

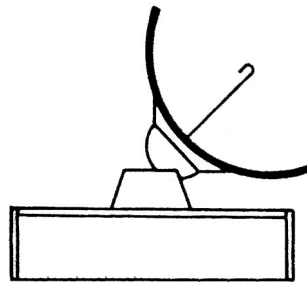
# Indice

Introduzione	3
Capitolo 1: Controllo di posizione	5
1.1 Equazioni di motori in corrente continua	5
1.2 Considerazioni sul controllo in retroazione	10
1.3 Controllo in retroazione	11
1.4 Tecniche di progettazione: sintesi per tentativi	13
1.5 Specifiche di controllore	14
1.6 Progettazione del controllore	16
1.6.1 Funzione di trasferimento $G_1(s)$	16
1.6.2 Primo controllore	17
1.6.3 Secondo controllore	19
1.6.4 Terzo controllore	21
Capitolo 2: Simulazioni	23
2.1 Simulazioni senza disturbo	23
2.1.2 Risposte del sistema nel dominio del tempo	23
2.1.3 Confronto tra le risposte ottenute	27
2.2 Analisi del disturbo	28
2.3 Simulazioni del sistema con l'aggiunta del disturbo	30
2.3.1 Descrizione dei disturbi	30
2.3.2 $C_1(s)$ : risposta al gradino con disturbo	31
2.3.3 $C_2(s)$ : risposta al gradino con disturbo	33
2.3.4 $C_3(s)$ : risposta al gradino con disturbo	36

<b>Capitolo 3: Controllo di posizione con i modelli di stato</b>	<b>39</b>
3.1 Costruzione della matrice di stato	39
3.2 Retroazione dallo stato (primo esempio)	40
3.3 Simulazioni	45
3.4 Retroazione dallo stato (secondo esempio)	48
3.5 Simulazioni	51

# Introduzione

Lo scopo della seguente trattazione è quello di analizzare il problema del posizionamento di un'antenna controllata da un attuatore che ne determina l'inclinazione rispetto ad un asse di riferimento.



*Fig. 1*

Per poter studiare le caratteristiche di tale sistema e migliorarne le prestazioni è necessario riferirsi ad un modello matematico. Tale modello è costituito da un insieme di equazioni che hanno lo scopo di descrivere al meglio il comportamento reale del sistema. Procediamo dunque con la descrizione del problema e la relativa modellizzazione. L'elevazione dell'antenna è controllata da un servomeccanismo di posizione che usa come attuatore un motore in corrente continua controllato tramite una tensione di ingresso sull'armatura; l'antenna può essere ruotata da  $0^\circ$  a  $180^\circ$  a seconda della tensione fornita in ingresso, tale tensione controlla infatti l'asse del motore che trasferisce la rotazione orientando il dispositivo. Come rilevatore di rotazione viene impiegato un potenziometro la cui tensione di uscita è anche il parametro di uscita del sistema, tale parametro è ottenuto dal confronto della tensione associata all'angolo di rotazione rispetto ad una tensione di riferimento. Per comodità facciamo corrispondere il valore della tensione in ingresso a quello della tensione desiderata in uscita. In tal modo l'ingresso di riferimento diventa una tensione elettrica invece che un angolo.



# Capitolo 1

## Controllo di posizione

### 1.1 Equazioni e modello del motore a corrente continua

Assumiamo come ingressi del sistema: la tensione di alimentazione delle armature del motore  $V(t)$  e la coppia assorbita dal carico  $C_c(t)$ , considerata come un disturbo che agisce sul sistema. Come uscite assumiamo: la tensione del potenziometro  $V_p(t)$ , la rotazione dell'asse del motore  $\theta(t)$  e la velocità angolare  $\omega(t)$ .

Le uscite sono legate dalle seguenti espressioni:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$V_p(t) = k_t \theta(t)$$

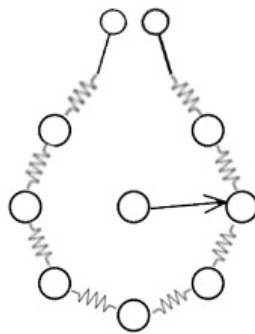


Fig. 2

Il potenziometro ha il compito di restituire in uscita un valore di tensione che sia un indice della posizione assunta dall'antenna, la seconda equazione indica il rapporto di proporzionalità tra le due grandezze tramite il parametro  $k_t$ . Utilizziamo il modello elettrico del motore in corrente continua:

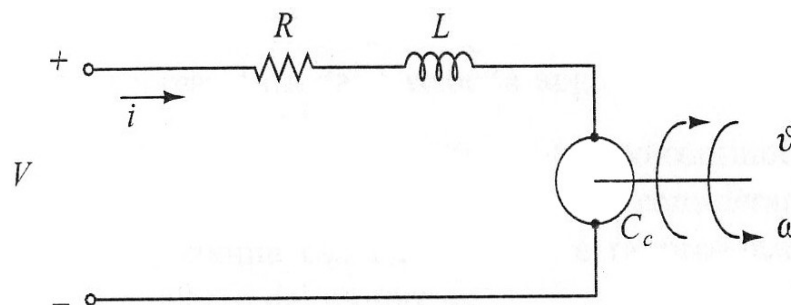


Fig.3

Con riferimento al modello sopra riportato può essere scritta l'equazione di equilibrio della tensione per il circuito d'armatura che collega la tensione di alimentazione alle cadute di tensione sulla resistenza, sull'induttanza e sul motore:

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + k \omega(t)$$

dove  $k \omega(t)$  rappresenta la forza controelettrica proporzionale alla velocità di rotazione. Per quanto riguarda la parte meccanica utilizziamo per la descrizione l'equazione di equilibrio tra la coppia motrice,  $C_m(t)$ , e la somma delle coppie resistenti,  $C_r(t)$ . La coppia motrice  $C_m(t)$  è proporzionale alla corrente  $i(t)$  tramite il parametro  $k$ . Sull'asse del motore la coppia resistente può essere scomposta in una componente dovuta al momento di inerzia del sistema  $J$  che risulta proporzionale all'accelerazione angolare, una componente  $f$  proporzionale alla velocità angolare dovuta all'attrito ed un'ultima componente dovuta al carico  $C_c(t)$ .

$$C_m(t) = C_r(t)$$

dove

$$C_m(t) = ki(t)$$

$$C_r(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f \omega(t) + C_c(t)$$

Ora cerchiamo di ottenere un modello nel quale la tensione di ingresso  $V(t)$  sia legata alla tensione di uscita del potenziometro  $V_p(t)$  in modo da ottenere una relazione ingresso/uscita e la relativa funzione di trasferimento. Per la completezza del modello consideriamo inoltre un disturbo variabile anch'esso in ingresso dovuto all'azione della coppia di carico  $C_c(t)$ . Consideriamo le relazioni del modello lineare prima descritto definendo ingresso, uscita e disturbo come segue:  $V(t) = u(t)$ ,  $V_p(t) = y(t)$ ,  $C_c(t) = n(t)$ . Si ottiene così:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{k}{k_t} y^{(1)}(t)$$

$$C_m(t) = C_r(t)$$

$$C_m(t) = ki(t)$$

$$C_r(t) = J \frac{y^{(2)}(t)}{k_t} + \frac{fy^{(1)}(t)}{k_t} + n(t)$$

e cerchiamo ora di ricavare da queste equazioni un modello ingresso/uscita SISO lineare. Proviamo quindi ad eliminare la variabile  $i(t)$  e riscriviamo l'equazione delle coppie uguagliando la coppia motrice alla coppia resistente in funzione della corrente:

$$i(t) = \frac{J}{k k_t} y^{(2)}(t) + \frac{f}{k k_t} y^{(1)}(t) + \frac{n(t)}{k}$$

ed infine, sostituendo questa equazione nell'equazione delle tensioni, otteniamo:

$$\frac{LJ}{k k_t} y^{(3)}(t) + \frac{Lf + RJ}{k k_t} y^{(2)}(t) + \frac{Rf + k^2}{k k_t} y^{(1)}(t) = u(t) - \frac{L}{k} n^{(1)}(t) - \frac{R}{k} n(t)$$

Da questa equazione si può osservare che il disturbo  $n(t)$  è modellato come un ingresso aggiuntivo, sconosciuto, da considerare come in tutti i processi reali. Per descrivere l'azione del disturbo nel sistema si assume che esso sia concentrato direttamente all'ingresso del processo da controllare.

Supponendo che l'ingresso ammetta trasformata di Laplace, anche l'uscita ammette a sua volta trasformata di Laplace. Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione e considerando senza perdita di generalità condizioni di ingresso nulle:

$$\frac{LJ}{kk_t} s^3 Y(s) + \frac{(Lf + RJ)}{kk_t} s^2 Y(s) + \frac{(Rf + k^2)}{kk_t} s Y(s) = U(s) - \frac{L}{k} s N(s) - \frac{R}{k} N(s)$$

Grazie alla linearità del sistema possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e quindi considerare separatamente le due evoluzioni dovute rispettivamente all'ingresso e al disturbo.

Così facendo otteniamo due funzioni di trasferimento ad anello aperto:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{kk_t}{s[LJs^2 + (Lf + RJ)s + (Rf + k^2)]}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = -kk_t \frac{\frac{L}{k}s + \frac{R}{k}}{s[LJs^2 + (Lf + RJ)s + (Rf + k^2)]} = -\left(\frac{L}{k}s + \frac{R}{k}\right)G_1(s)$$

che permette di esprimere Y(s) come:

$$Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)N(s)$$

I valori numerici dei parametri utilizzati vengono riportati di seguito:

$$R = 0.5 \quad \Omega$$

$$L = 0.025 \quad H$$

$$k = 1 \quad N^*m/A$$

$$J = 20 \quad kg^*m^2$$

$$f = 0.02 \quad N^*m^*s/rad$$

$$k_t = 6 \quad V/rad$$

e sostituendo tali valori nelle espressioni delle funzioni di trasferimento ad anello aperto otteniamo:

$$G_1(s) = \frac{6}{s(0.5s^2 + 10s + 1.01)} = \frac{6}{s(s+0.11)(s+19.898)}$$

$$G_2(s) = -\left[\frac{0.025s + 0.5}{s(0.5s^2 + 10s + 1.01)}\right] = -\left[\frac{0.025s + 0.5}{s(s+0.11)(s+19.898)}\right]$$



L'ingresso complessivo che viene applicato al sistema è dato da  $m(t) = u(t) + n'(t)$  dove l'ingresso  $n'(t)$  è il disturbo filtrato dal blocco  $H(s)$  che verrà tra poco definito in accordo alla *Fig.4*. Infatti, definito

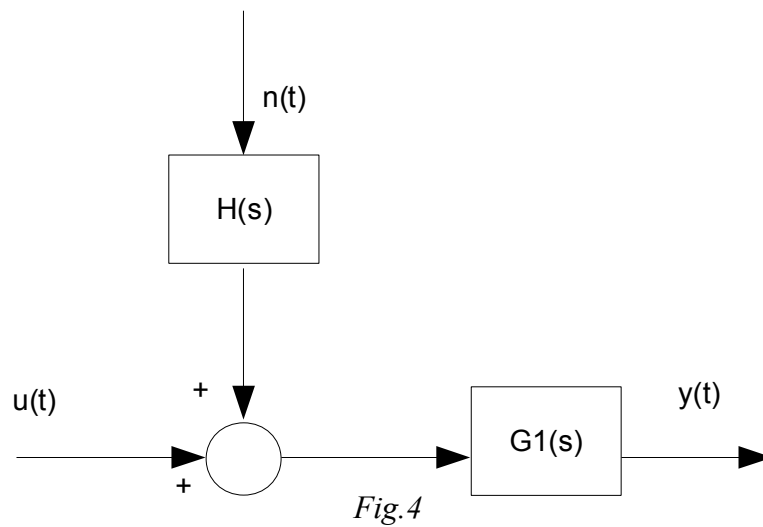
$$M(s) = U(s) - \frac{Ls}{k} N(s) - \frac{R}{k} N(s) = U(s) + H(s) N(s)$$

si ha:  $Y(s) = G_1(s) [U(s) + H(s) N(s)]$

con

$$H(s) = -\left(\frac{Ls + R}{k}\right) = \frac{G_2(s)}{G_1(s)}$$

e si definisce  $n'(t)$  tramite la relazione:  $N'(s) = H(s) N(s)$



## 1.2 Considerazioni sul controllo in retroazione

L'obiettivo del problema di controllo che è stato proposto consiste principalmente nel far sì che l'uscita si mantenga, a regime, ad un valore costante desiderato imposto da un ingresso di riferimento (costante) indicato con  $r(t)$ , contrastando, allo stesso tempo, effetti perturbativi di varia natura tra i quali disturbi esterni, la non esatta conoscenza del modello matematico della macchina elettrica o altri fattori ambientali. Per affrontare il problema si è scelto di procedere utilizzando uno schema di controllo a catena chiusa per i vantaggi che questo tipo di struttura di controllo in retroazione può avere per quanto riguarda le prestazioni. Nello svolgimento del problema si vuole mostrare inoltre come la retroazione possa essere usata in modo efficace per ottenere oltre che l'imprescindibile requisito della stabilità BIBO molte altre caratteristiche che determinano la "bontà" del sistema. Il tipo di schema a cui faremo riferimento sarà quello del controllo in retroazione con l'aggiunta di un compensatore  $C(s)$ , inserito davanti al processo  $G_1(s)$ . Uno schema composto come appena descritto viene detto ad un grado di libertà in quanto il processo  $G_1(s)$  è supposto noto e non modificabile, mentre dovremo agire su  $C(s)$  che rappresenta il nostro grado di libertà per imporre determinate caratteristiche al sistema.

Per quanto riguarda il progetto, esso sarà svolto cercando di mettere in relazione i parametri in frequenza (banda passante e picco di risonanza) del sistema retroazionato con le proprietà del sistema in catena aperta e con altri parametri a questo legati. Il riferimento di tensione  $r(t)$  viene confrontato con il segnale di reazione che rappresenta la tensione al potenziometro, la differenza tra questi due segnali costituisce l'errore (o segnale di errore) di tensione  $e(t)$  che viene elaborato dal controllore  $C(s)$  per produrre il riferimento di tensione  $u(t)$  che a sua volta viene applicata al motore, assieme alla coppia di disturbo  $n'(t)$ .

Quando specificato lo schema potrà contenere anche dei saturatori che servono per limitare i segnali di tensione in modo da non superare mai i limiti fisici del motore come si vedrà più avanti.

### 1.3 Controllo in retroazione

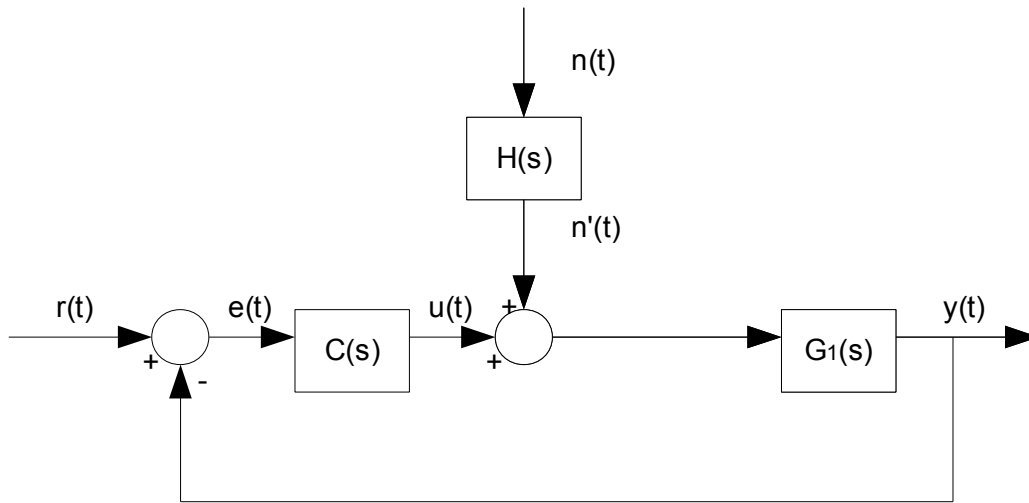


Fig. 5

Per migliorare le caratteristiche dinamiche del sistema introduciamo uno schema di controllo in retroazione come mostrato in Fig.5. Il controllore  $C(s)$  deve essere progettato in modo da garantire buoni tempi di salita e assestamento e più in generale da garantire il raggiungimento degli obiettivi di controllo predefiniti cercando però di ricorrere al contempo a strutture più semplici possibili. Ovviamente nel nuovo schema ad anello chiuso il nuovo ingresso è il riferimento  $r(t)$  che vogliamo raggiungere.

Possiamo far agire separatamente i due ingressi  $r(t)$  e  $n(t)$ . In corrispondenza a  $r(t)$  la risposta del sistema è:

$$Y_r(s) = \frac{G_1(s)C(s)}{1 + G_1(s)C(s)} R(s) = W(s) R(s)$$

dove si è posto:

$$W(s) = \frac{G_1(s)C(s)}{1 + G_1(s)C(s)}$$

espressione che rappresenta la FDT del sistema complessivo in catena chiusa.

