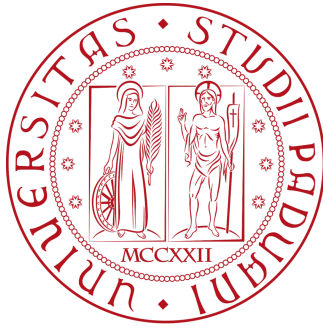




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Simmetrie e anomalie in meccanica quantistica

Relatore

Prof. Roberto Volpato

Laureando

Alessio Ballan

Anno Accademico 2025/2026

Indice

Introduzione	v
1 Quadro teorico	1
1.1 Simmetrie in meccanica quantistica	1
1.2 Estensioni centrali	3
1.3 Coomologia di gruppi	5
1.4 Estensioni centrali e degenerazioni	7
1.5 Anomalie e inconsistenze globali	8
2 Modello 1D	11
2.1 Definizione del modello	11
2.2 Simmetrie e proiettività	12
2.2.1 Simmetrie	12
2.2.2 Proiettività della rappresentazione	12
2.3 Spettro energetico e verifica numerica	14
3 Modello 2D	17
3.1 Particella vincolata	17
3.1.1 Discussione generale	17
3.1.2 Derivazione dell'equazione	18
3.2 Toro e campo EM	20
3.2.1 Geometria del toro	20
3.2.2 Campo magnetico e "minimal coupling"	21
3.2.3 Hamiltoniana effettiva	22
3.3 Simmetrie e proiettività	22
3.3.1 Simmetrie	22
3.3.2 Proiettività della rappresentazione	23
3.3.3 Conseguenze sullo spettro energetico	24
3.4 Simulazione numerica	24
Conclusioni	27

Introduzione

Le simmetrie giocano un ruolo fondamentale nella fisica moderna. Una teoria fisica, infatti, è definita da uno o più oggetti che si vogliono studiare e dalle leggi che ne regolano l'evoluzione temporale, ossia la dinamica. Tali oggetti sono parametrizzati da un insieme di variabili, mentre le leggi corrispondono alle equazioni del moto. Può accadere che esistano alcune trasformazioni delle variabili che lasciano invariata la dinamica del sistema e l'insieme di queste invarianze costituisce un gruppo, detto gruppo di simmetria. Ad ogni teoria fisica si può associare un gruppo di simmetria (eventualmente banale): esempi noti sono il gruppo di Galileo (meccanica classica) o quello di Poincaré (relatività speciale). La presenza di simmetrie implica inoltre la conservazione di alcune quantità, ossia impone dei vincoli alla dinamica del sistema e ne permette una descrizione ridotta.

Dalla teoria classica si può passare a quella quantistica tramite un processo di quantizzazione. La teoria quantizzata consiste nell'associazione al sistema di un opportuno spazio di Hilbert in cui gli stati sono raggi vettore e le osservabili sono operatori autoaggiunti. L'evoluzione temporale è invece governata dall'equazione di Schrodinger. Si può definire anche in questo caso un'invarianza del sistema fisico come una trasformazione che lascia invariata la dinamica, ossia l'equazione di Schrodinger. L'insieme di queste invarianze costituisce il gruppo di simmetria quantistico.

Ci si può chiedere quindi se il gruppo di simmetria classico e quello quantistico coincidano. La risposta è in generale no: i due gruppi differiscono in una maniera molto precisa che viene descritta, come si vedrà, dal concetto matematico di estensione centrale del gruppo. Quando questo avviene la teoria viene detta anomala. In fisica esistono vari tipi di anomalie ben definite nel contesto delle teorie quantistiche di campo; le suddette anomalie, però, possono emergere anche in meccanica quantistica non relativistica. In questa tesi tratteremo il secondo caso, con l'obiettivo di mostrare come la struttura topologica dei gruppi di simmetria influenzi la dinamica quantistica.

Questo fenomeno non deve stupire particolarmente poiché la meccanica classica emerge come approssimazione della meccanica quantistica quando $\hbar \rightarrow 0$. Ci si può quindi aspettare un'ambiguità di fondo nel processo della quantizzazione che altera la realizzazione delle simmetrie e, in ultima analisi, dà luogo alle anomalie.

A livello pratico, queste anomalie emergono come un fattore di fase aggiuntivo che modifica la legge di composizione degli operatori unitari che implementano le trasformazioni del gruppo (si parla di rappresentazioni proiettive). Le possibili estensioni centrali del gruppo di simmetria, che generano queste anomalie, sono classificabili a partire dallo studio della topologia del gruppo stesso e nello specifico di una struttura algebrica detta secondo gruppo di coomologia a coefficienti in $U(1)$.

Lo studio astratto della topologia del gruppo di simmetria permette di capire se questo possa variare o meno nel processo di quantizzazione. Per verificare se questa variazione avviene effettivamente è necessario studiare anche il sistema quantistico concreto e come il gruppo viene rappresentato su di esso. Si mostrerà inoltre che la presenza di rappresentazioni proiettive pone dei vincoli topologici sulla dinamica del sistema nella forma di degenerazioni forzate o “level crossing” dello spettro energetico. Dunque, nella presenza di anomalie in meccanica quantistica gioca un ruolo fondamentale la topologia, in particolare l'accoppiamento tra topologie non banali sia del gruppo di simmetria sia del sistema fisico considerato.

Nella tesi si tratterà lo studio generale del secondo gruppo di coomologia dei gruppi di simmetria e come questo influisca sulla dinamica dei sistemi. Si presenteranno poi due esempi in cui le predizioni teoriche date dal gruppo di simmetria sugli spettri energetici vengono confermate da simulazioni numeriche, mostrando come proprietà topologiche astratte si traducano in effetti fisici osservabili.

Capitolo 1

Quadro teorico

Nella sezione 1.1 di questo capitolo si introducono le nozioni relative alle strutture matematiche usate in meccanica quantistica e alle trasformazioni di simmetria. Queste sono sviluppate a partire dalla loro struttura di gruppo e si conclude con il loro ruolo di conservazioni nella dinamica di un sistema. Nella sezione 1.2 si introduce il problema delle rappresentazioni proiettive delle simmetrie e si riformula quest'ultimo in termini di estensioni centrali e sequenze esatte. Si enuncia quindi il teorema di esistenza di estensioni centrali relativo a sistemi quantistici. Nella sezione 1.3 si costruisce, a partire dalle rappresentazioni proiettive, il secondo gruppo di coomologia del gruppo G a coefficienti in $U(1)$, ossia $H^2(G, U(1))$, e se ne mostra la corrispondenza biunivoca con le estensioni centrali di G . Nella sezione 1.4 si dimostra che sistemi quantistici in cui un gruppo di simmetria è rappresentato proiettivamente ammettono necessariamente uno spettro energetico degenere, fatto usato per rilevare la presenza di anomalie nei modelli concreti.

1.1 Simmetrie in meccanica quantistica

Si consideri $\mathcal{H}$, spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia $\mathbb{P}\mathcal{H}$ lo spazio proiettivo dei sottospazi lineari 1-dimensionalmente di $\mathcal{H}$:

$$\mathbb{P}\mathcal{H} := (\mathcal{H} \setminus \{0\}) / \sim$$

dove $f \sim g : \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^X : f = \lambda g$ con $f, g \in \mathcal{H}$. Sia inoltre $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}$ la proiezione canonica dello spazio quoziente $\mathbb{P}\mathcal{H}$.

$\mathbb{P}\mathcal{H}$ è lo spazio degli stati in meccanica quantistica poiché l'informazione fisica è contenuta nei valori di aspettazione della norma quadra della funzione d'onda, dunque ci si può limitare a considerare solo elementi di $\mathcal{H}$ a meno di fasi moltiplicative.

Si definisce la *probabilità di transizione* tra due stati $\phi = \gamma(f)$ e $\psi = \gamma(g)$, con $f, g \in \mathcal{H}$, la funzione:

$$\delta(\phi, \psi) := \left| \left\langle \frac{f}{\|f\|}, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle \right|^2$$

Sperimentalmente, ciò che si può misurare di un sistema quantistico sono le distribuzioni di probabilità associate agli osservabili. Tali distribuzioni si possono sempre esprimere come probabilità di transizione tra un generico stato e un autostato di un osservabile. Dunque ci si aspetta che le simmetrie fisiche siano trasformazioni che lascino invariate tali misurazioni.

Definiamo quindi una *trasformazione di simmetria* $\mathcal{T}$ come una corrispondenza biunivoca tra stati di $\mathcal{H}$ tale da preservare il modulo quadro dei prodotti scalari (quindi le probabilità di transizione).

Queste dovranno innanzitutto preservare il prodotto interno, sulla base del quale è definita la δ . Si definisce $U(\mathcal{H})$ l'insieme delle mappe $\mathbb{C}$ -lineari e biettive $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tali che

$$f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$$

Si vede facilmente che $U(\mathcal{H})$ costituisce un gruppo con l'operazione di composizione; per questo motivo ci si riferisce ad esso come al *gruppo unitario di $\mathcal{H}$* e ai suoi elementi come operatori unitari. In generale si definiscono anche gli operatori antiunitari $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ come trasformazioni antilineari e biettive tali che

$$\langle Vf, Vg \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}, \quad V(af + bg) = \bar{a}Vf + \bar{b}Vg,$$

per ogni $f, g \in \mathcal{H}$ e $a, b \in \mathbb{C}$. In particolare $V(if) = -iV(f)$.

Le simmetrie però devono preservare le probabilità di transizione, dove l'informazione non sta nello stato ma nella sua classe di equivalenza su $\mathbb{P}\mathcal{H}$. Quindi risulta più naturale definire le simmetrie come trasformazioni sullo spazio di Hilbert proiettivo, i cui elementi sono gli effettivi stati fisici. Definiamo il gruppo $Aut(\mathbb{P}\mathcal{H})$ degli automorfismi proiettivi come l'insieme di mappe biettive $T : \mathbb{P}\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}$ tali che

$$\delta(T\phi, T\psi) = \delta(\phi, \psi) \quad \text{con} \quad \phi, \psi \in \mathbb{P}\mathcal{H}$$

dove la struttura di gruppo è data dalla composizione.

Chiaramente le due interpretazioni matematiche che abbiamo dato delle trasformazioni di simmetria non sono indipendenti; anzi, è proprio la loro connessione non banale che sarà al centro della discussione di questa tesi e permetterà di fare delle inferenze importanti sui sistemi fisici considerati.

Definiamo quindi per ogni $U \in U(\mathcal{H})$ la mappa $\hat{\gamma}(U) : \mathbb{P}\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}$ tale che $\hat{\gamma}(U)(\psi) := \gamma(U(g))$ per ogni $\psi = \gamma(g)$ con $\psi \in \mathbb{P}\mathcal{H}, g \in \mathcal{H}$. Si può mostrare che $\hat{\gamma}$ è un omomorfismo di gruppi. Questa connessione è chiarita esplicitamente dal teorema di Wigner:

Teorema 1.1.1 (Teorema di Wigner). *Per ogni trasformazione $T \in Aut(\mathbb{P}\mathcal{H})$ c'è un operatore unitario o antiunitario U con $T = \hat{\gamma}(U)$.*

Le trasformazioni di simmetria sono quindi rappresentate come opportuni cambi di base dello spazio di Hilbert, con eventuale coniugazione complessa nel caso di implementazione antiunitaria.

Vista l'importanza del ruolo che i gruppi definiti giocano, è necessario introdurre su di essi un po' di struttura matematica ulteriore in modo da poterne studiare più concretamente le caratteristiche. Si può dotare $U(\mathcal{H})$ della *topologia forte*, una base della quale è data dagli intorni degli elementi $V \in U(\mathcal{H})$ definiti come

$$\{U \in U(\mathcal{H}) : \|V(f) - U(f)\| < \epsilon\} \quad \text{con} \quad f \in \mathcal{H}, \epsilon > 0$$

e di conseguenza $Aut(\mathbb{P}\mathcal{H})$ eredita la topologia quoziente tramite la proiezione canonica $\hat{\gamma}$.

Formalmente si assume che la quantizzazione di un gruppo di simmetria (supposto almeno topologico) G consista in un omomorfismo $T : G \rightarrow Aut(\mathbb{P}\mathcal{H})$ continuo. Questa assunzione segue da un punto di vista fisico sulla questione: ciascuna simmetria classica $g \in G$ dovrebbe indurre una trasformazione dello spazio degli stati quantistico che preservi δ (che è l'analogo in meccanica classica della forma simplettica preservata da g), da cui l'introduzione di una mappa T . Oltre a questo risulta ragionevole richiedere che tale operazione di quantizzazione implementi correttamente le caratteristiche delle simmetrie. Queste sono codificate dalla legge del gruppo di simmetria e dalla sua struttura matematica. Dunque è naturale chiedere che sotto T siano preservate anche le strutture topologiche e di gruppo di G e $Aut(\mathbb{P}\mathcal{H})$, da cui le condizioni di continuità e omomorfismo.

