



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA

**Tesi di Laurea Magistrale in
Ingegneria Meccanica**

**METODI ENERGETICI PER IL CALCOLO DEI FATTORI DI
INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI IN PROBLEMI
BIDIMENSIONALI E TRIDIMENSIONALI**

Relatore: Prof. Paolo Lazzarin

Laureando: Luca Pittarello

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Riassunto

Nella prima parte di questo elaborato verrà presentata una sintesi sulle leghe di titanio, con alcuni cenni metallurgici e una panoramica delle leghe disponibili, dei trattamenti termici e delle proprietà meccaniche di tali leghe. In particolare verrà preso in esame il comportamento a fatica delle leghe di titanio, specialmente per la lega Ti-6Al-4V, per la quale viene riportata una sintesi di alcuni articoli pubblicati negli ultimi anni riguardanti la vita a fatica. Tale lavoro costituisce una raccolta di informazioni preliminari per l'avviamento delle prime prove sperimentali e simulazioni sulle leghe di titanio in presenza di intagli che verranno condotte presso il Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali dell'Università di Padova. Nella seconda parte dell'elaborato verrà preso in esame il problema della distribuzione delle tensioni vicino all'apice di cricche e intagli nel caso di spessore finito e non trascurabile del componente, condizione per la quale non valgono le ipotesi di deformazione piana e tensione piana. Facendo uso di una soluzione del problema tridimensionale presentata nella letteratura, si svilupperà la scrittura delle espressioni della densità di energia di deformazione totale, deviatorica ed idrostatica ipotizzando un valore del *constraint factor* costante all'interno del volume di controllo. Successivamente verranno riepilogati i metodi esistenti e introdotti nuovi metodi per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando la densità di energia di deformazione nei casi bidimensionali. Si proverà poi ricavare un metodo analogo per il caso tridimensionale, per il quale il principale limite sembra essere la difficoltà a definire la componente di tensione normale lungo lo spessore mediante l'utilizzo del *constraint factor*, che si dimostra estremamente variabile all'interno dell'intero volume di controllo.

Indice

INTRODUZIONE	1
--------------------	---

PARTE PRIMA

CAPITOLO 1 – Il titanio e le sue leghe	3
1.1 Struttura cristallina e fasi del titanio	5
1.1.1 Classificazione degli elementi alliganti e delle leghe del titanio	6
1.1.2 Altre fasi	8
1.2 La microstruttura delle leghe di titanio	10
1.3 Proprietà delle leghe di titanio	13
1.4 Caratteristiche delle classi delle leghe di titanio	20
1.4.1 Titanio non legato o commercialmente puro	21
1.4.2 Leghe α e <i>near-α</i>	21
1.4.3 Leghe $\alpha + \beta$	23
1.4.4 Leghe β metastabili	24
1.5 Trattamenti termici delle leghe di titanio $\alpha + \beta$	25
1.5.1 Trattamento di distensione	26
1.5.2 Ricottura (o tempra) in campo β seguita da invecchiamento	27
1.5.3 Ricottura <i>duplex</i> (tempra di solubilizzazione) seguita da invecchiamento	30
1.5.4 Ricottura in campo $\alpha + \beta$	35
1.6 Proprietà delle leghe di titanio: nel dettaglio	38
1.6.1 Profili di proprietà delle differenti classi di leghe	39
1.6.2 Resistenza	41
1.6.3 Rigidezza	43
1.6.4 Resistenza alle elevate temperature	44
1.6.5 Danneggiamento e fatica	48
1.6.6 Resistenza alla corrosione e all'erosione	50
1.6.7 Caratteristiche di scambio termico	52
1.7 Comportamento a fatica delle leghe di titanio	53
1.7.1 Influenza della microstruttura	54
1.7.1.1 Titanio commercialmente puro e leghe α	54
1.7.1.2 Leghe <i>near-α</i> e $\alpha + \beta$	54
1.7.1.3 Leghe β	56
1.7.2 Influenza dell'orientazione dei cristalli	57
1.7.3 Influenza della tensione media	58

