UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Strutture o-minimali e caratteristica di Eulero

Relatrice:
Prof.ssa Alessandra Bertapelle

Laureando: Mattia Maculan
Matricola: 2057235

Anno Accademico 2022/2023

15/12/2023

Indice

Introduzione

Nel 1984 Alexander Grothendieck pubblica "Esquisse d'un Programme" [2], in cui delinea un programma che mira a riformulare l'approccio corrente alla Topologia, in quanto lo ritiene eccessivamente dipendente dall'impostazione data dagli analisti nel corso del '900. Tale approccio sarebbe responsabile di molti fenomeni bizzarri, dei quali secondo lui non ci si dovrebbe preoccupare in quanto privi di una intuizione geometrica. L'obiettivo quindi è quello di formulare una topologia moderata (*tame*), che permetta di unificare alcuni risultati già noti per gli insiemi semialgebrici e nella quale sia prevista una nozione di stratificazione.

Lo studio di insiemi e mappe semialgebriche suggerisce a Lou van den Dries, tra gli altri, la possibilità di poter dimostrare numerose loro proprietà a partire da pochi assiomi. Questi caratterizzano degli oggetti che in seguito ad un articolo di Pillay e Steinhorn [3] verranno chiamati *strutture o-minimali*. Nel libro "Tame Topology and O-minimal Structures"[5] sono raccolti degli appunti di van den Dries che già nel 1986 circolavano tra gli addetti ai lavori, corroborando la tesi che le strutture o-minimali forniscano un contesto eccellente in cui studiare una topologia *tame* nel senso indicato da Grothendieck, precludendo la presenza di insiemi patologici, come quello di Cantor.

In questa tesi esponiamo i primi risultati della teoria delle strutture o-minimali seguendo il libro di van den Dries [5], in particolare i capitoli 1, 2 e 4. Abbiamo posto particolare impegno nel completare varie dimostrazioni lasciate al lettore e nel chiarire, con maggiori dettagli, alcuni esempi proposti.

Illustriamo ora più nel dettaglio i contenuti della tesi.

Nel primo capitolo introduciamo il concetto di *struttura*, di cui dimostriamo alcune proprietà. In seguito ci restringiamo a considerare le *strutture o-minimali* su un insieme totalmente ordinato, dove la lettera *o* sta a ricordare che l'insieme è ordinato. In questo contesto studiamo gli oggetti *definibili*, ovvero compatibili con una certa struttura o-minimale fissata, e dimostriamo alcuni risultati topologici che danno un'indicazione del carattere *tame* di queste strutture. Le dimostrazioni dei risultati proposti si sono rivelate più semplici facendo uso delle formule del primo ordine, così come trattate in [1].

Il secondo capitolo è dedicato all'esposizione del teorema più importante, ovvero il Teorema 2.13 di decomposizione in celle. Questo risultato permette di concludere, tra le altre cose, che tutte le funzioni definibili sono continue quando ristrette alle celle di una opportuna decomposizione finita.

Il terzo e ultimo capitolo è dedicato allo studio di due invarianti degli insiemi definibili: la dimensione e la caratteristica di Eulero. Introduciamo queste nozioni prima per le celle e in seguito per tutti gli insiemi definibili, a partire da una loro decomposizione, dimostrando poi che il risultato non dipende dalla decomposizione scelta.

Capitolo 1

Risultati elementari

1.1 Strutture

Definizione 1.1. Data una successione $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, diremo che essa è una *struttura* su un insieme non vuoto R se per ogni $m \geq 0$ valgono:

(S1) $\mathcal{S}_m$ è un'algebra booleana di sottoinsiemi di R^m, ossia $\emptyset \in \mathcal{S}_m$ e dati $A, B \in \mathcal{S}_m$, si ha che $A \cup B \in \mathcal{S}_m$ e $R^m \setminus A \in \mathcal{S}_m$;

(S2) se $A \in \mathcal{S}_m$, allora $R \times A$ e $A \times R$ appartengono a $\mathcal{S}_{m+1}$;

(S3) $\big\{(x_1, \dots, x_m) \in R^m \colon x_1 = x_m\big\} \in \mathcal{S}_m \quad \forall m > 0$;

(S4) se $A \in \mathcal{S}_{m+1}$, allora $\pi(A) \in \mathcal{S}_m$, dove $\pi \colon R^{m+1} \to R^m$ è la proiezione sulle prime m coordinate.

Nel seguito diremo che $A \subseteq R^m$ appartiene a $\mathcal{S}$ se appartiene a $\mathcal{S}_m$ e che una mappa $f \colon A \to B$ con $A \subseteq R^m$ e $B \subseteq R^n$ appartiene a $\mathcal{S}$ se il suo grafico $\Gamma(f) \subseteq R^{m+n}$ appartiene a $\mathcal{S}_{m+n}$.

Verifichiamo con il prossimo lemma che le strutture su un fissato R sono chiuse per l'operazione di prodotto cartesiano e che la condizione (S3) può essere resa più simmetrica. Inoltre dimostriamo che le variabili coinvolte possono essere permutate tra loro, senza cambiare l'appartenenza a $\mathcal{S}$.

Lemma 1.2.

(i) *Se $A \in \mathcal{S}_m$ e $B \in \mathcal{S}_n$, allora $A \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$.*

(ii) *Per ogni $1 \leq i < j \leq m$ la diagonale $\Delta_{ij} \coloneqq \big\{(x_1, \dots, x_m) \in R^m \colon x_i = x_j\big\}$ appartiene a $\mathcal{S}$.*

(iii) *Sia $B \in \mathcal{S}_n$ e siano $i(1), \dots, i(n) \in \{1, \dots, m\}$. Allora l'insieme $A \subseteq R^m$ definito dalla condizione*

$$(x_1, \dots, x_m) \in A \iff (x_{i(1)}, \dots, x_{i(n)}) \in B$$

appartiene a $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. (i) Usando ripetutamente la (S2) della Definizione 1.1, si ha che $A \times R^n, R^m \times B \subseteq R^{m+n}$ appartengono a $\mathcal{S}_{m+n}$. Pertanto per (S1) vale $A \times B = A \times R^n \cap R^m \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$.

(ii) Si noti che $\Delta \coloneqq \big\{(x_1, \dots, x_{j-i+1}) \in R^{j-i+1} \colon x_1 = x_{j-i+1}\big\}$ appartiene a $\mathcal{S}$ per (S3). Applicando la (i) si ha allora che $\Delta_{ij} = R^{i-1} \times \Delta \times R^{m-j}$ appartiene a $\mathcal{S}$.

(iii) Utilizzando la (ii) per $1 \leq i(j) < m + j \leq m + n$, al variare di $j = 1, \dots, n$, si ha che $\Delta_{i(j),m+j} \in \mathcal{S}$, da cui

$$\bigcap_{j=1}^{n} \Delta_{i(j),m+j} = \big\{(x_1, \dots, x_m, x_{i(1)}, \dots, x_{i(n)}) \colon (x_1, \dots, x_m) \in R^m\big\} \in \mathcal{S}.$$

Segue che

$$\big(R^m \times B\big) \cap \bigcap_{j=1}^{n} \Delta_{i(j),m+j} = A \times B \in \mathcal{S}.$$

Applicando m volte la (S4) si ha pertanto che $A \in \mathcal{S}$. □

Le condizioni (S1) e (S4) di $\mathcal{S}$ impongono a $\mathcal{S}_n$ di essere un'algebra booleana e di essere chiusa per proiezioni, il che può essere espresso come la chiusura di $\mathcal{S}$ per formule del primo ordine, in un senso che andiamo a specificare con la seguente definizione:

Definizione 1.3 (Formule del primo ordine)**.** Data una struttura $\mathcal{S}$, chiameremo *formule del primo ordine* quelle costruite secondo le seguenti regole:

1. se $A \in \mathcal{S}_n$, allora $x \in A$, dove $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, è una formula del primo ordine.
2. se $\phi(x_1, \dots, x_n)$ e $\psi(x_1, \dots, x_n)$ sono formule del primo ordine, allora $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\neg\phi$ e $\phi \implies \psi$ sono formule del primo ordine.
3. se $\phi(x, y)$ è una formula del primo ordine, con $x, y \in R^n$ e $A \in \mathcal{S}_n$, allora $\exists y \in A\, \phi(x, y)$ e $\forall y \in A\, \phi(x, y)$ sono formule del primo ordine.

Vale allora il seguente:

Teorema 1.4. *Sia $\mathcal{S}$ una struttura e $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una formula del primo ordine; allora l'insieme degli $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ che soddisfano $\phi(x_1, \dots, x_n)$ appartiene a $\mathcal{S}_n$.*

Dimostrazione. Proviamo l'asserto dimostrando che le tre regole della Definizione 1.3 lo soddisfano:

1. dato $A \in \mathcal{S}_n$, vale $\{x \in R^n \colon x \in A\} = A \in \mathcal{S}_n$ per definizione.
2. Supponendo che $\phi(x_1, \dots, x_n)$ e $\psi(x_1, \dots, x_n)$ siano formule del primo ordine che definiscano insiemi $\Phi \coloneqq \{x \in R^n \colon \phi(x)\} \in \mathcal{S}_n$ e $\Psi \coloneqq \{x \in R^n \colon \psi(x)\} \in \mathcal{S}_n$, si ha che

$$\begin{aligned} \phi \wedge \psi &\quad \text{definisce} \quad \Phi \cap \Psi \in \mathcal{S}_n, \\ \phi \vee \psi &\quad \text{definisce} \quad \Phi \cup \Psi \in \mathcal{S}_n, \\ \neg\phi &\quad \text{definisce} \quad R^n \setminus \Phi \in \mathcal{S}_n, \\ \phi \implies \psi &\quad \text{definisce} \quad \big(R^n \setminus \Phi\big) \cup \Psi \in \mathcal{S}_n, \end{aligned}$$

in quanto $\mathcal{S}_n$ è un'algebra booleana.

3. Siano $A \in \mathcal{S}_m$, $x \in R^n$, $y \in R^m$ e $\Phi \coloneqq \{(x, y) \in R^n \times R^m : \phi(x, y)\} \in \mathcal{S}_{n+m}$ l'insieme definito dalla formula del primo ordine $\phi(x, y)$. Allora, detta $\pi : R^{n+m} \to R^n$ la proiezione sulle prime n coordinate, si ha che:

$$\exists y \in A\, \phi(x, y) \quad \text{definisce} \quad \{x \in R^n : \exists y \in A\, \phi(x, y)\} = \pi\big(\Phi \cap (R^n \times A)\big) \in \mathcal{S}_n,$$

in quanto la (S2) applicata n volte implica $R^n \times A \in \mathcal{S}_{m+n}$, che è un'algebra booleana per (S1), e per (S4) la proiezione sulle prime n coordinate appartiene a $\mathcal{S}_n$. Si ha poi che

$$\begin{aligned} \forall y \in A\, \phi(x, y) \quad \text{definisce} \quad & \big\{x \in R^n : \forall y \in A\, \phi(x, y)\big\} = \\ =& \Big\{x \in R^n : \neg\big(\exists y \in A\, \neg\phi(x, y)\big)\Big\} = \\ =& R^n \setminus \pi\big((R^{n+m} \setminus \Phi) \cap (R^n \times A)\big) \in \mathcal{S}_n, \end{aligned}$$

analogamente al caso precedente. □

Lemma 1.5. *Sia $S \subseteq R^m$ e sia $f : S \to R^n$ una mappa che appartiene a $\mathcal{S}$. Allora valgono:*

(i) *$S \in \mathcal{S}_m$;*

(ii) *se $A \subseteq S$ e $A \in \mathcal{S}_m$, allora $f(A) \in \mathcal{S}_n$ e la restrizione $f|_A$ appartiene a $\mathcal{S}$;*

(iii) *se $B \in \mathcal{S}_n$, allora $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}_m$;*

(iv) *se f è iniettiva, allora la sua inversa f^{-1} appartiene a $\mathcal{S}$;*

(v) *se $f(S) \subseteq T \subseteq R^n$ e $g : T \to R^p$ è un'altra mappa appartenente a $\mathcal{S}$, allora la mappa composta $g \circ f : S \to R^p$ appartiene a $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. In virtù del Teorema 1.4, è sufficiente mostrare che gli insiemi in questione possono essere definiti facendo uso di formule del primo ordine:

(i) $S = \Big\{x \in R^m : \exists y \in R^n\big((x, y) \in \Gamma(f)\big)\Big\} \implies S \in \mathcal{S}_m$.

(ii) $f(A) = \Big\{y \in R^n : \exists x \in A\big((x, y) \in \Gamma(f)\big)\Big\} \in \mathcal{S}_n$. Infine

$$\Gamma(f|_A) = \{(a, f(a)) : a \in A\} = \big(A \times R^n\big) \cap \Gamma(f) \in \mathcal{S}_{m+n} \implies f|_A \in \mathcal{S}$$

(iii) $f^{-1}(B) = \Big\{x \in R^m : \exists y \in R^n\big((x, y) \in \Gamma(f)\big)\Big\} \in \mathcal{S}_m$.

(iv) $f^{-1} : f(S) \to R^m$ è ben definita, essendo f iniettiva, e

$$\Gamma(f^{-1}) = \big\{(y, x) \in R^n \times R^m : (x, y) \in \Gamma(f)\big\}$$

appartiene a $\mathcal{S}$ per la (iii) del Lemma 1.2.

