Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Algebre esterne e varietà di Grassmann

Relatore Prof. Maurizio Cailotto
Dipartimento di Matematica

Laureando: Margherita Chino
Matricola: 1201760

Anno Accademico 2021/2022

21 Luglio 2022

Indice

Introduzione

In geometria capita spesso di incontrare degli oggetti il cui insieme possiede una struttura geometrica notevole. L'esempio più semplice è l'insieme delle rette del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(C)$: ciascuna retta è identificata da un'equazione lineare con tre coefficienti non tutti nulli, definiti a meno di proporzionalità, dunque ogni retta corrisponde ad un elemento di $(C^3\backslash\{0\})/C^\times$ e quindi l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^2(C)$ ha struttura di piano proiettivo (il piano duale, o piano rigato).
Identificare la struttura geometrica che soggiace a questo tipo di insiemi permette di capire meglio e caratterizzare in modo semplice le proprietà di quegli oggetti. Ora studiare se tre rette del piano proiettivo appartengono allo stesso fascio corrisponde quindi, sfruttando la struttura sopracitata, a verificare che i tre punti corrispondenti nel piano proiettivo rigato siano allineati.

Allo stesso modo potremmo portare l'esempio dell'insieme dei piani dello spazio proiettivo, ma siamo interessanti a portare un esempio più ampio, il primo caso non banale di sottovarietà lineari: le rette dello spazio proiettivo tridimensionale $\mathbb{P}^3(C)$. Studiare la struttura geometrica di questo insieme non è banale, ma può essere fatto con strumenti algebrici semplici. Quello che rende importante questo esempio è l'intuizione che ne emerge per sviluppare una teoria più complessa che generalizza questo concetto ad insiemi di sottospazi di generica dimensione.

Lo scopo di questo lavoro, infatti, è presentare gli strumenti algebrici che permettono di identificare la struttura degli 'insiemi di sottospazi di una fissata dimensione'; questo tipo di insiemi sono le cosiddette Grassmanniane. In questo primo esempio è possibile riconoscere il formalismo, ancora in termini di algebra lineare, che sarà poi generalizzato attraverso l'uso dell'algebra multilineare e dei tensori.
Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(C)$ le rette sono definite da una coppia di punti distinti, non in modo univoco, o da una coppia di equazioni indipendenti, di nuovo, non in modo univoco. Ora presa r una retta in $\mathbb{P}^3(C)$, definita dai punti distinti x e y di coordinate (x_0, x_1, x_2, x_3) e (y_0, y_1, y_2, y_3) rispettivamente, la matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Quindi i suoi minori d'ordine due $p_{i,j} = x_i y_j - x_j y_i$ per $i < j$ compresi tra 0 e 3, sono sei numeri non tutti nulli. Inoltre considerando x' e y', di coordinate (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) e (y'_0, y'_1, y'_2, y'_3) rispettivamente, altri due punti distinti della stessa retta, abbiamo $x' = \alpha x + \beta y$ e $y' = \gamma x + \delta y$,

$$\begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 \\ x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

con $\varrho = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Di conseguenza otteniamo che $p'_{i,j} = \varrho p_{i,j}$ per ogni i e j. In questo modo ogni retta è identificata da un vettore di C^6 a meno di proporzionalità, dunque possiamo identificare $p = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ e $p' = (p'_{01}, p'_{02}, p'_{03}, p'_{12}, p'_{13}, p'_{23})$ come punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5(C)$. Così facendo, ad ogni retta r di $\mathbb{P}^3(C)$ abbiamo associato un ben determinato punto di $\mathbb{P}^5(C)$, le cui coordinate si dicono le coordinate plückeriane di r. Le coordinate plückeriane della retta passante per x e y sono

$$p = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right)$$

(usiamo l'ordine lessicografico sui p_{ij}).
Possiamo allora definire una funzione Φ che va dall'insieme di tutte le rette dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(C)$, che denoteremo con $\mathbb{G}_{3,1}(C)$, in $\mathbb{P}^5(C)$,

$$\Phi : \mathbb{G}_{3,1} \longrightarrow \mathbb{P}^5(K)$$

che associa ad ogni retta r il punto $p = \Phi(r)$ dato dalle sue coordinate plückeriane $p = (p_{ij})$. Questa mappa, detta immersione di Plücker, è iniettiva. Infatti prese $r = x \vee y$ ed $r' = x' \vee y'$ due rette di $\mathbb{P}^3(C)$ con $p = \Phi(r)$ e $p' = \Phi(r')$ le coordinate plückeriane, supponiamo $\Phi(r) = \Phi(r')$, cioè $p = \varrho p'$ per qualche $\varrho \in C$ non nullo. Vogliamo allora vedere che $r = r'$, e per questo basta dimostrare che la matrice d'ordine 4

$$\begin{pmatrix} x & y & x' & y' \end{pmatrix}$$

ha rango 2 , ovvero che tutti i minori d'ordine 3 sono nulli; infatti abbiamo per esempio

$$\det \begin{pmatrix} x_i & y_i & x'_i \\ x_j & y_j & x'_j \\ x_k & y_k & x'_k \end{pmatrix} = x'_i p_{jk} - x'_j p_{ik} + x'_k p_{ij} = \varrho \left(x'_i p'_{jk} - x'_j p'_{ik} + x'_k p'_{ij} \right) = \varrho \det \begin{pmatrix} x'_i & y'_i & x'_i \\ x'_j & y'_j & x'_j \\ x'_k & y'_k & x'_k \end{pmatrix} = 0$$

ed analogamente per tutti gli altri. Ora che abbiamo definito questa immersione e ne abbiamo verificato l'iniettività, osserviamo che per ogni retta r di $\mathbb{P}^3(C)$ le sue coordinate plückeriane p, che sono l'immagine della retta attraverso Φ, soddisfano l'equazione di una ben precisa conica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^5(C)$. Consideriamo la matrice P data da

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ -p_{01} & 0 & p_{12} & p_{13} \\ -p_{02} & -p_{12} & 0 & p_{23} \\ -p_{03} & -p_{13} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice P è degenere, e d'altra parte $\det(P) = (p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12})^2$ (matrice antisimmetrica d'ordine 4), da cui si ricava che $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$, che è

l'equazione della conica $\mathcal{Q}$ che stavamo cercando.
A questo punto si riesce ad intuire la corrispondenza e mostrando che ogni punto di $\mathcal{Q}$ è nell'immagine di Φ abbiamo la biiezione. Sia allora $p = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}) \in \mathcal{Q}$ (punto in $\mathbb{P}^5(C)$ soddisfacente all'equazione $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$); vogliamo trovare una (unica) retta di $\mathbb{P}^3(C)$ le cui coordinate plückeriane siano date da p. Certo non tutte le coordinate di p sono nulle, e per semplicità supponiamo $p_{01} \neq 0$; consideriamo allora i due punti $(p_{01}, 0, -p_{12}, -p_{13})$ e $(0, p_{01}, p_{02}, p_{03})$, che sono certamente distinti, e dunque definiscono una retta r di coordinate plückeriane

$$\left(p_{01}^2, p_{01}p_{02}, p_{01}p_{03}, p_{01}p_{12}, p_{01}p_{13}, p_{02}p_{13} - p_{03}p_{12}\right) = p_{01}\left(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}\right)$$

e dunque $\Phi(r) = p$.

In conclusione abbiamo mostrato che l'immersione di Plücker Φ

$$\mathbb{G}_{3,1}(C) \hookrightarrow \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5(C)$$

definisce una biiezione tra la Grassmanniana $\mathbb{G}_{3,1}$ e i punti della quadrica

$$\mathcal{Q} : p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

detta quadrica di Klein, ove usiamo $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ per le coordinate in $\mathbb{P}^5(C)$.
La quadrica in questione ha matrice

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che è non degenere, quindi di rango 6, e di segnatura (3,3), si tratta pertanto di una quadrica contenente piani (ma è irriducibile, essendo non degenere).
Ora sappiamo che studiare la geometria delle rette dello spazio proiettivo equivale a studiare la geometria delle quadriche di Klein.

In questo elaborato intendiamo generalizzare questo tipo di teoria estendendola ad ogni insieme di sottospazi di $\mathbb{P}^n(C)$ di dimensione fissata k, ovvero alle Grassmanniane $\mathbb{G}_{n,k}$. Il contesto migliore per generalizzare questa teoria è l'algebra esterna poiché il suo prodotto, il prodotto interno, codifica la proprietà di dipendenza lineare e il linguaggio tensoriale ci permetterà di alleggerire la notazione.

Capitolo 1

Algebra Multilineare

Con questo capitolo inizia lo studio degli strumenti algebrici che ci porteranno a costruire l'algebra esterna. Il primo concetto fondamentale è quello di prodotto tensore. Qui lo introdurremo inizialmente in modo "concreto" per gli spazi vettoriali di dimensione finita e successivamente, tramite proprietà universale, per spazi di dimensione arbitraria.

1.1 Prodotto tensore di spazi vettoriali

Notazioni: con $\mathrm{Bil} = 2\text{-}\mathrm{Lin}$ indichiamo funzioni 2-lineari.
1.1 PRODOTTO TENSORE IN DIMENSIONE FINITA:
Siano V e W spazi vettoriali su C di dimensione finita. Il prodotto tensoriale di V e W su C è così definito:

$$V \otimes_C W := \mathrm{Bil}_C(V^* \times W^*, C).$$

Inoltre vale:

$$\mathrm{Bil}_C(V^* \times W^*, C) \cong \mathrm{Bil}(V \times W, C)^*.$$

L'applicazione bilineare

$$\otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes_C W$$

$$(v, w) \mapsto v \otimes w$$

definita da $(v \otimes w)(z^*, h^*) = z^*(v)h^*(w)$ è l'applicazione bilineare canonica del prodotto tensore.
DIMOSTRAZIONE:
Dimostriamo che vale l'isomorfismo $\mathrm{Bil}_C(V^* \times W^*, C) \cong \mathrm{Bil}(V \times W, C)^*$: sia τ l'applicazione bilineare canonica

$$\tau : V^* \times W^* \longrightarrow \mathrm{Bil}(V \times W, C)$$

$$(v^*, w^*) \longmapsto (v^* \times w^*)$$

dove $(v^* \times w^*)(z,h) := v^*(z)w^*(h)$. Ora consideriamo il seguente diagramma di fattorizzazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bil}_C(V \times W, C) & \xrightarrow{\phi} & C \\ \tau \uparrow & \nearrow & \\ V^* \times W^* & & \end{array}$$

ogni elemento ϕ di $\mathrm{Bil}_C(V^* \times W^*, C)$ viene mandato in $\phi \circ \tau$ applicazione bilineare definita da $\phi(v^* \times w^*) \in \mathrm{Bil}(V \times W, C)^*$. Osservando che ogni mappa bilineare è unicamente determinata dai suoi valori su una base quindi ogni elemento di $\mathrm{Bil}_C(V \times W, C)$ è scrivibile come $v^* \times w^*$ per qualche $v^* \in V^*, w^* \in W^*$, abbiamo che τ è suriettiva. Quindi se $\phi(v^* \times w^*) = 0\ \forall\ v^*, w^*$ allora $\phi \equiv 0$, di conseguenza $\phi \circ \tau$ è iniettiva e si tratta di un isomorfismo poiché i due spazi hanno la stessa dimensione.

Osservazioni:

- Se $v_1, \dots, v_n$ è base di V e $w_1, \dots, w_m$ è base di W, allora l'insieme $v_i \otimes w_j$ (con $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$) è base di $V \otimes_C W$; in particolare

  $$\dim_C(V \otimes_C W) = \dim_C(V) \dim_C(W).$$

  Dimostrazione: Siano $v_1^*, \dots, v_n^*$ e $w_1^*, \dots, w_m^*$ le rispettive basi duali di quelle date. Sia $g \in V \otimes_C W = \mathrm{Bil}_C(V^* \times W^*, C)$, sappiamo che g è unicamente determinata dai valori sulla base. Definiamo $\alpha_{i,j} := g(v_i^*, w_j^*)$ e consideriamo $G = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(v_i \otimes w_j)$.
  Ora $G(v_h^*, w_j^*) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(v_i \otimes w_j)(v_h^*, w_j^*) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} v_h^*(v_i) w_j^*(w_j)) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \delta_{h,i} \delta_{kj} = g(v_h, w_k)$. Quindi $G = g$ e questo prova l'asserzione, perché abbiamo visto che g si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_i \otimes v_j$.

