

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

*Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica*

**PROGETTAZIONE E SIMULAZIONE  
DI UN SISTEMA DI “CRUISE CONTROL”  
IN AMBIENTE MATLAB**

**Relatore:** Ch.mo Prof. Beghi Alessandro

**Laureando:** Defina Marco

Anno Accademico 2012 / 2013



# Indice

<b>1</b>	<b>Analisi del progetto</b>	<b>5</b>
1.1	Modellizzazione del sistema di Cruise Control . . . . .	5
1.1.1	Descrizione fisica . . . . .	5
1.1.2	Equazioni del modello e parametri adottati . . . . .	5
1.1.3	Implementazione della funzione di trasferimento in Matlab . . . . .	6
1.1.4	Specifiche richieste . . . . .	6
1.2	Analisi del sistema in catena aperta . . . . .	7
1.2.1	Risposta al gradino . . . . .	7
1.2.2	Poli e Zeri ad anello aperto . . . . .	7
1.2.3	Diagramma di Bode ad anello aperto . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Progettazione del sistema di controllo</b>	<b>9</b>
2.1	Introduzione alla progettazione del sistema . . . . .	9
2.2	Utilizzo di controllori P, PI e PID . . . . .	10
2.2.1	Implementazione del controllo Proporzionale . . . . .	11
2.2.2	Implementazione del controllo Proporzionale-Integrale . . . . .	14
2.2.3	Implementazione del controllo Proporzionale-Integrale-Derivativo . . . . .	17
2.2.4	Conclusioni sulla progettazione del controllori PID . . . . .	19
2.3	Analisi con il metodo del luogo delle radici . . . . .	19
2.3.1	Controllore con metodo del luogo delle radici . . . . .	20
2.3.2	Utilizzo di una rete ritardatrice . . . . .	24
2.3.3	Conclusioni sullo studio con luogo delle radici . . . . .	27
2.4	Studio in frequenza del controllore . . . . .	27
2.4.1	Diagramma di Bode e risposta ad anello aperto . . . . .	29
2.4.2	Studio della risposta in catena chiusa . . . . .	31
2.4.3	Introduzione di una rete attenuatrice . . . . .	34
2.4.4	Conclusioni sullo studio in frequenza . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Simulazione del modello mediante Simulink</b>	<b>39</b>
3.1	Modellizzazione del sistema . . . . .	39
3.1.1	Rappresentazione grafica e matematica del modello . . . . .	39
3.1.2	Analisi in Simulink della risposta in catena aperta . . . . .	39
3.1.3	Estrazione del blocco IN-OUT del sistema . . . . .	41
3.2	Simulazione del sistema con controllore PI e PID . . . . .	41
3.2.1	Simulazione della risposta con controllore PI . . . . .	41
3.2.2	Simulazione della risposta con controllore PID . . . . .	43
3.3	Simulazione di controllore con rete attenuatrice . . . . .	44
3.3.1	Analisi con parametri ricavati dal luogo delle radici . . . . .	44
3.3.2	Analisi con parametri ricavati dallo studio in frequenza . . . . .	45
3.3.3	Conclusioni sulla simulazione del sistema . . . . .	46
3.4	Simulazione con introduzione di un disturbo . . . . .	46
3.5	Conclusioni sulla simulazione con disturbo . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>51</b>



## Premesse

Il sistema di controllo di velocità di crociera (noto nell'ambito automobilistico come dispositivo di Cruise Control), consiste in un controllo in retroazione in grado di mantenere stabilmente una velocità di riferimento imposta a un mezzo. Un controllo di questo tipo agisce sul motore del mezzo aumentandone/diminuendone la velocità per mantenerla costante contrastando condizioni esterne come vento, pendenza o irregolarità della strada. Tale dispositivo mira a rendere il più possibile omogeneo il moto del mezzo lungo il tragitto evitando continue variazioni di velocità e consentendo quindi un notevole risparmio energetico.

Questo progetto, mira a studiare e simulare un sistema di controllo di crociera adeguandolo alle specifiche fornite. Una volta modellato matematicamente, il problema verrà affrontato con diversi approcci: un controllo di tipo PID (proporzionale-integrale-derivativo), il metodo del luogo delle radici (Locus Root) e uno studio in frequenza. Infine verrà effettuata mediante Simulink, una simulazione della risposta di sistema con ciascuno dei metodi analizzati in assenza e presenza di disturbi.



# 1 Analisi del progetto

## 1.1 Modellizzazione del sistema di Cruise Control

### 1.1.1 Descrizione fisica

Per questo progetto utilizzeremo il modello di un veicolo di massa  $m$  su cui agisce una forza  $u$  controllabile che rappresenta la componente generata dal sistema pneumatico/strada trascurando gli effetti dinamici che influiscono sulla forza stessa. La forza  $kv$  riassume gli effetti frenanti del vento e del manto stradale e l'attrito volvente delle ruote. Tale forza è supposta proporzionale alla velocità  $v$  secondo la costante  $k$ . (Figura 1)

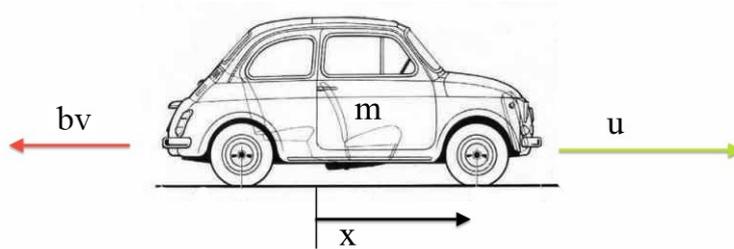


Figura 1: Modello grafico adottato

Innanzitutto è necessario introdurre le leggi di velocità ed accelerazione per il moto del mezzo

$$\begin{aligned}v &= \dot{x} \\ a &= \dot{v} = \ddot{x}\end{aligned}$$

### 1.1.2 Equazioni del modello e parametri adottati

Dalle precedenti assunzioni è possibile ricavare il seguente modello differenziale del primo ordine:

$$F = u - bv \longrightarrow u = m\dot{v} + bv \quad (1)$$

e poiché siamo interessati al controllo della velocità del mezzo è opportuno imporre che l'uscita del sistema sia proprio tale grandezza; imponiamo dunque

$$y = v$$

Il modello adottato in questo studio è del primo ordine, lineare, tempo-invariante infatti la sola energia immagazzinata nel sistema considerato è quella cinetica del mezzo. Occorre dunque una sola variabile di stato per descrivere correttamente il modello, la velocità.

Le equazioni per rappresentare tale sistema in generale sono le seguenti

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

La rappresentazione del nostro particolare sistema diviene quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{v} = \begin{bmatrix} -b \\ m \end{bmatrix} [v] + \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} [u] \\ y = [1] [v] \end{cases}$$

Per ricavare la funzione di trasferimento del modello calcoliamo la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale assumendo che le condizioni iniziali (spazio e velocità) siano nulle; otteniamo così dall'equazione (1):

$$U(s) = msV(s) + bV(s) \quad (2)$$

da cui la funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b} \quad (3)$$

In questo studio e nella successiva simulazione i valori adottati per i vari parametri saranno i seguenti:

	variabile	valore imposto
massa del veicolo	m	1000 [kg]
coefficiente di attrito	b	50 [Ns/m]
forza impressa dal controllo	u	500 [N]
velocità di riferimento	r	10 [m/s]

### 1.1.3 Implementazione della funzione di trasferimento in Matlab

Per prima cosa vado a definire le variabili necessarie al modello e ad assegnare loro i valori stabiliti:

```
m = 1000; %Massa del veicolo
b = 50; %Coefficiente di attrito volvente
u = 500; %Forza impressa
A = -b/m; %Coefficiente dello state-space
B = 1/m; %Coefficiente dello state-space
C = 1; %Coefficiente dello state-space
D = 0; %Coefficiente dello state-space
```

Utilizzando poi il comando `ss` (create state-space model) con i coefficienti precedentemente inseriti, definisco il mio modello e la relativa funzione di trasferimento.

```
cruise_ss = ss(A,B,C,D); %Creo il modello state-space
s = tf('s'); %Definisco il simbolo usato come variabile di Laplace
T_func = 1/(m*s+b) %Assegno il valore della funzione di trasferimento
```

### 1.1.4 Specifiche richieste

Per ottenere una corretta simulazione del sistema di controllo, è necessario stabilire alcuni criteri progettuali e alcune specifiche da mantenere.

Voglio che il mezzo pilotato sia in grado di accelerare fino alla velocità di 10 m/s (22 mph) con una forza fornita dal motore di 500 N.

Per tali valori, è accettabile una sovraelongazione della velocità del 10% e un errore a regime del 2% dunque posso stabilire i seguenti parametri:

- Tempo di risposta (Rise Time) < 5 s
- Sovraelongazione (Overshoot) < 10%
- Errore a regime (Steady-state error) < 2%

## 1.2 Analisi del sistema in catena aperta

### 1.2.1 Risposta al gradino

Come prima analisi osserviamo la reazione del sistema privo di controllori, se l'ingresso è costituito da una forza a gradino del valore di 500 N.

Il codice utilizzato è il seguente:

```
step(u*T.func); %Analisi al gradino di 500N
```

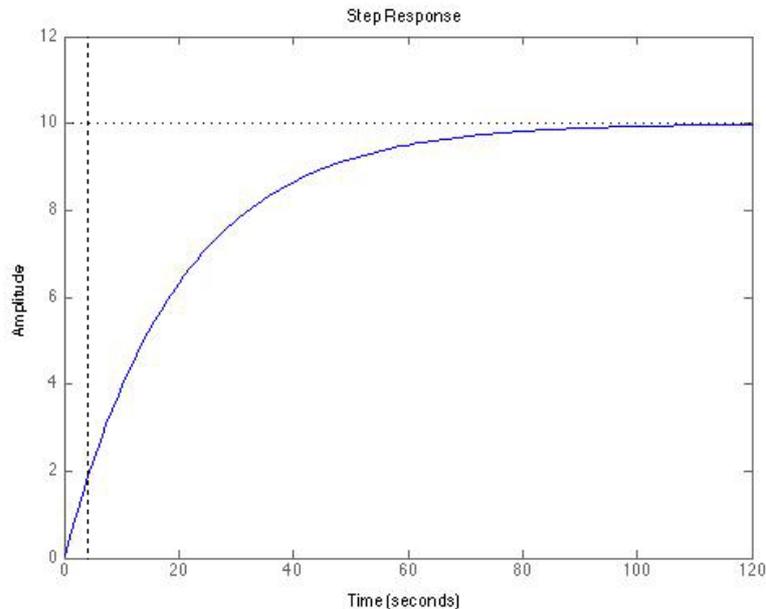


Figura 2: Risposta al gradino ad anello aperto

Possiamo osservare (Figura 2) come la risposta al gradino non evidenzia sovraelongazioni o oscillazioni ed effettivamente raggiunge il valore di velocità richiesto di 10 m/s ma notiamo anche che il tempo di salita è sensibilmente più lento ( $\sim 80$  s) di quello desiderato. Si rende quindi necessario implementare un controllore che diminuisca il tempo di salita senza influenzare la stabilità della risposta.

### 1.2.2 Poli e Zeri ad anello aperto

Dalla funzione di trasferimento (3) deriva che il sistema analizzato ha un singolo polo nel punto  $-\frac{b}{m}$ . Utilizzando il comando Matlab

```
pzmap(T.func); axis([-1 1 -1 1]); %Mappa di poli e zeri  
%nel piano complesso
```

è possibile tracciare poli e zeri della funzione di trasferimento sul piano complesso. Da tale grafico si può stabilire in prima analisi come il sistema sia BIBO stabile (il polo della funzione di trasferimento è reale e negativo) e lento nella risposta (il polo ha un valore molto basso).

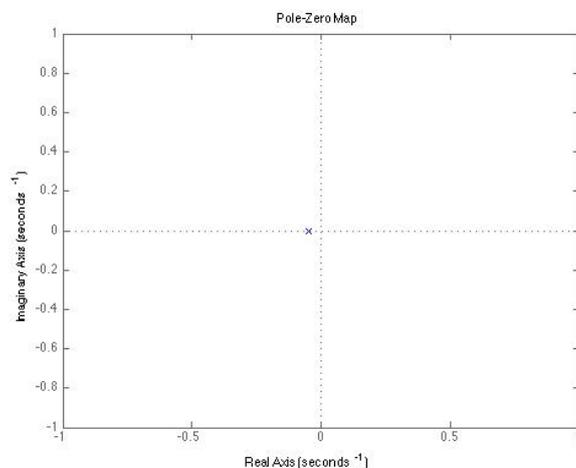


Figura 3: Grafico di poli e zeri ad anello aperto

### 1.2.3 Diagramma di Bode ad anello aperto

È utile analizzare anche la risposta in frequenza ad anello aperto del sistema. Il comando

```
bode(T_func); %Diagramma di Bode
```

consente di tracciare il diagramma di Bode della funzione di trasferimento.

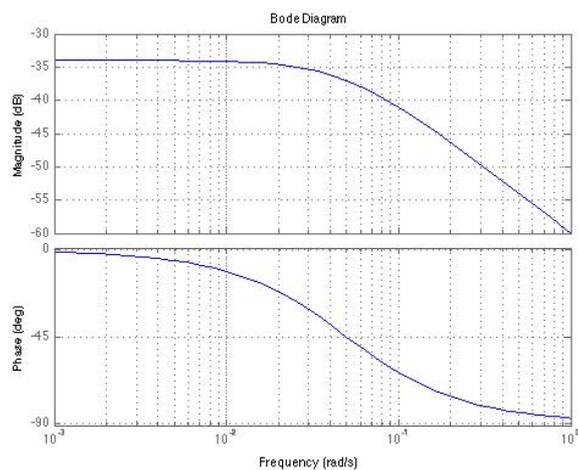


Figura 4: Diagramma di Bode ad anello aperto

Si nota come nel punto  $\omega = \frac{b}{m} = 5 \cdot 10^{-2}$  il modulo sia calato di 3 dB e la fase valga  $-45^\circ$ . Inoltre alle alte frequenze, il modulo scende con pendenza di -20 dB/dec. Questo comportamento è tipico di un sistema del primo ordine.

## 2 Progettazione del sistema di controllo

### 2.1 Introduzione alla progettazione del sistema

Un sistema del primo ordine come quello preso in esame è rappresentabile in modo adeguato con uno schema di controllo ad un grado di libertà come quello di Figura(5) dove  $U(s)$  è la funzione di trasferimento dell'utilizzatore descritta dall'equazione (3) e supposta nota mentre  $C(s)$  è quella del controllore da implementare.

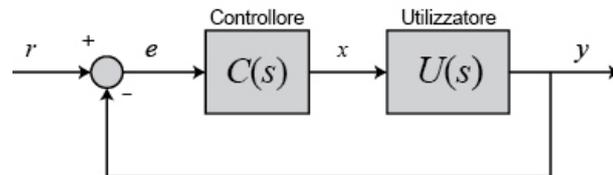


Figura 5: Schema a blocchi retroazione unitaria negativa

La retroazione descritta dallo schema è unitaria negativa ovvero il segnale  $y(t)$  viene riportato all'ingresso del controllore, non riscaldato e con segno opposto rispetto all'originale. La funzione

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

rappresenta l'errore compiuto dal sistema nel far inseguire il segnale di riferimento  $r(t)$  dall'uscita  $y(t)$ .

Il calcolo della funzione di trasferimento del sistema risulta decisamente semplificato spostandosi nel campo delle trasformate di Laplace per cui l'errore  $e(t)$  diviene

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (4)$$

Questo viene trasmesso al controllore che genera il segnale

$$X(s) = C(s)E(s) = C(s)(R(s) - Y(s)) \quad (5)$$

il quale, attraverso l'utilizzatore, diventa

$$\begin{aligned} Y(s) &= U(s)X(s) \\ &= U(s)C(s)E(s) \\ &= U(s)C(s)(R(s) - Y(s)) \end{aligned} \quad (6)$$

Dalla (6) ottengo infine la funzione di trasferimento dell'intero sistema

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U(s)C(s)}{1 + U(s)C(s)} \quad (7)$$

La funzione del controllore  $C$  è dunque quella di trasformare il segnale ricevuto  $E(s)$  in un segnale  $X(s)$  modificando il guadagno di Bode in catena aperta e introducendo zeri e poli la cui azione si combinerà a quello di sistema. La funzione di trasferimento viene quindi modificata in modo tale da ottenere un'uscita che soddisfi, oltre alla BIBO stabilità e la resistenza a piccole perturbazioni dello stato del sistema, anche tutte le specifiche fissate in fase di progettazione, in particolare quelle riguardanti:

- **errore a regime** (*steady-state error*), causato dalla mancanza, nella funzione di trasferimento dell'utilizzatore (3), di un polo nell'origine;

- **tempo di salita** (*rise-time*), che può essere ricondotto a un vincolo sulla pulsazione di attraversamento, noto il legame che esiste tra tempo di salita della risposta al gradino, banda passante (in frequenza) di un sistema in catena chiusa e pulsazione di attraversamento della corrispondente funzione in catena aperta;
- **sovraelongazione** (*overshoot*) che a sua volta può essere tradotta in una condizione sul margine di fase a partire dal legame tra sovraelongazione, picco di risonanza relativo (in frequenza) e margine di fase della corrispondente funzione in catena aperta.