Mentre la risposta al disturbo  $n(t)$  è:

$$Y_r(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)C(s)} H(s) N(s) = W(s) \frac{H(s)N(s)}{C(s)}$$

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_n(s) = W(s)R(s) + W(s) \frac{H(s)N(s)}{C(s)}$$

Il risultato del filtraggio del segnale di disturbo attraverso la funzione di trasferimento  $\frac{H(s)}{C(s)}$  viene indicato con  $\bar{n}(t)$  (ovvero il segnale che dovrebbe essere applicato all'ingresso del sistema retroazionato per ottenere il nostro segnale di disturbo  $n(t)$ ) e  $\bar{N}(s)$  è la sua trasformata di Laplace. Si può scrivere l'uscita complessiva come:

$$Y(s) = W(s)[R(s) + \bar{N}(s)]$$

Il segnale effettivo applicato all'ingresso è somma del segnale di riferimento e di una versione equivalente del disturbo, e tale segnale agisce sul sistema ad anello chiuso e l'uscita effettiva viene riportata all'ingresso tramite la retroazione negativa. Quindi in forma compatta:

$$Y(s) = W(s)R_{eff}(s), \quad \text{con} \quad R_{eff}(s) = R(s) + \bar{N}(s)$$

L'obiettivo da perseguire è la riduzione degli effetti del disturbo  $n(t)$ , per cui  $C(s)$  deve essere progettato in modo da ottenere un valore elevato in modulo nel più ampio intervallo di frequenze possibile, tipicamente nell'intervallo di frequenze che interessa il disturbo. Più precisamente, è  $\frac{H(s)}{C(s)}$  che deve risultare piccolo in modulo in tale intervallo di frequenze.

Per ottenere le specifiche di progetto che vogliamo assegnare al sistema retroazionato dobbiamo attribuire alla funzione di trasferimento in catena aperta opportune caratteristiche che verranno definite tra breve. Per ottenere infine il controllore utilizziamo una tecnica nota come sintesi per tentativi.

## 1.4 Tecniche di progettazione: sintesi per tentativi

Le assunzioni che hanno portato allo schema di controllo illustrato nelle figure precedenti hanno permesso di ricavare un sistema lineare, da qui il vantaggio di poter svolgere l'analisi e il progetto del compensatore con le più comuni tecniche di controllo. Se si assume che la presenza dei saturatori nel sistema (che sono blocchi non lineari) non influenzi l'andamento dei segnali, ovvero ipotizzando di lavorare con segnali sufficientemente piccoli da non far intervenire i saturatori, l'anello di retroazione può essere studiato nel dominio di Laplace. Per progettare i controllori si userà la tecnica di sintesi per tentativi basata sull'utilizzo dei diagrammi di Bode per rappresentare la risposta in frequenza, anche se ogni altra tecnica sarebbe comunque applicabile. Come tecnica di progetto del sistema di controllo la sintesi per tentativi pur non essendo un metodo rigoroso si rivela utile ed efficace nella maggior parte dei casi e permette di tener conto delle varie problematiche fino a raggiungere il progetto di un compensatore ottimale sotto vari punti di vista.

Il compensatore deve in generale essere progettato in modo da:

1. introdurre dei poli nell'origine in modo da incrementare il tipo del sistema e al contempo migliorare la capacità di reiezione dei disturbi e la sensitività alle variazioni parametriche.
2. aumentare il guadagno della FDT in catena aperta in modo da diminuire l'errore a regime permanente e se necessario come tecnica per aumentare la pulsazione di attraversamento.
3. introdurre uno o più zeri o poli reali negativi: zeri utili sia per lo sfasamento positivo che introducono che garantisce un buon margine di fase sia per la stabilità del sistema, poli per ridurre, quando necessario,  $\omega_A$ . Ma anche zeri e/o poli stabili per indurre qualche cancellazione zero-polo e ridurre conseguentemente la complessità del processo di sintesi.

Spesso un polo nell'origine e due zeri reali sono sufficienti a soddisfare le specifiche di progetto.

## 1.5 Specifiche di controllo

Come è noto la tecnica di controllo basata sui diagrammi di Bode richiede l'analisi della FDT ad anello aperto  $C(s)G_1(s)$  e il soddisfacimento dei requisiti di controllo del sistema in catena chiusa è ottenuto imponendo opportune specifiche alla risposta in frequenza di  $C(s)G_1(s)$ .

Dai parametri nel dominio della frequenza ottenuti dal sistema ad anello aperto  $C(s)G_1(s)$  possiamo ricavare un'approssimazione dei parametri temporali di interesse per il sistema  $W(s)$  come ad esempio tempo di salita, tempo di assestamento e sovraelongazione. In particolar modo la specifica che vogliamo adottare per il tempo di salita può essere tradotta in una specifica sulla pulsazione di attraversamento e la sovraelongazione in una condizione sul margine di fase di  $C(s)G_1(s)$ .

Vogliamo progettare un controllore lineare e tempo-invariante dotato di poli a parte reale non positiva in modo che il sistema retroazionato  $W(s)$  sia BIBO stabile e si raggiungano i seguenti obiettivi:

1. il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore a regime permanente alla rampa pari, all'incirca, a 0.1 ( $e_{rp} < 0.1$ );
2. la pulsazione di attraversamento  $\omega_A$  della funzione di trasferimento in catena aperta  $C(s)G_1(s)$  sia di almeno 5rad/s ( $\omega_A^* = 5 \text{ rad/s}$ );
3. il margine di fase  $\varphi_A$  di  $C(s)G_1(s)$  alla pulsazione  $\omega_A^*$  sia di almeno  $45^\circ$  (tale valore è suggerito da considerazioni sul picco di risonanza di  $W(j\omega)$ );

Visto che le grandezze sopra elencate non sono indipendenti tra loro è richiesto a volte un compromesso fra le varie esigenze.

Le specifiche sono state ottenute da osservazioni e analisi svolte sulle caratteristiche del sistema e hanno attinenza con l'applicazione fisica e reale del motore, e come si vedrà in seguito il loro soddisfacimento permette di ottenere prestazioni ottimali.

Altre caratteristiche che vanno considerate e aggiunte in questo problema pratico non si possono ignorare:

- il comportamento ai disturbi: come si vedrà meglio in seguito per ottenere un comportamento ottimale il controllore  $C(s)$  dovrebbe avere un polo nell'origine o quantomeno un guadagno sufficientemente elevato in modo da attenuare almeno di 40 dB il disturbo.
- l'azione del saturatore che regola l'ingresso del motore: si dovrà porre un limite superiore al valore della frequenza di attraversamento perché sarebbe inutile raggiungere valori troppo elevati in ingresso che andrebbero saturati con conseguente sovraccarico del saturatore. Questo fenomeno oltre a distorcere le caratteristiche del sistema progettato potrebbe rallentare ulteriormente il sistema fino ad ottenere prestazioni peggiori rispetto a quelle ottenute rallentando volontariamente il sistema. Si sceglierà dunque di ottenere comportamenti non troppo diversi con e senza saturatore.

In generale considerando il valore della frequenza di attraversamento vorremmo ottenere al fine delle prestazioni una maggior banda passante (data la sua proporzionalità inversa con il tempo di salita) e per evitare tempi di assestamento troppo lunghi un maggior margine di fase.

Possiamo notare che la FDT  $G_1(s)$  presenta un polo nell'origine per cui anche la funzione ad anello aperto  $C(s)G_1(s)$  presenta lo stesso polo nell'origine, questo ci permette di dire che il sistema retroazionato che vogliamo studiare è di tipo 1. Dunque possiamo affermare che l'errore a regime permanente, cioè l'errore che il sistema compie nell'inseguire il segnale di ingresso, è nullo se in ingresso si presenta il segnale canonico  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  ovvero il gradino unitario. Al livello della nostra applicazione questo significa che dato un segnale di ingresso costante che corrisponde ad un certo grado di inclinazione il motore porterà l'antenna, dopo un certo transitorio iniziale, alla precisa posizione richiesta. Per aumentare il tipo del sistema è necessario rendere la molteplicità del polo nell'origine della funzione di trasferimento in catena aperta pari al grado che si vuole raggiungere. Si può ottenere un sistema di tipo 2 inserendo un polo nell'origine in  $C(s)$  in modo da ottenere un inseguimento al segnale “rampa” con errore di regime permanente nullo oltre a garantire una miglior risposta ai disturbi. Ma il principale vantaggio del polo nell'origine di  $C(s)$  sarà evidente quando analizzeremo il comportamento del sistema ai disturbi costanti.

## 1.6 Progettazione del controllore

### 1.6.1 Funzione di trasferimento $G_1(s)$

Supponiamo che l'ingresso al sistema  $r(t)$  sia un gradino unitario e procediamo nella progettazione di un controllore  $C(s)$  che dia una “buona” FDT ad anello chiuso  $W(s)$ . Cerchiamo di ottenere buone caratteristiche sia in regime transitorio che in regime permanente per la risposta al gradino in termini di tempo di salita  $t_r$ , tempo di assestamento  $t_s$  e sovraelongazione  $s$  (oltre al requisito irrinunciabile della stabilità). Visto che si è scelto di progettare più di un controllore in modo da poter confrontare i risultati ottenuti dai rispettivi sistemi, si farà d'ora in poi riferimento al controllore generico con il simbolo  $C_i(s)$ . Come primo passo proveremo a progettare dei controllori con l'obiettivo di soddisfare le precedenti specifiche e per ognuno verranno analizzate le prestazioni ottenute dal sistema che ne fa uso considerando prima il semplice sistema retroazionato e poi il sistema in presenza di disturbo. Cominciamo con l'analizzare graficamente la FDT  $G_1(s)$  (si veda la Fig. 6) del sistema in catena aperta in modo da definire le caratteristiche preliminari che dovranno essere modificate con l'aggiunta del controllore. La frequenza di attraversamento  $\omega_A$  risulta essere di circa 0.79 rad/sec e il margine di fase  $\phi_A$  di circa  $10^\circ$ . Di seguito sono proposte delle soluzioni per la realizzazione dei compensatori  $C_i(s)$ .

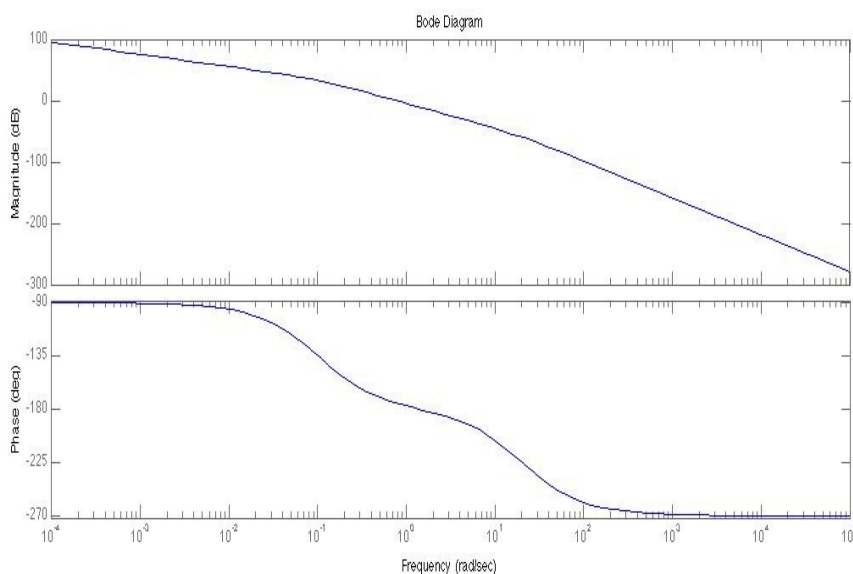


Fig. 6: Diagramma di Bode di  $G_1(s)$



### 1.6.2 Primo controllore

Come primo progetto di compensatore viene proposto  $C_1(s)$ .

$$C_1(s) = \frac{10(s+1)}{(0.001s+1)}$$

Di seguito vengono riportati i diagrammi di Bode di  $C_1(s)$  e della FDT in catena aperta  $C_1(s)G_1(s)$ .

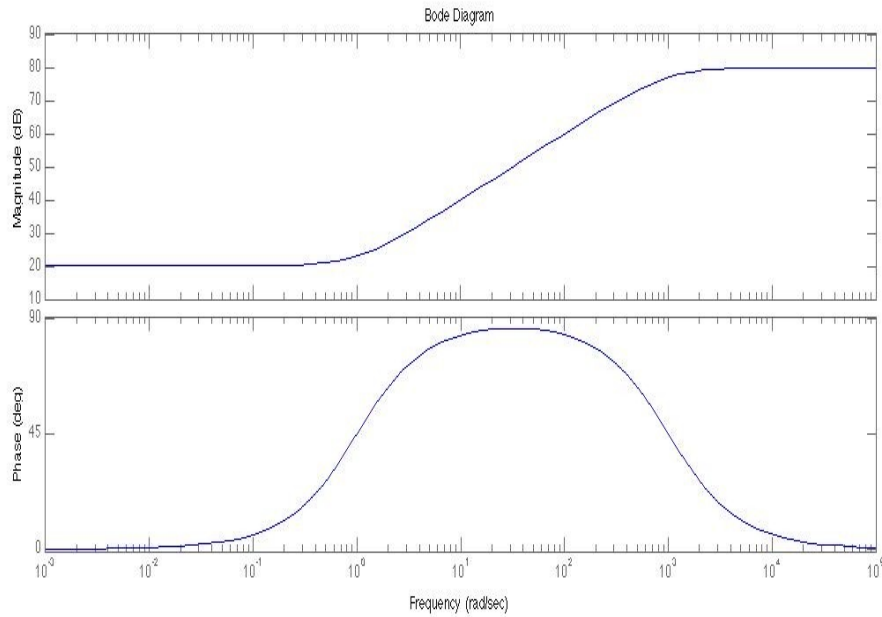


Fig. 7: Diagramma di Bode di  $C_1(s)$

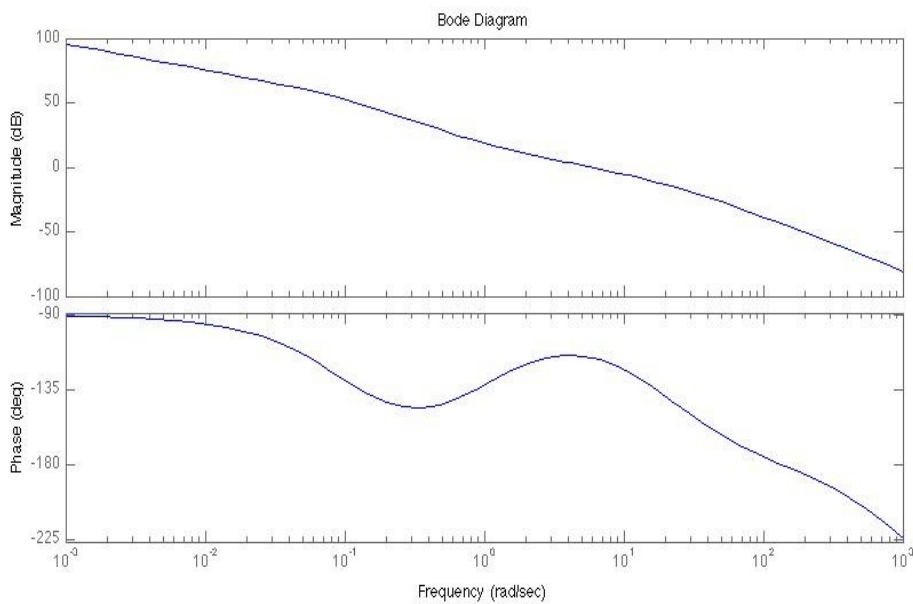


Fig. 8: Diagramma di Bode di  $C_1(s)G_1(s)$

Osservazioni:

- Si riportano i parametri in frequenza relativi a  $C_1(s)G_1(s)$  più significativi:  
 $\omega_{A1} = 5.9 \text{ rad ca.}$     $\varphi_{A1} = 65^\circ \text{ ca.}$
- Si può vedere come l'introduzione del controllore migliori il margine di fase nei pressi della frequenza di attraversamento della funzione di trasferimento.

Lo scopo di questo primo compensatore è quello di soddisfare le specifiche considerando il sistema in assenza di disturbo. Possiamo assumere che le specifiche sul tipo del sistema siano già soddisfatte e ci occupiamo dunque di quelle riguardanti il vincolo sull'errore di regime permanente. Visto che la FDT ad anello aperto è ottenuta dal prodotto di  $C_1(s)$  con  $G_1(s)$  si ha che il guadagno totale è il prodotto dei guadagni delle due funzioni, come primo passo attribuiamo pertanto al compensatore un guadagno proporzionale  $C_1(s) = K_B(C_1)$  in modo da soddisfare la seguente espressione  $K_B(CG) > 10$ . Notiamo che sebbene così facendo riusciamo ad aumentare il guadagno e ad alzare il modulo di  $G_1(s)$ , e di conseguenza ad aumentare il valore di  $\omega_A$ , in realtà questa operazione non modifica la disposizione di poli e zeri e in particolare non migliora il margine di fase ma anzi questo peggiora con l'avvicinarsi di  $\omega_A$  al secondo polo di  $G_1(s)$  (come risulta dalla *Fig.5*). Per migliorare il margine di fase introduciamo uno zero stabile e scegliamo di posizionarlo alla frequenza di 1 rad/sec per cercare di attenuare l'effetto del primo polo di  $G_1(s)$ . Un buon compromesso tra margine di fase alto o comunque superiore a  $45^\circ$  e  $\omega_A^*$  ha portato alla scelta di un guadagno pari a 10.