- Si vede dalla definizione che $(V \otimes_C W)^* \cong \mathrm{Bil}_C(V \times W, C)$, il duale del prodotto tensore dà le forme bilineari su $V \times W$. L'isomorfismo canonico si ottiene, per composizione con $\otimes$:

  $$\mathrm{Hom}_C(V \otimes_C W, C) \longrightarrow \mathrm{Bil}_C(V \times W, C)$$
  $$\phi \longmapsto \phi \circ \otimes$$

Ora diamo una caratterizzazione del prodotto tensore come spazio vettoriale tramite:

1.2 Proprietà universale del prodotto tensore:
Per ogni C-spazio vettoriale U, l'applicazione canonica

$$\mathrm{Hom}_C(V \otimes_C W, U) \longrightarrow \mathrm{Bil}_C(V \times W, U)$$
$$\phi \longmapsto \phi \circ \otimes$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Questa è una proprietà più forte della precedente in quanto non si riferisce più al duale di $V \otimes_C W$ ma ad un generico $\mathrm{Hom}_C(V \otimes_C W, U)$ e questo ci permetterà di estendere la definizione a spazi vettoriali arbitrari.
Esplicitando il significato: per ogni applicazione bilineare $b : V \times W \to U$ esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \otimes W \to U$ tale che $b = \phi \circ \otimes$. Possiamo rappresentarlo con un diagramma di fattorizzazione di funzioni:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ \forall bil \searrow & & \swarrow \exists! lin \\ & U & \end{array}$$

Inoltre, per ogni altro spazio vettoriale T dotato di una applicazione bilineare $\theta : V \times W \to T$ con la stessa proprietà (cioè la composizione con θ induce un isomorfismo tra $\mathrm{Hom}_C(T, U)$ e $\mathrm{Bil}_C(V \times W)$), esiste un unico isomorfismo $\alpha : V \otimes W \to T$ tale che $\vartheta = \alpha \circ \otimes$.

1.3 PRODOTTO TENSORE DI SPAZI VETTORIALI ARBITRARI:
La proprietà universale caratterizza in modo unico il prodotto tensore come spazio vettoriale e possiamo dare una definizione generale nel caso di spazi vettoriali arbitrari (senza ricorrere alla dualità usata nel caso finito).
Dati V e W due spazi vettoriali su C, definiamo il loro prodotto tensoriale come la coppia (T, θ) dove T è C-spazio vettoriale, $\theta : V \times W \to T$ è applicazione bilineare, se tale coppia dà per ogni spazio vettoriale U su C un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_C(T, U) \longrightarrow \mathrm{Bil}_C(V \times W, U)$$

tramite composizione con θ.
La coppia (T, ϑ) è universale per questa proprietà: se un'altra coppia (T', ϑ') possiede la stessa proprietà allora esiste un unico isomorfismo $\alpha : T \to T'$ tale che $\alpha \circ \vartheta = \vartheta'$. Infatti usando $U = T'$, e scambiando i ruoli di T e T' troviamo subito il morfismo α, e il suo inverso α', visto che le composizioni nei due sensi danno morfismi che devono corrispondere all'identità:

$$\begin{array}{ccccc} T & \xleftarrow{\vartheta} & V \times W & \xrightarrow{\vartheta} & T \\ \alpha' \nwarrow & & \downarrow \vartheta' & & \swarrow \alpha \\ & & T' & & \end{array}$$

COSTRUZIONE UNIVERSALE DEL PRODOTTO TENSORE:
La definizione data sopra è astratta ed è necessario dimostrare l'esistenza della coppia (T, ϑ), evidentemente unica (a meno di unico isomorfismo). La definizione suggerisce questa costruzione: consideriamo $V \times W$, e lo spazio vettoriale avente come base gli elementi di $V \times W$: $C^{(V \times W)}$ (sono tutte le combinazioni lineari finite a coefficienti in C

dei simboli $(v, w)\ldots$). Consideriamo poi il sottospazio vettoriale B di $C^{(V\times W)}$ generato da tutti gli elementi della forma

$$(v+v', w)-(v,w)-(v',w), \quad (v, w+w')-(v,w)-(v,w'),$$

$$(\alpha v, w)-\alpha(v,w), \quad (v, \alpha w)-\alpha(v,w),$$

al variare di $v, v' \in V, w, w' \in W$ e $\alpha \in C$.
Il quoziente $C^{(V\times W)}/B$ è dotato della applicazione canonica, bilineare, data dalla composizione di ι, l'inclusione della base, con π, la proiezione sul quoziente:

$$V \times W \xrightarrow{\iota} C^{(V\times W)} \xrightarrow{\pi} C^{(V\times W)}/B$$

Denotando $\pi \circ \iota(v,w) =: v \otimes w$ l'immagine di ogni coppia nel quoziente, abbiamo:

$$(v+v')\otimes w = (v\otimes w)+(v'\otimes w), \quad v\otimes(w+w') = (v\otimes w)+(v\otimes w'),$$

$$(\alpha v)\otimes w = \alpha(v\otimes w), \quad v\otimes(\alpha w) = \alpha(v\otimes w).$$

La coppia $(C^{(V\times W)}/B, \pi\circ\iota)$ possiede la proprietà universale della definizione.

Osservazione:
Gli elementi di $V\otimes W$ sono combinazioni lineari finite del tipo $\sum_{i,j} a_{ij} v_i \otimes w_j$ e la scrittura è unica se i v_i e i w_j sono una base per V e W rispettivamente. Quindi in generale non è vero che ogni elemento di $V\otimes W$ si possa scrivere come $v\otimes w$, per qualche $v\in V$ e $w \in W$, questo vale solo per alcuni elementi che in seguito caratterizzeremo.

1.2 Proprietà

Studiamo ora alcune proprietà elementari del prodotto tensore; alcune valgono solamente in dimensione finita e sarà specificato.

1.4.1 Zero:
$V\otimes_C 0 = 0$ per ogni V, con 0 spazio nullo. Infatti $\mathrm{Bil}_C(V\times 0, U) = 0$ per ogni U.

1.4.2 Elemento neutro:
Lo spazio C è elemento neutro per il prodotto tensore:
$V\otimes_C C = V$ (canonicamente isomorfo) per ogni V. Infatti $\mathrm{Bil}_C(V\times C, U) = \mathrm{Hom}_C(V, U)$ per ogni U.

1.4.3 Commutatività:
Il prodotto tensore è commutativo: per ogni V, W risulta,

$$V\otimes_C W = W\otimes_C V$$

dove l'isomorfismo è canonico, indotto da $v \otimes w \mapsto w \otimes v$. Infatti $\mathrm{Bil}_C(V \times W, U) \cong \mathrm{Bil}_C(W \times V, U)$ per ogni U.
Attenzione: questo non significa che in $V \otimes V$ si abbia uguaglianza tra $v_1 \otimes v_2$ e $v_2 \otimes v_1$.

1.4.4 Aggiunzione:
Possiamo interpretare $\mathrm{Bil}_C(V \times W, U)$ come $\mathrm{Hom}_C(V, \mathrm{Hom}_C(W, U))$ e abbiamo che su C esistono isomorfismi canonici

$$\mathrm{Hom}_C(W, \mathrm{Hom}_C(V, U)) \cong \mathrm{Hom}_C(V \otimes_C W, U) \cong \mathrm{Hom}_C(V, \mathrm{Hom}_C(W, U))$$

per proprietà universale, inoltre $\mathrm{Hom}_C(W, \mathrm{Hom}_C(V, U)) \cong \mathrm{Hom}_C(V, \mathrm{Hom}_C(W, U))$ perché $\mathrm{Bil}_C(V \times W, C) \cong \mathrm{Bil}_C(W \times V, C)$. Usando $U = C$ abbiamo:

$$\mathrm{Hom}_C(W, V^*) \cong (V \otimes_C W)^* \cong \mathrm{Hom}_C(V, W^*).$$

1.4.5 Associatività:
Il prodotto tensore è associativo: per ogni V, W, U risulta

$$(V \otimes_C W) \otimes_C U = V \otimes_C (W \otimes_C U).$$

Infatti, ragionando per aggiunzione

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_C((V \otimes_C W) \otimes_C U, Z) &\cong \mathrm{Bil}_C((V \otimes_C W) \times U, Z)\\ &\cong \mathrm{Hom}_C(V \otimes_C W, \mathrm{Hom}_C(U, Z))\\ &\cong \mathrm{Bil}_C(V \times W, \mathrm{Hom}_C(U, Z))\\ &\cong 3\text{-}\mathrm{Lin}(V \times W \times U, Z)\end{aligned}$$

per ogni Z, e analogamente per l'altro termine.

1.4.6 Tensori Iterati:
La proprietà precedente permette di estendere la proprietà universale al prodotto tensoriale di k spazi vettoriali: per ogni spazio vettoriale U su C, l'applicazione

$$\mathrm{Hom}_C(V_1 \otimes_C V_2 \otimes_C \cdots \otimes_C V_k, U) \cong k\text{-}\mathrm{Lin}_C(V_1 \times_C V_2 \times_C \cdots \times_C V_k, U)$$

è un isomorfismo: per ogni applicazione k-lineare b esiste una unica applicazione lineare $\varphi : V_1 \otimes_C V_2 \otimes_C \cdots \otimes_C V_k \to U$ tale che $b = \varphi \circ \otimes$, dove $\otimes : V_1 \times_C V_2 \times_C \cdots \times_C V_k \to V_1 \otimes_C V_2 \otimes_C \cdots \otimes_C V_k$.
Quindi, usando $U = C$, per spazi vettoriali arbitrari vale:

$$(V_1 \otimes_C V_2 \otimes_C \cdots \otimes_C V_k)^* \cong k\text{-}\mathrm{Lin}_C(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k, C).$$

In particolare, nel caso di spazi vettoriali di dimensione finita abbiamo che vale anche un secondo isomorfismo:

$$(V_1 \otimes_C V_2 \otimes_C \cdots \otimes_C V_k)^* \cong k\text{-}\mathrm{Lin}_C(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k, C) \cong V_1^* \otimes_C V_2^* \otimes_C \cdots \otimes_C V_k^*$$

e per dualità otteniamo:

$$V_1 \otimes_C V_2 \otimes_C \cdots \otimes_C V_k \cong k\text{-}\operatorname{Lin}_C(V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_k^*, C) \cong k\text{-}\operatorname{Lin}_C(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k, C)^*.$$

1.4.7 Distributività con il prodotto:
Si ha un isomorfismo canonico

$$(V \times W) \otimes U \cong (V \otimes U) \times (W \otimes U)$$

definito dal mandare ogni $(v, w) \otimes u$ in $(v \otimes u, w \otimes u)$; si generalizza ai prodotti finiti, e alle somme dirette arbitrarie:

$$\left(\bigoplus_\alpha V_\alpha \right) \otimes U \cong \bigoplus_\alpha (V_\alpha \otimes U)$$

ma non ai prodotti arbitrari.

1.4.8 Omomorfismi:

- Esiste un morfismo canonico

  $$\operatorname{Hom}_C(V, W) \otimes_C U \longrightarrow \operatorname{Hom}_C(V, W \otimes_C U)$$

  che manda $\varphi \otimes u$ nell'applicazione definita da $v \mapsto \varphi(v) \otimes u$ che è un isomorfismo se U ha dimensione finita.
  Dimostrazione: Se U è spazio vettoriale di dimensione finita allora possiamo assumere $U \cong C^n$ e allora si ha che $\operatorname{Hom}_C(V, W) \otimes_C C^n \cong (\operatorname{Hom}(V, W))^n$ e $\operatorname{Hom}_C(V, W \otimes_C C^n) \cong \operatorname{Hom}(V, W^n)$, questo perché in generale se C campo $V \otimes C = V$. Inoltre

  $$\begin{aligned} (\operatorname{Hom}(V, W))^n &\longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W^n) \\ (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) &\longmapsto \Phi \end{aligned}$$

  con

  $$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow W^n \\ v &\longmapsto (\varphi_1(v), \cdots, \varphi_n(v)) \end{aligned}$$

  è un isomorfismo.