## 2.2 Utilizzo di controllori P, PI e PID

Osservando la funzione di trasferimento di un controllore di tipo PID

$$C_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (8)$$

notiamo che è somma di tre componenti, ciascuna delle quali ha un diverso effetto sul sistema:

- **Proporzionale:** riduce il tempo di salita del sistema incrementando il guadagno in catena aperta, inoltre riduce ma non elimina l'errore a regime. Tanto più grande è l'errore, tanto maggiore sarà l'azione di controllo esercitata dalla componente proporzionale.
- **Integrale:** elimina l'errore a regime nei casi di ingresso costante o a gradino ma può rallentare la risposta del sistema.
- **Derivativo:** incrementa la stabilità del sistema riducendo le sovraelongazioni e migliorando il comportamento transitorio.

È possibile riassumere indicativamente i comportamenti delle tre componenti P, I, D in una tabella<sup>1</sup>.

Azione	Tempo di salita	Sovraelongazioni	Errore a regime
$K_p$	Diminuisce	Aumenta	Diminuisce
$K_i$	Diminuisce	Aumenta	Eliminato
$K_d$	Varia leggermente	Diminuisce	Non varia

Dalla funzione di trasferimento del controllore **PID** (8), si possono facilmente derivare alcuni controllori più semplici come il controllore **PI** (per  $K_d = 0$ ), **PD** (per  $K_i = 0$ ), **P** (per  $K_d = K_i = 0$ ) o **I** (per  $K_d = K_p = 0$ ).

Bisogna sempre tenere a mente però che non è possibile realizzare controllori con funzioni di trasferimento improprie ovvero con più zeri che poli. Per ovviare a questo problema è conveniente inserire dei poli in alta frequenza così da non alterare il controllo e la stabilità di sistema.

<sup>1</sup>Si tratta di una tabella indicativa in quanto i comportamenti delle componenti della funzione si influenzano vicendevolmente.

Possiamo infine riscrivere l'equazione (8) in modo da evidenziare le costanti di tempo delle varie azioni, ottenendo

$$\begin{aligned}
 C_{PID}(s) &= \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \\
 &= K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i} s + \frac{K_d}{K_i} s^2}{s} \\
 &= K_p \left( 1 + \frac{1}{s T_i} + T_d s \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

dove  $T_i = K_p/K_i$  è la costante di tempo integrale e  $T_d = K_d/K_p$  è la costante di tempo derivativa.

Possiamo tradurre quanto detto finora in codice Matlab in due modi

1. Definendo manualmente la funzione di trasferimento del controllore

```

Kp = 1;           %Proporzionale
Ki = 1;           %Integrale
Kd = 1;           %Derivativa
s = tf('s');
Cpid = Kp + Ki/s + Kd*s %Funzione di trasferimento

```

ottenendo

Cpid =

$$\frac{s^2 + s + 1}{s}$$

2. Utilizzando il comando pid integrato in Matlab

```

Cpid = pid(Kp,Ki,Kd) %Funzione di trasferimento

```

ottenendo

Cpid =

$$Kp + Ki * \frac{1}{s} + Kd * s$$

with Kp = 1, Ki = 1, Kd = 1

### 2.2.1 Implementazione del controllo Proporzionale

Riprendendo la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa in retroazione negativa (7), possiamo analizzare il comportamento del sistema aggiungendo un controllore di tipo proporzionale. Si ottiene la nuova funzione

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U(s)C(s)}{1 + U(s)C(s)} = \frac{K_p}{ms + b + K_p} \tag{10}$$

dove  $T(s)$  è ancora una funzione del primo ordine. È possibile quindi prevedere che il grafico della risposta al gradino non presenterà sovraelongazioni.

Generiamo ora il grafico in Matlab utilizzando una costante proporzionale  $K_p = 100$  e una velocità di riferimento  $r = 10$  m/s.

```
m = 1000;
b = 50;
r = 10;    %Velocita' di riferimento

s = tf('s');
T_func = 1/(m*s + b);

Kp = 100;    %Costante proporzionale
Cpid = pid(Kp); %F.Trasferimento PID

%Generazione della funzione di trasferimento in catena chiusa
Tcl = feedback(Cpid*T_func,1) %Semplificazione schema a blocchi
    %unendo le funzioni di trasferimento

t = 0:0.1:20;
step(r*Tcl,t)
axis([0 20 0 12])
```

In questo modo si ottiene la seguente funzione di trasferimento

T =

$$\frac{100}{1000s + 150}$$

e il relativo grafico della risposta al gradino

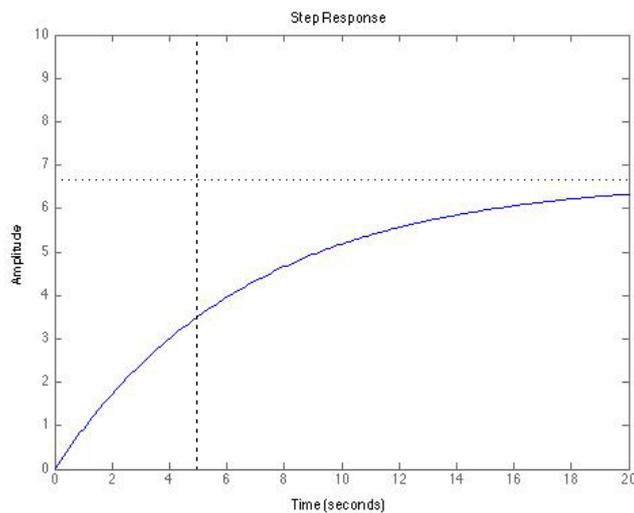
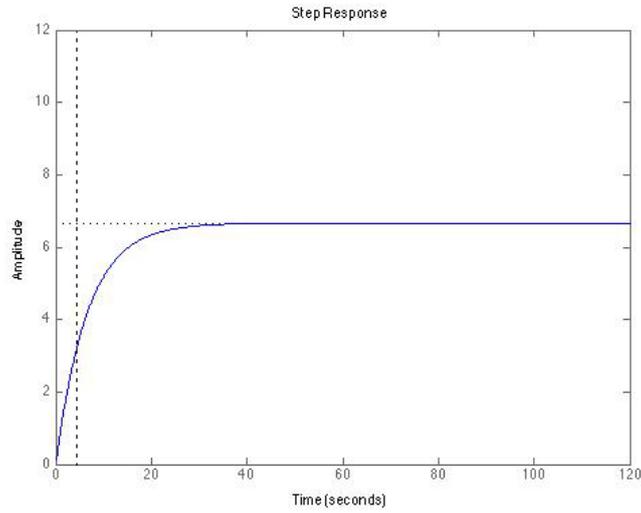


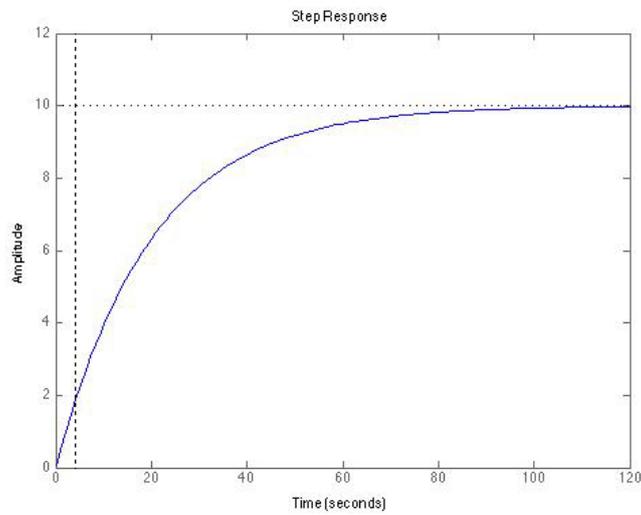
Figura 6: Risposta al gradino con controllore proporzionale ( $K_p = 100$ )

Se confrontiamo la risposta con controllore proporzionale con quella a catena aperta illustrata in Figura(7), osserviamo come la prima sia decisamente più rapida nel

raggiungere lo stato di regime ma anche come questa non soddisfi ancora i requisiti di *rise time* e soprattutto di *steady-state error*.



(a) Controllore proporzionale



(b) Catena aperta

Figura 7: Confronto delle risposte al gradino

È possibile migliorare il comportamento del sistema aumentando il coefficiente  $K_p$  in modo da rientrare nei vincoli richiesti. Osserviamo la risposta nel caso  $K_p = 5000$ :

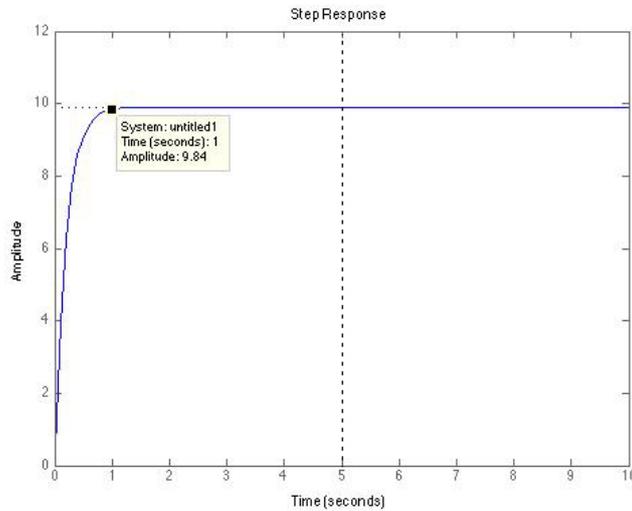


Figura 8: Risposta al gradino con  $K_p = 5000$

Ora l'errore a regime è ridotto praticamente a zero e anche il tempo di salita rispetta le specifiche richieste. Il controllore tuttavia nel passaggio alla realizzazione fisica del progetto richiederebbe la generazione di impulsi di forza eccessivi per un motore; non è infatti pensabile avere a disposizione un mezzo in grado di passare da 0 a 10 m/s in circa 1 s.

In questa tesi, non saranno accettate soluzioni che presentano questo tipo di problema, a cui faremo riferimento dicendo che il sistema non è meccanicamente realizzabile.

### 2.2.2 Implementazione del controllo Proporzionale-Integrale

Dovendo progettare un sistema fisico effettivamente realizzabile, spesso è necessario mantenere  $K_p$  entro un certo limite; per eliminare l'errore a regime si utilizzerà quindi in aggiunta un controllore di tipo integrale.

La funzione di trasferimento del controllore proporzionale-integrale (PI) è la seguente

$$C_i(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (11)$$

che inserita nell'equazione del sistema (7) diventa

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U(s)C(s)}{1 + U(s)C(s)} = \frac{K_p s + K_i}{m s^2 + (b + K_p)s + K_i} \quad (12)$$

Utilizzando come primo tentativo i valori di  $K_p = 500$  e  $K_i = 1$  generiamo il grafico della risposta al gradino con il seguente codice:

```
m = 1000;
b = 50;
r = 10;    %Velocita' di riferimento

s = tf('s');
T.func = 1/(m*s + b);
```

```

Kp = 500;           %Costante proporzionale
Ki = 1;            %Costante integrale
Cpid = pid(Kp,Ki); %F-Trasferimento PID

%Generazione della funzione di trasferimento in catena chiusa
Tcl = feedback(Cpid*T.func,1) %Semplificazione schema a blocchi
                                     %unendo le funzioni di trasferimento

t = 0:0.1:40;
step(r*Tcl,t)
axis([0 40 0 12])

```

che produce il seguente grafico

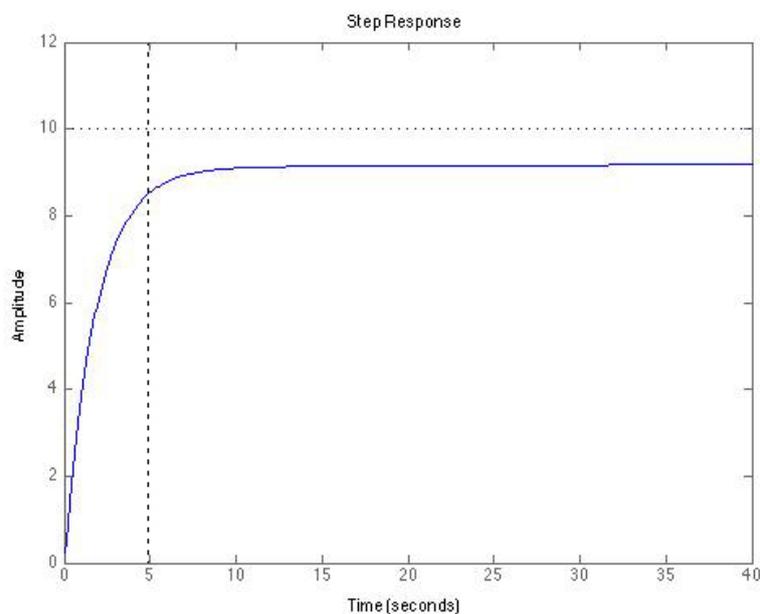
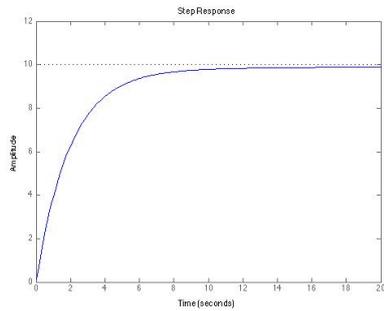


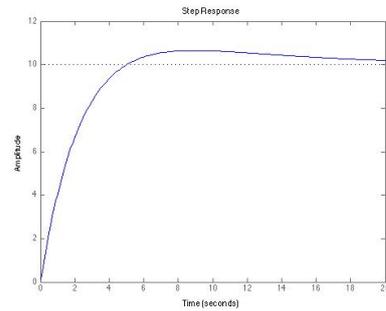
Figura 9: Risposta al gradino con controllore PI ( $K_p = 500$ ,  $K_i = 1$ )

È ora possibile aggiustare i parametri  $K_p$  e  $K_i$  per migliorare la curva del sistema facendo attenzione che un guadagno proporzionale troppo alto potrebbe rendere il sistema instabile o non meccanicamente realizzabile. In Figura (10) sono rappresentate quattro possibili implementazioni del sistema con controllore PI con diversi guadagni proporzionali e integrali.

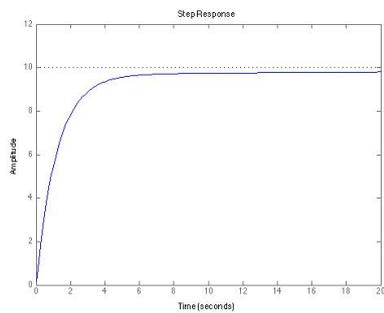
Osserviamo in particolare che in Figura (10b) e (10d) in cui il valore di  $K_p$  è abbastanza elevato, compare una sovralongazione che nel primo caso si avvicina molto al limite imposto del 10% dell'ampiezza.



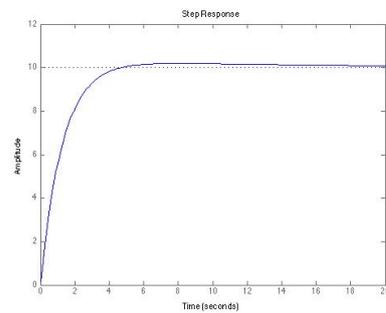
(a)  $K_p = 500$  e  $K_i = 20$



(b)  $K_p = 500$  e  $K_i = 60$



(c)  $K_p = 800$  e  $K_i = 20$



(d)  $K_p = 800$  e  $K_i = 60$

Figura 10: Confronto delle risposte al gradino con controllo PI

Un'implementazione ottimale si ottiene per  $K_p = 1000$  e  $K_i = 50$  come si può vedere in Figura (11).

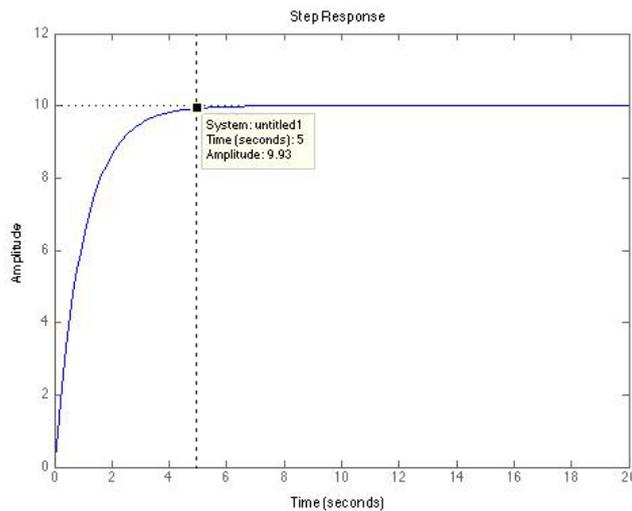


Figura 11: Risposta al gradino con controllore PI ( $K_p = 1000$ ,  $K_i = 50$ )

Con questi parametri, tutte le specifiche richieste sono rispettate, l'uscita infatti si porta in un tempo inferiore a 5 s dal valore 0 ad un valore compreso nel vincolo  $10 \pm 2\%$  m/s e vi rimane stabile senza alcuna sovraelongazione. Non occorre dunque al fine della soluzione del problema affrontato utilizzare un controllore proporzionale-integrale-derivativo (PID).

