

Università degli studi di Padova  
**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**  
Corso di laurea in Ingegneria Elettronica

Tesi di Laurea

**Stima del canale in sistemi di  
trasmissione OFDM**

Candidato:  
**Bonanno Giovanni**  
552243-IL

Relatore:  
**Silvano Pupolin**

Anno accademico 2011-2012



*ad Anita per avermi dato la forza di ritornare...*



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>v</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>vii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Modello del sistema</b>	<b>3</b>
1.1 Multiplazione Ortogonale a Divisione di Frequenza . . . . .	3
1.2 Modellizzazione del canale 3GPP/LTE . . . . .	9
1.3 Convenzioni e normalizzazioni utilizzate . . . . .	13
<b>2 Tecniche classiche per la stima di canale</b>	<b>17</b>
2.1 La stima LS con preambolo noto . . . . .	17
2.2 Scomposizione ai valori singolari . . . . .	20
2.3 Stima con matrice ridotta a rango pieno, Full Rank . . . . .	22
2.4 Risultati e Prestazioni . . . . .	24
<b>3 Tecniche avanzate di stima</b>	<b>33</b>
3.1 Pseudo inversa con rango ridotto (TSVD) . . . . .	33
3.2 Tecnica LS-FR con doppio CN e Tecnica TSVD/SVD . . . . .	35
3.3 Risultati e Performance . . . . .	38
<b>4 Effetti indesiderati</b>	<b>43</b>
4.1 Smoothing filter: utilizzo e conseguenza . . . . .	43
4.2 Andamento del condition Number . . . . .	45

---

<b>5 Nuovo algoritmo a banda ridotta (RED)</b>	<b>49</b>
5.1 Descrizione formale . . . . .	49
5.2 Algoritmo RED senza procedura iterativa LS-FR . . . . .	51
5.3 Risultati Ottenuti . . . . .	52
<b>6 Le stime a confronto</b>	<b>57</b>
6.1 Confronto tra le varie tecniche . . . . .	57
6.2 Algoritmo SVD in singola precisione . . . . .	59
6.3 Complessità computazionale delle stime SVD e RED/ $N_{red} = 50$	60
<b>Conclusioni</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>67</b>

# Elenco delle figure

1.1	Schema OFDM generale . . . . .	5
1.2	Schema di trasmissione/ricezione OFDM semplificato con l'inserimento dei blocchi per la IDFT e DFT. Parlare di equivalenza tra il presente schema e quello di figure 1.1 è lecito solo negli istanti di campionamento. . . . .	8
1.3	Risposta impulsiva discreta canale 3GPP/LTE (singola realizzazione) . . . . .	10
1.4	A - Modulo della risposta in frequenza del canale 3GPP/LTE, B - In presenza di rumore bianco; $SNR_{dB} = 5_{dB}$ . . . . .	11
1.5	A - Modulo della risposta in frequenza con spegnimento delle portanti ai bordi, B - Soppressione al centro. In entrambi i casi sono state spente 201 sotto-portanti) . . . . .	12
2.1	Modulo della stima LS e canale 3GPP/LTE . . . . .	18
2.2	Confronto fra il canale 3GPP/LTE e la stima del CIR ottenuta antitrasformando direttamente $G_{LS}(k)$ . . . . .	19
2.3	Ricostruzione con tecnica LS. Modulo (in alto) e fase(in basso) confrontati con la risposta in frequenza originale, SNR: $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . . . . .	26
2.4	Ricostruzione con tecnica SVD. Modulo(in alto) e fase(in basso). SNR: $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . . . . .	27
2.5	Ricostruzione LS-FR con $CN_{finale} = 10^5$ , SNR: $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . . . . .	28
2.6	Ricostruzione LS-FR con $CN_{finale} = 10$ , SNR: $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . . . . .	28

2.7	MSE della stima LS. In alto scala lineare, in basso scala semi-logaritmica (ordinate in logaritmo, ascisse lineare). A centro banda ( $k_1 \leq k \leq k_2$ ) la figura disegnata da $MSE_{LS}(k)$ non è altro che: $ G(k) ^2$ . . . . .	29
2.8	Mse della stima SVD. In alto scala lineare, in basso scala semi-logaritmica (ordinate in logaritmo, ascisse lineare). A centro banda ( $k_1 \leq k \leq k_2$ ) la figura disegnata da $MSE_{LS}(k)$ presente un pesante errore di stima fortemente legato al processo numerico. Per poter eliminare tali aberrazioni bisognerà diminuire drasticamente il valore del CN. Tale valore nel caso $N - N_{sa} > 100$ sale verso valori di $10^{15}$ . Valori normalizzati di questo tipo risultano troppo vicini alla massima precisione numerica utilizzata. . . . .	30
2.9	Mse della stima LS-FR (con $CN_{finale} = 10^5$ ). Anche in questo caso emergono problematiche simili a quelle già evidenziate nel caso SVD. . . . .	31
2.10	Mse della stima LS-FR (con $CN_{finale} = 10$ ). In questo caso si osserva una prima ricostruzione a centro banda. . . . .	31
3.1	Suddivisione del supporto di $\mathbf{G}$ per stima LS-FR con 3 CN. . . . .	36
3.2	Una sequenza in cui viene illustrata l'operazione di Pruning ad un grafico corrotto da rumore . . . . .	37
3.3	Esempio di applicazione di finestratura in frequenza . . . . .	38
3.4	Stima TSVD confrontata con la risposta in frequenza originale	39
3.5	Andamento del $MSE(K)$ al variare di $k$ , $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . In verde l'andamento di $MSE_{SVD}$ . La stima SVD consente migliori prestazioni al di fuori dell'insieme delle portanti sopresse. La stima TSVD consente di mantenere l'errore a valori quasi sempre accettabili in tale range, garantendo comunque prestazioni simili all'algoritmo LS-FR a singolo CN. . . . .	40
3.6	Stima LS-FR con doppio CN. Le due diverse stime vengono utilizzate per la ricostruzione nelle due parti del canale . . . . .	41



3.7	Combinazione dei metodi SVD e TSVD per la completa ricostruzione del canale (in frequenza). . . . .	42
4.1	Andamento del CN nella matrice F dei capitoli 2,3,4 al variare del numero delle portanti modulate. Si osserva nettamente come il livello di precisione scelta influenzi in modo pesante l'adamento del CN . . . . .	46
5.1	In figura l'andamento del CN di $\mathbf{F}'_N$ al variare di $N_{red}$ . A sinistra scala logaritmica sulle ordinate e lineare sulle ascisse, a destra scala lineare su entrambi gli assi. Il valore del CN decresce rapidamente al variare delle dimensioni della banda di transizione . . . . .	52
5.2	Ricostruzione con algoritmo RED senza la procedura LS-FR e con $N_{red} = 50$ ; SNR $\Lambda_{dB} = 5_{dB}$ . . . . .	54
5.3	Errore nella stima RED . . . . .	54
5.4	I diversi andamenti ricostruiti al variare di $N_{red}$ . La figura è molto confusa tuttavia si può notare come la linea verde, RED con $N_{red} = 50$ , segue più fedelmente quella blu che rappresenta l'andamento originale della risposta in frequenza. SNR $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . . . . .	55
5.5	Andamento del MSE nei diversi casi proposti. La ricostruzione RED/ $N_{red} = 50$ mostra un MSE più basso rispetto alle altre ricostruzioni RED. SNR $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . . . . .	56
6.1	Visualizzazione del MSE per ciascuna stima. Per maggiore visibilità le stime sono state graficate fino a centro banda ( $N = 516$ ). La linea grigia mostra la soglia $0_{dB}$ . . . . .	58
6.2	Confronto fra la stima SVD in doppia precisione e la stima SVD computata in doppia precisione ed utilizzata nella versione troncata in singola precisione. SNR: $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . In basso dettaglio per gli indici $k \in [1, k1]$ . Il pallino verde mostra l'inizio della banda di transizione. . . . .	60



# Elenco delle tabelle

1.1	Parametri Potenza-Ritardo 3GPP/LTE . . . . .	10
1.2	Parametri in uso per le simulazioni numeriche . . . . .	16
2.1	$\eta_{dB}$ per le tre stime: LS, SVD, LS-FR . . . . .	25
3.1	$\eta_{dB}$ per le tre stime: LS, SVD, LS-FR, TSVD . . . . .	39
5.1	$\eta_{dB}$ per le tre stime: LS, SVD, LS-FR, TSVD, RED. $\Lambda_{dB}$ indica il valore di SNR iniziale. . . . .	53



# Introduzione

La tecnica di trasmissione OFDM (Multiplazione Ortogonale a Divisione di Frequenza, in inglese Orthogonal Frequency-Division Multiplexing) è attualmente impiegata in diversi settori delle telecomunicazioni, dalla trasmissione su power line alle comunicazioni su dispositivi radio mobili. Tuttavia, in molte situazioni, l'impiego di tale tecnica può provocare interferenze con altri sistemi di telecomunicazione. Per eliminare tali interferenze o per rispettare altre specifiche (e.g. roll-off) le bande nei nuovi sistemi di trasmissione OFDM vengono limitate da appositi filtri (o maschere) che eliminano le componenti spettrali indesiderate ovvero quelle vicine o parzialmente sovrapposte alle bande da preservare.

Il segnale ricevuto, nei sistemi di trasmissione OFDM, è il prodotto (in frequenza) del segnale inviato e della risposta in frequenza del canale. Quindi per poter ricostruire il segnale trasmesso bisogna conoscere con precisione la risposta del canale. Una errata stima del canale (in frequenza) non consentirebbe una corretta equalizzazione. Obiettivo di questa tesi è fornire dei risultati quantitativi per la valutazione e il confronto delle attuali tecniche di stima utilizzate nell'ambito delle trasmissioni OFDM. I risultati saranno testati utilizzando il modello del canale 3GPP/LTE [1] (Baum, 2005). Per ciascuna tecnica di stima trattata saranno discusse le prestazioni ed i risultati ottenibili.

In particolare nel **capitolo 1** verrà discussa in dettaglio la tecnica OFDM e lo standard 3GPP/LTE. Verrà presentata parte della notazione, le convenzioni e le normalizzazioni utilizzate in tutto lo scritto.

Nel **capitolo 2** verranno introdotte alcune semplici tecniche di stima. Tutte le tecniche discusse in questo e nei successivi capitoli hanno come elemento comune la stima LS (Least Squares), qui formalizzata e discussa. A seguire verranno presentate le tecniche SVD (decomposizione ai valori singolari) e LS-FR (ricostruzione con matrice a rango pieno o Full-Rank). Il capitolo si conclude con un primo confronto sulle tre tecniche trattate.

Nel **capitolo 3** si discuteranno tecniche di stima avanzate. La prima è la tecnica TSVD (decomposizione ai valori singolari troncata); tale stima permette una parziale ricostruzione anche in corrispondenza delle frequenze spente. A seguire alcune tecniche di stima frutto della combinazione delle precedenti e altri strumenti per migliorare gli andamenti ricostruiti. A conclusione del capitolo un confronto tra le stime discusse in questo e nel capitolo precedente.

Nel **capitolo 4** verrà posta l'attenzione sull'effetto che le maschere in frequenza o il troncamento della risposta impulsiva hanno sulle stime. Verrà inoltre mostrata la dipendenza di alcuni algoritmi dalla precisione numerica scelta.

A seguire, nel **capitolo 5**, verrà presentato un nuovo algoritmo. Tale tecnica di stima accorcia la banda di transizione per ridurre i gradi di libertà presenti nel segnale ricevuto (e quindi nella stima LS) a causa delle maschere utilizzate per limitare la banda. A conclusione del capitolo un primo veloce confronto fra le diverse stime fin qui trattate.

Nel **capitolo 6** si effettuerà un confronto più preciso tra tutte le stime. I risultati ottenuti sono il frutto di un'analisi statistica compiuta su 10000 realizzazioni del canale (l'andamento del canale è corrotto da un rumore gaussiano). Tale capitolo contiene anche una sezione per l'analisi dei costi computazionali.

A conclusione della tesi alcune considerazioni sui risultati ottenuti.

# Capitolo 1

## Modello del sistema

Verranno di seguito discussi alcuni concetti fondamentali sui sistemi di trasmissione OFDM. Nel secondo paragrafo verrà introdotto il modello di canale usato per testare le diverse stime: lo standard 3GPP/LTE. A chiusura del capitolo verranno trattate le normalizzazioni e le convenzioni scelte che verranno mantenute in tutto lo scritto.

### 1.1 Multiplazione Ortogonale a Divisione di Frequenza

Nella concezione odierna le moderne tecniche di telecomunicazioni devono consentire uno scambio veloce di informazioni (termine usato in modo generico per indicare, ad esempio, dati, voce/dati...). Nella trasmissione parallela di dati, verso e da più utenti, la banda disponibile è generalmente suddivisa in sottobande. I segnali destinati alle sottobande vengono modulati indipendentemente fra loro. La larghezza di ciascuna sottobanda è scelta in modo tale che la distorsione dovuta alla selettività in frequenza sia trascurabile. Ad esempio nelle trasmissioni via cavo, l'attenuazione in frequenza cresce esponenzialmente con la radice quadrata della frequenza. Già nelle trasmissioni con bande di  $10 - 20MHz$ , per poter garantire un buon livello di rapporto segnale-rumore (o SNR), con una trasmissione a singola portante bisogna

equalizzare il canale in ricezione per azzerare l'interferenza di intersimbolo e il SNR è influenzato molto dalle componenti in frequenza prossime alla banda del segnale che sono maggiormente attenuate. È necessario diminuire la dimensione dell'alfabeto interessato riducendo così la bit-Rate (o  $R_b$ ). In alternativa si può suddividere la banda disponibile in sottobande centrate intorno alle frequenze  $f_o + kB_\Delta$ , dove  $k$  è un intero,  $f_o$  è la frequenza di riferimento e  $B_\Delta$  è larghezza di banda di ciascun sottocanale. Inoltre, a causa dell'aumento dell'attenuazione nelle sottobande  $k$ , al crescere di  $k$  si ottiene a parità di ampiezza trasmessa, una riduzione dell'ampiezza del segnale ricevuto e di conseguenza del  $SNR$  (il rumore ha densità spettrale costante su tutta la banda del segnale). All'estremo superiore della banda, nell'esempio che si sta considerando, si ha un SNR inferiore rispetto alle sottoportanti che si trovano all'estremo inferiore della banda pertanto la bit-Rate ( $R_{b_k}$ ) diminuisce al crescere di  $k$ . La  $R_b$  complessiva, data da

$$R_b = \sum_k R_{b_k}$$

risulta significativamente più alta rispetto a quella della trasmissione a singola portante. Operando come su descritto possono sorgere interferenze tra le varie sottobande. Allo scopo di eliminare tali interferenze, gli spettri dei sottocanali non devono sovrapporsi; questo però non consente un utilizzo efficiente della banda disponibile. Qualora si potessero sovrapporre, anche parzialmente, i vari sottocanali si potrebbe utilizzare in modo decisamente più proficuo tale tecnica. La sovrapposizione spettrale può avvenire a patto di sfruttare relazioni di ortogonalità tra sottocanali adiacenti.

Un segnale OFDM consiste di  $N$  sottoportanti equispaziate in frequenza di una quantità

$$\Delta f = B/N$$

La banda totale  $B$  è suddivisa in  $N$  sottocanali che vengono resi ortogonali. L'intervallo di segnalazione è:

$$T_s = 1/\Delta f$$



Le diverse portanti, rispetto alla portante di riferimento  $f_o$ , sono individuate dalla relazione <sup>1</sup>

$$f_k = f_o + k \cdot \Delta f \quad \text{con } k = 0, 1 \dots, N-1$$

Uno schema di carattere generale per la trasmissione/ricezione OFDM è mostrato in figura 1.1. I filtri  $G(f)$  sono tutti identici fra loro e tali che  $G^2(f)$

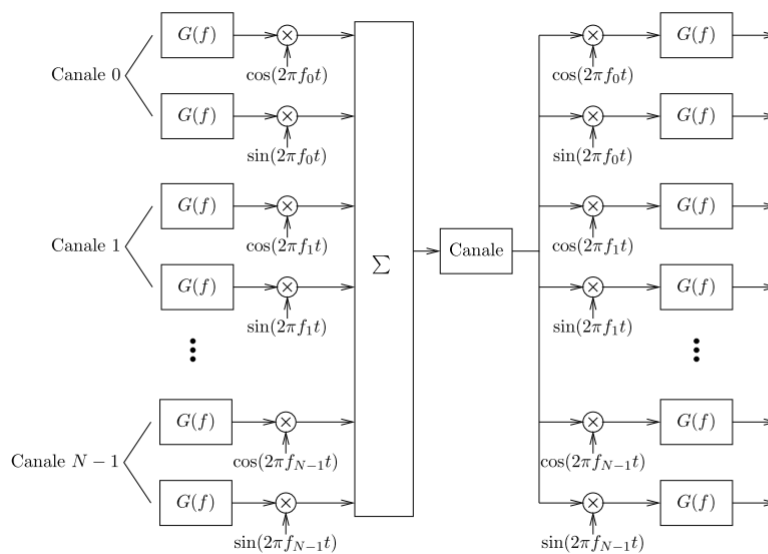


Figura 1.1: Schema OFDM generale

soddisfi la condizione di Nyquist per l'assenza di interferenza intersimbolica (Inter-Symbol Interference o ISI) agli istanti multipli di  $T_s$ , cioè :

$$g(i \cdot T_s) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Tale schema può essere notevolmente semplificato utilizzando lo strumento matematico della trasformata discreta di Fourier. Il segnale in uscita dal

<sup>1</sup>nel capitolo 4, per maggior semplicità di scrittura, si farà riferimento alla versione in banda base del canale originariamente centrato intorno a  $f_c$  (frequenza di centro banda); pertanto  $k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1 \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$

modulatore può sempre essere espresso nella forma generale:

$$s(t) = \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_n^{(k)} g(t - nT_s) e^{j2\pi f_k t} \right\} \quad (1.2)$$

in cui  $a_n^{(k)} = i_n^{(k)} + jq_n^{(k)}$ ; dove  $i_n^{(k)}$  è il simbolo assegnato alla componente in fase del canale  $k$ -mo all'istante  $n$ , mentre  $q_n^{(k)}$  è il simbolo assegnato alla componente in quadratura del canale  $k$ -mo all'istante  $n$ . Usando l'equivalente in banda base la 1.2 assume la forma compatta:

$$s(t) = \Re \{ \tilde{s}(t) e^{j2\pi f_0 t} \} \quad (1.3)$$

dove  $\tilde{s}(t)$  è l'equivalente passa-basso di  $s(t)$ . Evidentemente  $\tilde{s}(t)$  è dato dalla seguente relazione:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_n^{(k)} g(t - nT_s) e^{j2\pi k \Delta f t} \quad (1.4)$$

essendo  $f_k = f_o + \Delta f$ . Come precedentemente anticipato gli impulsi  $g(t)$  devono essere progettati per garantire assenza di ISI e per eliminare la possibile interferenza intercanale (Inter-Channel Interference o ICI). Si può dimostrare che le seguenti condizioni

- $|G(f)|$  simmetrico rispetto ad  $f = 0$
- $\arg[G(f)]$  combinazione lineare di una funzione periodica di periodo  $2\Delta f$  ed una componente di tipo lineare (i.e.  $\arg[G(f)] = \alpha f + \psi(f)$ )

permettono una trasmissione senza ISI e ICI. Dal punto di vista della realizzabilità impulsi che soddisfano tali vincoli sono, ad esempio, gli impulsi con spettro a radice di coseno rialzato con qualsiasi fattore di roll-off. Si osserva che il sistema richiede un elevato grado di sincronizzazione per poter funzionare correttamente.