Di tutte le simmetrie fisiche, particolarmente importanti sono le *simmetrie della dinamica*, le quali formano un gruppo che definiamo G_d e sono quelle che vengono preservate nell'evoluzione temporale del sistema quantistico. Questa è regolata dal seguente postulato, come si può trovare in [2]:

Postulato .1 (Postulato di evoluzione temporale). *L'evoluzione temporale dello stato $|\psi(t)\rangle$ è governata dall'equazione di Schrödinger:*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

dove $H(t)$ è l'osservabile associata all'energia totale del sistema.

Se uno stato $|\psi(t)\rangle$ è soluzione dell'equazione di Schrödinger e $\mathcal{T}$ è una simmetria dinamica, indipendente da t , implementata da un operatore unitario W , allora ci si aspetta che $|\psi'(t)\rangle = W|\psi(t)\rangle$ sia ancora soluzione $\forall t$, ossia che valga ancora

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle = H(t) |\psi'(t)\rangle$$

Si può mostrare che questa condizione è soddisfatta se e solo se $[W, H(t)] = 0$. Una conseguenza di questa condizione, come mostrato in [2], è che $H(t)$ e W ammettono una base comune di autovettori e i relativi autospazi sono globalmente invarianti sotto l'azione di ciascun operatore. Inoltre possiamo definire con più precisione il gruppo G_d :

$$G_d = \{W \in U(\mathcal{H}) \mid [W, H] = 0\} \quad (1.1)$$

Se lo spettro hamiltoniano $\sigma(H)$ è discreto e non degenero, ogni autospazio è unidimensionale. In tal caso un operatore $W \in G_d$ preserva ciascun autospazio energetico e agisce su ogni autostato al più tramite una fase. Sotto queste ipotesi, le simmetrie che non mescolano autostati distinti possono essere considerate funzioni dell'hamiltoniana e non generano multipletti degeneri. Simmetrie di questo genere sono dette *simmetrie banali* del sistema e costituiscono un sottogruppo di G_d :

$$K_d := \{W \in U(\mathcal{H}) \mid W = f(H)\}.$$

Se invece $\sigma(H)$ è degenero, allora possono esistere trasformazioni unitarie che preservano gli autospazi energetici ma agiscono in modo non banale all'interno di essi. Si giunge quindi alla seguente affermazione:

$$G_d \text{ ammette simmetrie non banali} \iff \sigma(H) \text{ ha qualche degenerazione}$$

Quest'ultimo fatto sarà usato estensivamente nel seguito della tesi come strumento per rivelare la presenza di rappresentazioni proiettive delle simmetrie nei sistemi considerati.

1.2 Estensioni centrali

Per semplicità nelle seguenti sezioni tratteremo solo operatori unitari; l'estensione a quelli antiunitari è deducibile a meno di una coniugazione complessa dei risultati.

Abbiamo visto che la quantizzazione di un gruppo di simmetria G consiste nella scelta di una mappa T che realizzi $\forall g \in G$ un gruppo di trasformazioni di simmetria $\{\mathcal{T}(g)\}$ che per assunzione si comportano nel seguente modo:

$$\mathcal{T}(g_1)\mathcal{T}(g_2) = \mathcal{T}(g_1g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad (1.2)$$

Da queste trasformazioni è possibile risalire, grazie al teorema di Wigner, a degli operatori unitari $U_{\mathcal{T}(g)} := U(g)$ tali che $\hat{\gamma}(U(g)) = \mathcal{T}(g)$. Per la definizione stessa di $\hat{\gamma}$, quest'operazione lascia un'ambiguità sui fattori di fase associati agli $U(g)$. In generale si potrà definire un gruppo di operatori unitari $\{U(g)\}$ con la seguente legge di gruppo:

$$U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2) \quad \omega(g_1, g_2) \in U(1) \quad (1.3)$$

$\{U(g)\}$ costituisce una *rappresentazione proiettiva* del gruppo G su $\mathcal{H}$. Il fattore di fase è fissato dalla regola $U(e_G) = id_{\mathcal{H}}$, che implica $\omega(e, e) = 1$. Sfruttando l'ambiguità sulla scelta della fase lasciata dal teorema di Wigner, è possibile ridefinire gli operatori unitari come $U'(g) = \lambda(g)U(g)$ dove $\lambda : G \rightarrow U(1)$ per cercare di riassorbire il fattore ω nella legge di gruppo, ossia tale che $\omega(g_1, g_2) = 1 \forall g_1, g_2 \in G$. Se questo è possibile allora si parla di *rappresentazione unitaria* del gruppo G .

La sequenza di associazioni $g \rightarrow \mathcal{T}(g) \rightarrow U(g)$ non è definita in maniera univoca, ma il teorema di Wigner garantisce la suriettività della mappa $\hat{\gamma} : U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}U(\mathcal{H})$, dove si è definito $\mathbb{P}U(\mathcal{H}) := \hat{\gamma}(U(\mathcal{H})) \subseteq \text{Aut}(\mathbb{P}\mathcal{H})$. Questo fatto può essere sfruttato per studiare le rappresentazioni proiettive introducendo la nozione di sequenza esatta ed estensione centrale tramite un gruppo abeliano.

Definizione 1.2.1. Dato A gruppo abeliano e G gruppo generico, un'estensione centrale di G tramite A è data dalla sequenza esatta di omomorfismi di gruppi

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (1.4)$$

Esattezza della sequenza significa che il kernel di ciascuna mappa nella sequenza è uguale all'immagine della mappa precedente. Dunque questa sequenza è esatta se e solo se i è iniettiva, π è suriettiva e $\ker(\pi) \cong \text{im}(i) (\cong A \text{ per iniettività di } i)$.

L'estensione è detta centrale se $i(A)$ è nel centro di E , ossia $a \in A, b \in E \implies i(a)b = b i(a)$ (dove il prodotto tra i due è quello definito in E).

Nel nostro caso possiamo definire la sequenza di gruppi

$$1 \longrightarrow U(1) \xrightarrow{i} U(\mathcal{H}) \xrightarrow{\hat{\gamma}} \mathbb{P}U(\mathcal{H}) \longrightarrow 1 \quad (1.5)$$

con $i(\lambda) := \lambda \text{id}_{\mathcal{H}}$, $\lambda \in U(1)$. Come si può vedere in [7], $\ker(\hat{\gamma}) = U(1)\text{id}_{\mathcal{H}}$, quindi la sequenza è esatta e definisce un'estensione centrale di $\mathbb{P}U(\mathcal{H})$ tramite $U(1)$.

L'emergere di rappresentazioni proiettive nella quantizzazione di una simmetria G può essere riformulato nel seguente modo: dato l'omomorfismo continuo $T : G \rightarrow \mathbb{P}U(\mathcal{H})$, se esiste un omomorfismo continuo $S : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & G & & & \\ & & \swarrow S & \downarrow T & & & \\ 1 & \longrightarrow & U(1) & \xrightarrow{i} & U(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\hat{\gamma}} & \mathbb{P}U(\mathcal{H}) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (1.6)$$

allora il gruppo viene rappresentato in maniera unitaria. In altri termini, rappresentare il gruppo G tramite degli operatori unitari su $\mathcal{H}$ e poi proiettarli come operatori sullo spazio fisico $\mathbb{P}U(\mathcal{H})$ è del tutto equivalente a rappresentare direttamente G su $\mathbb{P}U(\mathcal{H})$ come da definizione di trasformazione di simmetria.

In generale questo omomorfismo non esiste, dunque non è sempre possibile considerare G come gruppo di simmetria quantistico tramite la rappresentazione continua S , mentre è possibile per l'estensione centrale del gruppo di simmetria classico. Questo fatto è garantito dal seguente teorema (come mostrato in [7])

Teorema 1.2.1. Sia G un gruppo e $T : G \rightarrow \mathbb{P}U(\mathcal{H})$ un omomorfismo. Allora esiste un'estensione centrale E del gruppo G tramite $U(1)$ e un omomorfismo $\tilde{S} : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U(1) & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\ & & \text{id} \downarrow & & \tilde{S} \downarrow & & \downarrow T \\ 1 & \longrightarrow & U(1) & \xrightarrow{i} & U(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\hat{\gamma}} & \mathbb{P}U(\mathcal{H}) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Si sceglie $E := \{(U, g) \in U(\mathcal{H}) \times G \mid \hat{\gamma}(U) = Tg\}$, $\tilde{S} := \text{pr}_1$ e $\pi := \text{pr}_2$. E è un sottogruppo del prodotto $U(\mathcal{H}) \times G$ perché $\hat{\gamma}$ e T sono omomorfismi. $\tilde{S}$ e π sono omomorfismi e infine vale $T \circ \pi = \hat{\gamma} \circ \tilde{S}$ $\square$

Dunque in generale possiamo trovare un'estensione centrale del gruppo di simmetria G tramite $U(1)$ che sia rappresentata in maniera unitaria; il prezzo da pagare è che la simmetria non sarà più quella classica ma solitamente un suo ricoprimento (un esempio noto in meccanica quantistica è il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ che viene sostituito dal suo ricoprimento $SU(2)$).

Riepilogando, in questa sezione abbiamo introdotto una possibile ambiguità nell'implementazione di una simmetria in un sistema quantistico e abbiamo mostrato che possiamo studiarla analizzando le estensioni centrali del gruppo di simmetria stesso.

1.3 Coomologia di gruppi

Per studiare questo problema introduciamo una struttura algebrica sul gruppo di simmetria G che ci permetterà di valutare, studiando solo le proprietà del gruppo, se questo ammetta o meno rappresentazioni proiettive.

In primo luogo ci accorgiamo che, se l'estensione centrale E fosse triviale, ossia omomorfa al gruppo $U(1) \times G$ con legge di composizione $(\alpha_1, g_1)(\alpha_2, g_2) = (\alpha_1\alpha_2, g_1g_2)$ per $(\alpha_i, g_i) \in U(1) \times G$, allora la mappa $\tilde{S}$ della (1.7) può essere scritta esplicitamente come

$$S : E \cong U(1) \times G \rightarrow U(\mathcal{H}), \quad (\alpha, g) \mapsto (\alpha, U(g)) \quad (1.8)$$

con legge di composizione $(\alpha_1, U(g_1))(\alpha_2, U(g_2)) = (\alpha_1\alpha_2, U(g_1)U(g_2))$. Nella notazione della (1.3) $\omega(g_1, g_2) \equiv 1 \ \forall g_1, g_2 \in G$. In altri termini, il gruppo $U(\mathcal{H}) \cong U(1) \times \mathbb{P}U(\mathcal{H})$ e G viene rappresentato in maniera unitaria, o nel senso della (1.6) esiste l'omomorfismo $S(g) := (1, U_g)$ in cui nessuna informazione viene persa perché la legge di gruppo è banale.

Esiste un criterio per determinare se l'estensione E sia o meno triviale: data la sequenza esatta (1.4), se esiste un omomorfismo

$$\sigma : G \rightarrow E \quad | \quad \pi \circ \sigma = id_G \quad (1.9)$$

allora è possibile definire una mappa $\psi : A \times G \rightarrow E$ con $(a, g) \mapsto i(a)\sigma(g)$ che si può mostrare essere un isomorfismo di gruppi e dunque rende l'estensione triviale.

Definizione 1.3.1. *Si dice che una sequenza esatta (tipo (1.4)) "splitta" se esiste un omomorfismo σ con le proprietà sopra descritte.*

Il caso che stiamo considerando è però quello in cui la sequenza esatta non splitta e otteniamo un insieme di operatori unitari $\{U(g)\}$ con legge di composizione data in (1.3). Affinché $\{U(g)\}$ costituisca un gruppo è necessario che ne rispetti le proprietà, quella cruciale è l'associatività, ossia $(U(g_1)U(g_2))U(g_3) = U(g_1)(U(g_2)U(g_3))$. Sfruttando la (1.3) si ottiene la seguente relazione

$$\begin{aligned} (U(g_1)U(g_2))U(g_3) &= \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)U(g_3) = \omega(g_1, g_2)\omega(g_1g_2, g_3)U(g_1g_2g_3) \\ &\stackrel{!}{=} U(g_1)(U(g_2)U(g_3)) = \omega(g_1, g_2g_3)\omega(g_2, g_3)U(g_1g_2g_3) \end{aligned} \quad (1.10)$$

dunque la fase aggiuntiva deve rispettare la condizione $\omega(g_1, g_2)\omega(g_1g_2, g_3) = \omega(g_1, g_2g_3)\omega(g_2, g_3)$, detta identità di cociclo, e la mappa $\omega : G \times G \rightarrow U(1)$ è detta 2-cociclo di G a valori in $U(1)$. Possiamo ridefinire l'identità di cociclo in maniera opportuna per la trattazione seguente introducendo la mappa $d_2 : Fun(G^2, U(1)) \rightarrow Fun(G^3, U(1))$ tale che

$$d_2\omega(g_1, g_2, g_3) = \omega(g_1, g_2)\omega(g_1g_2, g_3)\omega(g_2, g_3)^{-1}\omega(g_1, g_2g_3)^{-1} \quad (1.11)$$

così l'identità si riscrive come $d_2\omega = 1 (= id_{U(1)})$.