### 2.2.3 Implementazione del controllo Proporzionale-Integrale-Derivativo

Pur essendo le specifiche imposte ampiamente soddisfatte da un controllore PI, andiamo ad osservare come l'inserimento di una componente derivativa nel blocco controllore modificherebbe la funzione di trasferimento e la risposta al gradino del sistema.

L'equazione del controllore PID è

$$C_i(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (13)$$

dunque la funzione di trasferimento globale del sistema diviene dall'equazione (7)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{U(s)C(s)}{1 + U(s)C(s)} = \frac{K_d b s^2 + K_p s + K_i}{(m + K_d)s^2 + (b + K_p)s + K_i} \quad (14)$$

Utilizzando Matlab per generare i grafici della risposta del sistema è possibile determinare i guadagni  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  per tentativi (*trial and error*). Il codice in questo caso è:

```
m = 1000;
b = 50;
r = 10;      %Velocita' di riferimento

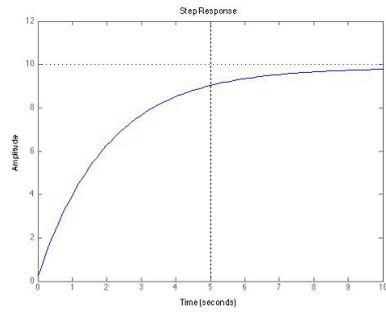
s = tf('s');
Tfunc = 1/(m*s + b);

Kp = 1000;
Ki = 50;
Kd = 20;
Cpid = pid(Kp,Ki,Kd);      %F.Trasferimento PID

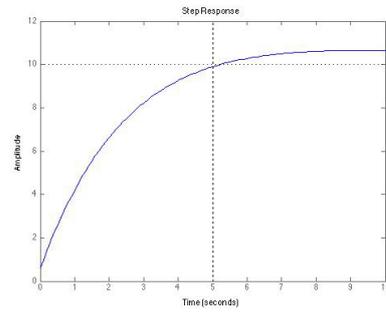
%Generazione della funzione di trasferimento in catena chiusa
Tcl = feedback(Cpid*Tfunc,1) %Semplificazione schema a blocchi
    %unendo le funzioni di trasferimento

t = 0:0.1:20;
step(r*Tcl,t)
axis([0 10 0 12])
```

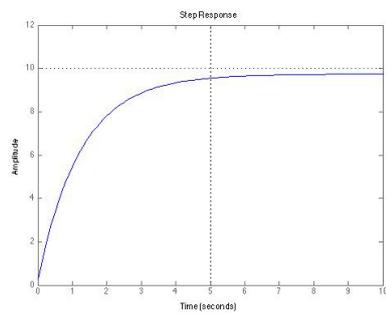
Possiamo osservare come per il caso PI, quattro possibili implementazioni del controllore PID (Figura (12)) e successivamente una implementazione ottimale di tale controllore (Figura (13)).



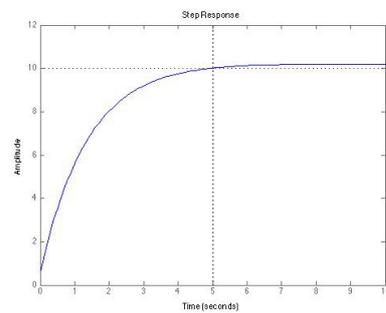
(a)  $K_p = 500, K_i = 20, K_d = 20$



(b)  $K_p = 500, K_i = 60, K_d = 60$



(c)  $K_p = 800, K_i = 20, K_d = 20$



(d)  $K_p = 800, K_i = 60, K_d = 60$

Figura 12: Confronto delle risposte al gradino con controllo PID

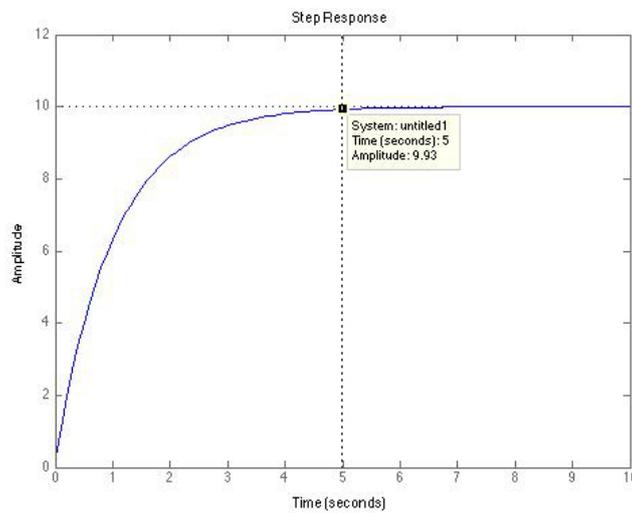


Figura 13: Risposta al gradino con controllore PID ( $K_p = 1000, K_i = 50, K_d = 20$ )

### 2.2.4 Conclusioni sulla progettazione dei controllori PID

Utilizzando i tre tipi di controllori P, PI e PID, abbiamo appurato come un semplice incremento del guadagno (controllore P) non sia sufficiente a risolvere il problema; la risposta al gradino utilizzando tale controllore infatti pur rispettando tutti i vincoli di progettazione, non è meccanicamente realizzabile. È però sufficiente inserire un componente integrale nel controllore (controllore PI) per avere una risposta ottimale. In particolare un andamento che soddisfi tutti i criteri scelti in fase di descrizione del problema si ottiene per  $K_p = 1000$  e  $K_i = 50$ . Abbiamo comunque analizzato anche la risposta ad un controllore proporzionale-integrale derivativo (PID) con parametro  $K_d = 20$  osservando una risposta altrettanto rapida e stabile quanto la precedente, del sistema in catena chiusa.

### 2.3 Analisi con il metodo del luogo delle radici

Dopo aver progettato una prima versione del controllore di tipo PI (o PID dato che come abbiamo visto, entrambi i metodi forniscono un risultato soddisfacente) affrontiamo l'analisi del problema utilizzando la procedura di tracciamento del luogo delle radici (*root locus*). Se infatti i criteri di Bode-Nyquist permettono di indagare la stabilità del sistema ad anello chiuso basandosi rispettivamente sul margine di fase nel punto di attraversamento e sulla distanza dal punto critico  $(-1 + j0)$ ; dal luogo delle radici è possibile dedurre con precisione la posizione dei poli della funzione di trasferimento in catena chiusa previa conoscenza esatta dei polinomi della funzione di trasferimento in catena aperta.

Prendiamo in esempio lo schema a blocchi di Figura (14): il metodo del luogo delle radici prevede di tracciare le possibili posizioni dei poli a catena chiusa del sistema retroazionato composto da un utilizzatore (caratterizzato dalla propria funzione in catena aperta  $U(s)$ ) ed un guadagno proporzionale variabile  $K$ .

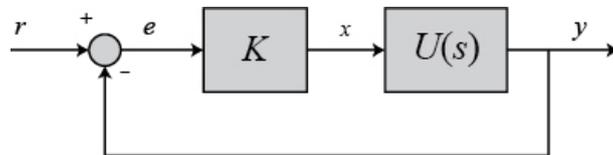


Figura 14: Schema a blocchi per l'analisi con luogo delle radici

La funzione di trasferimento globale dello schema in Figura (14) sarà

$$T(s) = \frac{KU(s)}{1 + KU(s)} \quad (15)$$

Ponendo in evidenza numeratore e denominatore di  $U(s)$

$$U(s) = \frac{a(s)}{b(s)} \quad (16)$$

la (15) diventa

$$T(s) = \frac{Ka(s)}{b(s) + Ka(s)} \quad (17)$$

I poli del sistema caratterizzato da tale funzione saranno quindi le soluzioni dell'equazione

$$b(s) + Ka(s) = 0 \quad (18)$$

Indichiamo ora con  $n$  il grado del denominatore  $b(s)$  e con  $m$  il grado del numeratore  $a(s)$ ; Il sistema in catena chiusa avrà sempre  $n$  poli (che corrisponde al numero di poli di  $U(s)$ ).

Il grafico del luogo sarà caratterizzato da  $n$  rami composti dalle soluzioni dell'equazione (18) al variare del parametro  $K \neq 0$ <sup>2</sup>. I rami partono dagli  $n$  poli di  $U(s)$  e si chiudono negli  $m$  zeri. Nel caso facilmente riscontrabile in cui  $n > m$  i rami andranno a chiudersi all'infinito<sup>3</sup>.

Dal grafico del luogo delle radici possiamo trarre alcune importanti considerazioni:

- se sono presenti poli della funzione di trasferimento nel semipiano destro, il sistema in catena chiusa sarà instabile;
- più un polo è situato vicino all'asse immaginario, più sarà influente nella risposta in catena chiusa;
- i punti in cui il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario sono punti critici in cui il sistema passa da una zona di stabilità a una di instabilità o viceversa.

### 2.3.1 Controllore con metodo del luogo delle radici

Osservando il funzionamento del metodo del luogo delle radici, è facile intuire che si adatta perfettamente all'implementazione di un controllore di tipo P (*proporzionale*) con guadagno  $K_p = K$  infatti con riferimento alla (3) e alla (17), la funzione di trasferimento diviene:

$$T(s) = \frac{Ka(s)}{b(s) + Ka(s)} = \frac{K_p}{ms + b + K_p} \quad (19)$$

ovvero la funzione di trasferimento di un controllore proporzionale.

Prima di procedere con l'implementazione in Matlab analizziamo i limiti imposti dalle specifiche di progetto: non tutti i poli (e quindi le regioni del luogo) della funzione in catena chiusa sono infatti accettabili:

- un limite del 10% al fenomeno di *overshooting* impone un coefficiente di smorzamento  $\zeta$  pari a

$$\zeta \geq \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} = 0.6 \quad (20)$$

dove  $M_p$  rappresenta la massima sovraelongazione del sistema;

- un tempo di salita inferiore a 5 s richiede una pulsazione naturale  $\omega_n$

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{T_r} \geq 0.36 \text{ rad/s} \quad (21)$$

Inseriamo dunque i dati appena ricavati nel seguente codice Matlab

<sup>2</sup>La parte di grafico generata dai valori di  $K > 0$  è detta *luogo positivo* mentre quella generata dai valori di  $K < 0$  è detta *luogo negativo*.

<sup>3</sup>Diremo che  $U(s)$  ha degli zeri all'infinito in numero  $n - m$ .

```

m = 1000;
b = 50;
r = 10;

s = tf('s');
T_func = 1/(m*s + b);

rlocus(T_func)           %funzione generatrice del grafico
                        %del luogo delle radici
axis([-0.6 0 -0.6 0.6]); %Definisce i limiti sugli assi
sgrid(0.6, 0.36)        %Impone i valori di smorzamento e
                        %pulsazione naturale secondo le specifiche

```

Il risultato dell'elaborazione fornisce il grafico di Figura (15).

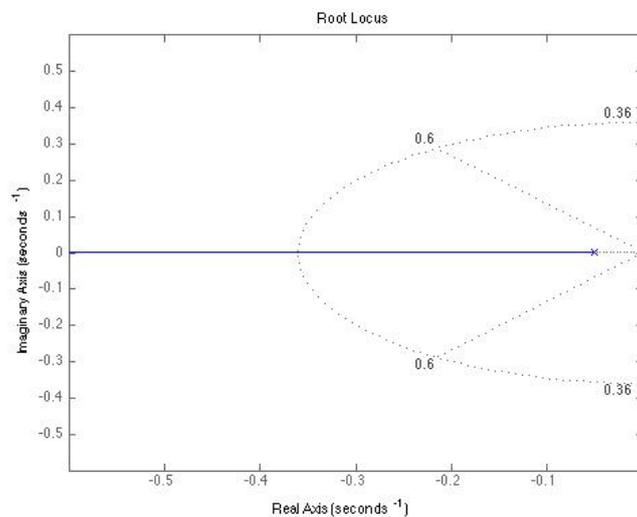


Figura 15: Grafico del luogo delle radici

Le zone del grafico che soddisfano i requisiti richiesti sono individuate dalle linee tratteggiate generate dal comando `sgrid`.

- **il semi-ovale** è l'insieme dei punti in cui la pulsazione naturale è costante e pari a 0.36 rad/s; all'interno di tale area il valore di  $\omega$  diminuisce mentre cresce all'esterno.
- **le due linee rette** sono costituite dai punti in cui il coefficiente di smorzamento è costante e pari a 0.6.  $\zeta$  cresce all'interno dell'area definita dalle due semirette mentre cala all'esterno.

L'unico polo presente nel grafico è situato nel semipiano sinistro come ci si aspetta da un sistema del primo ordine e non essendo presenti zeri, si chiude all'infinito. Poiché l'intero luogo si trova nel semipiano sinistro (ovvero in zona stabile) posso già in prima analisi sostenere che il sistema è stabile per ogni valore di  $K^4$ .

Matlab ci consente, una volta tracciato il grafico, di selezionare un punto del luogo delle radici e, per esso, fornisce il guadagno di anello chiuso necessario per

<sup>4</sup>Traducendo questa affermazione per un controllore proporzionale e identificando  $K$  con  $K_p$ , il sistema risulterà stabile per qualunque valore di  $K_p$

implementare il corrispondente controllore proporzionale. Utilizzando il comando `rlocfind` scegliamo un generico punto appartenente al luogo ed esterno al semi ellisse  $\omega_n > 0.36$ .

```
[Kp,poles]=rlocfind(T_func) %Scelta di un punto sul grafico
                               %del luogo delle radici
```

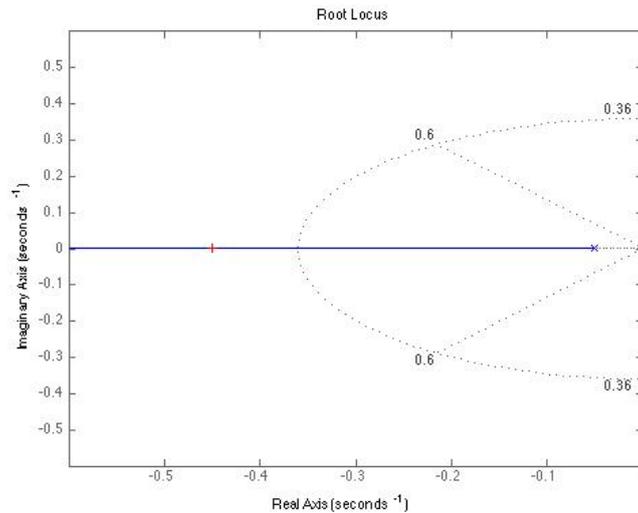


Figura 16: Scelta di un polo sul luogo delle radici

Una volta selezionato il punto desiderato otterremo il seguente codice in output

```
selected_point =
  -0.4500 + 0.0019i
```

```
Kp =
  400.0043
```

```
poles =
  -0.4500
```

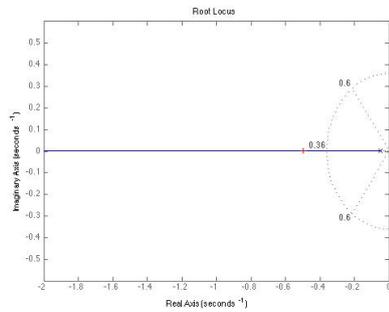
Il valore di  $K_p$  trovato è effettivamente quello che occorrerà inserire nella funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso con controllore proporzionale (equazione (19)).

Con il comando `feedback`, già visto per il controllore P, si genera la risposta al gradino del sistema.

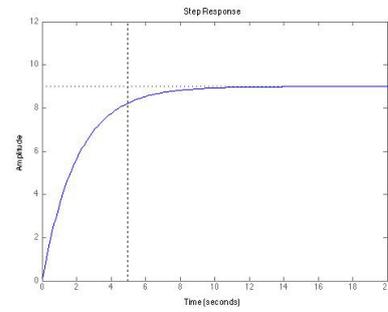
```
%Il seguente codice genera il grafico di risposta al gradino per
%il valore di Kp selezionato precedentemente
```

```
T = feedback(Kp*T_func,1);
t = 0:0.1:20;
step(r*T,t)
axis([0 20 0 12])
```

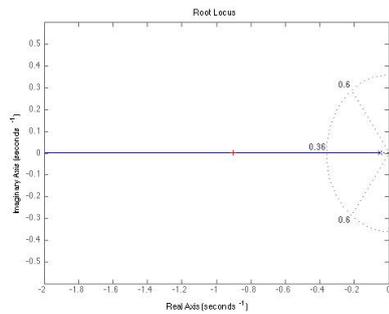
Accodando questa porzione di codice alla precedente, la risposta al gradino è quella generata dal valore di  $K_p$  selezionato sul luogo delle radici. In Figura (17) possiamo osservare alcuni esempi di selezione del punto sul luogo e la corrispondente risposta al gradino.



