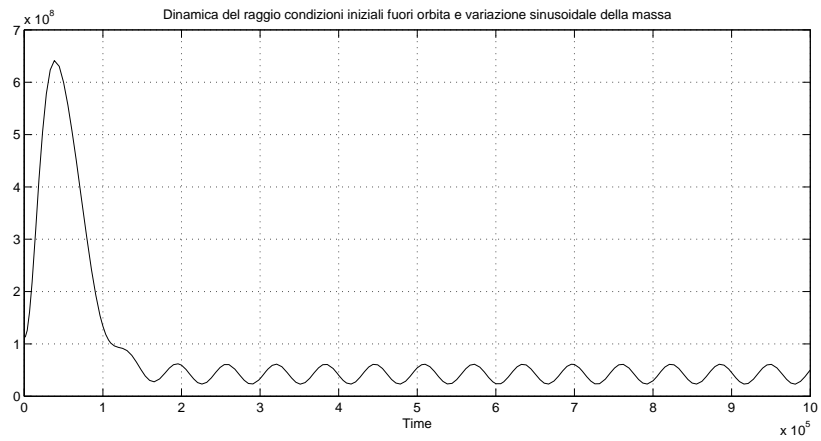
Inseriamo in ingresso un segnale sinusoidale del tipo  $u_3 = \sin \frac{t}{100000}$  (graficato sotto) e vediamo come si comporta il nostro sistema:

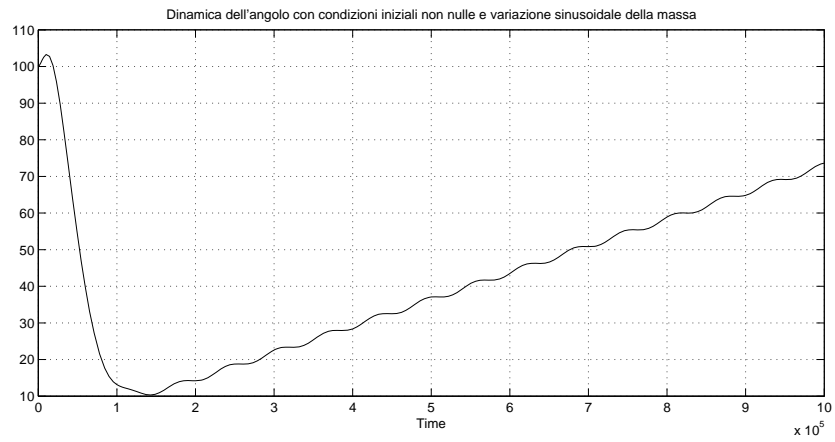


### Condizioni iniziali di equilibrio

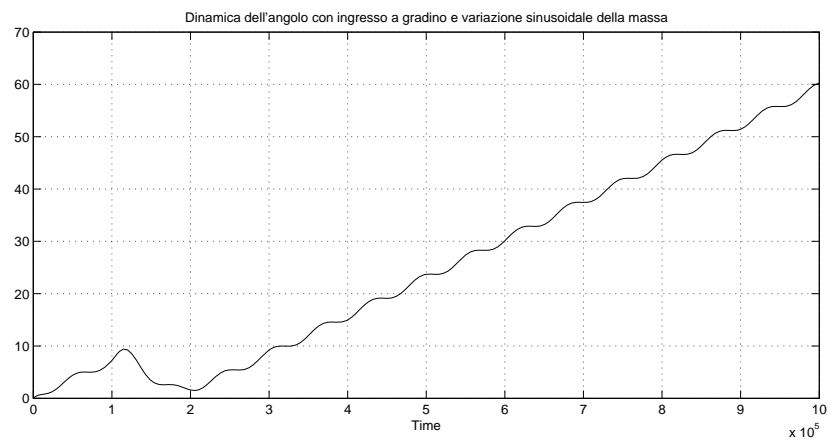
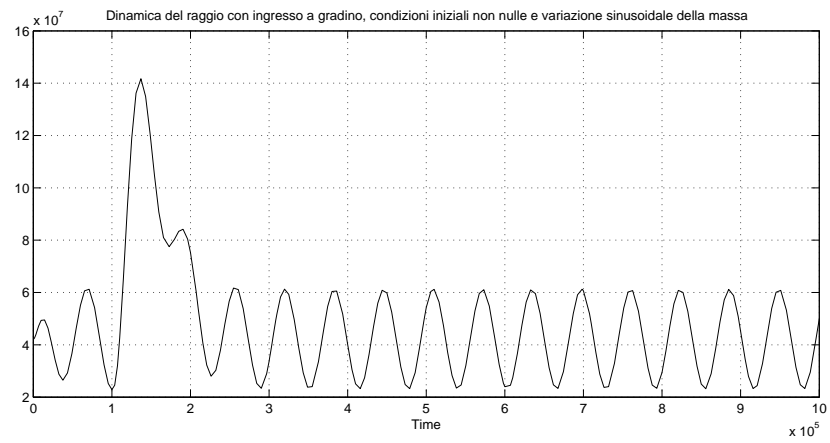