- In particolare se U ha dimensione finita, usando $W = C$ vale

  $$V^* \otimes_C U \cong \operatorname{Hom}_C(V, U).$$

- Se sia U che V hanno dimensione finita, vale inoltre:

  $$\operatorname{Hom}_C(V, U)^* \cong V \otimes_C U^* \cong \operatorname{Hom}_C(U, V)$$

  dove il primo isomorfismo è ottenuto tramite dualità dal punto precedente:
  $\operatorname{Hom}_C(V, U)^* \cong (V^* \otimes_C U)^* \cong V^{**} \otimes_C U^* = V \otimes_C U^* = \operatorname{Hom}(U, V)$.

Capitolo 2

Algebre tensoriali

Introdotto il concetto di prodotto tensore possiamo definire i tensori, elementi di particolari spazi vettoriali, che generalizzano oggetti algebrici. Grazie ai tensori saremo poi in grado di definire le algebre tensoriali associate ad uno spazio vettoriale, in particolare approfondiremo alcuni tipi di tensori, quelli simmetrici e quelli antisimmetrici.

2.1 Tensori

2.1 TENSORI CONTRAVARIANTI, COVARIANTI E MISTI:
Dato uno spazio vettoriale V su C, definiamo:
i tensori contravarianti di tipo $q \in \mathbb{N}$ come gli elementi dello spazio vettoriale:

$$T^q(V) := V^{\otimes q} = \underbrace{V \otimes_C \cdots \otimes_C V}_{q \text{ volte}},$$

i tensori covarianti di tipo $p \in \mathbb{N}$ come gli elementi dello spazio vettoriale:

$$T_p(V^*) := (V^*)^{\otimes p} = \underbrace{V^* \otimes_C \cdots \otimes_C V^*}_{p \text{ volte}},$$

e i tensori misti di tipo (p, q) come gli elementi dello spazio vettoriale:

$$T_p^q(V) := T_p(V^*) \otimes_C T^q(V) = \underbrace{V^* \otimes_C \cdots \otimes_C V^*}_{p \text{ volte}} \otimes_C \underbrace{V \otimes_C \cdots \otimes_C V}_{q \text{ volte}}.$$

2.2 BASI E DIMENSIONI:
Se $\mathscr{V} = (v_1, \cdots, v_n)$ è base di V, allora $\mathscr{V}^{\otimes q}$, formata dagli elementi $v_I = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$ per i tutti i multiindici $I = (i_1, \cdots, i_q)$ di lunghezza q ($i_h \in \{1, \ldots, n\}$), formano una base di $T^q(V) = V^{\otimes q}$.

Analogamente, usando la base duale $\mathscr{V}^* = (v_1^*, \cdots, v_n^*)$ di V^*, abbiamo la base $(\mathscr{V}^*)^{\otimes p}$, formata dagli elementi $v_J^* = v_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{j_p}^*$ per i tutti i multiindici $J = (j_1, \ldots, j_p)$ di lunghezza p ($j_h \in \{1, \ldots, n\}$), di $T_p(V) = (V^*)^{\otimes p}$. Useremo sempre gli ordini lessicografici. Inoltre $\dim_C T^q(V) = \dim_C(V)^q$ e $\dim_C T_p(V) = \dim_C(V)^p$; infine

$$\dim_C T_p^q(V) = \dim_C(V)^p \dim_C(V)^q = \dim_C(V)^{p+q}.$$

2.3 Alcuni Casi:
Abbiamo alcune interpretazioni note di tensori:
$(0,0)$ $T_0^0(V) = C$ (per ogni V): gli zero tensori sono gli scalari.
$(0,1)$ $T_0^1(V) = V$: i tensori di tipo $(0,1)$ sono i vettori.
$(1,0)$ $T_1^0(V) = V^*$: i tensori di tipo $(1,0)$ sono i covettori.
le interpretazioni seguenti richiedono $\dim_C V < \infty$
$(0,2)$ $T_0^2(V) = V \otimes_C V = \mathrm{Bil}_C(V^* \times V^*, C) = \mathrm{Hom}_C(V^*, V)$: i tensori di tipo $(0,2)$ sono forme bilineari su V^*, o anche applicazioni lineari $V^* \to V$.
$(2,0)$ $T_2^0(V) = V^* \otimes_C V^* = (V \otimes_C V)^* = \mathrm{Bil}_C(V \times V, C) = \mathrm{Hom}_C(V, V^*)$: i tensori di tipo $(2,0)$ sono forme bilineari su V, o anche applicazioni lineari $V \to V^*$.
$(1,1)$ $T_1^1(V) = V^* \otimes_C V = \mathrm{Hom}_C(V, V)$: i tensori di tipo $(1,1)$ sono gli endomorfismi di V.
$(0,q)$ $T_0^q(V) = V^{\otimes q} = q\text{-}\mathrm{Lin}_C(V^*)$: i tensori di tipo $(0,q)$ sono forme q-lineari su V^*.
$(p,0)$ $T_p^0(V) = (V^*)^{\otimes p} = p\text{-}\mathrm{Lin}_C(V)$: i tensori di tipo $(p,0)$ sono forme p-lineari su V.
(p,p) $T_p^p(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes_C V^{\otimes p} = \mathrm{Hom}_C(V^{\otimes p}, V^{\otimes p}) = \mathrm{End}(V)^{\otimes p}$: i tensori di tipo (p,p) sono endomorfismi di $V^{\otimes p}$ oppure p-tensori di endomorfismi.
(p,q) In generale, $T_p^q(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes_C V^{\otimes q}$ si può interpretare come duale di $V^{\otimes p} \otimes_C (V^*)^{\otimes q}$, e quindi spazio di forme $(p+q)$-lineari.

2.4 Prodotto tensore di applicazioni lineari e matrici:
Dati due morfismi lineari $\varphi : V \to V'$ e $\psi : W \to W'$ troviamo in base alla proprietà universale un unico morfismo lineare $\varphi \otimes \psi : V \otimes CW \longrightarrow V' \otimes_C W'$, e questa associazione dà una applicazione bilineare

$$\mathrm{Hom}_C\big(V, V'\big) \times \mathrm{Hom}_C\big(W, W'\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C\big(V \otimes_C W, V' \otimes_C W'\big)$$

da cui una applicazione lineare

$$\mathrm{Hom}_C\big(V, V'\big) \otimes_C \mathrm{Hom}_C\big(W, W'\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C\big(V \otimes_C W, V' \otimes_C W'\big)$$

che è un isomorfismo se gli spazi coinvolti sono di dimensione finita.
In particolare resta ben definito il prodotto tensore tra matrici:
se $A = \alpha'_{\mathscr{V},\mathscr{V}}(\varphi)$ e $B = \alpha_{\mathscr{W},\mathscr{W}'}(\psi)$, allora risulta che $\alpha_{\mathscr{V}\otimes\mathscr{W},\mathscr{V}'\otimes\mathscr{W}'}(\varphi \otimes \psi) = A \otimes B$, dove il prodotto tensore $A \otimes B \in M_{nn',mm'}(C)$ delle matrici $A \in M_{n,m}(C)$ e $B \in M_{n',m'}(C)$ è definito (a blocchi) da

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,m}B \\ \vdots & a_{i,j}B & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,m}B \end{pmatrix}$$

e le basi $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$, $\mathscr{V}' \otimes \mathscr{W}'$ usano l'ordine lessicografico. Il prodotto tensore di matrici dà una funzione lineare

$$M_{n,m}(C) \otimes_C M_{n',m'}(C) \longrightarrow M_{nn',mm'}(C)$$

che si dice anche prodotto di Kronecker di matrici.

2.5 COORDINATE E CAMBI DI COORDINATE:
Scelta una base $\mathscr{V} = (v_1, \dots, v_n)$ di V, ogni tensore $t \in T_p^q(V)$ ha coordinate (t_J^I) dove I varia sui multiindici di lunghezza q, J varia sui multiindici di lunghezza p, e

$$t = (\mathscr{V}^*)^{\otimes p} \otimes \mathscr{V}^{\otimes q}(t_J^I) = \sum_{I,J} t_J^I v_I v_J^*$$

Se poi $\mathscr{V}'$ è un'altra base di V e abbiamo la matrice A di cambiamento è data da $\mathscr{V} = \mathscr{V}' A$, allora risulta che $\mathscr{V}^* = \mathscr{V}'^* A^{-\mathrm{t}}$ (cambiamento di base del duale), e di conseguenza abbiamo che i cambiamenti di base per i tensori sono descritti da

$$\mathscr{V} \otimes q = \mathscr{V}'^{\otimes q} A^{\otimes q}, \quad (\mathscr{V}^*)^{\otimes p} = (\mathscr{V}'^*)^{\otimes p} (A^{-\mathrm{t}})^{\otimes p},$$

$$(\mathscr{V}^*)^{\otimes p} \otimes \mathscr{V}^{\otimes q} = (\mathscr{V}'^*)^{\otimes p} \otimes \mathscr{V}'^{\otimes q} (A^{-\mathrm{t}})^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}.$$

Da questo possiamo ricavare la formula di cambiamento di coordinate per $t \in T_p^q(V)$:

$$t = (\mathscr{V}^*)^{\otimes p} \otimes \mathscr{V} \otimes q(t_J^I) = (\mathscr{V}'^*)^{\otimes p} \otimes \mathscr{V}'^{\otimes q} (A^{-t})^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} (t_J^I)$$

e quindi, scrivendo $A = (a_{i,j}) = \left(a_j^i\right)$ e $A^{-\mathrm{t}} = (b_{i,j}) = \left(b_i^j\right)$ risulta che

$$s_M^L = \sum_{I,J} b_M^J a_I^L t_J^I$$

per ogni coppia di multiindici L ed M sono le coordinate di t nella nuova base.
Questo giustifica i nomi di parte contravariante e covariante per i tensori: la parte covariante cambia coordinate passando da $\mathscr{V}$ a $\mathscr{V}'$ usando la matrice di cambiamento di base da $\mathscr{V}'$ a $\mathscr{V}$.

2.2 Algebre tensoriali

2.6 ALGEBRE TENSORIALI:
Dato uno spazio vettoriale V su C, definiamo:

- Algebra tensoriale contravariante:

$$T^{\bullet}(V) := \bigoplus_{q \geqslant 0} T^q = \bigoplus_{q \geqslant 0} V^{\otimes q}$$

- Algebra tensoriale covariante:

$$T_\bullet(V) := \bigoplus_{p\geqslant 0} T_p = \bigoplus_{p\geqslant 0} (V^*)^{\otimes p}$$

- Algebra tensoriale totale:

$$T_\bullet^\bullet(V) := T_\bullet(V) \otimes_C T^\bullet(V) = \bigoplus_{p,q\geqslant 0} T_p^q(V) = \bigoplus_{p,q\geqslant 0} (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$$

l'operazione di prodotto è definita estendendo il prodotto tensoriale tra i vari elementi:

$$\begin{aligned} T^q(V) \times T^k(V) &\longrightarrow T^{q+k}(V) \\ (t_1, t_2) &\longmapsto t_1 \otimes t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_p(V) \times T_h(V) &\longrightarrow T_{p+h}(V) \\ (t_1^*, t_2^*) &\longmapsto t_1^* \otimes t_2^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_p^q(V) \times T_h^k(V) &\longrightarrow T_{p+h}^{q+k}(V) \\ (t_1^* \otimes t_1, t_2^* \otimes t_2) &\longmapsto (t_1 \otimes t_2) \otimes (t_1^* \otimes t_2^*). \end{aligned}$$

Si tratta di C-algebre di dimensione infinita anche se V ha dimensione finita.

Osservazioni:

- L'elemento $1 \in C = T_0^0(V)$ è neutro per il prodotto dell'algebra tensoriale. Invece $0 \in C$ è il killer.
- Il prodotto $T_1^0(V) \times T_0^1(V) \to T_1^1(V)$, identificato con $V^* \times V \to \mathrm{End}_C(V)$ manda (v^*, z) nell'endomorfismo definito da $(v^* \otimes z)(w) = z \cdot (v^*(w))$ per ogni w. Quindi l'endomorfismo identico in $\mathrm{End}_C(V)$ si scrive come elemento di $T_1^1(V)$ come somma $\sum_i v_i^* \otimes v_i$ per qualsiasi base v_i di V.
- Il prodotto di tensori non è commutativo: se $v, w \in V$ i due prodotti $v \otimes w$ e $w \otimes v$ sono diversi in generale (a meno che non siano linearmente dipendenti i due vettori).