Come si può vedere dai risultati, la specifica sulla frequenza di attraversamento è stata superata e abbiamo raggiunto un valore maggiore di quello richiesto, in generale questo non è un problema perché aumentando la banda passante migliora anche il tempo di salita che è uno dei parametri di interesse del sistema; d'altra parte però come già discusso aumentando troppo la frequenza di attraversamento si rischia di sovraeccitare il motore e quindi sottoporre il sistema a segnali di ingresso  $u(t)$  sproporzionati che possono danneggiarlo. Con il compensatore  $C_1(s)$  abbiamo raggiunto gli obiettivi che ci eravamo prefissati ma come già accennato questo non è sufficiente per una buona risposta del sistema in presenza di disturbi, infatti, per ottenere una risposta soddisfacente in presenza di un disturbo costante bisogna inserire nel progetto del compensatore almeno un polo nell'origine. Ciò sarà chiarito nel seguito quando analizzeremo gli effetti dei disturbi.

### 1.6.3 Secondo controllore

Come secondo progetto di compensatore viene proposto  $C_2(s)$ .

$$C_2(s) = \frac{3(10s+1)(s+1)}{s(0.001s+1)}$$

Come prima riportiamo i diagrammi di Bode di  $C_2(s)$  e della FDT in catena aperta  $C_2(s)G_1(s)$ .

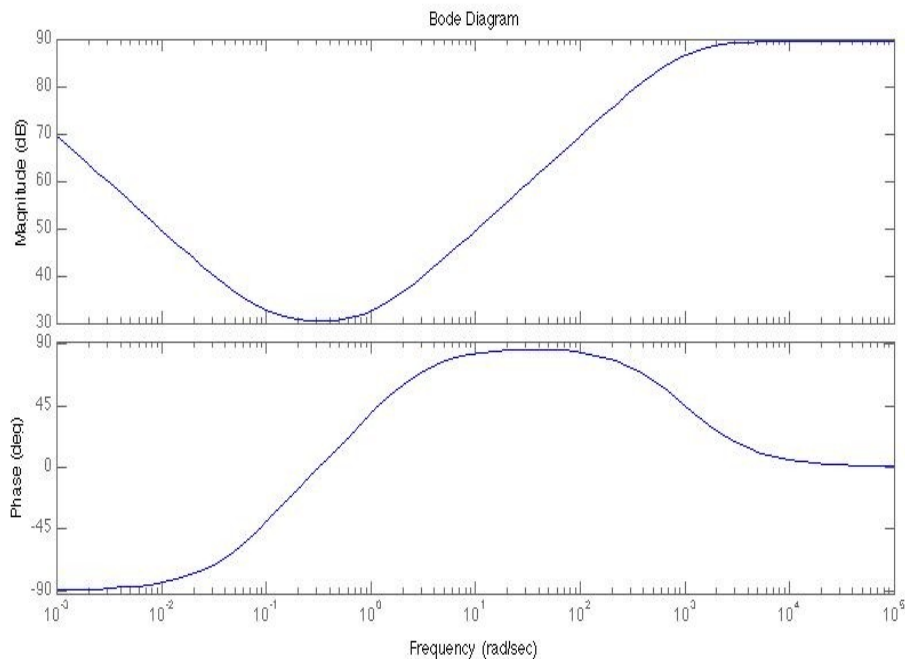


Fig. 9: Diagramma di Bode di  $C_2(s)$

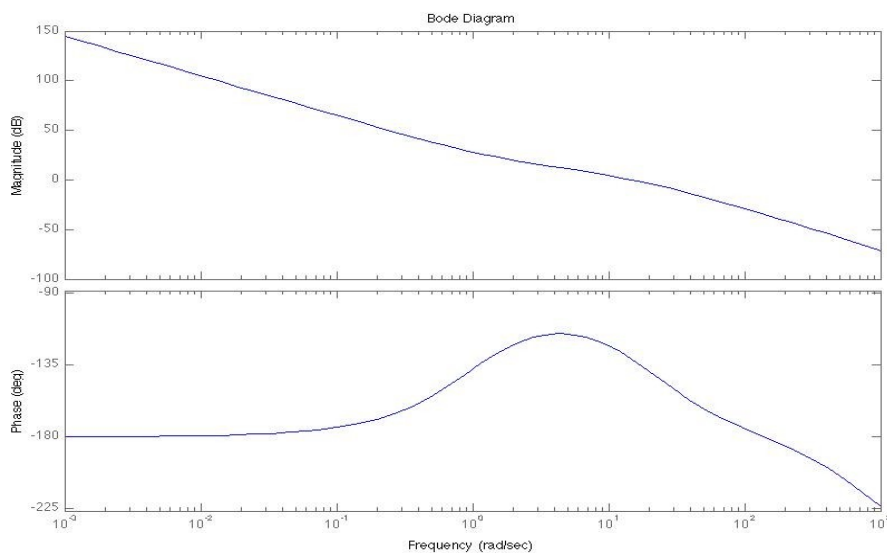


Fig.10: Diagramma di Bode di  $C_2(s)G_1(s)$

Osservazioni:

- si riportano i parametri in frequenza relativi a  $C_2(s)G_1(s)$  più significativi:  
 $\omega_{A2} = 14,6 \text{ rad ca.}$ ,  $\varphi_{A2} = 49^\circ \text{ ca.}$
- nel primo grafico si può notare la presenza di un polo nell'origine, poi contrastato dalla presenza dei due zeri che alzano sia il diagramma del modulo che quello della fase.

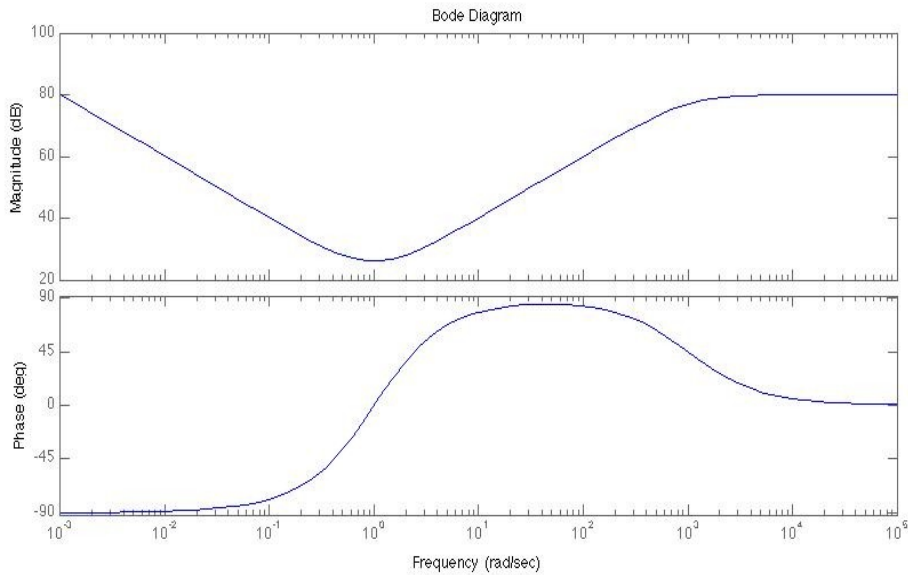
Procediamo con il progetto del secondo controllore nel quale oltre ad un polo nell'origine introduciamo un ulteriore zero a parte reale negativa, distinto dal primo, più vicino al secondo polo di  $G_1(s)$  in modo da migliorare il margine di fase ottenuto. Il secondo controllore ha anche lo scopo di ottenere maggiori prestazioni in presenza di disturbo, obiettivo assicurato dalla presenza del polo nell'origine. Così facendo otteniamo migliori prestazioni soprattutto quando in ingresso abbiamo disturbi costanti e in generale in bassa frequenza. Per quanto riguarda le prestazioni dell'intero sistema notiamo che il nuovo polo aumenta il tipo del sistema. Questo significa che l'errore a regime che il sistema compie nel seguire un segnale di ingresso  $r(t)$  a rampa sarà nullo. Tutto questo a livello di applicazione si traduce nella caratteristica di inseguire un certo riferimento che varia in modo costante. La  $\omega_A$  ottenuta è maggiore di quella richiesta per cui il sistema sarà più veloce, misurando però il segnale tramite un'oscilloscopio posto prima di  $G_1(s)$  troviamo che l'ingresso al processo è cento volte maggiore del massimo valore che vorremmo ottenere cioè quello della tensione nominale del motore; utilizzando il secondo compensatore quindi rischiamo di sovraccaricare il saturatore e di ottenere in uscita una risposta lenta dominata dall'azione di quest'ultimo, inoltre tale risposta potrebbe essere molto differente da quella ottenuta dalle simulazioni svolte senza saturatore.

### 1.6.4 Terzo controllore

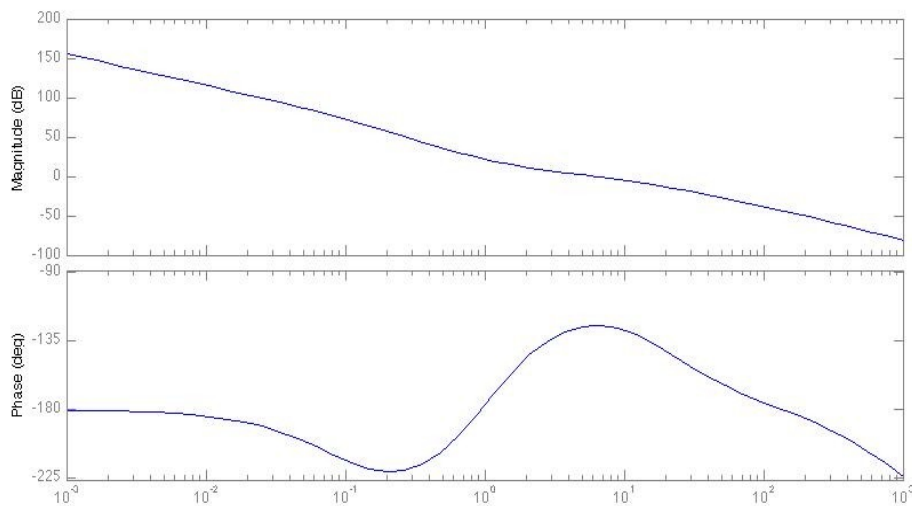
Passiamo ora all'analisi del terzo controllore proposto.

$$C_3(s) = \frac{10(s+1)^2}{s(0.001s+1)}$$

Come prima riportiamo i diagrammi di Bode di  $C_3(s)$  e della FDT in catena aperta  $C_3(s)G_1(s)$ .



*Fig.11: Diagramma di Bode di  $C_3(s)$*



*Fig.12: Diagramma di Bode di  $C_3(s)G_1(s)$*

Osservazioni:

- Si riportano i parametri in frequenza relativi a  $C_3(s)G_1(s)$  più significativi:  
 $\omega_{A3} = 5,9 \text{ rad ca.}$  ,  $\varphi_{A3} = 55^\circ \text{ ca.}$

Nel progettare quest'ultimo controllore vorremo ottenere un valore di  $\omega_A$  quanto più possibile vicino a quello fornito nelle specifiche per motivi legati alla velocità del sistema e all'azione di saturazione prima spiegati. Come progetto è molto simile al secondo, abbiamo mantenuto il polo nell'origine, la struttura con due zeri stabili ed abbiamo aumentato il guadagno. La posizione degli zeri è stata cambiata ed ora abbiamo un doppio zero in  $\omega_A = 1 \text{ rad/sec}$ , infatti si è spostato il primo zero verso destra in modo da ottenere un abbassamento della frequenza desiderata, obiettivo voluto, e un aumento del margine di fase. Per quanto riguarda gli ingressi  $u(t)$  al processo  $G_1(s)$  si ottengono valori sensibilmente più bassi che si mantengono entro limiti da noi considerati accettabili per le prestazioni del sistema in presenza del saturatore. Come si vedrà anche in seguito nelle simulazioni le risposte del sistema ottenute con e senza saturatore differiscono solamente per la velocità di risposta che nel caso del saturatore avviene con tempi più lunghi.

## Capitolo2

### Simulazioni

#### 2.1 Simulazioni senza disturbo

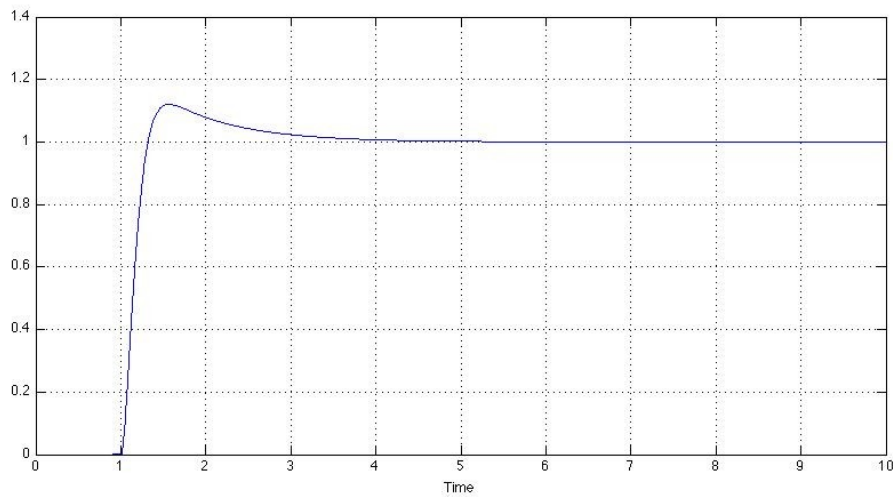
##### 2.1.1 Risposte del sistema nel dominio del tempo

I diagrammi di Bode sopra riportati forniscono precise indicazioni sulle caratteristiche del sistema, grazie ai parametri in frequenza ottenuti dai grafici abbiamo potuto condurre un'analisi approssimata degli andamenti temporali dei segnali di interesse e sviluppare osservazioni utili al miglioramento delle prestazioni. Adesso ci occupiamo di verificare se le dinamiche da noi previste trovano riscontro reale nelle simulazioni dei segnali di uscita del sistema.

Riportiamo dunque in questa sezione tutte le varie risposte ottenute dalle simulazioni del comportamento del sistema aggiungendo ogni volta un diverso controllore tra quelli progettati di cui si vogliono sottolineare le diverse caratteristiche (sia con che senza saturazione). Prima sono riportati gli andamenti delle uscite  $y(t)$  relative allo schema che non introduce limitazioni al segnale  $u(t)$  e poi quelle ottenute dal sistema con l'aggiunta del saturatore.

Gli andamenti dei segnali più significativi per lo sviluppo del nostro problema sono le uscite  $y(t)$  in risposta al segnale di ingresso a gradino, infatti studiando queste possiamo renderci conto dell'effetto che provoca una variazione del segnale d'ingresso e quindi il comando di raggiungere una nuova posizione. Il gradino è considerato come un segnale ideale, senza ritardi, che commuta istantaneamente da 0V ad 1V, valore che poi si mantiene per un tempo indeterminato; le seguenti risposte rappresentano l'evoluzione del segnale di uscita che cerca di inseguire il segnale di riferimento. Insieme ai grafici vengono riportati anche una serie di valori caratteristici che servono per capire meglio gli andamenti analizzati, come tempo di salita ( $t_r$  al 1%), tempo di assestamento ( $t_s$  al 1%) e sovranelongazione ( $s$ ).

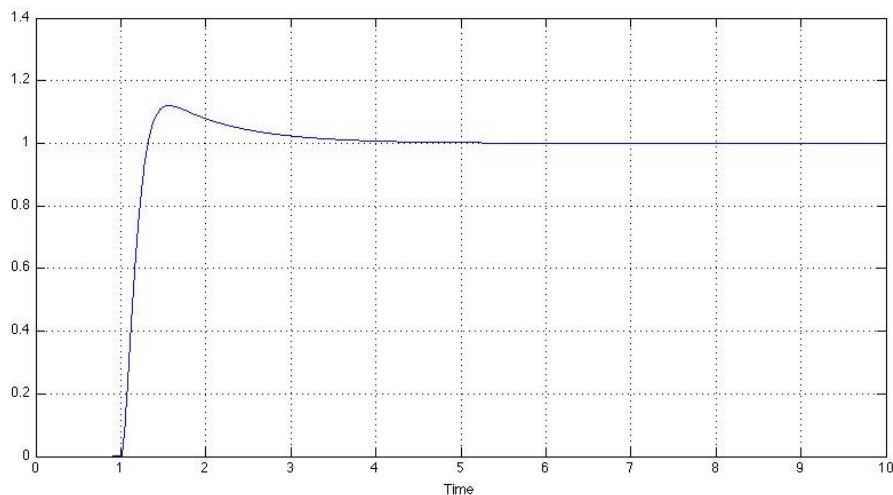
Cominciamo con l'analizzare la risposta che il sistema fornisce al segnale d'ingresso (gradino) quando viene aggiunto all'anello di retroazione il compensatore  $C_1(s)$  e nessun segnale del sistema viene limitato.