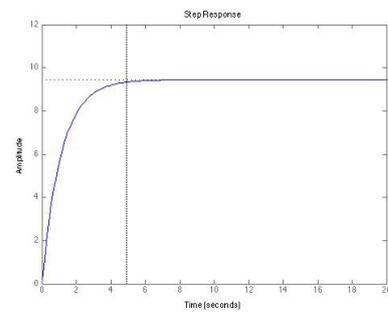
(a) Punto selezionato  $[-0.4953 + 0.0019i]$



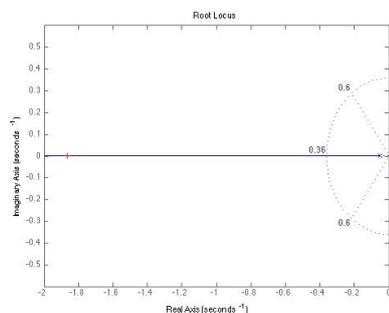
(b)  $K_p = 445.2646$ , Polo in  $-0.4953$



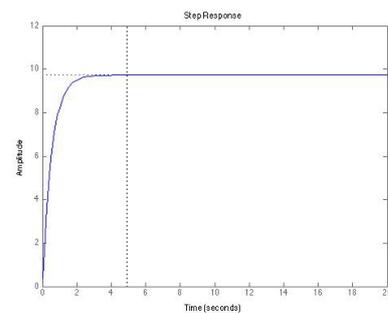
(c) Punto selezionato  $[-0.9028 + 0.0019i]$



(d)  $K_p = 852.8456$ , Polo in  $-0.9028$



(e) Punto selezionato  $[-1.8649 + 0.0019i]$



(f)  $K_p = 1.8149e + 03$ , Polo in  $-1.8649$

Figura 17: Confronto delle risposte al gradino con diversi poli

In conclusione il controllo studiato col luogo delle radici è equivalente al controllo proporzionale e presenta gli stessi problemi per quanto riguarda l'errore a regime e il compromesso tra *rise time* e realizzabilità meccanica.

### 2.3.2 Utilizzo di una rete ritardatrice

Per cercare di correggere l'errore a regime, inseriamo nel sistema una rete ritardatrice. La funzione di trasferimento di una rete ritardatrice (*lag controller*) descritta dalla (22) è composta da una coppia zero-polo in cui quest'ultimo, trovandosi più vicino all'asse immaginario, agisce in anticipo sullo zero provocando uno sfasamento in ritardo (al massimo di  $-\frac{\pi}{2}$ ). In Figura (18) si possono osservare il luogo delle radici e il diagramma di Bode per una rete ritardatrice con  $z_0 = 0.3$  e  $p_0 = 0.03$ .

$$H(s) = \frac{s + z_0}{s + p_0} \quad (22)$$

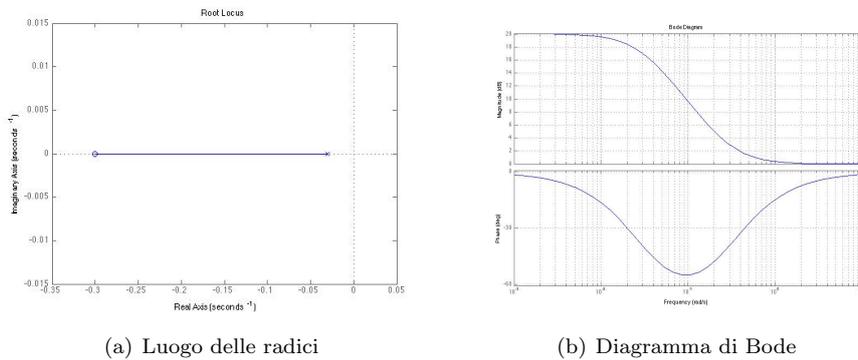


Figura 18: Esempio di rete ritardatrice

L'inserimento di una rete ritardatrice ha come effetto positivo un incremento del guadagno alle basse frequenze di un fattore  $\alpha$  pari al rapporto tra i moduli di zero e il polo lasciando inalterato il guadagno alle frequenze medio-alte (in particolare nel punto di attraversamento di frequenza  $\omega_A$ ). Per contro, l'effetto dell'aggiunta della coppia zero-polo sul luogo delle radici di sistema è una traslazione di tutto il luogo verso destra, ovvero verso la zona di instabilità. L'equazione che identifica il punto di intersezione degli asintoti del luogo con l'asse reale infatti è la seguente

$$x = \frac{\Sigma(\text{poli}) - \Sigma(\text{zeri})}{N^\circ(\text{poli}) - N^\circ(\text{zeri})} \quad (23)$$

Il denominatore non viene modificato dall'introduzione della coppia, ma essendo il polo un numero negativo di modulo più piccolo dello zero, l'azione del numeratore sposterà il punto di intersezione verso destra. Per compensare questo effetto spesso polo e zero sono posti molto vicini tra loro e allo 0 in modo da alterare meno possibile il valore del punto  $x$ . Tratteremo più avanti il comportamento in frequenza di una rete ritardatrice al capitolo 2.4.3.

La funzione di trasferimento del sistema composto dal blocco utilizzatore, dal controllore proporzionale e dalla rete ritardatrice è descritta dall'equazione (24)

$$T(s) = \frac{K_p s + K_p z_0}{m s^2 + (b + m p_0 + K_p) s + (b p_0 + K_p z_0)} \quad (24)$$

Per tracciarne il grafico del luogo delle radici in Matlab è stata utilizzata la seguente porzione di codice (per brevità è stata omessa la parte relativa alla generazione della sola funzione di trasferimento di sistema)

```

%INSERIMENTO DELLA RETE RITARDATRICE
z = 0.3;           %Valore dello zero
p = 0.03;         %Valore del polo

C.lag = (s+z)/(s+p); %Funzione di trasferimento
                    %della rete di ritardo il
                    %simbolo s e' gia' definito sopra

rlocus(C.lag*T.func); %Creazione del luogo delle radici
axis([-0.6 0 -0.4 0.4]) %in nuova figura e comprendente
sgrid(0.6,0.36);      %la rete ritardatrice

```

In tal modo otteniamo il grafico di Figura (19)

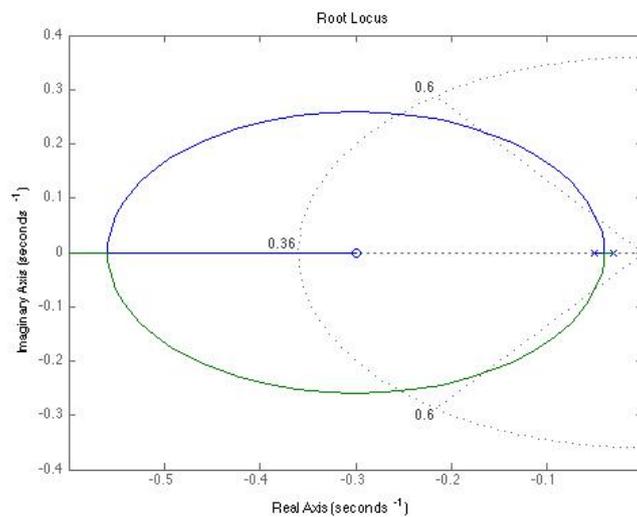


Figura 19: Luogo delle radici del sistema con rete ritardatrice

Ora completiamo lo studio procedendo come già fatto per il controllore proporzionale inserendo il codice per scegliere un punto sul luogo, ottenerne il guadagno e tracciare il corrispondente grafico della risposta al gradino (Figura(20)).

```

[Kp,poles]=rlocfind(C.lag*T.func) %Scelta di un punto sul grafico
                                   %del luogo delle radici

pause;

%Il seguente codice genera il grafico di risposta al gradino per
%il valore di Kp selezionato precedentemente
closedloop = feedback(Kp*C.lag*T.func,1); %Funzione di anello chiuso
t = 0:0.1:20;
step(r*closedloop,t) %Risposta al gradino
axis([0 20 0 12])

```

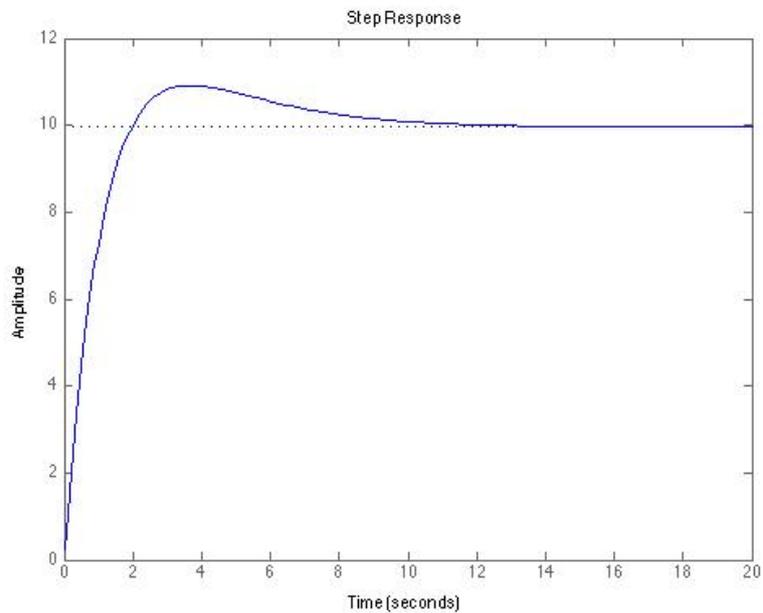
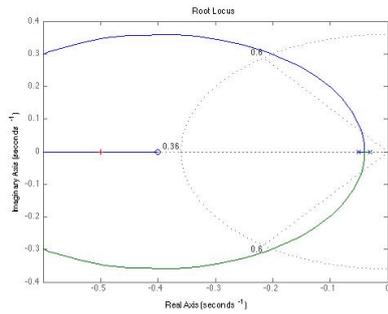


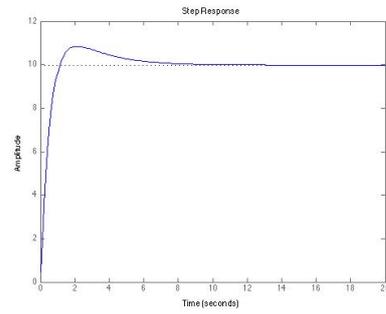
Figura 20: Risposta al gradino del sistema con rete ritardatrice

Come si può osservare in Figura (20) lo *steady-state error* è stato quasi completamente eliminato e le altre specifiche di progetto sono soddisfatte. La sovranelongazione presente in  $t \approx 4$  s è dovuta allo zero nella rete ritardatrice ma è sufficientemente ridotta da rientrare nelle specifiche richieste, inoltre anche inserendo la rete ritardatrice, il luogo rimane interamente nel semipiano destro e quindi il sistema sarà stabile per ogni  $K > 0$ .

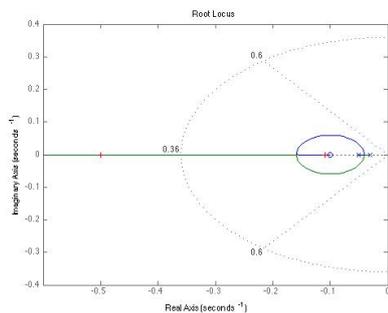
Possiamo vedere in Figura (21) l'effetto di un diverso posizionamento dello zero della rete ritardatrice sulla risposta al gradino a parità di punto selezionato sul luogo.



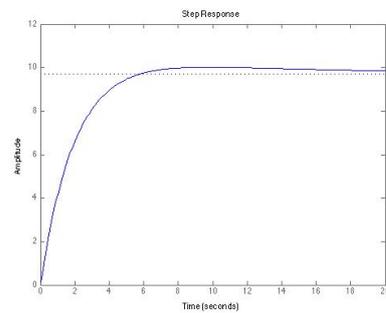
(a) Zero in 0.4



(b)  $K_p = 2.1177e + 03$



(c) Zero in 0.1



(d)  $K_p = 528.5195$

Figura 21: Diverso posizionamento dello zero nella rete ritardatrice

### 2.3.3 Conclusioni sullo studio con luogo delle radici

La Figura (17) evidenzia chiaramente come, studiando il sistema con il metodo del luogo delle radici, si ripresentino i medesimi problemi riscontrati per il controllore proporzionale: un guadagno troppo basso (Figura (17b)) non riesce a correggere l'errore a regime del sistema mentre un guadagno troppo alto lo rende meccanicamente irrealizzabile (Figura (17f)).

L'introduzione di una coppia zero-polo, ovvero di una rete attenuatrice, migliora la risposta grazie all'azione integrativa del polo. Con i valori scelti (0.3 per lo zero e 0.03 per il polo) si ottiene un incremento del guadagno di un fattore 10. Tale fattore di guadagno è legato anche al fattore di attenuazione dell'errore a regime. Dalla Figura (20) osserviamo come lo *steady-state error* sia stato praticamente eliminato e come il vincolo di *rise-time* sia rispettato. La sovraelongazione, che comunque si mantiene entro le specifiche imposte, è generata dall'inserimento dello zero e, a seconda della sua posizione, sarà più o meno accentuata (Figura (21)).

## 2.4 Studio in frequenza del controllore

Lo studio, e soprattutto la rappresentazione della funzione  $W(s)$  essendo questa a dominio e codominio complessi, richiede quattro dimensioni. Si preferisce pertanto utilizzare la *risposta armonica* o *risposta in frequenza*, funzione complessa definita come

$$W(j\omega) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{con } 0 \leq \omega < \infty \quad (25)$$

ottenuta univocamente dalla  $W(s)$  tramite il cambio di variabile  $s \rightarrow j\omega$ . Si valuta dunque la funzione di trasferimento in corrispondenza di valori di  $s$  immaginari puri.

La variabile  $\omega$  viene detta *pulsazione*, *frequenza angolare* o a volte anche solamente *frequenza*<sup>5</sup>.

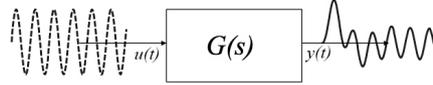


Figura 22: Schema a blocchi risposta in frequenza

Prendiamo in esame, con riferimento allo schema di Figura (22), il caso di un ingresso persistente limitato come può essere una sinusoide

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (26)$$

Per il teorema della risposta in frequenza un ingresso sinusoidale stabile impone, esaurita una fase transitoria iniziale, un'uscita sinusoidale con la medesima pulsazione angolare. La  $u(t)$  scelta dunque genererà un'uscita caratterizzata da un guadagno amplificato o attenuato di un fattore  $|G(j\omega)|$  ed una fase aumentata o diminuita di un fattore  $\phi(\omega_0)$

$$y(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \phi(\omega_0)) \quad (27)$$

I parametri più importanti per lo studio in frequenza sono:

- $M_r$  *picco di risonanza*: calcolato nei punti in cui  $|G(j\omega_r)| > |G(j0)|$ , vale  $|G(j\omega_r)| - |G(j0)|$
- $\omega_r$  *pulsazione di risonanza*: ascissa relativa al punto di ordinata  $M_r$ . Nel caso fossero presenti più massimi relativi ( $M_{r1}, M_{r2} \dots M_{rN}$ ), avrò le corrispondenti ascisse ( $\omega_{r1}, \omega_{r2} \dots \omega_{rN}$ ).
- $B_w$  *banda passante*:<sup>6</sup> si definisce quando vi è un unico valore di pulsazione angolare  $\omega_B$  tale per cui  $|W(j\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  corrispondente ad una attenuazione di 3dB. In tal caso  $B_w = \frac{\omega_B}{2\pi}$

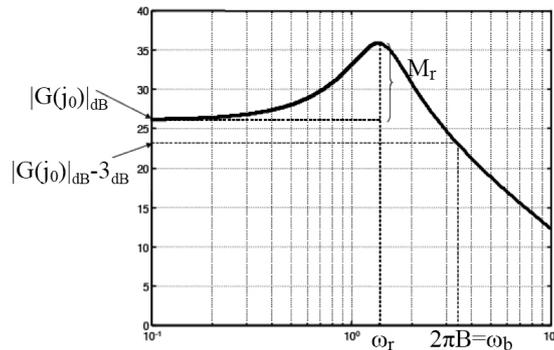


Figura 23: Esempio di parametri della risposta in frequenza

<sup>5</sup>Il significato usuale di frequenza, tuttavia, è associato alla variabile  $f = \frac{\omega}{2\pi}$

<sup>6</sup>Se non diversamente indicato, si sottointende una banda passante a 3dB

I due diagrammi più utilizzati per studiare una risposta in frequenza sono quelli di Bode e di Nyquist. A differenza del diagramma di Nyquist che prevede di tracciare un'unica curva sul piano complesso che associa ad ogni valore del parametro  $\omega$  il numero complesso  $W(j\omega)$ , il diagramma di Bode si divide in due componenti che analizzano rispettivamente le grandezze

- $M_\omega = 20 \log_{10}(|W(j\omega)|)$  ovvero il valore di  $|W(j\omega)|$  espresso in decibel, in funzione di  $\log_{10}(\omega)$
- $\varphi(\omega)$  in funzione di  $\log_{10}(\omega)$

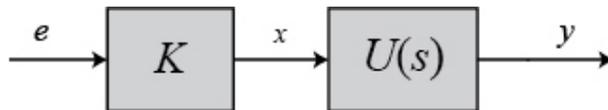
Questa rappresentazione ha il triplice vantaggio di garantire una rappresentazione compatta anche per ampie variazioni di  $\omega$ , di trasformare prodotti e rapporti in somme e differenze di logaritmi (più facili da eseguire) e di consentire un tracciamento approssimato del grafico estremamente semplice.