### Condizioni iniziali con variazioni fuori orbita



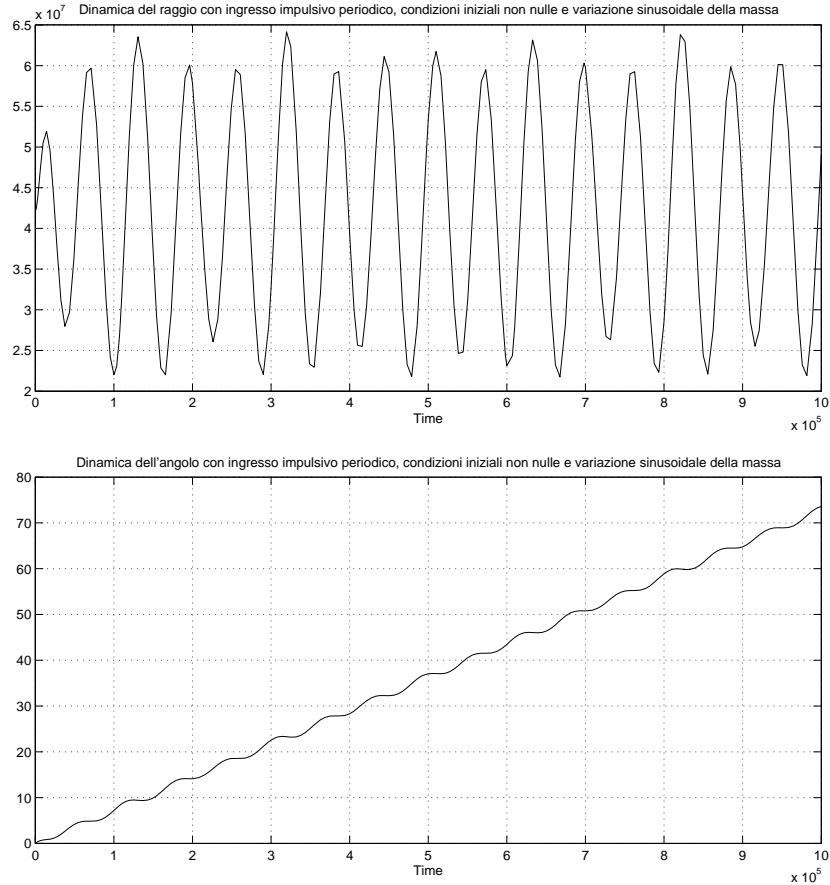


Ingresso a gradino di ampiezza 10000 e condizioni iniziali non nulle



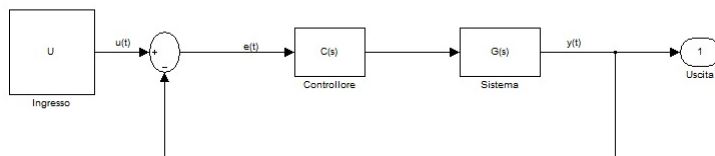


Ingresso a sequenza di impulsi di ampiezza 1000 e frequenza  $10^5 Hz$  con condizioni iniziali non nulle



E' interessante notare come l'andamento medio di raggio e angolo segua praticamente quello degli stessi nei casi di variazione lineare e parabolica, però senza una definitiva stabilizzazione a causa di una variazione sinusoidale continua. Che il sistema potesse non essere stabile asintoticamente era chiaro dal fatto che il sistema retroazionato ha un polinomio caratteristico  $\Delta_{(F+GK_1)}(s) = s(s+\omega)^4$  e quindi un autovalore in zero, ma è interessante notare come il comportamento globale del sistema sia improntato verso l'andamento a massa costante, sebbene il raggio vari sinusoidalmente con picchi del 50%.