1.7.4	Influenza dei trattamenti meccanici superficiali	59
1.7.5	Influenza dei trattamenti termomeccanici superficiali	62
1.7.5.1	Leghe α	62
1.7.5.2	Leghe <i>near-α</i> e $\alpha + \beta$	63
1.7.5.3	Leghe β	64
1.7.6	Altri fattori che influenzano la vita a fatica delle leghe di titanio e considerazioni sulla lega Ti-6Al-4V	64
1.7.7	Cenni sulle proprietà a fatica degli alluminuri e dei compositi di titanio	67
APPENDICE A1 – Tabella riassuntiva sulle leghe di titanio.....		69
APPENDICE A2 – Settori applicativi delle leghe di titanio.....		79
APPENDICE A3 – Sintesi di alcuni lavori presenti in letteratura riguardanti il comportamento a fatica della lega Ti-6Al-4V		87
A3.1	Metodi accelerati per indagare il comportamento a fatica ad elevato numero di cicli	87
A3.1.1	Metodo <i>step loading (step-test)</i>	88
A3.1.2	Metodo <i>staircase</i>	88
A3.2	Raccolta e sintesi degli articoli	89
A3.2.1	<i>Fatigue behaviour of notched Ti-6Al-4V in air and corrosive environment</i>	89
A3.2.2	<i>Fatigue behaviour of notched Ti-6Al-4V in inert environment</i>	92
A3.2.3	<i>Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V</i>	94
A3.2.4	<i>Notch size effects in HCF behaviour of Ti-6Al-4V</i>	100
A3.2.5	<i>Influence of stress state on high cycle fatigue of notched Ti-6Al-4V specimens</i>	104
A3.2.6	<i>Low-cycle fatigue/high-cycle fatigue interactions in notched Ti-6Al-4V</i>	113
A3.2.7	<i>On the use of critical distance theories for the prediction of the high cycle fatigue limit stress in notched Ti-6Al-4V</i>	122
A3.2.8	<i>The effect of notch geometry on critical distance high cycle fatigue predictions</i>	134
A3.2.9	<i>A critical plane gradient approach for the prediction of notched HCF life</i>	140
A3.2.10	<i>Fatigue strength of Ti-6Al-4V at very long lives</i>	153
A3.2.11	<i>Behaviour of fatigue cracks emanating from circular notches under bending</i>	156
 PARTE SECONDA		
CAPITOLO 2 – Campi di tensione all’apice di cricche e intagli: problema tridimensionale		167
2.1	Frame analitico	168
2.2	Problema nel piano, $\nabla^4 \phi = 0$	171
2.3	Problema fuori piano, $\nabla^2 w = 0$	173
2.4	Espressioni dell’energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica.....	175

2.5	Espressioni della densità di energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica.	177
2.5.1	Densità di energia di deformazione totale	178
2.5.2	Densità di energia di deformazione idrostatica	182
2.5.3	Densità di energia di deformazione deviatorica	186
CAPITOLO 3 – Analisi numerica di un giunto saldato a sovrapposizione		191
3.1	Descrizione della geometria del giunto	191
3.2	Modello bidimensionale	192
3.2.1	Geometria e mesh	192
3.2.2	Vincoli	195
3.3	Modello tridimensionale	196
3.3.1	Geometria e mesh	196
3.3.2	Vincoli	198
3.4	Modelli numerici analizzati	199
3.4.1	Primo modello	200
3.4.2	Secondo modello	201
3.5	Risultati delle analisi numeriche	202
3.5.1	Andamento delle tensioni lungo lo spessore	202
3.5.2	Calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni (SIFs)	206
3.5.3	Tensioni principali	214
3.5.4	Densità di energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica	216
3.5.5	Confronto tra il SED ricavato dal calcolatore e il SED ricavato analiticamente	220
3.5.6	Osservazioni sul <i>constraint factor</i> C_z	227
3.5.7	Considerazioni sul calcolo del SED	232
3.6	Osservazioni conclusive	233
	Allegato: Codice APDL per generare il modello bidimensionale	234
CAPITOLO 4 – Influenza della fittezza della mesh sul calcolo del SED totale e deviatorico		239
4.1	Calcolo del SED nel metodo degli elementi finiti	240
4.2	Geometrie e modelli utilizzati per le analisi numeriche	242
4.3	Risultati delle analisi numeriche	246
4.3.1	Piastra con cricca centrale trasversale	247
4.3.2	Piastra con cricca centrale inclinata	249
4.3.3	Piastra con cricca laterale inclinata	251
4.4	Osservazioni conclusive	253
CAPITOLO 5 – Calcolo degli N-SIFs (SIFs) basato sul SED in problemi bidimensionali		255
5.1	Metodi per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni	256