Consideriamo adesso solo l'intervallo di segnalazione:  $n = 0$ ; in tale intervallo  $\tilde{s}(t)$  può essere riscritta come:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_o^{(k)} g(t) e^{j2\pi k \Delta f t} \quad (1.5)$$

Campionando  $N$  volte il segnale  $\tilde{s}(t)$  nell'intervallo  $T_s$  si ha

$$\tilde{s}\left(l\frac{T_s}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} a_o^{(k)} g\left(l\frac{T_s}{N}\right) e^{j2\pi k \Delta f l \frac{T_s}{N}} \quad \text{con } l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6)$$

e ricordando che  $\Delta f = 1/T_s$  la 1.6 si riscrive

$$\tilde{s}\left(l\frac{T_s}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} a_o^{(k)} W_n^{kl} \left[ g\left(l\frac{T_s}{N}\right) \right] \quad \text{con } l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.7)$$

con  $W_n = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ . La trasformata discreta di Fourier inversa (o IDFT) permette di riottenere una sequenza  $x(n)$  partendo dalla relativa trasformata discreta  $X(k)$ . Quindi si potrebbe modificare lo schema di partenza inserendo un blocco per la IDFT direttamente sui campioni  $a_n^{(k)}$ ; in ricezione si ritorna poi ai campioni originali inserendo un blocco con la trasformata discreta di Fourier (o DFT), scalando eventualmente il tutto per un fattore  $1/N$ . Il segnale trasmesso diviene quindi

$$\tilde{s}\left(l\frac{T_s}{N}\right) = b_0^{(l)} g\left(l\frac{T_s}{N}\right) \quad (1.8)$$

dove  $b_0^{(k)} = IDFT[a_o^{(k)}]$ . Se  $g(t)$  è limitato nell'intervallo  $[0, T_s]$  allora la (7) è vera per ogni  $n$ , e possiamo finalmente scrivere:

$$\tilde{s}\left(m\frac{T_s}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^l g\left(l\frac{T_s}{N} - nT_s\right) \quad (1.9)$$

Lo schema per la trasmissione/ricezione OFDM di figura 1.1 può quindi essere ripensato come quello mostrato in figura 1.2. Il precedente schema è attrattivo sia dal punto di vista della semplificazione formale sia sotto l'aspetto implementativo; infatti è possibile sfruttare gli efficienti algoritmi della Fast-Fourier-Trasformazione (o FFT) e della Inverse-Fast-Fourier-Trasformazione (o IFFT) per aumentare l'efficienza computazionale del sistema.

La tecnica OFDM presenta quindi una relativa semplicità nella trattazione teorica formale ma anche un'ottima efficienza. Tuttavia per procedere alla rivelazione del segnale trasmesso è necessaria una stima del canale. In

assenza di rumore il segnale ricevuto è il prodotto della risposta in frequenza del canale per il segnale trasmesso. Per poter ricostruire l'informazione originaria bisogna quindi dividere il segnale ricevuto per la risposta in frequenza del canale. Inoltre facendo riferimento allo standard 3GPP/LTE appare chiaro come i parametri caratteristici del sistema (così come la relativa risposta impulsiva) varino al variare del tempo. Ciò non consente di considerare il canale noto a priori. Bisogna quindi stimare ed aggiornare il modello ad ogni intervallo temporale all'interno del quale è ragionevole considerare i parametri caratteristici del sistema come tempo-invarianti. Il problema della stima di canale viene ulteriormente complicato dal fatto che alcune sottoportanti vengono annullate (filtrate) per limitare la banda del segnale OFDM, ad esempio al fine di non sovrapporsi in frequenza con altri servizi. Ciò causa diversi problemi nella ricostruzione della risposta in frequenza. Ad esempio l'utilizzo concomitante di un filtro in frequenza per ovviare a interferenze con altri sistemi di telecomunicazione (o per il rispetto di altre specifiche) e l'utilizzo di uno smoothing-filter nel dominio temporale per limitare la durata della risposta impulsiva portano ad un problema noto come effetto bordo.

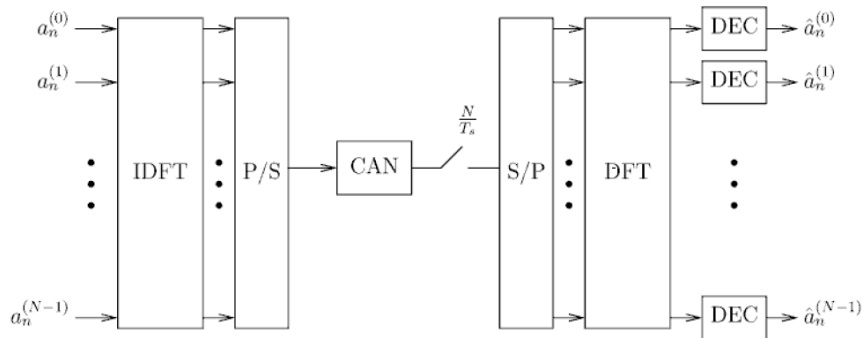


Figura 1.2: Schema di trasmissione/ricezione OFDM semplificato con l'inserimento dei blocchi per la IDFT e DFT. Parlare di equivalenza tra il presente schema e quello di figure 1.1 è lecito solo negli istanti di campionamento.

## 1.2 Modellizzazione del canale 3GPP/LTE

Long Term Evolution (o LTE) è la più recente evoluzione degli standard di telefonia mobile cellulare GSM/UMTS, CDMA2000 e TD-SCDMA. Dal punto di vista teorico, si colloca in una posizione intermedia tra le attuali tecnologie 3G, come l'UMTS, e quelle di quarta generazione pura (4G). In modo più rigoroso viene denominato segmento Pre-4G. L'identificazione del LTE con lo standard 4G è stato spesso fonte di speculazione, specie nel mondo del marketing della telefonia mobile. Ad ogni modo l'International Telecommunication Union (o ITU) ha recentemente deciso di applicare il termine 4G anche allo standard 3GPP/LTE. La standardizzazione del LTE è stata completata dal 3GPP all'inizio del 2008. L'obiettivo del LTE è quello di promuovere l'uso della banda larga in mobilità, sfruttando l'esperienza e gli investimenti effettuati per le reti 3G aprendo la strada verso il 4G puro; l'obiettivo finale è quello di raggiungere velocità di connessione wireless superiori a 1Gb/s su stazioni radio mobili.

Le simulazioni sono state realizzate utilizzando MatLab<sup>®</sup> e facendo riferimento al modello proposto in An Interim Channel Model For Beyond - 3G Systems [1] (200, Baum and Jan Hansen). Nello specifico il modello scelto utilizza i parametri (ritardo e potenza) relativi al canale 3GPP URBAN MACRO. Si tratta di un modello matematico che utilizza i parametri potenza e ritardo per descrivere l'andamento nel tempo della risposta impulsiva del canale.

I parametri di potenza forniti sono i valori medi degli impulsi  $\delta_T$  (asse temporale discreto) che compongono la risposta impulsiva. Nello specifico il modello scelto riporta i primi 6 impulsi. Tali valori non sono altro che le potenze medie dei segnali che arrivano al ricevitore seguendo cammini multipli. I valori di ritardo forniti dal modello esprimono la distanza tra l'istante di osservazione iniziale e l'arrivo dell'impulso al ricevitore. In figura 1.3 una realizzazione della risposta impulsiva del canale ottenuta plottando i suddetti valori. Il supporto della risposta impulsiva discreta, spesso indicata nel seguito con DITR ( discrete-impulse time response) ha una durata data

Urban Macro 3GPP/LTE	
Potenza statistica degli impulsi: $\delta_p$ in dB	Ritardo $t_d$ in $\mu s$
0	0
-1.7184	0.2604
-2.204	0.3906
-5.1896	0.9765
-9.0516	2.7343
-12.5013	4.6224

Tabella 1.1: Parametri Potenza-Ritardo 3GPP/LTE

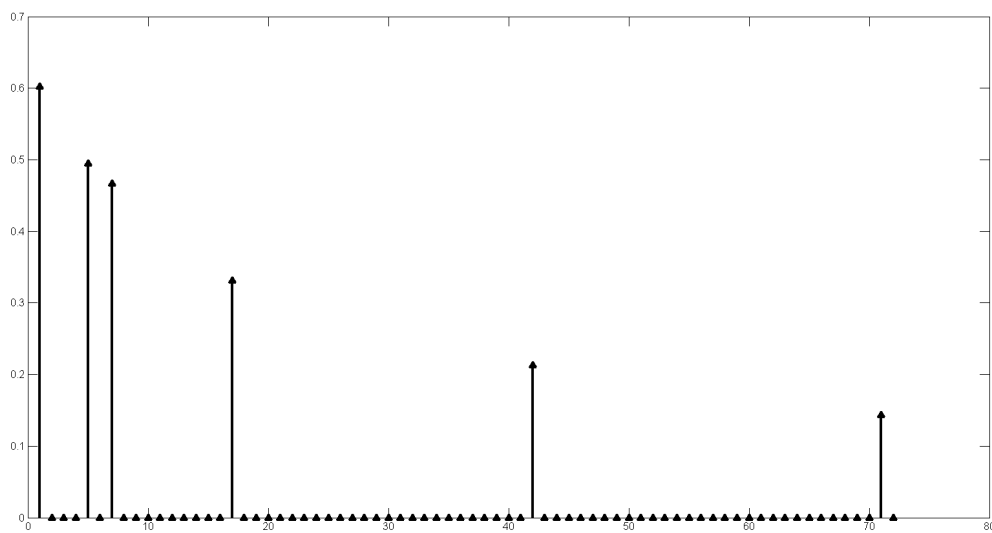


Figura 1.3: Risposta impulsiva discreta canale 3GPP/LTE (singola realizzazione)

dal prefisso ciclico scelto. Il valore del prefisso ciclico usato è  $CP = 72$ . L'ultimo impulso del DITR si può ricavare dalla seguente relazione:

$$t_D = \left\lceil \frac{T_s + t_{d6}}{T_s} \right\rceil \quad (1.10)$$

dove  $t_{d6}$  è l'ultimo ritardo presente nella tabella 1.1. La frequenza di campionamento usata nel canale 3GPP/LTE è  $F_s = 15.36 \text{ MHz}$ . L'ultimo impulso (o tappo) del DITR si troverà pertanto a  $t_D = 71$ . Ciò giustifica anche la scelta del valore del  $CP$ . Le ampiezze del DITR sono state ricavate utilizzando i parametri  $\delta_p$  presenti nella tabella 1.1 usando la seguente relazione:

$$|g(n)| = 10^{\frac{\delta_p(n)}{20}} \quad (1.11)$$

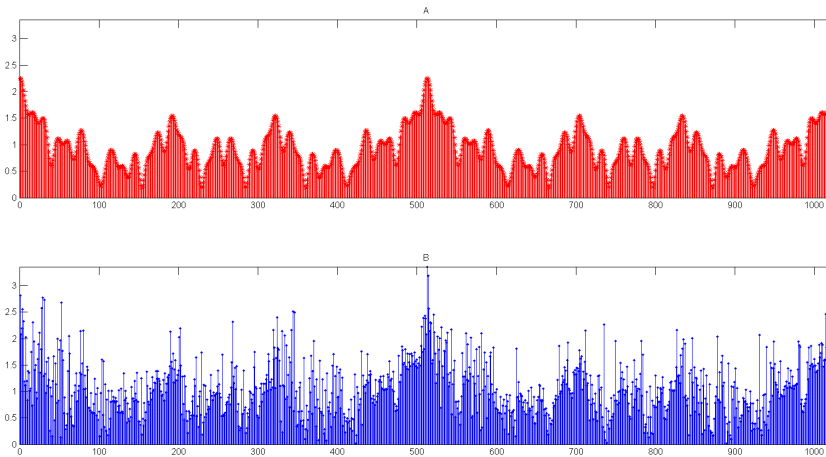


Figura 1.4: A - Modulo della risposta in frequenza del canale 3GPP/LTE, B - In presenza di rumore bianco;  $SNR_{dB} = 5_{dB}$

Spostiamoci adesso nel dominio della frequenza. Nello standard considerato le larghezze di banda per ciascun canale variano da un minimo di 1.25 MHz ad un massimo di 20 MHz (1.25, 1.6, 2.5, 5, 10, 15, 20 MHz), allocabile con ampia flessibilità sia in uplink che in downlink; inoltre il sistema offre diverse possibilità per la locazione di queste bande. A quelle del GSM, dell'UMTS-WCDMA 3G (850, 900, 1800, 1900, 2100 MHz) vengono aggiunte

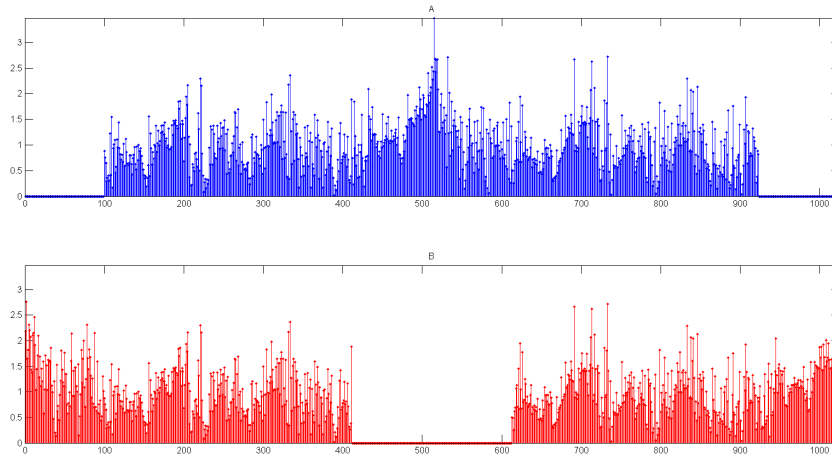


Figura 1.5: *A - Modulo della risposta in frequenza con spegnimento delle portanti ai bordi, B - Soppressione al centro. In entrambi i casi sono state spente 201 sotto-portanti)*

nuove bande a 2.6 GHz con l'ulteriore possibilità di aggiungere altre bande nel tempo a seconda delle necessità. Viene inoltre previsto il pieno supporto delle tecniche MIMO. Data la massiccia presenza di tale servizio in diverse posizioni dello spettro appare chiara la ragione dell'utilizzo di maschere per modellare/limitare l'estensione delle bande. Inoltre un sistema tanto flessibile deve poter limitare o allargare le bande di ciascun sottocanale (e le relative spaziature fra esse) in modo dinamico a seconda delle richieste di servizio nelle varie zone. Al fine di eliminare l'interferenza di intercanale o per il rispetto di ulteriori specifiche vengono quindi utilizzati appositi filtri per limitare l'estensione spettrale di ciascun canale.

Denotando la risposta in frequenza (al variare di  $k$ ) come  $G(k)$  e la risposta impulsiva come  $g(n)$  (supponendo che  $n \in \{1, 2, \dots, CP\}$ ) allora si ha <sup>2</sup>

$$G(k) = \sum_{n=1}^{CP} g(n) \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot n}{N}} \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (1.12)$$

<sup>2</sup>si è scelto come indice di partenza il valore 1 al posto dello 0 per mantenere una simmetria con le simulazioni in MatLab



La precedente non è altro che la trasformata di Fourier discreta della risposta impulsiva  $g(n)$ . In tutto lo scritto verranno mantenute le convenzioni sui domini di  $G(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  su descritte, anche se spesso si farà riferimento ai vettori  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{g}$  di dimensioni rispettivamente  $N$  e  $CP$ .

La stima del canale è tanto più accurata quanto più il valore delle sottoportanti modulate (indicato di seguito con  $M$ ) è vicino alla dimensione del canale in frequenza (indicato di seguito con  $N$ ). Il fenomeno che si osserva quando alcune sottoportanti vengono soppresse è un pesante errore alle estremità della stima. La soppressione delle sottoportanti può avvenire ai bordi del canale ma anche in altre porzioni di quest'ultimo. Tale soppressione viene effettuata per evitare di trasmettere su bande già parzialmente occupate da altri servizi, o per rispettare vincoli imposti da terze parti. In figura 1.5 si possono osservare i due casi di spegnimento di sottoportanti. Inoltre si può osservare come il canale venga corrotto da rumore bianco additivo gaussiano dove è stato utilizzato un valore di SNR di  $10dB$ . Lo strumento maggiormente usato in tutto lo scritto per la valutazione delle prestazioni di una stima è lo Scarto Quadratico Medio (o MSE). A causa dello spegnimento di alcune sottoportanti, il valore di MSE dato dall'aspettazione della differenza al quadrato tra la risposta in frequenza del canale originario e quello stimato presenta elevati valori in corrispondenza delle sottoportanti non modulate, in quanto non è possibile una stima LS del canale essendo il denominatore nullo. Questo effetto sarà trattato in dettaglio più avanti in diverse sezioni dello scritto. La definizione formale di MSE è:

$$MSE(k) = E \left[ \left| H(k) - H_{LS}(k) \right|^2 \right] \quad (1.13)$$

### 1.3 Convenzioni e normalizzazioni utilizzate

I valori dei campioni della risposta impulsiva sono stati normalizzati in modo che quest'ultima abbia una potenza statistica unitaria. Ciò permette una analisi che prescinde da tale parametro. Il valore del signal-to-noise ratio (o SNR) caratterizza direttamente la potenza statistica del rumore gaussiano

bianco filtrato in una sottobanda di durata  $\Delta f$

$$\sigma_w^2 = \frac{N_o}{2} \cdot \Delta f$$

dato che la media di tale processo è zero. Ciò segue dal fatto che il segnale (inteso in senso lato) è proprio il canale in frequenza da stimare. Inoltre anche il segnale utilizzato per effettuare la stima del canale deve essere normalizzato. Per mostrare la ragione di questa scelta viene di seguito mostrata la stima least-square (o LS) di cui si parlerà in maggior dettaglio nel capitolo successivo.

La stima classica del canale  $G_{LS}(\cdot)$  prevede l'utilizzo di un preambolo noto [2] (Altolini, 2012)  $X_a(k)$  e la conseguente stima del canale partendo dal segnale ricevuto  $R(k)$ :

$$R(k) = X_a(k) \cdot G(k) + \Xi(k) \quad (1.14)$$

dove  $\Xi(k)$  rappresenta la componente di rumore in corrispondenza dell'indice  $k$ . Quest'ultimo è ottenuto con un filtro centrato in  $k$  di durata  $\Delta f$ . Dividendo il campione  $R(k)$  ricevuto per la  $X_a(k)$  si ottiene la stima LS del canale:

$$G_{LS}(k) = \frac{R(k)}{X_a(k)} = G(k) + \frac{\Xi(k)}{X_a(k)} \quad (1.15)$$

Le ampiezze della componente di rumore vengono inevitabilmente modificate dai valori che il preambolo assume al variare dell'indice  $k$ . Per eliminare tale dipendenza si assume un preambolo normalizzato in potenza statistica

$$M_{X_a} = E\left[|X_a(k)| \cdot |X_a(k)|^*\right] \quad (1.16)$$

dove  $M_{X_a}$  rappresenta la potenza statistica del preambolo  $X_a(\cdot)$ .  $X_a(k)$  è nullo in corrispondenza delle sottoportanti non modulate, per tutti gli altri indici  $k$  appartenenti al supporto della risposta in frequenza del canale, assume invece un valore costante. Si prevedono due casi fisici ( $M$  rappresenta il numero delle sottoportanti effettivamente modulate) vedi figura 1.5: canale border-holes

$$X_a(k) = \begin{cases} \frac{(1+j)}{\sqrt{(2)}} & \text{se } \frac{M}{2} < k < N - \frac{M}{2} \\ 0 & \text{se } k \geq N - \frac{M}{2} \text{ opp. } k \leq \frac{M}{2} \end{cases} \quad (1.17)$$

e canale center-holes

$$X_a(k) = \begin{cases} \frac{(1+j)}{\sqrt{(2)}} & \text{se } k < \frac{N-M}{2} \quad \text{opp.} \quad .k > \frac{N+M}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{N-M}{2} \leq k \leq \frac{N+M}{2} \end{cases} \quad (1.18)$$

I due diversi preamboli sopra visti vengono usati in due differenti casi pratici. Il segnale 1.17 potrebbe essere impiegato come preambolo per la stima di canale in trasmissioni su Power Line, mentre il segnale 1.18 potrebbe trovare utilizzo come sequenza di training per la stima di un canale radio complesso (e.g. 3GPP/LTE).