## 4 Controllo tramite retroazione a catena chiusa



### 4.1 Controllo del raggio

Effettuiamo ora un ulteriore controllo del sistema, questa volta mediante un controllo in retroazione a catena chiusa, progettando un controllore  $C(s)$  da applicare prima della funzione di trasferimento  $A(s)$  e rimandando quindi in ingresso l'uscita del nostro sistema, ottenendo una funzione di retroazione  $W(s) = \frac{C(s)A(s)}{1+C(s)A(s)}$ . Eventuali paragoni e considerazioni su di essa verranno eseguiti dopo le simulazioni del sistema in risposta, come usuale ai soliti segnali di ingresso a gradino o a serie di impulsi. Facciamo notare che per completezza di calcolo eseguiremo un controllo sia sulla relazione ingresso-uscita tra forza tangenziale e il raggio, sia quella tra la stessa forza e l'angolo; come vedremo però solamente il controllore  $A_2(s)$  sarà utilizzabile nella pratica, in quanto il sistema con uscita il raggio non è osservabile e quindi non è completamente stabilizzabile. Otteniamo come prima cosa la funzione di trasferimento ad anello aperto  $A(s)$  che determina il rapporto tra le uscite  $R(s)$  e  $\theta(s)$  e l'ingresso  $U_2(s)$ , per fare questo modifichiamo la matrice  $H$  in modo che possiamo considerare come uscite del nostro sistema il raggio e l'angolo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalla teoria dei sistemi noi sappiamo che conoscendo già in partenza il modello di stato linearizzato  $\Sigma = (F, G, H, D)$  possiamo facilmente ricavarci le nostre funzioni di trasferimento tramite la formula

$$A(s) = H(sI_n - F)^{-1}G$$

dove  $G$  ricordiamo andrà poi rimpiazzato con il vettore  $g_2$ , in quanto il sistema è raggiungibile e controllabile con il solo ingresso tangenziale. Operando i seguenti calcoli matriciali si perviene alla seguente matrice:

$$A(s) = \begin{bmatrix} \frac{2\omega}{ms(s^2+\omega^2)} \\ \frac{s^2-3\omega^2}{m\omega s^2(s^2+\omega^2)} \end{bmatrix}$$

Cerchiamo ora di costruire un controllore PID che possa garantire alla nostra funzione a catena chiusa  $W(s)$  un certo tipo di qualità. In questo

caso, affinché il termine di paragone possa essere credibile, scegliamo di non costruirlo troppo veloce, pertanto non andremo a cercare dei poli troppo elevati, ma li manterremo sullo stesso ordine di grandezza (in questo caso, la velocità  $\omega$ ) degli esponenziali del controllo statico precedente. Le condizioni che andiamo a ricercare dunque sono:

- Stabilità
- Un errore nullo in risposta ad un gradino di ingresso
- Un discreto margine di fase che garantisca la stabilità anche con una certa non-idealità parametrica (un valore più che buono è di  $\cong 90^\circ$ )

Dopo aver scritto la funzione  $A_1(s)$  in forma di Bode, ossia come

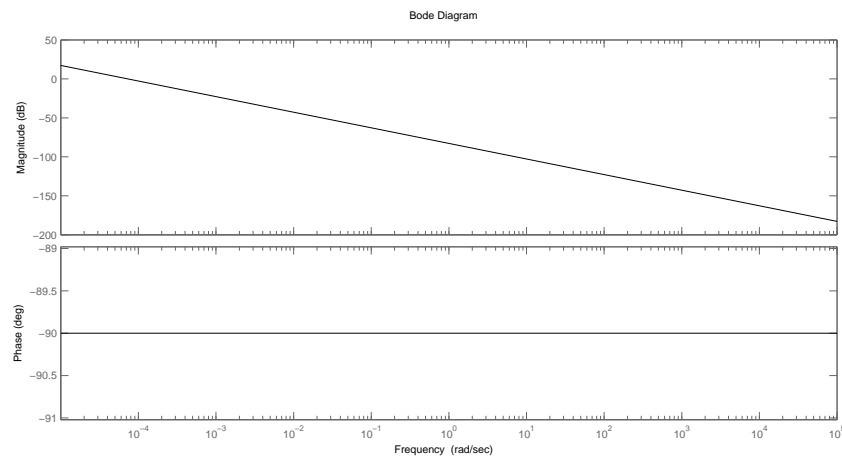
$$A_1(s) = \frac{K}{s(\frac{s^2}{\omega^2} + 1)}$$

con  $K = 1.459 * 10^{-8}$ , valutiamo un controllore, il più semplice possibile, che possa attribuire le caratteristiche sopraccitate alla nostra funzione. Si vede che un controllore che risponde a queste caratteristiche risulta essere  $C_1(s) = \frac{m(\frac{s^2}{\omega^2} + 1)}{2}$ , che però mostra quali siano le prime problematiche che favoriscano il controllo tramite retroazione statica, ossia l'introduzione di un grande guadagno di Bode (circa 5000) e la necessità di eliminare le componenti instabili o sinusoidali mediante una doppia cancellazione zero-polo.