La sequenza esatta che emerge in questo caso diventa

$$1 \longrightarrow U(1) \xrightarrow{i} U(1) \times_\omega G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (1.12)$$

$$a \mapsto (a, 1_G) \quad (1.13)$$

e π è la proiezione sul secondo fattore. $U(1) \times_\omega G$ è un prodotto semidiretto con moltiplicazione data da:

$$(a, g_1)(b, g_2) = (\omega(g_1, g_2)ab, g_1g_2) \quad (1.14)$$

che è ben definita se la (1.11) è rispettata.

La proiettività della rappresentazione è dunque legata al fattore di fase ω , però non abbiamo ancora sfruttato l'ambiguità lasciata dal teorema di Wigner, che ci permette di ridefinire $U'(g) = \lambda(g)U(g)$. Qui il fattore λ dipende dall'elemento del gruppo rappresentato, dunque è una mappa $\lambda : G \rightarrow U(1)$. La nuova legge di composizione sarà quindi legata alla precedente e indurrà una relazione di equivalenza

tra i possibili 2-cocicli:

$$\begin{aligned}\omega'(g_1, g_2)U'(g_1g_2) &= U'(g_1)U'(g_2) \\ \omega'(g_1, g_2)U'(g_1g_2) &= \lambda(g_1)U(g_1)\lambda(g_2)U(g_2) \\ \omega'(g_1, g_2)U'(g_1g_2) &= \lambda(g_1)\lambda(g_2)\omega(g_1, g_2)U(g_1g_2) \\ \omega'(g_1, g_2)U'(g_1g_2) &= \lambda(g_1)\lambda(g_2)\omega(g_1, g_2)\lambda(g_1g_2)^{-1}U'(g_1g_2)\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\implies \omega'(g_1, g_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)\lambda(g_1g_2)^{-1}\omega(g_1, g_2)\tag{1.16}$$

Se esiste una mappa $\lambda : G \rightarrow U(1)$ tale per cui valga la (1.16) $\forall g_1, g_2 \in G$, allora ω e ω' sono equivalenti perché si può passare dall'uno all'altro ridefinendo un fattore di fase. Una rappresentazione data dalla (1.3) dunque non sarà veramente proiettiva se il suo 2-cociclo è equivalente all'identità, ossia se vale la condizione:

$$\omega(g_1, g_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)\lambda(g_1g_2)^{-1}\tag{1.17}$$

Abbiamo visto due condizioni distinte per determinare la proiettività di una rappresentazione, ossia la (1.17) e la (1.9); in realtà queste sono strettamente connesse. Infatti l'esistenza dell'omomorfismo (1.9) è in corrispondenza biunivoca con la soddisfazione della (1.17), dunque per ottenere un 2-cociclo non banale sarà necessario rilassare la condizione sulla mappa σ . Si può esplicitare questa relazione:

Definizione 1.3.2. *Data l'estensione centrale (1.4), sia $\tau : G \rightarrow E$ una mappa (non necessariamente un omomorfismo) con $\pi \circ \tau = id_G$ e $\tau(1) = 1_E$ (questa è detta sezione normalizzata), allora definiamo la mappa*

$$\begin{aligned}\omega : G \times G &\rightarrow A \cong i(A) \subset E \\ (g_1, g_2) &\mapsto \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1}\end{aligned}\tag{1.18}$$

questa mappa è ben definita poiché $\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1} \in \ker(\pi)$ e soddisfa $\omega(1_G, 1_G) = 1_A$, oltre che la (1.11) come mostrato in [7].

Si vede immediatamente che se τ fosse un omomorfismo di gruppi, ossia $\tau(g_1 \cdot_G g_2) = \tau(g_1) \cdot_E \tau(g_2)$ (dove con $\cdot_G$ e $\cdot_E$ si indicano i prodotti nei rispettivi gruppi), allora la mappa ω sarebbe esattamente l'identità. Questa considerazione esplicita la connessione tra le due condizioni e fornisce un'interpretazione per il 2-cociclo: ω misura quanto la sezione τ fallisca nell'essere un omomorfismo, dunque quanto fallisca nello splittare la sequenza esatta e nel fornire una rappresentazione unitaria di G .

A questo punto, se esiste una relazione di equivalenza sui 2-cocicli, ci si aspetta che esista anche per le sezioni. Consideriamo un'altra sezione normalizzata μ , si vede che

$$\pi(\mu(g)\tau(g)^{-1}) = \pi(\mu(g))\pi(\tau(g)^{-1}) = gg^{-1} = 1_G \implies \mu(g)\tau(g)^{-1} \in \ker(\pi) \cong i(A) \cong A\tag{1.19}$$

dunque esiste una mappa $\lambda : G \rightarrow A$ tale che $\lambda(g) = \mu(g)\tau(g)^{-1} \implies \mu(g) = \lambda(g)\tau(g)$. Possiamo adesso ricavare la seguente relazione

$$\begin{aligned}\omega'(g_1, g_2) &= \mu(g_1)\mu(g_2)\mu(g_1g_2)^{-1} = \lambda(g_1)\tau(g_1)\lambda(g_2)\tau(g_2)[\lambda(g_1g_2)\tau(g_1g_2)]^{-1} \\ &= \omega(g_1, g_2)\lambda(g_1)\lambda(g_2)\lambda(g_1g_2)^{-1}\end{aligned}\tag{1.20}$$

che coincide con la (1.16), ma ora è vista come una relazione tra sezioni normalizzate. Se ora definiamo, in analogia con la (1.11), la mappa $d_1 : Fun(G, U(1)) \rightarrow Fun(G^2, U(1))$ tale che

$$d_1\lambda(g_1, g_2) := \lambda(g_1)\lambda(g_2)\lambda(g_1g_2)^{-1}\tag{1.21}$$

$d_1\lambda$ è detto 2-cobordo. Possiamo esprimere la (1.20) come $\omega' = \omega \cdot d_1\lambda$. Questa relazione è reminiscente della più nota equivalenza di forme differenziali nella coomologia di De Rham $\omega' = \omega + d\lambda$, dove l'operazione tra mappe è definita puntualmente e coincide con quella su $\mathbb{R}$, ossia la somma, mentre in questo caso l'operazione è quella di $U(1)$, che è una moltiplicazione. Chiaramente le due costruzioni sono radicalmente differenti, però l'analogia è utile per fissare le idee sulle nozioni di cocicli e cobordi in relazione a quelle di forme chiuse ed esatte.

Seguendo questa analogia possiamo raggruppare assieme tutti i 2-cocicli che differiscono per un cobordo.

Definizione 1.3.3. Si definisce il gruppo abeliano con moltiplicazione indotta dalla moltiplicazione puntuale delle mappe $\omega : G \times G \rightarrow A$

$$H^2(G, A) := \frac{\ker(d_2)}{\text{im}(d_1)} \quad (1.22)$$

che è detto secondo gruppo di coomologia del gruppo G a coefficienti in A .

La costruzione di questo gruppo mostra che esiste una corrispondenza uno a uno tra $H^2(G, U(1))$ e le estensioni centrali del gruppo G tramite $U(1)$.

In conclusione, un gruppo G può essere rappresentato proiettivamente solo se $H^2(G, U(1))$ ammette classi di equivalenza non banali. La verifica della proiettività avviene valutando se il 2-cociclo associato alla rappresentazione scelta appartenga o meno alla classe dell'identità, ossia se differisce dal 2-cociclo banale per un cobordo. A livello pratico basta controllare se la (1.17) viene rispettata.

Si sottolinea che $H^2(G, U(1))$ dipende esclusivamente dal gruppo G , dunque a ogni gruppo G è associato un secondo gruppo di coomologia a coefficienti in $U(1)$. Una tabella di questi può essere trovata nella referenza [1].

Se il gruppo di coomologia è banale, ossia ha solo la classe di equivalenza relativa a $\omega \equiv 1$, allora l'estensione centrale corrisponde ad $U(1) \times G$ e possiamo affermare che G è rappresentato unitariamente su $\mathcal{H}$. Eventuali fattori di fase aggiuntivi possono essere riassorbiti tramite una ridefinizione degli operatori. Un esempio importante sono i gruppi di simmetria a un parametro continuo: questi sono per definizione isomorfi ai gruppi $(\mathbb{R}, +)$ se il parametro non è compatto o a $(S^1, +)$ se il parametro è compatto. In entrambi i casi il secondo gruppo di coomologia è banale, quindi possono essere rappresentati unitariamente.

Se invece $H^2(G, U(1))$ è non banale, allora G può essere rappresentato proiettivamente e il gruppo di simmetria quantistico sarà la sua estensione centrale $U(1) \times_\omega G$, la quale sarà invece rappresentata in maniera unitaria.

Concludiamo che $H^2(G, U(1))$ fornisce solo informazioni sulla possibilità di avere estensioni centrali e quindi anomalie; per verificarne la presenza effettiva è necessario considerare un sistema concreto in cui G agisca come simmetria e calcolare a quale classe di equivalenza appartenga il 2-cociclo associato alla sua rappresentazione.

1.4 Estensioni centrali e degenerazioni

Nella sezione 1.1 si è introdotta una correlazione tra il gruppo delle simmetrie dinamiche di un sistema hamiltoniano e la degenerazione del suo spettro energetico. Ci si può aspettare quindi che, nel caso una simmetria sia rappresentata proiettivamente, ci possa essere qualche conseguenza sullo spettro hamiltoniano.

L'idea di fondo è la seguente: se il gruppo G è una simmetria della dinamica, allora stati connessi da una trasformazione di simmetria associata a G avranno lo stesso autovalore energetico. In linguaggio matematico è possibile diagonalizzare contemporaneamente la rappresentazione di G , $U(g) \forall g \in G$, e l'hamiltoniana H ; se la rappresentazione è proiettiva questo fatto può venire a mancare e viene forzata una degenerazione sullo spettro.

Possiamo formalizzare queste considerazioni nella seguente proposizione:

Proposizione 1.4.1. Si consideri un sistema quantistico con hamiltoniana H , sia G una simmetria rappresentata proiettivamente dal gruppo $\{U(g)\}$ con legge di composizione $U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)$. Sia G una simmetria dinamica del sistema, ossia $[U(g), H] = 0 \forall g$, dunque i due operatori si possono diagonalizzare simultaneamente. Definiamo gli autostati degli operatori nel seguente modo

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle$$

$$U(g)|\psi\rangle = e^{i\chi(g)}|\psi_E\rangle$$

dove l'autovalore di $U(g)$ è necessariamente in $U(1)$ poiché è unitario.

Allora lo spettro energetico $\sigma(H)$ è degenere.

Dimostrazione. Procedendo per assurdo, si consideri che lo spettro di H sia non degenero, ossia ammetta solo autospazi uno-dimensionali. Per la condizione di simmetria di G , allora, gli autostati energetici sono esattamente quelli degli operatori $U(g)$:

$$U(g)|\psi_E\rangle = e^{i\chi(g)}|\psi_E\rangle \quad \forall g \in G \quad (1.23)$$

Usando ora le proprietà gruppali di G , sappiamo che esso è chiuso per il prodotto del gruppo, quindi ci si aspetta che valga la (1.23) anche per prodotti:

$$U(g_1)U(g_2)|\psi_E\rangle = U(g_1)e^{i\chi(g_2)}|\psi_E\rangle = e^{i\chi(g_1)}e^{i\chi(g_2)}|\psi_E\rangle$$

ma considerando la legge di composizione della rappresentazione di G :

$$U(g_1)U(g_2)|\psi_E\rangle = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)|\psi_E\rangle = \omega(g_1, g_2)e^{i\chi(g_1g_2)}|\psi_E\rangle$$

Le due espressioni devono essere equivalenti; ciò accade se e solo se

$$\omega(g_1, g_2) = e^{i\chi(g_1)}e^{i\chi(g_2)}e^{-i\chi(g_1g_2)} \xrightarrow{\lambda(g):=e^{i\chi(g)}} \omega(g_1, g_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)\lambda(g_1g_2)^{-1} \quad (1.24)$$

dove si è identificata la funzione $e^{i\chi(g)}$ con la funzione $\lambda(g)$ della (1.17). Questa condizione è soddisfatta se e solo se $[\omega] = [1] \in H^2(G, U(1))$, dunque se e solo se G è rappresentato unitariamente. Questo però è in contraddizione con l'ipotesi di proiettività. $\square$

Concludiamo che in sistemi dove la simmetria quantistica è rappresentata proiettivamente non possono esistere stati non degeneri.