Il rumore ( $\Xi(k)$ , vedi 2.1 e 2.2) è stato modellizzato come AWGN (Additive White Gaussian Noise, in questo contesto rumore gaussiano con estensione spettrale  $\Delta f$ ); viene sommato componente per componente ai valori dei campioni che costituiscono la risposta in frequenza  $G(k)$ . Il rumore  $\Xi(k)$  è complesso:

$$\Xi(k) = W_I(k) + jW_Q(k) \quad (1.19)$$

La parte reale  $W_I(k)$  rappresenta la componente in fase, mentre  $W_Q(k)$  la componente in quadratura. Essendo nulla la media

$$\sigma_{\Xi}^2 = \sigma_{W_I}^2 + \sigma_{W_Q}^2 \Rightarrow \sigma_{W_I}^2 = \sigma_{W_Q}^2 = \frac{\sigma_{\Xi}^2}{2} \quad (1.20)$$

quindi utilizzando la consueta notazione per i processi gaussiani

$$W_I(k), W_Q(k) \sim N\left(0, \frac{\sigma_{\Xi}^2}{2}\right). \quad (1.21)$$

Denotando la varianza del segnale ricevuto con  $\sigma_R^2$  si ha che il SNR al ricevitore sarà dato da

$$\Lambda = \frac{\sigma_R^2}{\sigma_w^2} = N \cdot \frac{\sigma_R^2}{\sigma_{\Xi}^2} \quad (1.22)$$

dove si è usata la relazione:

$$\sigma_{\Xi}^2 = N \cdot \sigma_w^2$$

cioè: la varianza della somma di  $N$  variabili aleatorie gaussiani indipendenti ed identicamente distribuite con media nulla e varianza  $\sigma_w^2$  è uguale alla stessa moltiplicata per  $N$ ,

Di seguito una tabella con i principali parametri in uso in questo scritto:  
sinc

Sistema	3GPP/LTE
Numero di impulsi della FFT	$N = 1024$
Frequenza di campionamento (MHz)	$F_s = 15.36$
Larghezza di Banda	5 MHz
Durata di un campione ( $ns$ )	$T_s = 65.10416$
Prefisso ciclico	CP = 72
Massimo ritardo del canale ( $\mu s$ )	4.5977
Lunghezza del DITR (numero di campioni)	$D = 71$
SNR (dB)	$(\Lambda_{R_x})_{dB} = 5, 10, 20(dB)$

Tabella 1.2: *Parametri in uso per le simulazioni numeriche*

## Capitolo 2

# Tecniche classiche per la stima di canale

Verranno di seguito discusse le stime classiche per i canali OFDM: LS (Least Square), stima con matrice a rango pieno o Full-Rank (o FR) ed infine la ricomposizione della risposta in frequenza usando una matrice pseudoinversa ricavata grazie alla scomposizione ai valori singolari, Singular Value Decomposition (o SVD). Dopo una breve introduzione riguardante il procedimento formale, verranno discussi gli algoritmi e la loro realizzazione in MatLab<sup>®</sup>. Chiude il capitolo il confronto tra i risultati ottenuti dalle varie stime.

### 2.1 La stima LS con preambolo noto

Come già discusso nel capitolo precedente la stima LS usa un preambolo per effettuare la stima. Per maggior chiarezza vengono di seguito riportate le relazioni che descrivono tale approccio già introdotte nel capitolo 1:

$$R(k) = X_a(k) \cdot G(k) + \Xi(k) \quad (2.1)$$

dove  $\Xi(k)$  rappresenta la componente di rumore in corrispondenza dell'indice  $k$ . Dividendo il campione  $R(k)$  ricevuto per il preambolo  $X_a(k)$  si ottiene la

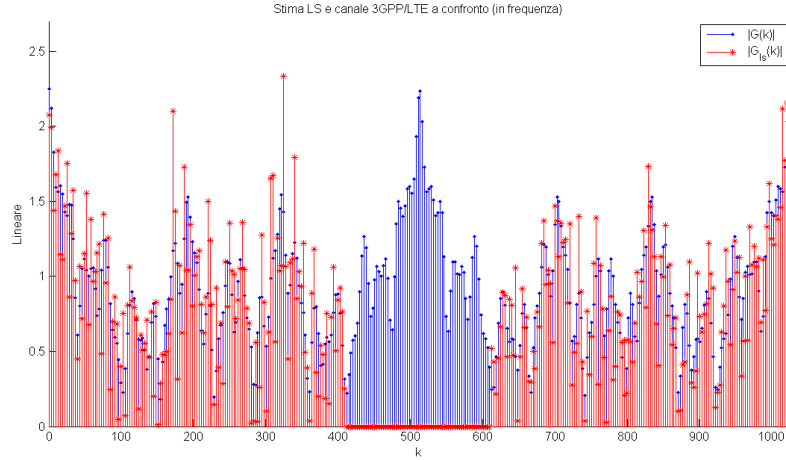


Figura 2.1: Modulo della stima LS e canale 3GPP/LTE

stima LS del canale:

$$G_{LS}(k) = \frac{R(k)}{X_a(k)} = G(k) + \frac{\Xi(k)}{X_a(k)} \quad (2.2)$$

La stima LS sarà usata in seguito come punto di partenza per tutte le altre stime. Questa semplice procedura non consente margini di guadagno rispetto al SNR iniziale. Inoltre non consente di stimare il canale al di fuori dell'insieme  $C_{sa}$ . L'errore commesso con la stima LS ai bordi è quindi dovuto alla natura stessa della stima. Osservando la relazione 2.2 si nota che il campione ottenuto in ricezione  $R(k)$  viene diviso per il preambolo  $X_a(k)$ . Essendo quest'ultimo dato dalle relazioni 1.18 e 1.17, la divisione ha senso solo per gli indici  $k$  nei quali  $X_a(k)$  è diverso da zero. In corrispondenza dei valori  $k$  tali per cui  $X_a(k) = 0$  i valori di  $G_{LS}(k)$  sono pertanto indeterminati. Osservando tali relazioni si osserva che il metodo LS non può provvedere in nessun modo a ricostruire l'informazione mancante della risposta in frequenza. La figura 2.1 mostra un esempio della stima LS (modulo) raffrontata con la risposta in frequenza originale (modulo). Dalla stima del canale in frequenza passiamo adesso alla stima della risposta impulsiva. La trasformata di Fourier può essere facilmente implementata come una operazione fra matrici. La matrice di Fourier è una matrice quadrata di dimensione  $N \times N$

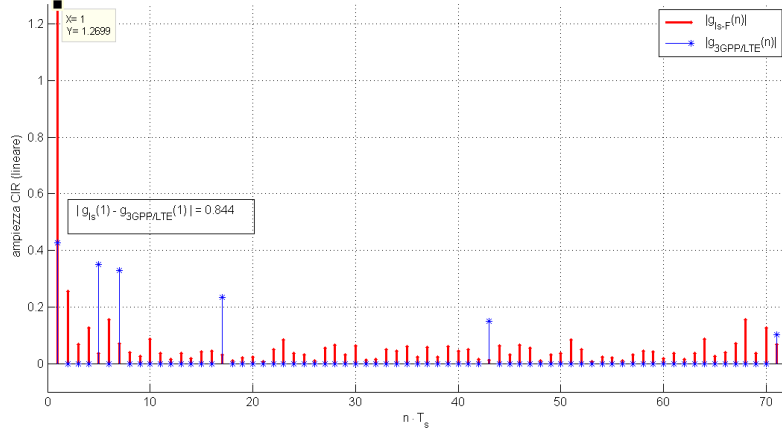


Figura 2.2: Confronto fra il canale 3GPP/LTE e la stima del CIR ottenuta antitrasformando direttamente  $G_{LS}(k)$

i cui elementi sono dati da:

$$(F_N)_{k \cdot n} = e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.3)$$

Moltiplicando la risposta impulsiva  $\mathbf{g}$  per la matrice di Fourier  $\mathbf{F}_N$  si ottiene quindi la risposta in frequenza  $\mathbf{G}$ . Applicando la trasformazione inversa di Fourier ( $\mathbf{F}_N^{-1}$ ) direttamente a  $\mathbf{G}_{LS}$ , cercando quindi di ricostruire la risposta impulsiva, si andrebbe incontro ad aberrazioni molto pronunciate dovute alla mancanza di informazioni sugli indici  $k$  tali per cui  $X_a(k) = 0$ . Il risultato di tale inversione è decisamente lontano dalla risposta impulsiva di partenza. Sarebbe come effettuare una convoluzione tra la risposta impulsiva del canale 3GPP/LTE e un  $\text{sinc}^{-1}(n) \cdot e^{j2\pi \frac{N}{2}}$  tutto eventualmente scalato di un opportuno fattore moltiplicativo. Il risultato di questa operazione è illustrato nella figura 2.2. Da un punto di vista puramente formale per poter ottenere un miglior risultato si deve minimizzare la norma euclidea, cercando una funzione  $\mathbf{f}_g(n)$  tale per cui:

$$\hat{\mathbf{g}} = \underset{\mathbf{g}_{LS}}{\text{argmin}} \left| \mathbf{G}_{LS} - \mathbf{F}'_N \cdot \mathbf{g}_{LS} \right| \quad (2.4)$$

Il simbolo  $\mathbf{F}'_N$  indica la matrice  $\mathbf{F}_N$  in forma troncata. Definiamo l'insieme  $C_{sa}$  delle portanti attive di dimensione  $N_{sa} = N - P$  dove  $P$  indica il numero

di sottoportanti spente. Supponiamo che la durata della risposta impulsiva, in termini di numero di campioni, sia contenuta entro il prefisso ciclico  $CP$ . La matrice  $\mathbf{F}'_N$  è allora definita come:

$$F'_N(k, n) = (\mathbf{F}_N)_{k \in C_{sa}-1, n=0,1 \dots CP-1} \quad (2.5)$$

dove  $C_{sa} - 1$  indica l'operazione di traslazione a sinistra dei valori dell'insieme  $C_{sa}$ . La nuova matrice non è altro che la versione troncata di  $\mathbf{F}_N$  dove sono state eliminate le colonne che hanno indice maggiore di  $CP - 1$  e le righe corrispondenti alle sottoportanti spente. È proprio la relazione 2.4 ad aprire la strada verso le stime SVD ed LS-FR.

## 2.2 Scomposizione ai valori singolari

L'idea dal quale nasce la tecnica SVD (o Singular Value Decomposition) è quella di minimizzare la norma Euclidea della distanza tra  $\mathbf{G}_{LS}$  e  $\mathbf{g}_{LS}^{IDFT}$ , o più sinteticamente  $\mathbf{g}_{LS-F}$  (come indicato in fig. 2.2). Una soluzione per la 2.4 [3] (la soluzione non è unica) si ottiene utilizzando una matrice pseudo-inversa per calcolare la risposta impulsiva. In altre parole nella 2.4 si fissa  $\mathbf{f}_g(\cdot) = \mathbf{g}_{LS}^{(IDFT)}$  e si cerca una funzione  $\hat{\mathbf{G}}$  che renda minima la norma euclidea in questione.

La matrice pseudo-inversa, anche chiamata inversa generalizzata, è stata proposta per la prima volta da Moore nel 1920 come strategia per la risoluzione di equazioni riguardanti la minimizzazione di norme euclidee [4](Moore, 1920). La matrice pseudo-inversa è formalmente una matrice (unica) che soddisfa al seguente sistema di equazioni matriciali ( $\dagger$  denota la pseudo-inversione):

$$\mathbf{F}'_N \dagger : \begin{cases} \mathbf{F}'_N \cdot \mathbf{F}'_N \dagger \cdot \mathbf{F}'_N = \mathbf{F}'_N \\ \mathbf{F}'_N \dagger \cdot \mathbf{F}'_N \cdot \mathbf{F}'_N \dagger = \mathbf{F}'_N \dagger \\ (\mathbf{F}'_N \cdot \mathbf{F}'_N \dagger)^H = \mathbf{F}'_N \dagger \cdot \mathbf{F}'_N \\ (\mathbf{F}'_N \dagger \cdot \mathbf{F}'_N)^H = \mathbf{F}'_N \dagger \cdot \mathbf{F}'_N \end{cases} \quad (2.6)$$

Scrivere in modo corretto la matrice pseudo-inversa utilizzando il sistema precedentemente visto è molto complicato anche da un punto di vista nume-



rico. Nello stesso articolo, Moore propone la scomposizione ai valori singolari (o SVD) per agevolare il calcolo della pseudo-inversa. I valori singolari possono essere pensati come le radici quadrate degli autovalori della matrice  $\mathbf{F}'_N \cdot \mathbf{F}'_N$  o  $\mathbf{F}'_N \cdot \mathbf{F}'_N$ . Più in generale, data una matrice generica  $A$  di dimensioni  $K \times D$ , la sua scomposizione ai valori singolari consiste in una terna di matrici  $\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}$  tali che

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^H \quad (2.7)$$

dove le matrici  $\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}$  hanno rispettivamente dimensioni:  $K \times K$ ,  $K \times D$ ,  $D \times D$ . Le matrici  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  sono matrici unitarie, mentre  $\mathbf{S}$  è una matrice diagonale i cui elementi sono proprio i valori singolari (o singular value, SV). Con queste posizioni la pseudoinversa di  $\mathbf{A}$  è data da:

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^\dagger \cdot \mathbf{U}^H \quad (2.8)$$

dove  $^H$  denota il trasposto Hermitiano di una matrice. Importante notare che  $\mathbf{S}^\dagger$  coincide con la versione di  $\mathbf{S}$  in cui ciascun elemento è sostituito dal proprio inverso; il calcolo di  $\mathbf{S}^\dagger$  a partire da  $\mathbf{S}$  è pertanto banale e richiede solo il calcolo di  $Z = \min(K, D)$  inversioni. Nel seguito del testo la scrittura  $\mathbf{A}^\dagger$  indicherà la matrice pseudoinversa di  $\mathbf{A}$ .

Ritorniamo al problema della norma Euclidea in 2.4. Per il calcolo della pseudoinversa rimane libera la scelta delle dimensioni della matrice  $S$  (adesso di dimensione  $M \times CP$ ) usata per la scomposizione SVD. Il rango di  $S$  può infatti essere ridotto per diminuire i gradi di libertà del problema o per soddisfare a specifiche cruciali per l'analisi numerica. Ad esempio il condition-number (o CN) definito come il rapporto tra il più grande ed il più piccolo dei valori singolari in una scomposizione SVD potrebbe portare a valori di stima che si trovano al limite della precisione numerica adottata. Ridurre il rango di  $\mathbf{S}$  potrebbe eliminare questo problema poichè i valori singolari sono disposti in ordine crescente sulla diagonale principale. Una conseguenza di questa riduzione di rango per  $\mathbf{S}$  porterà, ad esempio, ad una stima del canale anche per le sottoportanti che non appartengono a  $C_{sa}$ . Della scelta di tale parametro, e dei possibili utilizzi di una matrice  $\mathbf{S}$

troncata si parlerà più in avanti. Per il momento verrà utilizzato il valore  $\text{rango}(\mathbf{S}) = CP = 72$ .

La stima SVD prevede le seguenti procedure

$$\mathbf{g}_{LS}^{(SVD)} = \mathbf{F}_N^\dagger \cdot \mathbf{G}_{LS-noHoles} \quad (2.9)$$

dove  $\mathbf{G}_{LS-noHoles}$  è la versione di  $\mathbf{G}_{LS}$  considerata nel sottoinsieme  $C_{sa}$  delle portanti attive:  $\mathbf{G}_{LS-noHoles} = (\mathbf{G}_{LS})_{C_{sa}}$ . A seguire l'operazione di completamento per poter rendere coerenti le dimensioni di  $\mathbf{g}_{LS}^{(SVD)}$  con quelle della matrice  $\mathbf{F}_N$ :

$$\mathbf{g}_{LS-completata}^{(SVD)} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{LS}^{(SVD)} \\ \mathbf{0}_{N-CP} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

L'operazione di completamento prevede semplicemente la concatenazione di un vettore di zeri  $\mathbf{0}_{N-CP}$  (di lunghezza  $N - CP$ ) al vettore  $\mathbf{g}_{LS}^{(SVD)}$  ottenuto con 2.9. Per ottenere in fine la relazione per la stima SVD:

$$\mathbf{G}_{LS}^{(SVD)} = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{g}_{LS-completata}^{(SVD)}. \quad (2.11)$$

La procedura esposta rappresenta l'algoritmo della stima SVD. Nel prossimo capitolo verrà presentata la stima TSVD (o Truncated SVD). Questa non è altro che la precedente stima in cui il valore del rango della matrice  $S$  della scomposizione SVD viene fissato a valori tali da soddisfare specifiche precise sul condition number (o CN) a cui si è prima accennato. Nel paragrafo 2.4, sezione relativa alle prestazioni delle stime presentate nel presente capitolo, si vedrà come la stima SVD pur presentando bassissimi valori di errore relativo, non consente una stima del canale in corrispondenza delle sottoportanti spente. Ad ogni modo il MSE ottenuto con tale stima in corrispondenza delle sottoportanti modulate rimarrà il migliore dei risultati ottenuti.

## 2.3 Stima con matrice ridotta a rango pieno, Full Rank

L'algoritmo LS-FR consente una stima del canale in ogni sua parte, anche in corrispondenza delle sottoportanti spente. Questa tecnica viene im-

Listing 2.1: Codice MatLab<sup>®</sup> per  $\bar{\mathbf{F}}_N$ 


---

```

1 Fn_til = [F(1:k1-1,1:CP); F(k2+1:N,1:CP)];
2 Fn_lin = Fn_til;
3     CN = cond(Fn_til);
4     R = CP;
5     rang = rank(Fn_lin);
6     while R ~= rang || CN > 1e5,
7         R = R-1;
8         Fn_lin = Fn_til(:,1:R);
9         rang = rank(Fn_lin);
10        CN = cond(Fn_lin);
11    end

```

---

plementata imponendo che la matrice  $\mathbf{F}'_N$  rispetti una condizione sul  $CN$  e contemporaneamente viene imposto che il numero di colonne corrisponda al rango della matrice stessa. Il risultato è una matrice  $\bar{\mathbf{F}}_N$  (con rango pieno)

$$\text{rank}(\bar{\mathbf{F}}_N) = \dim(\text{columns}(\bar{\mathbf{F}}_N))$$

Nel frammento di codice 2.1 viene illustrata l'implementazione dell'algoritmo LS-FR per ricavare  $\bar{\mathbf{F}}_N$ . Si tratta di un procedimento iterativo (in questo caso implementato con un ciclo while). Si inizia con il rango iniziale di  $\bar{\mathbf{F}}_N$  pari a  $CP$  i.e.  $R = CP$ , si effettuano ricorsioni fintantochè il  $CN$  non scende sotto il valore specificato nelle condizioni del ciclo ed  $\bar{\mathbf{F}}_N$  ha rango pieno. Una volta creata la matrice  $\bar{\mathbf{F}}_N$  si procede alla ricostruzione del canale nel tempo:

$$\mathbf{g}_{LS}^{(FR)} = \left( \bar{\mathbf{F}}_N^H \cdot \bar{\mathbf{F}}_N \right)^{-1} \bar{\mathbf{F}}_N^H \cdot \mathbf{G}_{LS} \quad (2.12)$$

Successivamente completo la risposta impulsiva come fatto nella stima  $SVD$  nel paragrafo precedente:

$$\mathbf{g}_{LS-completata}^{(FR)} = \begin{bmatrix} g_{LS}^{(FR)} \\ \mathbf{0}_{N-rY} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

dove  $rY = \dim(\text{columns}(\bar{\mathbf{F}}_N))$  La ricostruzione della risposta in frequenza è data ovviamente da:

$$\mathbf{G}_{LS}^{(FR)} = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{g}_{LS-completata}^{(FR)} \quad (2.14)$$

Valori di  $CN_{finale}$  piccoli ( $CN_{finale} \sim 10$ ) assicurano una buona ricostruzione al centro della banda, dove le sottoportanti vengono spente, ma scarsi valori in termini di errore assoluto dentro l'insieme  $C_{sa}$ . Al contrario  $CN_{finale} \sim 10^5$  assicurano una buona ricostruzione dentro l'insieme  $C_{sa}$  ma una degradazione ingestibile della stima al centro banda. Il problema potrebbe essere risolto unendo due stime LS-FR con due diversi valori di  $CN_{finale}$  per eseguire una corretta ricostruzione globale. Quest'ultima strada verrà percorsa nel capitolo 3.