D'ora in avanti nel capitolo supporremo sempre che gli spazi vettoriali menzionati siano di dimensione finita.

2.7 Prodotto:
Risulta per ogni q che $T^q(V \times W) \cong \bigoplus_{i+j=q} T^i(V) \otimes {}_C T^j(W)$ e di conseguenza $T(V \times W) \cong T(V) \otimes_C T(W)$. Si generalizza a prodotti finiti e somme arbitrarie, ma non a prodotti arbitrari.

2.8 Duale:
Risulta per ogni q che $T^q(V)^* \cong T^q(V^*)$ (forme n-lineari di V). Di conseguenza $T(V)^* \cong T(V^*)$.

2.9 Proprietà universale dell'algebra contravariante:
Data una applicazione lineare $V \to A$ di V in una C-algebra A (non necessariamente commutativa), esiste una unica estensione $T(V) \to A$ che sia un omomorfismo di C-algebre: cioè la restrizione

$$\mathrm{Hom}_{C-\mathrm{alg}}(T_C(V), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(V, A)$$

è un isomorfismo per ogni C-algebra A.

2.10 Contrazione di tensori:
Per ogni coppia di indici i, j (rispettivamente minori o uguali a p, q) si definisce l'operazione di contrazione rispetto a quegli indici:

$$c_i^j : T_p^q(V) \longrightarrow T_{p-1}^{q-1}(V)$$

in questo modo

$$c_i^j(v_1^* \otimes \cdots \otimes v_i^* \otimes \cdots \otimes v_p^* \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_q) = \mathbf{v_i^*}(\mathbf{v_j}) v_1^* \otimes \cdots \otimes \widehat{v_i}^* \otimes \cdots \otimes v_p^* \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v_j} \otimes \cdots \otimes v_q$$

dove l'accento circonflesso significa che l'elemento accentato è tolto dalla espressione, o in modo più compatto $c_i^j(v_I^* \otimes v_J) = v_i^*(v_j) v_{I\setminus i}^* \otimes v_{J\setminus j}$.

2.11 Permutazioni sui tensori:
Per ogni indice k il gruppo simmetrico agisce sui tensori $T^k(V)$ e $T_k(V)$ tramite l'azione naturale sugli indici: se $\sigma \in \mathcal{S}_k$ poniamo

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma j} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma k}$$

o in modo più compatto $\sigma(v_I) = v_{\sigma(I)}$($I$ multiindice di lunghezza k).

2.3 Tensori simmetrici e antisimmetrici

2.12 Tensori simmetrici:
Un tensore $t \in T^q(V)$ si dice simmetrico se $\sigma(t) = t$ per ogni $\sigma \in \mathcal{S}_q$.
Indichiamo con $S^q(V)$ il sottospazio dei tensori simmetrici di tipo q e definiamo il sottospazio di $T(V)$

$$S(V) := \bigoplus_{q \geqslant 0} S^q(V)$$

in particolare abbiamo $S^0(V) = C$, $S^1(V) = V$.
Osservazioni:

- Dimensioni: data una base $v_1, \ldots, v_n$ di V, poiché in un tensore simmetrico tutti i termini che si scambiano per permutazioni devono avere lo stesso coefficiente, si vede che ogni tensore simmetrico è determinato dai coefficienti dei tensori $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$ per i quali $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_q$. Quindi la dimensione di $S^q(V)$ su C è $\binom{n+q-1}{q}$ (come i monomi di grado q in n variabili). Nota: sono combinazioni con ripetizione di n elementi distinti (i vettori di base) di classe q, cioè tutti gli insiemi di q elementi (lunghezza tensore) che posso formare.
Di conseguenza $S(V)$ ha dimensione infinita.

- L'applicazione
$$\sigma^q : T^q(V) \longrightarrow S^q(V)$$
che manda ogni tensore t in $\sigma^q(t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \sigma(t)$ è una mappa lineare, e per ogni tensore simmetrico $t \in S^q(V)$ risulta $\sigma^q(t) = (q!)t$. Dunque, se $q!$ è invertibile in C abbiamo che l'applicazione $s^q = \sigma^q/(q!) : T^q(V) \longrightarrow S^q(V)$ è una proiezione di $T^q(V)$ su $S^q(V)$ che si chiama l'operatore di simmetrizzazione.
Per dotare $S(V)$ di una struttura di C algebra, cioè definire un prodotto tra tensori simmetrici, bisogna quindi supporre che C abbia caratteristica zero (in modo che ogni mappa s^q sia definita, o anche ogni tensore simmetrico si ottenga per simmetrizzazione); abbiamo allora una mappa
$$s : T(V) \longrightarrow S(V)$$
(definita componente per componente: s^q su $T^q(V)$), e possiamo definire per $t, t^{'} \in S(V)$ il prodotto $t \odot t^{'} = s(t \otimes t^{'})$.
Con questo prodotto $S(V)$ risulta una C-algebra commutativa, isomorfa all'algebra dei polinomi commutativi su una base di V, e che possiede una opportuna proprietà universale, tuttavia questo lo mostreremo attraverso una costruzione più generale, di cui questa sarà un caso particolare.

2.12 TENSORI ANTISIMMETRICI:
Supponiamo la caratteristica di C diversa da 2. Un tensore $t \in T^q(V)$ si dice antisimmetrico (o alternante) se $\sigma(t) = \mathrm{sgn}(\sigma)(t)$ per ogni permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_q$. Indichiamo con $A^q(V)$ il sottospazio dei tensori simmetrici di tipo q e definiamo il sottospazio di $T(V)$
$$A(V) := \bigoplus_{q \geqslant 0} A^q(V)$$
in particolare abbiamo $A^0(V) = C$, $A^1(V) = V$.
OSSERVAZIONI:

- Dimensioni: data una base $v_1, \ldots, v_n$ di V, poiché in un tensore antisimmetrico tutti i termini che si scambiano per permutazioni devono avere lo stesso coefficiente a meno del segno della permutazione, e se due termini sono uguali il coefficiente dev'essere nullo, si vede che ogni tensore antisimmetrico è determinato dai coefficienti dei tensori $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$ per i quali $i_1 < i_2 < \cdots < i_q$. Quindi la dimensione

di $A^q(V)$ su C è $\binom{n}{q}$ (come i sottoinsiemi di q elementi scelti tra fissati n), nulla se $q > n$. Nota: sono le combinazioni di n elementi (i vettori di base) di classe q (lunghezza del tensore), non ci sono ripetizioni altrimenti prodotto è nullo.
Di conseguenza $A(V)$ ha dimensione finita, pari a 2^n.

- L'applicazione
$$\alpha^q : T^q(V) \longrightarrow A^q(V)$$
che manda ogni tensore t in $\alpha^q(t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(t)$ è una mappa lineare, e per ogni tensore antisimmetrico $t \in A^q(V)$ risulta $\alpha^q(t) = (q!)t$. Dunque, se $q\,!$ è invertibile in C abbiamo che l'applicazione $a^q = \alpha^q/(q!) : T^q(V) \longrightarrow A^q(V)$ è una proiezione di $T^q(V)$ su $A^q(V)$ che si chiama l'operatore di antisimmetrizzazione (o alternizzazione). Nota: se invece $q\,!$ non è invertibile in C, l'immagine di α^q è strettamente contenuta in $A^q(V)$.
Per dotare $A(V)$ di una struttura di C algebra, cioè definire un prodotto tra tensori antisimmetrici, bisogna quindi supporre che C abbia caratteristica abbastanza alta (in modo che ogni mappa a^q sia definita, o anche ogni tensore antisimmetrico si ottenga per antisimmetrizzazione); abbiamo allora una mappa
$$a : T(V) \longrightarrow A(V)$$
(definita componente per componente: a^q su $T^q(V)$), e possiamo definire per $t, t' \in A(V)$ il prodotto $t \wedge t' = a(t \otimes t')$ Anche questo sottospazio con questo prodotto $A(V)$ risulta una C-algebra in questo caso anticommutativa (o alternante), e che possiede una opportuna proprietà universale e anche in questo caso lo mostreremo tramite una costruzione più generale, di cui questa sarà un caso particolare.

Capitolo 3

Algebre simmetriche

In questo capitolo studieremo l'algebra simmetrica, un particolare tipo di algebra derivata dell'algebra tensoriale e la confronteremo con i tensori simmetrici. D'ora in poi per semplicità di notazione indicheremo con $T(V)$ l'algebra dei tensori contravarianti, già indicata con $T^\bullet(V)$.

3.1 Algebre simmetriche

3.1 ALGEBRE SIMMETRICHE:
Dato uno spazio vettoriale V su C e $T(V)$ l'algebra dei tensori contravarianti su V, definiamo l'algebra simmetrica di V come il quoziente

$$\sum(V) := T(V)/\mathscr{S}(V)$$

con $\mathscr{S}(V)$ l'ideale bilatero di T(V) generato dai tensori $(v \otimes w - w \otimes v)$ al variare di $v, w \in V$.
Ponendo $\mathscr{S}^q(V) = \mathscr{S}(V) \cap T^q(V)$, sottospazio di $T^q(V)$, abbiamo che $\mathscr{S}^0(V) = \mathscr{S}^1(V) = 0$ e $\bigoplus_{q \geqslant 0} \mathscr{S}^q(V) = \mathscr{S}(V)$, inoltre definendo $\Sigma^q(V) = T^q/\mathscr{S}^q(V)$ (potenze simmetriche q-esime di V) risulta

$$\sum(V) = \bigoplus_{q \geqslant 0} \Sigma^q(V).$$

Da $\Sigma^q(V) = T^q/\mathscr{S}^q(V)$ segue $\Sigma^0(V) = C$ e $\Sigma^1(V) = V$. Il prodotto di $T(V)$ induce una operazione di prodotto in $\Sigma(V)$ con la quale $\Sigma(V)$ risulta una C-algebra commutativa.

D'ora in avanti nel capitolo supporremo sempre che gli spazi vettoriali menzionati siano di dimensione finita.

3.1 DESCRIZIONE DELL'IDEALE:
Data una base $v_1, \ldots, v_n$ di V, due tensori $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_q}$ e $v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_p}$ sono equivalenti modulo $\mathscr{S}(V)$ se e solo se $q = p$ ed esiste una permutazione $\sigma \in \mathscr{S}_q$ tale che

$\sigma(i_1, \ldots, i_q) = (j_1, \ldots, j_p)$

3.2 Basi e dimensioni:
Se $v_1, \ldots, v_n$ è base di V, le classi in $\Sigma^q(V)$ dei tensori $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$ tali che $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_q$ formano una base. La dimensione di $\Sigma^q(V)$ su C è $\binom{n+q-1}{q}$ (come i monomi di grado q in n variabili). Di conseguenza $\Sigma(V)$ ha dimensione infinita.

3.3 Prodotto:
Risulta per ogni q che $\Sigma^q(V \times W) \cong \bigoplus_{i+j=q} \Sigma^i(V) \otimes_C \Sigma^j(W)$ e di conseguenza $\Sigma(V \times W) \cong \Sigma(V) \otimes_C \Sigma(W)$. Si generalizza a prodotti finiti e somme arbitrarie, ma non a prodotti arbitrari.

3.4 Duale:
Risulta per ogni q che $\Sigma^q(V)^* \cong \Sigma^q(V^*.\ )$ (e si identifica con le forme q-lineari simmetriche di V). Di conseguenza $\Sigma(V)^* \cong \Sigma(V^*)$.

3.5 Proprietà universale dell'algebra simmetrica:
Data una applicazione lineare $V \to A$ di V in una C-algebra A commutativa, esiste una unica estensione $\Sigma(V) \to A$ che sia un omomorfismo di C-algebre: cioè la restrizione

$$\mathrm{Hom}_{C\text{-alg}}\left(\Sigma_C(V), A\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(V, A)$$

è un isomorfismo per ogni C-algebra commutativa A. Più in generale, vi è una corrispondenza biunivoca tra le applicazioni lineari $\varphi : V \to A$ di V in una C-algebra A arbitraria tali che $\varphi(v)\varphi(w) = \varphi(w)\varphi(v)$ per ogni $v, w \in V$, e i morfismi di C-algebre $\Sigma(V) \to A$.