La funzione ottenuta quindi diventa

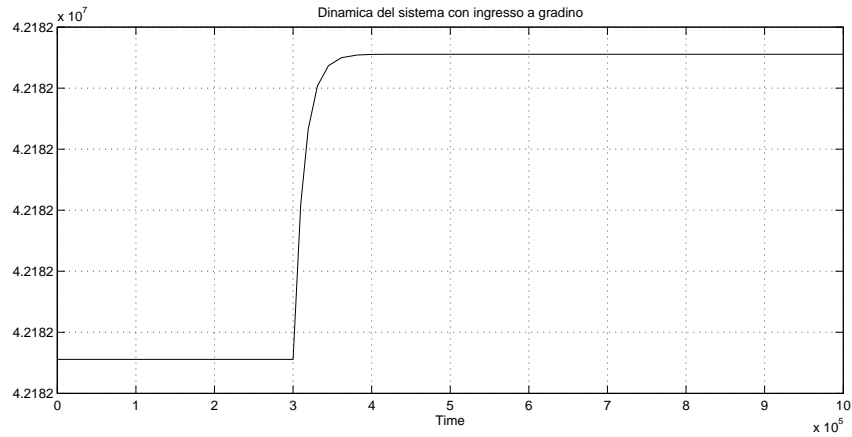
$$C_1(s)A_1(s) = \frac{\omega}{s}$$

Mostriamo ora il diagramma di Bode di  $C_1(s)A_1(s)$  per verificare le nostre richieste precedenti:

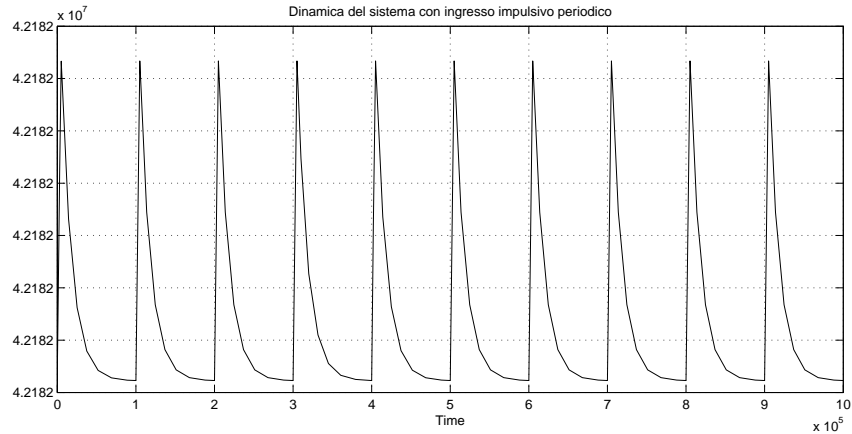


Aggiungiamo infine, per motivi prettamente di realizzabilità fisica, 2 poli positivi molto lontani, in modo che non interferiscano con le caratteristiche ricercate in precedenza, per cui  $C_1(s) = \frac{m(\frac{s^2}{2}+1)}{2(\frac{s^2}{10^3}+1)}$ . Possiamo ora studiare il comportamento del nostro sistema  $W_1(s) = \frac{C_1(s)A_1(s)}{1+C_1(s)A_1(s)}$ :

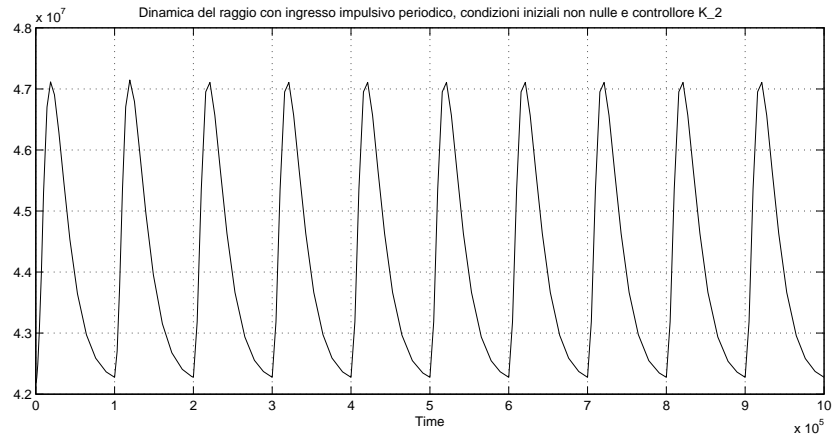
Valutiamo il comportamento del nostro sistema in seguito ad un ingresso a gradino: ad una introduzione del solito gradino in ingresso alla forza radiale, il sistema risponde con un assestamento esponenziale, senza sovraelongazioni