## 2.4 Risultati e Prestazioni

In questa sezione verranno presentati i risultati ottenuti dalle stime fin qui discusse. Vengono presentati i valori relativi ad una realizzazione del canale con tre differenti valori di  $SNR$ :  $\Lambda_{dB} = 5, 10, 20dB$  Per fissare un primo, semplice criterio di confronto verrà considerato l'errore cumulativo pesato, definito come di seguito:

$$\eta = \left( \frac{\|\mathbf{G}\|}{\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_{stimata}\|} \right)_{C_{sa}} \quad (2.15)$$

L'errore relativo viene computato solo nell'insieme delle portanti attive, i.e.  $k \in C_{sa}$ . Tale scelta consente di inserire nella tabella stime che presentano una forte degenerazione al di fuori del suddetto insieme. La tabella 2.1 mostra i diversi valori di  $\eta_{dB}$  ottenuti dalle tre stime, per ciascun valore del  $SNR$ . Da un rapido sguardo alla tabella 2.1 si osserva come  $\eta_{dB}$  della stima LS-FR mantenga un comportamento simile nei tre casi del  $SNR$ . Questo effetto è dovuto al condizionamento della matrice di trasformazione. I parametri ottenuti dopo l'applicazione dell'algoritmo esposto nel frammento di codice 2.1 non sono stati modificati al variare del  $SNR$ . Variando, caso per

Nome stima	$\Lambda_{dB} = 5_{dB}$	$\Lambda_{dB} = 10_{dB}$	$\Lambda_{dB} = 20_{dB}$
<b>LS</b>	4.45	9.54	19.69
<b>SVD</b>	15.95	21.49	31.12
<b>LS-FR</b>	13.47	14.55	15.06

Tabella 2.1:  $\eta_{dB}$  per le tre stime: LS, SVD, LS-FR

caso, i parametri del suddetto algoritmo si possono ottenere risultati migliori quando il valore del  $SNR$  supera i  $15_{dB}$ . Quindi i parametri per la stima LS-FR ottima devono essere scelti in funzione del  $SNR$  oltre che, ovviamente in funzione del numero di portanti  $N$ , e del numero delle portanti spente  $N - N_{sa}$ . Nel caso in oggetto sono state usate:  $N = 1024$ ,  $N_{sa} = 823$ , l'intervallo  $k1 = 412$ ,  $k2 = 612$ , come intervallo di spegnimento. Il CN utilizzato nella stima LS-FR deve essere modificato a seconda della porzione di canale da stimare; se siamo interessati alla stima a centro banda si dovrà utilizzare  $CN_{finale} \sim 10$ , se al contrario siamo interessati alla stima del canale nell'insieme delle portanti attive  $C_{sa}$  allora occorre che  $CN_{finale} \sim 10^5$ .

$\eta_{dB}$  della stima SVD non sembra soffrire del precedente problema. In tutti e tre i casi presenta un margine di guadagno sul valore iniziale di  $SNR$ . Tuttavia quando andremo a confrontare gli andamenti a centro banda apparirà una aberrazione molto pesante al centro del canale (in corrispondenza delle sottoportanti spente). Problema che invece può essere mitigato con la stima LS-FR.

$\eta_{dB}$  per la stima LS presenta sempre valori vicini al  $SNR$  di partenza, senza nessun margine di guadagno.

Diamo adesso uno sguardo ai grafici delle risposte in frequenza ottenuti dalle tre tecniche di stima. In figura 2.3 la ricostruzione con la tecnica LS (least squares). Come già più volte anticipato, tale tecnica di stima non permette di guadagnare nulla rispetto al valore di  $SNR$  iniziale. Inoltre permane il problema a centro banda, in cui  $\mathbf{G}_{LS}$  è indeterminata (nella rappresentazione viene posta a zero per ogni indice  $k1 \leq k \leq k2$ , con  $k1$  e  $k2$  come sopra).

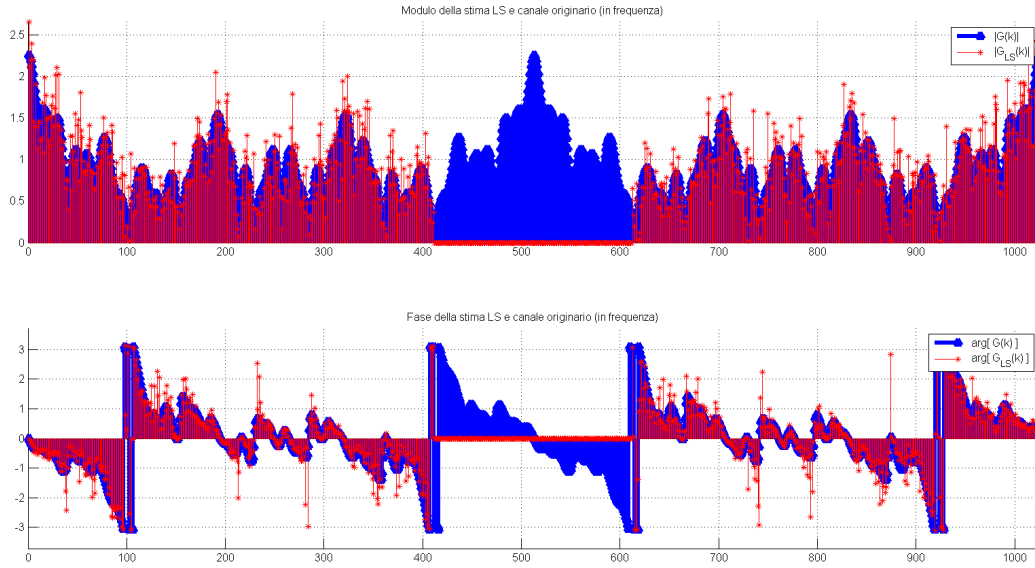


Figura 2.3: Ricostruzione con tecnica LS. Modulo (in alto) e fase(in basso) confrontati con la risposta in frequenza originale, SNR:  $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ .

In figura 2.4 è riportata la ricostruzione con la tecnica SVD. Come già visto nella tabella 2.1 la stima SVD offre ottime prestazioni, tuttavia permane il problema a centro banda (si sarebbe potuto porre  $G_{LS-SVD}(k) = 0$  con  $k_1 \leq k \leq k_2$ ). Si tenga presente che nell'intervallo  $[k_1, k_2]$  non viene trasmessa informazione. La conoscenza dell'andamento di  $G(\cdot)$  in tale intervallo non è quindi indispensabile per la corretta equalizzazione del segnale ricevuto. Tuttavia qualora si volesse ricostruire la risposta impulsiva, costituita da solo 72 punti contro i 1024 della risposta in frequenza, allora la conoscenza completa di  $G(\cdot)$  è indispensabile.

In figura 2.5 si può osservare la ricostruzione LS-FR realizzata con  $CN_{finale} = 10^5$ . Anche qui le prestazioni sono buone, tuttavia permane ancora il problema del centro banda. Il problema può essere mitigato usando come parametro nell' algoritmo LS-FR il valore  $CN_{finale} = 10$ . Il risultato si può osservare in figura 2.6. In questo caso, come già anticipato, la stima ai lati della banda è più lontana dall'andamento originale di  $\mathbf{G}_{LS}$ .

A conclusione del capitolo sono presentati dei grafici dettagliati dell'errore di

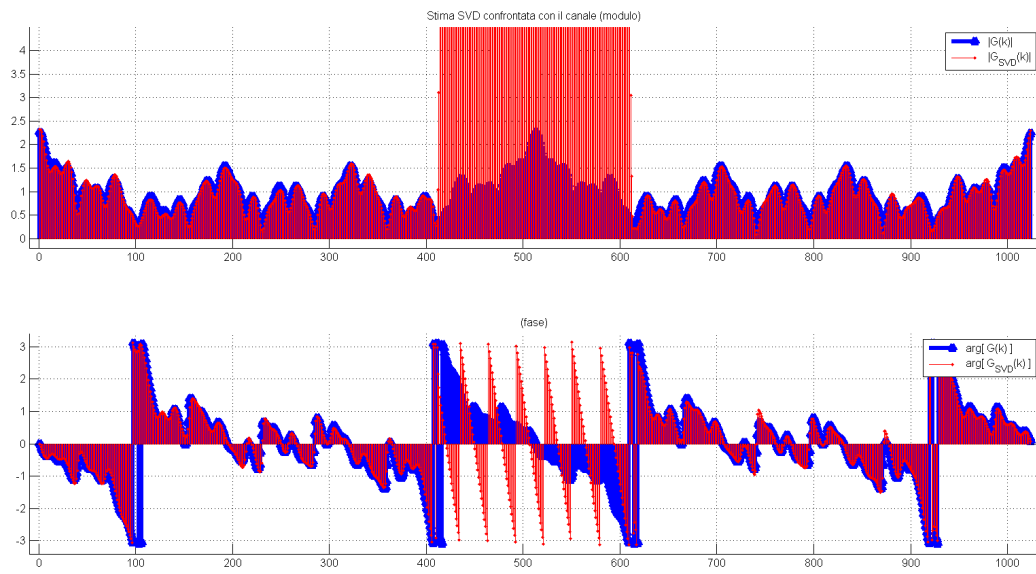


Figura 2.4: Ricostruzione con tecnica SVD. Modulo(in alto) e fase(in basso).  
SNR:  $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ .

stima indice per indice.

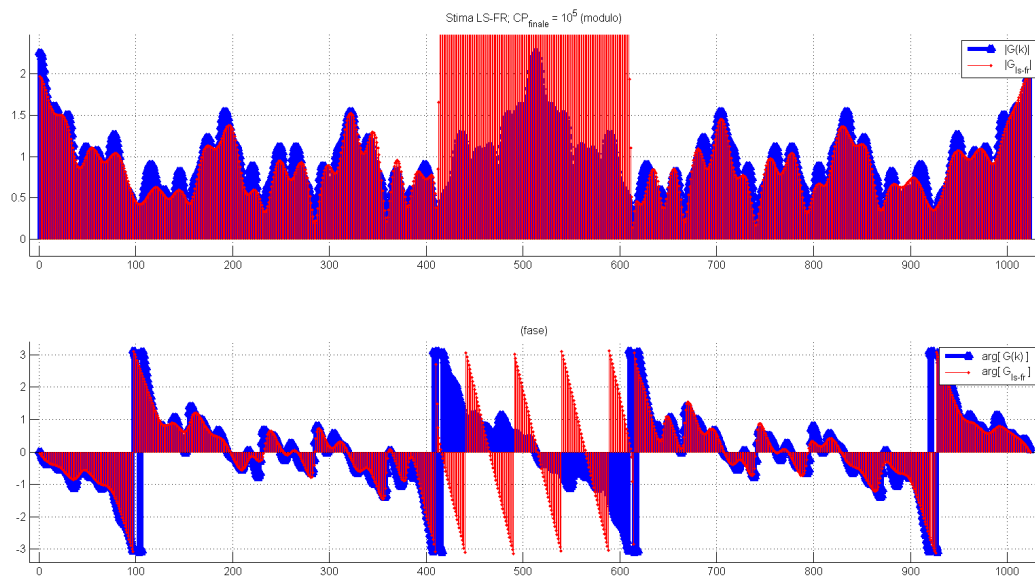


Figura 2.5: Ricostruzione *LS-FR* con  $CN_{finale} = 10^5$ ,  $SNR: \Lambda_{dB} = 10_{dB}$ .

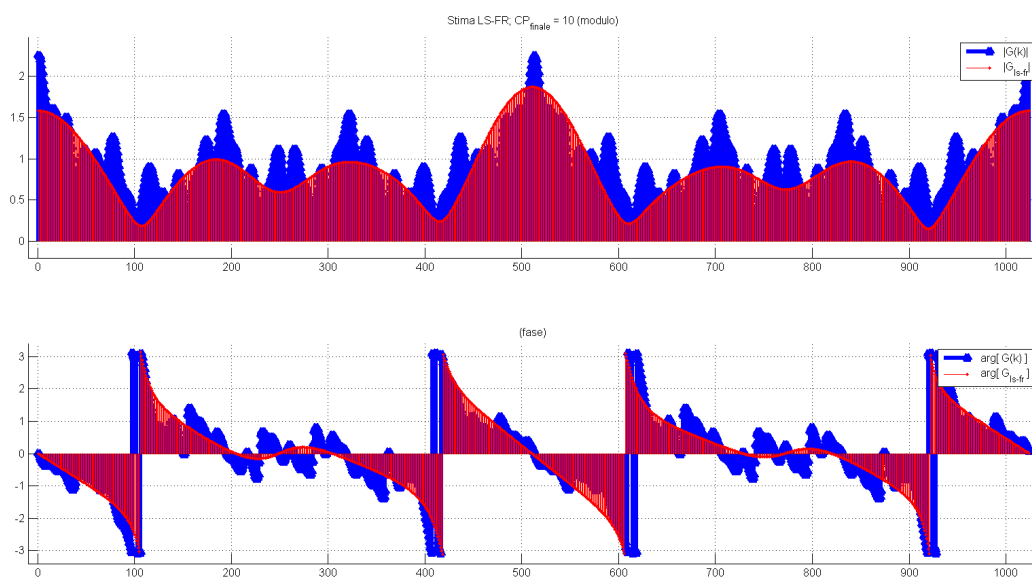


Figura 2.6: Ricostruzione *LS-FR* con  $CN_{finale} = 10$ ,  $SNR: \Lambda_{dB} = 10_{dB}$ .



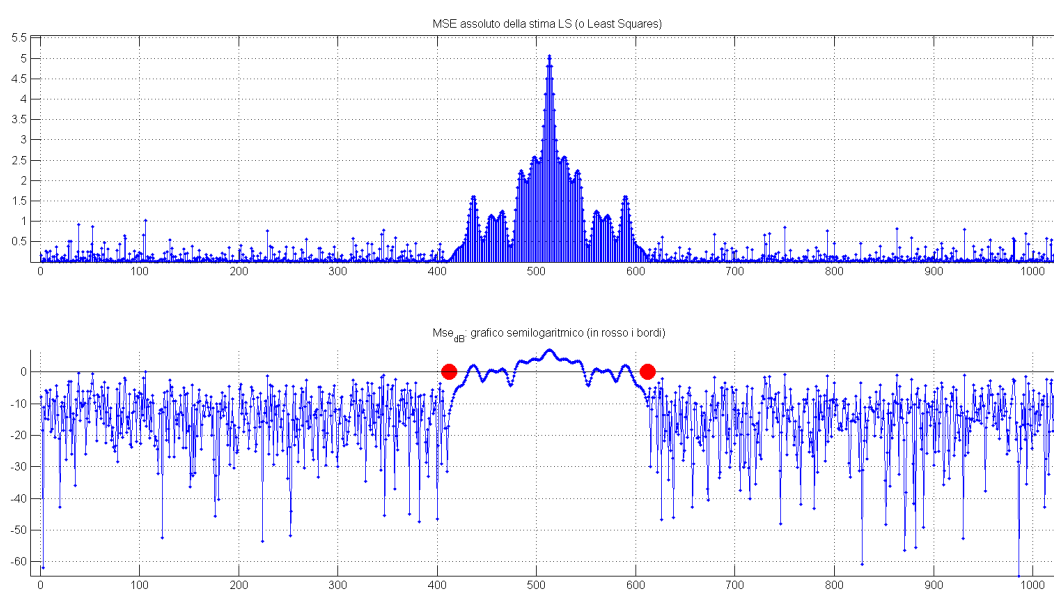


Figura 2.7: MSE della stima LS. In alto scala lineare, in basso scala semilogaritmica (ordinate in logaritmo, ascisse lineare). A centro banda ( $k_1 \leq k \leq k_2$ ) la figura disegnata da  $MSE_{LS}(k)$  non è altro che:  $|G(k)|^2$ .

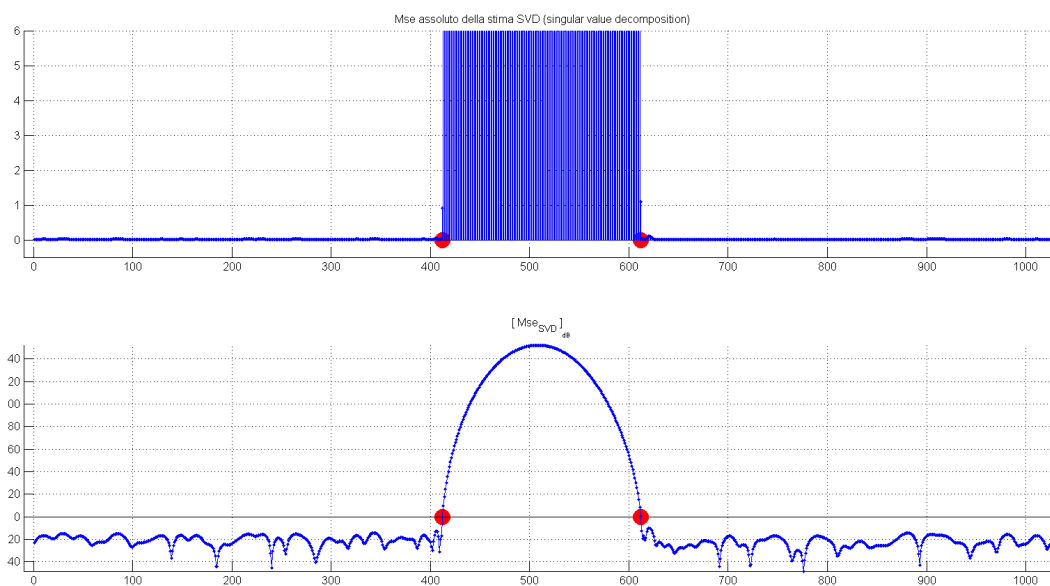


Figura 2.8: Mse della stima SVD. In alto scala lineare, in basso scala semilogaritmica (ordinate in logaritmo, ascisse lineare). A centro banda ( $k_1 \leq k \leq k_2$ ) la figura disegnata da  $MSE_{LS}(k)$  presenta un pesante errore di stima fortemente legato al processo numerico. Per poter eliminare tali aberrazioni bisognerà diminuire drasticamente il valore del CN. Tale valore nel caso  $N - N_{sa} > 100$  sale verso valori di  $10^{15}$ . Valori normalizzati di questo tipo risultano troppo vicini alla massima precisione numerica utilizzata.