(v) $\Gamma(g \circ f) = \Big\{(x, z) \in R^m \times R^p : \exists y \in R^n\big((x, y) \in \Gamma(f) \wedge (y, z) \in \Gamma(g)\big)\Big\} \in \mathcal{S}_{m+p}$. □

1.2 Strutture o-minimali

Notazione. Un insieme totalmente ordinato R è detto *denso* se $\forall a, b \in R$ con $a < b$ esiste $c \in R$ tale che $a < c < b$. D'ora in poi denoteremo con $(R, <)$ un insieme totalmente ordinato, denso e privo di estremi; gli elementi di R saranno chiamati anche *punti*.

Per convenienza, indicheremo con $R_\infty := R \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'insieme totalmente ordinato che aggiunge a R gli estremi, per cui $-\infty < r < +\infty \quad \forall r \in R$.

Nel seguito chiamiamo *intervalli* i sottoinsiemi di R del tipo $(a, b) := \{r \in R \colon a < r < b\}$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dotiamo R della topologia generata dagli intervalli e R^m della corrispondente topologia prodotto. Si noti che R^m munito di questa topologia è uno spazio di Hausdorff.

Osservazione. Si noti che, anche se faremo uso di insiemi del tipo $[a, b) := (a, b) \cup \{a\}$, $(a, b] := (a, b) \cup \{b\}$ e $[a, b] := (a, b) \cup \{a, b\}$, useremo il termine *intervallo* solamente per indicare quelli aperti del tipo (a, b).

Nel seguito chiameremo *parallelepipedi* di R^m gli insiemi del tipo $P = \Pi_{k=1}^m I_k$ per certi intervalli $I_k \subseteq R$. Dato un'insieme $A \subseteq R^m$, denoteremo con $cl(A)$ e $int(A)$ rispettivamente la sua chiusura e parte interna in R^m.

Studiamo ora un tipo particolare di strutture, minimali rispetto all'ordine, in cui filtriamo gli insiemi di $\mathcal{S}$ richiedendo che, proiettando sulla prima coordinata, si ottengano insiemi particolarmente semplici:

Definizione 1.6. Sia $(R, <)$ un insieme totalmente ordinato, non vuoto e privo di estremi. Una *struttura o-minimale* su $(R, <)$ è una struttura $\mathcal{S}$ su R tale che
(O1) $\big\{(x, y) \in R^2 \colon x < y\big\} \in \mathcal{S}_2$;

(O2) gli insiemi in $\mathcal{S}_1$ sono esattamente le unioni finite di punti e intervalli.
In tal caso diremo che $(R, <, \mathcal{S})$ è una struttura o-minimale.

Notazione. Per indicare che un insieme A (o una funzione f) appartiene a $\mathcal{S}$, scriveremo semplicemente che è A (o f) è *definibile*, quando $\mathcal{S}$ è chiara dal contesto.

Osservazione. Osserviamo che i parallelepipedi sono definibili: dato $P = \Pi_{k=1}^n I_k \subseteq R^n$, per certi intervalli $I_k \subseteq R$, si ha che

$$P = \prod_{k=1}^{n} I_k = \bigcap_{k=1}^{n} R^{k-1} \times I_k \times R^{n-k} \in \mathcal{S}_n.$$

Il fatto che i parallelepipedi siano definibili ovviamente non garantisce che tutti gli aperti lo siano, il che motiva la seguente definizione:

Definizione 1.7. Un insieme $X \subseteq R^m$ è detto *definibilmente connesso* se X è definibile e non è l'unione disgiunta di due sottoinsiemi definibili aperti e non vuoti di X.

Nel seguito, considerando un insieme definibile A, ci limiteremo a dire che sia connesso, intendendo che lo sia definibilmente.

Occupiamoci ora di verificare che le strutture o-minimali sono compatibili con molte delle tipiche operazioni topologiche.

Lemma 1.8.

(i) *Se $A \subseteq R^m$ è definibile, allora anche $cl(A)$ e $int(A)$ lo sono;*

(ii) *Se $A \subseteq B \subseteq R^m$ sono insiemi definibili tali che A sia aperto in B, allora esiste un aperto definibile $U \subseteq R^m$ tale che $U \cap B = A$.*

Dimostrazione. (i) Vale $(x_1, \dots, x_m) \in cl(A)$ se e solo se

$$\forall y_1 \dots \forall y_m \forall z_1 \dots \forall z_m \big[(y_1 < x_1 < z_1 \wedge \dots \wedge y_m < x_m < z_m) \implies \\ \exists a_1 \dots \exists a_m (y_1 < a_1 < z_1 \wedge \dots \wedge y_m < a_m < z_m \wedge (a_1, \dots, a_m) \in A)\big],$$

pertanto $cl(A)$ è definibile per il 1.4. Di conseguenza, $int(A) = R^m \backslash cl(R^m \backslash A) \in \mathcal{S}_m$, essendo un'algebra booleana.

(ii) L'insieme

$$U \coloneqq \Big\{x \in R^m \colon \exists y, z \in R^m \big(x \in \prod_{i=1}^{m}(y_i, z_i) \wedge \prod_{i=1}^{m}(y_i, z_i) \cap B \subseteq A\big)\Big\}$$

è definibile, in quanto ottenuto tramite formule del primo ordine. Dimostriamo che U è aperto: sia $x \in U$, allora esiste un parallelepipedo $P \coloneqq \prod_{i=1}^{m}(y_i, z_i)$ per certi $y, z \in R^m$ tale che $x \in P$ e $P \cap B \subseteq A$. Notiamo che $\bar{x} \in P \implies \bar{x} \in U$, di conseguenza $P \subseteq U$ è un intorno aperto di x contenuto in U, che è quindi aperto per la generalità di x. Dalla definizione di U si verifica banalmente che $U \cap B \subseteq A$. Fissato $a \in A$, essendo esso aperto in B, esiste un parallelepipedo $\prod_{i=1}^{m}(y_i, z_i)$ contenente a e tale che $\prod_{i=1}^{m}(y_i, z_i) \cap B \subseteq A$, per cui $a \in U$, da cui $A \subseteq U \cap B \implies U \cap B = A$. □

Lemma 1.9. *Sia $A \subseteq R$ definibile. Allora* $\inf(A)$ *e* $\sup(A)$ *esistono in R_∞.*

Dimostrazione. $A_- \coloneqq \big\{x \in R \colon \forall a \in A (x \leq a)\big\} = \big\{x \in R \colon \forall a \in A (x < a \vee x = a)\big\}$ è un sottoinsieme definibile di $\mathcal{S}_1$ per (O1) e il Teorema 1.4. Dunque, per (O2) si ha che A_- è unione finita (eventualmente vuota) di punti e intervalli in R. Pertanto, esistono $m, n \in \mathbb{N}$, $(a_i, b_i) \subseteq R_\infty, i = 1, \dots, m$ e $c_j \in R \cup \{-\infty\}, j = 1, \dots, m$ tali che

$$A_- \cup \{-\infty\} = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \cup \bigcup_{j=1}^{m} c_j,$$

dove possiamo assumere che valga $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_n$ e $-\infty = c_1 < \dots < c_m$, intendendo che un'unione vuota sia $\emptyset$. Consideriamo i vari casi:

- $(n = 0 \vee b_n \leq c_m)$ allora c_m è il più grande dei minoranti di A, per cui $\inf(A) = c_m \in R \cup \{-\infty\}$.

- $(b_n > c_m)$ supponiamo per assurdo che esista $x \in A$ tale che $x < b_n$. Allora $(x, b_n) \cap (a_n, b_n)$ è non vuoto, per cui esiste $y \in (a_n, b_n) \subseteq A_-$ con $y > a$, il che è assurdo. Dunque $b_n \leq x$ per ogni $x \in A$ e d'altronde $b_n \notin A_- \cup \{-\infty\}$, dunque $\inf(A) = b_n = +\infty$.

Per quanto riguarda $\sup(A)$, la dimostrazione è del tutto analoga a meno di cambiare il verso di tutte le disuguaglianze e scambiare il ruolo di $\pm\infty$. □

Lemma 1.10.

(i) *I sottoinsiemi definibili connessi di R sono: $\emptyset$, gli intervalli, gli insiemi $[a, b)$ con $-\infty < a < b \le +\infty$, gli insiemi $(a, b]$ con $-\infty \le a < b < +\infty$ e gli insiemi $[a, b]$ con $-\infty < a \le b < +\infty$.*

(ii) *L'immagine di un insieme definibile connesso $X \subseteq R^m$ tramite una mappa definibile continua $f : X \to R^n$ è connessa.*

(iii) *Se $X, Y \subseteq R^m$ sono definibili, con $X \subseteq Y \subseteq cl(X)$ e X connesso, allora Y è connesso.*

(iv) *se X e Y sono insiemi definibili connessi di R^m e $X \cap Y \neq \emptyset$, allora $X \cup Y$ è connesso.*

Dimostrazione. (i) Sia $I \subseteq R$ definibile e connesso, siano $a = \inf(I)$ e $b = \sup(I)$, con $a, b \in R_\infty$. Consideriamo tre casi:

- $(a > b)$ allora deve essere $a = +\infty$ e $b = -\infty$, da cui $I = \emptyset$.
- $(a = b)$ allora $I = a = [a, a]$ è un punto di R.
- $(a < b)$ supponiamo per assurdo che esista $c \in (a, b) \setminus I$. Essendo $a = \inf(I)$, $I \cap (a, c) \neq \emptyset$, e analogamente $I \cap (c, b) \neq \emptyset$. Allora $I \cap (-\infty, c)$ e $I \cap (c, +\infty)$ sono due aperti disgiunti e non vuoti la cui unione è l'insieme connesso I, assurdo. Segue che $(a, b) \subseteq I$, che quindi è del tipo (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ o $[a, b]$.

Tutti gli intervalli sopra citati sono definibili per o-minimalità (O2) di $\mathcal{S}$; verifichiamo anche che sono connessi. $\emptyset$ e $[a, a]$ sono connessi per ragioni di cardinalità; consideriamo J con $(a, b) \subseteq J \subseteq [a, b]$, in modo da trattare assieme i 4 tipi di intervalli: siano $A_1, A_2 \subseteq R$ aperti definibili disgiunti tali che $J = A_1 \cup A_2$. Sia

$$L := \{\inf(A_1), \inf(A_2), \sup(A_1), \sup(A_2)\} \subseteq [a, b] \cup \{\pm\infty\}.$$

Se esistesse $x \in L \cap J$, si avrebbe che ogni aperto di J contenente x intersecherebbe A_1 e A_2, per cui $x \notin A_1 \cup A_2$, essendo essi aperti, il che è assurdo. Dunque $L \subseteq \{-\infty, a, b, +\infty\}$.

Se per assurdo $L \subseteq \{a, b\}$, allora deve essere $\inf(A_1) = \inf(A_2) = a \notin J$. Essendo A_1 e A_2 definibili, essi sono unioni finite di punti e intervalli, per cui

$$\begin{aligned}\inf(A_1) = a \notin A_1 &\iff \exists a_1 \in A_1 \big((a, a_1) \subseteq A_1\big)\\ \inf(A_2) = a \notin A_2 &\iff \exists a_2 \in A_2 \big((a, a_2) \subseteq A_2\big).\end{aligned}$$

Ma allora $\big(a, \min(a_1, a_2)\big) \subseteq A_1 \cap A_2$, per cui A_1 e A_2 non sono disgiunti, assurdo. Perciò, senza perdita di generalità, si ha che $\inf(A_1) = +\infty \implies A_1 = \emptyset$, quindi J è connesso.

(ii) L'immagine $f(X)$ è definibile per il punto (ii) del Lemma 1.5, dimostriamo che è definibilmente connessa. Sia $f(X) = A_1 \cup A_2$ per certi insiemi disgiunti $A_1, A_2 \subseteq R^n$ definibili e aperti in $f(X)$. Per la continuità di f e il punto (iii) del Lemma 1.5, si ha che $X = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$ è unione disgiunta di aperti definibili in X, connesso per ipotesi. Allora una di tali controimmagini è banale, quindi $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

(iii) Sia $Y = A_1 \cup A_2$ per certi insiemi disgiunti $A_1, A_2 \subseteq R^m$ definibili e aperti in Y. Allora $X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X)$ è una unione disgiunta di definibili aperti in X, connesso per ipotesi. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $X \subseteq A_1$ e $A_2 \subseteq \partial X$. Dato $x \in \partial X$, si ha che per definizione ogni suo intorno aperto contiene un elemento in $X \subseteq A_1$, quindi $x \notin A_2$, che è aperto in Y disgiunto da esso. Quindi $A_2 = \emptyset$, perciò Y è connesso.