5.1.1 Metodo Lazzarin	256
5.1.2 Metodo Treifi	257
5.1.3 Metodo del SED totale e deviatorico	259
5.1.4 Alcune considerazioni preliminari sui metodi descritti.....	260
5.2 Frame analitico	262
5.2.1 Metodo Lazzarin	262
5.2.2 Metodo Treifi	263
5.2.3 Metodo del SED totale e deviatorico	264
5.3 Geometrie e modelli analizzati per l'applicazione dei metodi	265
5.3.1 Intaglio a diamante	265
5.3.2 Intaglio quadro	266
5.3.3 Cricca inclinata a 45°, piastra finita	267
5.3.4 Cricca inclinata a 45°, piastra infinita	267
5.3.5 Cricca laterale inclinata a 45°.....	268
5.3.6 Modelli numerici e mesh utilizzate	269
5.4 Risultati delle analisi numeriche	272
5.5 Metodo del SED totale e deviatorico su una corona circolare	277
5.6 Osservazioni conclusive	282
CAPITOLO 6 - Calcolo degli N-SIFs basato sul SED in problemi in tre dimensioni....	283
6.1 Utilizzo del SED totale e deviatorico in volumi di controllo cilindrici con raggi differenti	284
6.2 Geometria della piastra e modello agli elementi finiti per le analisi numeriche	285
6.3 Risultati delle analisi numeriche	289
6.3.1 Andamento delle tensioni lungo lo spessore	290
6.3.2 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per diverse sezioni.....	291
6.3.3 N-SIFs calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson	295
6.3.4 SED totale, deviatorico e idrostatico.....	296
6.4 Calcolo degli N-SIFs a partire dal SED totale e deviatorico	297
6.5 Introduzione di una possibile correzione per il calcolo degli N-SIFs a partire dal SED totale e deviatorico	301
6.6 Analisi delle possibili fonti di errore per il calcolo degli N-SIFs mediante utilizzo del SED	306
6.6.1 Introduzione del modo III simmetrico.....	306
6.6.2 Verifica delle espressioni utilizzate per descrivere le componenti di tensione	312
6.6.2.1 Sezione $z = 0 \text{ mm}$ (componenti $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} nulle).....	314
6.6.2.2 Sezione $z = 1 \text{ mm}$	315
6.6.2.3 Sezione $z = 2 \text{ mm}$	317
6.6.2.4 Sezione $z = 3 \text{ mm}$	319
6.6.2.5 Sezione $z = 4 \text{ mm}$	321

6.6.3 Variabilità radiale e circonferenziale del <i>constraint factor</i> e influenza sul calcolo analitico del SED	325
6.6.3.1 Variabilità del <i>constraint factor</i> lungo la bisettrice dell'intaglio	326
6.6.3.2 Variabilità del <i>constraint factor</i> in direzione circonferenziale.....	331
6.6.3.3 Variabilità del <i>constraint factor</i> in direzione radiale	338
6.7 Utilizzo del SED totale, deviatorico e idrostatico in volumi di controllo costituiti da settori cilindrici.....	340
6.8 Osservazioni conclusive	346
APPENDICE A4 – Valori degli integrali riportati nella formulazione analitica del SED nel caso di cricche	347
A4.1 SED totale	348
A4.2 SED idrostatico	350
A4.3 SED deviatorico	352
APPENDICE A5 – Espressioni e valori notevoli degli integrali da utilizzare nei metodi Lazzarin, Treffi e del SED totale e deviatorico.....	355
A5.1 Deformazione piana, espressioni degli integrali	356
A5.2 Tensione piana, espressioni degli integrali	357
A5.3 Funzioni di forma utilizzate negli integrali	358
A5.4 Deformazione piana, valori degli integrali	360
A5.5 Tensione piana, valori degli integrali	362
APPENDICE A6 – Espressioni del SED totale, deviatorico ed idrostatico per volumi di controllo costituiti da settori cilindrici	365
CONCLUSIONI	369
SIMBOLOGIA	371
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....	375
RINGRAZIAMENTI.....	379