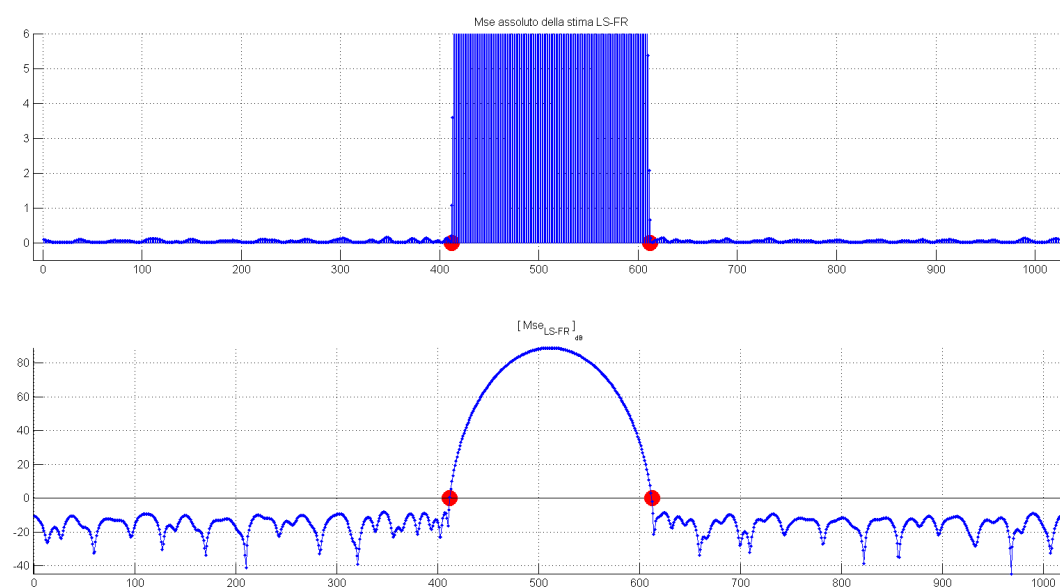


Figura 2.9: Mse della stima LS-FR (con  $CN_{finale} = 10^5$ ). Anche in questo caso emergono problematiche simili a quelle già evidenziate nel caso SVD.

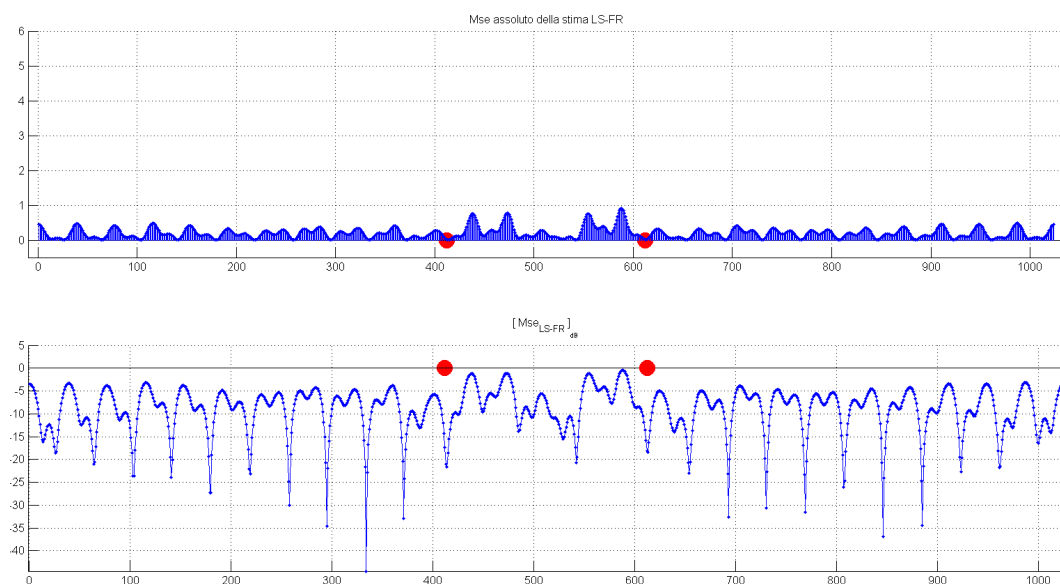


Figura 2.10: Mse della stima LS-FR (con  $CN_{finale} = 10$ ). In questo caso si osserva una prima ricostruzione a centro banda.



# Capitolo 3

## Tecniche avanzate di stima

### 3.1 Pseudo inversa con rango ridotto (TSVD)

Come illustrato nell'articolo *DFT based channel estimation Methods* [5] (2010,Diallo) è possibile incrementare le prestazioni della stima SVD ricorrendo ad una versione troncata della matrice  $\mathbf{S}$ , matrice diagonale contenente i SV di  $\mathbf{F}'_N$ . Tale matrice veniva usata nel computo della pseudoinversa di  $\mathbf{F}'_N$  stessa. Questa procedura prende il nome di Truncated Single-Value Decomposition (o TSVD). Nel frammento di codice 3.1 è illustrata l'implementazione in MatLab<sup>®</sup> per creare la suddetta matrice  $\mathbf{S}_{TH}$  (versione troncata di  $\mathbf{S}$  vista nel capitolo 2). La procedura eseguita per la creazione di  $\mathbf{S}_{TH}$  è molto simile a quella vista per nella stima LS-FR per la creazione di  $\bar{\mathbf{F}}_N$ . Vediamo di seguito la descrizione formale dell'algoritmo TSVD. Il punto di partenza è  $\mathbf{F}'_N$  ricavata da  $\mathbf{F}$  tramite la relazione 2.5 qui di seguito riscritta per maggior comodità:

$$F'_N(k, n) = (\mathbf{F}_N)_{k \in C_{sa}-1, \quad n=0,1...CP-1}$$

Da questa si costruisce la terna di matrici  $[\mathbf{U}_{TH}, \mathbf{S}_{TH}, \mathbf{V}_{TH}, ]$  usando la scomposizione SVD di MatLab<sup>®</sup> (frammento di codice 3.2). Le dimensioni delle matrici sono, al momento, identiche a quelle descritte nel paragrafo 2.2. A questo punto si applica la procedura descritta nel frammento di codice 3.1.

Listing 3.1: Codice MatLab<sup>®</sup> per  $\mathbf{S}_{TH}$ 


---

```

1  i = 0;
2  STH = S;
3  CN = cond(STH);
4  while CN > 90 % deve essere compreso tra 80 e 700
5      rangoSTH = rank(STH);
6      STH = STH(:,1:CP-i);
7      i = i+1;
8      CN = cond(STH);
9      disp(rangoSTH);
10     disp(CN);
11 end
12 TH = rank(STH);

```

---

Listing 3.2: Codice MatLab<sup>®</sup> per la scomposizione ai valori singolari, la matrice  $F_{n_{til}}$  è la matrice indicata nel testo come  $\mathbf{F}'_N$ 


---

```

1  [U_TH, S_TH, V_TH] = svd(Fn_til);

```

---

Formalmente si tratta di un troncamento della matrice  $\mathbf{S}_{TH}$  e di una conseguente riduzione di rango. Si estrae iterativamente da  $\mathbf{S}_{TH}$  una colonna fino a quando il  $CN$  non soddisfa alla specifica  $CN_{TH} = 90$ . Una volta portata a termine questa procedura le matrici  $\mathbf{U}_{TH}$  e  $\mathbf{V}_{TH}$  vengono adeguate alla nuova dimensione di  $\mathbf{S}_{TH}$ :

$$\mathbf{U}_{TH} \in C^{N_{sa} \times N_{sa}} \quad \mathbf{V}_{TH} \in C^{TH \times TH} \quad \mathbf{S}_{TH} \in C^{N_{sa} \times TH} \quad (3.1)$$

La notazione  $C^{K \times Z}$  denota l'insieme delle matrici complesse di dimensione  $K \times Z$ . La terna di matrici così definita consente di calcolare la matrice pseudoinversa di  $\mathbf{F}'_N$ :

$$\mathbf{F}'_{NTH}{}^\dagger = \mathbf{V}_{TH} \cdot \mathbf{S}_{TH}^\dagger \cdot \mathbf{U}_{TH}^H \quad (3.2)$$

Adesso si ricostruisce una prima risposta impulsiva come:

$$\mathbf{g}_{TSVD} = \mathbf{F}'_{NTH}{}^\dagger \cdot G_{LS-noHoles} \quad (3.3)$$

Si completa concatenando una stringa di zeri di lunghezza pari a  $N - TH$ :

$$\mathbf{g}_{TSVD-completata} = [\mathbf{g}_{TSVD} \quad \mathbf{0}_{N-TH}] \quad (3.4)$$

In fine la stima TSVD:

$$\mathbf{G}_{SVD}^{TH} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_{TSVD-completata} \quad (3.5)$$

Nel paragrafo 3.3 verrà illustrata la ricostruzione della risposta in frequenza del canale utilizzando tale tecnica, ed una illustrazione completa delle prestazioni offerte da tale algoritmo.

## 3.2 Tecnica LS-FR con doppio CN e Tecnica TSVD/SVD

La stima LS-FR può, al variare del  $CN$  costruire in modo più dettagliato il centro del canale o le sue parti laterali. Si potrebbe pertanto inserire nella procedura un secondo  $CN$  ed usare due diverse matrici ridotte a rango pieno, una in ciascuna porzione di canale, in modo da ottenere il massimo delle prestazioni. Anche se non necessario per la corretta equalizzazione del segnale ricevuto, poter conoscere tutte le parti (in frequenza) del canale potrebbe portare ad alcuni vantaggi. Ad esempio la completa conoscenza della risposta in frequenza consentirebbe la ricostruzione della DITR. La risposta impulsiva presenta il vantaggio di un dominio (discreto) molto ristretto se confrontato con il numero di punti del supporto della risposta in frequenza (72 vs 1024), quindi certamente più maneggevole.

L'algoritmo LS-FR con doppio  $CN$  utilizza quindi due diversi valori di  $CN$ :  $CN(1) = 10$  (per stimare il centro del canale),  $CN(2) = 10^5$  (per la stima all'interno dell'insieme delle portanti attive  $C_{sa}$ ). I due valori sono stati scelti in base ai risultati discussi nel paragrafo 2.4.

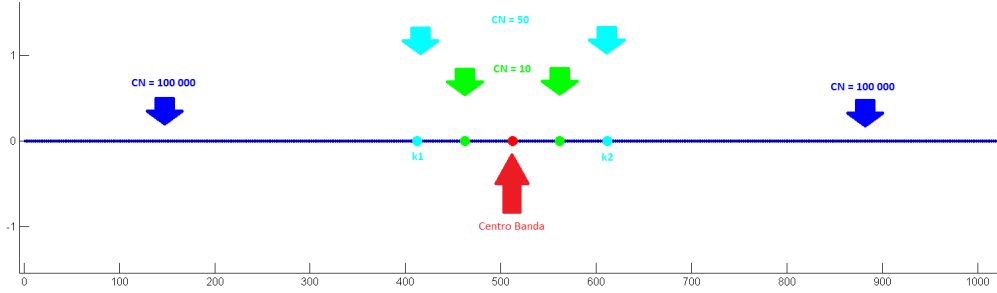


Figura 3.1: *Suddivisione del supporto di  $\mathbf{G}$  per stima LS-FR con 3 CN.*

Per poter ulteriormente migliorare la stima al centro della banda si potrebbe suddividere la zona filtrata ed usare un ulteriore valore di CN; e.g. si potrebbe utilizzare  $CN_1 = 10^5$  per stimare all'interno di  $C_{sa}$ ,  $CN_2 = 10$  per stimare le frequenze al centro della banda (le prime a risentire della degenerazione al crescere di CN) su un supporto centrato a  $\frac{N}{2}$  esteso  $\frac{k_2 - k_1 - 1}{2}$ , ed infine  $CN_3 = 50$  per la parte mancante (da  $k_1$  a  $\frac{N}{2} - \frac{k_2 - k_1 - 1}{4}$  e da  $\frac{N}{2} + \frac{k_2 - k_1 - 1}{4} - 1$  a  $k_2$ ). La figura 3.1 chiarisce meglio quanto appena esposto. La strada dei CN multipli, con più di due CN, non sarà percorsa poichè non in linea con gli obiettivi di questa tesi. Nel paragrafo 3.3 verrà illustrato l'andamento del MSE ottenuto con la tecnica LS-FR a doppio CN.

Così come avviene per la stima LS-FR anche per la stima TSVD è possibile ottenere un incremento delle prestazioni combinando tale algoritmo con quello SVD. L'idea è quella di sfruttare tutto il contenuto di informazione di  $G_{LS}$  (procedura SVD) per ricostruire le parti laterali del canale (le parti con le portanti attive) e ridurre i gradi di libertà per ricostruire il centro della banda (procedura TSVD). L'alternarsi delle due tecniche suggerisce il nome, che ha solo lo scopo di identificativo immediato, di stima  $TSVD/SVD$ . Da un punto di vista strettamente formale si può pensare di utilizzare due procedure separate concatenando in modo opportuno i valori di stima ottenuti. Nell'implementazione numerica si può computare direttamente un'unica matrice di trasformazione. Inoltre per effettuare una stima  $TSVD$  è sem-



pre necessario operare prima una scomposizione  $SVD$ , quindi la procedura riportata in questo paragrafo non aggiunge nulla alla complessità computazionale dell'algoritmo  $TSVD$ . Ad ogni modo i risultati ottenuti con questa procedura verranno esposti nel paragrafo successivo.

Accanto alle stime vere e proprie possono essere affiancati ulteriori strumenti come il Pruning nel tempo o la finestrata in frequenza allo scopo di migliorare gli andamenti costruiti. Il Pruning nel tempo (potatura) consente di eliminare campioni il cui valore si trova in un range confrontabile con il livello di rumore. Nella figura 3.2 viene illustrata la procedura di Pruning nel dominio del tempo. Si parte dalla risposta impulsiva del canale 3GPP/L-

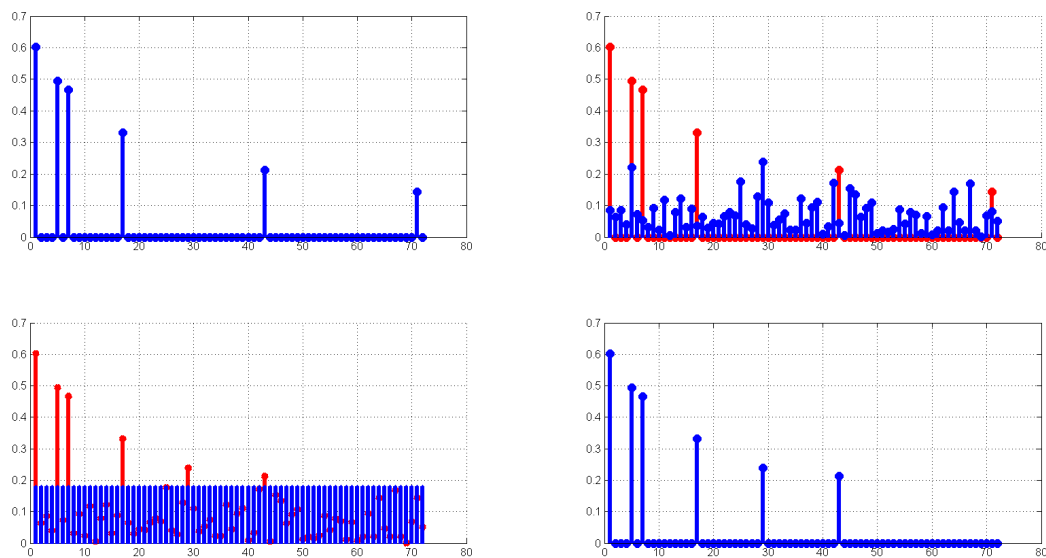


Figura 3.2: Una sequenza in cui viene illustrata l'operazione di Pruning ad un grafico corrotto da rumore

TE si suppone che questo venga corrotto da un rumore bianco. Nel terzo quadrante della figura 3.2 si osserva la fascia dei valori sul quale si eseguirà il Pruning. Nel quarto si osserva il risultato finale della procedura di Pruning. Qualora si volesse ricostruire la risposta impulsiva a partire da una stima in frequenza si potrebbe utilizzare questa tecnica. La finestrata è un strumento che può essere utilizzato per migliorare una stima. Ad esempio

se volessimo ricostruire la risposta impulsiva del canale utilizzando la stima SVD così come è stata introdotta nel capitolo 2, ci ritroveremo certamente con una ricostruzione priva di significato. Prima di effettuare la stima si potrebbe eliminare la banda di transizione da  $k_1$  a  $k_2$  sostituendola con una sequenza di zeri. Tale procedura equivale alla moltiplicazione di un  $rect(\cdot)$  in frequenza o ad una convoluzione con un  $sinc^{-1}(\cdot)$  nel tempo. Nella figura 3.3 viene illustrato il caso in cui si prova ad antitrasformare la risposta  $G_{LS}^{SVD}$  dopo o prima la finestatura. Osserviamo ancora che nel terzo quadrante del-

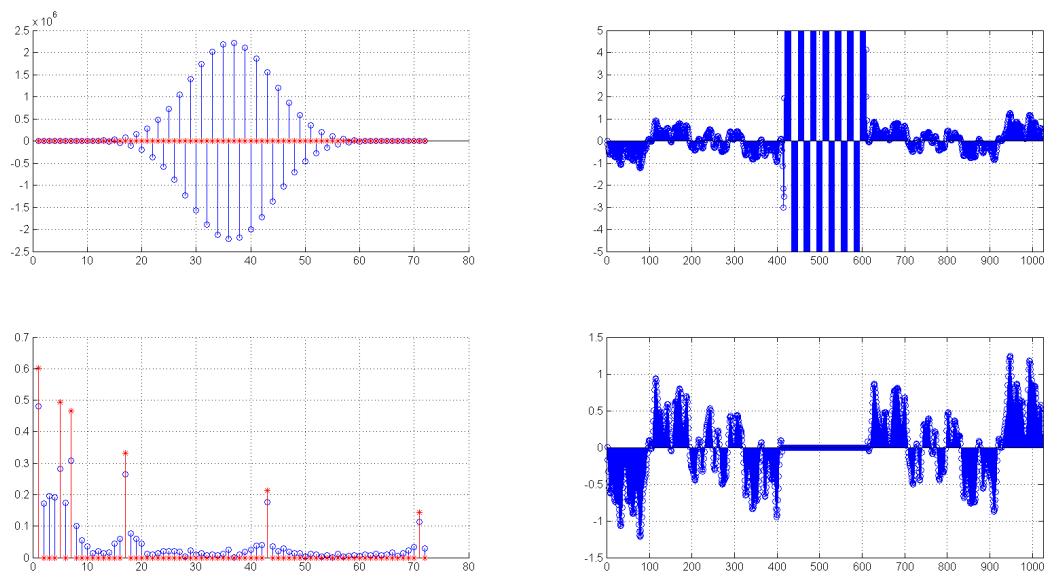


Figura 3.3: Esempio di applicazione di finestatura in frequenza

la figura 3.3 potremmo applicare ancora la procedura di Pruning nel tempo per migliorare ulteriormente la ricostruzione.