*y(t) per  $C_1(s)$  senza saturatore*

La risposta presenta una leggera sovraelongazione ( $s = 12\%$ ), il tempo di salita vale  $t_r = 0.32$  s e la curva si assesta dopo un tempo di 2.7 s ( $t_s$ ).

Sotto è riportato l'andamento dello stesso segnale con una limitazione al segnale  $u(t)$  posta a  $\pm 260$  V.

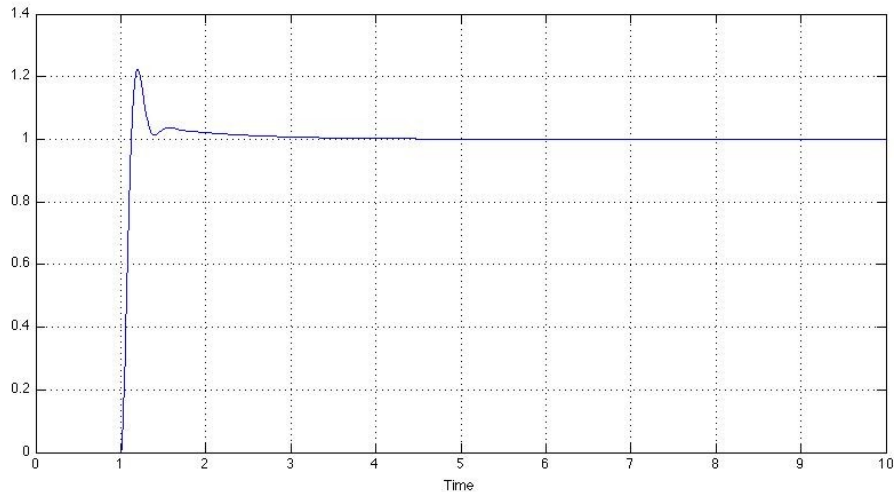


*y(t) per  $C_1(s)$  senza saturatore*

Possiamo notare come l'azione del saturatore abbia soppresso la sovraelongazione, allo stesso tempo però ha rallentato la risposta che raggiunge il riferimento solo dopo 4 secondi. Tutto sommato, questo andamento sembra migliore del precedente.

La risposta  $y(t)$  che il sistema fornisce quando si utilizza nell'anello di retroazione il compensatore  $C_2(s)$  viene riportata di seguito.



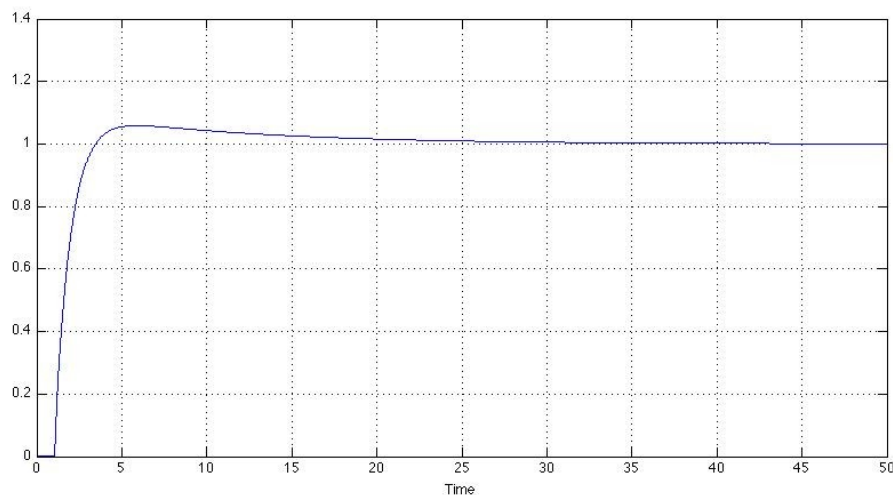


$y(t)$  per  $C_2(s)$  senza saturatore

In questo caso i parametri sono:  $t_r = 0.13$  s,  $t_s = 1.7$  s e  $s = 23\%$ .

Si nota un miglioramento del tempo di salita ma un peggioramento per quanto riguarda la sovraelongazione, interviene inoltre una leggera oscillazione della curva prima dell'assestamento sul valore costante.

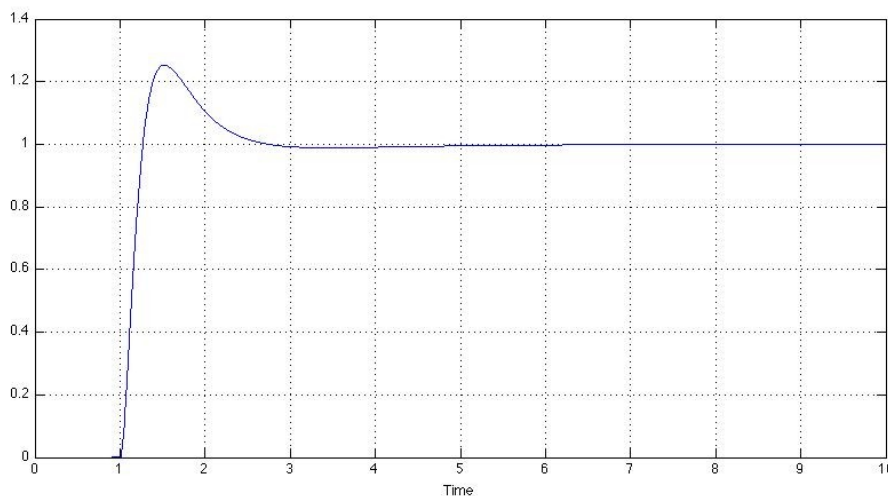
Sotto è riportato l'andamento dello stesso segnale con una limitazione al segnale  $u(t)$  posta a  $\pm 260$  V.



$y(t)$  per  $C_2(s)$  con saturatore

A differenza del primo controllore qui la saturazione non riesce ad eliminare completamente la sovraelongazione ( $s = 6\%$ ) che ritarda il tempo di assestamento ( $t_s = 24$  s) e peggiora prevedibilmente anche il tempo di salita ( $t_r = 3$  s). Ancora una volta, però, l'andamento globale sembra migliore con il saturatore.

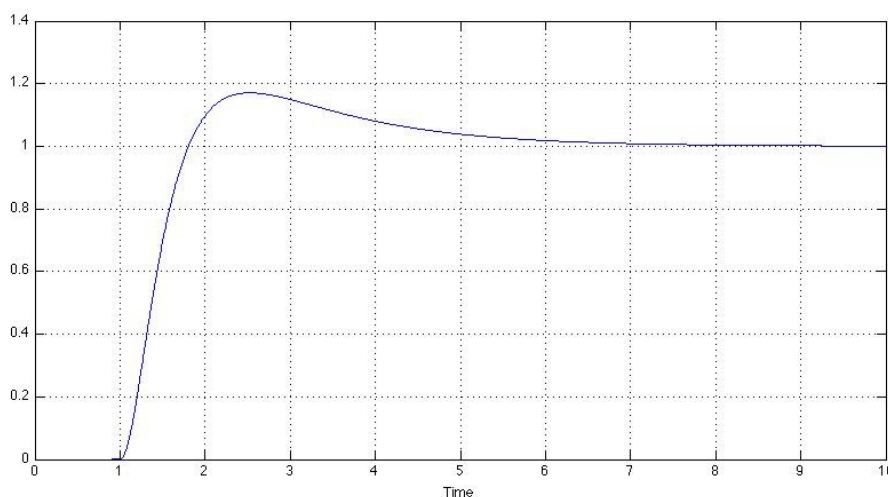
In seguito riportiamo le simulazioni di  $y(t)$  ottenute sostituendo l'ultimo compensatore  $C_3(s)$  nello schema di retroazione.



*$y(t)$  per  $C_3(s)$  senza saturatore*

In questo caso i parametri sono:  $t_r = 0.27$  s,  $t_s = 1.6$  s, e  $s = 25\%$ . Il tempo di salita è intermedio tra quelli già visti ma presenta una sovralongazione maggiore di entrambe le precedenti.

Sotto è riportato l'andamento dello stesso segnale con una limitazione al segnale  $u(t)$  posta a  $\pm 260$  V.



*$y(t)$  per  $C_3(s)$  con saturatore*

Questa è la risposta che assomiglia maggiormente alla sua corrispondente ottenuta senza saturatore. La risposta ottenuta con il saturatore ha un  $t_r = 0.8$  s minore di quello ottenuto per  $C_2(s)$  anche se una sovralongazione più elevata ( $s = 17\%$ ).

### **2.1.3 Confronto tra le risposte ottenute**

Come già visto la progettazione dei controllori segue un'evoluzione basata sul miglioramento delle prestazioni man mano che si definiscono le varie esigenze; si è partiti dal primo, ottimale dal punto di vista delle specifiche in frequenza, che doveva essere migliorato per quanto riguarda la risposta ai disturbi come vedremo tra poco, quindi, si è pensato ad una struttura con un polo nell'origine adottata poi nei secondi due compensatori, a loro volta differenti per la velocità di reazione che attribuiscono al sistema. Ora tramite le simulazioni possiamo notare che le caratteristiche che presenta il primo sistema sono buone sia in termini di velocità della risposta ottenuta dal sistema senza saturatore sia per quanto riguarda la risposta ottenuta dal sistema con saturatore che pur risultando più lenta della prima ha il vantaggio di non avere nessuna sovraelongazione.

Il secondo controllore oltre a presentare l'importante requisito del polo nell'origine per contrastare efficacemente i disturbi e quindi risultare nettamente migliore rispetto al primo sotto questo aspetto, ha una frequenza di attraversamento più elevata che però oltre ad aumentare la velocità del sistema rende più evidente la differenza tra le risposte in presenza ed in assenza della saturazione, differenza di risposte che risulta essere la peggiore tra le tre, ed introduce anche un'oscillazione brusca nella prima risposta.

L'ultimo controllore è un compromesso tra i primi due, infatti ha il vantaggio di avere una buona risposta ai disturbi, come il secondo, ma allo stesso tempo è più lento e il suo andamento in presenza del saturatore differisce poco da quello senza, caratteristica che è considerata un vantaggio per l'attinenza con la situazione reale. Se però per una particolare applicazione risultasse meno importante la risposta ai disturbi e invece fosse una caratteristica imprescindibile l'assenza di sovraelongazione si deve riconoscere al primo sistema la totale mancanza di questa caratteristica considerata negativa nella maggior parte delle situazioni.

## 2.2 Analisi del disturbo

Dopo esserci concentrati sulla risposta al gradino, senza considerare alcun tipo di disturbo ed avere ottenuto risultati soddisfacenti, procediamo con l'analisi dell'incidenza dei disturbi sul sistema. L'azione del disturbo sul sistema è rappresentata dal termine  $Y_n(s)$  che, come visto precedentemente, rappresenta la risposta del sistema all'ingresso  $n(t)$ .  $Y_n(s)$  è il risultato del filtraggio del segnale  $n(t)$  tramite la funzione di trasferimento  $F_i(s)$  definita come:

$$F_i(s) = \frac{W(s)H(s)}{C_i(s)}$$

Dato che il termine di ingresso  $n(t)$ , corrispondente al disturbo, viene pesato da quest'ultima espressione è immediato rendersi conto che il compensatore  $C_i(s)$  inserito nel sistema retroazionato influenza anche l'azione del termine  $Y_n(s)$  oltre che la risposta del sistema  $Y_r(s)$  al segnale di ingresso  $r(t)$ . Per capire meglio come agisce il disturbo sul sistema consideriamo l'andamento delle varie FDT  $F_i(s)$ .

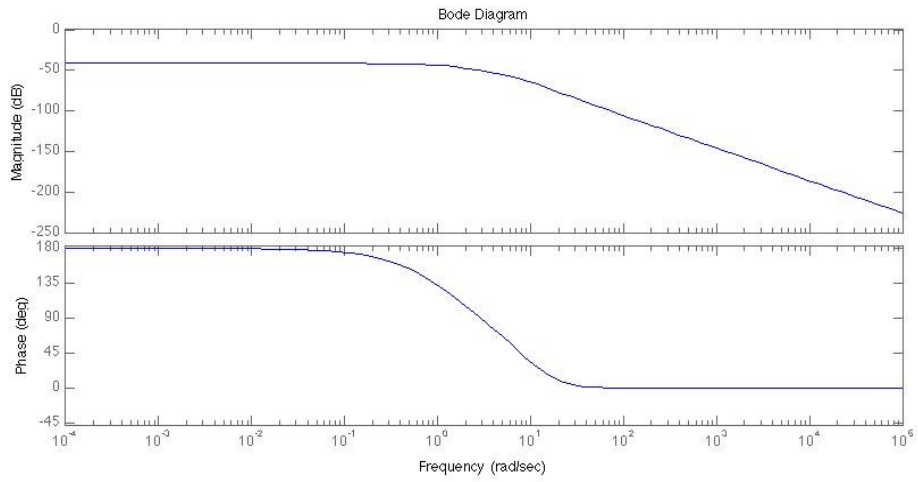
Notiamo dunque che una riduzione degli effetti dei disturbi sul sistema si ottiene progettando il compensatore  $C_i(s)$  di valore quanto più elevato possibile in modulo nell'intervallo di frequenze che riguarda il rumore in modo da attenuare la sua azione. Cerchiamo di studiare gli andamenti dei diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento ottenute sostituendo al termine  $C_i(s)$  i rispettivi compensatori progettati per ottimizzare le prestazioni del sistema, che risultano:

$$W_1(s) \frac{H(s)}{C_1(s)} = \frac{-(0.025s+0.5)(0.001s+1)}{(5 \cdot 10^{-4}s^4 + 0.51s^3 + 10s^2 + 61.01s + 6)}$$

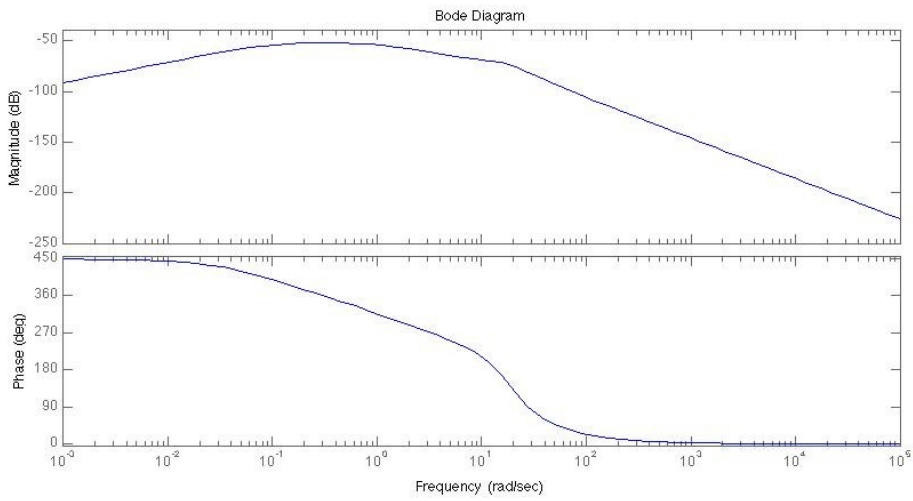
$$W_2(s) \frac{H(s)}{C_2(s)} = \frac{-s(0.025s+0.5)(0.001s+1)}{(5 \cdot 10^{-4}s^5 + 0.51s^4 + 10s^3 + 181.01s^2 + 198s + 18)}$$

$$W_3(s) \frac{H(s)}{C_3(s)} = \frac{-s(0.025s+0.5)(0.001s+1)}{(5 \cdot 10^{-4}s^5 + 0.51s^4 + 10s^3 + 161.01s^2 + 120s + 60)}$$

Di seguito sono riportati i diagrammi di Bode di queste tre FDT :



*Fig.13: Diagramma di Bode di  $W_1(s)H(s)/C_1(s)$*



*Fig.13: Diagramma di Bode di  $W_2(s)H(s)/C_2(s)$*

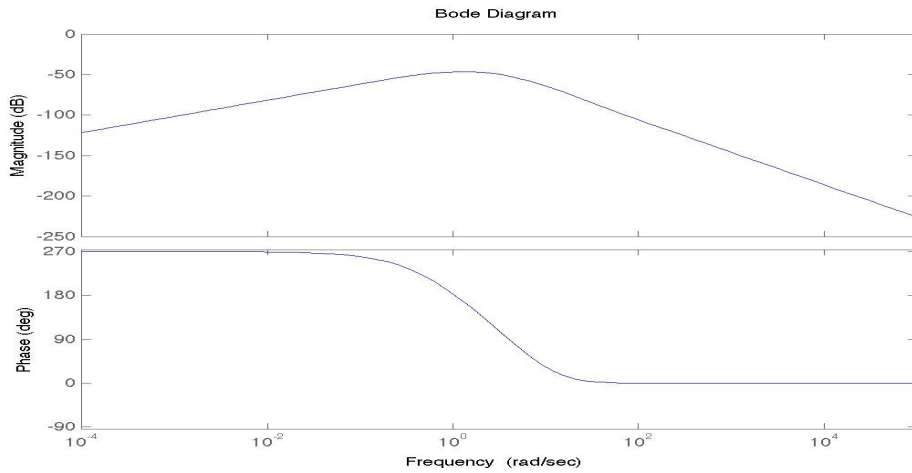


Fig.14: Diagramma di Bode di  $W_3(s)H(s)/C_3(s)$

Dall'osservazione dei diagrammi ottenuti possiamo notare che nel primo caso il sistema è più sensibile ai disturbi alle basse frequenze che vengono man mano attenuate a partire dal valore di 1 rad/sec.