3.2 Confronto con i tensori simmetrici

Possiamo confrontare il sottospazio $S(V)$ dei tensori simmetrici con l'algebra simmetrica $\sum(V)$. A priori sono oggetti molto distinti poiché $S(V)$ non è un algebra con il prodotto tensore (in generale il prodotto tensore di tensori simmetrici non è simmetrico) e gli elementi dell'algebra simmetrica appena definita, non sono tensori, a maggior ragione simmetrici. Tuttavia i due spazi sono isomorfi, infatti risulta:
se in C $q! \neq 0$, la restrizione a $S^q(V)$ della proiezione canonica su $\sum^q(V)$

$$S^q(V) \longrightarrow T^q(V) \longrightarrow \Sigma^q(V)$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali, e quindi

$$S(V) \cong \sum(V)$$

se C è di caratteristica nulla. L'operazione di prodotto che $\Sigma(V)$ induce in $S(V)$ è esattamente quella che avevamo definito tra tensori simmetrici $t \odot t^{'} = s(t \otimes t^{'})$ per $t, t' \in S(V)$

Capitolo 4

Algebre esterne

In questo capitolo definiremo l'algebra esterna, l'algebra naturale per trattare la generalizzazione della nostra teoria. Come per l'algebra simmetrica confronteremo poi quest'algebra con i tensori antisimmetrici.

4.1 Algebre esterne

4.1 ALGEBRE ESTERNE:
Dato uno spazio vettoriale V su C e $T(V)$ l'algebra dei tensori contravarianti su V, definiamo l'algebra esterna (o di Grassmann) di V come il quoziente

$$\bigwedge(V) := T(V)/\mathscr{A}(V)$$

con $\mathscr{A}(V)$ l'ideale bilatero di T(V) generato dai tensori $(v \otimes v)$ al variare di $v \in V$; in caratteristica diversa da 2, possiamo usare come generatori i tensori $(v \otimes w + w \otimes v)$ al variare di $v, w \in V$.
Ponendo $\mathscr{A}^q(V) = \mathscr{A}(V) \cap T^q(V)$, sottospazio di $T^q(V)$, abbiamo che $\mathscr{A}^0(V) = \mathscr{A}^1(V) = 0$ e $\bigoplus_{q \geqslant 0} \mathscr{A}^q(V) = \mathscr{A}(V)$, inoltre definendo $\bigwedge^q(V) = T^q/\mathscr{A}^q(V)$ (potenze esterne q-esime di V) risulta

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{q \geqslant 0} \bigwedge^q(V).$$

Il prodotto di $T(V)$ induce una operazione di prodotto in $\bigwedge(V)$, che chiameremo prodotto esterno ed indicheremo con $\wedge$, con la quale $\bigwedge(V)$ risulta una C-algebra alternante.

D'ora in avanti nel capitolo supporremo sempre che gli spazi vettoriali menzionati siano di dimensione finita.

4.2 DESCRIZIONE DELL'IDEALE:
Data una base $v_1, \ldots, v_n$ di V, un tensore $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_q}$ appartiene a $\mathscr{A}(V)$ se e solo se

$v_{i_a} = v_{i_b}$ per due indici diversi $i_a \neq i_b$. In particolare, se $q > n$ tutti i q-tensori hanno classe nulla nell'algebra esterna. In particolare

$$\bigwedge(V) = C \oplus V \oplus \wedge^2(V) \oplus \cdots \oplus \wedge^n(V).$$

4.3 Basi e dimensioni:
Se $v_1, \ldots, v_n$ è base di V, le classi in $\bigwedge^q(V)$ dei tensori $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$ per i quali $i_1 < i_2 < \cdots < i_q$ formano una base. Tale classe si indica con $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_q}$. Quindi la dimensione di $\bigwedge^q(V)$ su C è $\binom{n}{q}$ (nulla se $q > n$). Di conseguenza $\bigwedge(V)$ ha dimensione finita pari a 2^n.

4.4 Prodotto:
Risulta per ogni q che $\bigwedge^q(V \times W) \cong \bigoplus_{i+j=q} \bigwedge^i(V) \otimes C \bigwedge^j(W)$ e di conseguenza $\bigwedge(V \times W) \cong \bigwedge(V) \otimes_C \bigwedge(W)$. Si generalizza a prodotti finiti e somme arbitrarie, ma non a prodotti arbitrari.

4.5 Duale:
Risulta per ogni q che $\bigwedge^q(V)^* \cong \bigwedge^q(V^*)$ (e si identifica con le forme n-lineari alternanti di V). Di conseguenza $\bigwedge(V)^* \cong \bigwedge(V^*)$.

4.6 Proprietà universale dell'algebra esterna:
Data una applicazione lineare $V \to A$ di V in una C-algebra A alternante, esiste una unica estensione $\bigwedge(V) \to A$ che sia un omomorfismo di C-algebre: cioè la restrizione

$$\mathrm{Hom}_{C\text{-alg}}\,(\bigwedge_C(V), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(V, A)$$

è un isomorfismo per ogni C-algebra alternante A. Più in generale, vi è una corrispondenza biunivoca tra le applicazioni lineari $\varphi : V \to A$ di V in una C-algebra A arbitraria tali che $\varphi(v)\varphi(v) = 0$ per ogni $v \in V$ (oppure $\varphi(v)\varphi(w) = -\varphi(w)\varphi(v) per$ ogni $v, w \in V$ se la caratteristica non è 2), e i morfismi di C-algebre $\bigwedge(V) \to A$.

4.7 Orientamenti e dualità di Hodge:
Sia V spazio vettoriale di dimensione finita con $\dim_C(V) = n$. Il prodotto esterno verso il grado massimo:

$$\bigwedge^q(V) \times \bigwedge^{n-q}(V) \to \bigwedge^n(V)$$
$$(t, s) \longmapsto t \wedge s$$

dà luogo ad un isomorfismo lineare

$$\bigwedge^q(V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\bigwedge^{n-q}(V), \bigwedge^n(V))$$

inoltre

$$\mathrm{Hom}_C(\bigwedge^{n-q}(V), \bigwedge^n(V)) \cong \bigwedge^{n-q}(V)^* \otimes_C \bigwedge^n(V) \cong \bigwedge^{n-q}(V^*) \otimes_C \bigwedge^n(V)$$

(i due isomorfismi scritti sono canonici, in direzione contraria) e questo ci permette di identificare $\bigwedge^{n-q}(V)^* \otimes_C \bigwedge^n(V)$ con $\bigwedge^q(V)$, e quindi di avere un isomorfismo (che complementa i gradi dei tensori). Fissata una base di $\bigwedge^n(V)$, cioè un tensore del tipo $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = e$, possiamo esplicitare l'isomorfismo detto dualità di Hodge:

$$\bigwedge(V)^* \otimes_C \bigwedge^n(V) \longrightarrow \bigwedge(V)$$

$$v_I^* \otimes e \longmapsto v_J$$

se $I \cup J = N = \{1, \ldots, n\}$

Definiamo orientamento di V la scelta di una base di $\bigwedge^n(V)$ cioè di un tensore esterno massimo non nullo di V, e nella notazione precedente. La scelta di un orientamento identifica $\bigwedge^n(V)$ con C, e quindi la dualità di Hodge si specializza in un isomorfismo di $\bigwedge(V)^*$ con $\bigwedge(V)$ che identifica $\bigwedge^{n-q}(V)^*$ con $\bigwedge^q(V)$

$$\bigwedge^{n-q}(V)^* \longrightarrow \bigwedge^q(V)$$

$$w_1^* \wedge \cdots \wedge w_{n-q}^* \longmapsto z_1 \wedge \cdots \wedge z_q$$

dove $z_1 \wedge \cdots \wedge z_q$ è tale che $w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-q} \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_q = \alpha e$, con $\alpha \in C$.

4.8 PRODOTTO INTERNO: Il prodotto interno di tensori è l'applicazione

$$\begin{aligned} \bigwedge(V^*) \times \bigwedge(V) &\longrightarrow \bigwedge(V) \\ (u^*, t) &\longmapsto u^* \lrcorner\, t \end{aligned}$$

dove $u^* \lrcorner\, t$ è definito dalle condizioni $v^*(u^* \lrcorner\, t) = (v^* \wedge u^*)(t)$ per ogni $v^* \in \bigwedge(V^*)$ (un elemento di uno spazio vettoriale è definito dando i suoi valori su ogni elemento del duale).
Si verifica subito trattarsi di una buona definizione tale che per $t \in \bigwedge^q(V)$ e $u^* \in \bigwedge^p(V)^*$ si ha

$$u^* \lrcorner\, t \begin{cases} = 0 & \text{se } q < p \\ \in \bigwedge^{q-p} V & \text{se } q \geqslant p \\ = u^*(t) & \text{se } p = q \end{cases} .$$

Inoltre il prodotto interno soddisfa alle seguenti proprietà:

- bilinearità: $u^* \lrcorner\, (\alpha t + t^{'}) = \alpha u^* \lrcorner\, t + u^* \lrcorner\, t^{'}$, e $(\alpha u^* + u^{*'}) \lrcorner\, t = \alpha u^* \lrcorner\, t + u^{*'} \lrcorner\, t$,
- unitarietà: $1 \lrcorner t = t$, dove 1 è l'unità di $\bigwedge(V)^*$,
- iterazione: $(u^* \wedge v^*) \lrcorner\, t = u^* \lrcorner\, (v^* \lrcorner\, t)$.

- Regola di Leibnitz: per ogni $u^* \in V^*, t \in \bigwedge^q(V), s \in \bigwedge(V)$, risulta $u^* \lrcorner (t \wedge s) = (u^* \lrcorner t) \wedge s + (-1)^q t \wedge (u^* \lrcorner s)$.

  Espressioni esplicite: Se $v_1, \ldots, v_n$ è base di V e $v_1^*, \ldots, v_n^*$ la sua base duale, allora
  $$v_H^* \lrcorner v_K = \begin{cases} 0 & \text{se } H \not\subseteq K \\ \mathrm{sgn}_{K \setminus H, H}\, v_{K \setminus H} & \text{se } H \subseteq K \end{cases}$$
  In particolare $v_i^* \lrcorner v_J$ risulta nullo se $i \notin J$ e risulta $(-1)^{r-1} v_{J \setminus i}$ se $J = (j_1, \ldots, j_r, \ldots)$ con $i = j_r$.

- Regola di Taylor: Per ogni $t \in V : 1 \otimes t + t \otimes 1 = \sum_H (v_H^* \lrcorner t) \otimes v_H$.

- Il morfismo $\bigwedge^q(V) \longrightarrow \bigwedge^{n-q}(V)^*$ che manda t in $t^\vee = t \lrcorner v_N^*$ è un isomorfismo, inverso del morfismo canonico di (dualità di) Hodge.

4.2 Confronto con i tensori antisimmetrici

Analogamente a quanto detto per tensori simmetrici e algebra simmetrica, possiamo confrontare $A(V)$ sottospazio di $T(V)$ dei tensori antisimmetrici, che non è un algebra rispetto al prodotto tensore, con $\bigwedge(V)$. Infatti, se in C abbiamo $q! \neq 0$ la composizione

$$A^q(V) \longrightarrow T^q(V) \longrightarrow \bigwedge^q(V)$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali e quindi risulta

$$A(V) \cong \bigwedge(V)$$

se C ha caratteristica abbastanza grande o nulla. L'operazione di prodotto che $\bigwedge(V)$ induce in $A(V)$ per trasporto di struttura è quella che avevamo definito tra tensori antisimmetrici $t \wedge t' = a(t \otimes t')$ per $t, t' \in A(V)$.

Capitolo 5

Tensori puri e criteri di purezza

Studiamo ora una classe di tensori detti puri. La loro importanza verrà chiarita completamente nel capitolo successivo. Questa risiede nel fatto che tali elementi sono in corrispondenza con i sottospazi vettoriali di V e quindi ci permetteranno di descrivere le Grassmanniane con il formalismo tensoriale.