Si enfatizza come le conclusioni sulla degenerazione dello spettro hamiltoniano derivino da considerazioni di carattere puramente topologico rispetto al gruppo di simmetria. Questo rende tali conclusioni stabili per una grande varietà di perturbazioni del sistema, nel limite in cui queste non ne vadano a intaccare le caratteristiche topologiche o non rompano la simmetria.

Nel seguito della tesi si partirà da considerazioni sulla topologia dei sistemi in esame, si faranno delle predizioni sulla degenerazione degli autostati energetici e si verificherà con delle simulazioni numeriche la correttezza delle affermazioni fatte.

1.5 Anomalie e inconsistenze globali

In una teoria fisica la presenza di una realizzazione proiettiva di una simmetria è spesso indice della presenza di un'anomalia, ma il suo significato preciso dipende dalla dimensione e dagli oggetti su cui la simmetria agisce.

L'ambiente corretto in cui definire in modo preciso le anomalie è quello delle teorie di campo quantistiche ed esempi importanti, che si sottolinea avere tutti natura molto diversa, sono anomalie di 't Hooft, di gauge, chirali o globali. In generale la presenza di queste può implicare delle inconsistenze nella teoria o comunque imporre dei vincoli molto forti. Si sottolinea però che l'emergere di strutture anomale non è univocamente determinato dalle rappresentazioni proiettive, che quindi sono un concetto in generale differente da quello di anomalia. Esiste però un caso, quello della meccanica quantistica, in cui i due concetti si sovrappongono e questo può essere chiarito dalla natura di un'anomalia di 't Hooft.

Per anomalia di 't Hooft si intende un'ostruzione alla promozione di una simmetria globale ad una simmetria di gauge locale; in altri termini l'introduzione di un campo di gauge di background, associato a questa simmetria, rende la funzione di partizione invariante sotto trasformazioni di gauge, a meno di un fattore di fase non riassorbibile. In generale questo tipo di anomalia può presentarsi in forma mista, ossia l'ostruzione al gauging è estesa a due simmetrie accoppiate; questo implica che cercare di introdurre un campo di gauge di background per una simmetria può rompere o ridefinire l'altra.

La presenza di questa anomalia non rende la teoria inconsistente, ma ha delle conseguenze di altra natura. Nello specifico caso della meccanica quantistica (QFT in 0+1 dimensioni) le anomalie di 't Hooft sono legate direttamente alla presenza di estensioni centrali del gruppo di simmetria, dunque è

possibile applicare tutta la struttura matematica sopra definita.

In realtà, come si vede in [5], in un sistema quantistico se una simmetria ammette un secondo gruppo di coomologia non banale il fenomeno che emerge non è solo un'anomalia di 't Hooft, ma anche un concetto ad esso molto vicino che è detto *l'inconsistenza globale*. Cerchiamo ora di dare una definizione chiara di questi due fenomeni, facendone emergere anche le differenze.

Sia $\mathcal{T}$ una certa teoria fisica, che dipende da un insieme di parametri $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, tale che $\mathcal{T}(\vec{\alpha})$ sia connesso e sia G un gruppo di simmetria di $\mathcal{T} \forall \vec{\alpha}$. Consideriamo inoltre che dei punti particolari della teoria $\vec{\alpha}_1$ e $\vec{\alpha}_2$ siano tali da ammettere un'ulteriore simmetria H ; ci riferiremo a questi come *punti ad alta simmetria*. Nei punti ad alta simmetria il gruppo di simmetria della teoria sarà quindi $G \times H$. Consideriamo ora due casi distinti in cui la teoria $\mathcal{T}$ viene rappresentata in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:

1. *anomalia*: la rappresentazione di $G \times H$ su $\mathcal{H}$ appartiene ad una classe di $H^2(G \times H, U(1))$ non triviale in uno dei due punti ad alta simmetria $\vec{\alpha}^*$. Lo spettro hamiltoniano risulta degenerare quando $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^*$, mentre per sue deformazioni continue questo non accade. Ci si aspetta che al variare di $\vec{\alpha}$ i livelli energetici siano distinti e si sovrappongano in corrispondenza del valore $\vec{\alpha}^*$
2. *inconsistenza globale*: $\forall \vec{\alpha} \ H^2(G \times H, U(1))$ è triviale, quindi è sempre possibile scegliere un gruppo di operatori unitari in cui la fase aggiuntiva è riassorbita: puntualmente non c'è anomalia. Il punto cruciale è che, nonostante sia possibile scegliere singolarmente nei due punti ad alta simmetria una rappresentazione unitaria, quando si fa variare con continuità la rappresentazione unitaria in un punto, essa sarà proiettiva nell'altro. Dunque, quando viene scelta una rappresentazione, ci si aspetta che, variando $\vec{\alpha}$ in modo continuo tra un punto ad alta simmetria e l'altro, si colleghi un livello non degenerare (dove la rappresentazione è unitaria) a uno degenerare (dove è proiettiva). L'altra possibilità che non verrà trattata in questa tesi è un "level crossing" tra autostati energetici (si veda la trattazione di questo caso in [5]).

Si presenta uno schema riassuntivo di queste due possibilità in figura 1.1: nel caso delle anomalie, la rappresentazione è genuinamente proiettiva in uno dei due punti indipendentemente dalla scelta degli operatori sullo spazio di Hilbert (rappresentata dalla freccia rossa che collega la teoria generale T alla sua quantizzazione). Nel caso delle inconsistenze globali si possono fare due scelte degli operatori che rendono la rappresentazione unitaria in uno dei due punti, ma necessariamente proiettiva nell'altro.

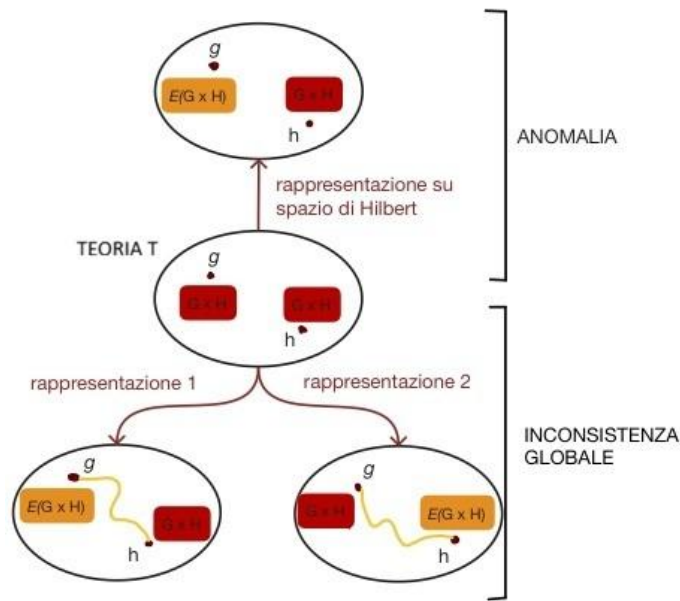


Figura 1.1: Rappresentazione grafica della teoria T i cui punti ad alta simmetria sono indicati da g ed h

Useremo questa connessione tra livelli degeneri e non degeneri al variare dei parametri del sistema quantistico per sondare la presenza di rappresentazioni proiettive o meno.

Nella discussione che segue, dunque, si farà riferimento alla nozione di anomalia come un'anomalia di t'Hooft nel contesto della meccanica quantistica non relativistica in $0 + 1D$.

Capitolo 2

Modello 1D

In questo capitolo si studia un modello di meccanica quantistica su una circonferenza S^1 , con un termine topologico e un potenziale periodico. L'obiettivo è mettere in evidenza come, ai punti ad alta simmetria nello spazio dei parametri, l'algebra tra traslazioni discrete e inversione temporale possa dare luogo a un'estensione centrale (per un tipo di potenziale) oppure a un'inconsistenza globale (per un altro).

Nella sezione 2.1 si definisce il sistema, le sue periodicità e i parametri caratteristici. Nella sezione 2.2 si individuano le simmetrie del sistema, si rappresentano nello spazio di Hilbert e se ne discute la proiettività. Nella sezione 2.3 si fanno delle predizioni sullo spettro energetico e se ne verifica la correttezza tramite computazione esplicita.

2.1 Definizione del modello

Consideriamo come in [5] una particella quantistica di massa unitaria vincolata su una circonferenza di raggio unitario $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sul piano xy. Questa è soggetta all'azione di un campo magnetico uniforme e parallelo all'asse z.

Definita la coordinata spaziale $q \in S^1$, imposte le relazioni di commutazione canoniche tra operatori momento e posizione $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ e definito lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ delle funzioni L^2 sulla circonferenza, l'hamiltoniana del sistema è

$$\hat{H}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\hat{p} - \frac{\hbar\theta}{2\pi} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\hbar\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (2.1)$$

il cui dominio $\mathcal{D}(H)$ è il sottospazio di $\mathcal{H}$ delle funzioni 2π -periodiche. Imponendo poi la periodicità di q , l'equazione agli autovalori $\hat{H}(\theta)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ è risolta dalle seguenti autofunzioni in rappresentazione q (come mostrato in [8]):

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inq} \quad E_n(\theta) = \frac{\hbar^2}{2} \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Lo spettro energetico è funzione di θ . Il punto chiave è che questo risulta invariato per $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Possiamo identificare in questo contesto $\theta \sim \theta + 2\pi$ e dunque si conclude che il flusso è 2π -periodico. $\hat{H}(\theta)$ e $\hat{H}(\theta + 2\pi)$ sono legate da una trasformazione unitaria che preserva la periodicità:

$$\hat{H}(\theta + 2\pi) = U \hat{H}(\theta) U^\dagger \quad \text{con} \quad U\psi(q) = e^{iq}\psi(q) \quad (2.3)$$

dunque sono fisicamente equivalenti.

Aggiungiamo a questo punto un potenziale liscio 2π -periodico $V(q)$; una parametrizzazione utile di questo si può ottenere tramite un'espansione in serie di Fourier:

$$V(q) = \sum_{\ell \geq 1} a_\ell \cos(\ell q + \delta_\ell) \quad (2.4)$$

con coefficienti reali a_ℓ e fasi δ_ℓ .

Poniamo l'hamiltoniana del sistema nella seguente forma, dove $n \geq 2$ è un intero:

$$\hat{H}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\hat{p} - \frac{\hbar\theta}{2\pi} \right)^2 + V(n\hat{q}) \quad (2.5)$$

L'insieme di parametri caratteristici del sistema è $\vec{\alpha} = (\theta, \lambda_1, \dots, \alpha_1, \dots)$. θ è ancora identificato con $\theta + 2\pi$ e risulta essere il parametro più importante nella discussione che faremo, dunque considereremo solo questo come parametro caratteristico del sistema.

2.2 Simmetrie e proiettività

Il sistema senza il potenziale aggiunto presenta una chiara simmetria per traslazioni continue di q ; l'aggiunta di $V(nq)$ non rompe completamente questa simmetria, ma la sostituisce con una discreta dipendente da n . Oltre a questa esiste almeno un'altra simmetria per specifici valori del flusso θ : questi valori costituiscono i punti ad alta simmetria del sistema e la simmetria è l'inversione temporale.

2.2.1 Simmetrie

Rappresentiamo nello spazio di Hilbert queste simmetrie definendo degli operatori unitari che le implementino correttamente:

- **Traslazione discreta $\mathbb{Z}_n$.** Il sistema possiede una simmetria $\mathbb{Z}_n$ che agisce per traslazione discreta della coordinata angolare:

$$U : q \mapsto q + \frac{2\pi}{n}. \quad (2.6)$$

Dato che $q \sim q + 2\pi$, deve valere $U^n = \mathbb{I}$; questa di fatto è la relazione che caratterizza $\mathbb{Z}_n$ come simmetria del sistema. A livello quantistico è naturale implementare U come

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{2\pi}{n} \hat{p}\right), \quad (2.7)$$

e si verifica che $\hat{U} \hat{H}(\theta) \hat{U}^{-1} = \hat{H}(\theta)$ per θ generico.