Mettiamo ora in ingresso una serie di impulsi, di periodo  $10^{-5} Hz$  e valore 100 e vediamo come si comporta il sistema:



Notiamo che l'andamento ricorda molto da vicino il comportamento del controllore  $K_2$  proprio in conseguenza dello stesso tipo di ingresso, ovvero una serie di esponenziali rapidi che stabilizzano il raggio molto velocemente prima del secondo impulso, anche se in questo caso  $C_1(s)$  opera una sovraelongazione leggermente minore. Riportiamo per completezza il grafico di  $K_2$  per evidenziare questa similitudine:



Vogliamo però ricordare, come accennato, che controllare il sistema solo tramite questo controllore è impossibile (come invece è possibile farlo per il controllore seguente  $C_2(s)$ ), in quanto non si ha accesso a tutte le variabili e quindi non si può stabilizzare tutti gli autovalori. La controprova matematica è fornita dal fatto che se la matrice  $H$  vale  $[ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ]$  la matrice di osservabilità  $O$  ha rango 3 e pertanto il sistema non risulta osservabile, cosa resa evidente anche dal polinomio di terzo grado al denominatore della funzione di trasferimento, dove è stata effettuata una cancellazione zero-polo che ha eliminato il polo  $s = 0$  (non stabile), il quale pertanto diventa non allocabile. Ciò fa sì che rimane comunque un autovalore nullo non allocabile, che si ripercuote sulla cancellazione del fattore  $s$  instabile, e che fa sì  $C_2(s)$  solo apparentemente stabilizzi il sistema. In questo modo si riesce a controllare l'andamento del raggio, ma si perde ogni possibilità di controllo sulla variabile  $\theta$ . Conseguenza di ciò, il sistema è controllabile completamente solo dal controllore  $C_2(s)$  mediante la funzione di trasferimento  $A_2(s)$ .

## 4.2 Controllo dell'angolo

Come nel caso precedente, costruiamoci un controllore  $C_2(s)$  che inserito nella catena chiusa in serie a  $A_2(s)$  possa far attribuire le caratteristiche di stabilità e transitorietà che abbiamo ricercato precedentemente quando studiavamo il raggio. In questo caso la funzione di trasferimento presenta la seguente forma:

$$A_2(s) = \frac{s^2 - 3\omega^2}{m\psi s^2(s^2 + \omega^2)}$$

che, messa in forma di Bode si esprime come  $A_2(s) = \frac{3(\frac{s}{\sqrt{3}\omega} + 1)(\frac{s}{\sqrt{3}\omega} - 1)}{m\psi s^2(\frac{s^2}{\omega^2} + 1)}$ . Anche in questo caso si presentano molte problematiche per costruire un buon controllore, quali la presenza di 2 poli immaginari puri, 1 zero positivo che abbassa la fase, un bassissimo guadagno di Bode. Scegliamo anche qui di effettuare qualche cancellazione zero-polo e quindi di costruire un controllore

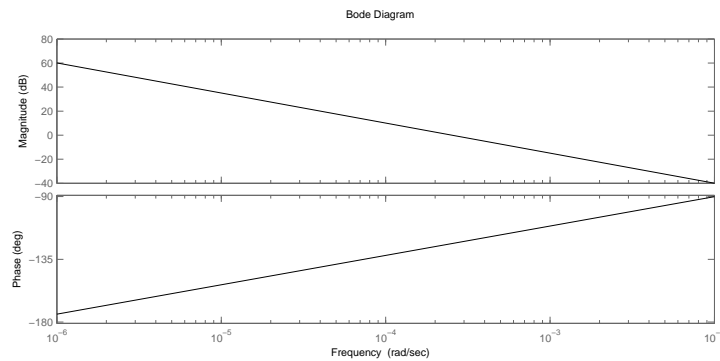
abbastanza complesso, in modo che  $C_s(s)A_2(s)$  abbia la forma del tipo:

$$\frac{K(\frac{s}{z} + 1)}{s^2}$$

Per effettuare questa semplificazione, è necessario che il controllore  $C_2(s)$  sia uguale a  $\frac{100(s^2 + \omega^2)(\frac{s}{10^{-3}} + 1)}{(\frac{s^2}{3\omega} - 1)}$  e in questo modo si ottiene una funzione risultante