Introduzione

Nonostante presenti costi di estrazione e di lavorazione elevati, che ne penalizzano la diffusione, il titanio sta assumendo un'importanza crescente in diverse applicazioni. Grazie alle diversità della composizione chimica e dei trattamenti termomeccanici eseguiti le sue leghe permettono di ottenere profili di proprietà fondamentali per molte applicazioni, quali quelle aerospaziali, settore in cui il titanio è da più tempo utilizzato e in cui ancora oggi vede il maggior impiego, e dell'industria chimica, automotive, dell'edilizia, biomedica, petrolchimica, energetica, alimentare, marina ed altri settori ancora.

Presso il Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali dell'Università di Padova sta per avere inizio un ciclo di prove sperimentali e di indagini sul comportamento a fatica di componenti in leghe di titanio in presenza di intagli: la prima parte di questo elaborato, composta da un capitolo e tre appendici, costituisce una raccolta di informazioni preliminari utili all'avviamento di tali prove.

Nel primo capitolo infatti verranno trattati la struttura cristallina, i trattamenti termici e le proprietà delle leghe di titanio, in particolare il loro comportamento a fatica.

Nella prima e nella seconda appendice verrà eseguita una rassegna delle leghe di titanio sviluppate e delle applicazioni in cui tali leghe vengono utilizzate con successo.

La terza appendice conterrà infine una raccolta sintetica di alcuni articoli presentati in letteratura e riguardanti il comportamento a fatica della lega Ti-6Al-4V, la lega commercialmente più distribuita e utilizzata, specialmente in ambito aerospaziale, per l'ottima combinazione di proprietà che possiede.

Nella seconda parte dell'elaborato si tratteranno invece tematiche riguardanti cricche e intagli in problemi bidimensionali e tridimensionali.

In presenza di cricche e intagli, nel caso in cui il campo di tensione reale, che tiene cioè conto della plasticizzazione del materiale all'apice di tali caratteristiche geometriche, sia molto vicino al campo di tensione lineare elastico, che non tiene conto di plasticizzazioni, si utilizzano la meccanica della frattura lineare elastica (LEFM, *Linear Elastic Fracture Mechanics*) e la meccanica dell'intaglio lineare elastica (LENM, *Linear Elastic Notch Mechanics*). Più precisamente, gli intagli vivi (*sharp notches*, $\rho = 0$) e le cricche ($\rho = 0$, $2\alpha = 0$, per cui si rientra nella LEFM) rappresentano dei casi particolari della LENM. In questi casi si ricorre a criteri di campo, poiché in campo lineare elastico le tensioni all'apice dell'intaglio o della cricca tendono all'infinito. I termini che descrivono l'intensità del campo

di tensione vengono chiamati fattori di intensificazione delle tensioni: SIFs (*Stress Intensity Factors*) nel caso delle cricche, N-SIFs (*Notch Stress Intensity Factors*) nel caso di intagli. Ciascun modo di sollecitazione (modo I, II e III) viene legato a un fattore di intensificazione delle tensioni: si parlerà perciò di N-SIFs (o SIFs) di modo I, di modo II e di modo III.

La progettazione di componenti che presentano tali caratteristiche geometriche può essere realizzata pertanto confrontando i valori degli N-SIFs o SIFs con dei valori ritenuti critici (nel caso di progettazione a fatica, si ragiona in termini di range di questi parametri).