- **Inversione temporale.** Per valori generici di θ l'inversione temporale non è una simmetria, ma lo diventa ai punti $\theta = 0, \theta = \pi \pmod{2\pi}$, ossia ai punti ad alta simmetria. In quantistica, T è antiunitario, deve quindi soddisfare $T i T^{-1} = -i$ e per essere simmetria dinamica $T \hat{H} T^{-1} = \hat{H}$. Queste condizioni sono soddisfatte da una scelta del tipo:

$$T \hat{q} T^{-1} = \hat{q}, \quad T \hat{p} T^{-1} = \begin{cases} -\hat{p}, & \theta = 0, \\ -\hat{p} + \hbar, & \theta = \pi. \end{cases} \implies T = \begin{cases} K, & \theta = 0, \\ e^{\frac{i}{\hbar} \hat{q}} K, & \theta = \pi, \end{cases} \quad (2.8)$$

dove K è l'operatore di coniugazione complessa.

Il gruppo di simmetria classico nei punti ad alta simmetria è dunque $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, mentre per valori generici del parametro θ è solo $\mathbb{Z}_n$.

2.2.2 Proiettività della rappresentazione

Come si può vedere in [1], il secondo gruppo di coomologia di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ a coefficienti in $U(1)$ è

$$H^2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, U(1)) \cong \mathbb{Z}_{\gcd(n,2)}. \quad (2.9)$$

Di conseguenza,

$$H^2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, U(1)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n \text{ pari}, \\ 0, & n \text{ dispari}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Per n pari il gruppo ammette quindi cocicli non banali e può essere rappresentato proiettivamente. Per n dispari non vi è invece un'anomalia puntuale, ma può emergere un'inconsistenza globale. Per verificare se questo accade dobbiamo calcolare le relazioni di commutazione delle rappresentazioni operatoriali che abbiamo scelto e verificare se coincidano con quelle di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ o di una sua estensione centrale.

Usando (2.8) e (2.7) calcoliamo la relazione di commutazione tra T e $\hat{U}$.

Notiamo innanzitutto che per $\theta = 0$ la relazione è banale:

$$T\hat{U}T^{-1} = Ke^{\frac{i}{\hbar}\frac{2\pi}{n}\hat{p}}K^{-1} = \hat{U} \quad (2.11)$$

poiché la coniugazione complessa cambia segno sia all'unità immaginaria i che all'operatore momento $\hat{p}$. Per il caso $\theta = \pi$ possiamo quindi limitarci a studiare la commutazione di $\hat{U}$ con l'operatore di traslazione unitaria del momento. Possiamo quindi sfruttare direttamente la (2.8):

$$T\hat{U}T^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{2\pi}{n}(-\hat{p}+\hbar)} = e^{-i\frac{2\pi}{n}}\hat{U} \quad (2.12)$$

Dalle equazioni (2.11) e (2.12) si ottengono le relazioni di commutazione:

$$T\hat{U}T^{-1} = \begin{cases} \hat{U}, & \theta = 0, \\ e^{-i\frac{2\pi}{n}}\hat{U}, & \theta = \pi. \end{cases} \quad (2.13)$$

Si nota che il gruppo di simmetria è rappresentato unitariamente per $\theta = 0$, cioè la trasformazione $\mathbb{Z}_n$ e l'inversione temporale commutano. Compare invece un fattore di fase per $\theta = \pi$, segnale di una possibile estensione centrale. Sfruttando l'ambiguità di definizione di $\hat{U}$ a meno di fattore di fase si può cercare di eliminare la proiettività (modifichiamo un 1-cociclo per verificare se la classe di coomologia della rappresentazione sia triviale o meno). Se si vuole una rappresentazione non proiettiva di $\mathbb{Z}_n$ data dal nuovo operatore $\hat{U}'$, cioè tale che $(\hat{U}')^n = \mathbb{I}$, l'unica possibilità è scegliere la ridefinizione $\hat{U}' = e^{-\frac{2\pi ik}{n}}\hat{U}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Come mostrato in [5], si ottiene a partire dalla (2.13):

$$T\hat{U}T^{-1} = Te^{\frac{2\pi ik}{n}}\hat{U}'T^{-1} = e^{-\frac{2\pi ik}{n}}T\hat{U}'T^{-1} \stackrel{(2.13)}{=} e^{-i\frac{2\pi}{n}}\hat{U} = e^{\frac{2\pi i}{n}(k-1)}\hat{U}' \quad (2.14)$$

Da cui si ricava facilmente:

$$T\hat{U}'T^{-1} = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(2k-1)\right)\hat{U}', \quad (\theta = \pi). \quad (2.15)$$

La fase si elimina se e solo se

$$2k-1 = 0 \pmod{n} \implies k = -k+1 \pmod{n}. \quad (2.16)$$

Per risolvere quest'equazione è necessario distinguere i due casi con n pari e n dispari.

Se $n \in 2\mathbb{Z}$ è pari, la condizione (2.16) non ammette soluzioni intere. In questo caso non è possibile assorbire la fase in (2.13) mantenendo la condizione $\hat{U}^n = \mathbb{I}$. Se ridefiniamo l'operatore con una soluzione della (2.16) che è un semintero, l'operatore soddisfa la relazione $(\hat{U}')^n = -\mathbb{I}$, che non è quella di $\mathbb{Z}_n$. Dunque la nuova identificazione risulta $(\hat{U}')^{2n} = \mathbb{I}$, ossia solo con uno shift di 4π si torna al punto di partenza. Si ha dunque una rappresentazione unitaria del ricoprimento doppio di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, ovvero D_{4n} , dove D_{4n} è il gruppo diedrale di ordine $4n$ (il gruppo delle simmetrie di un poligono regolare di $2n$ lati). Dunque per $\theta = \pi$ e $n \in 2\mathbb{Z}$ il gruppo classico viene esteso centralmente. Questo si poteva prevedere, come anticipato, considerando il gruppo di coomologia che, per n pari, è non banale:

$$H^2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, U(1)) \cong \mathbb{Z}_2. \quad (2.17)$$

Tutti i possibili fattori di fase che emergono nella legge (2-cocicli) del gruppo sono quindi equivalenti a $\{\pm 1\}$. Per rendere la rappresentazione unitaria è quindi necessario promuovere questi fattori a generatori del gruppo. L'unitarietà della rappresentazione si ottiene quindi al costo del cambiamento del

gruppo di simmetria quantistico al doppio ricoprimento di quello classico (in accordo con il teorema di esistenza (1.7)).

Se $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ è dispari, (2.16) ammette soluzioni (ad esempio $k = (n + 1)/2$ modulo n). Dunque, considerato il punto $\theta = \pi$ da solo, è possibile ridefinire il generatore in modo da rendere la relazione di commutazione priva di fase e dunque la rappresentazione unitaria.

Tuttavia, questa scelta non è compatibile simultaneamente con quella naturale al punto $\theta = 0$. In altre parole, anche se a ciascun punto ad alta simmetria si può trovare una rappresentazione unitaria degli operatori, non esiste in generale una scelta unica di generatori che renda contemporaneamente banale la relazione di commutazione sia a $\theta = 0$ sia a $\theta = \pi$ lungo un percorso continuo nello spazio dei parametri. Questo fenomeno è l'inconsistenza globale: la ridefinizione degli operatori non può essere resa compatibile in entrambi i punti ad alta simmetria, sebbene non si abbia una vera e propria anomalia in nessuno dei due preso singolarmente.

2.3 Spettro energetico e verifica numerica

Ci si aspetta, come discusso nel capitolo 1, una conseguenza sulla degenerazione dello spettro energetico per variazioni continue del parametro θ :

- per n pari e $\theta = \pi$ la struttura proiettiva produce degenerazione a doppietti del ground state, mentre a $\theta = 0$ tale degenerazione viene rimossa;
- per n dispari possono esistere stati non degeneri sia a $\theta = 0$ che a π , poiché non vi è nessun vincolo topologico imposto dal gruppo di simmetria. Il punto è che l'inconsistenza globale può avere effetti non banali: o stati di singoletto nei due punti ad alta simmetria non possono essere connessi da una variazione di θ , oppure ci sono fenomeni di level crossing.

Verifichiamo esplicitamente queste predizioni, considerando la possibilità di autostati simultanei di $\hat{U}$ e T ai punti ad alta simmetria. Sia $|\psi\rangle$ uno stato tale che

$$\hat{U}|\psi\rangle = e^{2\pi i k/n}|\psi\rangle, \quad T|\psi\rangle = \eta|\psi\rangle, \quad (2.18)$$

con $k \in \mathbb{Z}$, poiché $(U')^n = \mathbb{I}$, e η una fase. Al punto $\theta = \pi$, usando (2.13) e applicando T alla prima relazione in (2.18), si ottiene la condizione

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{n}k\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(1-k)\right) \quad (2.19)$$

equivalente a (2.16). Quindi dobbiamo distinguere ancora i due casi:

- se n è pari, (2.19) non può essere soddisfatta con $k \in \mathbb{Z}$, e ciò impedisce l'esistenza di autostati simultanei di $\hat{U}$ e T a $\theta = \pi$. La simmetria temporale si rompe e gli autovalori energetici sono due volte degeneri, in accordo con quanto predetto dall'analisi sull'estensione centrale della simmetria.
- se n è dispari, esistono soluzioni per k (modulo n) (del tipo $k = (n + 1)/2$). Nonostante questo l'inconsistenza globale porta a un risultato non banale.

Sia $|\psi_0\rangle$ un autostato simultaneo a $\theta = 0$, un conto simile a quello fatto per (2.19) mostra che

$$\hat{U}|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \quad (2.20)$$

Sia $|\psi_\pi\rangle$ un autostato simultaneo a $\theta = \pi$, la discussione sopra mostra che

$$\hat{U}|\psi_\pi\rangle = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\frac{n+1}{2}\right)|\psi_\pi\rangle \quad (2.21)$$

Siccome $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\pi\rangle$ hanno diversa carica $\mathbb{Z}_n$ (discreta), i due stati non possono essere connessi in maniera continua cambiando θ . Dunque stati T-invarianti a $\theta = 0$ rompono T a $\theta = \pi$

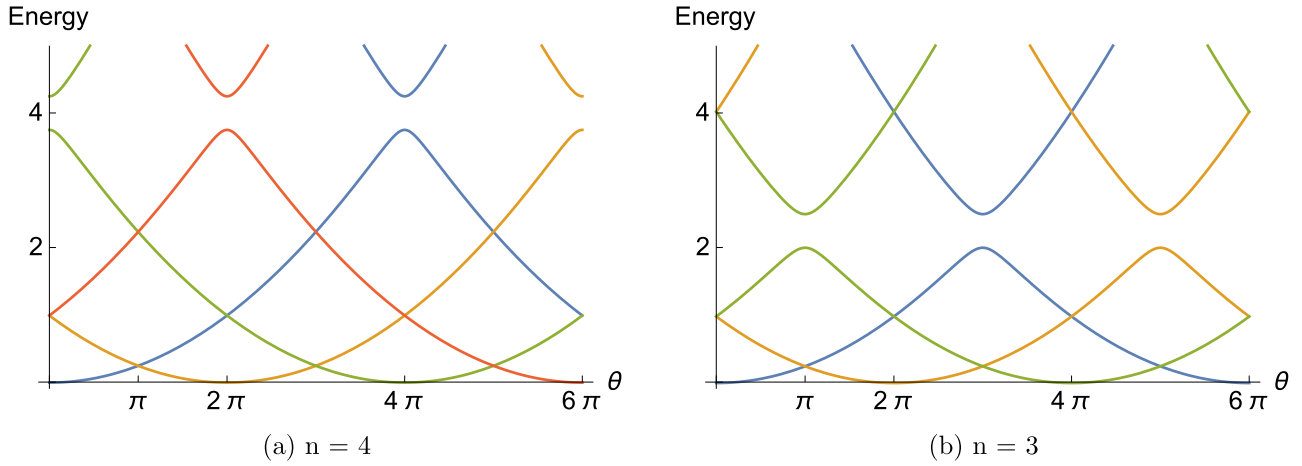


Figura 2.1: Spettri energetici considerati nella Sezione 2.3, seguendo [5]. I pannelli mostrano i livelli energetici in funzione del parametro del modello con potenziale 2.22.

e viceversa. Non siamo quindi di fronte a un caso come quello precedente, ma ci aspettiamo un'incompatibilità tra le degenerazioni degli autovalori energetici lungo variazioni di θ .