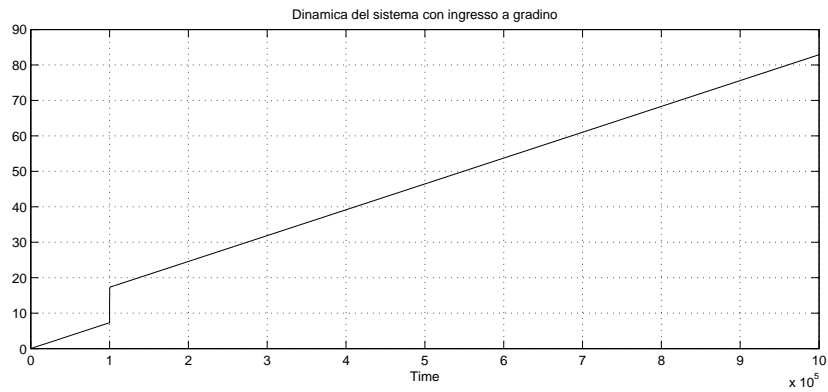
$$C_2(s)A_2(s) = \frac{K(\frac{s}{10^{-3}} + 1)}{s^2}$$

dove  $K = 7.11 * 10^{-10}$ . La funzione risulta avere una  $\omega_A$  molto bassa, in linea con i tempi dei controllori finora studiati, un margine di fase di circa  $90^\circ$  e un errore al gradino nullo (anzi, in questo caso anche un errore alla rampa lineare nulla, ma questa è una caratteristica non strettamente necessaria). Possiamo verificare queste affermazioni mostrando i diagrammi di Bode della funzione:

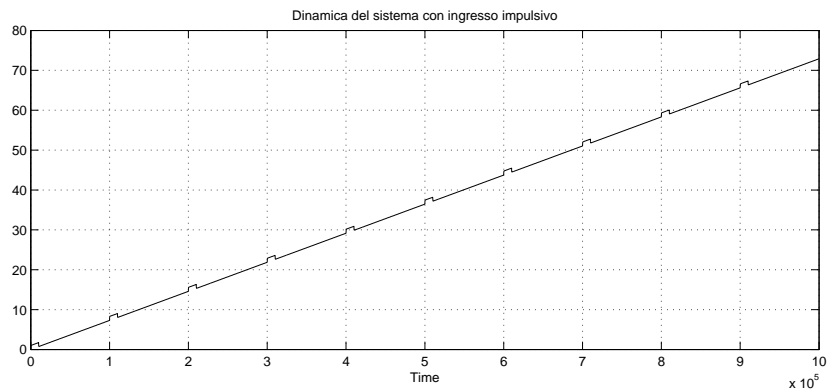


Anche in questo caso, per motivi di realizzabilità fisica introduciamo anche qui un polo positivo molto avanti, che non interferisce sulle proprietà del controllore, ma rende la funzione propria, ossia  $C_2(s) = \frac{100(\frac{s^2}{\omega^2} + 1)(\frac{s}{10^{-3}} + 1)}{(\frac{s^2}{3\omega^2} + 1)(\frac{s}{10^5} + 1)}$ .

Simuliamo ora anche in questo caso il comportamento del nostro sistema retroazionato in catena chiusa  $W_2(s)$  in seguito a ingressi del tipo a gradino e di impulsi periodici: Applicando un gradino di altezza 1000 si nota un rapidissimo assestamento esponenziale verso la condizione di equilibrio, con uno sfasamento di piccola entità dovuto all'azione del gradino



Per quanto riguarda la risposta ad una serie di impulsi, si nota una piccola variazione, anch'essa esponenzialmente smorzata in concomitanza con l'arrivo degli impulsi



Si può quindi dunque notare come il sistema funzioni relativamente bene ad eventuali sollecitazioni esterne, ma che nel complesso le prestazioni fornite da una retroazione statica basata su una matrice  $K$  di controllo delle variabili di stato siano migliori, e data la complessità dei controllori necessaria per ottenere questo tipo di prestazioni, si possa facilmente preferire il precedente tipo di controllo.