(iv) Sia $X \cup Y = A_1 \cup A_2$ per certi insiemi disgiunti $A_1, A_2 \subseteq R^m$ definibili e aperti in $X \cup Y$. Allora

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X)$$
$$Y = (A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y)$$

sono unioni di definibili aperti in X e Y, rispettivamente, in cui uno dei due membri è banale, essendo X e Y connessi. Sia $x \in X \cap Y$ contenuto in A_1, senza perdita di generalità. Allora $A_1 \cap X$ e $A_1 \cap Y$ sono non vuoti, per cui deve essere $A_2 \cap X = A_2 \cap Y = \emptyset \implies A_2 = \emptyset$, da cui segue che $X \cup Y$ è connesso. $\square$

Lemma 1.11. *Sia $A \subseteq R$ definibile. Allora la frontiera ∂A è finita. Sia dunque $\partial A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ con $a_1 < \ldots < a_k$; allora ogni intervallo (a_i, a_{i+1}), con $a_0 = -\infty$ e $a_{k+1} = +\infty$, è disgiunto da A o interamente contenuto in A.*

Dimostrazione. $\partial A = \{x \in R \colon \forall (b,c) \in R^2\, (x \in (b,c) \implies \exists y \in A \cap (b,c) \wedge \exists z \in (R \setminus A) \cap (b,c)\}$, quindi ∂A è un sottoinsieme definibile di R e per o-minimalità è unione finita di punti e intervalli.

Supponiamo per assurdo che ∂A contenga un intervallo (b, c).

- Se $(b, c) \cap A$ è finito, allora esistono $x_1 < \ldots < x_k$ in A tali che
$$(b, c) \cap A = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$
Pertanto per ogni $y \in (b, x_1)$ si ha che $y \in (b, c) \subseteq \partial A$ eppure l'intorno aperto (b, x_1) è disgiunto da A, il che è assurdo.

- Se $(b, c) \cap A$ è infinito, allora deve esistere un intervallo $(d, e) \subseteq (b, c) \cap A$, poiché A è unione finita di intervalli e punti. Allora per ogni $y \in (d, e)$ si ha che $y \in \partial A$, eppure il suo intorno aperto (d, e) è interamente contenuto in A, assurdo.

Si conclude che ∂A non contiene alcun intervallo, ed è quindi una unione finita di punti $\{a_1, \ldots, a_k\}$, con $a_1 < \ldots < a_k$ punti di R e $k \in \mathbb{N}$, eventualmente nullo. Poniamo $a_0 = -\infty$ e $a_{k+1} = +\infty$. Fissato un $i \leq k$, consideriamo $(a_i, a_{i+1}) \cap A$: esso è definibile e per ogni suo elemento x, essendo $x \notin \partial A$, deve esistere un intorno aperto interamente contenuto in A, perciò $(a_i, a_{i+1}) \cap A$ è aperto. Analogamente, osservando che $\partial A = \partial(R \setminus A)$, anche $(a_i, a_{i+1}) \cap (R \setminus A)$ è aperto. Essendo

$$(a_i, a_{i+1}) = \big((a_i, a_{i+1}) \cap A\big) \cup \big((a_i, a_{i+1}) \cap (R \setminus A)\big)$$

definibilmente connesso per il Lemma 1.10, si ha che uno dei due aperti è banale, per cui (a_i, a_{i+1}) è interamente contenuto in A oppure disgiunto da esso. $\square$

Esempio 1.12. Sia $(R, <)$ un insieme non vuoto totalmente ordinato, denso e privo di estremi. Costruiamo esplicitamente una struttura o-minimale su R, definendo gli insiemi in $\mathcal{S}_n$.

Dato $1 \leq i \leq m$, denotiamo con $p_i \colon R^m \to R$ la proiezione sull'i-esima coordinata:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i.$$

Nel seguito, chiamiamo funzioni *semplici* le funzioni costanti $R^m \to R$ e le p_i.

Siano $f_1, \ldots, f_N$ funzioni semplici in R^m e $\epsilon \colon \{1, \ldots, N\}^2 \to \{-1, 0, 1\}$ fissata. Sia:

$$\begin{aligned} \epsilon(f_1, \ldots, f_N) \coloneqq \big\{x \in R^m \colon \forall (i,j) \in &\{1, \ldots, N\}^2 \text{ vale} \\ \epsilon(i,j) = -1 &\implies f_i(x) < f_j(x), \\ \epsilon(i,j) = 0 &\implies f_i(x) = f_j(x), \\ \epsilon(i,j) = 1 &\implies f_i(x) > f_j(x)\big\}. \end{aligned}$$

Chiamiamo *semplici* gli insiemi $E \subseteq R^m$ per i quali esistono funzioni semplici $f_1, \ldots, f_N$ e $\epsilon \colon \{1, \ldots, N\}^2 \to \{-1, 0, 1\}$ tali che $E = \epsilon(f_1, \ldots, f_N)$. Posto

$$\mathcal{S}_m \coloneqq \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} E_k \subseteq R^m \colon n \in \mathbb{N}, \forall k \leq n \quad E_k \text{ è semplice} \right\},$$

vogliamo verificare che $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sia una struttura o-minimale su R. Osserviamo innanzitutto che, dato $E = \epsilon(f_1, \ldots, f_N)$ insieme semplice, se esso è non vuoto allora $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}$ vale $f_i|_E < f_j|_E$, $f_i|_E = f_j|_E$ oppure $f_i|_E > f_j|_E$, a seconda del valore di $\epsilon(i,j) \in \{-1, 0, 1\}$. Siano dunque $\xi_1 < \ldots < \xi_k$ le restrizioni di $f_1, \ldots, f_N$ a E, per un certo $k \leq N$.

(S1) Si noti che $\epsilon(f_1) = R^m$, per ogni $f_1 \colon R^m \to R$ funzione semplice costante con $\epsilon(1,1) = 0$, quindi $R^m \in \mathcal{S}_m$. Visto che gli elementi di $\mathcal{S}_m$ sono unioni finite di insiemi semplici, è sufficiente mostrare che dati $E = \epsilon(f_1, \ldots, f_N)$, $F = \epsilon'(g_1, \ldots, g_M)$ semplici, gli insiemi $E \cup F$, $R^m \setminus E$ e $E \cap F$ sono in $\mathcal{S}_m$.

Vale $E \cup F \in \mathcal{S}_m$ per definizione, in quanto E e F sono semplici, inoltre si noti che $E \cap F = R^m \setminus \big((R^m \setminus E) \cup (R^m \setminus F)\big)$, per cui è sufficiente mostrare che $R^m \setminus E$ è una unione finita di insiemi semplici.

Dato $x \in R^m$, si definisca $\epsilon_x \colon \{1, \ldots, N\}^2 \to \{-1, 0, 1\}$ tale che

$$\epsilon_x(i,j) \coloneqq \begin{cases} -1 & \text{se } f_i(x) < f_j(x) \\ 0 & \text{se } f_i(x) = f_j(x) \\ 1 & \text{se } f_i(x) > f_j(x) \end{cases},$$

da cui $x \in \epsilon_x(f_1, \ldots, f_N)$. Si noti che se $x \notin E$ allora $\epsilon(i,j) \neq \epsilon_x(i,j)$ per qualche $(i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2$, per cui $\epsilon_x(f_1, \ldots, f_N) \cap E = \emptyset$. Di conseguenza

$$R^m \setminus E = \bigcup_{x \in R^m \setminus E} \epsilon_x(f_1, \ldots, f_N), \tag{1.1}$$

dove l'unione ha un numero finito di membri distinti, visto che esistono al più 3^{N^2} possibili funzioni $\epsilon_x \colon \{1, \dots, N\}^2 \to \{-1, 0, 1\}$, perciò $R^m \setminus E \in \mathcal{S}_m$, in quanto unione finita di insiemi semplici.

(S2) Sia $E = \epsilon(f_1, \dots, f_N) \subseteq R^m$ un insieme semplice per certe funzioni semplici $f_1, \dots f_N$. Siano

$$f_i'(x_1, \dots, x_{m+1}) \coloneqq f_i(x_1, \dots, x_m) \quad \forall i = 1, \dots, N$$
$$f_i''(x_1, \dots, x_{m+1}) \coloneqq f_i(x_2, \dots, x_{m+1}) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Pertanto $\epsilon(f_1', \dots, f_N') = E \times R \in \mathcal{S}_{m+1}$ e $\epsilon(f_1'', \dots, f_N'') = R \times E \in \mathcal{S}_{m+1}$.

(S3) siano $f_1 = p_1$ e $f_2 = p_m$ proiezioni, si ponga $\epsilon \colon (i, j) \mapsto 0$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$. Allora

$$\epsilon(f_1, f_2) = \{x \in R^m \colon x_1 = x_1 \wedge x_1 = x_m \wedge x_m = x_m\} = \{x \in R^m \colon x_1 = x_m\} \in \mathcal{S}_m,$$

in quanto insieme semplice.

(S4) sia $\pi \colon R^m \to R^{m-1}$ la proiezione sulle prime $m - 1$ coordinate. Per dimostrare che $\pi(\mathcal{S}_m) \subseteq \mathcal{S}_{m-1}$, è sufficiente provarlo per gli insiemi semplici. Sia dunque $E = \epsilon(f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{S}_m$ insieme semplice, per certe $f_1, \dots, f_N \colon R^m \to R$ funzioni semplici. Se $f_i \neq p_m \quad \forall i = 1, \dots, N$, allora sono ben definite le restrizioni $f_i' \coloneqq f_i|_{R^{m-1}}$ e vale

$$\epsilon(f_1, \dots, f_N) = \epsilon(f_1', \dots, f_N') \times R \implies \pi(E) = \epsilon(f_1', \dots, f_N') \in \mathcal{S}_{m-1}.$$

Se invece che una delle funzioni semplici è p_m, allora a meno di riordinarle e cambiare opportunamente la ϵ, possiamo assumere che sia $f_N = p_m$. A meno di rinominare N ignorando le funzioni ripetute, che danno delle condizioni ridondanti sugli elementi $x \in E$, possiamo anche assumere che $f_i \neq p_m$ per $i \neq N$. Dato $k \in \mathbb{N}$, sia $\mathcal{E}_k \coloneqq \big\{\epsilon \colon \{1, \dots, k\}^2 \to \{-1, 0, 1\}\big\}$. Allora

$$\begin{aligned} R^{m-1} = \pi(R^m) &\overset{(\star)}{=} \pi\left(\bigcup_{\bar\epsilon \in \mathcal{E}_N} \bar\epsilon(f_1, \dots, f_N)\right) = \bigcup_{\bar\epsilon \in \mathcal{E}_N} \pi\big(\bar\epsilon(f_1, \dots, f_N)\big) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{\bar\epsilon \in \mathcal{E}_N} \pi\big(\bar\epsilon|_{\{1,\dots,N-1\}^2}(f_1, \dots, f_{N-1})\big) = \bigcup_{\bar\epsilon \in \mathcal{E}_{N-1}} \bar\epsilon(f_1', \dots, f_{N-1}') \overset{(\star)}{=} R^{m-1}, \end{aligned}$$

dove le $(\star)$ valgono per quanto visto in (1.1). Pertanto deve essere

$$\pi\big(\bar\epsilon(f_1, \dots, f_N)\big) = \pi\big(\bar\epsilon|_{\{1,\dots,N-1\}^2}(f_1, \dots, f_{N-1})\big) = \bar\epsilon|_{\{1,\dots,N-1\}^2}(f_1', \dots, f_{N-1}'),$$

da cui segue $\pi\big(\bar\epsilon(f_1, \dots, f_N)\big) \in \mathcal{S}_{m-1}$, che era la tesi.

(O1) sia $\epsilon \colon \{1, 2\}^2 \to \{-1, 0, 1\}$ tale che $\epsilon(i, j) = i - j$. Allora

$$\epsilon(p_1, p_2) = \{(x, y) \in R^2 \colon x < y\} \in \mathcal{S}_2$$

in quanto insieme semplice.

(O2) Dato $E \subseteq R$ insieme semplice non vuoto, siano $\xi_1 < \ldots < \xi_k$ le restrizioni di $f_1, \ldots, f_N$ a E, per un certo $k \leq N$. Se tutte le ξ_i sono funzioni semplici costanti, ciò significa che $E = \{r\} \subseteq R$ è un punto, oppure le f_i sono tutte funzioni semplici costanti, per cui $E = R$. L'unica alternativa è che esista i tale che $\xi_i = x_1$, proiezione sull'unica coordinata. Ma allora, posto $\xi_0 = -\infty$, $\xi_{k+1} = +\infty$, abbiamo che $E = \{x \in R \colon \xi_{i-1} < x < \xi_{i+1}\}$ è un intervallo in R. Essendo gli elementi di $\mathcal{S}_m$ unioni finite di insiemi semplici, segue che $\mathcal{S}_1$ è unione finita di punti e intervalli.

Capitolo 2

Decomposizione in celle

Nel resto del capitolo lavoreremo con una generica struttura o-minimale $(R, <, \mathcal{S})$, e scriveremo che $A \subseteq R^m$ è *definibile* per indicare che A appartiene a $\mathcal{S}$.

Sia I un intervallo in R e $f\colon I \to R$ una funzione definibile. Dati degli insiemi totalmente ordinati R_1, R_2 e una mappa $f\colon R_1 \to R_2$, scriveremo che:

f è *strettamente crescente* se $x < y$ in R_1 implica $f(x) < f(y)$ in R_2;
crescente se $x \leq y$ in R_1 implica $f(x) \leq f(y)$ in R_2
strettamente decrescente se $x < y$ in R_1 implica $f(x) > f(y)$ in R_2;
decrescente se $x \leq y$ in R_1 implica $f(x) \geq f(y)$ in R_2;
strettamente monotona se è strettamente crescente o strettamente decrescente;
monotona se è crescente oppure decrescente.