Per chiarire meglio questa fenomenologia proponiamo l'impostazione di [5] e computiamo lo spettro energetico per un potenziale esplicito del tipo

$$V(nq) = \lambda \cos(nq) \quad (2.22)$$

La figura 2.1 mostra gli spettri energetici per $n = 3, 4$, computati numericamente diagonalizzando l'hamiltoniana.

Nella figura 2.1a non ci sono stati non degeneri per $n = 4$ e $\theta = \pi$, come predetto dalla presenza di una rappresentazione proiettiva. Nella figura 2.1b ci sono stati di singoletto per $\theta = \pi$, come ammesso dalle relazioni di commutazione, però nessuno stato non degeneri in $\theta = 0$ è connesso in modo continuo ad uno in $\theta = \pi$.

Si conclude che nel modello quantistico considerato le caratteristiche topologiche non banali del gruppo di simmetria classico determinano una rappresentazione proiettiva. Quest'ultima porta a delle degenerazioni degli autovalori in energia per i punti ad alta simmetria del sistema: per un certo potenziale questo si configura come un'anomalia, per un altro come inconsistenza globale. La conclusione è che l'analisi astratta delle caratteristiche del gruppo di simmetria porta a fare delle predizioni sullo spettro energetico molto solide anche per aggiunte di vari tipi di potenziale, purché questi non rompano del tutto la simmetria iniziale considerata.

Capitolo 3

Modello 2D

In questo capitolo si studia un altro modello quantomeccanico sul quale sia possibile fare delle inferenze sulla base della proiettività delle rappresentazioni degli stati. Si sottolinea che la scelta di una superficie bidimensionale vuole enfatizzare la stabilità delle predizioni rispetto a grosse deformazioni del problema iniziale e ad alti gradi di libertà.

Nella sezione 3.1 di questo capitolo si introduce il problema del confinamento di una particella quantistica su una superficie bidimensionale immersa in $\mathbb{R}^3$ e si ricava l'equazione di Schrödinger per una particella su una superficie curva. Nella sezione 3.2 si specializzano i risultati al caso di una superficie toroidale, si introduce un campo magnetico analogo al capitolo precedente e si esplicita l'hamiltoniana effettiva di questo sistema. Nella sezione 3.3 si individuano le simmetrie del sistema, si rappresentano nello spazio di Hilbert e se ne discute la proiettività. Sulla base di questa si fanno delle predizioni sullo spettro energetico. Nella sezione 3.4 si conclude la discussione con una simulazione numerica del sistema che confermerà quanto predetto.

3.1 Particella vincolata

3.1.1 Discussione generale

Consideriamo il problema di una particella di massa m in uno spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ vincolata a muoversi su una superficie immersa in questo spazio (la generalizzazione a spazi N -dimensionali con particelle vincolate su ipersuperfici è analoga). Seguendo l'approccio di R. C. T. da Costa in [3], cerchiamo di esplicitare le criticità della questione guardando prima al caso classico, poi a quello quantistico.

In meccanica classica il vincolo può essere imposto con un approccio newtoniano, ossia considerando una particella libera in $\mathbb{R}^3$ ma soggetta a delle forze spaziali che ad ogni tempo mantengono la sua velocità tangente alla superficie considerata. Tali forze sono completamente determinate, quindi il sistema è risolvibile al costo di supporre le forze vincolari non dissipative, quindi perpendicolari alla superficie in ogni suo punto. Altri approcci sono possibili e verranno brevemente discussi più avanti.

In meccanica quantistica la situazione è più delicata, infatti oltre all'analogo delle forze classiche che vincolano il momento, dobbiamo introdurre delle forze di confinamento che limitino la dissipazione del pacchetto d'onda ortogonalmente alla superficie, dovuta alle relazioni d'indeterminazione. Siccome in quantistica non possiamo determinare puntualmente la posizione della particella, è naturale considerare le forze di confinamento ortogonali alla superficie in ogni punto in cui la particella può trovarsi. Questa procedura è messa in pratica introducendo un potenziale costante sulla superficie ma che aumenta rapidamente per piccoli spostamenti nella direzione normale. Il vincolo sarà dunque implementato come limite di questo potenziale infinitamente forte che manterrà la particella sulla superficie. Questa procedura porterà ad un'equazione di Schrödinger separabile in una parte trasversale, che non risente esplicitamente del potenziale di vincolo ma di una correzione geometrica legata alla superficie, e una normale.

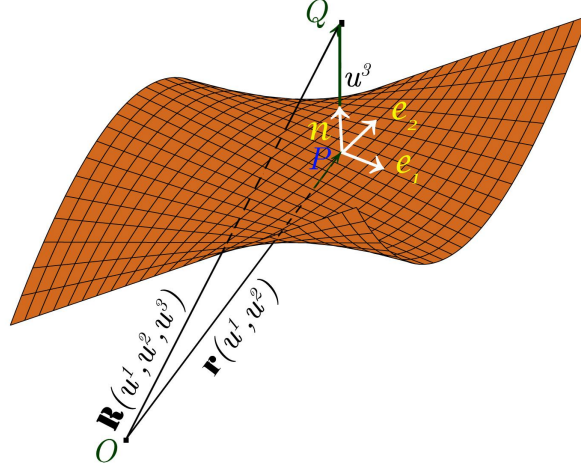


Figura 3.1: Rappresentazione grafica del sistema di coordinate tridimensionali locali adattate alla superficie, tratta da [6]

3.1.2 Derivazione dell'equazione

Si riporta di seguito una breve derivazione dell'equazione di Schrödinger come fatto in [6], articolo al quale si rimanda per ulteriori dettagli sui calcoli eseguiti che non verranno riportati integralmente qui. Diamo innanzitutto un po' di definizioni geometriche utili.

Si consideri una superficie differenziabile S immersa nello spazio euclideo 3D, sia $\vec{r} := \vec{r}(u^1, u^2)$ una parametrizzazione locale di S . Un punto in un intorno della superficie può essere descritto aggiungendo una coordinata normale ad S (vedi figura 3.1):

$$\vec{R}(u^1, u^2, u^3) = \vec{r}(u^1, u^2) + u^3 \vec{n} \quad (3.1)$$

Definiamo i vettori tangenti ad S $\vec{e}_a = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^a} = \partial_a \vec{r}$ e il versore normale ad S $\vec{n} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$. I tensori metrici dello spazio $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) e della superficie h_{ab} ($a, b = 1, 2$) (prima forma fondamentale di S) sono definiti:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^\mu} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^\nu} \quad h_{ab} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^b} \quad (3.2)$$

Si definisce anche la seconda forma fondamentale o curvatura estrinseca di S come $k_{ab} = \vec{e}_a \cdot \partial_b \vec{n} = -\vec{n} \cdot \partial_{ab} \vec{r}$.

Vogliamo ora scrivere l'equazione di Schrödinger per una particella immersa in uno spazio con una metrica non $g^{\mu\nu}$ (indichiamo con $\det(g^{\mu\nu}) = g$). Dobbiamo sostituire all'ordinario laplaciano l'operatore di Laplace-Beltrami, che è covariante nel sistema scelto e come operatore nello spazio di Hilbert è hermitiano, dove la misura integrale è (considerando un generico spazio N -dimensionale con coordinate q , da cui è facile riconurci al caso 3-dimensionale di nostro interesse):

$$\mu(d\mathbf{q}) = \sqrt{g} \prod_{i=1}^N dq^i \quad (3.3)$$

Va inoltre aggiunto il potenziale di confinamento, che possiamo esprimere come $V_0 \bar{\delta}(u^3)$, dove si è usata una delta di anti-Dirac:

$$\bar{\delta}(u^3) = \begin{cases} 0 & u^3 = 0 \\ \infty & u^3 \neq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Si ottiene quindi un'equazione di Schrödinger del tipo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \psi(u^\alpha, t) + V_0 \tilde{\delta}(u^3) \psi(u^\alpha, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(u^\alpha, t) \quad (3.5)$$

Con l'obiettivo di poter separare le variabili tangenti e normale, cerchiamo ora di esprimere la metrica $g^{\mu\nu}$ e il suo determinante $g := \det(g^{\mu\nu})$ in termini della parametrizzazione scelta:

$$g_{ab} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^a} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^b} = (\vec{e}_a + u^3 \partial_a \vec{n}) \cdot (\vec{e}_b + u^3 \partial_b \vec{n}), \quad (3.6)$$

$$g_{a3} = g_{3a} = (\vec{e}_a + u^3 \partial_a \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad g_{33} = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad (3.7)$$

Per calcolare questi termini si può usare l'equazione di Weingarten:

$$\partial_a \vec{n} = k_a^b \vec{e}_b \quad (3.8)$$

dove $k_a^b = h^{bc} k_{ac}$, ossia la seconda forma fondamentale dove si è alzato un indice usando il tensore metrico inverso della superficie S (è detta matrice di Weingarten).

Dopo un po' di conti, per i quali si veda ([6]), si ottengono i seguenti risultati:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g_{ab} = h_{ab} + 2u^3 k_a^c h_{cb} + (u^3)^2 k_a^c k_b^d h_{cd} \quad (3.9)$$

$$g = h \left(1 + u^3 (\tilde{k}_1^1 + \tilde{k}_2^2) + (u^3)^2 \tilde{k}_1^1 \tilde{k}_2^2 \right)^2 \quad (3.10)$$

dove $h := \det(h_{ab})$ e $\tilde{k}_1^1$ e $\tilde{k}_2^2$ sono le curvature principali di S (autovalori della matrice k). Possiamo definire anche la curvatura gaussiana della superficie S come $K_G = \tilde{k}_1^1 \tilde{k}_2^2$ e la curvatura media $K = \tilde{k}_1^1 + \tilde{k}_2^2$. Questo permette di semplificare la (3.10) in:

$$g = h \left(1 + u^3 K + (u^3)^2 K_G \right)^2 \quad (3.11)$$

Ora possiamo sostituire la (3.9) e la (3.11) nella (3.5):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\omega \sqrt{h}} \partial_a (\omega \sqrt{h} g^{ab} \partial_b) \psi(u^\alpha, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\omega} \partial_3 (\omega \partial_3) \psi(u^\alpha, t) + V_0 \tilde{\delta}(u^3) \psi(u^\alpha, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(u^\alpha, t) \quad (3.12)$$

dove $\omega = 1 + u^3 K + (u^3)^2 K_G$.

Introducendo la seguente separazione di variabili dove il pedice "n" indica la componente normale alla superficie e "t" quella tangenziale: $\psi(u^\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \psi_t(u^a) \psi_n(u^3) e^{-iEt/\hbar}$ si ottiene un'equazione quasi del tutto separata. Bisogna però considerare che la particella sia confinata sulla superficie, quindi si deve porre $u^3 = 0$. Dunque la (3.12) diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{h} \psi_t(u^a)} \partial_a (\sqrt{h} g^{ab} \partial_b) \psi_t(u^a) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\psi_n''(u^3)}{\psi_n(u^3)} + \left(\left(\frac{K}{2} \right)^2 - K_G \right) \right) + V_0 \tilde{\delta}(u^3) = E. \quad (3.13)$$

L'equazione normale alla superficie ha una chiara dipendenza dal potenziale di confinamento, mentre quella tangenziale ne è indipendente. Nonostante questo emerge un termine correttivo di natura completamente geometrica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a (\sqrt{h} g^{ab} \partial_b) + \left(\left(\frac{K}{2} \right)^2 - K_G \right) \right] \psi_t(u^a) = E_t \psi_t(u^a) \quad (3.14)$$

Definiamo esplicitamente il potenziale di confinamento geometrico:

$$V_g = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{K}{2} \right)^2 - K_G \right) \quad (3.15)$$

Questo potenziale $V_g(u^1, u^2)$ risulta non-positivo per tutte le superfici e nullo per superfici piane o gusci sferici. Si sottolinea inoltre la dipendenza esplicita dalla posizione sulla superficie (dunque V_S non sarà lo stesso per superfici isometriche in generale). Questa caratteristica peculiare della trattazione quantistica è legata al fatto che comunque la particella si muove nello spazio tridimensionale. Per quanto piccola sia assunta la libertà di movimento nella direzione normale, dunque, risente delle proprietà estrinseche della superficie.

Consultando la letteratura su questo tema si possono trovare anche altre formulazioni del potenziale geometrico per l'equazione tangenziale. Queste differenze emergono a seguito di approcci di vincolo differenti. In [4] si presenta l'approccio che sfrutta le parentesi di Dirac per eliminare il moto nelle direzioni normali alla superficie: il metodo propone di introdurre dei vincoli nel formalismo lagrangiano tramite moltiplicatori di Lagrange, poi implementarli nell'hamiltoniana e quindi quantizzare imponendo le parentesi di Dirac. Si ottengono dei potenziali dipendenti dalle curvature della superficie a meno di parametri arbitrari che esprimono l'ambiguità di ordinamento nella procedura di quantizzazione. Per alcune specifiche scelte di questi parametri si può ricostruire il risultato dell'approccio di confinamento. Quest'ultimo è comunque quello da usare per applicazioni realistiche, come affermato in [4].