Si può notare nel secondo e nel terzo grafico come le basse frequenze vengano visibilmente attenuate rispetto alle altre, questo risultato è stato ottenuto grazie al polo nell'origine del rispettivo controllore che assicura a  $F_i(s)$  (con  $i=2,3$ ) uno zero nell'origine, che comporta l'insensibilità rispetto ai disturbi in bassa frequenza. Dopo questa osservazione risulta chiara l'importanza di avere un polo nell'origine in  $C_i(s)$  per ottenere una buona risposta ai disturbi costanti. Infatti i disturbi costanti vengono completamente eliminati da  $C_2(s)$  e  $C_3(s)$  ma non da  $C_1(s)$  che può interferire con l'esatto raggiungimento del valore a regime. Inoltre notiamo che tutti e tre i grafici riescono ad attenuare più di 40dB come richiesto dalle specifiche.

## 2.3 Simulazioni del sistema con l'aggiunta del disturbo

### 2.3.1 Descrizione dei disturbi

Prendiamo ora in esame il modello del sistema retroazionato e controllato già studiato in precedenza e aggiungiamo a questo un disturbo  $n(t)$ , come illustrato in Fig. 5. Vogliamo far vedere in che modo il disturbo interviene sul segnale di uscita. Considerando sempre in ingresso il gradino unitario, come si vedrà dalle simulazioni, il disturbo si sovrappone al segnale di uscita già trovato nelle simulazioni precedenti e interferisce con questo distorcendone l'andamento previsto. Lo scopo di queste

simulazioni è di trovare un riscontro pratico alle osservazioni fin qui proposte sulle caratteristiche del sistema per quanto riguarda l'analisi dei disturbi e confermarne la validità. Per simulare l'andamento del sistema in diverse condizioni di disturbo verranno presi in considerazione svariati andamenti per l'ingresso  $n(t)$  e ne verranno conseguentemente riportate le relative risposte ottenute all'uscita dal sistema. Prima si studierà il comportamento del segnale di uscita del sistema retroazionato che fa uso del primo controllore  $C_1(s)$  e in seguito si passerà a quello che fa uso del secondo controllore  $C_2(s)$  e del terzo  $C_3(s)$ . Per simulare il segnale  $n(t)$  sono stati scelti tre andamenti diversi che sono significativi per capire l'interazione tra i due ingressi  $u(t)$  e  $n(t)$ . Vengono riportati qui di seguito:

i) disturbo costante ( $\omega=0$  rad/sec)  $n(t) = 1 \text{ V}^*$

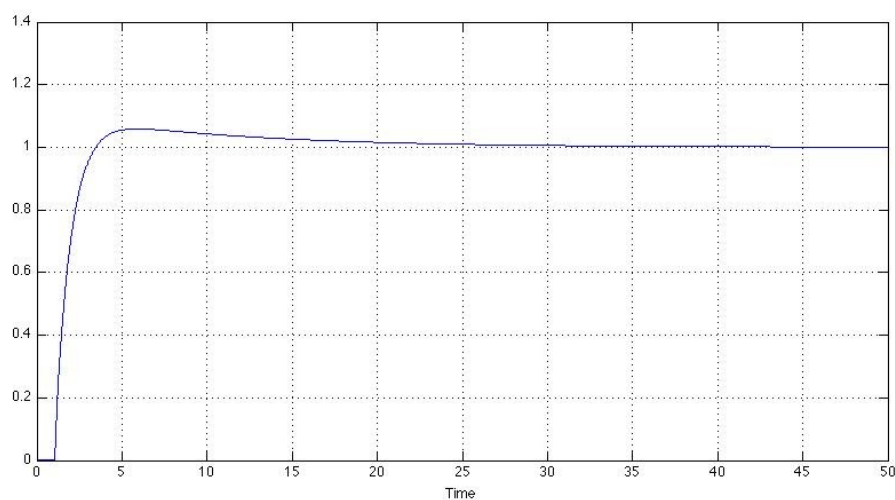
ii) disturbo costante ( $\omega=0$  rad/sec)  $n(t) = 5 \text{ V}^*$

iii) disturbo sinusoidale  $n(t) = 5\sin(10t) \text{ V}^*$

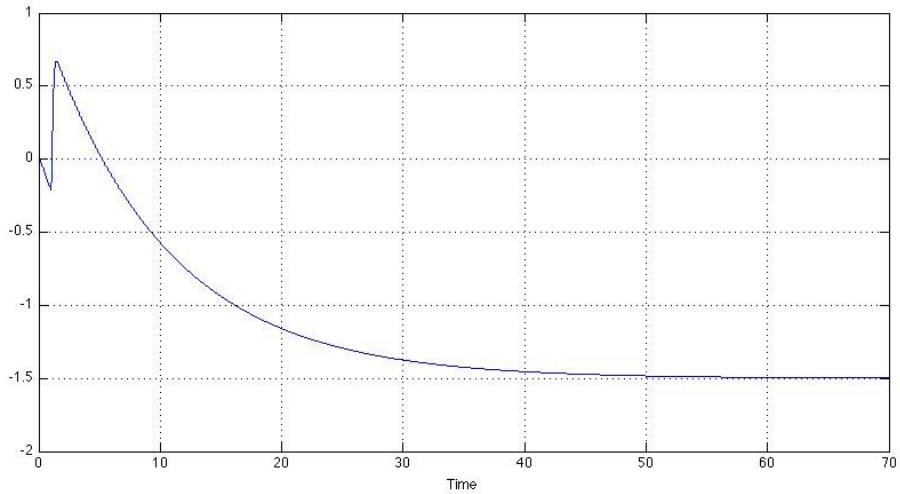
\*facciamo notare che per motivi di coerenza tra le grandezze usate il disturbo è espresso in volt, infatti questo disturbo viene filtrato da una FDT adimensionale prima di entrare nel sistema. Potremmo considerare allo stesso modo un disturbo espresso in Nm a patto di aggiungere un convertitore che trasformi questa grandezza in un contributo sommabile ai segnali del sistema.

### 2.3.2 $C_1(s)$ : risposta al gradino con disturbo

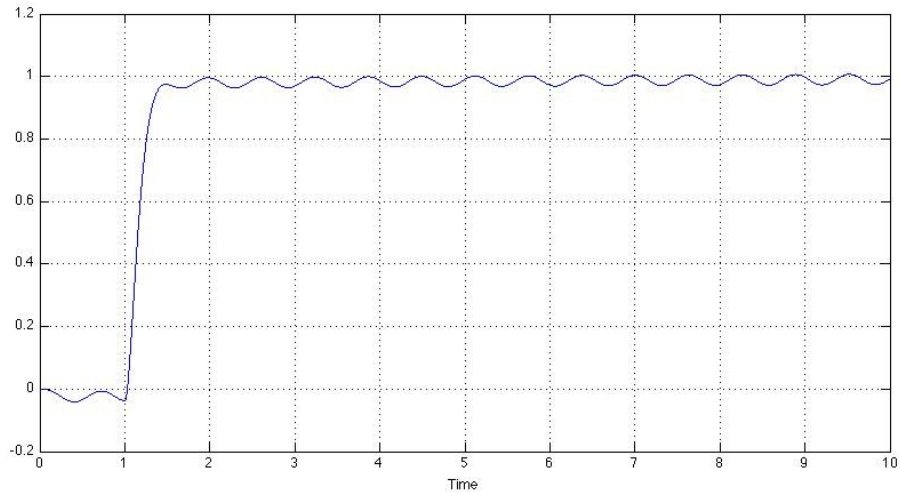
Sotto sono riportati gli andamenti di  $y(t)$  per ognuno dei tre disturbi e ogni andamento è riportato sia con che senza saturazione in modo da capire l'effetto che l'introduzione di un blocco saturatore comporta all'uscita.



*$y(t)$  con  $C_2(s)$  per il disturbo i) con saturatore*



$y(t)$  con  $C_1(s)$  per il disturbo ii) senza saturatore



$y(t)$  con  $C_1(s)$  per il disturbo iii) senza saturatore

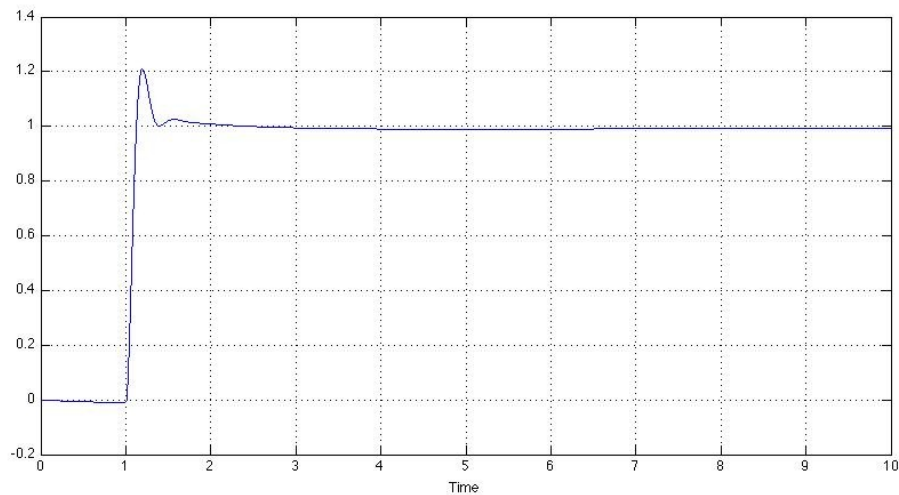
Osservazioni:

Come già annunciato la risposta del primo sistema è molto deludente se come disturbo viene introdotto un segnale costante, come si può notare dai primi grafici, infatti il segnale di uscita non riesce mai a raggiungere il riferimento in ingresso e compie un errore tanto più grande quanto più grande è l'ampiezza del disturbo. Questa è la prova dell'inadeguatezza del primo controllore in presenza di disturbi costanti. Nei primi due casi il saturatore migliora solamente l'andamento della curva rendendolo più morbido ed eliminando i picchi più accentuati. Anche per il terzo ingresso il sistema compie un errore a regime che però è poco rilevante rispetto ai

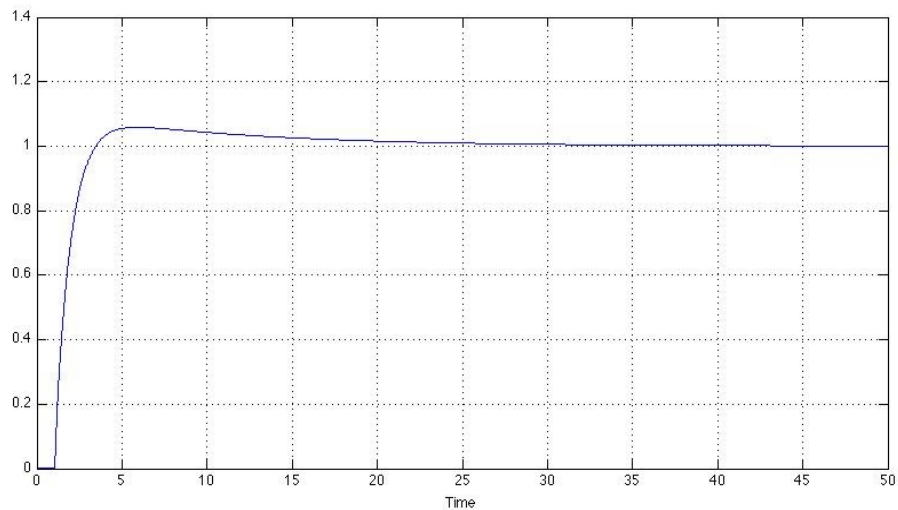


primi due, si vede dunque che alla frequenza che interessa il terzo disturbo il sistema attenua meglio. Per quanto riguarda il sistema in presenza di saturazione si nota che i ritardi rispetto alla risposta al gradino senza disturbi aumentano vistosamente, e pertanto si può concludere che il comportamento del sistema in presenza di disturbi è molto diverso da quello desiderato.

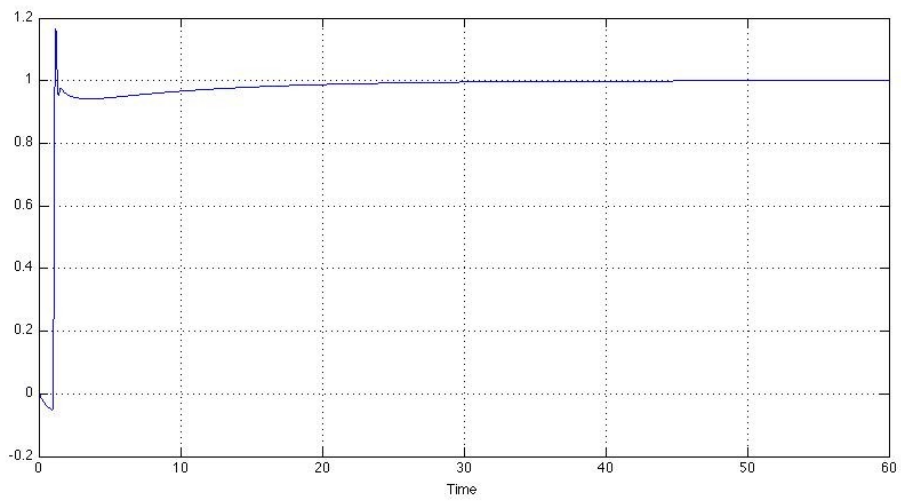
### 2.3.3 $C_2(s)$ : risposta al gradino con disturbo



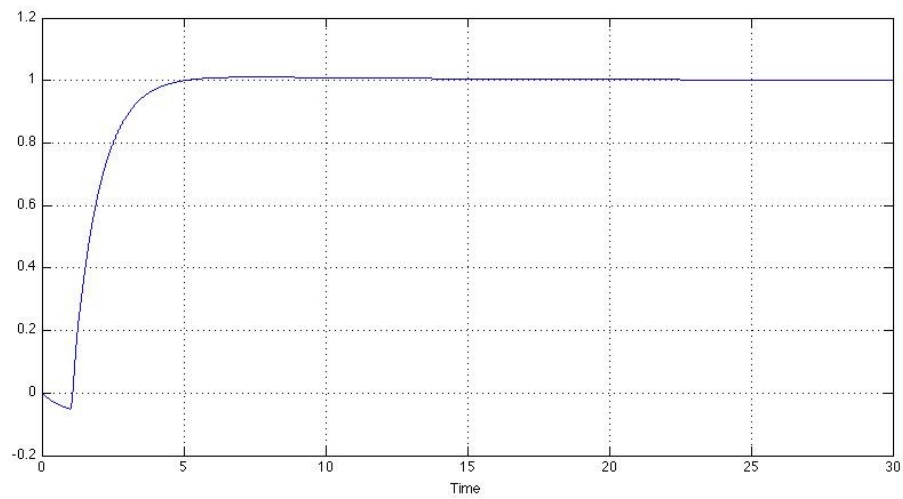
*$y(t)$  con  $C_2(s)$  per il disturbo  $i)$  senza saturatore*



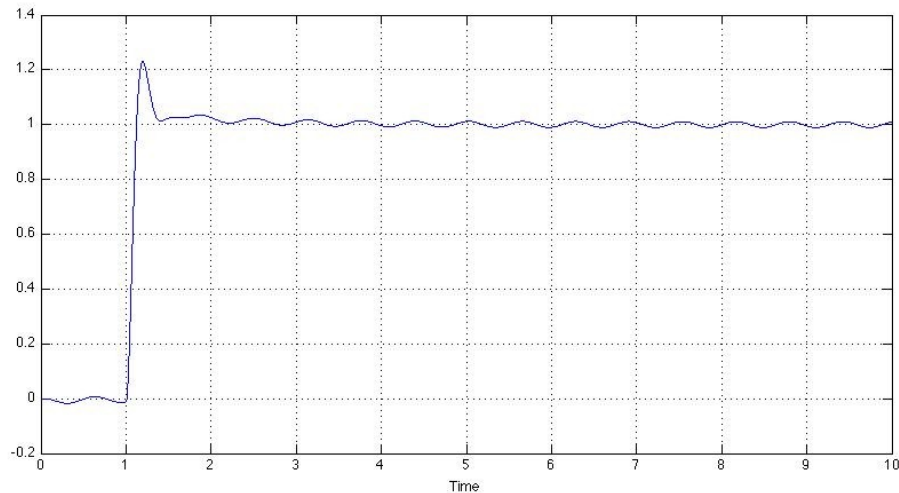
*$y(t)$  con  $C_2(s)$  per il disturbo  $i)$  con saturatore*