Allora valgono i seguenti lemmi:

Lemma 2.1. *Esiste un sottointervallo di I nel quale f è costante oppure iniettiva.*

Dimostrazione. Consideriamo le fibre $f^{-1}(y)$, al variare di $y \in f(I)$: se esiste y per cui $f^{-1}(y)$, allora si ha che $\exists (a, b) \subseteq f^{-1}(y)$, essendo la preimmagine di un definibile $\{y\} \subseteq R$ ancora definibile per la (iii) del Lemma 1.5, per cui $f|_{(a,b)} \equiv y$ è costante. Se invece le fibre sono tutte finite, essendo I infinito e definibile, si ha che $f(I)$ è infinito e definibile $\implies \exists J \subseteq f(I)$ intervallo contenuto nell'immagine. Sia

$$g\colon J \to I \quad \text{definita da} \quad g(y) \coloneqq \min\{x \in I\colon f(x) = y\}.$$

g è iniettiva per costruzione, quindi $g(J) \subseteq I$ è infinito, per cui contiene un intervallo I'. Segue che $f|_{I'}$ è iniettiva. □

Lemma 2.2. *Se f è iniettiva, allora è strettamente monotona in un sottointervallo di I.*

Dimostrazione. Sia $I = (a, b) \subseteq R_\infty$. Si noti che, essendo f iniettiva, per ogni $x \in (a, b)$ l'intervallo (a, x) è unione disgiunta di due sottoinsiemi definibili,

$$(a, x) = \{y \in (a, x)\colon f(y) < f(x)\} \cup \{y \in (a, x)\colon f(y) > f(x)\},$$

uno dei quali deve necessariamente contenere un intervallo $(c, x) \subseteq (a, x)$, per o-minimalità. In modo del tutto analogo si deduce l'esistenza di un intervallo $(x, d) \subseteq (x, b)$ contenente tutti punti y con immagine maggiore (o minore) di $f(x)$. Pertanto ogni $x \in (a, b)$ soddisfa esattamente una delle seguenti quattro formule:

$$\begin{aligned}
\phi_{-+}(x) &\coloneqq \exists c_1, c_2 \in I\big[c_1 < x < c_2 \ \wedge\ f|_{(c_1,x)} < f(x) \ \wedge\ f|_{(x,c_2)} > f(x)\big],\\
\phi_{+-}(x) &\coloneqq \exists c_1, c_2 \in I\big[c_1 < x < c_2 \ \wedge\ f|_{(c_1,x)} > f(x) \ \wedge\ f|_{(x,c_2)} < f(x)\big],\\
\phi_{++}(x) &\coloneqq \exists c_1, c_2 \in I\big[c_1 < x < c_2 \ \wedge\ f|_{(c_1,x)} > f(x) \ \wedge\ f|_{(x,c_2)} > f(x)\big],\\
\phi_{--}(x) &\coloneqq \exists c_1, c_2 \in I\big[c_1 < x < c_2 \ \wedge\ f|_{(c_1,x)} < f(x) \ \wedge\ f|_{(x,c_2)} < f(x)\big].
\end{aligned}$$

Detti $\Phi_{-+}, \Phi_{+-}, \Phi_{++}, \Phi_{--} \subseteq (a, b)$ i sottoinsiemi di punti di I che soddisfano la rispettiva proprietà, si ha che $I = \Phi_{-+} \cup \Phi_{+-} \cup \Phi_{++} \cup \Phi_{--}$ è un'unione disgiunta di insiemi definibili, quindi per o-minimalità almeno uno di essi contiene un sottointervallo $\subseteq I$. Consideriamo i quattro possibili casi:

- $J \subseteq \Phi_{-+}$. Per ogni $x_0 \in J$, si definisca

  $$s \coloneqq \sup\{x \in J \colon x > x_0 \text{ e } f > f(x_0) \text{ su } (x_0, x]\}$$

  Se per assurdo $s \in J$, allora vale $\phi_{-+}(s)$ ed esistono $c_1, c_2 \in J$ tali che $x_0 < c_1 < s < c_2$ e

  $$\begin{aligned}
  &\forall x \in (c_1, s) \text{ vale } f(x_0) < f(x) \overset{\phi_{-+}}{<} f(s),\\
  &\forall x \in (s, c_2) \text{ vale } f(s) \overset{\phi_{-+}}{<} f(x),
  \end{aligned}$$

  assurdo perché s è il sup dei punti con immagine maggiore di $f(x_0)$. Quindi $s = \sup J$, per cui $\forall x < y$ in J vale $f(x) < f(y)$, quindi $f|_J$ è strettamente crescente.

- $J \subseteq \Phi_{+-}$ è del tutto analogo, facendo uso di

  $$s \coloneqq \sup\{x \in J \colon x > x_0 \text{ e } f < f(x_0) \text{ su } (x_0, x]\}$$

  e dimostrando come sopra che deve essere $s = \sup J$, da cui $f|_J$ è strettamente decrescente.

- $J \subseteq \Phi_{++}$. Sia $B \coloneqq \Big\{x \in J \colon \forall y \in J \big(y > x \implies f(y) > f(x)\big)\Big\}$. Essendo esso definibile, se fosse infinito per o-minimalità dovrebbe contenere un intervallo, sul quale f è strettamente crescente per definizione di B, il che conclude la dimostrazione. Altrimenti B è un'unione finita di punti, quindi consideriamo uno degli intervalli (c, d) di cui è costituito $J \setminus B$. Avendo escluso tutti punti di B, abbiamo che

  $$\forall x \in (c, d)\ \exists y \in (c, d)\ \big(y > x \ \wedge\ f(y) < f(x)\big). \tag{2.1}$$

  Sia $x_0 \in (c, d)$, vogliamo dimostrare che $f(y) < f(x_0)$ per $y \in (c, d)$ sufficientemente grande. Si noti che

  $$(c, x_0) \cup (x_0, d) = \big\{y \in (c, d) \colon f(y) < f(x_0)\big\} \cup \big\{y \in (c, d) \colon f(y) > f(x_0)\big\}$$

è unione di due insiemi definibili disgiunti, supponiamo per assurdo che per $y \in (c, d)$ sufficientemente grande valga $f(y) > f(x_0)$. Quindi, ponendo

$$l = \inf \{x \in (c, d)\colon \forall y \in [x, d) \text{ vale } f(y) > f(x_0)\}, \tag{2.2}$$

si ha che $l \in (x_0, d)$. Se fosse $f(l) > f(x_0)$, allora dovendo valere ϕ_{++} si avrebbe un assurdo, perché l non sarebbe l'inf. Quindi $f(l) < f(x_0)$. Per (2.1) esiste $y \in (l, d)$ tale che $f(y) < f(l) < f(x_0)$, assurdo per la definizione di l in (2.2).

Sia quindi $y_0 \coloneqq \inf \{y \in [x_0, d)\colon x \in (y, d) \implies f(x) < f(x_0)\}$; si noti che $\phi_{++}(x_0) \implies y_0 > x_0$ e $\phi_{++}(y_0) \implies f(y_0) < f(x_0)$. Considerando l'intervallo (x_0, y_0), per o-minimalità ho che esiste un intorno aperto sinistro di y_0 di punti la cui immagine tramite f sia per tutti maggiore (o minore) di $f(x_0)$. La minimalità di y_0 fa sì che debba verificarsi il primo dei due casi, cioè esistono $v_1, v_2 \in (c, d)$ tali che $v_1 < y_0 < v_2$ e $\forall z_1 \in (v_1, y_0), z_2 \in (y_0, v_2)$ vale $f(z_1) > f(x_0) > f(z_2)$. Chiamiamo $\psi_{+-}(v)$ la suddetta formula:

$$\psi_{+-}(v) \coloneqq \exists v_1, v_2 \in (c, d)\big[v_1 < v < v_2 \wedge f|_{(v_1,v)} > f|_{(v,v_2)}\big].$$

Essendo x_0 arbitrario, abbiamo dimostrato che $\forall x \in (c, d) \exists v \in (c, d)\big(v > x \wedge \psi_{+-}(v)\big)$. Pertanto per o-minimalità l'insieme definibile Ψ_{+-} contiene un intervallo $J' = (t, d)$, per un certo $t \in (c, d)$.

Restringiamo in nostro studio a tale sottointervallo J'; in modo del tutto analogo, scambiando tutti i versi delle disugaglianze, si dimostra l'esistenza di un sottointervallo $J'' \subseteq J'$ su cui valga ψ_{-+}. Ma questo è assurdo, in quanto $\Psi_{-+} \cap \Psi_{+-} = \emptyset$, quindi la tesi è dimostrata.

- $J \subseteq \Phi_{--}$ è del tutto analogo al caso precedente. □

Lemma 2.3. *Se f è strettamente monotona, allora è continua in un sottointervallo di I.*

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che f sia strettamente crescente. Allora f è iniettiva, per cui $f(I)$ è infinito e definibile, dunque contiene un intervallo $J \subseteq f(I)$. Sia $(c, d) \subseteq J$ e siano $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$. Per la monotonia di f, vale $a < b$, e si ha che $f|_{(a,b)}\colon (a, b) \to (c, d)$ è una biiezione che rispetta l'ordine. Allora la controimmagine di ogni intervallo aperto di J è un intervallo aperto, il che è sufficiente per concludere che $f|_{(a,b)}$ è continua. □

Facendo uso di questi risultati dimostriamo il seguente

Teorema 2.4 (di monotonia)**.** *Sia $f\colon (a, b) \to R$ una funzione definibile sull'intervallo $(a, b) \subseteq R_\infty$. Allora esistono punti $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k < a_{k+1} = b$ in (a, b) tali che su ogni sottointervallo (a_j, a_{j+1}), $0 \leq j \leq k$ la funzione è costante oppure strettamente monotona e continua.*

Dimostrazione. Si considerino gli insiemi disgiunti

$$X_0 \coloneqq \big\{x \in (a, b)\colon \exists c, d\big(x \in (c, d) \subseteq (a, b), f|_{(c,d)} \text{ è costante}\big)\big\},$$
$$X_1 \coloneqq \big\{x \in (a, b)\colon \exists c, d\big(x \in (c, d) \subseteq (a, b), f|_{(c,d)} \text{ è strettamente crescente e continua}\big\},$$
$$X_2 \coloneqq \big\{x \in (a, b)\colon \exists c, d\big(x \in (c, d) \subseteq (a, b), f|_{(c,d)} \text{ è strettamente decrescente e continua}\big\}.$$

Si noti che X_0, X_1 e X_2 sono aperti, in quanto ogni loro elemento x è contenuto in un intervallo aperto (c,d) di punti che rispettano la medesima condizione. Inoltre essi sono definibili, in quanto le condizioni su $f|_{(c,d)}$ di essere costante, continua o strettamente monotona si possono esprimere con formule del primo ordine. Di conseguenza la loro unione

$$X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 = \{x \in (a,b) \colon \exists (c,d) \subseteq (a,b) \text{ tale che } x \in (c,d) \text{ e } f|_{(c,d)} \text{ è costante} \\ \text{oppure strettamente monotona e continua}\}$$

è definibile e aperta, perciò è un'unione finita intervalli. Se $(a,b) \setminus X$ contenesse un intervallo I, allora per il Lemma 2.1 f dovrebbe essere iniettiva in un suo sottointervallo I'. Dunque applicando i lemmi 2.2 e 2.3 f sarebbe strettamente monotona e continua in un sottointervallo $I'' \subseteq I'$, assurdo perché $I \cap X = \emptyset$. Pertanto $(a,b) \setminus X$ è un'unione finita di punti, perciò per dimostrare la tesi possiamo ridurci a farlo su uno degli intervalli aperti I di cui consiste X. Si noti che l'intervallo aperto e connesso I si può partizionare in tre aperti disgiunti come segue:

$$I = (I \cap X_0) \cup (I \cap X_1) \cup (I \cap X_2),$$

quindi due di essi devono necessariamente essere banali. Consideriamo i tre casi possibili:

- $I \subseteq X_0$ sia $x_0 \in I$ e si definisca
$$s \coloneqq \sup\{x \in I \colon x > x_0, f \text{ costante su } [x_0, x)\}.$$
Se fosse $s \in I$, allora esisterebbe un suo intorno aperto in cui f è costante, per definizione di X_0, assurdo. Dunque $s = \sup I$. Analogamente, si prova che
$$i \coloneqq \inf\{x \in I \colon x < x_0, f \text{ costante su } (x, x_0]\} = \inf I,$$
dunque f è costante su $(\inf I, \sup I) = I$

- $I \subseteq X_1$ sia $x_0 \in I$ e si definiscano
$$s \coloneqq \sup\{x \in I \colon x > x_0, f \text{ strettamente crescente su } [x_0, x)\},$$
$$i \coloneqq \inf\{x \in I \colon x < x_0, f \text{ strettamente crescente su } (x, x_0]\}.$$
In modo analogo al caso precedente, devono valere $s = \sup I$ e $i = \inf I$, quindi f è strettamente crescente su I.