Definiamo tre parametri che ci permetteranno di studiare e ottimizzare la risposta in frequenza tramite il diagramma di Bode:

- il *punto di attraversamento* è il punto del diagramma di Bode in cui il guadagno in dB è nullo (di conseguenza il guadagno lineare è unitario)<sup>7</sup>. Questo punto ha ascissa  $\omega_A$  che prende il nome di *pulsazione di attraversamento*.
- il *marginale di guadagno* ( $G_M$ ) è un indicatore del grado di robustezza di un sistema in catena chiusa a fronte di possibili variazioni del guadagno della funzione d'anello, indica cioè quando può aumentare il guadagno di anello aperto prima che il sistema diventi instabile. Più il margine di guadagno è elevato, più il sistema ad anello chiuso sarà in grado di sopportare guadagni elevati. Nel diagramma di Bode equivale alla differenza, misurata nel punto in cui la fase  $\varphi(\omega)$  vale  $-180^\circ$ , tra la curva dell'ampiezza del modulo e la retta corrispondente al guadagno di 0dB.
- il *marginale di fase* ( $P_M$ ) è definito come la perdita di fase alla pulsazione  $\omega_A$  (ad esempio a causa di un'anticipazione o un ritardo) tale da rendere il sistema instabile. Nel diagramma di Bode, equivale alla differenza, misurata nel punto di attraversamento, tra la curva di fase e la retta orizzontale corrispondente al valore di  $-180^\circ$ .

#### 2.4.1 Diagramma di Bode e risposta ad anello aperto

Come per lo studio del luogo delle radici (capitolo 2.3), inizieremo l'analisi del comportamento in frequenza del sistema utilizzando un controllore di tipo proporzionale. Lo schema a blocchi e la funzione di trasferimento di tale sistema ad anello aperto sono i seguenti



$$T(s) = \frac{K_p}{ms + b} \quad (28)$$

<sup>7</sup>Occorre tener presente che un guadagno unitario è pari a un guadagno nullo in dB poiché  $20 \log_{10}(1) = 0$

È necessario innanzitutto accertarsi che la risposta del sistema analizzato sia stabile. Utilizziamo a questo scopo il seguente codice Matlab imponendo un guadagno  $K_p$  unitario

```
%Studio della stabilita' con controllore P unitario in catena aperta
%Genera tutti i grafici necessari allo studio del sistema di controllo

%Definizione delle variabili del modello
m = 1000; %Massa del veicolo
b = 50; %Coefficiente di attrito volvente
u = 500; %Forza impressa

%Creazione della funzione di trasferimento ad anello aperto
Kp=1;
s = tf('s');
T_func = 1/(m*s+b);
K=Kp; %Assegno il valore di Kp al controllore (passaggio solo per
%chiarezza in modo da modificare successivamente il valore
%della variabile Kp)

%Grafico della risposta al gradino
step(u*K*T_func) %Analisi al gradino di 500N
axis([0 120 0 12]);
```

La risposta in catena aperta con controllore proporzionale unitario osservabile in Figura (24) equivale alla risposta senza controllore di Figura (2) ed è quindi stabile.

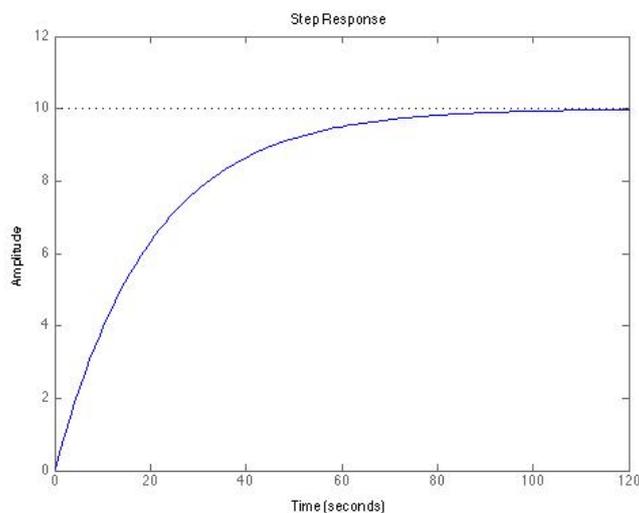


Figura 24: Risposta al gradino con controllore proporzionale unitario

Una volta accertata la stabilità del sistema in catena aperta è possibile tracciare il diagramma di Bode corrispondente (Figura(25)) utilizzando in coda al codice Matlab precedente il comando

```
%Traccia il diagramma di bode del sistema controllore-utilizzatore
bode(K*T_func);
```

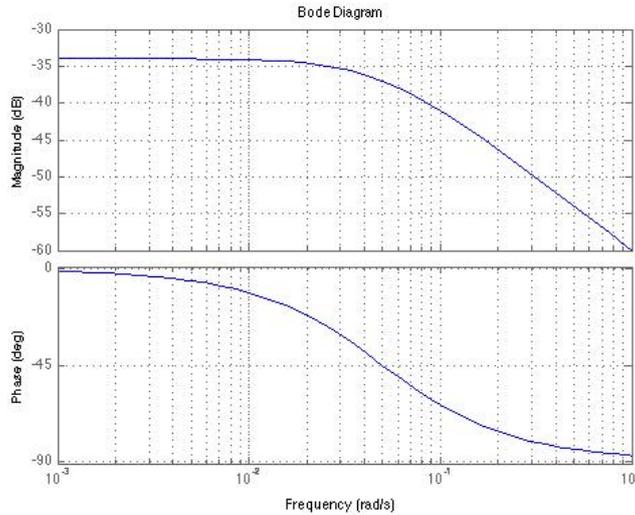


Figura 25: Diagramma di Bode del sistema controllore-utilizzatore

#### 2.4.2 Studio della risposta in catena chiusa

Prima di studiare la risposta in frequenza in catena chiusa del sistema occorre introdurre alcune indicazioni e semplificazioni che verranno utilizzate nell'analisi:

- perché il sistema sia stabile il margine di guadagno deve trovarsi alla sinistra del margine di fase, di conseguenza si avrà  $\omega(G_M) < \omega(P_M)$  ;
- il coefficiente di smorzamento  $\zeta$  per sistemi del secondo ordine in catena aperta sarà approssimato al valore  $P_M/100$  se  $0^\circ \leq P_M \leq 60^\circ$ , altrimenti caso per caso se ne analizzerà l'andamento;
- utilizzeremo come banda passante il valore di  $B_w$  dove il sistema attenua  $\approx 7\text{dB}$ <sup>8</sup> ed approssimeremo tale valore di  $B_w$  con la frequenza naturale  $\omega_n$ ; di conseguenza il tempo di salita sarà

$$T_r = \frac{1.8}{\omega_n} = \frac{1.8}{B_w}$$

- l'errore in regime permanente verrà approssimato con la seguente equazione

$$ss_{er} = \frac{1}{1 + M_{lineare}} \cdot 100\% \quad \text{con } M_{lineare} = 10^{\frac{M\omega[dB]}{20}} \quad (29)$$

Analizzando ora il diagramma di Figura (25), osserviamo un guadagno alle basse frequenze di  $\approx 34\text{dB}$  a cui corrispondono dalla (29) un guadagno  $M_{lin} \approx 0.02$  e un errore  $ss_{er} \approx 98\%$ . Generando in Matlab la risposta a catena chiusa del sistema (Figura (26)) tali valori vengono confermati.

<sup>8</sup>Solitamente si utilizza la  $B_w$  a 3dB ma poiché abbiamo a che fare con un sistema ad anello aperto, per predire l'andamento dello stesso ad anello chiuso è necessario considerarlo approssimativamente come un sistema del secondo ordine utilizzando una  $B_w$  che, in anello aperto corrisponde ad una attenuazione compresa tra 6dB e 7.5dB

```

%Traccia la risposta al gradino per il sistema in catena chiusa
%per confermare i valori calcolati
r = 10;
Tcl = feedback(K*T.func,1);
step(r*Tcl);

```

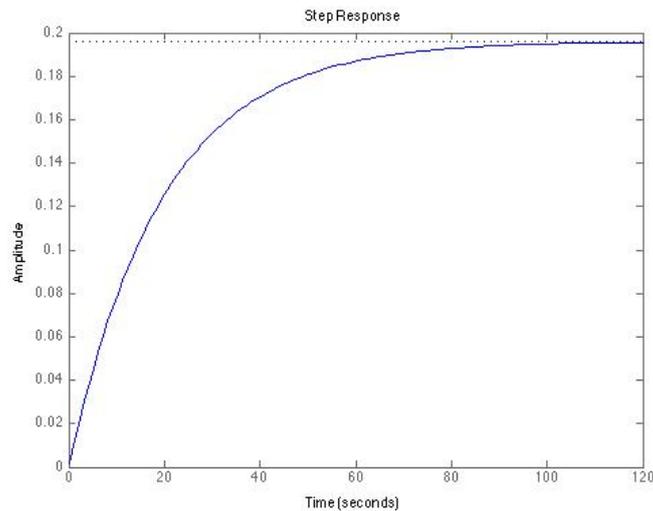


Figura 26: Risposta al gradino in catena chiusa del sistema ( $K_p = 1$ )

Per migliorare l'errore a regime e rispettare le specifiche richieste ( $ss_{er} < 2\%$ ) secondo l'equazione (29) è necessario un guadagno di Bode [dB] pari a

$$ss_{er} < 2\% \Rightarrow \frac{1}{1 + M_{lineare}} \cdot 100\% < 0.02 \Rightarrow M_{lin} > 49 \Rightarrow M_{dB} > 33.8\text{dB}$$

Ciò equivale ad una traslazione verso l'alto del diagramma del modulo ad opera del controllore proporzionale di  $[33.8 - (-34)] = 67.8\text{dB}$ . Assegniamo dunque tale valore, linearizzato ( $\approx 2455$ ), al parametro  $K_p$  e generiamo il diagramma di Bode corrispondente.

In Figura (27) viene evidenziata la griglia del grafico mentre in Figura (28) è stata modificata la scala degli assi per consentire una visione completa del margine di fase.

```

%Creazione della funzione di trasferimento ad anello aperto
Kp=2455;
s = tf('s');
T.func = 1/(m*s+b);
K=Kp;      %Assegno il valore di Kp al controllore (passaggio solo per
           %chiarezza in modo da modificare successivamente il valore
           %della variabile Kp)

%Grafico della risposta al gradino
step(u*K*T.func) %Analisi al gradino di 500N
axis([0 120 0 12]);

%Traccia il diagramma di bode del sistema controllore-utilizzatore
bode(K*T.func);
%Per evidenziare i margini di guadagno e fase si utilizza invece
%margin(K*T.func);

```

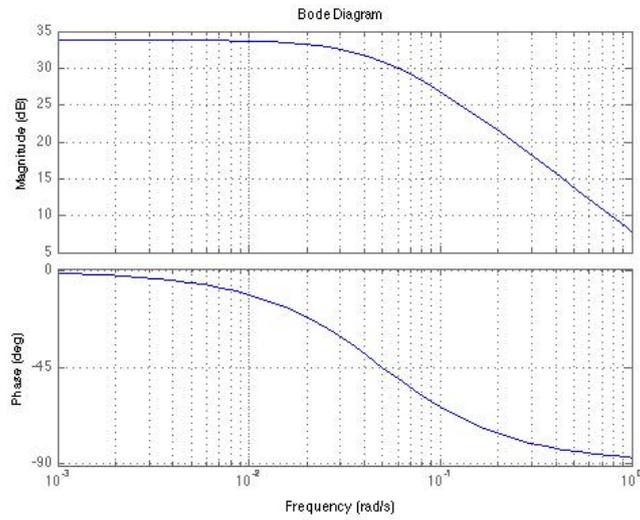


Figura 27: Diagramma di Bode del sistema controllore-utilizzatore ( $K_p = 2455$ )

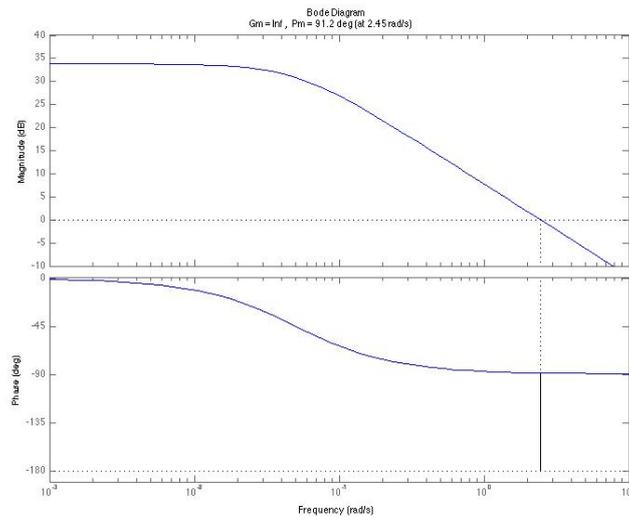


Figura 28: Diagramma di Bode del sistema controllore-utilizzatore ( $K_p = 2455$ )

Osserviamo infine in Figura (29) la risposta al gradino ad anello chiuso per il valore di  $K_p$  calcolato.

```
%Traccia la risposta al gradino per il sistema in catena chiusa
%per confermare i valori calcolati
r = 10;
Tcl = feedback(K*T.func,1);
step(r*Tcl);
```

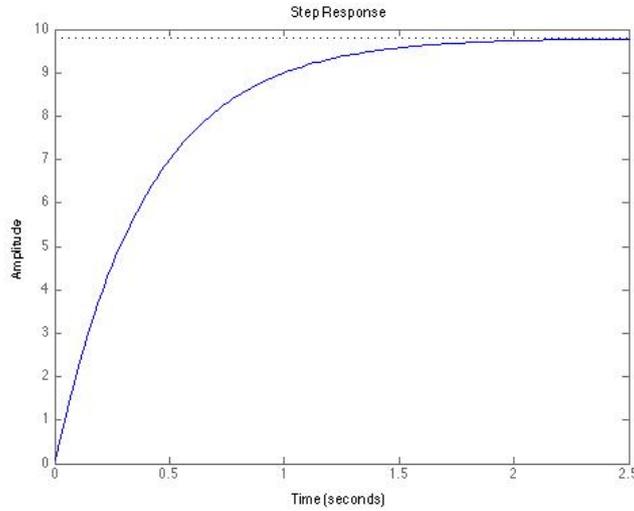


Figura 29: Risposta al gradino ad anello chiuso con controllore P ottimizzato

Come si può vedere la risposta non presenta alcuna sovraelongazione, raggiunge il valore richiesto di 10 m/s, con un errore a regime del 2%<sup>9</sup>, in un *rise time* sensibilmente inferiore a 5 s. Pur rispettando le specifiche richieste, esattamente come per la progettazione *per tentativi* del controllore proporzionale al capitolo 2.2.1, il sistema non è considerato meccanicamente realizzabile.

### 2.4.3 Introduzione di una rete attenuatrice

Una rete attenuatrice, spesso chiamata anche ritardatrice o *lag controller* è descritta in frequenza dall'equazione (30) la quale può essere ricavata dalla (22) in pochi passaggi.

$$H(s) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} \right) \quad \text{con } [\alpha < 1] \quad (30)$$

Il diagramma di Bode di tale rete è quello di Figura (30) e presenta, con riferimento alla forma dell'equazione (30), un polo alla frequenza  $\omega = 1/T$  ed uno zero alla frequenza  $\omega = 1/\alpha T$ .