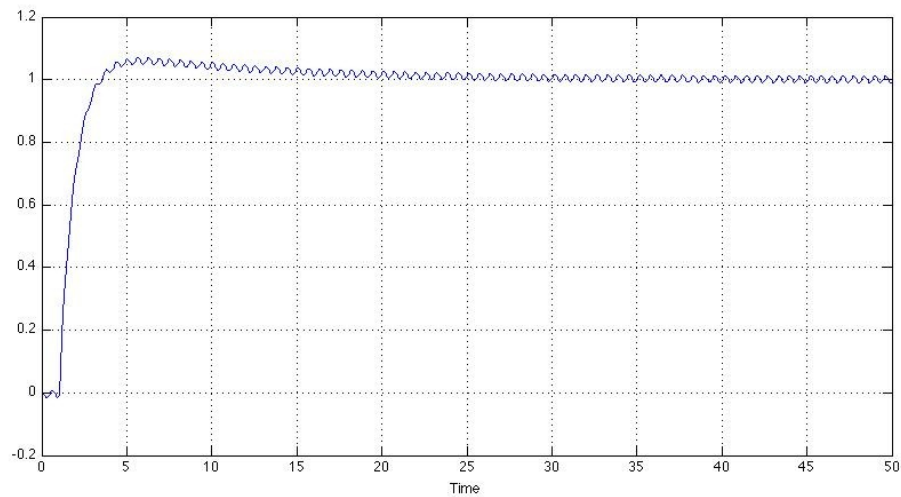
*$y(t)$  con  $C_2(s)$  per il disturbo ii) senza saturatore*



*$y(t)$  con  $C_2(s)$  per il disturbo ii) con saturatore*



*y(t) con  $C_2(s)$  per il disturbo iii) senza saturatore*



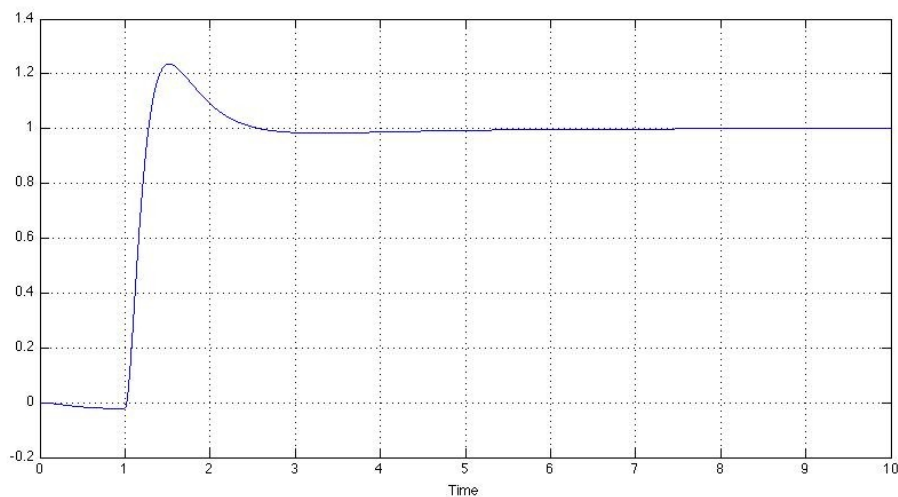
*y(t) con  $C_2(s)$  per il disturbo iii) con saturatore*

Osservazioni:

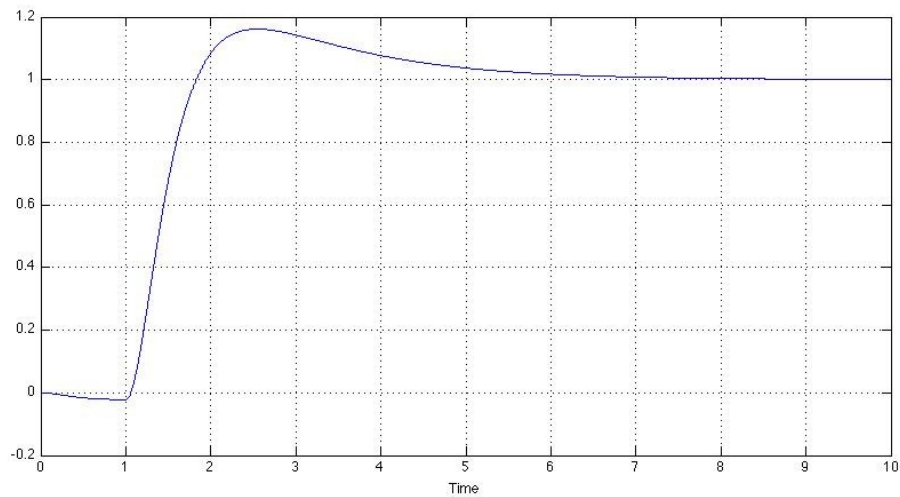
La risposta  $y(t)$  che il sistema fornisce al primo disturbo è molto buona e si avvicina a quella già ottenuta per lo stesso sistema privo di disturbi, questo significa che l'andamento non risente più di tanto dell'aggiunta dell'ingresso  $n(t)=1V$ . Se aumentiamo l'ampiezza del segnale  $n(t)$ , come si può notare dai grafici relativi al secondo disturbo,  $y(t)$  in assenza di saturatore compie delle oscillazioni indesiderate prima di stabilizzarsi, queste oscillazioni vengono però quasi soppresse se si usa la saturazione e si ottiene una risposta quasi migliore rispetto a quella ottenuta per il primo disturbo. Il terzo disturbo quasi si sovrappone alla risposta già ottenuta in precedenza relativa alle simulazioni prive di disturbo per entrambe le condizioni di

simulazione (con e senza saturatore), questo significa che la frequenza del disturbo è ben attenuata anche se il sistema risulta più robusto ai disturbi in bassa frequenza e quasi insensibile a quelli costanti.

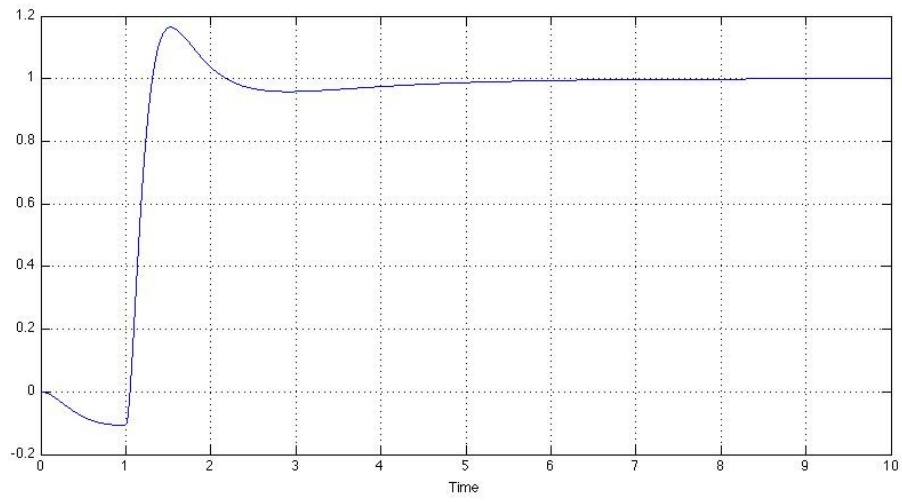
### 2.3.4 $C_3(s)$ : risposta al gradino con disturbo



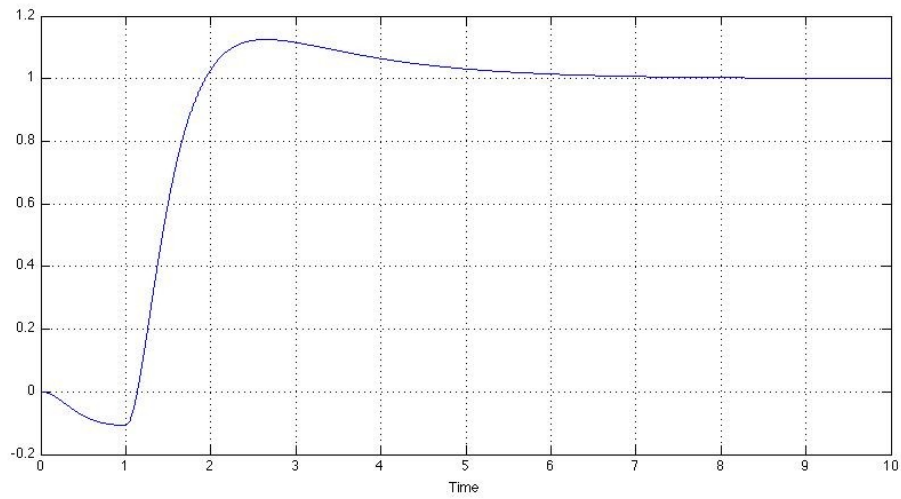
*$y(t)$  con  $C_3(s)$  per il disturbo  $i)$  senza saturatore*



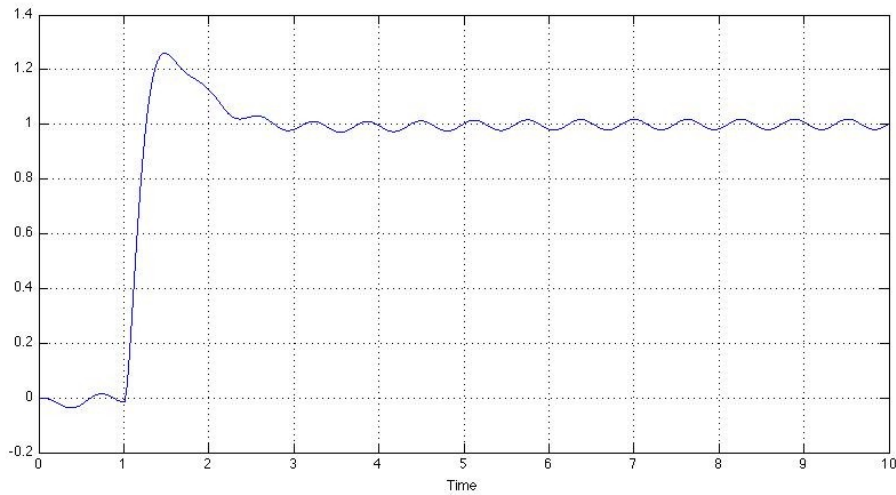
*$y(t)$  con  $C_3(s)$  per il disturbo  $i)$  con saturatore*



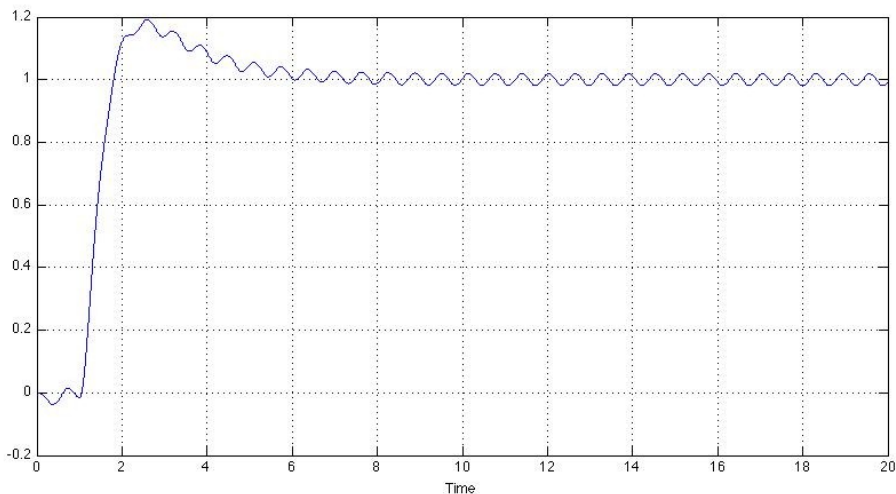
*$y(t)$  con  $C_3(s)$  per il disturbo ii) senza saturatore*



*$y(t)$  con  $C_3(s)$  per il disturbo ii) con saturatore*



*y(t) con  $C_3(s)$  per il disturbo iii) senza saturatore*



*y(t) con  $C_3(s)$  per il disturbo iii) con saturatore*

#### Osservazioni:

Per quanto riguarda i primi due disturbi si possono ripetere le osservazioni già fatte al punto precedente aggiungendo che questa volta le risposte (con e senza saturatore) sono più simili tra loro grazie alle caratteristiche di progetto adottate per il terzo controllore. La saturazione non migliora di molto il fenomeno della sovraelongazione, come già visto, e il tempo di assestamento di  $y(t)$  per il primo disturbo non differisce molto nè dalle le risposte del sistema nè dalle risposte ottenute dallo stesso sistema privo di disturbi. Dalle osservazioni svolte possiamo concludere che il terzo sistema riesce ad attenuare bene tutte le frequenze studiate e ha per noi un comportamento ottimale.

## Capitolo 3

# Controllo di posizione con i modelli di stato

### 3.1 Costruzione della matrice di stato

Vogliamo affrontare adesso lo stesso problema presentato nel capitolo precedente con un diverso approccio. Questo nuovo approccio consiste nel ricavare il modello di stato relativo al sistema già studiato e cercare di risolvere il problema di controllo di posizione tramite un opportuno schema di retroazione. In particolare considerando il sistema appena trattato vogliamo derivare l'equivalente modello di stato basandoci sulle equazioni che caratterizzano il modello presentato nel primo capitolo. Un generico modello di stato a tempo continuo di dimensione  $n$ , a  $m$  ingressi e  $p$  uscite è indicato come  $\Sigma=(F,G,H,D)$  o con  $\Sigma=(F,G,H)$  se strettamente proprio. Il nostro obiettivo è quello di determinare un controllore tale che il risultante modello di stato retroazionato possieda determinate proprietà e in particolare in modo che il sistema sia asintoticamente stabile. Per ricostruire il modello di stato partiamo dalle due equazioni che rappresentano le funzioni di trasferimento del sistema e descrivono il legame tra l'uscita del motore  $y(t)$  e i due ingressi, rispettivamente l'ingresso noto  $u(t)$  e il disturbo  $n(t)$ . Prendiamo le due FDT  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  che senza perdita di generalità riscriviamo nella forma:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{kk_t}{LJ}}{s^3 + \frac{(Lf + RJ)}{LJ}s^2 + \frac{(Rf + k^2)}{LJ}s}$$

$$G_1(s) = \frac{a}{s(s^2 + bs + c)} = \frac{12}{s(s^2 + 20s + 2.02)}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\left(\frac{L}{k}s + \frac{R}{k}\right)G_1(s)$$

$$G_2(s) = \frac{ds + e}{s(s^2 + bs + c)} = \frac{-0.05s - 1}{s(s^2 + 20s + 2.02)}$$

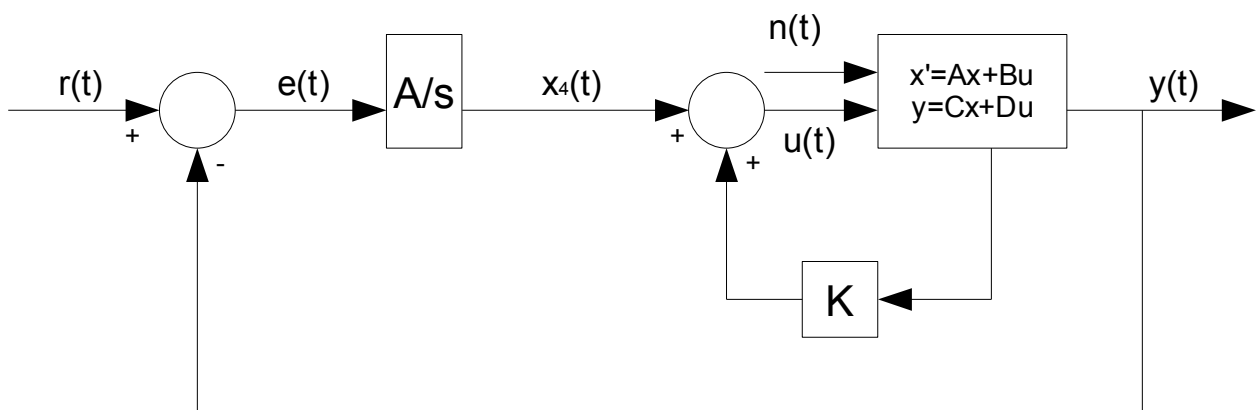
In questo modo si ottengono delle funzioni di trasferimento caratterizzate dal polinomio al denominatore con coefficiente direttivo unitario. Dalle forme appena presentate può essere ricavato il modello di stato che vogliamo studiare. Si vuole effettuare il passaggio di scrittura dalle funzioni di trasferimento del sistema alla forma canonica di osservabilità, che viene riportata di seguito. Visto che il sistema  $\Sigma=(F,G,H)$  lo assumiamo per costruzione osservabile e ha una sola variabile di uscita possiamo scrivere le matrici che caratterizzano il modello di stato nella forma canonica di osservabilità ottenendo il seguente modello di stato :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} a & e \\ 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = [0 \quad 0 \quad 1] \quad D = 0$$

dove  $a, e$  e  $d$  sono i coefficienti del numeratore delle funzioni di trasferimento  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  e  $0, c, b$  sono i coefficienti del denominatore monico che è comune tra  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ . Nel nostro caso il tutto si particolarizza come:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2.02 \\ 0 & 1 & -20 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 0 & -0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = [0 \quad 0 \quad 1] \quad D = 0$$

### 3.2 Retroazione dallo stato (primo esempio)



*Fig.1*



Si vuole ora analizzare la retroazione dallo stato tramite la matrice  $K$  (con dimensione  $m \times n$ ) che agisce come illustrato in *Fig. 1*. Oltre alla retroazione dallo stato inseriamo anche una retroazione dall'uscita che va a sottrarsi al segnale di riferimento  $r(t)$  considerato come ingresso. Il segnale di errore  $e(t)$  viene poi integrato tramite il blocco integratore  $A/s$  dove  $A$  indica un opportuno guadagno che verrà ricavato in seguito, l'integratore è stato aggiunto al modello per ottenere una maggiore prestazione in presenza di disturbi come già visto nel capitolo precedente. Il segnale  $x_4(t)$  ottenuto all'uscita del blocco integratore viene poi sommato al segnale di uscita dal blocco  $K$  che rappresenta la matrice di retroazione i cui parametri verranno ricavati in seguito. Dal modello appena presentato si possono ricavare le seguenti espressioni:

$$e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - [0 \quad 0 \quad 1] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = r(t) - x_3(t)$$

$$x_4^{(1)}(t) = Ae(t) = Ar(t) - Ax_3(t)$$

$$u(t) = x_4(t) + [K_1 \quad K_2 \quad K_3] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) + K_3 x_3(t) + x_4(t)$$

dove  $x_4(t)$ ,  $x_4^{(1)}(t)$  e  $[K_1 \quad K_2 \quad K_3]$  sono rispettivamente la quarta variabile di stato, la sua derivata e la matrice di retroazione dallo stato  $K$ .