- $I \subseteq X_2$ del tutto analoga al caso precedente. □

Dato un insieme definibile $X \subseteq R^m$, denoteremo con

$$C(X) \coloneqq \{f \colon X \to R \mid f \text{ è definibile e continua}\} \tag{2.3}$$
$$C_\infty(X) \coloneqq C(X) \cup \{-\infty, +\infty\}, \tag{2.4}$$

dove con i simboli $\pm\infty$ indichiamo le funzioni su X costantemente uguali a $+\infty$ e $-\infty$, rispettivamente.
Date f, g in $C_\infty(X)$ scriveremo $f < g$ se $f(x) < g(x) \quad \forall x \in X$, e in tal caso denoteremo

$$(f,g)_X \coloneqq \big\{(x,r) \in X \times R \mid f(x) < r < g(x)\big\}$$

Segue dalla definizione che $(f,g)_X$ è un sottoinsieme definibile di R^{m+1}.

Definizione 2.5. Fissato $m \in \mathbb{N}$, sia $(i_1, \dots, i_m)$ una successione con $i_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1, \dots, m$. Una $(i_1, \dots, i_m)$-cella è un sottoinsieme definibile di R^m ottenuto per induzione su $m \geq 0$ nel seguente modo:

(i) per $m = 0$, l'unica cella è R^0, rappresentato dalla successione di lunghezza nulla $()$;

(ii) supponiamo che le $(i_1, \dots, i_m)$-celle siano già state definite; allora una $(i_1, \dots, i_m, 0)$-cella è il grafico $\Gamma(f)$ di una funzione $f \in C_\infty(X)$, dove X è una $(i_1, \dots, i_m)$-cella, mentre una $(i_1, \dots, i_m, 1)$-cella è l'insieme $(f, g)_X$ dove X è una $(i_1, \dots, i_m)$-cella e $f, g \in C_\infty(X)$ con $f < g$.

Diremo che C è un **cella** in R^m se essa è una $(i_1, \dots, i_m)$-cella per una opportuna (e necessariamente unica) successione $(i_1, \dots, i_m) \in \{0,1\}^m$.

Osservazione. Dalla Definizione 2.5 segue che in R le (1)-celle sono gli intervalli (a, b) per certi $a < b$ in R e le (0)-celle sono i singoletti $\{r\} \subseteq R$.

Proposizione 2.6. *Data una* $(1, \dots, 1)$*-cella* $C \subseteq R^m$*,* C *è aperta in* R^m*.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per induzione su $m \geq 0$:

- $m = 0$: l'unica $()$-cella in R^0 è l'intero spazio, che è un singoletto ed è aperto nell'unica topologia di cui può essere munito, che è quella discreta.

- $m \mapsto m+1$: sia $C \subseteq R^{m+1}$ una $(1, \dots, 1)$-cella e $\pi \colon R^{m+1} \to R^m$ la proiezione sulle prime m coordinate. Sia $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in C$: allora $\bar{x} \coloneqq \pi(x)$ appartiene alla $(1, \dots, 1)$-cella $\pi C \subseteq R^m$, che è aperta per ipotesi induttiva. Pertanto esiste un aperto $A \subseteq R^m$ tale che $\bar{x} \in A \subseteq \pi C$. Per definizione di $(1, \dots, 1)$-cella, esistono $f, g \in C_\infty(\pi C)$ tali che $C = (f, g)_{\pi C}$, per cui vale $f(\bar{x}) < x_{m+1} < g(\bar{x})$. Per la densità di R, esistono $a, b \in R$ tali che $f(\bar{x}) < a < x_{m+1} < b < g(\bar{x})$. Essendo f, g continue e definibili, allora gli insiemi $A_f \coloneqq f^{-1}\big((-\infty, a)\big)$ e $A_g \coloneqq g^{-1}\big((b, +\infty)\big)$ sono aperti definibili in R^m e $\bar{x} \in A_f \cap A_g$. Segue che $(A \cap A_f \cap A_g) \times (a, b)$ è un aperto di R^{m+1} contenente x e contenuto in C, che quindi è aperto. □

Osservazione. In virtù della Proposizione 2.6, chiameremo *celle aperte* le $(1, \dots, 1)$-celle, includendo tra esse anche il caso degenere della $()$-cella aperta. Si noti che i parallelepipedi sono particolari celle aperte.

Dimostriamo ora che le $(1, \dots, 1)$-celle di cui sopra sono le uniche ad essere aperte.

Proposizione 2.7. *Sia* $C \subseteq R^m$ *una* $(i_1, \dots, i_m)$*-cella per cui* $\sum_{j=1}^m i_j < m$*; allora* C *non è aperta in* R^m*.*

Dimostrazione. Si consideri la $(i_1, \dots, i_m)$-cella non aperta $C \subseteq R^m$, dimostriamo l'asserto per induzione estesa su $m \geq 0$:

- $m = 0$: l'unica cella in R^0 è aperta, per cui il passo base è banalmente verificato.

- $1, \dots, m-1 \mapsto m$: essendo C non aperta, sia $l \in \{1, \dots, m\}$ il minimo indice tale che $i_l = 0$. Se $l < m$, sia $\pi_l \colon R^m \to R^l$ la proiezione sulle prime l coordinate, che è una mappa definibile, continua e aperta. L'immagine $\pi_l C$ è una $(i_1, \dots, i_{l-1}, 0)$-cella, che quindi non è aperta in R^l per ipotesi induttiva. Ma allora C può essere aperta in R^m, altrimenti anche la sua immagine tramite π_l lo sarebbe. In alternativa deve essere $l = m$, per cui $C = \Gamma(f)$ per un certa $f\colon \pi_{m-1}C \to R$. Dato $\big(\bar{x}, f(\bar{x})\big) \in C$ per un certo $\bar{x} \in \pi_{m-1}C$, si ha che ogni parallelepipedo $P = P' \times (a, b)$ con $\bar{x} \in P'$ e $f(\bar{x}) \in (a, b)$ soddisfa

$$P \cap R^m \setminus C = P' \times (a, f(\bar{x}) \cup P' \times (f(\bar{x}), b)$$

che è non banale, quindi C non è contiene alcun aperto. □

Proposizione 2.8. *L'unione di un numero finito di celle non aperte ha parte interna vuota.*

Dimostrazione. Siano $C_1, \ldots, C_k \subseteq R^m$ celle, dimostriamo per induzione su $m \geq 0$ che se la loro unione $X \coloneqq C_1 \cup \ldots \cup C_k$ ha parte interna non vuota, allora $\exists l \in \{1, \ldots, k\}$ tale che C_l sia una cella aperta. Per $m = 0$ la tesi è banalmente verificata, in quanto l'unica cella in R^0 è aperta. Supponiamo quindi $m \geq 1$ e definiamo $\pi\colon R^m \to R^{m-1}$ proiezione sulle prime $m - 1$ coordinate. Sia $x = (\bar{x}, x_m) \in int(X)$, per un certo $\bar{x} \in R^{m-1}$, allora esiste un parallelepipedo $P = P' \times (a, b)$ per un opportuno parallelepipedo $P' \subseteq R^{m-1}$ e $x_m \in (a, b) \subseteq R$. Si noti che, dato $\bar{x} \in P'$, la fibra

$$\pi^{-1}(\bar{x}) \cap X = \{(\bar{x}, z)\colon z \in R \,\wedge\, (\bar{x}, z) \in X\}$$

è infinita, in quanto in biiezione con l'intervallo aperto (a, b). Consideriamo le k proiezioni $\pi C_j \subseteq R^{m-1}$, si noti che vale

$$P' = \pi P \subseteq \pi\Big(\bigcup_{j=1}^{k} C_j\Big) = \bigcup_{j=1}^{k} \pi C_j.$$

Se ci limitiamo a considerare le celle πC_i non aperte, abbiamo che per ipotesi induttiva la parte interna di $\bigcup_{\pi C_j \text{non aperta}} \pi C_j$ è vuota, mentre $int(P') = P' \neq \emptyset$. Quindi

$$\exists y \in P' \cap \bigcup_{\pi C_i \text{aperta}} \pi C_i \subseteq \bigcup_{\pi C_i \text{aperta}} \pi C_i \implies \pi^{-1}(y) \cap X \subseteq \bigcup_{\pi C_i \text{aperta}} C_i.$$

Per quanto visto prima, $y \in P'$ implica che la fibra contiene infiniti punti, quindi esiste una cella, senza perdita di generalità assumiamo sia C_1, tale che πC_1 è aperta e $\pi^{-1}(y) \cap C_1$ contiene infiniti punti. Allora deve necessariamente essere $C_1 = (f, g)_{\pi C_1}$ per opportune $f, g \in C_\infty(\pi C_1)$, ed essendo anche πC_1 aperta, si deduce che C_1 è una $(1, \ldots, 1)$-cella, perciò è aperta. □

Proposizione 2.9. *Ogni cella A è omeomorfa tramite una proiezione ad una cella aperta.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq R^m$ una i-cella con $i = (i_1, \ldots, i_m)$. Posto $d \coloneqq i_1 + \ldots + i_m$ e detti $\lambda(1) < \ldots < \lambda(d)$ gli indici $\lambda(j) \in \{1, \ldots, m\}$ tali che $i_{\lambda(j)} = 1$, definiamo la proiezione $p_i\colon R^m \to R^d$ che mappa

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{\lambda(1)}, \ldots, x_{\lambda(d)}).$$

Dimostriamo l'asserto per induzione su $m \in \mathbb{N}$: per $m = 0$ si ha A è la ()-cella e $d \leq m$, quindi $d = 0$. Dunque la mappa $p_i \colon R^0 \to R^0$ è un omeomorfismo con l'immagine, che è una ()-cella, ed è quindi aperta. Sia $\pi \colon R^m \to R^{m-1}$ la proiezione sulle prime $m-1$ coordinate e si consideri la $(i_1, \dots, i_{m-1})$-cella $\pi A \subseteq R^{m-1}$. Per $m \geq 1$, consideriamo due casi:

- $i_m = 0$: allora esiste $f \in C(\pi A)$ tale che $A = \Gamma(f) = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) \colon \bar{x} \in \pi A\}$, da cui si ha che $\pi|_A$ è iniettiva ed è quindi un omeomorfismo, essendo una mappa aperta. Per ipotesi induttiva, notando che $\sum_{j=1}^{m-1} i_j = d$, esiste una cella aperta $B \subseteq R^d$ e un omeomorfismo $p \colon \pi A \to B$. Pertanto $p_i|_A = p \circ \pi|_A$ è un omeomorfismo in quanto composizione di omeomorfismi, con immagine $p \circ \pi|_A(A) = p(A) = B$.

- $i_m = 1$: allora esistono $f, g \in C_\infty(\pi A)$ tali che $A = (f, g)_{\pi A}$. Per ipotesi induttiva, esiste una cella aperta $B \subseteq R^{d-1}$ e un omeomorfismo $p \colon \pi A \to B$. Si noti allora che $p_i = (p, id_R)$, dove $id_R \colon R \to R$ è la mappa identità, quindi p_i è una biiezione con la sua immagine, essendo le sue componenti mappe biiettive. Infine,

$$\begin{aligned} p_i(A) = p_i\Big(\big\{(\bar{x}, x_m) \in (\pi A) \times R \colon f(\bar{x}) < x_m < g(\bar{x})\big\}\Big) &= \\ = \big\{(p(\bar{x}), x_m) \in B \times R \colon f \circ p^{-1}(p(\bar{x})) < x_m < g \circ p^{-1}(p(\bar{x}))\big\} &\overset{y := p(\bar{x})}{=} \\ = \big\{(y, x_m) \in B \times R \colon f \circ p^{-1}(y) < x_m < g \circ p^{-1}(y)\big\} &= (f \circ p^{-1}, g \circ p^{-1})_B \end{aligned}$$

  è una cella aperta in R^d, essendo $f \circ p^{-1}, g \circ p^{-1} \in C_\infty(B)$ funzioni definibili e continue. Pertanto p_i è un omeomorfismo di A con una cella aperta in R^d. □

Notazione. Detta p_i la mappa definita come sopra, per un certa i-cella A, denoteremo $p_i(A)$ con $p(A)$ la cella aperta cui A è omeomorfa e indicheremo con $p|_A \coloneqq p_i|_A$ l'omeomorfismo in questione.

Proposizione 2.10. *Ogni cella è connessa.*

Dimostrazione. Sia $C \subseteq R^m$ una $(i_1, \dots, i_m)$-cella, dimostriamo l'asserto per induzione su $m \geq 1$. Il caso $m = 1$ è già stato dimostrato nel Lemma 1.10, consideriamo quindi $m \geq 2$. Sia $\pi \colon R^m \to R^{m-1}$ la proiezione sulle prime $m-1$ coordinate, dimostriamo intanto che l'intersezione di ogni sua fibra con C è connessa:

$$\pi^{-1}(\bar{x}) \cap C = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \bar{x} \notin \pi C, \text{ altrimenti} \\ \big\{(\bar{x}, f(\bar{x}))\big\} & \text{se } i_m = 0, \text{ per una certa } f \in C(\pi C) \text{ tale che } C = \Gamma(f) \\ \{\bar{x}\} \times \big(f(\bar{x}), g(\bar{x})\big) & \text{se } i_m = 1, \text{ per certe } f, g \in C_\infty(\pi C) \text{ tali che } C = (f, g)_{\pi C} \end{cases}$$

Allora $\pi^{-1}(\bar{x})$ è connessa per ogni $\bar{x} \in R^{m-1}$, essendo omeomorfo rispettivamente a $\emptyset$, ad un punto e ad un intervallo aperto.