Si sottolinea per coerenza che queste correzioni dovute alla curvatura della superficie scalano con $\hbar^2$, dunque ci si aspetta che siano trascurabili per scale macroscopiche. Infatti nella trattazione classica qualunque metodo usato per implementare i vincoli restituisce sempre gli stessi risultati.

3.2 Toro e campo EM

3.2.1 Geometria del toro

Consideriamo ora come superficie S il toro con raggio maggiore R e raggio minore r ($R > r$), parametrizzato da $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi)^2$:

$$\vec{r}(\phi, \theta) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta) \quad (3.16)$$

La metrica indotta (prima forma fondamentale) è diagonale e vale

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} h_{\phi\phi} & h_{\phi\theta} \\ h_{\theta\phi} & h_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{h} = r(R + r \cos \theta) \quad (3.17)$$

Il versore normale esterno sarà quindi $\vec{n}(\phi, \theta) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$.

La seconda forma fondamentale k_{ab} risulta

$$k_{ab} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \theta & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

La matrice di Weingarten $k^a_b = h^{ac} k_{bc}$ è

$$k^a_b = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta}{R + r \cos \theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Questa risulta già diagonale, quindi le sue entrate non nulle sono le curvature principali:

$$\tilde{k}_1^1(\theta) = \frac{\cos \theta}{R + r \cos \theta}, \quad \tilde{k}_2^2(\theta) = \frac{1}{r}, \quad (3.20)$$

Da cui possiamo ricavare facilmente la curvatura gaussiana e totale della superficie toroidale.

Il potenziale geometrico che quindi andrà a correggere l'equazione di Schrödinger è della forma:

$$V_g(\theta) = -\frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{\cos \theta}{R + r \cos \theta} - \frac{1}{r} \right)^2 \quad (3.21)$$

Si enfatizza che in questo caso le due forme fondamentali e di conseguenza il potenziale geometrico dipendono esplicitamente solo dalla variabile θ . Questo riflette esplicitamente che il toro è una superficie di rotazione attorno all'asse z e quindi ha una simmetria rotazionale intrinseca. Già a questo livello possiamo aspettarci un'invarianza della dinamica del sistema rispetto a questa simmetria.

3.2.2 Campo magnetico e "minimal coupling"

Introduciamo ora un campo magnetico con una configurazione simile all'effetto Aharonov-Bohm: si considera un campo uniforme, parallelo all'asse z e confinato sul piano xy in un cerchio di raggio $< R - r$ (campo confinato nel "buco" centrale). Questa connessione di gauge è piatta, quindi sulla superficie il campo magnetico è nullo ma l'olonomia può essere non banale.

Detto Φ il flusso del campo magnetico, si calcola un possibile potenziale vettore considerandone la circuitazione lungo una generica circonferenza sul toro che faccia emergere l'olonomia non banale:

$$\Phi_\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{A} \cdot \vec{u}_\phi (R + r \cos \theta) d\phi \longrightarrow \vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi(R + r \cos \theta)} \vec{u}_\phi \quad (3.22)$$

Questo rappresenta il duale vettoriale del potenziale di gauge, che in realtà è una 1-forma di connessione del tipo:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi} d\phi \quad (3.23)$$

La dualità tra 1-forme e campi vettoriali è data dalla metrica, per questo emerge il fattore θ -dipendente nella (3.22). Siccome è la 1-forma a definire la derivata covariante, allora sarà proprio la (3.23) a realizzare l'accoppiamento del campo alla dinamica del sistema. Analogamente a quanto discusso nel capitolo precedente, $\Phi \in [0, 2\pi)$ e presenta periodicità di 2π .

Come ultimo passaggio vorremmo scrivere l'hamiltoniana del sistema. Dobbiamo quindi esplicitare la componente cinetica dell'hamiltoniana in termini di opportuni operatori momento che siano hermitiani nel sistema di coordinate scelto. Ci accorgiamo però che è possibile riscrivere l'operatore di Laplace-Beltrami sfruttando la regola di Leibniz. Per non perdere di generalità svolgiamo qui i calcoli per l'operatore definito in una generica metrica g (si ricavano i risultati per il nostro caso inserendo la metrica h_{ab} del toro):

$$\Delta_{LB} = g^{ij} \partial_i \partial_j + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij}) \right) \partial_j = g^{ij} \partial_i \partial_j + (\partial_i g^{ij} + g^{ij} \partial_i \ln \sqrt{g}) \partial_j \quad (3.24)$$

Indicando con $p_i = -i\hbar \partial_i$ l'usuale operatore momento, introduciamo il seguente operatore:

$$\hat{p}_i = -i\hbar g^{-1/4} \partial_i g^{1/4} = -i\hbar \left(\partial_i + \frac{1}{2} \partial_i \ln \sqrt{g} \right) = \left(p_i - \frac{i\hbar}{2} \partial_i \ln \sqrt{g} \right) \quad (3.25)$$

che ci permette di riscrivere la (3.24) come:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \Delta_{LB} = \frac{1}{2} \hat{p}_i g^{ij} \hat{p}_j. \quad (3.26)$$

Concludiamo quindi che gli operatori $\hat{p}_i$ sono i corretti operatori hermitiani da inserire nell'hamiltoniana del sistema e che questi si combinano tra loro tramite la metrica per dare luogo alla componente cinetica dell'energia.

Considerando che la particella in esame abbia una carica elettrica q , includiamo nella dinamica anche il campo magnetico tramite un "minimal coupling". Operativamente questo si implementa con uno shift degli operatori momento tramite il potenziale vettore:

$$\hat{p}_\phi \longrightarrow \hat{p}_\phi - \frac{q\Phi}{2\pi}, \quad (3.27)$$

3.2.3 Hamiltoniana effettiva

L'hamiltoniana effettiva (posta massa $m = 1$ e carica $q = 1$) per questo modello sarà quindi della forma:

$$\hat{H}(\Phi) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_{\text{LB}}^{(\Phi)} + V_g(\theta) \quad (3.28)$$

sostituendo nella (3.26) le espressioni (3.17) per il toro, si ottiene la forma dell'hamiltoniana più esplicita:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\Phi) = & -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(p_\theta + i\hbar \frac{\sin \theta}{2(R + r \cos \theta)} \right)^2 + \frac{1}{(R + r \cos \theta)^2} \left(p_\phi - \frac{\Phi}{2\pi} \right)^2 \right] \\ & - \frac{\hbar^2}{8} \left(\frac{\cos \theta}{R + r \cos \theta} - \frac{1}{r} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Per ricollegarci a quanto discusso nel capitolo 1, lo spazio dei parametri della teoria è definito dal valore del flusso magnetico Φ . Questo spazio è unidimensionale, connesso e periodico.

3.3 Simmetrie e proiettività

In questa sezione si individuano le simmetrie del sistema e si implementano come operatori unitari, si valuta poi la proiettività della rappresentazione scelta e si fanno delle predizioni sullo spettro energetico.

3.3.1 Simmetrie

Come anticipato esiste una simmetria che discende dalla natura geometrica del sistema, ossia le traslazioni lungo la variabile ϕ . Si nota però la presenza di un'altra simmetria che emerge solo per specifici valori del flusso magnetico Φ , questa è una simmetria per inversione temporale.

Rappresentiamo nello spazio di Hilbert queste simmetrie definendo degli operatori unitari che le implementino correttamente:

- **Traslazione.** Poiché $\hat{H}$ non dipende da ϕ , esiste una simmetria $U(\alpha)$ che manda $\phi \mapsto \phi + \alpha$:

$$U_\alpha = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha \hat{p}_\phi\right), \quad \hat{p}_\phi = -i\hbar\partial_\phi. \quad (3.30)$$

- **Inversione temporale.** È antiunitaria e cambia segno sia agli operatori momento sia al potenziale vettore. Sotto T l'hamiltoniana $\hat{H}(\Phi)$ va in $\hat{H}(-\Phi)$ e Φ è definito modulo 2π . Dunque T può essere simmetria solo se

$$\Phi \equiv -\Phi \pmod{2\pi}, \quad (3.31)$$

ossia per $\Phi = 0$ e $\Phi = \pi \pmod{2\pi}$, come discusso in [5]. Una rappresentazione standard è [5]:

$$T = \begin{cases} K, & \Phi = 0, \\ e^{\frac{i}{\hbar}\phi} K, & \Phi = \pi, \end{cases} \quad (3.32)$$

dove K è la coniugazione complessa e $e^{\frac{i}{\hbar}\phi}$ implementa una traslazione unitaria dell'operatore momento necessaria per lasciare l'hamiltoniana invariata a $\Phi = \pi$, analogamente a quanto mostrato nell'articolo.

Il gruppo di simmetria classico è dunque $\mathbb{Z}_2 \times U(1) = O(2)$, ossia il gruppo delle trasformazioni ortogonali in 2 dimensioni.

3.3.2 Proiettività della rappresentazione

Come si può vedere in [1], il secondo gruppo di coomologia è $H^2(O(2), U(1)) = \mathbb{Z}_2$, dunque ammette cocicli non banali e possiamo in generale aspettarci che venga rappresentato proiettivamente. Per verificare se questo accade dobbiamo calcolare le relazioni di commutazione delle rappresentazioni operatoriali che abbiamo scelto e verificare se coincidano con quelle di $O(2)$ o di una sua estensione centrale.

Si considerino le seguenti relazioni utili per il calcolo:

$$U_\alpha = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha \hat{p}_\phi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^n (\hat{p}_\phi)^n \quad (3.33)$$

e dalla relazione di commutazione $[\phi, p_\phi] = i\hbar$ segue

$$[\hat{p}_\phi, e^{\frac{i}{\hbar}\phi}] = e^{\frac{i}{\hbar}\phi} \Rightarrow e^{\frac{i}{\hbar}\phi} \hat{p}_\phi = (\hat{p}_\phi - 1)e^{\frac{i}{\hbar}\phi} \quad (3.34)$$

Si calcola separatamente l'azione degli operatori di coniugazione complessa e traslazione unitaria del momento:

$$KU_\alpha K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{\hbar}\right)^n K(i\hat{p}_\phi)^n K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{\hbar}\right)^n (-1)^{2n} (i\hat{p}_\phi)^n = U_\alpha \quad (3.35)$$

e ancora

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\phi} U_\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^n e^{\frac{i}{\hbar}\phi} (\hat{p}_\phi)^n e^{-\frac{i}{\hbar}\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^n (\hat{p}_\phi - 1)^n = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\alpha(\hat{p}_\phi - 1)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha} U_\alpha \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove si è usata (3.34) per scambiare n volte l'operatore di traslazione e l'operatore momento.

In conclusione si ottengono le seguenti relazioni come in [5]

$$T U_\alpha T^{-1} = \begin{cases} U_\alpha, & \Phi = 0, \\ e^{-i\alpha} U_\alpha, & \Phi = \pi. \end{cases} \quad (3.37)$$

Si nota che il gruppo di simmetria è rappresentato unitariamente per $\Phi = 0$ e proiettivamente per $\Phi = \pi$. Sfruttando l'ambiguità di definizione di U_α a meno di fattore di fase si può cercare di eliminare la proiettività (modifichiamo un 1-cociclo per verificare se la classe di coomologia della rappresentazione sia triviale o meno): scelgo la ridefinizione $V_\alpha = e^{\frac{i}{\hbar}\beta} U_\alpha$

$$T_\pi U_\alpha T_\pi^{-1} = T_\pi e^{\frac{i}{\hbar}\beta} V_\alpha T_\pi^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta} T_\pi V_\alpha T_\pi^{-1} \stackrel{(3.37)}{=} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta} V_\alpha \quad (3.38)$$

$$T_\pi V_\alpha T_\pi^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha - 2\beta)} V_\alpha \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \quad (3.39)$$

Questa scelta permette di riassorbire il fattore di fase e ottenere una rappresentazione unitaria ma non più del gruppo di partenza, infatti

$$U_{\alpha+2\pi} = U_\alpha \longrightarrow V_{\alpha+2\pi} = e^{-i\pi} V_\alpha = -V_\alpha \quad (3.40)$$

Con questa ridefinizione infatti si rompono esplicitamente le relazioni di $O(2)$ poiché $V_{2\pi} = -1$. In questo caso abbiamo infatti l'identificazione tra V_α e $V_{\alpha+4\pi}$. Dunque si ha che il gruppo di simmetria classico $O(2)$ è esteso centralmente al suo ricoprimento doppio $Pin(2)$, ovvero l'estensione centrale di $O(2)$ con elemento centrale (commutante con il resto dei generatori del gruppo) il sottogruppo $\mathbb{Z}_2 = \{1, +1\}$. Se $O(2)$ è il gruppo di simmetria del cerchio, $Pin(2)$ è quello del cerchio "percorso due volte", nel senso che dopo una rotazione di 2π non si torna al punto di partenza, ma ne è necessaria una di 4π .