Dal momento che non possiamo dire a priori se al modello di stato risultante sia possibile attribuire una matrice di stato  $F'$  con autovalori arbitrariamente scelti, proviamo ad impostare il problema per vedere se riusciamo a giungere ad una soluzione accettabile. Utilizzando lo schema in *Fig. 1* otteniamo le seguenti relazioni:

$$x_1^{(1)}(t) = 12u(t) - n(t) = 12K_1 x_1(t) + 12K_2 x_2(t) + 12K_3 x_3(t) + 12x_4(t) - n(t)$$

$$x_2^{(1)}(t) = x_1(t) - 2.02x_3(t) - 0.05n(t)$$

$$x_3^{(1)}(t) = x_2(t) - 20x_3(t)$$

$$x_4^{(1)}(t) = Ar(t) - Ax_3(t)$$

$$y(t) = x_3(t)$$

che descrivono il nuovo modello di stato  $\Sigma'=(F',G',H')$  le cui matrici risultano essere:

$$F' = \begin{bmatrix} 12K_1 & 12K_2 & 12K_3 & 12 \\ 1 & 0 & -2.02 & 0 \\ 0 & 1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 \end{bmatrix}, \quad G' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0.05 \\ 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad H' = [0 \ 0 \ 1 \ 0],$$

dove  $G'$  è riferito ora alla nuova coppia di ingressi  $(r(t), n(t))$ .

L'obiettivo è quello di ottenere un sistema che risulti asintoticamente stabile, cioè che per ogni scelta della condizione iniziale  $x(0)$ , l'evoluzione libera del sistema  $x_i(t)$  converga a zero asintoticamente, il che equivale a dire che il polinomio caratteristico del sistema  $\Delta_F(s)$  (equivalentemente il polinomio minimo  $\Psi_F(s)$ ) deve avere tutti gli zeri a parte reale negativa e dunque tutti gli autovalori di  $F'$  a parte negativa. Per motivi di attinenza con il capitolo precedente cercheremo di assegnare gli autovalori del sistema in modo che coincidano con i poli della FDT  $W_1(s)$  che qui riportiamo:

$$W_1(s) = \frac{G_1(s)C_1(s)}{1+G_1(s)C_1(s)} = \frac{60(s+1)}{5 \cdot 10^{-4}s^4 + 0.51s^3 + 10s^2 + 61.01s + 60}$$

i cui poli sono:  $-1000.1$  ;  $-9.3+3.5i$  ;  $-9.3-3.5i$  ;  $-1.2$

Quindi per imporre alla matrice di stato  $F'$  gli opportuni autovalori ottenuti osservando i poli di  $W_1(s)$  basterà imporre che il polinomio caratteristico  $\Delta_F(s)$  della matrice  $F'$  corrisponda con il denominatore della FDT  $W_1(s)$  e quindi che i loro coefficienti si equivalgano. Riscriviamo pertanto il denominatore di  $W_1(s)$  in modo da rendere unitario il primo coefficiente.

$$W_1(s) = \frac{120000(s+1)}{s^4 + 1020s^3 + 20000s^2 + 122020s + 120000}$$

Dunque ricaviamo il polinomio caratteristico di  $F'$  dalla relazione  $\Delta_F(s)=\det(sI-F')$ , il procedimento è riportato di seguito.

$$\det(sI - F') = \begin{vmatrix} s-12K_1 & -12K_2 & -12K_3 & -12 \\ -1 & s & +2.02 & 0 \\ 0 & -1 & s+20 & 0 \\ 0 & 0 & A & s \end{vmatrix} =$$

$$= 12 \cdot \begin{vmatrix} -1 & s & +2.02 \\ 0 & -1 & s+20 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} s-12K_1 & -12K_2 & -12K_3 \\ -1 & s & +2.02 \\ 0 & -1 & s+20 \end{vmatrix}$$

$$\det(sI - F') =$$

$$= s^4 + (20 - 12K_1)s^3 + (2.02 - 240K_1 - 12K_2)s^2 + (-24.24K_1 - 240K_2 - 12K_3)s + 12A$$

Quindi deve risultare:

$$(20 - 12K_1) = 1020$$

$$(2.02 - 240K_1 - 12K_2) = 20000$$

$$(-24.24K_1 - 240K_2 - 12K_3) = 122020$$

$$12A = 120000$$

Da cui:

$$K_1 = -83.33, K_2 = 0.1683, K_3 = -10003, A = 10000$$

La matrice  $F'$  in cui sono sostituiti i parametri trovati risulta avere come autovalori i poli di  $W_1(s)$ , infatti:

$$F' = \begin{bmatrix} -1000 & 2.02 & -120040 & 12 \\ 1 & 0 & -2.02 & 0 \\ 0 & 1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -10000 & 0 \end{bmatrix} \text{ dove}$$

$$\sigma(F') = (-1000, -9.3 + 3.5i, -9.3 - 3.5i, -1.2)$$

Da questo sistema è possibile ricavare le due FDT relative al sistema, in particolare chiamiamo  $W'_r(s)$  quella calcolata tra l'ingresso di riferimento  $r(t)$  e l'uscita  $y(t)$ , e  $W'_n(s)$  quella calcolata tra il disturbo  $n(t)$  e l'uscita  $y(t)$ . Entrambe sono riportate di seguito insieme ai relativi diagrammi di Bode.

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1000 & -2.02 & +120040 & -12 \\ -1 & s & +2.02 & 0 \\ 0 & -1 & s+20 & 0 \\ 0 & 0 & +10000 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0.05 \\ 0 & 0 \\ 10000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W'_r(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(sI - F')} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ s & s(s+1000) & a_{33} & 12 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0.05 \\ 0 & 0 \\ 10000 & 0 \end{bmatrix}$$

dove con  $a_{ij}$  indichiamo i termini della matrice che non sono utilizzati per il calcolo di  $W'_r(s)$  perchè vengono annullati nel prodotto delle tre matrici, e dunque non è necessario calcolare.

Dalle espressioni sopra trovate si ricavano le due FDT:

$$W'_r(s) = \frac{12 \cdot 10^4}{s^4 + 1020s^3 + 20000s^2 + 122020s + 120000}$$

$$W'_n(s) = \frac{-51s(9.8 \cdot 10^{-4}s + 1)}{s^4 + 1020s^3 + 20000s^2 + 122020s + 120000}$$

Ora che si è ottenuta la FDT  $W'_n(s)$  dal modello di stato  $\Sigma'$  se ne può confrontare l'andamento, illustrato dal diagramma di Bode, con gli andamenti delle FDT ottenuti durante l'analisi dell'attenuazione dei disturbi svolta nel capitolo precedente e in particolar modo con la FDT  $F_i(s)$  che lega il disturbo all'uscita. Come già visto  $F_i(s)$  non ha una buona attenuazione ai disturbi costanti perchè non ha zeri nell'origine e quindi, come già osservato dal relativo diagramma di Bode riportato nel precedente capitolo, ha un'attenuazione costante fino al valore di 1rad/s che non permette la completa attenuazione dei disturbi in bassa frequenza e al limite costanti. Invece  $W'_n(s)$  presenta uno zero nell'origine che, come si può notare dal diagramma di Bode, fa tendere a meno infinito il suo modulo man mano che ci si sposta verso le basse frequenze e quindi attenua completamente i disturbi costanti.

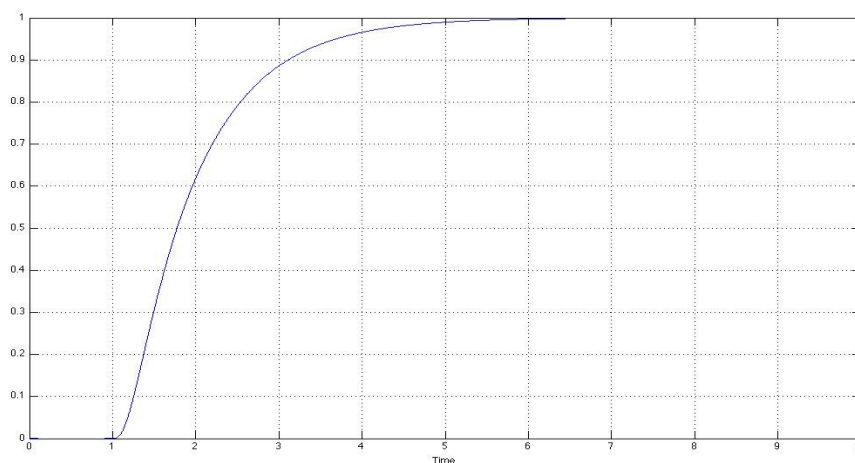
Notiamo che la FDT  $W'_1(s)$  ottenuta dal modello di stato retroazionato come in *fig.1*, non coincide con la FDT  $W_1(s)$  del sistema retroazionato ottenuto nel capitolo precedente, in quanto sebbene siano stati imposti alla prima gli stessi poli della seconda, gli zeri non sono gli stessi come conseguenza dello schema adottato. Dunque le risposte ottenute in uscita differiranno l'una dall'altra, come si vedrà in seguito nelle simulazioni.

### 3.3 Simulazioni

Proviamo ora a sostituire i valori trovati per i parametri  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $A$  nello schema di retroazione presentato in modo da ottenere una risposta  $y(t)$  che per come sono stati ricavati i parametri è legata alla risposta ottenuta da  $W_1(s)$  ma non sarà uguale per quanto appena visto. Prima si proverà a simulare l'andamento del sistema considerando in ingresso un disturbo nullo, poi si aggiungeranno alcuni dei disturbi già introdotti nel primo capitolo. Inoltre proveremo a cambiare la condizione iniziale del sistema da  $x(0) = 0$  in modo da dimostrare che scegliendo altre condizioni iniziali il sistema risponde comunque riportando il segnale di uscita sul corretto valore del riferimento. Di seguito sono riportati gli andamenti del sistema prima senza disturbo poi con i disturbi:

i) disturbo costante ( $\omega=0$  rad/sec)  $n(t) = 5$  V

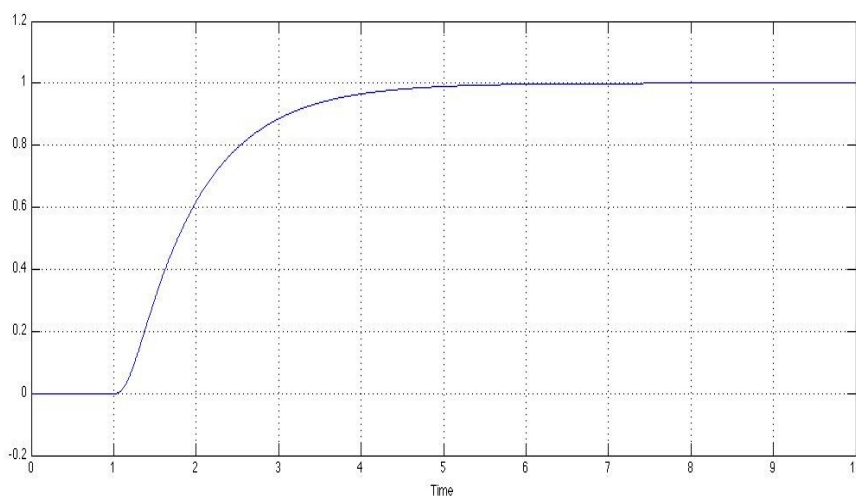
ii) disturbo sinusoidale  $n(t) = 5\sin(10t)$  V



*y(t) con disturbo nullo*

Il primo andamento è stato ottenuto annullando il disturbo in ingresso, si nota che ha un tempo di salita di 5 s, paragonabile con il tempo di salita ottenuto dagli andamenti studiati nel capitolo precedente con il vantaggio di non presentare nessuna sovraelongazione, infatti come abbiamo già accennato la risposta non coincide perfettamente con quella fornita da  $W_1(s)$  in quanto le FDT confrontate non hanno gli stessi zeri. Questa non è certo una proprietà generale, ma una semplice coincidenza data dal fatto che il numeratore ottenuto ricorrendo ai modelli di stato si comporta “meglio” rispetto al numeratore di  $W_1(s)$ .

Proviamo adesso ad aggiungere un disturbo costante di ampiezza 5 V. La risposta  $y(t)$  è riportata di seguito:



$y(t)$  con disturbo  $i$

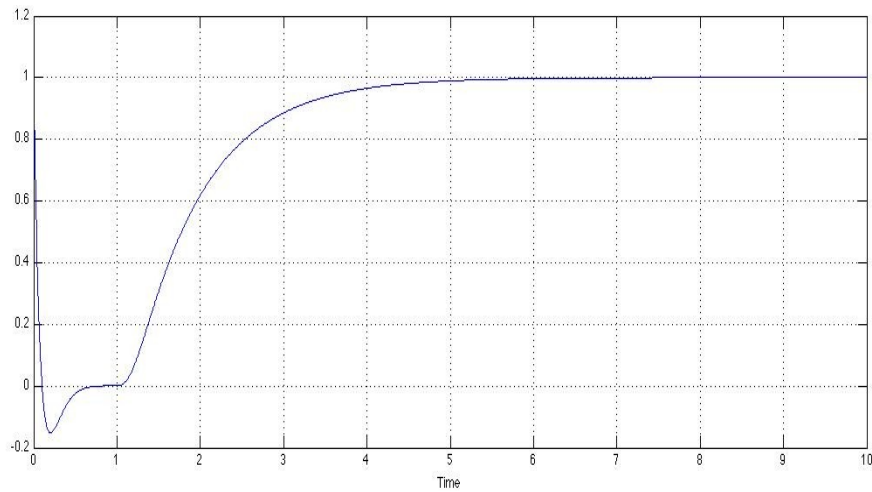
Come si può notare la risposta è quasi identica alla prima, questo significa che l'azione di questo disturbo non ha grande effetto sul sistema ottenuto, come prevedibile dall'utilizzo dell'integratore A/s. Si noti invece che  $W_1(s)$  non esibiva questo comportamento desiderato, in quanto il numeratore non aveva uno zero nell'origine. Proviamo ora ad utilizzare il secondo disturbo:

In questo caso il disturbo di tipo sinusoidale si nota in maniera poco marcata sull'andamento di  $y(t)$ . Quindi abbiamo ottenuto con l'utilizzo dei modelli di stato una risposta più robusta ai disturbi.

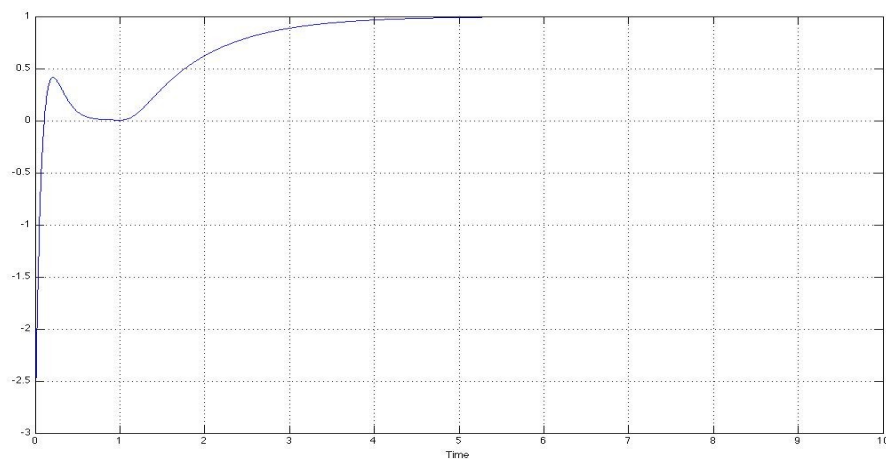
Proviamo ora a cambiare le condizioni iniziali del sistema e consideriamo due casi:

1) il sistema parte da una condizione iniziale  $x(0) = [1 \ 1 \ 1]$

2) il sistema parte da una condizione iniziale  $x(0) = [-1 \ -5 \ -3]$



*y(t) con disturbo nullo e condizione iniziale 1)*



*y(t) con disturbo nullo e condizione iniziale 2)*

Il diverso andamento è dato semplicemente del transitorio iniziale dovuto alle condizioni iniziali, ma a regime quando il sistema si assesta l'uscita si comporta come visto in precedenza.