Supponiamo ora che $C = A_1 \cup A_2$ unione disgiunta di aperti definibili $A_1, A_2 \subseteq R^m$. Essendo π una mappa aperta definibile, si ha che πA_1 e πA_2 sono definibili e aperti in R^{m-1}. Inoltre per quanto visto sulle fibre,

$$\pi^{-1}(\bar{x}) \cap C = \big(\pi^{-1}(\bar{x}) \cap A_1\big) \cup \big(\pi^{-1}(\bar{x}) \cap A_2\big)$$

è una partizione di un connesso in aperti definibili disgiunti, pertanto $\left(\pi^{-1}(\bar{x}) \cap A_1\right) = \emptyset$ oppure $\left(\pi^{-1}(\bar{x}) \cap A_2\right) = \emptyset$. Segue che $\bar{x} \notin \pi A_1 \cap \pi A_2 \quad \forall \bar{x} \in R^{m-1}$, cioè $\pi A_1 \cap \pi A_2 = \emptyset$. Ma allora

$$\pi C = \pi A_1 \cup \pi A_2$$

è una partizione di $\pi C \subseteq R^{m-1}$, connesso per ipotesi induttiva, in aperti definibili disgiunti, quindi deve essere $\pi A_1 = \emptyset \vee \pi A_2 = \emptyset$, che implica $A_1 = \emptyset \vee A_2 = \emptyset$. □

Definizione 2.11. Una **decomposizione** di R^m è uno speciale tipo di partizione di R^m in un numero finito di celle, definito per induzione su m:

(i) una decomposizione di $R^1 = R$ è una partizione

$$\left\{(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_k, +\infty), \{a_1\}, \ldots, \{a_k\}\right\},$$

dove $a_1 < \ldots < a_k$ sono punti di R;

(ii) una decomposizione di R^{m+1} è una partizione finita di R^{m+1} in celle $\{A_i\}_{i \in I}$ tale che l'insieme delle proiezioni $\{\pi(A_i)\}_{i \in I}$ sia una decomposizione di R^m (dove $\pi \colon R^{m+1} \to R^m$ è la proiezione sulle prime m coordinate).

Osservazione. Dalla Definizione 2.11, per $m = 1$ si ha che ogni partizione di R in un numero finito di celle è una decomposizione, essendo la condizione (ii) sempre verificata.

Diremo che una decomposizione $\mathcal{D}$ di R^m partiziona l'insieme $S \subseteq R^m$ se esso è l'unione di celle in $\mathcal{D}$.

Enunciamo senza dimostrare tre teoremi di cui faremo largo uso nel prossimo capitolo:

Teorema 2.12 (Finitezza uniforme). *Sia A un insieme definibile di R^m tale che, per ogni $x \in R^{m-1}$, l'insieme*

$$A_x \coloneqq \{y \in R \mid (x, y) \in A\}$$

sia finito. Allora la cardinalità $|A_x|$ è finita in modo uniforme, ossia esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $|A_x| \leq k$ per ogni $x \in R^{m-1}$.

Dimostrazione. [5] □

Teorema 2.13 (Decomposizione in celle). *Dati $A_1, \ldots, A_k \subseteq R^m$ insiemi definibili, esiste una decomposizione di R^m che partiziona ciascuno degli $A_1, \ldots, A_k$.*

Dimostrazione. [5] □

Teorema 2.14 (Continuità a tratti). *Data una funzione definibile $f \colon A \to R, A \subseteq R^m$, esiste una decomposizione $\mathcal{D}$ di R^m che partiziona A e tale che le restrizioni $f|_B$ a celle $B \in \mathcal{D}$ con $B \subseteq A$ siano continue.*

Dimostrazione. [5] □

Capitolo 3

Invarianti definibili

3.1 Dimensione

Definizione 3.1. Sia $X \subseteq R^m$ un insieme definibile non vuoto; definiamo la sua **dimensione** con

$$\dim X \coloneqq \max\{i_1 + \ldots + i_m \colon X \text{ contiene una } (i_1, \ldots, i_m)\text{-cella}\}$$

Per convenzione assegniamo all'insieme vuoto la dimensione $-\infty$.

Esempio 3.2. Si noti che $R^m = R \times \ldots \times R$ è un parallelepipedo, ed è dunque una $(1, \ldots, 1)$-cella aperta, da cui segue $\dim R^m \geq m$. D'altronde $i_1 + \ldots + i_m \leq m$ per ogni $(i_1, \ldots, i_m)$-cella contenuta in R^m, per cui $\dim R^m = m$.

Lemma 3.3. *Se $A \subseteq R^m$ è una cella aperta e $f \colon A \to R^m$ è una mappa iniettiva definibile, allora $f(A)$ contiene una cella aperta.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per induzione su m:

- $m = 1$: per il Teorema 2.4, essendo inoltre f iniettiva, essa è strettamente monotona e continua a tratti; detto dunque (a, b) uno di tale tratti, si ha che se $f(a) < f(b)$ allora $f(A)$ contiene la (1)-cella aperta $\big(f(a), f(b)\big)$, altrimenti contiene la (1)-cella aperta $\big(f(b), f(a)\big)$.

- $m \mapsto m + 1$: consideriamo una decomposizione di R^m che partizioni $f(A)$

  $$f(A) = C_1 \cup \ldots \cup C_k \quad \text{per celle } C_i \text{ in } R^m.$$

  Allora
  $$A = f^{-1}(C_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(C_k)$$
  è una partizione finita di A. Per il Teorema 2.13, esiste una decomposizione $\mathcal{D}$ di R^m compatibile con $f^{-1}(C_i)$. Se nessuna cella di $\mathcal{D}$ fosse aperta, allora A sarebbe una unione finita di celle non aperte, per cui per la Proposizione 2.8 dovrebbe avere parte interna vuota, il che è assurdo. Dunque esiste una $f^{-1}(C_i)$ contenente un parallelepipedo P, senza perdita di generalità possiamo assumere che valga per

$i = 1$. A meno di ridurre ulteriormente P, per il Teorema 2.14 possiamo assumere che $f|_P$ sia continua.

Supponiamo per assurdo che C_1 non sia aperto. Allora esiste un omeomorfismo definibile $\psi\colon C_1 \to R^{m-1}$ la cui immagine è una cella, sicché la composizione $g\colon P \to R^{m-1}$ data da $g = \psi \circ f|_P$ è una funzione definibile continua e iniettiva. Siano $a, b \in R$ tali che $P = P' \times (a, b)$, sia poi $c \in R$ tale che $a < c < b$ e si consideri la mappa $h\colon P' \to R^{m-1}$ data da $h(x) := g(x, c)$. Per ipotesi induttiva su h, esiste un parallelepipedo $Q \subseteq R^{m-1}$ tale che $Q \subseteq h(P')$, sia dunque $y \in Q$ e $x \in P'$ tale che $h(x) = y$. Per $c' \neq c$ sufficientemente vicino a c, si ha $g(x, c') \in Q$, per continuità di g, per cui $g(x, c') = h(x') = g(x', c)$ per un certo $x' \in P'$. Ciò contraddice l'ipotesi di iniettività di g, pertanto $C_1 \subseteq f(A)$ è aperto. □

Proposizione 3.4. *Siano X, Y sottoinsiemi definibili di R^m. Allora valgono:*

(i) *se $X \subseteq Y$, allora $\dim X \leq \dim Y \leq m$.*

(ii) *se esiste una biiezione definibile tra X e Y, allora $\dim X = \dim Y$.*

(iii) $\dim(X \cup Y) = \max\{\dim X, \dim Y\}$.

Dimostrazione. (i) Diretta conseguenza della Definizione 3.1, in quanto ogni $(i_1, \ldots, i_m)$-cella contenuta in X è contenuta anche in Y e vale $\sum_{k=1}^m i_k \leq \sum_{k=1}^m 1 = m$.

(ii) Sia $f\colon X \to Y$ la biiezione definibile che esiste per ipotesi. Ponendo $d := \dim X$ e $e := \dim Y$, sia $A \subseteq X$ una $(i_1, \ldots, i_m)$-cella tale che $i_1 + \ldots + i_m = d$. Riprendendo la notazione introdotta nella Proposizione 2.9, sia $p_A\colon A \to p(A)$ l'omeomorfismo tra A e la cella aperta $p(A) \subseteq R^d$. Allora$g := f \circ p_A^{-1}\colon p(A) \to Y$ è una mappa iniettiva e $p(A) \subseteq R^d$ una cella aperta. Sia $Z := g(p(A))$ e $Z = C_1 \cup \ldots \cup C_k$ una partizione in celle. Allora $p(A) = g^{-1}(C_1) \cup \ldots \cup g^{-1}(C_k)$ e per il teorema di decomposizione in celle esiste un i tale che $g^{-1}(C_i)$ contenga una cella aperta B. Sia $C = C_i \subseteq R^n$ una $(j_1, \ldots, j_n)$-cella siffatta, dimostriamo che allora vale $d \leq j_1 + \ldots + j_n$.

Supponiamo per assurdo che $d > j_1 + \ldots + j_n$ e sia $p \in R^{d-(j_1+\ldots+j_n)}$; allora si ha che $E := R^{j_1+\ldots+j_n} \times \{p\} \subseteq R^d$ è una cella non aperta e la composizione

$$B \xrightarrow{g|_B} C \xrightarrow{p_C} p(C) \xrightarrow{p_E^{-1}} R^d$$

è una mappa iniettiva. Essendo $p_E^{-1}(p(C)) \subseteq E$ contenuto in una cella non aperta di R^d, mentre B è una cella aperta, si ha un assurdo per il Lemma 3.3. Segue che $d \leq j_1 + \ldots + j_n \leq e$, e per un ragionamento analogo usando f^{-1} al posto di f, si ottiene anche $e \leq d$, da cui la tesi.

(iii) Sia $d := \dim(X \cup Y)$ e sia $A \subseteq X \cup Y$ una $(i_1, \ldots, i_m)$-cella tale che $d = i_1 + \ldots + i_m$. La cella aperta $p(A) \subseteq R^d$ è l'unione di $p_A(A \cap X)$ e $p_A(A \cap Y)$; considerando una decomposizione che partizioni tali insiemi definibili, si ha che sicuramente uno di essi contiene un parallelepipedo $P \subseteq R^d$. Senza perdita di generalità, assumiamo sia $P \subseteq p_A(A \cap X)$, allora $p_A^{-1}(P)$ è una $(i_1, \ldots, i_m)$-cella contenuta in X, da cui:

$$\dim X \geq d = \dim(X \cup Y) \overset{\text{(i)}}{\geq} \dim X \implies \dim X = \dim(X \cup Y).$$ □

Osservazione. Come conseguenza del punto (ii) della Proposizione 3.4, si ha che la dimensione di una $(i_1, \ldots, i_m)$-cella è $i_1 + \ldots + i_m$.

3.2 Caratteristica di Eulero

Definizione 3.5. Data una cella C di dimensione $d \in \mathbb{N}$, definiamo $E(C) \coloneqq (-1)^d$. Sia $S \subseteq R^m$ un insieme definibile e $\mathcal{P}$ una sua partizione finita in celle; definiamo

$$E_{\mathcal{P}}(S) \coloneqq \sum_{C \in \mathcal{P}} E(C) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i k_i,$$

dove k_d è il numero di celle d-dimensionali in $\mathcal{P}$.

Esempio 3.6. Si noti che R^m è una cella aperta, come visto nell'Esempio 3.2, per cui vale $\dim R^m = m$ e $E(R^m) = (-1)^{\dim R^m} = (-1)^m$.

Consideriamo ora una classe particolare di partizioni finite di celle:

Definizione 3.7. Data una cella $C \subseteq R^m$, definiamo le sue **decomposizioni** per induzione su $m \in \mathbb{N}$:

(i) $m = 1$: ogni partizione finita di $C \subseteq R^1$ in celle è una decomposizione di C;

(ii) $m \geq 2$: ogni partizione finita $\mathcal{D}$ di $C \subseteq R^m$ in celle tale che, detta $\pi : R^m \to R^{m-1}$ la proiezione sulle prime $m-1$ coordinate, ho che $\pi(\mathcal{D}) \coloneqq \{\pi D \colon D \in \mathcal{D}\}$ è una decomposizione della cella $\pi C \subseteq R^{m-1}$.