### 3.3 Risultati e Performance

La tabella 2.1 può adesso essere ampliata con i dati ottenuti dalla stima TSVD. Le stime presentate nel paragrafo precedente non verranno inserite nella 2.1 poichè in tale tabella non viene tenuto conto della ricostruzioni nell'insieme delle portanti soppresse. La tabella 2.1 sarà in seguito ulteriormen-

Nome stima	$\Lambda_{dB} = 5_{dB}$	$\Lambda_{dB} = 10_{dB}$	$\Lambda_{dB} = 20_{dB}$
LS	4.45	9.54	19.69
SVD	15.95	21.49	31.12
LS-FR	13.47	14.55	15.06
TSVD	14.35	16.05	17.71

Tabella 3.1:  $\eta_{dB}$  per le tre stime: LS, SVD, LS-FR, TSVD

te ampliata con i dati delle simulazioni relative al nuovo algoritmo a banda ridotta presentato nel capitolo 5. Nella quarta riga della tabella 3.1 sono riportate le prestazioni globali della stima TSVD. Come si può osservare non c'è un grosso incremento delle prestazioni, per quanto riguarda  $\eta_{TSVD-dB}$ . Nella figura 3.4 viene mostrata la ricostruzione TSVD. Viene utilizzato il

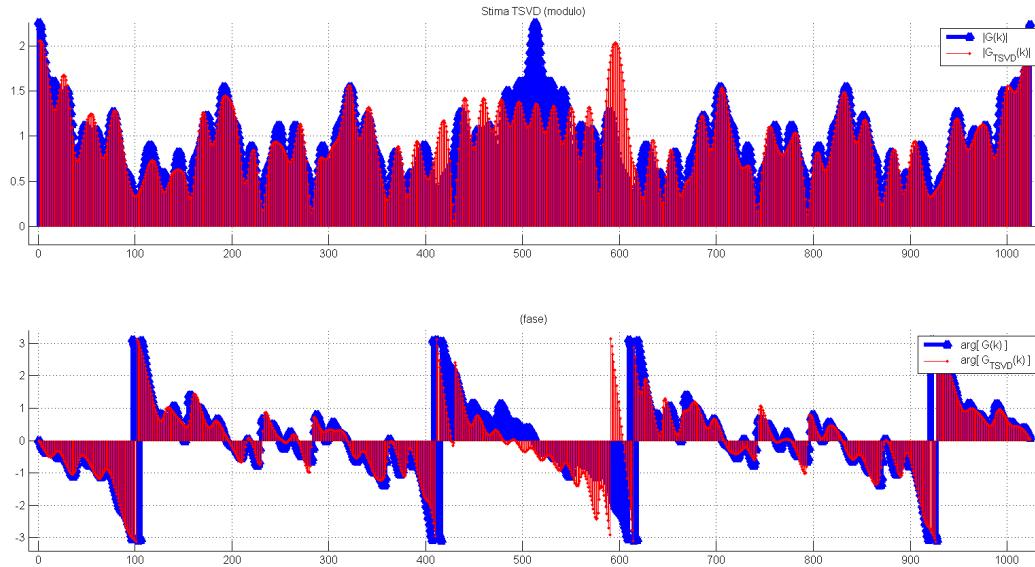


Figura 3.4: Stima TSVD confrontata con la risposta in frequenza originale

valore  $CN_{finale} = 90$  nell'algoritmo del codice 3.1 e un livello di  $SNR_{dB}$  pari a  $10_{dB}$ . Si può osservare come la tecnica TSVD consenta di effettuare una stima anche in corrispondenza delle sottoportanti non modulate. Il  $CN_{finale}$  è stato scelto per garantire un buon compromesso tra la stima ai bordi e

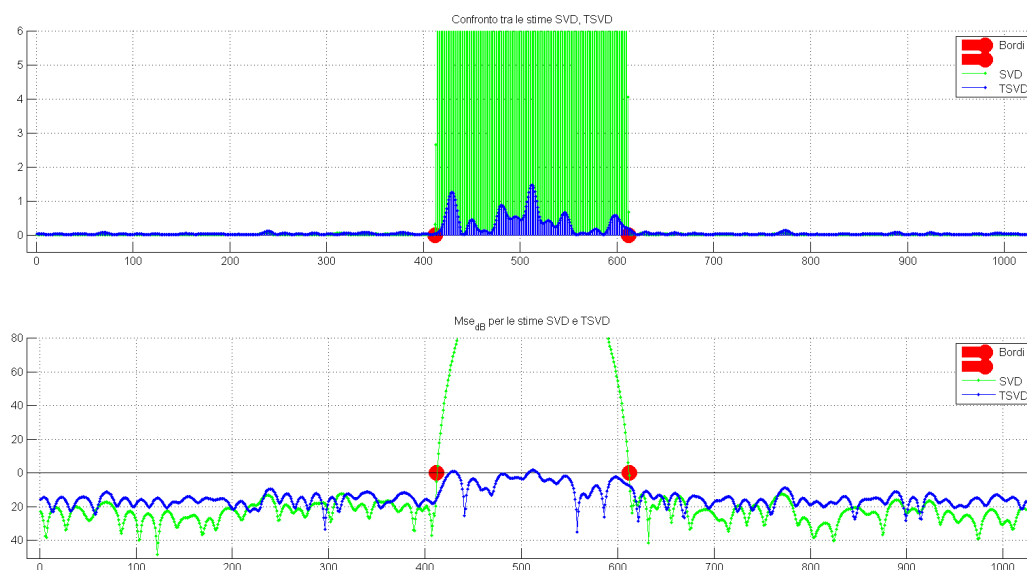


Figura 3.5: Andamento del  $MSE(K)$  al variare di  $k$ ,  $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . In verde l'andamento di  $MSE_{SVD}$ . La stima SVD consente migliori prestazioni al di fuori dell'insieme delle portanti soppresse. La stima TSVD consente di mantenere l'errore a valori quasi sempre accettabili in tale range, garantendo comunque prestazioni simili all'algoritmo LS-FR a singolo CN.

la stima a centro banda. In figura 3.5 vengono proposti sullo stesso grafico gli andamenti dei  $MSE(k)$  per le stime  $SVD$  e  $TSVD$ . Si osserva come le due stime pur avendo un comportamento molto simile nell'insieme delle portanti attiva  $N_{sa}$  siano estremamente diverse a centro banda. La stima  $TSVD$  garantisce un errore ( $MSE_{dB}$  assoluto, vedi relazione 1.13) sempre sotto i  $3_{dB}$  a centro banda. Nell'insieme delle portanti attive ( $C_{sa}$ ) il valore di errore assoluto si mantiene sempre sotto i  $-5_{dB}$ , con andamento medio sotto i  $-10_{dB}$  (vedi anche tab. 3.1).

A conclusione del capitolo verranno presentati i risultati ottenuti dalle stime del paragrafo 3.2. Verranno proposti solo i grafici dell'errore  $MSE(k)$ . Vale la pena notare come entrambi mantengano il valore dell'errore assoluto ( $MSE_{dB}$ ) sotto i  $2_{dB}$ . Si può inoltre osservare come le ottime prestazioni, già osservate e discusse nel capitolo 2, della stima  $SVD$  vengano preservate.

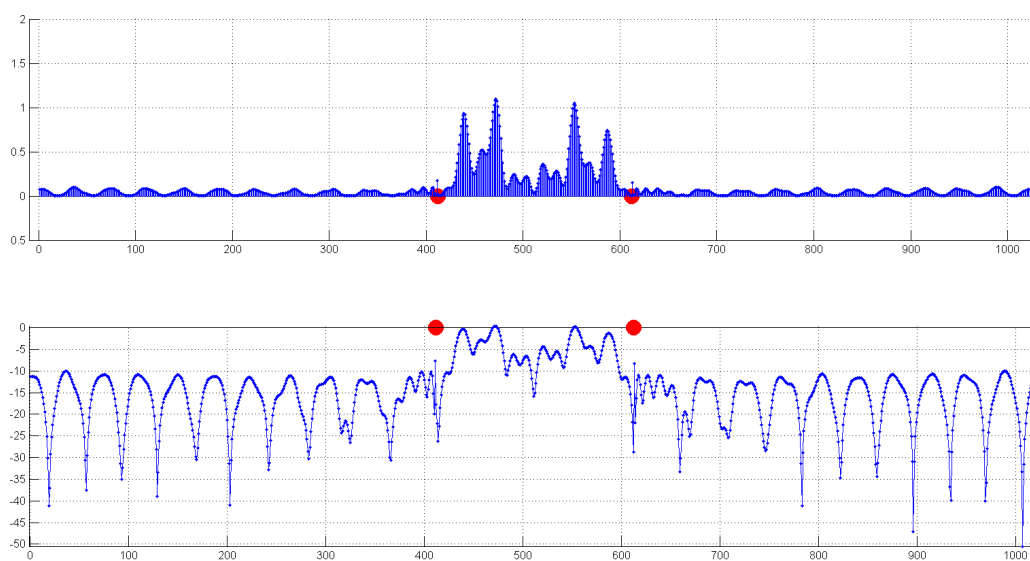


Figura 3.6: *Stima LS-FR con doppio CN. Le due diverse stime vengono utilizzate per la ricostruzione nelle due parti del canale*

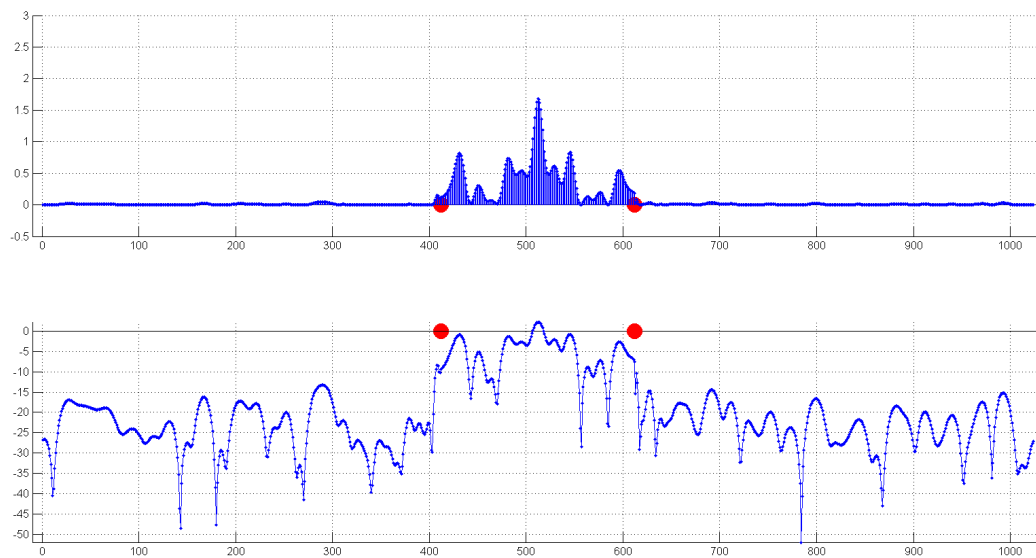


Figura 3.7: *Combinazione dei metodi SVD e TSVD per la completa ricostruzione del canale (in frequenza).*

# Capitolo 4

## Effetti indesiderati

### 4.1 Smoothing filter: utilizzo e conseguenza

Si è finora supposto che la durata della risposta impulsiva, in termini di numero di impulsi (o tappi), sia  $CP = 72$ . Di seguito si cercherà di dare una giustificazione di tale scelta. Nel modello trattato l'ultimo tappo si trova in corrispondenza dell'indice  $n = 71$  tuttavia la durata del canale (i cui parametri stessi sono tempo varianti) potrebbe essere diversa da 72 (il valore del prefisso ciclico). Di seguito verrà dimostrato come l'utilizzo della semplificazione  $\dim(\mathbf{g}) = CP$  sia lecita quando il numero di sottoportanti modulate (in frequenza) coincide con la durata della risposta in frequenza. In pratica la scelta di troncare la durata della risposta impulsiva  $\mathbf{g}$  a  $CP = 72$  è lecita se e solo se non ci sono sottoportanti spente. Nel caso in cui alcune sottoportanti vengano spente la risposta in frequenza ricavata come trasformata di Fourier di  $\mathbf{g}$  sarà in parte degradata. Tale degradazione che discende dalla perdita di potenza dovuta all'utilizzo dello smoothing filter (il filtro che elimina ogni componente di  $g(n)$  dopo l'indice  $CP = 72$ ) è tanto maggiore ai bordi. Tale degradazione prende il nome di effetto-bordo (o border effect). Quanto appena esposto verrà di seguito dimostrato attraverso l'utilizzo della DFT (e quindi della IDFT). Dato il canale  $g(n)$  di durata  $L_h$

la sua trasformata discreta di Fourier viene definita come:

$$G(k) = \sum_{n=0}^{L_h-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (4.1)$$

La ricostruzione di  $g(n)$  a partire dalla sua trasformata di Fourier si ricava invece dalla

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (4.2)$$

Si supponga adesso che la risposta in frequenza sia centrata attorno all'origine (banda base) da  $-\frac{N}{2}$  ad  $\frac{N}{2} - 1$ . Si supponga inoltre che solo  $M$  su  $N$  portanti siano modulate. Le sottoportanti non modulate sono inserite simmetricamente alle estremità (bordi) del canale. Dalla conoscenza della stima LS ( $G_{LS}(k)$ ) possiamo ricostruire il canale  $g(n)$  (o una sua stima) attraverso la seguente relazione (IDFT):

$$g_{LS}^{(IDFT)}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{N-M}{2}}^{\frac{N+M}{2}} G_{LS_k} e^{j \frac{2\pi nk}{N}} = g^{(IDFT)}(n) + \xi^{(IDFT)}(n) \quad (4.3)$$

Nell'ultimo passaggio si è divisa la stima in due componenti, una di segnale (primo addendo) l'altra di rumore (secondo addendo) secondo quanto visto nel capitolo 1. Il primo termine può ulteriormente essere scisso:

$$g^{(IDFT)}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{N-M}{2}}^{\frac{N+M}{2}-1} \left( \sum_{l=0}^{L_h-1} g_l e^{-j \frac{2\pi k \tau_l}{N}} \right) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{L_h-1} g_l \sum_{k=\frac{N-M}{2}}^{\frac{N+M}{2}-1} e^{-j \frac{2\pi k}{N} (\tau_l - n)} \quad (4.4)$$

Nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la trasformata di Fourier della seguente relazione:

$$g(n) = \sum_{l=0}^{L_h-1} g_l \cdot \delta(n - \tau_l) \quad (4.5)$$

L'ultima sommatoria, quando  $N = M$ , si semplifica in

$$\sum_{k=\frac{N-M}{2}}^{\frac{N+M}{2}-1} e^{-j \frac{2\pi k}{N} (\tau_l - n)} = \begin{cases} M & \text{se } n = \tau_l \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \quad (4.6)$$



Quindi dalla precedente e dalla 4.4 si conclude che:

$$g^{(IDFT)}(n) = 0 \quad \text{se } n = L_h \dots N - 1 \quad (4.7)$$

Quindi scegliendo CP tale che  $CP > L_h$  non si ha perdita di potenza applicando lo smooth-filter a  $g(n)$ . Se invece  $M < N$  allora 4.6 si modifica in:

$$\sum_{k=\frac{N-M}{2}}^{\frac{N+M}{2}-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}(\tau_l-n)} = \begin{cases} M & \text{se } n = \tau_l \\ \frac{1-e^{-j2\pi\frac{M}{N}(\tau_l-n)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(\tau_l-n)}} & \text{se } n \neq \tau_l \end{cases} \quad (4.8)$$

La precedente inserita nella 4.4 restituisce una funzione non nulla per ogni indice  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, M - 1$ ). Stavolta è chiaro come tagliando la risposta impulsiva a qualsiasi indice inferiore a  $M - 1$  si ha una perdita di potenza che si ripercuote in una degradazione sulla risposta in frequenza se questa è ottenuta come DFT da  $g(n)$ . Tale effetto [Morelli 2001] è tanto più pronunciato quanto più piccolo è il rapporto  $\frac{M}{N}$  e si manifesta principalmente ai bordi della risposta in frequenza, da qui la denominazione di effetto bordo (border effect).

## 4.2 Andamento del condition Number

Nella costruzione delle stime si è fatto largo uso del condition number (o CN). Tale parametro è dato dal rapporto tra il più grande ed il più piccolo dei valori singolari (singular values) di una matrice. Si è già discusso nel capitolo 2 e 3 di cosa siano esattamente i valori singolari. Il CN riveste un ruolo cruciale in molti degli algoritmi analizzati. La sua criticità è insita nella tecnica numerica usata. Le fortissime degenerazioni di alcune stime sono infatti dovute a problemi di natura numerica o per meglio dire sono legati alla precisione numerica scelta. Quando infatti il numero delle cifre significative del CN superano quelle della precisione numerica scelta il calcolo stesso del CN, così come delle grandezze ad esso connesse, sono del tutto prive di significato fisico. A titolo d'esempio sono di seguito riportati due grafici in cui si può osservare l'andamento del CN per calcoli in doppia ed in

singola precisione al variare delle sottoprtanti attive  $M$ , in scala logaritmica sulle ordinate. Si tenga presente che il singola precisione la mantissa è di 23 bit, all'esponente sono invece riservati 8 bit (uno per il segno). In doppia precisione invece si hanno 11 bit riservati all'esponente mentre per la mantissa vengono utilizzati ben 52 bit. Quindi in singola precisione si avranno a disposizione

$$\log_{10}(2^{24}) \approx 7 \text{ cifre decimali}$$

, mentre in doppia precisione:

$$53 \cdot \log_{10}(2) \approx 16 \text{ cifre decimali}$$

Quando il numero delle sottoprtanti non modulate è alto, anche il valore

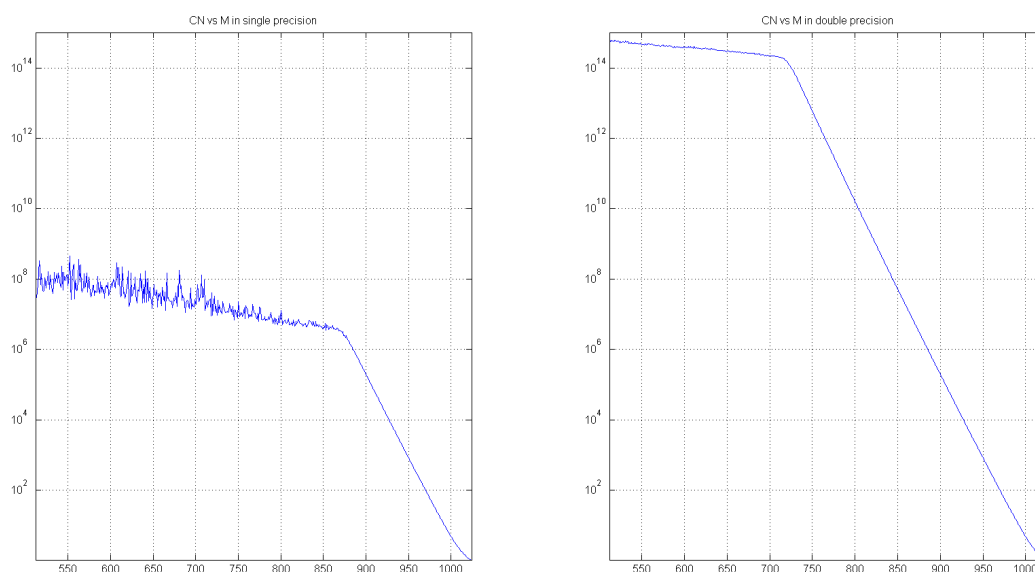


Figura 4.1: Andamento del CN nella matrice  $F$  dei capitoli 2,3,4 al variare del numero delle portanti modulate. Si osserva nettamente come il livello di precisione scelta influenzi in modo pesante l'adamento del CN

del CN cresce fino a toccare valori superiori a  $10^{15}$ . Per  $M = 600$  ed  $N = 1024$  il CN arriva ad circa  $5.7 \cdot 10^{14}$ . Da grafici come il precedente è possibile capire a grandi linee l'andamento del CN al variare delle portanti modulate  $M$ . La scelta del CN ottimo per massimizzare le prestazioni per ciascuna

stima, dipende da numerosi parametri quali: tipo di canale(e.g. risposta impulsiva reale o complessa), lunghezza della risposta in frequenza, numero di portanti modulate, lunghezza della risposta impulsiva, livello di rumore etc. Per quanto le tecniche si siano rivelate efficaci nello stimare il canale in questione, rimane aperto il problema della determinazione del CN. Di questo e di altri problemi aperti, parlerò nella parte conclusiva di questo scritto.