Come prima anticipato, il secondo gruppo di coomologia che è in corrispondenza biunivoca con le estensioni centrali di $O(2)$ è

$$H^2(O(2), U(1)) = \mathbb{Z}_2 \quad (3.41)$$

ciò implica che l'unica estensione centrale non banale sia $\mathbb{Z}_2$ e tutte le altre siano equivalenti ad essa. Dunque i fattori di fase $\in U(1)$ che rendono la rappresentazione proiettiva sono necessariamente equivalenti a $\{\pm 1\}$. Per ottenere una rappresentazione unitaria dobbiamo quindi promuovere questi termini a generatori del gruppo; così facendo si estende centralmente il gruppo $O(2)$ al suo doppio ricoprimento $Pin(2)$.

3.3.3 Conseguenze sullo spettro energetico

Ci si aspetta, come discusso nel capitolo 1 e come accade in [5], che a $\Phi = \pi$ la struttura proiettiva produca degenerazione a doppietti del ground state, mentre a $\Phi = 0$ tale degenerazione sia rimossa. Lo schema in questo caso è precisamente quello dell'anomalia per $\Phi = \pi$, mentre non si presenta l'inconsistenza globale.

Infatti se assumiamo per contraddizione che a $\Phi = \pi$ esistano autostati simultanei dei due operatori e li indichiamo con $|\psi\rangle$ tali che:

$$\begin{aligned} U_\alpha |\psi\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} k \alpha} |\psi\rangle \\ T |\psi\rangle &= \eta |\psi\rangle \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$ perché $U_{2\pi} = \mathbb{I}$. Dunque valutando l'azione di T_π su un autostato di U_α : $U_\alpha T |\psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \alpha} T U_\alpha |\psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \alpha (1-k)} T |\psi\rangle$ si ottiene la seguente condizione:

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \alpha (1-k) \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \alpha k \right] \Rightarrow 2k - 1 = 0 \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.42)$$

L'equazione non ha soluzioni per $\Phi = \pi$, U_α e T non possono avere autostati simultanei, quindi gli autovalori energetici sono due volte degeneri.

3.4 Simulazione numerica

La (3.29) si presenta come un'equazione differenziale alle derivate parziali in due variabili:

$$\hat{H}(\Phi) |\psi(\theta, \phi)\rangle = E |\psi(\theta, \phi)\rangle \quad (3.43)$$

Risolverla numericamente in questa forma è computazionalmente oneroso. Per risolverla è utile sfruttare la simmetria di $\hat{H}(\Phi)$ per traslazioni lungo ϕ . L'equazione agli autovalori per l'operatore di traslazione si può risolvere in rappresentazione spaziale, tenendo anche conto della condizione di periodicità sulla ϕ :

$$\begin{cases} \hat{p}_\phi \psi(\theta, \phi) = p \psi(\theta, \phi), \\ \psi(\theta, \phi + 2\pi) = \psi(\theta, \phi), \end{cases} \quad \hat{p}_\phi = -i\hbar \partial_\phi. \quad (3.44)$$

La condizione di periodicità impone che gli autostati di $\hat{p}_\phi$ siano della forma

$$\psi(\theta, \phi) = f(\theta) e^{im\phi}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{con autovalore } p = \hbar m \quad (3.45)$$

La soluzione del problema iniziale può essere riscritta come

$$\psi(\theta, \phi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\theta) e^{im\phi} \quad (3.46)$$

dove le $f_m(\theta)$ sono soluzioni del problema iniziale ridotto ad una dimensione con hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \hat{H}_m(\Phi) &= -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(p_\theta + i\hbar \frac{\sin \theta}{2(R + r \cos \theta)} \right)^2 + \frac{1}{(R + r \cos \theta)^2} \left(m - \frac{\Phi}{2\pi} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{8} \left(\frac{\cos \theta}{R + r \cos \theta} - \frac{1}{r} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Gli autovalori dell'hamiltoniano iniziale saranno l'unione di quelli degli hamiltoniani ridotti, infatti grazie alla decomposizione di Fourier si ha

$$\hat{H}(\Phi) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \hat{H}_m(\Phi) \quad (3.48)$$

Questa decomposizione riduce notevolmente la complessità del problema perché l'equazione da risolvere ora è ordinaria ad una variabile.

Gli autovalori energetici di interesse nel nostro caso sono solo i primi, poiché dobbiamo verificarne la degenerazione. Considerando che le hamiltoniane ridotte dipendono da m in maniera quadratica, è ragionevole supporre che i modi dello sviluppo che contribuiscono maggiormente al calcolo siano i primi positivi e negativi. Si sceglie di computare i valori di $m \in \{-4, -3, \dots, 4\}$.

Si calcolano quindi i livelli energetici del sistema al variare del parametro Φ e se ne grafica l'andamento per valutare la presenza o meno di degenerazioni.

Nelle simulazioni sono stati fissati i parametri geometrici del toro a $R = 3.0$ e $r = 1.0$, e la coordinata θ è stata discretizzata su una griglia periodica uniforme con $N = 800$ punti nell'intervallo $[0, 2\pi)$. La parte cinetica in θ è implementata tramite una discretizzazione in *forma divergente*, costruita in modo da preservare l'autoaggiuntezza rispetto al prodotto interno naturale sulla superficie: si introduce un peso diagonale pari alla misura indotta $\sqrt{h} = r(R + r \cos \theta)$, e gli autovalori si ricavano risolvendo un problema agli autovalori *generalizzato* del tipo $Hv = EWv$. Nel termine di potenziale è inclusa anche la correzione geometrica di da Costa, valutata punto per punto sulla griglia. Per ogni valore del flusso Φ si diagonalizza numericamente l'operatore in un insieme finito di settori di Fourier, scegliendo $m \in \{-4, -3, \dots, 4\}$, e si raccolgono gli autovalori più bassi tra tutti i settori per ricostruire i livelli fondamentali ed eccitati. Infine si esegue uno scan del flusso su $[0, 4\pi]$ con 160 campioni uniformi e si tracciano i primi quattro livelli E_0, E_1, E_2, E_3 in funzione di Φ .

Nel codice Python di simulazione la diagonalizzazione numerica è effettuata con SciPy, in particolare `scipy.linalg.eigh` (oltre a NumPy e Matplotlib per discretizzazione e grafici).

Al variare del parametro di flusso Φ si ottiene il risultato riportato in figura (3.2).

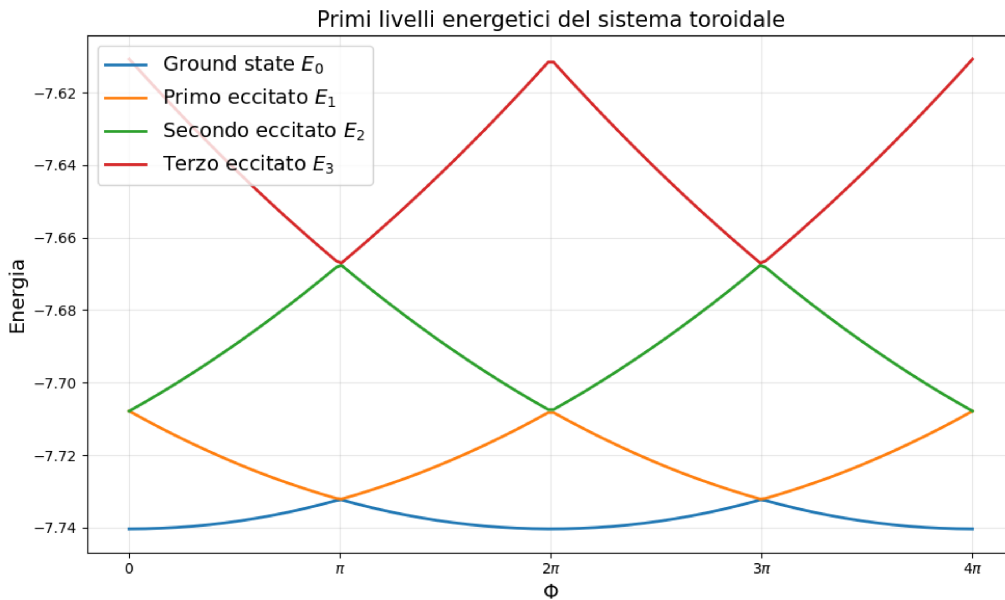


Figura 3.2: Livelli energetici ottenuti dalla simulazione

Come previsto dall'analisi delle rappresentazioni dei gruppi di simmetria, gli autovalori energetici si presentano due volte degeneri in corrispondenza di π e dei suoi multipli interi.

La simulazione numerica dunque conferma quanto discusso in termini generali nel capitolo 1. La struttura topologica del gruppo di simmetria di un sistema dinamico, opportunamente rappresentato in uno spazio di Hilbert, produce degli effetti misurabili e, data la loro natura, anche molto stabili sotto possibili perturbazioni. Di fatto sarebbe possibile aggiungere qualunque altro potenziale dipendente

dalla posizione purché non rompa la simmetria $U(1)$ su ϕ e, a meno di variazioni numeriche degli autovalori energetici, se ne osserverebbe la stessa struttura di degenerazione. Volendo sarebbe possibile implementare un potenziale tipo (2.4) del capitolo precedente con una generica dipendenza dalla variabile θ . Ciò che si otterrebbe in termini di degenerazione sarebbe analogo a quanto ottenuto nel Capitolo 2, poiché è solo la struttura topologica del gruppo a definire gli effetti discussi.

Conclusioni

In questa tesi si è analizzato il problema della realizzazione delle simmetrie in meccanica quantistica non relativistica, con particolare attenzione al ruolo delle rappresentazioni proiettive e delle estensioni centrali dei gruppi di simmetria.

Si è mostrato come, a partire da considerazioni di carattere topologico sul gruppo di simmetria e in particolare studiando il secondo gruppo di coomologia a coefficienti in $U(1)$, sia possibile classificare tali estensioni centrali. Queste strutture matematiche emergono fisicamente come vincoli sugli spettri energetici.

Gli esempi delle particelle quantistiche soggette a campi magnetici e vincolate su varietà 1 e 2-dimensionali confermano la potenza predittiva di questo metodo al di là dei dettagli microscopici del sistema. Si è sottolineato, con questi modelli, che le previsioni sugli spettri energetici possono essere modificate solo da deformazioni che alterino la topologia del sistema o rompano le simmetrie.

Una possibile estensione del presente lavoro consiste nell'indagare geometricamente l'accoppiamento delle topologie dello spazio degli stati quantistico, del gruppo di simmetria e del fibrato di gauge, con possibili applicazioni a teorie quantistiche di campo.

Bibliografia

- [1] Xie Chen et al. “Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group”. In: *Phys. Rev. B* 87 (15 apr. 2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.87.155114. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.87.155114>.
- [2] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloë. *Quantum Mechanics*. Vol. 1. New York: Wiley, 1977.
- [3] R. C. T. da Costa. “Quantum Mechanics of a Constrained Particle”. In: *Physical Review A* 23.4 (apr. 1981). DOI: 10.1103/PhysRevA.23.1982. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.23.1982>.
- [4] Mitsuhiro Ikegami et al. “Quantum Mechanics of a Particle on a Curved Surface: Comparison of Three Different Approaches”. In: *Progress of Theoretical Physics* 88.2 (ago. 1992). DOI: 10.1143/ptp/88.2.229.
- [5] Yuta Kikuchi e Yuya Tanizaki. “Global inconsistency, ’t Hooft anomaly, and level crossing in quantum mechanics”. In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* (2017). arXiv: 1708.01962 [hep-th].
- [6] S. Habib Mazharimousavi. “Quantum particle on a surface: Catenary surface and paraboloid of revolution”. In: *Physica Scripta* 96.12 (2021). DOI: 10.1088/1402-4896/ac326f.
- [7] Martin Schottenloher. *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*. Vol. 759. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 2008.
- [8] David Tong. *Gauge Theory*. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html>. Lecture notes. 2018.