Lemma 3.8. *Sia C una cella e $\mathcal{D}$ una sua decomposizione, allora*

$$E_{\mathcal{D}}(C) = E(C)$$

Dimostrazione. Sia $C \subseteq R^m$, dimostriamo l'enunciato per induzione su m:

(i) $m = 0$:

(ii) $m \mapsto m+1$: Sia $C \subseteq R^{m+1}$ una $(i_1, \ldots, i_m, 1_{m+1})$-cella, per opportuni $i_1, \ldots, i_{m+1} \in \{0, 1\}$. Allora πC è una $(i_1, \ldots, i_m)$-cella in R^m e $\pi(\mathcal{D})$ è una sua decomposizione, per la quale per ipotesi induttiva vale

$$E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi C) = E(\pi C).$$

Consideriamo due casi:

- $i_{m+1} = 0$: allora esiste $f \in C(\pi C)$ tale che $C = \Gamma(f)$. Sia $B \in \pi(\mathcal{D})$ una cella, essendo $C = \Gamma(f)$ si ha che l'unica cella in $\mathcal{D}$ la cui proiezione sia B è $\Gamma(f|_B)$. Il contributo di tale cella a $E_{\mathcal{D}}(C)$ è pertanto $(-1)^{\dim(\Gamma(f|_B))} = (-1)^{\dim(B)} = E(B)$. Risulta dunque:

$$E_{\mathcal{D}}(C) = \sum_{F \in \mathcal{D}} E(F) = \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} E(B) = E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi C) = E(\pi C) = E(C).$$

- $i_{m+1} = 1$: allora esistono $f, f' \in C(\pi C)$ tali che $f < f'$ e $C = (f, f')_{\pi C}$. Sia $B \in \pi(\mathcal{D})$ una cella. La lista di celle in $\mathcal{D}$ la cui immagine tramite π sia B è:

$$\Gamma(f_1), \ldots, \Gamma(f_t), (f|_B, f_1)_B, \ldots, (f_t, f'|_B)_B$$

per certe $f|_B < f_1 < \ldots < f_t < f'|_B$ in $C_\infty(B)$. Posto $d = \dim(B)$, si ha che il contributo fornito da queste celle a $E_{\mathcal{D}}(C)$ è pari a $t \cdot (-1)^d + (t+1) \cdot (-1)^{d+1} = (-1)^{d+1} = -E(B)$. Segue che:

$$E_{\mathcal{D}}(C) = \sum_{F \in \mathcal{D}} E(F) = \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} -E(B) = -E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi C) = -E(\pi C) = E(C). \quad \square$$

Osservazione. Le decomposizioni di una cella $C \subseteq R^m$ sono esattamente le restrizioni a C delle decomposizioni di R^m che partizionano C.

Lemma 3.9. *Date due partizioni finite $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ in celle di un insieme definibile $S \subseteq R^m$, esiste una partizione finita $\mathcal{P}$ di S che le raffina entrambe e tale che per ogni cella $C \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ la restrizione $\mathcal{P}|_C$ è una decomposizione di C.*

Dimostrazione. Si consideri una decomposizione di R^m che partizioni ogni cella di $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$; la sua restrizione a S è una partizione finita $\mathcal{P}$ che raffina $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, che è pertanto una decomposizione per ogni cella $C \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ quando ristretta ad essa. $\square$

Teorema 3.10. *Sia $S \subseteq R^m$ definibile e $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ due sue partizioni finite, allora*

$$E_{\mathcal{P}_1}(S) = E_{\mathcal{P}_2}(S)$$

Dimostrazione. Si consideri una partizione $\mathcal{P}$ come da Lemma 3.9, allora vale:

$$E_{\mathcal{P}}(S) = \sum_{C \in \mathcal{P}} E(C) = \sum_{C' \in \mathcal{P}_1} \sum_{C \in \mathcal{P}|'_C} E(C) = \sum_{C' \in \mathcal{P}_1} E_{\mathcal{P}|_{C'}}(C') \overset{3.8}{=} \sum_{C' \in \mathcal{P}_1} E(C') = E_{\mathcal{P}_1}(S),$$

e analogamente $E_{\mathcal{P}}(S) = E_{\mathcal{P}_2}(S)$, da cui la tesi. $\square$

In virtù del Teorema 3.10, possiamo modificare la Definizione 3.5, chiamando così **caratteristica di Eulero** $E(S)$ il valore comune di $E_{\mathcal{P}}(S)$, per una qualsiasi partizione finita $\mathcal{P}$ di S.

Osservazione. Si noti che, come ovvia conseguenza della Definizione 3.5, si ha che dati $S_1, S_2 \subseteq R^m$ definibili e disgiunti, vale $E(S_1 \dot\cup S_2) = E(S_1) + E(S_2)$.

Definizione 3.11 (Famiglia definibile)**.** Sia $S \subseteq R^{m+n} = R^m \times R^n$ definibile; per ogni $a \in R^m$ poniamo

$$S_a := \{y \in R^n : \ (a, y) \in S\}.$$

Pertanto S può essere interpretato come la **famiglia definibile** $(S_a)_{a \in R^m}$, in cui gli insiemi S_a sono dette **fibre** della famiglia.

Teorema 3.12. *Dato $S \in R^{m+n}$ definibile e $a \in R^m$, si ha che $E(S_a)$ assume un numero finito di valori al variare di $a \in R^m$ e $\forall e \in \mathbb{Z}$ l'insieme $\{a \in R^m \colon E(S_a) = e\}$ è definibile. Più precisamente, sia $\mathcal{D}$ una decomposizione di R^{m+n} che partizioni S e $\pi \colon R^{m+n} \to R^m$ la proiezione sulle prime m coordinate; allora per ogni cella $A \in \pi(\mathcal{D})$ esiste $e_A \in \mathbb{Z}$ tale che $E(S_a) = e_A \, \forall a \in A$ e inoltre*

$$E(\pi^{-1}(A) \cap S) = E(A) e_A$$

Dimostrazione. Supponiamo che $A \in \pi(\mathcal{D})$ sia una $(i_1, \ldots, i_m)$-cella, sia $C \in \mathcal{D}$ contenuta in S tale che $\pi C = A$. Allora C è una $(i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-cella per opportuni $i_{m+j} \in \{0,1\}$, $1 \leq j \leq n$. Di conseguenza, $\forall a \in R^m$ la fibra C_a è una $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-cella, da cui segue

$$E(C) = (-1)^{i_1+\ldots+i_{m+n}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_m} \cdot (-1)^{i_{m+1}+\ldots+i_{m+n}} = E(A)E(C_a) \qquad (3.1)$$

Ponendo $\mathcal{D}_A := \{C \in \mathcal{D} \colon C \cap S \neq \emptyset, \pi C = A\}$, si ha che $\pi^{-1}(A) \cap S = \dot{\bigcup}_{C \in \mathcal{D}_A} C$ e $S_a = \dot{\bigcup}_{C \in \mathcal{D}_A} C_a$, quindi:

$$E(\pi^{-1}(A) \cap S) = \sum_{C \in \mathcal{D}_A} E(C) \overset{(3.1)}{=} E(A) \sum_{C \in \mathcal{D}_A} E(C_a) = E(A)E(S_a),$$

da cui segue la tesi, ponendo $e_A := E(S_a)$. □

Corollario 3.12.1. *Nelle ipotesi del Teorema 3.12, supponendo che tutte le fibre non vuote S_a al variare di $a \in R^m$ abbiano la stessa caratteristica di Eulero e, vale:*

$$E(S) = E(\pi S) \cdot e,$$

in particolare $E(A \times B) = E(A) \cdot E(B)$ per $A \subseteq R^m, B \subseteq R^n$ definibili.

Notazione. Sia σ una permutazione di $\{1, \ldots, m\}$; dati $x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$, $A \subseteq R^m$ e $f \colon A \to R^n$, poniamo:

$$\begin{aligned} &x\sigma := (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \\ &A\sigma := \{x\sigma : x \in A\} \\ &f\sigma \colon A\sigma \to R^n \text{ data da } f\sigma(x) := f(x\sigma) \end{aligned}$$

Proposizione 3.13. *Sia $C \subseteq R^m$ una cella e $\tau = (i, i+1)$ una trasposizione, con $1 \leq i \leq m$. Allora C può essere partizionata in celle $C_1, \ldots, C_k, \exists k \in \mathbb{Z}$ tali che $C_1\tau, \ldots, C_k\tau$ siano ancora celle.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per induzione su m e $\dim C$.

Caso 1) $i < m-1$: con un piccolo abuso di notazione, indichiamo con τ la restrizione di di τ a $\{1, \ldots, m-1\}$ e rappresentiamo gli elementi di R^m come (x, y) con $x \in R^{m-1}, y \in R$.

Sottocaso 1.1) $C = (\alpha, \beta)_B$ con $B \subseteq R^{m-1}$ e $\alpha, \beta \colon B \to R_\infty$ definibili. Allora

$$\begin{aligned} (x,y) \in C\tau &\iff (x\tau, y) \in C \\ &\iff x\tau \in B \quad \text{e} \quad \alpha(x\tau) < y < \beta(x\tau) \\ &\iff x \in B\tau \quad \text{e} \quad \alpha\tau(x) < y < \beta\tau(x) \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva, B è unione disgiunta di celle $B_1, \ldots, B_k$ tali che $B_1\tau, \ldots, B_k\tau$ siano ancora celle, che costituiscono quindi una partizione di $B\tau$. Si noti allora che C può essere partizionata nelle k celle $C_i := \left(\alpha|_{B_i}, \beta|_{B_i}\right)_{B_i}$, per cui gli insiemi

$$C_i\tau = \left(\alpha|_{B_i}, \beta|_{B_i}\right)_{B_i}\tau = \left(\alpha\tau|_{B_i\tau}, \beta\tau|_{B_i\tau}\right)_{B_i\tau}$$

sono celle che costituiscono una partizione di $C\tau$.

Sottocaso 1.2) $C = \Gamma(\alpha)$ con $\alpha\colon B \to R$. Allora

$$\begin{aligned}(x,y) \in C\tau &\iff (x\tau, y) \in C\\ &\iff x\tau \in B \quad \text{e} \quad y = \alpha(x\tau)\\ &\iff x \in B\tau \quad \text{e} \quad y = \alpha\tau(x).\end{aligned}$$

Pertanto, data una partizione di B come in **1.1)**, si ha che $C_i = \Gamma(\alpha|_{B_i})$ è una partizione di C tale che $C_i\tau = \Gamma(\alpha\tau|_{B_i\tau})$ è una partizione di $C\tau$.

Caso 2) $i = m-1$. Sia C una $(j_1,\dots,j_m)$-cella e siano $B \subseteq R^{m-1}$, $A \subseteq R^{m-2}$ le sue proiezioni sulle prime $m-1$ e $m-2$ coordinate, rispettivamente. Studiamo i quattro casi dati dai possibili valori di j_{m-1}, j_m, indicando gli elementi di R^m tramite (x,y,z), con $x \in R^{m-2}$.

Sottocaso 2.1) $j_{m-1} = j_m = 0$. Allora $B = \Gamma(f)$ per una certa $f\colon A \to R$ continua e definibile e $C = \Gamma(\bar{g})$ con $\bar{g}\colon B \to R$ continua e definibile. Ponendo $g\colon A \to R$ tale che $x \overset{g}{\longmapsto} \bar{g}\big(x, f(x)\big)$, si ha quindi che g è continua e

$$C = \Big\{\big(x, f(x), g(x)\big) \colon x \in A\Big\}.$$

Pertanto

$$C\tau = \Big\{\big(x, g(x), f(x)\big) \colon x \in A\Big\}.$$

è anch'essa una cella.

Sottocaso 2.2) $j_{m-1} = 0, j_m = 1$. Allora $B = \Gamma(\alpha)$ per una certa funzione continua e definibile $\alpha\colon A \to R$ e $C = (f,g)$ per opportune funzioni continue e definibili $f,g\colon B \to R_\infty$. Pertanto:

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in C &\iff x \in A \quad \text{e} \quad y = \alpha(x) \quad \text{e} \quad f(x,y) < z < g(x,y)\\ &\iff x \in A \quad \text{e} \quad y = \alpha(x) \quad \text{e} \quad f(x,\alpha(x)) < z < g(x,\alpha(x))\end{aligned}$$

Siano $f', g'\colon A \to R_\infty$ tali che $f'(x) \coloneqq f(x,\alpha(x))$ e $g'(x) \coloneqq g(x,\alpha(x))$ e sia inoltre $\alpha'\colon (f',g') \to R$ tale che $\alpha'(x,y) \coloneqq \alpha(x)$. Allora

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha') &= \big\{(x,y,z) \in (f',g') \times R \colon z = \alpha'(x,y)\big\}\\ &= \big\{(x,y,z) \in R^m \colon f'(x) < y < g'(x) \quad \text{e} \quad z = \alpha(x)\big\}\\ &= \big\{(x,y,z) \in R^m \colon f(x,z) < y < g(x,z) \quad \text{e} \quad z = \alpha(x)\big\}\\ &= \big\{(x,y,z) \in R^m \colon (x,z,y) \in C\big\}\\ &= C\tau,\end{aligned}$$

il che prova che $C\tau$ è una cella.

Introduciamo delle notazioni prima di affrontare gli ultimi due sottocasi: data una funzione definibile $f\colon (a,b) \to R$ su un intervallo $(a,b) \subseteq R_\infty$, diremo che un punto $x_0 \in (a,b)$ è un *punto critico di f* se esistono intervalli $(l,x_0),(x_0,r) \subseteq (a,b)$ tali che, ponendo $f_l \coloneqq f|_{(l,x_0)}$ e $f_r \coloneqq f|_{(x_0,r)}$, valga una tra le seguenti tre proprietà:

(i) f_l è strettamente crescente e f_r è decrescente;
(ii) f_l è costante e f_r è strettamente monotona;
(iii) f_l è strettamente decrescente e f_r è crescente.