# Capitolo 5

## Nuovo algoritmo a banda ridotta (RED)

Nel primo paragrafo di questo capitolo verrà presentata la descrizione formale del nuovo algoritmo proposto a banda ridotta (in seguito indicato per brevità con RED). L'implementazione in MatLab<sup>®</sup> non verrà analizzata poichè del tutto simile alla procedura LS-FR, una volta adeguate le grandezze da utilizzare. Nella seconda parte di questo capitolo verranno esposti i risultati, completando così la tabella 2.1.

### 5.1 Descrizione formale

Alcune delle tecniche discusse nei capitoli precedenti (LS-FR, SVD) risentono del fatto che la stima della risposta in frequenza presenta troppi gradi di libertà. Poichè nella banda di transizione  $\mathbf{G}$  è nulla il sistema  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$  avendo  $(N - N_{sa})$  incognite libere, presenta  $(N - N_{sa})^\infty$  soluzioni. Se il numero di incognite libere potesse essere ridotto, il problema della minimizzazione della norma euclidea:

$$\hat{\mathbf{g}} = \underset{\mathbf{f}_g}{\operatorname{argmin}} \left| \mathbf{G}_{ls} - \mathbf{F}'_N \cdot \mathbf{f}_g \right| \quad (5.1)$$

2.4, già discusso nel paragrafo 2.1 potrebbe presentare una soluzione che garantisca una miglior risposta in prossimità dei bordi. Da questo tipo di

ragionamento nasce il nuovo algoritmo a banda ridotta (o RED). In pratica si diminuisce l'ampiezza della banda di transizione passando da  $N_{sa}$  a  $N_{sa} - N_{red}$ , dove  $N_{red}$  è un intero compreso tra 0 e  $N - N_{sa}$ :

$$N_{red} \in \mathbb{N} \quad | \quad 0 \leq N_{red} \leq N - N_{sa}$$

Il nuovo supporto della risposta in frequenza avrà quindi estensione:

$$M = N - N_{red} \quad (5.2)$$

e la nuova banda di transizione sarà data da:

$$N_{sa-RED} = (N - N_{sa}) - N_{red}$$

La dimensione della risposta in frequenza è adesso  $M$ , quindi anche la matrice di Fourier avrà dimensione  $M \times M$ . Ciò implica che anche la lunghezza della risposta impulsiva sarà diversa da quella originaria. Il periodo di campionamento è passato da  $\frac{1}{N}$  a  $\frac{1}{M}$ <sup>1</sup>. Nei capitoli precedenti si è usata come lunghezza del *CIR* il valore del prefisso ciclico. Adesso la nuova lunghezza della risposta impulsiva sarà data da:

$$L_h^{(red)} = \left[ CP \cdot \frac{M}{N} \right] \quad (5.3)$$

La tecnica *RED* prevede adesso l'utilizzo della stessa procedura vista per stima LS-FR per generare, partendo dalla matrice  $\mathbf{F}'_N$ , una matrice a rango pieno. Detta  $\bar{\mathbf{F}}_M$  tale matrice (per maggior chiarezza si riveda la sezione 2.3) si ricava adesso il seguente vettore:

$$\mathbf{g}_{LS-FR}^{(red)} = \left( \left( \bar{\mathbf{F}}_M^H \bar{\mathbf{F}}_M \right)^{-1} \bar{\mathbf{F}}_M^H \cdot \mathbf{G}_{LS}^{pre-red} \right)_{L_h^{red}} \quad (5.4)$$

dove  $\mathbf{G}_{LS}^{pre-red}$  è il vettore ricavato da  $\mathbf{G}_{LS}$  considerando solo gli indici appartenenti a  $C_{sa}$  (l'insieme delle portanti attive). La relazione finale che porta

---

<sup>1</sup>si è volutamente omessa la distanza  $F_s$  tra due campioni consecutivi nel dominio della frequenza, ciò è legittimato dalla normalizzazione della risposta impulsiva rispetto a  $T_s = \frac{1}{F_s}$  effettuata nel paragrafo 1.1 (vedi relazione 1.10)

alla ricostruzione RED è data da:

$$\mathbf{G}_{LS-FR}^{(red)} = \left( \mathbf{F}_M \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{LS-FR}^{(red)} \\ \mathbf{0}_{M-\text{rank}(\bar{\mathbf{F}}_M)} \end{bmatrix} \right)_{C_{sa}} \quad (5.5)$$

Si potrebbe adesso ritornare nel dominio del tempo discreto ed effettuare l'operazione di Pruning per poi ritornare nuovamente in frequenza. Per semplicità questa strada non sarà percorsa in questa sezione e le valutazioni nella parte conclusiva di questo capitolo faranno riferimento alla ricostruzione 5.5.

## 5.2 Algoritmo RED senza procedura iterativa LS-FR

Nel paragrafo precedente si è esposta la procedura RED. Tale procedura faceva uso di una riduzione della banda di transizione in frequenza, un conseguente adeguamento del dominio del DITR e infine prevedeva l'utilizzo dell'algoritmo LS-FR per creare la matrice  $\bar{\mathbf{F}}_M$  a partire da  $\mathbf{F}'_M$ . Tuttavia si potrebbe evitare questo ultimo passaggio ed utilizzare nella 5.4 direttamente  $\mathbf{F}'_M$ , supponendo che tale matrice dopo la riduzione della banda di transizione sia già a rango pieno. Si tenga presente che, in linea con la notazione impiegata nei capitoli precedenti, la matrice  $\mathbf{F}'_M$  è la matrice ricavata da  $\mathbf{F}_M$  (matrice di Fourier di dimensione  $M \times M$ ) eliminando le colonne il cui indice non appartiene all'insieme  $C_{sa}$ ; il numero di righe di  $\mathbf{F}'_M$  è dato da  $L_h^{(red)}$ , relazione 5.3.

I risultati ottenuti da tale tecnica, al variare delle dimensioni della banda di transizione  $N_{red}$ , saranno esposti nell'ultimo paragrafo del presente capitolo. In questa sezione verrà posta l'attenzione all'andamento del CN al variare di  $N_{red}$  sottolineando come la tecnica RED permetta di ottenere risultati simili o addirittura migliori della stima LS-FR senza impiegare nessun vincolo sul valore del CN. La figura 5.1 mostra l'andamento del CN di  $\mathbf{F}'_N$  al variare di  $N_{red}$ . Dal grafico si osserva come una riduzione di soli 50 campioni sulla banda di transizione consenta di abbassare drasticamente il valore CN. La

stima RED può quindi essere impiegata senza l'ausilio della procedura LS-FR vista nel frammento di codice 2.1. Evitare l'utilizzo di tale procedura consente di abbassare notevolmente la complessità computazionale dell'algoritmo. I risultati mostrati nel paragrafo successivo riveleranno una procedura che pur presentando una complessità computazionale ben al di sotto della tecnica LS-FR permetta una stima più accurata.

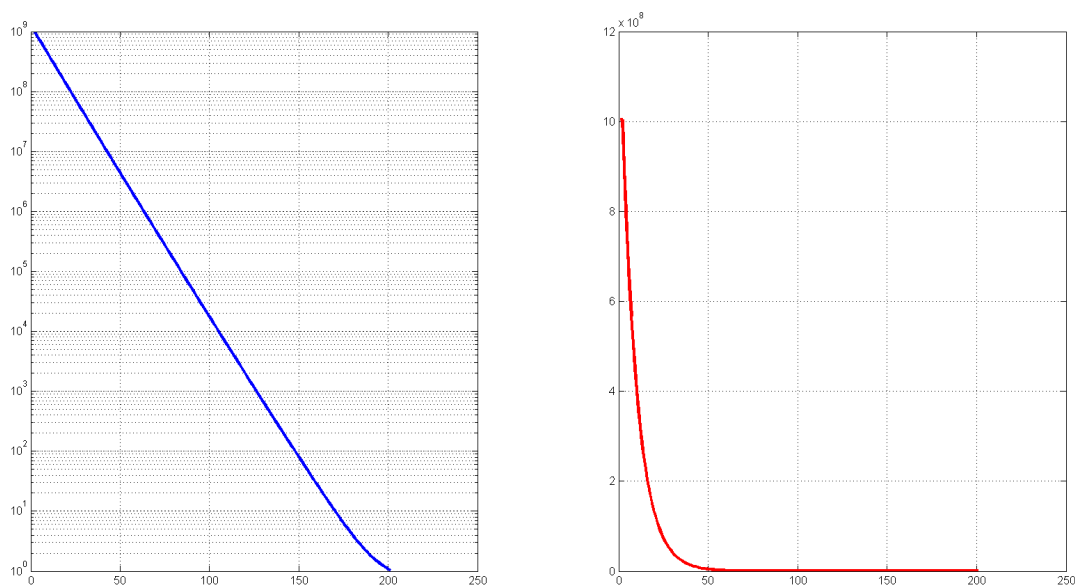


Figura 5.1: In figura l'andamento del CN di  $\mathbf{F}'_N$  al variare di  $N_{red}$ . A sinistra scala logaritmica sulle ordinate e lineare sulle ascisse, a destra scala lineare su entrambi gli assi. Il valore del CN decresce rapidamente al variare delle dimensioni della banda di transizione

### 5.3 Risultati Ottenuti

Di seguito viene subito riportata la tabella 2.1 contenente tutte le stime trattate in questo scritto. La stima RED garantisce buoni risultati quando il SNR è basso. Il risultato ottenuto dalla stima RED, implementata con  $N_{red} = 50$  e senza l'ausilio dell'iterazione contenuta nella procedura LS-FR, con SNR  $\Lambda_{dB} = 5_{dB}$  sono comparabili a quelli ottenuti con la stima SVD. Per



Nome stima	$\Lambda_{dB} = 5_{dB}$	$\Lambda_{dB} = 10_{dB}$	$\Lambda_{dB} = 20_{dB}$
<b>LS</b>	4.45	9.54	19.69
<b>SVD</b>	15.95	21.49	31.12
<b>LS-FR</b>	13.47	14.55	15.06
<b>TSVD</b>	14.35	16.05	17.71
<b>RED (con LS-FR)</b>	14.77	16.45	17.01
<b>RED</b> ( $N_{red} = 1$ )	14.23	17.05	17.69
<b>RED</b> ( $N_{red} = 50$ )	15.40	18.44	19.68
<b>RED</b> ( $N_{red} = 198$ )	14.69	16.77	17.55

Tabella 5.1:  $\eta_{dB}$  per le tre stime: LS, SVD, LS-FR, TSVD, RED.  $\Lambda_{dB}$  indica il valore di SNR iniziale.

valori di  $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$  presenta ancora margini di guadagno superiori rispetto alle stime TSVD e LS-FR<sup>2</sup>. Tuttavia le migliori prestazioni vengono offerte dalla stima SVD per ogni valore di SNR.

La ricostruzione della risposta in frequenza con la tecnica RED ottima (7<sup>a</sup> riga della tabella 5.1) nell'insieme delle portanti attive  $C_{sa}$  è riportata in figura 5.2 L'andamento del  $MSE$  (lineare e in scala logaritmica sulle ordinate) è riportato in figura 5.3 In conclusione si può notare come l'algoritmo RED con una semplice riduzione della banda di transizione permetta una miglior ricostruzione della risposta in frequenza con un costo computazionale nettamente inferiore rispetto alla stima LS-FR vista nel capitolo 2. In tale approccio mancano infatti le ricorsioni effettuate dal ciclo della procedura 2.1 ciascuna contenente (operazioni più significative dal punto di vista della complessità computazionale): valutazione del CN e misura del rango. Inoltre tale approccio mostra una strada alternativa: l'algoritmo RED, riducendo la

<sup>2</sup>Le prestazioni dell'algoritmo LS-FR e TSVD potrebbero essere marginalmente migliorate cambiando il valore del  $CN_{finale}$  in funzione del valore di SNR. Sono stati comunque inseriti i valori di stima che garantiscono un buon risultato globale ponendo maggiormente l'attenzione sulle stime per  $\Lambda_{dB} = 5, 10_{dB}$

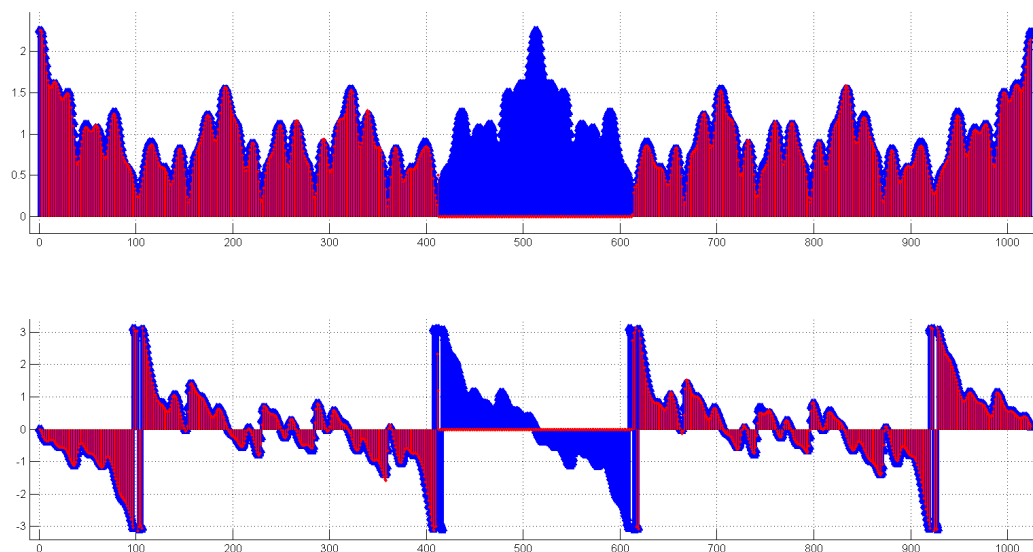


Figura 5.2: Ricostruzione con algoritmo RED senza la procedura LS-FR e con  $N_{red} = 50$ ;  $SNR \Lambda_{dB} = 5_{dB}$ .

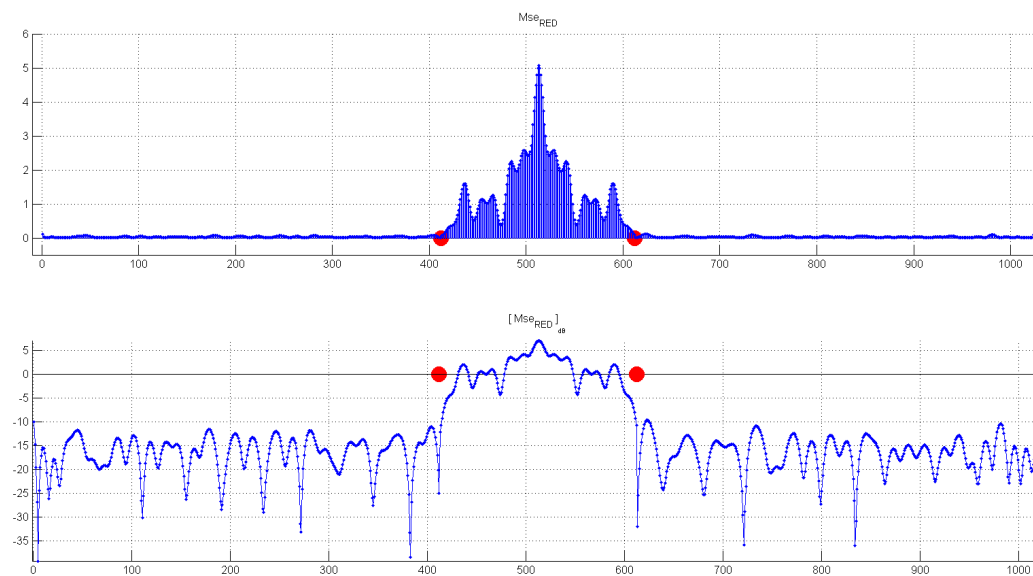


Figura 5.3: Errore nella stima RED

banda di transizione consente già una limitazione del CN. Quindi invece che effettuare stime valutando volta per volta il valore del CN si potrebbe variare il valore di  $N_{red}$ .

Nella figura 5.4 sono riportati gli andamenti delle ricostruzioni effettuate con i diversi valori di  $N_{red}$ . Nella figura 5.5 è invece riportato l'andamento del MSE nei diversi casi proposti. Il miglioramento ottenuto eliminando la procedura iterativa LS-FR è cospicuo e rilevabile anche a colpo d'occhio. Si guadagnano  $2_{dB}$  medi sulla precedente implementazione RED/LS-FR. Nel successivo capitolo tale stima verrà confrontata con le altre grazie ad una analisi statistica su 100000 realizzazioni. Sebbene la miglior ricostruzione sia sempre quella effettuata con la stima SVD, la stima RED/ $N_{red} = 50$  presenta interessanti caratteristiche se non altro per la relativa semplicità di implementazione.

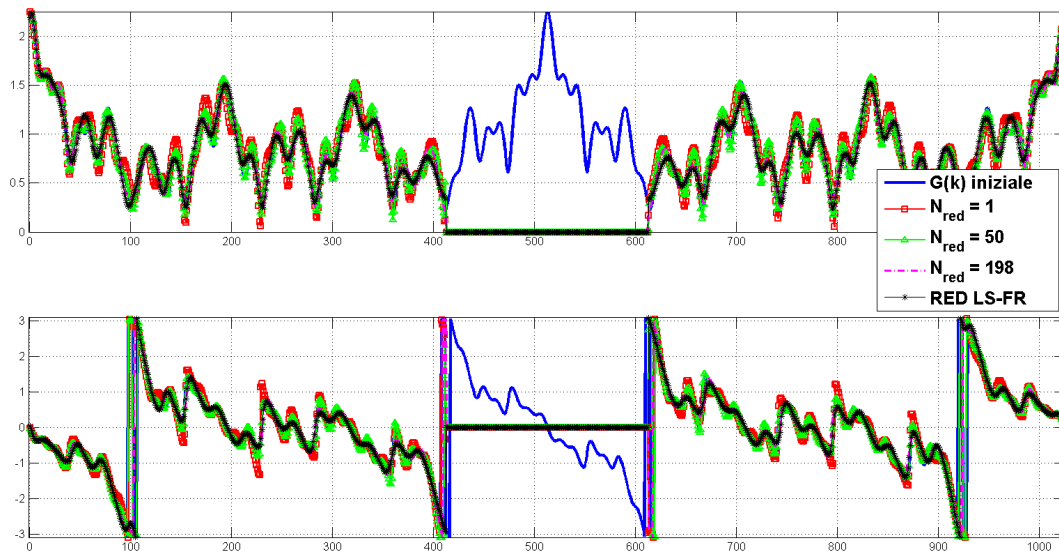


Figura 5.4: I diversi andamenti ricostruiti al variare di  $N_{red}$ . La figura è molto confusa tuttavia si può notare come la linea verde, RED con  $N_{red} = 50$ , segue più fedelmente quella blu che rappresenta l'andamento originale della risposta in frequenza.  $SNR \Lambda_{dB} = 10_{dB}$ .