5.1 Criteri di purezza

5.1 TENSORI ALTERNANTI PURI:
Un tensore alternante $t \in \bigwedge^q(V)$ si dice puro o totalmente decomponibile, se si può scrivere $t = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$ per qualche $v_i \in V$, cioè se è immagine di un tensore puro $v_1 \otimes \cdots \otimes v_q$.
OSSERVAZIONI:

- Ogni elemento di $\bigwedge^0(V) = C$ e $\bigwedge^1(V) = V$ è puro.
- Anche per $q = \dim_C(V)$ tutti i tensori sono puri, ricordiamo infatti che tale spazio ha dimensione 1 su C ed è generato dall'elemento puro $v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$ con $\{v_1, \cdots, v_q\}$ base di V. Inoltre considerando che nell'isomorfismo tra $\bigwedge^q(V)$ e $\bigwedge^{n-q}(V)^*$ i tensori puri si corrispondono, abbiamo che anche per $q = \dim_C(V) - 1$ tutti i tensori alternanti sono puri.

Quindi in generale un elemento di $\bigwedge^q(V)$ per $1 < q < \dim_C(V)$ è combinazione lineare di elementi puri, ma non è puro esso stesso. Non è banale riconoscere questi elementi a priori, per esempio dal tensore $v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$ non è immediato ricondursi alla forma pura $(v_1 + v_2) \wedge (v_2 + v_3)$. Per questo motivo ora studieremo dei criteri, cosiddetti di purezza, per caratterizzare questo tipo di elementi.

5.2 CRITERIO TRAMITE LO SPAZIO ASSOCIATO:
Sia $t \in \bigwedge^q(V)$ un tensore non nullo, definiamo V_t il minimo sottospazio di V tale che

$t \in \bigwedge^q(V_t)$. Il sottospazio V_t è detto il sottospazio associato al tensore t.

$\boxed{\text{Un tensore alternante } t \in \bigwedge^q(V) \text{ è puro se e solo se } V_t \text{ ha dimensione esattamente } q.}$

DIMOSTRAZIONE:

- V_t esiste:
  $V_t := \min\{W \subseteq V : t \in \bigwedge^q(W)\}$, l'insieme non è vuoto perché V ci appartiene. Mostriamo che esiste il minimo:
  se $t \in \bigwedge^q(W_1), t \in \bigwedge^q(W_2)$ allora $t \in \bigwedge^q(W_1 \cap W_2)$.
  Sappiamo che se $t \in \bigwedge^q(W_1)$ e $t \in \bigwedge^q(W_2)$ allora $t \in \bigwedge^q(W_1) \cap \bigwedge^q(W_2)$, mostriamo dunque che $\bigwedge^q(W_1) \cap \bigwedge^q(W_2) = \bigwedge^q(W_1 \cap W_2)$.
  $\bigwedge^q(W_1) \cap \bigwedge^q(W_2) \supseteq \bigwedge^q(W_1 \cap W_2)$ perché $W_1 \cap W_2, W_1, W_2$ sono sottospazi di W e $W_1 \cap W_2 \leqslant W_1, W_2$ quindi $\bigwedge^q(W_1 \cap W_2) \leqslant \bigwedge^q(W_1), \bigwedge^q(W_1 \cap W_2) \leqslant \bigwedge^q(W_2)$ e questo implica $\bigwedge^q(W_1 \cap W_2) \leqslant \bigwedge^q(W_1) \cap \bigwedge^q(W_2)$.
  Ora facciamo vedere che hanno la stessa dimensione:
  sia $\{u_1, \cdots, u_s\}$ base di $W_1 \cap W_2$; completo a base di W_1: $\{u_1, \cdots, u_s, w_{s+1}, \cdots, w_{n_1}\}$ e completo a base di W_2: $\{u_1, \cdots, u_s, v_{s+1}, \cdots, v_{n_2}\}$. La dimensione di $\bigwedge^q(W_1 \cap W_2)$ è $\binom{s}{q}$, la dimensione di $\bigwedge^q(W_1) + \bigwedge^q(W_2)$ è $\binom{n_1}{q} + \binom{n_2}{q} - \binom{s}{q}$ quindi per la formula di Grassmann la dimensione di $\bigwedge^q(W_1) \cap \bigwedge^q(W_2)$ è $\binom{s}{q}$.

- $\dim_C(V_t) \geqslant q$ perché $t \in \bigwedge^q(V_t)$.

- t puro $\Leftrightarrow \dim_C(V_t) = q$:
  $(\Rightarrow)$: t puro $\Rightarrow t = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q \Rightarrow V_t = \langle v_1, \cdots, v_q \rangle \Rightarrow \dim_C(V_t) = q$
  $(\Leftarrow)$: $V_t = \langle v_1, \cdots, v_q \rangle \Rightarrow \bigwedge^q(V_t)$ ha dimensione 1 e una sua base è $\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_q\}$ $\Rightarrow t = \alpha(v_1 \wedge \cdots \wedge v_q)$.

5.3 CRITERIO TRAMITE L'ANNULLATORE:
Sia $t \in \bigwedge^q(V)$, definiamo il suo annullatore $\text{ann}(t)$ come il sottospazio di V formato dai vettori v per cui $v \wedge t = 0$.

$\boxed{\text{Un tensore alternante } t \in \bigwedge^q(V) \text{ è puro se e solo se ann}(t) \text{ ha dimensione esattamente } q.}$

DIMOSTRAZIONE:

- $\dim_C(\text{ann}(t)) \leqslant q$:
  Sia $t \in \bigwedge^q(V)$ e $\text{ann}(t) = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ il suo annullatore; completo la base di $\text{ann}(t)$ a base di V: $\{v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_n\}$. Ora t si scrive come $\sum_{|I|=q} a_I v_I$ con $I \subseteq \{1, .., n\}$, per definizione si ha che $v_i \wedge t = 0 \ \forall i = 1, .., s$, cioè $v_i \wedge \sum_{|I|=q} a_I v_I = 0 \ \forall i = 1, .., s$. In particolare si ha che: se $I \supseteq \{i\}$ allora $v_i \wedge v_I = 0$, se $I \not\supseteq \{i\}$ allora $v_i \wedge v_I \neq 0$ e quindi deve valere $a_I = 0$. Da questo segue che $a_I \neq 0$ se e solo se $I \supseteq \{i\}$ $\forall i = 1, .., s$ se e solo se $I \supseteq \{1, .., s\}$ se e solo se $|I| = q \geqslant s$. Questo dimostra che $s \leqslant q$ da cui la tesi.

- t puro $\Leftrightarrow \dim_C(\mathrm{ann}(t)) = q$:
  t puro $\Leftrightarrow t = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q \Leftrightarrow \mathrm{ann}(t) = \langle v_1, \cdots, v_q \rangle \Leftrightarrow \dim_C(\mathrm{ann}(t)) = q$.

Da questi due criteri se ne può dedurre un terzo osservando che in generale per un tensore $t \in \bigwedge^q(V)$ qualsiasi vale $\mathrm{ann}(t) \leqslant V_t$. Infatti: se $v \in \mathrm{ann}(t)$ allora $v \in V_t$. Se per assurdo così non fosse esisterebbe $v_0 \in \mathrm{ann}(t)$, ma tale che $v_0 \notin V_t$ allora considerando $\{v_1, \cdots, v_k\}$ base di V_t avrei che i $\{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ sono indipendenti. Ora t si scrive come $t = \sum_{|I|=q} a_I v_I$ con $I \subseteq \{1, .., k\}$ con i coefficienti non tutti nulli, ma $v_0 \wedge t = \sum_{|I|=q} a_I (v_0 \wedge v_I)$ non è nullo perché i coefficienti non sono tutti nulli e $v_0 \wedge v_I$ sono linearmente indipendenti. Assurdo, perché $v_0 \in \mathrm{ann}(t)$.
Abbiamo quindi:
5.4 Criterio tramite annullatore e spazio associato:

$$\boxed{\text{Un tensore alternante } t \in \textstyle\bigwedge^q(V) \text{ è puro se e solo se } \mathrm{ann}(t) = V_t}$$

Dimostrazione:
Semplice conseguenza del fatto che $\mathrm{ann}(t) \leqslant V_t$, se t è puro allora i due spazi hanno entrambi dimensione q quindi coincidono.

Vediamo ora il più interessante tra i criteri di purezza, che utilizzando il prodotto interno ci permetterà di tradurre la condizione di purezza in equazioni sui coefficienti.

5.5 Criterio di purezza tramite prodotto interno:
Per un tensore alternante $t \in \bigwedge^q(V)$ possiamo descrivere lo spazio associato in termini del prodotto interno:

$$V_t = \{u^* \lrcorner\, t : u^* \in \bigwedge^{q-1}(V^*)\}$$

e il suo ortogonale:

$$V_t^{\perp} = \{v^* \in V^* : v^* \lrcorner\, t = 0\}.$$

Dimostrazione:
Ricordiamo che $V_t := \min\{W \subseteq V : t \in \bigwedge^q(W)\}$,
chiamiamo $Z := \{u^* \lrcorner\, t : u^* \in \bigwedge^{q-1}(V^*)\}$.
$Z \subseteq V_t$:
Chiaramente Z è sottospazio di V. Consideriamo $u^* \in \bigwedge^s(V^*)$ e $v_1, \ldots, v_{q'} \in V$, con $s \leqslant q'$. Vogliamo far vedere che $u^* \lrcorner\, (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{q'})$ (che in generale appartiene a $\bigwedge^{q'-s}(V)$) è combinazione lineare di $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_{q'-s}}$ con $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{q'-s} \leqslant q'$. Se $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{q'} = 0$ l'asserto è banale, quindi supponiamo $v_1, \ldots, v_{q'}$ linearmente indipendenti. Completiamo quindi a base di V $\{v_1, \ldots, v_{q'}, v_{q'+1}, \ldots, v_n\}$ e sia $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base duale. Ora u^* si scrive come $\sum_{|H|=s} c_H v_H^*$ con $c_H \in C$, $H \subseteq \{1, .., n\}$, allora $u^* \lrcorner\, (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{q'}) = \sum_{|H|=s} c_H v_H^* \lrcorner\, (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{q'})$ e per definizione se $H \nsubseteq \{1, .., q'\}$ il prodotto è nullo, dunque all'interno della sommatoria contano solamente gli indici per cui $H \subseteq \{1, .., q'\}$, da cui $u^* \lrcorner\, (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{q'}) \in \bigwedge^{q'-s}(V_t)$.
Se $s = q' - 1$ abbiamo $u^* \lrcorner\, (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{q'}) \in \bigwedge^1(V_t) = V_t$, in particolare se t è puro $q' = q$.
$Z \supseteq V_t$:

Supponiamo per assurdo che $Z \subset V_t$.
Sia $Z = \langle v_1, \ldots, v_h \rangle$ e $V_t = \langle v_1, \ldots, v_h, v_{h+1}, \ldots, v_k \rangle$ con $h < k$ e per ipotesi $\exists i$ tale che $v_i \in V_t, v_i \notin Z$, a meno di un riordino degli indici supponiamo che $i = k$. Completiamo la base di V_t a base di V e consideriamo la base duale $v_1^*, \ldots, v_n^*$, ora $v_k^* \in Z^\perp$ per costruzione. Per definizione $t \in \bigwedge^q(V_t)$ quindi lo possiamo scrivere come $\sum_{|H|=q} c_H v_H$ con $c_H \in C, H \subseteq \{1, .., k\}$. Da $v_k^* \in Z^\perp$ segue che $0 = v_k^* \lrcorner\, t = \sum_{|H|=q} c_H(v_k^* \lrcorner\, v_H) = \sum_{H:k\in H} \mathrm{sgn}_{H\setminus k,k}\, c_H v_{H\setminus k}$. In particolare tutti i coefficienti dell'ultima somma sono nulli perché il prodotto è nullo per ipotesi, quindi t risulta combinazione di $v_1, \ldots, v_{k-1}$, quindi $t \in \bigwedge^q(\langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle)$, ma questo è assurdo perché è contro la minimalità di V_t.

Ora che abbiamo caratterizzato V_t tramite il prodotto interno possiamo enunciare il criterio:

Un tensore alternante $t \in \bigwedge^q(V)$ è puro se e solo se per ogni $u^* \in \bigwedge^{q-1}(V^*)$ si ha che $(u^* \lrcorner\, t) \wedge t = 0$.