Per il Teorema 2.4 di monotonia, f ha un numero finito di punti critici. Siano essi $a_1 < \ldots < a_k$ e si ponga $a_0 = a$, $a_{k+1} = b$. Associamo a f due n-uple $c(f) \coloneqq (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ e $\epsilon(f) \coloneqq (\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$ con $\epsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$ e

$$\begin{aligned}
\epsilon_j &= -1 \quad \text{se } f \text{ è strettamente decrescente in } (a_j, a_{j+1}),\\
\epsilon_j &= 0 \quad\;\; \text{se } f \text{ è costante in } (a_j, a_{j+1}),\\
\epsilon_j &= +1 \quad \text{se } f \text{ è strettamente crescente in } (a_j, a_{j+1}).
\end{aligned}$$

Sottocaso 2.3) $j_{m-1} = 1$, $j_m = 0$. Allora $B = (\alpha, \beta)_A$ e $C = \Gamma(f)$ per certe $\alpha, \beta \in C_\infty(A)$ e $f \in C(B)$, con $A \subseteq R^{m-2}$, $B \subseteq R^{m-1}$ celle. Per ogni $x \in A$ definiamo, in modo parametrico, $f(x, -)\colon (\alpha(x), \beta(x)) \to R$. Si definiscano allora $c(x) \coloneqq c(f(x, -))$ e $\epsilon(x) \coloneqq \epsilon(f(x, -))$.

A meno di suddividere A in un numero finito di sottocelle e di identificare A con una di esse, facendo uso del Teorema 2.12 di finitezza uniforme, possiamo assumere che:

- $c(x)$ abbia lunghezza costante pari a k per ogni $x \in A$;
- $c(x) \coloneqq \big(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_k(x)\big)$ sia una funzione a valori in R^k continua;
- $\epsilon(x)$ sia costante su A.

Posto $\alpha_0 \coloneqq \alpha$ e $\alpha_{k+1} \coloneqq \beta$, si ha allora che B è l'unione disgiunta delle celle $(\alpha_j, \alpha_{j+1})_A$, per $0 \leq j \leq k$, e delle celle $\Gamma(\alpha_j)$, per $1 \leq j \leq k$. Ancora una volta, senza perdita di generalità possiamo assumere che B sia proprio una di queste celle: se $B = \Gamma(\alpha_j)$ si conclude come nel sottocaso 2.1, quindi assumiamo che valga $B = (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ per un certo $1 \leq j \leq k$, che rinominiamo (α, β). A seconda del valore assunto da $\epsilon(x)$, vi sono tre casi possibili:

1. $f(x, -)$ è strettamente decrescente su $\big(\alpha(x), \beta(x)\big)$ per ogni $x \in A$;
2. $f(x, -)$ è costante su $\big(\alpha(x), \beta(x)\big)$ per ogni $x \in A$;
3. $f(x, -)$ è strettamente crescente su $\big(\alpha(x), \beta(x)\big)$ per ogni $x \in A$;

Analizziamo il terzo caso, il procedimento per gli altri due è analogo. Si definiscano $i, s\colon A \to R_\infty$ come segue:

$$\begin{aligned}
i(x) &\coloneqq \inf \Big\{ f(x, y)\colon y \in \big(\alpha(x), \beta(x)\big) \Big\};\\
s(x) &\coloneqq \sup \Big\{ f(x, y)\colon y \in \big(\alpha(x), \beta(x)\big) \Big\}.
\end{aligned}$$

Tali funzioni sono definibili, quindi per il Teorema 2.13, a meno di ridurre ulteriormente la dimensione delle celle, possiamo assumere che i e s siano funzioni continue

su A a valori in R, oppure identicamente uguali a $-\infty$ o $+\infty$. In ogni caso $i < s$ su A. Per ogni $x \in A$ e $z \in \big(i(x), s(x)\big)$, essendo $f(x, -)$ continua, esiste $g(x, z)$ definito come l'unico punto $y \in \big(\alpha(x), \beta(x)\big)$ tale che $f(x, y) = z$, per cui vale $f(x, y) = z \iff g(x, z) = y$. Allora g è una funzione definibile su $(i, s)_A$.
Dimostriamo che g è continua, da cui segue che $C\tau = \Gamma(g)$ è una cella, come desiderato. Sia $f(x, y) = z$, da cui $g(x, z) = y$, e siano $y_1, y_2 \in R$ tali che $\alpha(x) < y_1 < y < y_2 < \beta(x)$. Scegliamo $z_1, z_2 \in R$ tali che $f(x, y_1) < z_1 < z < z_2 < f(x, y_2)$; per la continuità di α, β e $f(x, -)$, esiste un intorno U di x in A sufficientemente piccolo affinché valga $x' \in U \implies \alpha(x') < y_1 < y_2 < \beta(x')$ e anche $f(x', y_1) < z_1 < z_2 < f(x', y_2)$. Si consideri dunque $U \times (z_1, z_2)$, un intorno di (x, z): dato $(x', z') \in U \times (z_1, z_2)$, si noti che essendo $f(x', -)$ strettamente crescente allora esiste $y' \in (y_1, y_2)$ tale che $f(x', y') = z' \implies g(x', z') = y' \in (y_1, y_2)$, perciò g è continua.

Sottocaso 2.4) $j_{m-1} = 1$, $j_m = 1$. Allora $C = (f_1, f_2)_B$, con $B = (\alpha, \beta)_A$. Vi sono quattro sottocasi ulteriori, a seconda che $f_1 = -\infty$ o meno, e a seconda che $f_2 = +\infty$ o meno. Consideriamo il caso di $f_1 \in C(B)$ e $f_2 = +\infty$, per cui $C = (f, +\infty)_B$. Come nel sottocaso 2.3, possiamo limitarci a considerare $f(x, -)$ strettamente decrescente, costante oppure strettamente crescente $\forall x \in A$. Assumendo che valga quest'ultimo caso, si definiscano $i, s \colon A \to R_\infty$ come sopra, che a meno di partizionare ulteriormente A possiamo assumere essere continue e a valori in R. Definiamo dunque $g : (i, s) \to R$ come nel sottocaso 2.3: $g(x, y) = z \iff f(x, z) = y$, sicché g è continua, come sopra. Si definisca ora $s' \colon B \to R$ dato da $s'(x, y) \coloneqq s(x)$. Allora C è unione disgiunta delle celle $(f, s')_B$, $\Gamma(s')$ e $(s', +\infty)_B$, per cui vale $(f, s')_B\tau = (\alpha', g)_{(i,s)}$, dove $\alpha' \colon (i, s) \to R$ è data da $\alpha'(x, z) = \alpha(x)$; in modo simile si ha anche che $\Gamma(s')\tau$ e $(s', +\infty)_B\tau$ sono celle. Ciò completa l'ultimo sottocaso e la dimostrazione. □

Teorema 3.14. *Sia $S \subseteq R^m$ definibile e $f : S \to R^n$ funzione definibile e iniettiva, allora*

$$E(S) = E\big(f(S)\big)$$

Dimostrazione. Applicando il Corollario 3.12.1 all'insieme $\Gamma(f) \subseteq R^{m+n}$, per l'iniettività di f si ha che $S_a = \{f(a)\} \quad \forall a \in S$ e $S_a = \emptyset$ per $a \in R^m \setminus S$. Pertanto $e = 1$ e vale, detta $\pi \colon R^{m+n} \to R^m$ la proiezione sulle prime m coordinate,

$$E\big(\Gamma(f)\big) = E\big(\pi\Gamma(f)\big) \cdot 1 = E(S).$$

Sia ora $\Gamma'(f) \coloneqq \{\big(f(x), x\big) \colon x \in S\}$, si verifica in modo analogo che, detta $\pi' \colon R^{n+m} \to R^n$ la proiezione sulle prime n coordinate,

$$E\big(\Gamma'(f)\big) = E\big(\pi'\Gamma'(f)\big) \cdot 1 = E\big(f(S)\big).$$

È sufficiente dimostrare che $E\big(\Gamma(f)\big) = E\big(\Gamma'(f)\big)$.

Sia σ la permutazione di $\{1, \dots, m+n\}$ tale che $\big(\Gamma(f)\big)\sigma = \Gamma'(f)$; visto che le trasposizioni generano il gruppo simmetrico, si ha che $\sigma = \tau_1 \dots \tau_l$ prodotto di trasposizioni di

$\{1,\dots,m+n\}$. Sia $\mathcal{D}$ una decomposizione di $\Gamma(f)$ in $k \in \mathbb{N}$ celle $C_1,\dots,C_k$. Fissata una trasposizione τ, per il Proposizione 3.13 ogni cella C_i ammette una decomposizione $\mathcal{D}_i$ in $s \in \mathbb{N}$ celle $C_i^1,\dots,C_i^s$ tali che $C_i^1\tau,\dots,C_i^s\tau$ siano ancora celle. Per la (ii) della 3.4 vale $\dim C_i^j = \dim(C_i^j\tau)$, da cui $E(C_i^j) = E(C_i^j\tau)$. Segue che

$$E(C_i) = \sum_{j=1}^{s} E(C_i^j) = \sum_{j=1}^{s} E(C_i^j\tau) = E(C_i\tau) \quad \forall i = 1,\dots,k.$$

Pertanto $E\big(\Gamma(f)\big) = \sum_{i=1}^{k} E(C_i) = \sum_{i=1}^{k} E(C_i\tau) = E\big(\Gamma(f)\tau\big)$. Ripetendo lo stesso procedimento per ciascuna delle l trasposizioni, si conclude che $E\big(\Gamma(f)\big) = E\big(\Gamma'(f)\big)$, da cui $E(S) = E\big(f(S)\big)$ come desiderato. $\square$

Mostriamo un esempio di applicazione della caratteristica di Eulero così definita, introducendo la nozione di gruppo definibile.

Definizione 3.15. Dato $G \subseteq R^n$, diciamo che $(G,\cdot)$ è un *gruppo definibile* se $G \in \mathcal{S}$ e l'operazione di gruppo $\cdot\colon G\times G \to G$ è definibile.

Nel seguito sia e l'identità di G. Dimostriamo quindi l'analogo definibile del Teorema di Cauchy per gruppi finiti:

Teorema 3.16. *Sia G un gruppo definibile. Fissato un primo p, si ha che*

$$E(G) \equiv 0 \pmod p \implies G \textit{ ha un elemento di ordine } p.$$

Dimostrazione. Sia $S \coloneqq \big\{(a_1,\dots,a_p) \in G^p\colon a_1\cdot\ldots\cdot a_p = e\big\}$, si noti che la mappa $f\colon G^{p-1} \to S$ data da $(a_1,\dots,a_{p-1}) \mapsto \big(a_1,\dots,a_{p-1},(a_1\cdot\ldots\cdot a_{p-1})^{-1}\big)$ è una funzione biettiva e definibile, in quanto $\cdot$ è definibile. Quindi per il Teorema 3.14 vale

$$E(S) = E(G^{p-1}) \overset{3.12.1}{=} E(G)^{p-1} \equiv 0 \pmod p.$$

Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ su S data da $k\cdot(a_1,\dots,a_p) = (a_{k+1},\dots,a_p,a_1,\dots a_k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si consideri

$$(e,\dots,e) \in S_0 \coloneqq \big\{x \in S\colon k\cdot x = x \quad \forall k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big\}.$$

Facciamo uso del seguente lemma:

Lemma 3.17. *Sia H un p-gruppo che agisce in modo definibile sull'insieme definibile S, e sia $S_0 \coloneqq \{x \in S\colon h\cdot x = x\, \forall h \in H\}$. Allora $E(S) \equiv E(S_0) \pmod p$.*

Dimostrazione. [4] $\square$

Allora essendo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ un p-gruppo, vale $E(S) \equiv E(S_0) \pmod p$. Allora essendo $(e,\dots,e) \in S_0$, deve esistere $x = (a,\dots,a) \in S_0$ per un certo $a \in G\setminus\{e\}$, per cui $a^p = e$, cioè $a \in G$ è un elemento di ordine p. $\square$

Bibliografia

[1] M. Coste. *An Introduction to O-minimal Geometry*. Dottorato di ricerca in matematica / Università di Pisa, Dipartimento di Matematica. Istituti editoriali e poligrafici internazionali, 2000. ISBN: 978-88-8147-226-0. URL: https://books.google.it/books?id=vK56IAAACAAJ.

[2] Alexandre Grothendieck. «Esquisse d'un Programme». In: *Geometric Galois Actions: Volume 1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. A cura di Leila Schneps e Pierre Lochak. Vol. 1. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, pp. 7–48. ISBN: 978-0-521-59642-8. DOI: 10.1017/CBO9780511758874.003.

[3] Anand Pillay e Charles Steinhorn. «Definable Sets in Ordered Structures. I». In: *Transactions of the American Mathematical Society* 295.2 (1986). Publisher: American Mathematical Society, pp. 565–592. ISSN: 00029947. DOI: 10.2307/2000052. URL: http://www.jstor.org/stable/2000052.

[4] Adam W. Strzebonski. «Euler characteristic in semialgebraic and other o-minimal groups». In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 96.2 (3 ott. 1994), pp. 173–201. ISSN: 0022-4049. DOI: 10.1016/0022-4049(94)90127-9. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404994901279.

[5] L. Van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. 150 184. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 978-0-521-59838-5. URL: https://books.google.it/books?id=CLnElinpjOgC.