---

<sup>9</sup>Il valore di errore a regime è stato imposto da noi partendo dall'analisi del diagramma di Bode in catena aperta

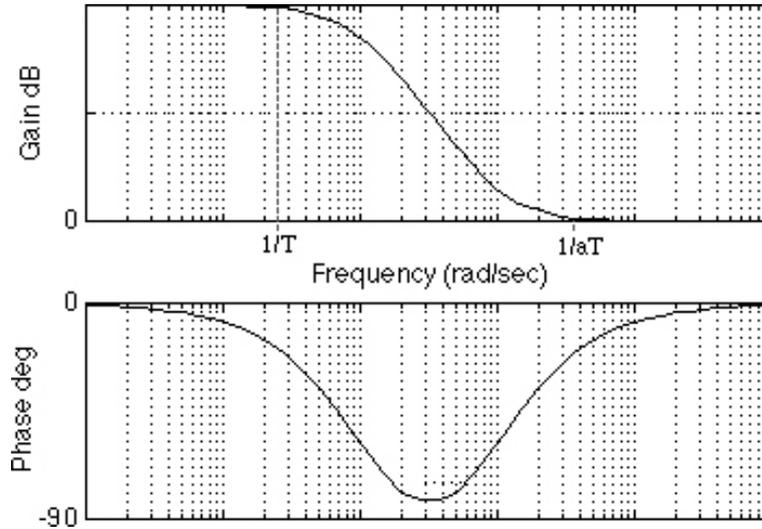


Figura 30: Diagramma di Bode di una rete attenuatrice

Una rete ritardatrice ha i seguenti effetti sul sistema

- incrementa il guadagno alle basse frequenze di un valore pari a

$$M_{lag} = \frac{Polo}{Zero} = \frac{1/T}{1/\alpha T} = \alpha$$

ciò causa una diminuzione dell'errore a regime di un fattore equivalente  $\alpha$ , lasciando praticamente inalterato il comportamento (e quindi la stabilità) alle frequenze medio alte dove il guadagno è unitario<sup>10</sup>;

- aggiunge una fase negativa alle frequenze comprese tra il polo e lo zero che può arrivare fino al valore di  $-90^\circ$  (legata al valore di  $\alpha$ ), bisogna perciò fare molta attenzione che il nuovo margine di fase sia soddisfacente per quanto riguarda la stabilità. Per ovviare a ciò si cerca di inserire lo zero della rete sufficientemente distante (a sinistra) dalla nuova frequenza di attraversamento

$$\omega'_A = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (31)$$

Per ottenere un risultato ottimale utilizzando una rete attenuatrice, è necessario calcolarne i parametri a partire dai dati in nostro possesso.

Un errore a regime  $ss_{er} = 2\%$  impone un guadagno di bode pari a

$$\frac{1}{1 + M_{lineare}} \cdot 100\% < 0.02 \Rightarrow M_{lin} > 49 \Rightarrow M_{dB} > 33.8\text{dB} \quad (32)$$

da cui un valore di  $\alpha$  pari a

$$\alpha = 10^{\frac{-|33.8\text{dB}|}{20}} \approx 0.02$$

Un tempo di salita  $T_r < 5\text{s}$  implica una banda  $B_w$  e una pulsazione  $\omega_n$  pari a

$$B_w = \omega_n = \frac{1.8}{5} \approx 0.36 \text{ rad/s} \quad (33)$$

<sup>10</sup>Dal diagramma di Bode, il guadagno a frequenze medio alte è nullo in dB, che corrisponde a un guadagno unitario in scala lineare

da cui un valore di  $T$  pari a

$$T = \frac{10}{\alpha \omega_n} \approx 1389$$

Uno smorzamento  $\zeta = 0.6$  (equazione (20)) richiede un margine di fase minimo  $P_M$  pari a

$$P_M = 100 \zeta = 60^\circ$$

Con il seguente codice è possibile tracciare il diagramma di Bode di Figura (31) in cui abbiamo messo in evidenza il margine di fase di  $90.8^\circ$ , valore ottimo per garantire la stabilità.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tutti i parametri relativi al modello sono gia' presenti nel codice
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%INSERIMENTO DELLA RETE RITARDATRICE
Kp=1000;
a = 0.02;
t = 1389;

T.lag = (1/a)*(1+a*t*s)/(1+t*s); %Funzione di trasferimento
                                %della rete di ritardo: il
                                %simbolo s e' gia' definito sopra

%Traccia il diagramma di bode del sistema con il lag controller
margin(Kp*T.lag*T.func);

```

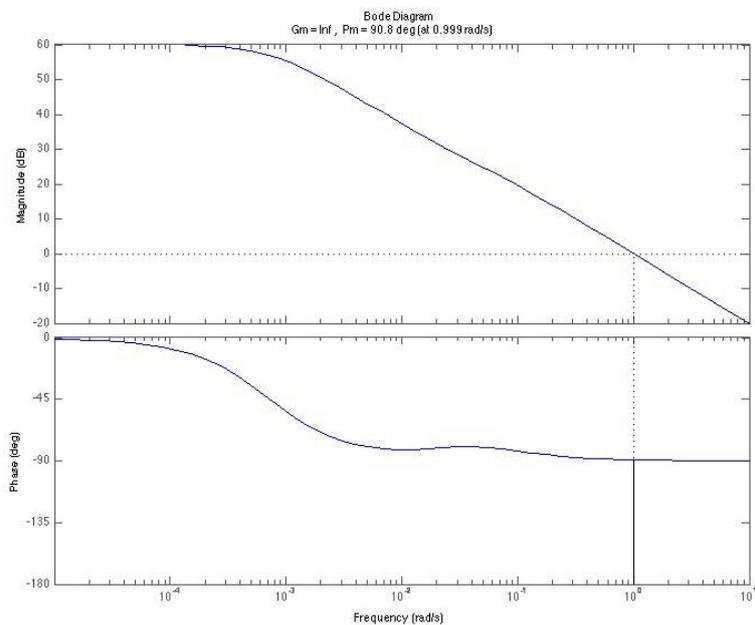


Figura 31: Diagramma di Bode di una rete attenuatrice

Ad ulteriore conferma degli ottimi risultati ottenuti, possiamo generare la risposta al gradino a catena chiusa (Figura (32))

```

%Traccia la risposta al gradino per il sistema in catena chiusa

```

```

%per confermare i valori calcolati
r = 10;
Tcl = feedback(Kp*T_lag*T_func,1);
step(r*Tcl);

```

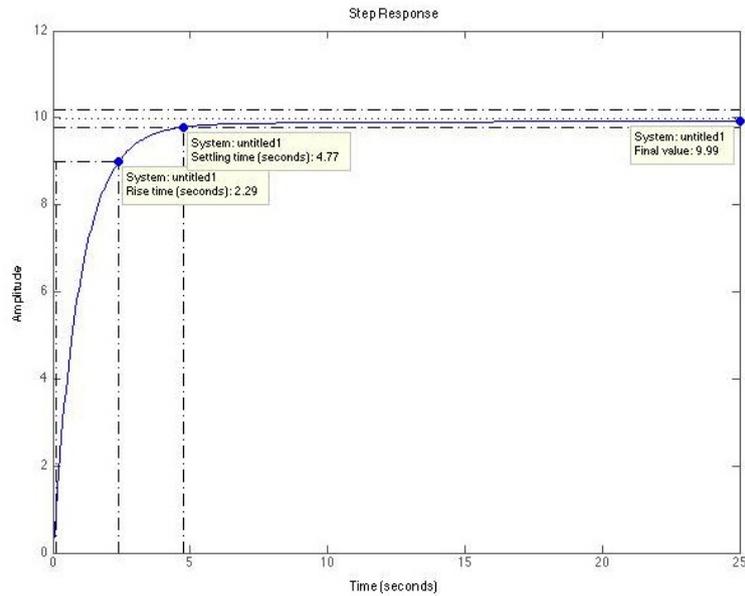
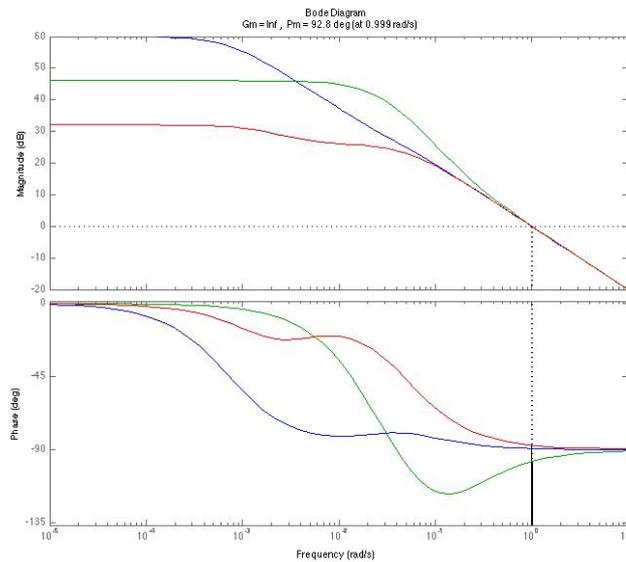


Figura 32: Diagramma di Bode di una rete attenuatrice

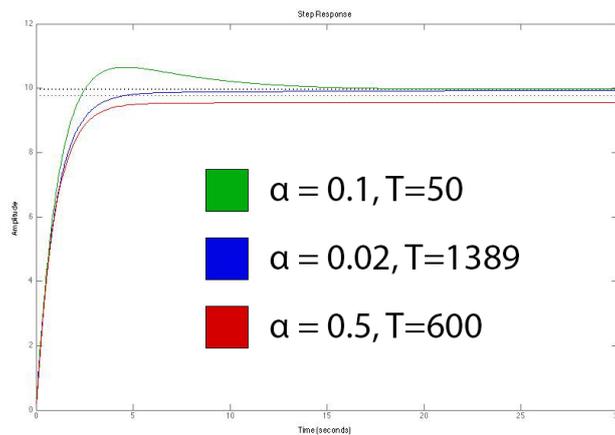
Nel grafico sono evidenziati il tempo di salita  $T_r \approx 2.29\text{s}$ , il tempo di assestamento  $T_s = 4.77\text{s}$ <sup>11</sup> e il valore di regime dell'uscita pari a  $9.99\text{m/s}$ .

In Figura (33) possiamo osservare il comportamento del diagramma di Bode e della risposta al gradino per diversi valori dei parametri  $\alpha$  e  $T$  rispetto all'andamento ottimo calcolato. L'andamento evidenziato dalle linee rossa e verde non soddisfa le specifiche di progettazione per quanto riguarda l'errore a regime.

<sup>11</sup>In questo caso, anche il tempo di assestamento si mantiene entro il limite imposto al tempo di salita



(a) Diagramma di Bode



(b) Risposta al gradino

Figura 33: Variazioni dei parametri  $\alpha$  e  $T$  della rete attenuatrice

#### 2.4.4 Conclusioni sullo studio in frequenza

Studiando il sistema con un controllore di tipo proporzionale, abbiamo riscontrato il medesimo problema trovato con il metodo *trial and error*: le specifiche sono rispettate ma il sistema non è meccanicamente realizzabile.

Con l'inserimento di una rete attenuatrice ed un attento calcolo dei relativi parametri, siamo riusciti a migliorare la risposta al gradino a catena chiusa in modo da ottenere un sistema che rispetti in modo ottimale tutti i vincoli imposti.

## 3 Simulazione del modello mediante Simulink

### 3.1 Modellizzazione del sistema

In questo capitolo il modello studiato verrà implementato in *Simulink* e ne sarà studiata la risposta a catena aperta. Questa analisi preliminare è fondamentale per poter procedere con la progettazione di qualunque tipo di controllore.

#### 3.1.1 Rappresentazione grafica e matematica del modello

Riprendiamo per l'implementazione in Simulink, il modello di capitolo 1.1.1

$$m\dot{v} = u - bv \quad (34)$$

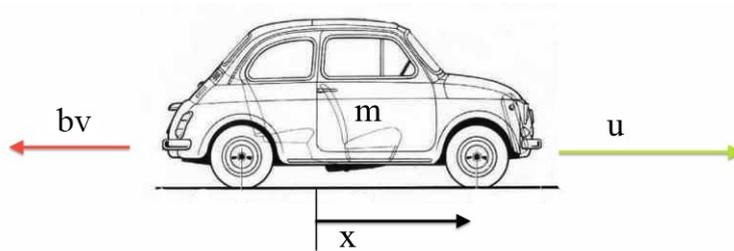


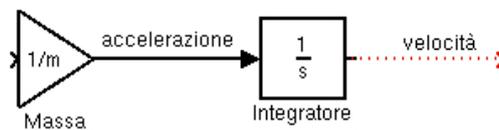
Figura 34: Modello grafico adottato

Manteniamo anche le assunzioni fatte inizialmente sui valori di massa del veicolo ( $m = 1000$  kg), coefficiente di forza avversa ( $b = 50$  Ns/m) e forza controllata ( $u = 500$  N).

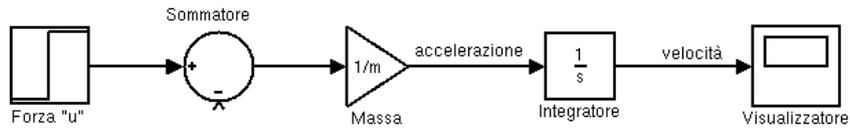
#### 3.1.2 Analisi in Simulink della risposta in catena aperta

Per disegnare in *Simulink* lo schema a blocchi del sistema iniziamo dal blocco centrale, che genera in uscita la velocità integrando l'accelerazione. Poichè in ingresso abbiamo una forza  $u$ , per ottenere l'accelerazione dovremo dividere tale forza per la massa.

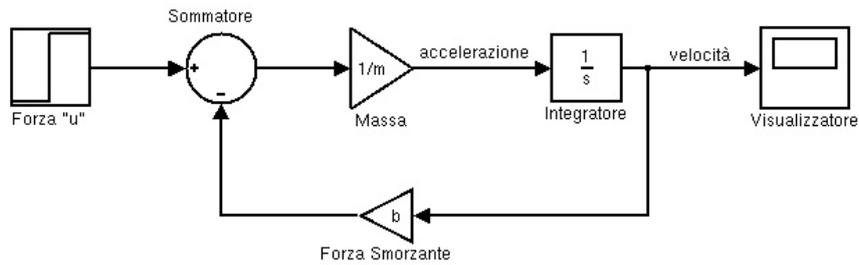
$$v = \int \frac{u(t)}{m} dt = \int \frac{dv}{dt} dt$$



Inseriamo poi la forza in ingresso che agirà come un gradino di ampiezza  $u$ . Il blocco sommatore è necessario per sottrarre la forza smorzante in retroazione.



Disegniamo infine il blocco smorzante che comprende tutte le forze contrarie al moto. Si ottiene il modello completo del sistema.



Dopo aver inserito nel *prompt* dei comandi di Matlab tutti i parametri di simulazione, tramite il blocco visualizzatore collegato all'uscita si può osservare il comportamento del sistema in risposta all'ingresso imposto (Figura (35)). Per questa simulazione fissiamo un tempo massimo di analisi di 120 secondi (corrispondente al valore delle ascisse in Figura (2), capitolo 1.2.1).

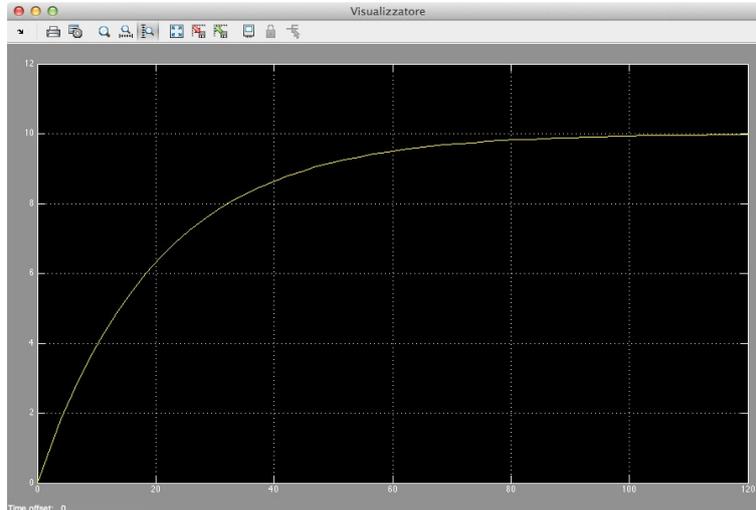


Figura 35: Risposta al gradino in catena aperta del sistema simulato

Come si può osservare dalla Figura (35), il comportamento simulato del sistema è identico a quello previsto dal calcolo della risposta ad anello aperto del capitolo 1.2.1. È necessario dunque migliorare il tempo di salita utilizzando gli accorgimenti già progettati e analizzati in Matlab: controllore PI, PID e rete attenuatrice.

### 3.1.3 Estrazione del blocco IN-OUT del sistema

Per poter implementare e simulare controllori complessi per il sistema analizzato in modo più comodo e chiaro possibile, è utile estrarre dal sistema in catena aperta un blocco di tipo *subsystem*. Questo ci permetterà di semplificare graficamente lo schema del sistema in catena chiusa.

Procediamo modificando ingresso e uscita del sistema a catena aperta, inserendo due blocchi di tipo *In1* e *Out1* come mostrato in Figura (36) ed inseriamo successivamente il seguente codice Matlab da riga di comando:

```
m = 1000;
b = 50;
u = 500;
[A,B,C,D] = linmod('CCSubsystem') %CCSubsystem e' il nome del file
                                   %del modello simulink
cruise_ss = ss(A,B,C,D);
```

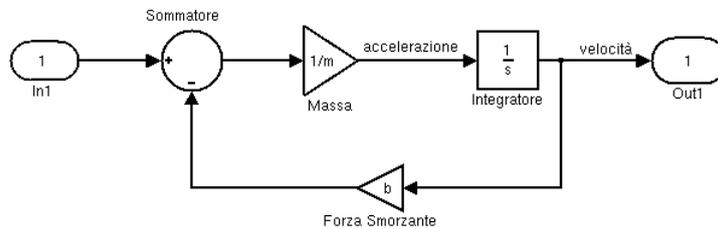


Figura 36: Blocchi del sistema per creare il *subsystem*

## 3.2 Simulazione del sistema con controllore PI e PID

Come abbiamo appreso dall'analisi in Matlab del comportamento del sistema in catena chiusa, un controllore PI è in grado di diminuire la *rise-time* della risposta portandolo entro i limiti richiesti dalle specifiche, evitando al contempo, grazie all'azione integrale, una salita troppo brusca.

### 3.2.1 Simulazione della risposta con controllore PI

Il progetto di un controllore di tipo Proporzionale-Integrale mediante i blocchi fondamentali di Simulink è visibile Figura (37)

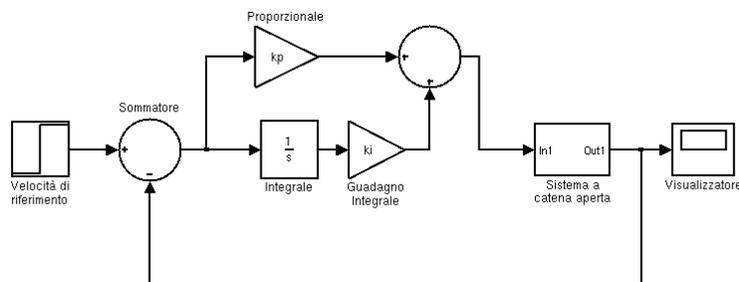


Figura 37: Schema a blocchi del sistema con controllore PI

In alternativa, *Simulink* mette a disposizione il blocco *Transfer Function* che implementa una funzione di trasferimento (Figura (38))<sup>12</sup>.

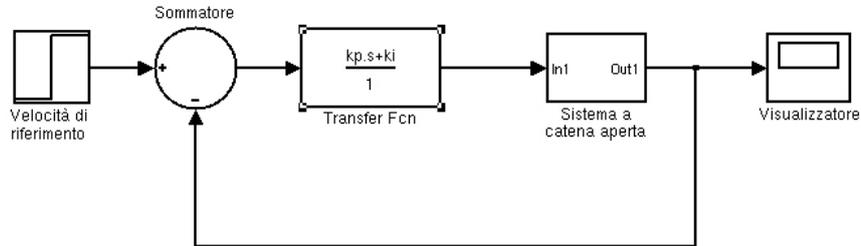


Figura 38: Utilizzo del blocco *Transfer Function*

Per la simulazione in catena chiusa del sistema, dobbiamo innanzitutto modificare il parametro temporale del simulatore passando da 120 a 10 secondi, entro i quali il transitorio dovrebbe ragionevolmente essere terminato avendo imposto come vincolo un *rise time* < 5 s.

Inseriamo nel *prompt* dei comandi i parametri di sistema e i valori di  $K_i$  e  $K_p$  trovati al capitolo 2.2.2

```
m = 1000;
b = 50;
r = 10;      %velocita' di riferimento
kp=1000;
ki=50;
```

In questo modo otteniamo la risposta al gradino di Figura (39) che, secondo le previsioni, è uguale a quella calcolata con Matlab in Figura (11).

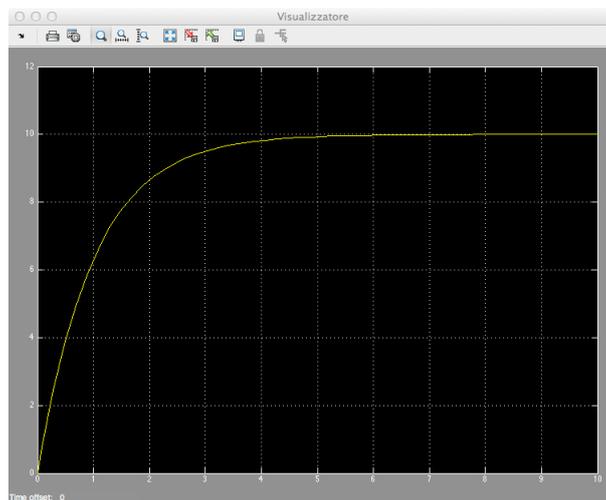


Figura 39: Risposta a catena chiusa del sistema con controllore PI

<sup>12</sup>Un sistema scritto in Simulink esattamente come in Figura (38) genererà un errore in quanto Simulink non permette di analizzare funzioni in cui il grado del numeratore sia maggiore del grado del denominatore. Per risolvere il problema, si veda il paragrafo seguente (3.2.2)

Pur essendo il problema affrontato, perfettamente risolto dal controllore proporzionale integrale, per completezza di studio analizziamo la risposta del sistema utilizzando un controllore di tipo PID.

### 3.2.2 Simulazione della risposta con controllore PID

Utilizziamo il blocco per le funzioni di trasferimento di Simulink per ottenere il sistema controllato di Figura (40). Poiché Simulink non permette la rappresentazione di funzioni in cui il grado del numeratore sia maggiore del grado del denominatore, siamo costretti ad inserire un polo doppio. La scelta di posizionarlo in alta frequenza è stata fatta per non influenzare la stabilità del sistema.

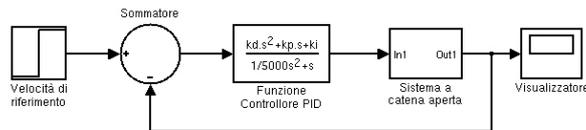


Figura 40: Schema a blocchi del sistema con controllore PID

Inseriamo da riga di comando il valore del guadagno differenziale  $K_d$ , risultato dell'analisi in Matlab al capitolo 2.2.3 e otteniamo la risposta al gradino di catena chiusa di Figura (41), che anche in questo caso combacia con quella del modello matematico di Figura (13)