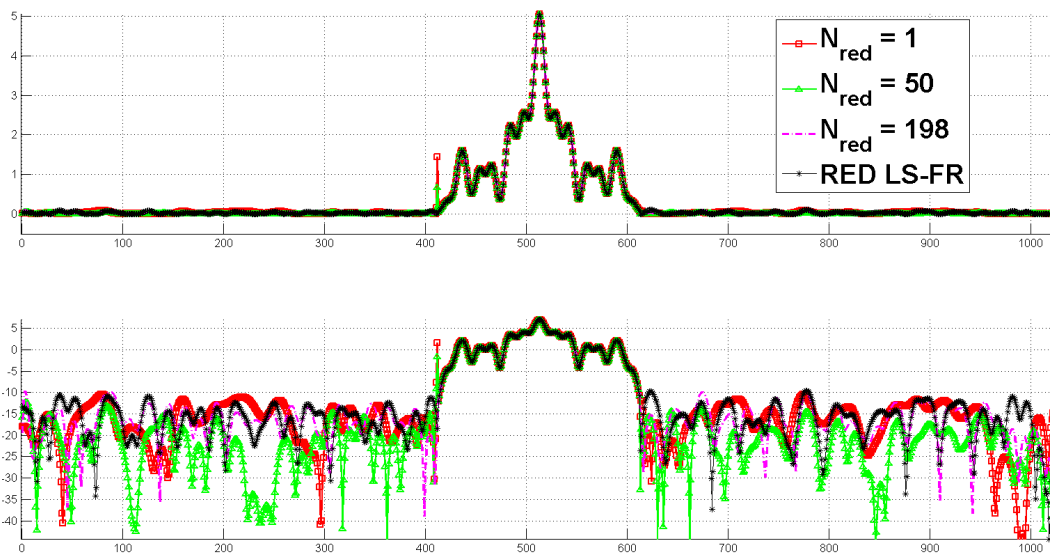


Figura 5.5: Andamento del MSE nei diversi casi proposti. La ricostruzione  $RED/N_{red} = 50$  mostra un MSE più basso rispetto alle altre ricostruzioni RED.  $SNR \Lambda_{dB} = 10_{dB}$ .

# Capitolo 6

## Le stime a confronto

In questa sezione saranno presentati i risultati della analisi numerica effettuata. I grafici dei capitoli precedenti mostravano singole realizzazioni come nel caso di ricostruzioni o medie su un numero ristretto di realizzazioni. In questo capitolo verrà presentato un grafico che è frutto di una analisi statistica effettuata su 100000 realizzazioni del canale in frequenza corrotto da rumore.

### 6.1 Confronto tra le varie tecniche

Ancora una volta vale la pena puntualizzare come l'andamento di alcune stime sia fortemente influenzato dalla scelta del  $CN$ . Nella analisi presentata in questo capitolo si sono scelti valori del  $CN$  che assicuravano buoni risultati per le seguenti condizioni:

- Numero totale di portanti  $N = 1024$
- Numero di portanti spente 200
- $\text{SNR} (\Lambda)_{dB} = 10_{dB}$
- Tutte le portanti spente appartengono all'intervallo (estremi inclusi)  $(k1, k2)$ ; con  $k1 = 412$  e  $k2 = 612$

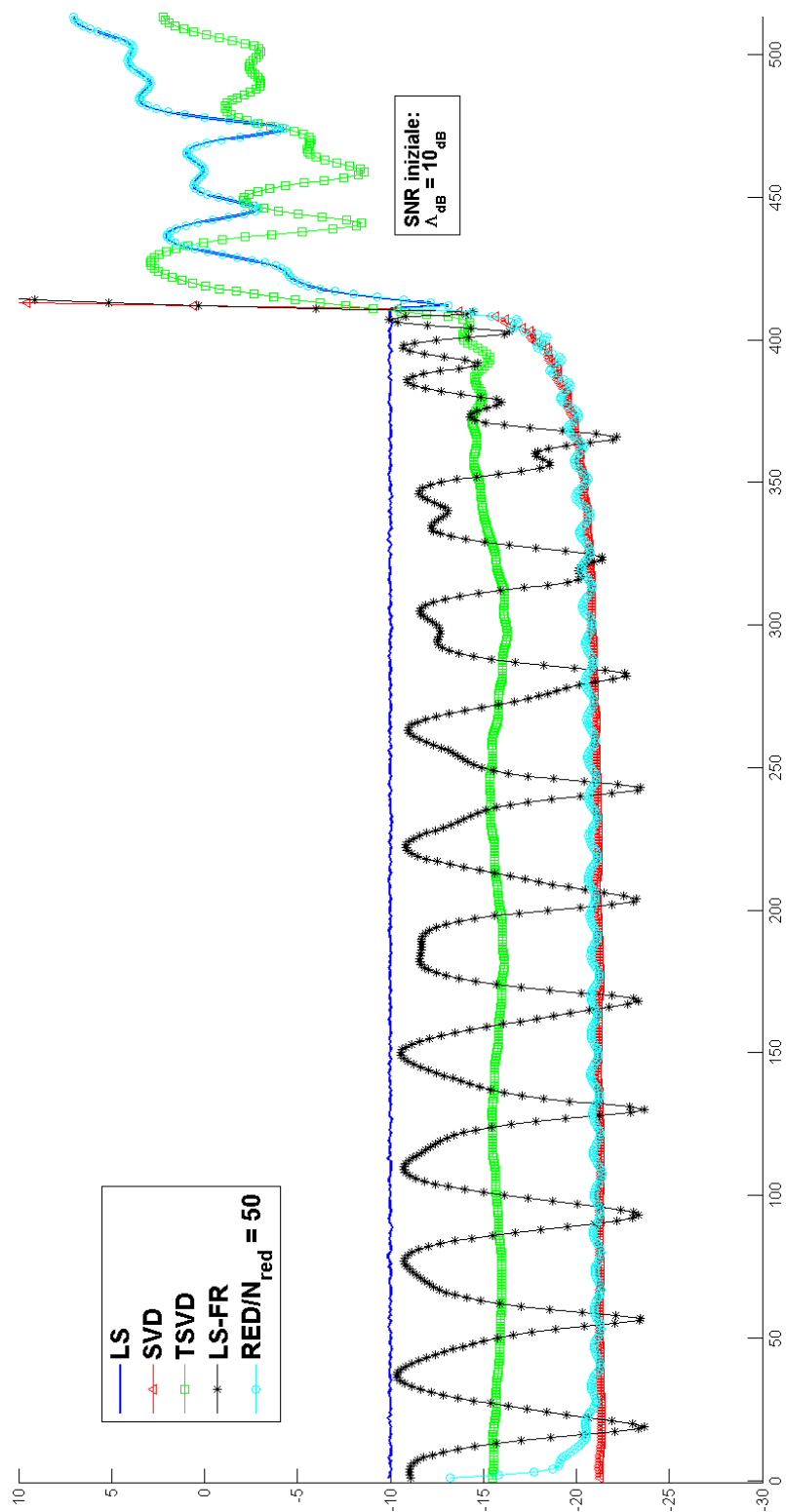


Figura 6.1: Visualizzazione del MSE per ciascuna stima. Per maggiore visibilità le stime sono state graficate fino a centro banda ( $N = 516$ ). La linea grigia mostra la soglia  $0_{dB}$ .

La figura mostra chiaramente come la stima che più delle altre (in questo specifico canale e con le alterazioni più volte citate) riesce a ricostruire l'andamento di  $G_{3GPP/LTE}(k)$  all'interno dell'insieme  $C_{sa}$  sia la stima SVD. Si può inoltre ulteriormente verificare come la stima RED riesca ad incrementare le prestazioni della stima LS-FR dalla quale trae spunto. Le stime LS-FR e RED presentano un andamento oscillante caratteristico delle tecniche che fanno uso di una matrice a rango pieno (ridotta attraverso una condizione imposta sul  $CN$ ) per effettuare la ricostruzione (5.4 e 2.12). La stima TSVD è l'unica che garantisce buoni valori di stima anche al di fuori di  $C_{sa}$ . Tuttavia per poter confrontare tale stime con le altre si è scelto un valore del  $CN$  che garantisca una buona stima all'interno dell'insieme delle portanti attive  $C_{sa}$ . Infine la stima LS, il punto di partenza per tutte le altre stime, presenta valori prossimi al SNR.

## 6.2 Algoritmo SVD in singola precisione

L'algoritmo SVD si è rivelato certamente l'algoritmo con le migliori prestazioni. Inoltre essendo la decomposizione ai valori singolari eseguita sulla matrice  $\mathbf{F}'_N$  le cui dimensioni dipendono dal prefisso ciclico, dalla dimensione  $N_{sa}$  dell'insieme  $C_{sa}$ , il complesso calcolo della scomposizione può essere fatto off-line ed il risultato memorizzato una volta per tutte su di una memoria. Con questo stratagemma si possono abbattere i costi computazionali di tale approccio. Rimane ancora aperto un ultimo interrogativo. Tutte le stime sono state eseguite utilizzando simulazioni numeriche in doppia precisione. Ci si potrebbe chiedere cosa accada alla stima SVD quando tale tecnica utilizza valori in singola precisione. Eventualmente la scomposizione può essere fatta off-line con la precisione numerica adeguata (in questo caso doppia) e successivamente, in fase di stima, verranno impiegati valori memorizzati in singola precisione troncando i precedenti. Tale approccio consentirebbe un notevole risparmio sul costo delle memorie e dei processori che in una eventuale rea-

lizzazione pratica troverebbero impiego. I risultati sono molto positivi. La stima SVD computata in doppia precisione e utilizzata in singola precisione presenta le stesse prestazioni della stima vista nel capitolo 2. La figura 6.2 mostra un confronto tra MSE della stima SVD del capitolo 2 e quello dello stima appena introdotta. Si può notare come le due stime presentino gli stessi andamenti. Non rimane altro che verificare l'effettiva complessità computazionale delle stime SVD e  $\text{RED}/N_{red} = 50$  per verificarne l'efficienza dal punto di vista pratico.

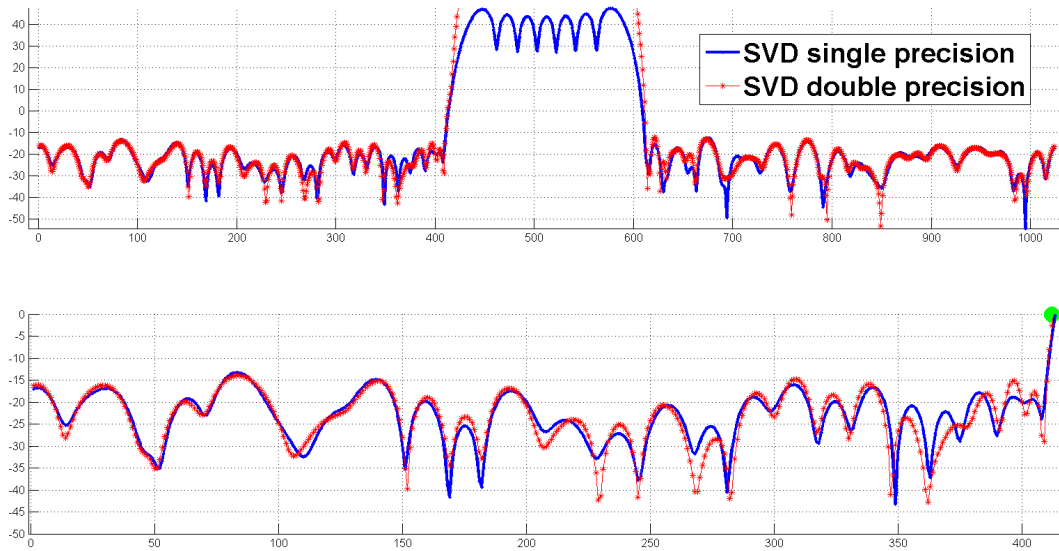


Figura 6.2: *Confronto fra la stima SVD in doppia precisione e la stima SVD computata in doppia precisione ed utilizzata nella versione troncata in singola precisione. SNR:  $\Lambda_{dB} = 10_{dB}$ . In basso dettaglio per gli indici  $k \in [1, k_1]$ . Il pallino verde mostra l'inizio della banda di transizione.*

### 6.3 Complessità computazionale delle stime SVD e $\text{RED}/N_{red} = 50$

Verranno di seguito analizzate le complessità computazionali degli algoritmi SVD e  $\text{RED}/N_{red} = 50$ . La complessità computazionale dell'algoritmo



### 6.3 Complessità computazionale delle stime SVD e RED/ $N_{red} = 50$ 61

SVD può essere vista come il limite inferiore della complessità computazionale dell'algoritmo TSVD. Stesso discorso per le stime LS-FR e RED/ $N_{red} = 50$ , il RED/ $N_{red} = 50$  presenta sempre una complessità computazionale minore o uguale a quella dell'algoritmo LS-FR. Per le ragioni appena esposte saranno presentate le complessità computazionali dei soli due algoritmi: SVD e RED/ $N_{red} = 50$ .

Per stimare le complessità di cui sopra verrà utilizzato come parametro il numero delle moltiplicazioni eseguite da ogni stima. Il numero di somme algebriche verrà ignorato poichè, a parità di bit impiegati per le variabili, il tempo di esecuzione di tale operazione è molto minore rispetto a quella del prodotto. Inoltre dal punto di vista dell'architettura di un processore, una somma (anche con numeri in virgola mobile) si esegue con una architettura assai più semplice rispetto ad una moltiplicazione [6] (Patterson, 2005).

Con tali premesse e tralasciando le operazioni a comune tra le due stime (creazione e troncamento della matrice  $\mathbf{F}_N$ ) la complessità computazionale dell'algoritmo SVD è data da:

$$N \log_2 N + CP \cdot N_{sa} \quad \text{moltiplicazioni} \rightarrow O(N \log_2 N) \quad (6.1)$$

dove la notazione  $O(N \log_2 N)$  si riferisce alla complessità asintotica al crescere del fattore critico  $N$ .

Con le stesse premesse viste sopra la complessità computazionale dell'algoritmo RED/ $N_{red} = 50$  è data da:

$$M^2 \left( 1 + \frac{\log_2 M}{M} \right) + L_{h-RED}^2 \quad \text{moltiplicazioni} \rightarrow O(M^2) \quad (6.2)$$

dove  $L_{h-RED}$  è dato dalla relazione 5.3. Il valore  $M$  che appare nella relazione precedente è dato da:  $M = N - N_{red}$  (vedi cap 5). Il numero di moltiplicazioni effettive, nei casi specifici in oggetto, sono:

$$\begin{aligned} SVD : & \quad 69352 \quad \text{moltiplicazioni} \\ \text{RED}/N_{red} = 50 : & \quad 962016 \quad \text{moltiplicazioni} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Le moltiplicazioni effettive (in questa specifica circostanza) dell'algoritmo SVD sono oltre un indice di grandezza inferiori rispetto a quelle dell'algoritmo RED/ $N_{red} = 50$ .

L'algoritmo SVD è quindi l'algoritmo più performante dal punto di vista del SNR finale. Diventa anche il più conveniente dal punto di vista pratico a patto che la scomposizione ai valori singolari sia fatta in modalità off-line una volta per tutte e memorizzata all'interno del circuito che computa la stima.

Si tenga presente che fra le operazioni a comune fra le due stime vi è la procedura LS. Quindi i costi computazionali sopra visti possono essere interpretati come costi addizionali da aggiungere a quelli dell'algoritmo LS (semplicemente  $N - N_{sa}$  divisioni). Si è osservato nel capitolo precedente come il guadagno in termini di SNR finale dell'algoritmo RED per valori iniziali superiori a  $18_{dB}$  sia del tutto irrilevante; infatti con SNR iniziale pari a  $20_{dB}$  la stima RED offre prestazioni inferiori anche rispetto alla semplice procedura LS. Pertanto quanto il valore iniziale di SNR si trova al di sopra di tali valori è conveniente utilizzare la stima SVD se si vuole ottenere un guadagno in termini di SNR finale, altrimenti è consigliabile usare la stima LS.

# Conclusioni

In questo lavoro sono stati analizzati in dettaglio gli algoritmi di stima LS, SVD, LS-FR, TSVD, RED. Sono stati testati ricostruendo la risposta impulsiva del canale 3GPP/LTE in presenza di rumore gaussiano bianco. Si sono analizzate le prestazioni, si sono confrontati i risultati di stima e si sono valutati i costi computazionali.

È emerso con chiarezza che la stima SVD consente di ottenere i migliori risultati in termini di fedeltà di ricostruzione (per ogni valore di SNR utilizzato) e di costo computazionale. Anche quando la decomposizione è stata computata in doppia precisione ed utilizzata in forma troncata in singola precisione tale stima ha mantenuto il primato. Il margine di guadagno sul SNR iniziale è risultato notevole:

- con SNR iniziale  $5_{dB}$  si è arrivati a  $15.95_{dB}$
- da  $10_{dB}$  si è arrivati a  $21.49_{dB}$
- da  $20_{dB}$  si è arrivati a  $31.12_{dB}$

La stima RED presenta prestazioni comparabili solo per bassi valori di SNR iniziale ma con un costo computazionale effettivo ed asintotico maggiore.

In conclusione, secondo questo studio, per la ricostruzione della risposta in frequenza del canale 3GPP/LTE con preambolo noto, spegnimento delle portanti ai bordi e in presenza di rumore gaussiano bianco, è conveniente utilizzare la stima SVD, che consente di ottenere le massime prestazioni al costo computazionale più basso.



# Bibliografia

- [1] Daniel S.Baum And Jan Hansen, Giovanni Del Galdo and Marko Milojevic,Jari Salo, Pekka Kyosti, 2005. *An Interim Channel Model For Beyond-3G Systems: extending the 3gpp spatial channel model (smc)*, Proceedings of VTC, 10.1109/VETECS.2005.1543924, Vol. 5, pp 3132-3136, May 2005.
- [2] Diego Altolini\*, Silvano Pupolin\*, Raffaele Riva†,2012  
\*Department of Information Engineering, University of Padova, via Gradenigo 6/B, 35131 Padova, Italy  
† STMicroelectronics Srl, Via Olivetti 2, 20041 Agrate Brianza, Italy. *Preamble-based Channel Estimation in HomePlug AV Systems*, in Power Line Communications and Its Applications (ISPLC), 2012 16th IEEE International Symposium on. Date of Conference: 27-30 March 2012.
- [3] Ove Edfors, Magnus Sandell, Jan-Jaap van de Beek, Sarah Kate Wilson and Per Ola Borjesson, 1998. *OFDM Channel Estimation by Singular Value Decomposition*, in IEEE transactions on Communications, vol 46 no.7, pp. 931-939, July 1998.
- [4] Moore, E. H. (1920). *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 26, pp 394-395, 1920.
- [5] Moussa Diallo,Maryline H elard, Laurent Cariou and Rodrigue Rabi-neau, 2010 *DFT Based Channel Estimation Methods for MIMO-OFDM*

*Systems*) Orange Labs, 4 rue du Clos Courtel, 35512 Cesson-Sévigné Cedex; INSA IETR, UEB, 20 Avenue des Buttes de Coesmes, CS 70839, 35708 Rennes Cedex 7 France.

- [6] David A. Patterson, John L. Hennessy, 2005 *Computer organization and Design: The Hardware/Software Interface, 3rd Edition* Elsevier. Cap3 e Cap4.

# Ringraziamenti

A completamento di questo lavoro mi sento in dovere di ringraziare il professor Silvano Pupolin per la competenza, la gentile e puntuale disponibilità e per i numerosi consigli.

Vorrei inoltre ringraziare il professor Gianfranco Pierobon, il professor Tomaso Erseghe e il professor Lorenzo Tuccari, per il loro prezioso contributo alla mia formazione.