DIMOSTRAZIONE:

- t puro $\Leftrightarrow \forall u^* \in \bigwedge^{q-1}(V^*)$ vale $(u^* \lrcorner\, t) \wedge t = 0$:
  ($\Rightarrow$): t puro $\Rightarrow t = v_1 \wedge \ldots \wedge v_q$, in particolare $t \in \bigwedge^q(V_t)$ con $V_t = \langle v_1, \ldots, v_q \rangle \leqslant V$ e $V_t = Z \Rightarrow u^* \lrcorner\, t \in V_t\ \forall u^* \Rightarrow (u^* \lrcorner\, t) \wedge t = 0$.
  ($\Leftarrow$): se per assurdo $t \in \bigwedge^q(V)$ non fosse puro allora $\dim_C(V_t) = h > q$. Sia $v_1, \ldots, v_h$ una base di V_t, vale che $v_i = u_i^* \lrcorner\, t$ per opportuni elementi $u_i^* \in \bigwedge^{q-1}(V)$ vista l'identificazione $Z = V_t$. Dalla relazione $0 = (u_i^* \lrcorner\, t) \wedge t = v_i \wedge t$ per $i = 1, ..h$, scrivendo $t = \sum_{|I|=q} c_I v_I$ con $I \subseteq \{1, .., h\}$, si ha che $0 = v_i \wedge t = \sum_{|I|=q} c_I(v_i \wedge v_I) = \sum_{i\notin I} \mathrm{sgn}_{I\cup i}\, c_I v_{I\cup i}$ per ogni $i = 1, .., h$. Questo implica che ogni c_I tale che $i \notin I$ deve essere nullo: se così non fosse avremmo che $\exists i \in I$ per ogni $i = 1, ..h$, ma questo è assurdo perché $h > q$ e $|I| = q$. Se ne deduce $t = 0$ e ciò è assurdo.

5.2 Relazioni di Grassmann:

Scegliendo un base di V possiamo tradurre l'ultimo criterio studiato in equazioni sulle coordinate del tensore.
Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V, $v_1^*, \ldots, v_n^*$ quella duale ed usiamo le basi usuali sui prodotti esterni: v_I con $|I| = k$ base di $\bigwedge^k(V)$.
Sia $t = \sum_{|I|=q} t_I v_I \in \bigwedge^q(V)$, per ogni $u^* \in \bigwedge^{q-1}(V)^*$ l'elemento $(u^* \lrcorner\, t) \wedge t \in \bigwedge^{q+1}(V)$, quindi per dualità, prendendo v_S^* con $|S| = q+1$ base di $\bigwedge^{q+1}(V)^*$ si ha che:

$$(u^* \lrcorner\, t) \wedge t = 0 \Leftrightarrow v_S^*((u^* \lrcorner\, t) \wedge t) = 0,\ \forall |S| = q+1.$$

Inoltre poiché le condizioni scritte dipendono linearmente da $u^* \in \bigwedge^{q-1}(V)^*$, è sufficiente verificarle per gli elementi della base di $\bigwedge^{q-1}(V)^*$: v_R^* con $|R| = q-1$. Ovvero: $t \in \bigwedge^q(V)$ è puro se e solo se

$$\forall v_S^* \in \bigwedge^{q+1}(V^*),\ \forall v_R^* \in \bigwedge^{q-1}(V^*) : v_S^*((v_R^* \lrcorner\, t) \wedge t) = 0$$

dove lo zero è lo zero di C. Ora esplicitiamo la relazione sui coefficienti:

$$v_R^* \lrcorner\, t = v_R^* \lrcorner \sum_{|I|=q} t_I v_I = \sum_{R \subseteq I} \mathrm{sgn}_{I\setminus R, R}\, t_I v_{I\setminus R} = \sum_i \mathrm{sgn}_{i,R}\, t_{R\cup\{i\}} v_i$$

dove nell'ultima uguaglianza è evidenziato il fatto che all'interno della sommatoria contano solamente gli indici I tali che $I = R \cup \{i\}$, quindi

$$(v_R^* \lrcorner\, t) \wedge t = (\sum_i \mathrm{sgn}_{i,R}\, t_{R\cup\{i\}} v_i) \wedge (\sum_{|I|=q} t_I v_I) = \sum_i \sum_{|I|=q} \mathrm{sgn}_{i,R}\, t_{R\cup\{i\}} t_I v_i \wedge v_I$$

dove sono addendi non nulli della somma quelli di indice I tali che $i \notin I$. Da cui

$$\begin{aligned} v_S^*((v_R^* \lrcorner\, t) \wedge t) &= \sum_i \sum_{\substack{|I|=q \\ i \notin I}} \mathrm{sgn}_{i,R}\, t_{R\cup\{i\}}\, \mathrm{sgn}_{I,i}\, t_I v_S^*(v_{I\cup\{i\}}) \\ &= \sum_i \sum_{\substack{I\cup\{i\}=S \\ i\notin I}} \mathrm{sgn}_{i,R}\, t_{R\cup\{i\}}\, \mathrm{sgn}_{I,i}\, t_I \end{aligned}$$

la quale, ricordando che I è un indice del tipo $I = R \cup \{i\}$ per la prima equazione e del tipo $I \cup \{i\} = S$ per l'ultima, è equivalente a:

$$\sum_{i \in S\setminus R} \mathrm{sgn}_{i,R}\, \mathrm{sgn}_{i,S\setminus\{i\}}\, t_{R\cup\{i\}} t_{S\setminus\{i\}} = 0$$

per ogni R multiindice ordinato di lunghezza $q-1$ e ogni S multiindice ordinato di lunghezza $q+1$. Queste sono relazioni quadratiche sulle coordinate del tensore e sono dette Relazioni di Grassmann (o di Plücker).

OSSERVAZIONI:
Le condizioni di Grassmann sono banali (forniscono delle identità) nei casi in cui $R \subseteq S$. Quindi le condizioni interessanti studiando i tensori puri di $\bigwedge^q(V)$ con $\dim_C(V) = n$ sono $\left(\binom{n}{q-1} - \binom{|S|}{|R|}\right)\binom{n}{q+1} = \left(\binom{n}{q-1} - \frac{(q+1)q}{2}\right)\binom{n}{q+1}$; le condizioni aumentano significativamente dopo i primi casi e non sono indipendenti tra loro. Il numero di condizioni si conta in questo modo: per ogni insieme di indici S fissato, il numero di insiemi R contenuti in S sono: $\binom{|S|}{|R|} = \frac{(q+1)q}{2}$; dato che $S, R \subseteq \{1, .., n\}$ e $|S| = q+1, |R| = q-1$. Quindi le condizioni utili fissato S sono $\binom{n}{q-1} - \frac{(q+1)q}{2}$ e al variare del numero di sottoinsiemi S otteniamo la formula soprascritta.

ESEMPI:

- Nei casi $\dim_C(V) = 0, 1, 2$ tutti i tensori alternanti sono puri.
- Nel caso $\dim_C(V) = 3$ tutti i tensori alternanti sono puri, dove quelli di grado 2 lo sono per dualità.

- Nel caso $\dim_C(V) = 4$ tutti i tensori alternanti di gradi $0, 1, 3, 4$ sono puri. Per i tensori alternanti di grado 2 le condizioni di Grassmann non banali sono 4, ma si verifica che corrispondono tutte a:
$$t_{01}t_{23} - t_{02}t_{13} + t_{03}t_{12} = 0$$
se $t = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant 3} t_{i,j} v_i \wedge v_j$.
- Nel caso $\dim_C(V) = 5$ tutti i tensori alternanti di gradi $0, 1, 4, 5$ sono puri. Per i tensori alternanti di grado 2 , le relazioni di Grassmann significative sono 20 e si riducono a 5 poiché ciascuna è ripetuta 4 volte:
$$\begin{aligned}
&(0123) \quad t_{01}t_{23} - t_{02}t_{13} + t_{03}t_{12} = 0 \\
&(0124) \quad t_{01}t_{24} - t_{02}t_{14} + t_{04}t_{12} = 0 \\
&(0134) \quad t_{01}t_{34} - t_{03}t_{14} + t_{04}t_{13} = 0 \\
&(0234) \quad t_{02}t_{34} - t_{03}t_{24} + t_{04}t_{23} = 0 \\
&(1234) \quad t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} = 0
\end{aligned}$$
se $t = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant 4} t_{i,j} v_i \wedge v_j$.
Non è difficile prevedere quando l'espressione al variare di R ed S dà la stessa condizione (a meno di un segno), accade ogni volta che $S \cup R$ corrisponde allo stesso insieme. Per esempio la condizione (1023) è ottenuta da: $S = 012$ & $R = 3$, $S = 013$ & $R = 2$, $S = 023$ & $R = 1$ e $S = 123$ & $R = 0$.
Questa considerazione può essere estesa al variare di n per $q = 2$, poiché in questo caso $R \cap S = \emptyset$ ed è facile da generalizzare. Questo migliora la nostra stima sul numero di equazioni; contandole senza ripetizioni sono: $\binom{n}{|S|+|R|} = \binom{n}{2q} = \binom{n}{4}$. Inoltre, le relazioni ottenute non sono indipendenti: prese quattro di queste condizioni vi è una relazione di dipendenza. Per esempio usando le prime quattro vi è la relazione
$$t_{04}(0123) - t_{03}(0124) + t_{02}(0134) - t_{01}(0234) = 0$$
e in generale, la somma alternata delle quattro condizioni ciascuna moltiplicata per la variabile avente l'indice comune alle quattro e l'indice mancante nella condizione è nulla:
$$\begin{aligned}
t_{14}(0123) - t_{13}(0124) + t_{12}(0134) - t_{10}(1234) = 0 \\
t_{24}(0123) - t_{23}(0124) + t_{21}(0234) - t_{20}(1234) = 0 \\
t_{34}(0123) - t_{31}(0234) + t_{32}(0134) - t_{30}(1234) = 0 \\
t_{43}(0124) - t_{41}(0234) + t_{42}(0134) - t_{40}(1234) = 0.
\end{aligned}$$
Questo porta a contare tre condizioni genericamente indipendenti, per esempio le prime tre. Per dualità di Hodge si verifica una analoga situazione per i tensori alternanti di grado 3.

- Nel caso $\dim_C(V) = 6$ tutti i tensori alternanti di gradi $0, 1, 5, 6$ sono puri.
  Per i tensori alternanti di grado 2, le relazioni di Grassmann sono 60 che si riducono a 15 condizioni perché ciascuna è ripetuta 4 volte:

(0123) $t_{01}t_{23} - t_{02}t_{13} + t_{03}t_{12}$	(0145) $t_{01}t_{45} - t_{04}t_{15} + t_{05}t_{14}$	(1234) $t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23}$
(0124) $t_{01}t_{24} - t_{02}t_{14} + t_{04}t_{12}$	(0234) $t_{02}t_{34} - t_{03}t_{24} + t_{04}t_{23}$	(1235) $t_{15}t_{23} - t_{13}t_{25} + t_{35}t_{12}$
(0125) $t_{01}t_{25} - t_{02}t_{15} + t_{05}t_{12}$	(0235) $t_{05}t_{23} - t_{25}t_{03} + t_{35}t_{02}$	(1245) $t_{15}t_{24} - t_{14}t_{25} + t_{45}t_{12}$
(0134) $t_{01}t_{34} - t_{03}t_{14} + t_{04}t_{13}$	(0245) $t_{05}t_{24} - t_{25}t_{04} + t_{45}t_{02}$	(1345) $t_{15}t_{34} - t_{14}t_{35} + t_{45}t_{13}$
(0135) $t_{01}t_{35} - t_{03}t_{15} + t_{05}t_{13}$	(0345) $t_{05}t_{34} - t_{35}t_{04} + t_{45}t_{03}$	(2345) $t_{25}t_{34} - t_{24}t_{35} + t_{45}t_{23}$

  tutte poste uguali a zero. Per ogni quattro relazioni con un indice comune e uno assente vi è una relazione di dipendenza, il che porta a contare sei condizioni genericamente indipendenti, per esempio le prime 6. Per dualità di Hodge si verifica una analoga situazione per i tensori alternanti di grado 4.
  Per i tensori alternanti di grado 3, le relazioni di Grassmann non banali diventano 180, ma vi sono molte dipendenze che portano ad avere 10 condizioni genericamente indipendenti.