### 3.4 Retroazione dallo stato (secondo esempio)

Si vuole ora provare ad assegnare agli autovalori della matrice  $F'$ , alla quale possiamo assegnare valori arbitrari in funzione della scelta dei parametri  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $A$  come già visto, dei valori che corrispondano ai poli dalla funzione di trasferimento  $W_3(s)$  relativa al terzo sistema retroazionato studiato nel capitolo precedente, in modo da poter vedere la differenza tra le risposte fornite dalle due diverse scelte. Riportiamo l'espressione della  $W_3(s)$ :

$$W_3(s) = \frac{G_1(s)C_3(s)}{1+G_1(s)C_3(s)} = \frac{60(s+1)^2}{5 \cdot 10^{-4} s^5 + 0.51s^4 + 10s^3 + 61.01s^2 + 120s + 60}$$

I poli della precedente FDT sono:  $-1000$ ,  $-9.9$ ,  $-6.9$ ,  $-2.3$ ,  $-0.8$

Notiamo che abbiamo ottenuto cinque poli, uno in più di quelli cercati per cui per proseguire nella nostra analisi scegliamo di eliminare il polo che risulta maggiore in modulo in quanto è quello che influenza meno il transitorio del sistema. Ricaviamo adesso il polinomio le cui radici risultano essere quelle da noi scelte fra i poli di  $W_3(s)$ .

$$p(s) = s^4 + 19.9s^3 + 122.23s^2 + 242.67s + 125.69$$

e confrontiamo i coefficienti di  $p(s)$  con quelli del polinomio caratteristico della matrice  $F'$  già ricavato.

$$\det(sI - F') =$$

$$= s^4 + (20 - 12K_1)s^3 + (2.02 - 240K_1 - 12K_2)s^2 + (-24.24K_1 - 240K_2 - 12K_3)s + 12A$$

ottenendo il sistema:

$$(20 - 12K_1) = 19.9$$

$$(2.02 - 240K_1 - 12K_2) = 122.23$$

$$(-24.24K_1 - 240K_2 - 12K_3) = 242.67$$

$$12A = 125.69$$

da cui:  $K_1 = 0.0083$ ,  $K_2 = -9.85$ ,  $K_3 = 176.78$ ,  $A = 10.47$



Il sistema  $\Sigma=(F',G',H')$  in cui sono sostituiti i parametri trovati è riportato di seguito (e fa sempre riferimento alle coppie di ingressi  $u(t)$  e  $n(t)$ ):

$$F' = \begin{bmatrix} 0.1 & -118.2 & 2121.36 & 12 \\ 1 & 0 & -2.02 & 0 \\ 0 & 1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -10.47 & 0 \end{bmatrix}, \quad G' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0.05 \\ 0 & 0 \\ 10.47 & 0 \end{bmatrix}, \quad H' = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Da questo sistema è possibile ricavare le due relative FDT, in particolare chiamiamo  $W'_r(s)$  quella calcolata tra l'ingresso di riferimento  $r(t)$  e l'uscita  $y(t)$ , e  $W'_n(s)$  quella calcolata tra il disturbo  $n(t)$  e l'uscita  $y(t)$ . Entrambe sono riportate di seguito insieme ai relativi diagrammi di Bode.

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' =$$

$$= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} s-0.1 & +118.2 & -2121.36 & +12 \\ -1 & s & +2.02 & 0 \\ 0 & -1 & s+20 & 0 \\ 0 & 0 & +10.47 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0.05 \\ 0 & 0 \\ 10.47 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \frac{1}{\det(sI - F')} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ s & s(s-0.1) & a_{33} & 12 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0.05 \\ 0 & 0 \\ 10.47 & 0 \end{bmatrix}$$

dove con  $a_{ij}$  indichiamo i termini della matrice che non sono utilizzati per il calcolo di  $W'_r(s)$  perchè vengono annullati nel prodotto delle tre matrici, e dunque non è necessario calcolare.

$$W'_r(s) = H'(sI - F')^{-1}G' = \frac{125.69}{s^4 + 19.9s^3 + 122.23s^2 + 242.67s + 125.69}$$

$$W'_n(s) = H'(sI - F')^{-1}G' = \frac{s(-0.05s + 1)}{s^4 + 19.9s^3 + 122.23s^2 + 242.67s + 125.69}$$

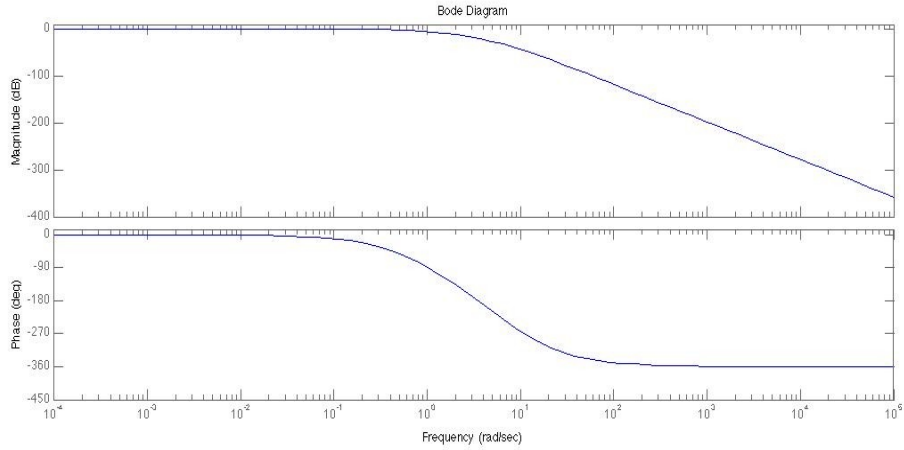


Fig.4: Diagramma di Bode di  $W'_r(s)$

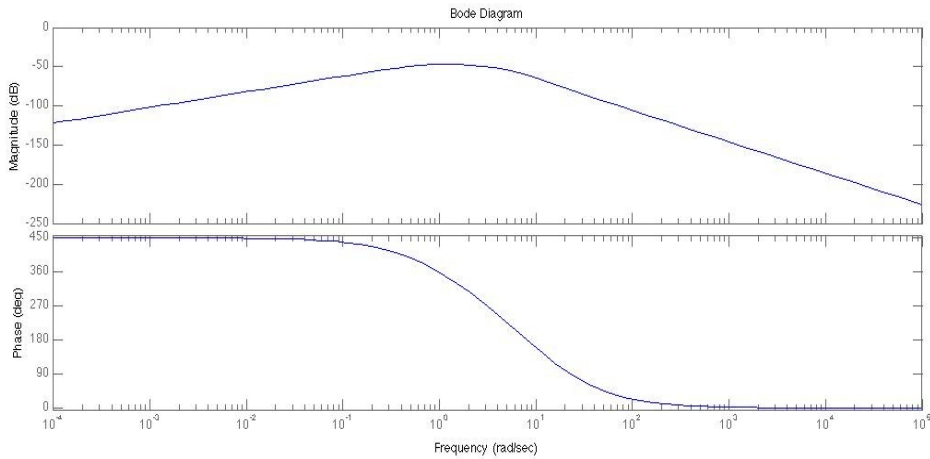


Fig.5: Diagramma di Bode di  $W'_n(s)$

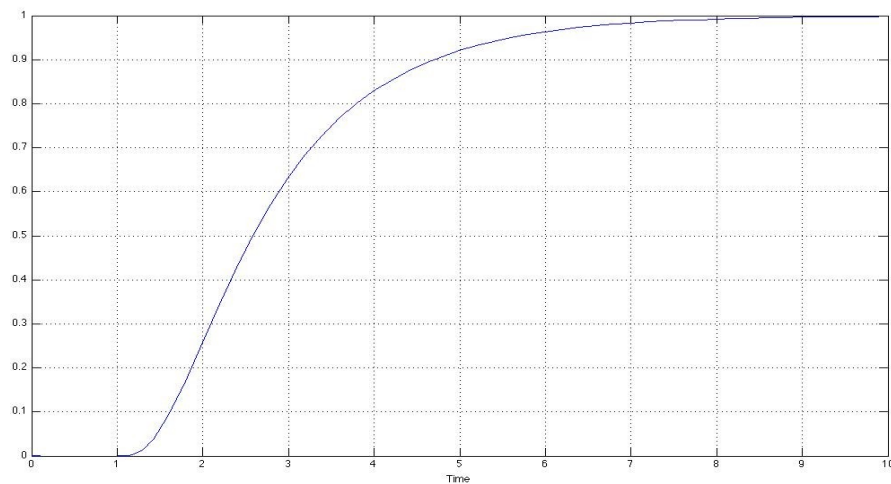
Notiamo che la FDT  $W'_r(s)$  ottenuta dal modello di stato retroazionato come in *fig.1*, non coincide con la FDT  $W_3(s)$  ottenuta nel capitolo precedente, in quanto oltre ad essere stato eliminato un polo dal denominatore il numeratore presenta zeri diversi dall'espressione  $W_3(s)$  come già visto nell'esempio precedente. Inoltre si può confrontare l'andamento della FDT  $W'_n(s)$  che rappresenta la risposta ai disturbi del sistema, con quello della FDT  $F_3(s)$  ottenuta come relazione tra il disturbo e l'uscita nel capitolo precedente. In questo caso entrambe la FDT presentano uno zero nell'origine per cui possiamo aspettarci dalla risposta del modello di stato una completa attenuazione ai disturbi costanti come già ottenuto per il terzo compensatore. L'andamento di  $W'_n(s)$  è simile a quello ottenuto per  $F_3(s)$  e come quest'ultima presenta un'ottima attenuazione per tutte le frequenze di interesse.

### 3.5 Simulazioni

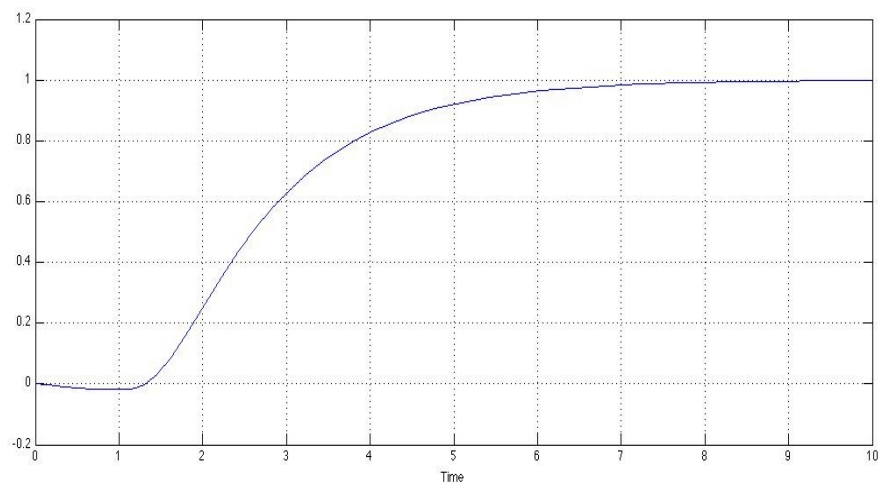
Riportiamo le simulazioni ricavate utilizzando il modello di fig.1 dove si è impiegato il sistema  $\Sigma'$  ottenuto sostituendo i parametri appena trovati. Presentiamo per prima la risposta  $y(t)$  del sistema in assenza di disturbi, poi quelle ottenute applicando rispettivamente i seguenti disturbi  $n(t)$ :

i) disturbo costante ( $\omega=0$  rad/sec)  $n(t) = 5$  V

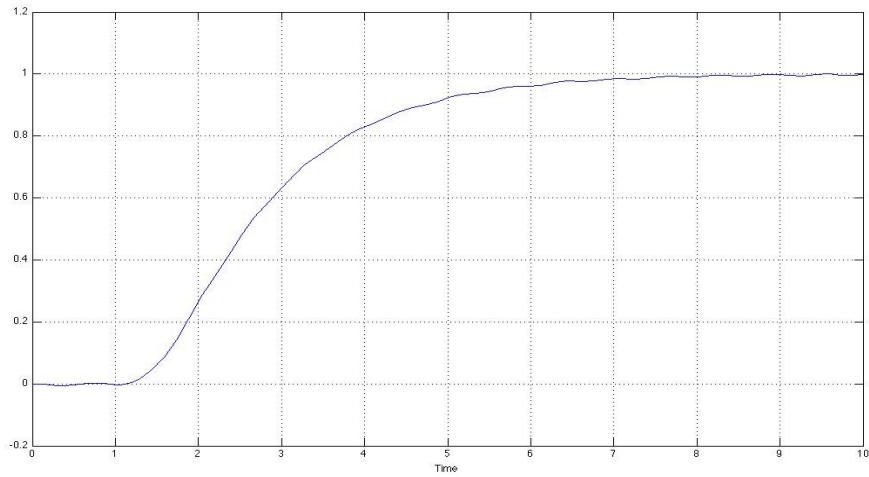
ii) disturbo sinusoidale  $n(t) = 5\sin(10t)$  V



La risposta  $y(t)$  è simile a quella ottenuta nell'esempio precedente di questo capitolo.



*$y(t)$  con disturbo i)*

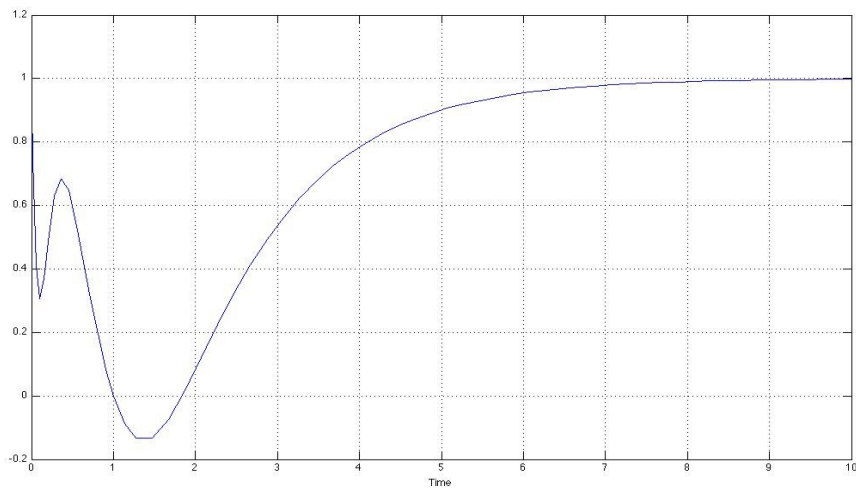


*y(t) con disturbo ii)*

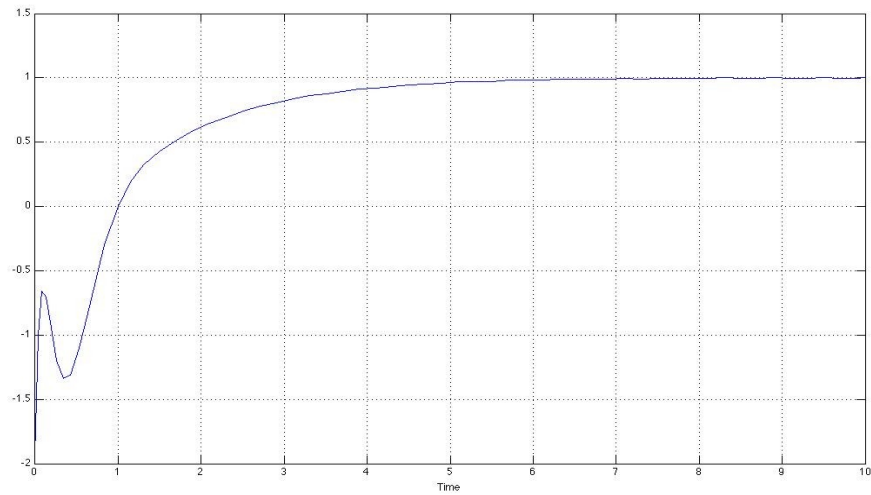
Come già osservato l'effetto del disturbo risulta quasi assente per via dell'integratore aggiunto allo schema retroazionato. Anche l'effetto del disturbo sinusoidale è molto attenuato.

Proviamo ora a cambiare le condizioni iniziali del sistema e consideriamo due casi:

- 1) il sistema parte da una condizione iniziale  $x(0) = [1 \ 1 \ 1]$
- 2) il sistema parte da una condizione iniziale  $x(0) = [1 \ -3 \ -2]$



*y(t) con disturbo nullo e condizione iniziale 1*



*y(t) con disturbo nullo e condizione iniziale 2*

Come osservato anche nell'esempio precedente il diverso andamento è dato dal transitorio iniziale dovuto alle condizioni iniziali delle variabili di stato, ma quando il sistema si assesta l'uscita si comporta come nelle simulazioni precedenti.



# Bibliografia

## Libri

Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, “Controlli Automatici”, Edizioni libreria Progetto Padova, 2008

Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, “Analisi Modale e Stabilità dei Modelli di Stato a Tempo Discreto e a Tempo Continuo”, Edizioni libreria Progetto Padova, 2009

R. Guidorzi, “Teoria dei sistemi : Esercizi e Applicazioni”, Tecnocopia 1988