```
%tutti gli altri parametri sono gia' stati inseriti in matlab
%per gli studi precedenti
kd=20;
```

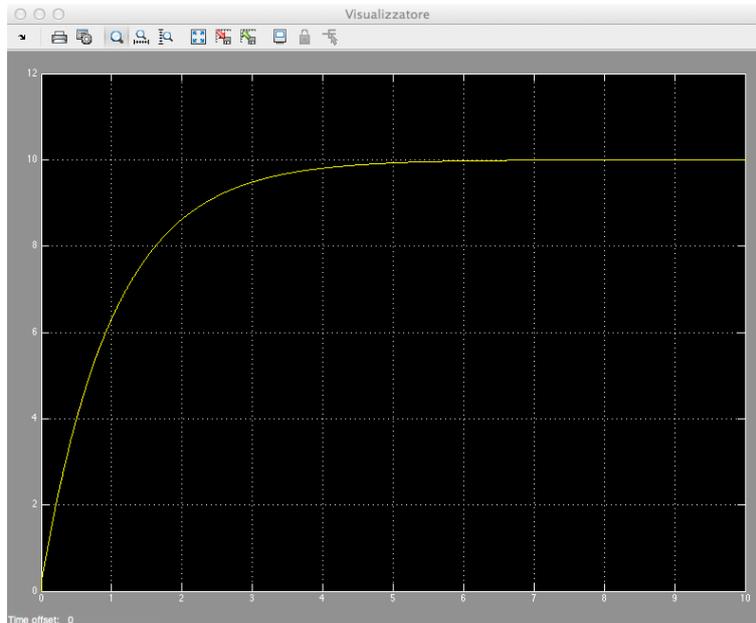


Figura 41: Risposta a catena chiusa del sistema con controllore PID

### 3.3 Simulazione di controllore con rete attenuatrice

Analizziamo ora la risposta al gradino del sistema con una rete attenuatrice aggiuntiva utilizzando i parametri ricavati dallo studio del luogo delle radici e, successivamente, quelli ricavati dall'analisi in frequenza.

#### 3.3.1 Analisi con parametri ricavati dal luogo delle radici

Innanzitutto occorre richiamare la funzione di trasferimento della rete attenuatrice (equazione (35)) e la corrispondente funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa (equazione (36))

$$H(s) = \frac{s + z_0}{s + p_0} \quad (35)$$

$$T(s) = \frac{K_p s + K_p z_0}{ms^2 + (b + mp_0 + K_p)s + (bp_0 + K_p z_0)} \quad (36)$$

La ricostruzione in Simulink è abbastanza semplice, utilizziamo il blocco *transfer function* preceduto da un amplificatore che fornisce il guadagno della rete, inseriamo i valori trovati nello studio di capitolo 2.3.2 per ottenere lo schema di Figura (42)

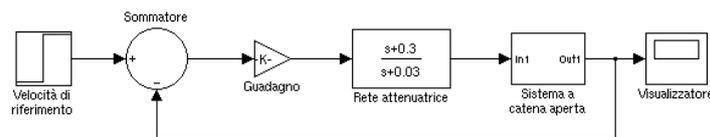


Figura 42: Schema a blocchi del sistema con rete ritardatrice

Per la simulazione, un intervallo di 10s non è sufficiente se si vuole osservare chiaramente la risposta al gradino, è perciò necessario aumentarlo a 20s. Osserviamo in Figura (43) due possibili risposte, a parità di guadagno, a seconda della posizione dello zero e del polo.

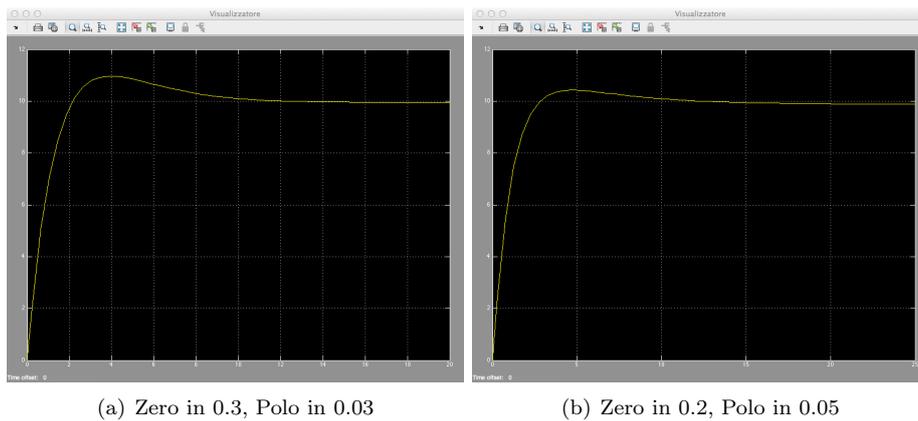


Figura 43: Risposta al gradino con rete attenuatrice

Come già detto a proposito delle reti attenuatrici, è necessario scegliere accuratamente le posizioni di zero e polo per ottenere un buon compromesso tra *rise time*, *overshoot* e *steady-state error*.

Nel primo caso (Figura 43a), abbiamo un rapporto  $z/p = 10$  mentre nel secondo caso (Figura 43b)  $z/p = 4$ . Nel secondo caso si rileva di conseguenza un tempo di salita maggiore e un errore a regime maggiore, il fenomeno di *overshoot* è invece ridotto.

### 3.3.2 Analisi con parametri ricavati dallo studio in frequenza

Analizzando il sistema in frequenza, la funzione di trasferimento della rete attenuatrice si può scrivere in questo modo

$$H(s) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} \right) \quad \text{con } [\alpha < 1] \quad (37)$$

Anche in questo caso è possibile utilizzare il blocco *transfer function* ma è ora necessario aggiungere il guadagno  $1/\alpha$  da cui lo schema a blocchi di Figura (44)

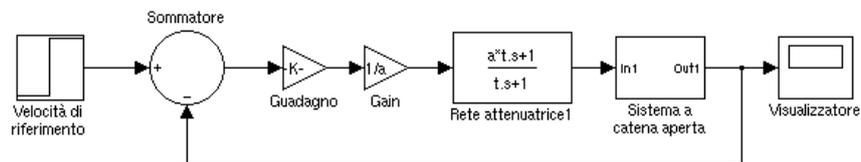


Figura 44: Schema a blocchi del sistema con rete ritardatrice

Utilizzando i parametri  $\alpha \approx 0.02$  e  $T \approx 1389$  calcolati al capitolo (2.4.3) otteniamo la risposta al gradino di Figura (45).

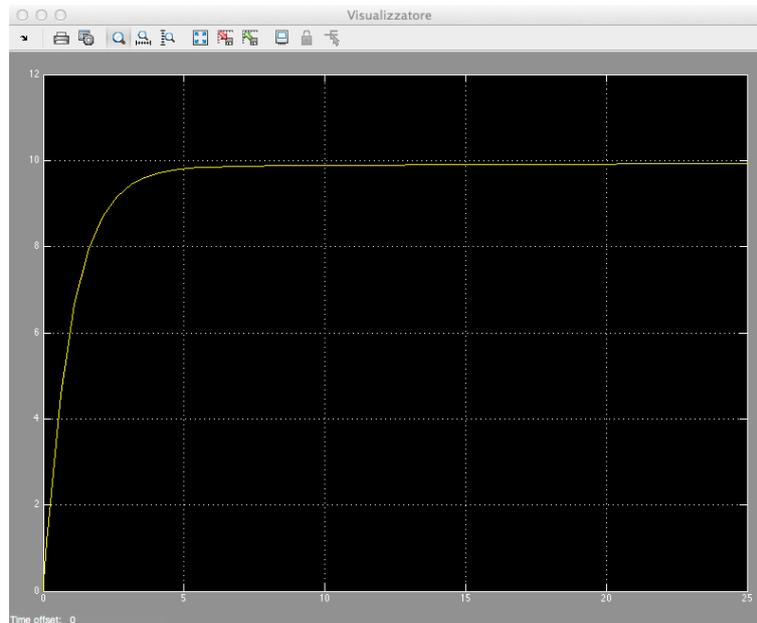


Figura 45: Risposta al gradino con rete attenuatrice in frequenza

### 3.3.3 Conclusioni sulla simulazione del sistema

Il comportamento della risposta al gradino con un semplice controllore proporzionale non è stato simulato in quanto, come appreso dallo studio in Matlab, non offriva una soluzione accettabile dal punto di vista della realizzazione meccanica di un eventuale mezzo. Inserendo un'azione integratrice il sistema si comporta come atteso rispondendo al gradino senza sovraelongazioni e raggiungendo il valore di regime entro il *rise-time* imposto dalle specifiche. Un comportamento pressoché identico è ottenuto utilizzando un controllore di tipo PID dove l'azione derivatrice ammorbidisce la risposta.

Per quanto riguarda invece il comportamento del sistema con rete attenuatrice, utilizzando i parametri trovati con il metodo del luogo delle radici possiamo osservare una sovraelongazione (causata dall'inserimento di uno zero) tanto più marcata quanto più alto è il valore dello zero.

La risposta ricavata dallo studio in frequenza invece, pur avendo un errore a regime diverso da zero, si mantiene entro tutti i limiti imposti dal modello e non presenta sovraelongazioni.

### 3.4 Simulazione con introduzione di un disturbo

Finora abbiamo analizzato la risposta del sistema a catena aperta e a catena chiusa in una condizione ottima in cui gli unici disturbi presenti erano già compresi nella forza  $bv$  (Figura (34)).

Introduciamo ora l'azione disturbatrice di una serie di raffiche di vento alla velocità massima di 8 nodi, ( $\approx 4.1$  m/s) che investono il mezzo con una angolazione di  $30^\circ$ . (Figura (46))

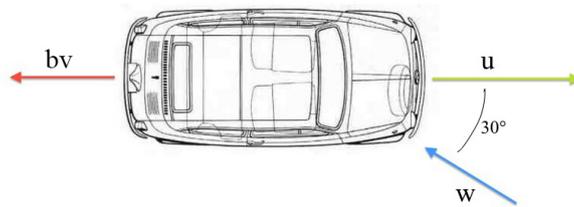


Figura 46: Rappresentazione grafica del problema con il disturbo del vento

Possiamo approssimare l'azione del vento con una sinusoide, rialzata in modo da non essere mai negativa. L'ampiezza  $A$  di tale sinusoide equivale alla forza variabile di trascinamento del vento che si va a sommare alla forza  $kv$  opposta al moto e si può calcolare con l'equazione (38)

$$A = c_d \cdot \delta_{air} \cdot \Sigma_{car} \cdot \frac{v^2}{2} \quad (38)$$

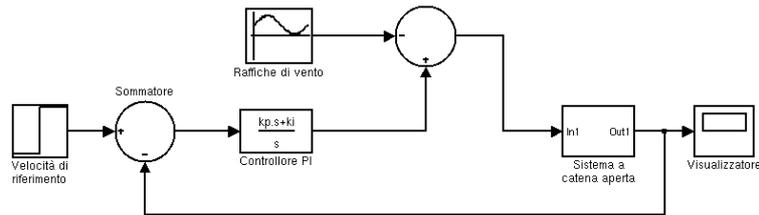
dove  $c_d$  è il *coefficiente di drag* o di resistenza aerodinamica<sup>13</sup>,  $\delta_{air}$  indica la densità dell'aria ( $\approx 1.2$  kg/m<sup>3</sup>),  $\Sigma_{car}$  indica la superficie della macchina interessata dalle raffiche e  $v$  corrisponde alla differenza della velocità del mezzo e della componente di vento opposta al moto, nel nostro caso  $w \cos(30^\circ)$ .

<sup>13</sup>Il coefficiente di drag per una sagoma cubica investita di taglio è  $\approx 0.8$

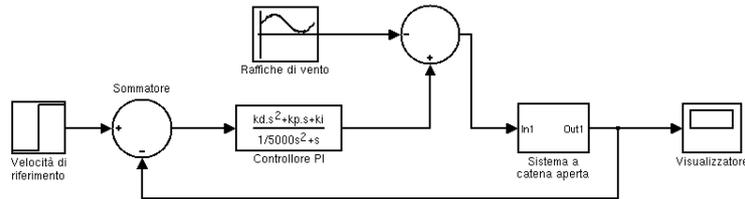
Otteniamo una velocità pari a  $10 - (-4.1) = 14.1$  m/s e supponendo una superficie  $\Sigma_{car}$  di  $2.5$  m<sup>2</sup> calcoliamo la forza trascinante del vento

$$A = 0.8 \cdot 1.2 \cdot 2.5 \cdot \frac{14.1^2}{2} \approx 238.6 \text{ N} \quad (39)$$

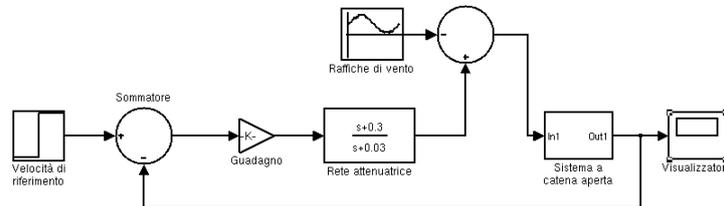
Per simulare questo disturbo in Simulink, si può utilizzare un blocco *Sine Wave* e assegnare all'ampiezza e al *bias*<sup>14</sup> il valore di  $A$  per ottenere gli schemi di Figura (47)



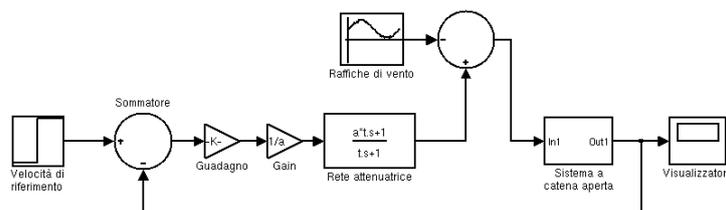
(a) Controllore PI



(b) Controllore PID



(c) Controllore con rete attenuatrice



(d) Controllore con rete attenuatrice in frequenza

Figura 47: Schema dei vari sistemi di controllo con l'azione di disturbo

<sup>14</sup>Il *bias* corrisponde allo sfasamento in verticale della funzione.

Osserviamo per primo il caso del controllore proporzionale-integrale, la cui risposta al gradino con il disturbo aggiuntivo è quella di Figura (48).

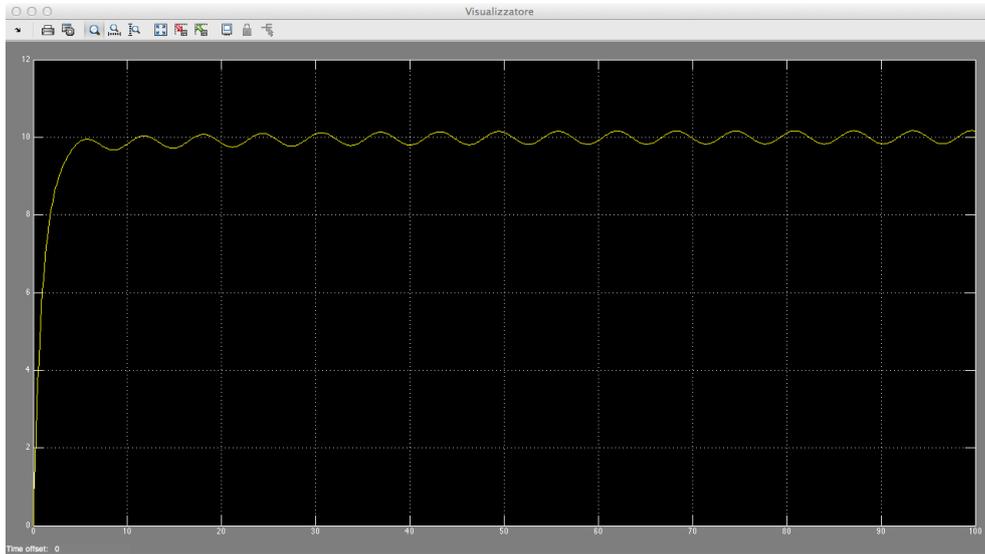


Figura 48: Risposta al gradino con presenza di disturbo (PI)

La risposta al gradino è sostanzialmente identica se utilizziamo un controllore di tipo Proporzionale-Integrale-Derivativo (Figura (49))

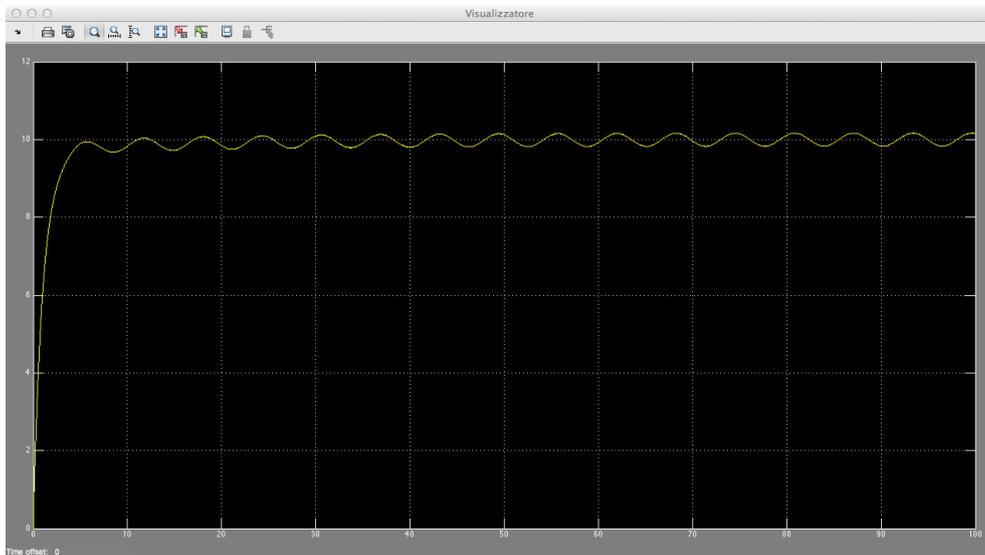


Figura 49: Risposta al gradino con presenza di disturbo (PID)

Utilizzando come controllore una rete attenuatrice con i parametri ricavati mediante studio del luogo delle radici otteniamo la risposta di Figura (50)

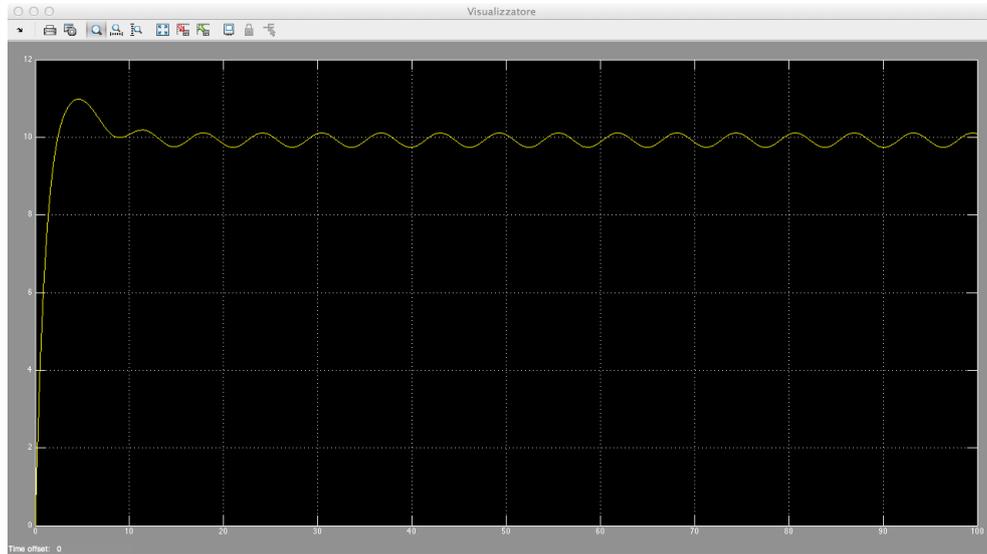


Figura 50: Risposta al gradino con presenza di disturbo (LAG)

Utilizzando infine la rete attenuatrice con i parametri ottenuti mediante studio in frequenza, otteniamo la risposta in Figura (51)

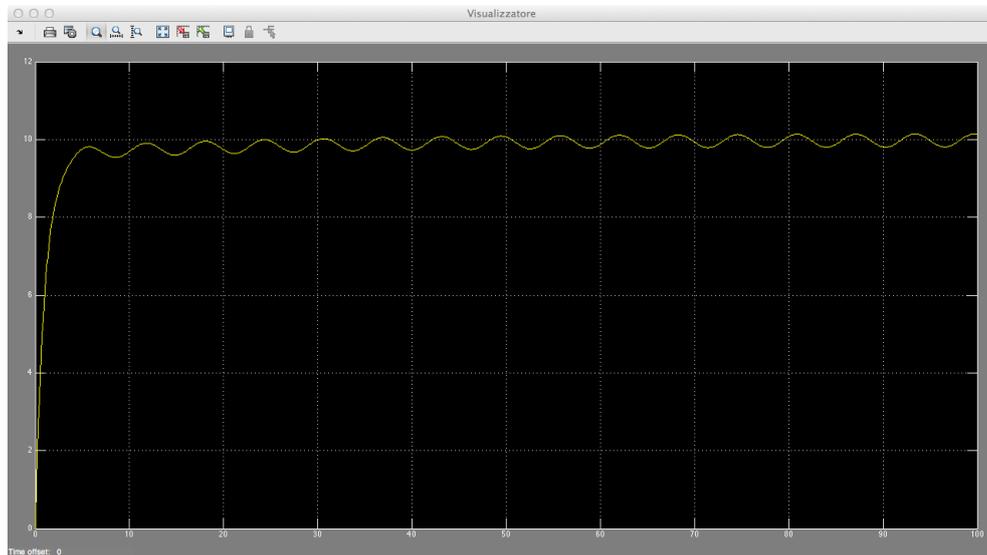


Figura 51: Risposta al gradino con presenza di disturbo (LAG)

Possiamo confrontare il comportamento delle quattro risposte al gradino con disturbo in Figura (52)

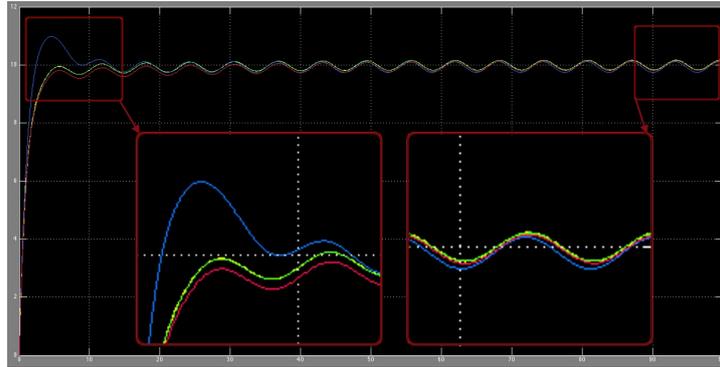


Figura 52: Sovrapposizione delle quattro risposte al gradino: in **giallo** quella del controllore PI, in **verde** quella del PID, in **blu** quella della rete attenuatrice derivata dal luogo delle radici e in **rosso** quella della rete attenuatrice derivata dall'analisi in frequenza

### 3.5 Conclusioni sulla simulazione con disturbo

Come si può notare dalla Figura (52), la risposta al gradino con disturbo sinusoidale è molto simile tra i quattro tipi di controllo utilizzati e tende, esaurito il transitorio, ad oscillare attorno al valore di regime. Osservando nel dettaglio il comportamento a regime in Figura (53) tuttavia, si notano alcune differenze:

- *La risposta con controllore PI e PID* oscilla effettivamente attorno al valore desiderato di 10m/s e i massimi e i minimi di oscillazione si mantengono entro le specifiche imposte ( $\pm 2\%$ )
- *La risposta con rete attenuatrice* con i parametri ricavati tramite analisi in frequenza presenta un lieve errore a regime ma le oscillazioni si mantengono entro i limiti imposti dalle specifiche di sistema
- *La risposta con rete attenuatrice* con i parametri ricavati mediante lo studio del luogo delle radici invece, oltre a mostrare una sovralongazione di 10.9m/s, presenta un errore a regime tale da non soddisfare le condizioni imposte.

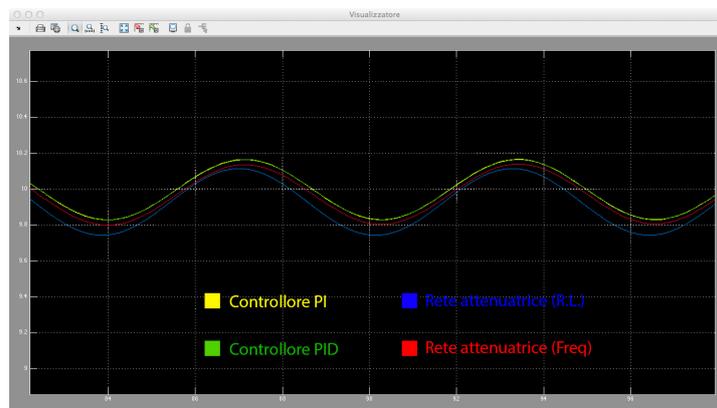


Figura 53: Ingrandimento del comportamento a regime con disturbo

## 4 Conclusioni

In questa tesi è stato modellizzato e successivamente analizzato e simulato un sistema di controllo di velocità di crociera, ovvero un CONTROLLO in grado di far mantenere ad un veicolo una velocità impostata, in modo il più possibile costante anche in presenza di disturbi.

Lo studio del sistema è stato effettuato con approcci diversi:

- utilizzando un controllori di tipo P, PI e PID;
- utilizzando il metodo dell'analisi del luogo delle radici ed aggiungendo successivamente una rete attenuatrice
- utilizzando la sintesi in frequenza ed aggiungendo successivamente una rete attenuatrice

I risultati ottenuti matematicamente sono stati poi simulati mediante *Simulink* per osservarne il comportamento reale e valutarne la capacità di reiezione dei disturbi.

Il primo controllore analizzato (P) pur soddisfacendo matematicamente le specifiche imposte dal problema, è stato considerato non compatibile come soluzione in quanto, a causa della sua risposta eccessivamente pronta, richiederebbe in fase di realizzazione impulsi di forza difficilmente compatibili con il motore di un automezzo. Per tale motivo non sono state considerate valide anche tutte le soluzioni che presentassero il medesimo problema: quella ottenuta mediante analisi del luogo delle radici senza rete attenuatrice e quella ottenuta mediante studio in frequenza senza rete attenuatrice.

Ripercorrendo i risultati ottenuti con gli altri metodi e mettendoli a confronto, si può osservare come tutti producano una risposta al gradino in grado di soddisfare le specifiche di sistema. Possiamo osservare le differenze di comportamento nella seguente tabella

Controllore	T. salita	Assestamento	Sovraelongazione	Errore a regime
PI	2.2s	3.91s	assente	assente
PID	2.24s	3.99s	assente	assente
$LAG_{Root}$	1.51s	9.37s	10.9 m/s	0.05 m/s
$LAG_{Freq}$	2.29s	4.77s	assente	0.01 m/s

Per quanto riguarda invece la capacità di reiezione dei disturbi, il comportamento della risposta al gradino utilizzando controllori di tipo PI e PID è pressoché identica e soddisfa perfettamente tutte le specifiche di sistema. La risposta ottenuta con l'inserimento della sola rete attenuatrice mediante analisi in frequenza presenta un lieve errore a regime che tuttavia rimane entro i limiti imposti per tale parametro. La risposta ottenuta con l'utilizzo di una rete attenuatrice mediante lo studio con luogo delle radici presenta invece un errore a regime tale da non soddisfare il vincolo fissato di  $\pm 0.02$  m/s.

Possiamo dunque concludere, in base ai risultati ottenuti, che i controllori che rispondono nel modo più soddisfacente alle specifiche imposte anche in presenza di disturbi sono quelli Proporzionale-Integrale (PI) e Proporzionale-Integrale-Derivativo (PID).



## **Ringraziamenti**

Desidero innanzitutto ringraziare il mio relatore, il Prof. Beghi per avermi dato la possibilità di approfondire un argomento tanto interessante ed avermi seguito e consigliato durante la stesura della tesi. Ringrazio inoltre con affetto i miei genitori ed i miei fratelli Francesco ed Elena per il sostegno non solo economico, la stima, la pazienza e l'umorismo con cui mi hanno accompagnato durante la mia carriera universitaria. Un grazie particolare alla mia fidanzata Giovanna ed ai suoi familiari, che mi hanno supportato con affetto e fornito un preziosissimo aiuto in tutti questi anni. Infine vorrei ringraziare tutti i parenti e gli amici che mi sono stati vicini, in particolare i miei compagni di corso, il coro di san Canciano, il gruppo scout Venezia 4°, Donato, Cecilia, Lorenza e Valentina.