Capitolo 6

Varietà di Grassmann

In questo capitolo definiremo formalmente le varietà di Grassmann ed espliciteremo la relazione tra queste e i tensori puri studiati precedentemente. Questa relazione è esattamente quella che ci permetterà di capire la struttura geometrica notevole di questi insiemi.

6.1 VARIETÀ DI GRASSMANN:
Sia C un corpo. Definiamo $\mathbb{G}_{n,k}(C) = \{L \leqslant \mathbb{P}^n(C) \mid \dim(L) = k\}$ la Grassmanniana delle sottovarietà lineari di dimensione k di $\mathbb{P}^n(C)$.

OSSERVAZIONI:

- $\mathbb{P}^n(C) = \mathbb{P}(C^{n+1}) = (C^{n+1}\backslash\{0\})/C^\times$ quindi un sottospazio lineare di dimensione k in $\mathbb{P}^n(C)$ corrisponde ad un sottospazio lineare di dimensione $k+1$ in C^{n+1}, quando pensiamo ad una Grassmanniana da questo punto di vista la denoteremo con $G_{n+1,k+1}$.
- Se non ci sarà ambiguità indicheremo con $\mathbb{G}_{n,k}$ la Grassmanniana dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(C)$ già indicata con $\mathbb{G}_{n,k}(C)$.
- Se V è uno spazio vettoriale su C di dimensione $n+1$ e vogliamo indicare una Grassmanniana delle sottovarietà di dimensione k senza scegliere esplicitamente una base scriveremo $\mathbb{G}_k(V)$.
- $\mathbb{G}_{n,0}(C) \cong \mathbb{P}^n(C) = \mathbb{P}(C^{n+1})$ insieme di punti e $\mathbb{G}_{n,n-1}(C) \cong \mathbb{P}^n(C)^*$ insieme di iperpiani (insieme di punti di $\mathbb{P}^n(C)^*$).
- $\mathbb{G}_{n,k}(C) \cong \mathbb{G}_{n,n-k-1}(C)^*$ per la corrispondenza tra gli spazi di dimensione k di $\mathbb{P}^n(C)$ e quelli di dimensione $n-k-1$ di $\mathbb{P}^n(C)^*$.

Nella maggior parte dei casi, le Grassmanniane sono definite inizialmente via coordinate, qui invece siamo interessati a mostrare subito la loro immersione in uno spazio proiettivo. Consideriamo quindi:

6.2 Immersione di Plücker:
Sia V spazio vettoriale su C di dimensione n, si ha un morfismo naturale

$$\mathbb{G}_{n-1,k-1}(C) \cong G_k(V) \longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^k(V)\right)$$
$$\langle u_1, \dots, u_r\rangle \mapsto u_1 \wedge \dots \wedge u_r$$

che manda $U = \langle u_1, \dots, u_r\rangle \leqslant V$ nel corrispondente tensore $\lambda = u_1 \wedge \dots \wedge u_r$ di $\bigwedge^k(V)$, dove λ è determinato a meno di scalari da U.
Osservazioni:

- La mappa è un'immersione: per ogni tensore puro nell'immagine possiamo ottenere il corrispondente sottospazio U come lo spazio dei vettori $v \in V$ tali che $v \wedge \lambda = 0 \in \bigwedge^{k+1}(V)$.
- Se due k-uple di vettori generano lo stesso sottospazio vettoriale U, di dimensione k, allora i corrispondenti tensori sono uguali a meno di moltiplicare per il determinante della matrice di cambio di base; in questo senso λ è determinato a meno di scalari da U.
- l'immersione è definita dalle relazioni di Grassmann dunque varietà algebrica in $\mathbb{P}^N(C) \cong \mathbb{P}(\bigwedge^k(V)) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$.
- Le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^N(C) = \mathbb{P}(\bigwedge^k(V))$ sono dette coordinate plückeriane. Se $L = Q_1 \vee \cdots \vee Q_k$ con $Q_i = \sum_j x_{j,i} v_j$ allora le coordinate del punto corrispondente in $\mathbb{P}^N(C)$ sono $[p_I] = \langle \sum_I p_I v_I \rangle$ ove p_I è il minore di ordine $r+1$ della matrice $(x_{j,i})$ ottenuto usando le righe di indici in I. Sono i massimi minori della matrice ottenuta da L presi in ordine lessicografico.

Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra i sottospazi di dimensione k di $V = C^{n+1}$ ed i punti di $\mathbb{P}(\bigwedge^k(V)$, generati dai tensori puri. Caratterizzare i tensori puri in $\bigwedge^k(V)$ corrisponde a determinare un sottoinsieme di $\bigwedge^k(V)$ che parametrizza i sottospazi di dimensione k di V.

6.3 Dimensioni:
Per quanto riguarda le dimensioni di una varietà irriducibile abbiamo due definizioni equivalenti:

- La dimensione di una varietà irriducibile proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^n(C)$ è il più piccolo intero k tale che esiste un sottospazio di dimensione $(n-k-1)$ disgiunto da X.
- La dimensione di una varietà irriducibile $X \subseteq \mathbb{P}^n(C)$ è l'intero k tale che un generico $(n-k)$-piano in $\mathbb{P}^n(C)$ interseca X in un numero finito di punti.

6.4 Dimensioni di una Grassmanniana:
Sia $G_{n,k} = \{W : W \leqslant C^n, \dim_C(W) = k\}$, fissiamo un sottospazio $W' \leqslant V$ tale che $\dim_C(W') = n-k$ e consideriamo l'insieme dei complementari di W'

$$\mathscr{C} = \{U \leqslant V : V = U \oplus W'\} \leqslant G_{n,k}.$$

L'idea alla base del calcolo della dimensione è la seguente: abbiamo definito il sottospazio $\mathscr{C}$ perché corrisponde a $G_{n,k}$ a cui abbiamo tolto l'intersezione con un iperpiano, quindi dimostrando che $\mathscr{C}$ è isomorfo ad uno spazio affine possiamo dedurre la dimensione di $G_{n,k}$. Il fatto che $\mathscr{C}$ sia $G_{n,k}$ meno l'intersezione con un iperpiano segue dalla condizione di complementarietà con W': fissata una base $w_1, \ldots, w_{n-k}$ di W' un generico elemento $U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ di $\mathscr{C}$ deve essere tale che $\det(w_1, \ldots, w_{n-k}, u_1, \ldots, u_k) \neq 0$ e imporre questa condizione (equazione lineare nelle coordinate plückeriane di U) corrisponde a togliere un iperpiano. Dal momento che $\dim_C(G_{n,k}) = \dim_C(G_{n,k} \cap \mathscr{C})) = \dim_C(\mathscr{C})$ studiamo il sottospazio $\mathscr{C}$ e mostriamo in che modo è isomorfo ad uno spazio affine.
Gli elementi di $\mathscr{C}$ hanno tutti questa proprietà: si possono ottenere a partire da un omomorfismo in $\varphi \in \mathrm{Hom}(V/W', W')$ e un sottospazio fissato W_0, complementare di W'.
Preso W_0 e $W \in \mathscr{C}$ abbiamo i morfismi canonici

$$W \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/W'$$

$$W_0 \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/W'$$

da cui gli isomorfismi $W \cong V/W' \cong W_0$. Sia ora $[v]$ un elemento di V/W' per gli isomorfismi sopracitati $\exists\, w \in W, w_0 \in W_0$ tali che $w, w_0 \in [v]$, dunque $[v] = [w_0] = [w]$ e da questo segue che $w - w_0 \in w'$ perché $[w - w_0] = 0$. In questo modo abbiamo definito un morfismo

$$W_0 \cong V/W' \xrightarrow{\varphi} W'$$

$$[v] \longmapsto w - w_0$$

che ci permette di scrivere un generico elemento $W \in \mathscr{C}$ come:

$$W = \{w_0 + \varphi([w_0]) : w_0 \in W_0\}.$$

Mostrando questa proprietà abbiamo dimostrato che $\mathscr{C}$ è spazio affine con spazio delle traslazioni $\mathrm{Hom}_C(V/W', W')$ e azione definita da:

$$\begin{aligned} \mathscr{C} \times \mathrm{Hom}_C(V/W', W') &\longrightarrow \mathscr{C} \\ (W_0, \varphi) &\longmapsto W = \{w_0 + \varphi([w_0]) : w_0 \in W_0\} \end{aligned}$$

La dimensione di $\mathscr{C}$ come spazio affine è quella di $\mathrm{Hom}_C(V/W', W')$, cioè $k(n-k)$.

Esempi:

- $\mathbb{G}_{3,1}(C)$ l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^3(C)$:
  L'insieme delle rette di $\mathbb{P}^3$ è la prima Grassmanniana non banale, ha dimensione 4 e si immerge in $\mathbb{P}^5(C)$.
  Nel capitolo precedente avevamo studiato il numero di relazioni di Grassmann al variare della dimensione di V e del grado dei tensori: $\mathbb{G}_{3,1}(C)$ è immersa in $\mathbb{P}^5(C) \cong \mathbb{P}(\bigwedge^2(C^4))$ quindi in questo caso abbiamo che è descritta da una sola equazione. Quindi l'immersione di Plücker

  $$\mathbb{G}_{3,1}(C) \cong G_{4,2}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^5(C)$$

definisce una biiezione tra la Grassmanniana e i punti di una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^5(C)$, l'equazione di $\mathcal{Q}$ è esattamente quella data dalle relazioni di Grassmann.
In generale però una Grassmanniana non corrisponde sempre ad una quadrica, ma è intersezione di più quadriche.

- $\mathbb{G}_{4,1}(C)$ l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^4(C)$:
  L'insieme delle rette di $\mathbb{P}^4(C)$, $\mathbb{G}_{4,1}(C) \cong G_{5,2}$, ha dimensione 6 e si immerge in $\mathbb{P}(\bigwedge^2(C^5) \cong \mathbb{P}^9$. Dallo studio sul numero di relazioni di Grassmann vediamo che in questo caso la Grassmanniana è in generale intersezione di 3 quadriche.
- $\mathbb{G}_{5,1}(C)$ l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^5(C)$:
  in questo caso $\mathbb{G}_{5,1}(C) \cong G_{6,2}$ ha dimensione 8, ed è intersezione di quadriche in $\mathbb{P}^{14}(C)$.

Diamo ora un'ultima caratteristica della Grassmanniana come varietà di $\mathbb{P}^N(C)$.
6.5 Grado:
Il grado di una varietà irriducibile $X \subseteq \mathbb{P}^n(C)$ di dimensione k è il numero di punti di intersezione di Ω con X, dove Ω è un generico $(n-k)$-piano.

6.7 Grado d una Grassmanniana:
Per queste varietà è possibile dare un'interpretazione della definizione generale sopracitata: il grado di una Grassmanniana $\mathbb{G}_{n,k}(C) \subseteq \mathbb{P}^N(C) = \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1}(C^{n+1}))$ è il numero di k-piani in $\mathbb{P}^N(C)$ che intersecano ognuno degli $(k+1)(n-k)$ piani di dimensione $(n-k-1)$.
In generale non è semplice calcolarne il grado, anche usando quest'interpretazione, infatti non è possibile determinare direttamente il numero dei piani di dimensione k con la proprietà della definizione. Esiste tuttavia una formula universale, ricavata usando la descrizione dello spazio tangente, che per completezza riportiamo, ma non dimostriamo.
Il grado di una Grassmanniana $\mathbb{G}_{n,k}$ è

$$\deg(\mathbb{G}_{n,k}) = ((k+1)(n-k))! \prod_{i=0}^{k} \frac{i!}{(n-k+i)!} \ .$$

Esempi:
Riportiamo i gradi delle Grassmanniane studiate negli esempi precedenti:

- $\deg(\mathbb{G}_{3,1}) = 2$
- $\deg(\mathbb{G}_{4,1}) = 5$
- $\deg(\mathbb{G}_{5,1}) = 14$.

Bibliografia

[1] Maurizio Candilera. *Algebra lineare e geometria.* Padova: Libreria Progetto, 1990.

[2] Giovanni Gerotto. *Appunti di geometria 2.* Padova: Libreria Progetto, 1990.

[3] Joe Harris. *Algebraic geometry : a first course.* Graduate texts in mathematics. New York: Springer, 1992. ISBN: 0387977163.