In alcuni semplici casi, i fattori di intensificazione delle tensioni possono essere ricavati mediante l'ausilio di espressioni analitiche, in alcuni altri casi possono essere ricavati da raccolte ottenute da dati sperimentali o numerici relativi a diverse geometrie; nei rimanenti casi, si utilizzano analisi agli Elementi Finiti, per le quali sono necessarie mesh molto fitte. Per ricavare i SIFs o gli N-SIFs si ricorre tuttavia alle ipotesi di deformazione piana o di tensione piana per il componente analizzato, rappresentandone la sola sezione. In questo caso gli N-SIFs o SIFs di modo I, II e III risultano tra loro indipendenti, e la loro eventuale presenza è legata alla presenza di sollecitazioni del modo analogo sul componente.

E' stato però dimostrato che nel caso di estensione finita e non trascurabile del componente, caso in cui le ipotesi di deformazione piana e di tensione piana cessano di essere valide, i fattori di intensificazione delle tensioni non sono tra loro indipendenti: così la presenza di carichi di modo II induce la presenza di componenti di tensione di modo III lungo lo spessore del componente, e viceversa.

Nel capitolo 2 verrà presentata una soluzione analitica per il caso di intagli vivi e cricche in problemi in tre dimensioni, e una formulazione della densità di energia di deformazione (SED) totale, deviatorica ed idrostatica a partire dalla soluzione analitica proposta.

Nel capitolo 3 verrà analizzato il caso di un giunto saldato a sovrapposizione con estensione tridimensionale finita e non trascurabile.

Dopo aver discusso la dipendenza dei valori della densità di energia di deformazione totale e deviatorica dalla fittezza della mesh del componente (capitolo 4), verranno presentati dei metodi esistenti e introdotti nuovi metodi per il calcolo degli N-SIFs e SIFs in problemi bidimensionali utilizzando il SED totale e deviatorico, evitando l'impiego di mesh estremamente fitte, quali sono quelle generalmente generate per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando le tensioni ricavate dal FEM (capitolo 5).

Nel capitolo 6 si proverà ad estendere tali metodi ai problemi tridimensionali: il principale limite in questo caso è dato dalla grande variabilità del *constraint factor*, necessario a descrivere la tensione normale lungo la terza dimensione del componente.

Le tre appendici riportate al termine del lavoro contengono espressioni di ausilio al calcolo del SED e dei valori tabellati per alcuni casi particolari.

Capitolo 1

Il titanio e le sue leghe

Nel 1791 William Gregor, reverendo, mineralogista e chimico britannico, riuscì a isolare della sabbia nera, oggi nota col nome di Ilmenite, esaminando la sabbia magnetica del fiume Helford, nella Menachan Valley in Cornovaglia. Da questo minerale riuscì ad estrarre l'ossido di un nuovo elemento, chiamato *mechanite* in relazione al luogo della scoperta. Quattro anni dopo, nel 1795, Martin Heinrich Klaproth, chimico tedesco, riusciva ad isolare indipendentemente l'ossido di tale elemento da un minerale proveniente dall'Ungheria, oggi chiamato Rutilo. L'elemento venne chiamato Titanio poiché, proprio come i mitologici titani, si trovava intrappolato nella crosta terrestre, a causa dell'incapacità di estrarlo dall'ossido. Solo nel 1910 Matthew Albert Hunter riuscì ad isolare il metallo facendo reagire del tetracloruro di titanio con del sodio (processo Hunter). Ma è Wilhelm Justin Kroll ad essere considerato il padre dell'industria del titanio: nel 1932 riuscì ad estrarre una considerevole quantità di titanio riducendo il tetracloruro del metallo con calcio. Agli inizi della seconda guerra mondiale dimostrò la possibilità di estrarre commercialmente il titanio utilizzando come agente riducente nel processo il magnesio in luogo del calcio: tale processo è ad oggi il più usato per l'estrazione del metallo e prende il nome di *processo Kroll*. [1, 2]

Nonostante il titanio venga spesso pensato come un elemento piuttosto raro, si tratta in realtà del quarto elemento metallico tra i metalli strutturali presenti nella crosta terrestre, preceduto solo da alluminio, ferro e magnesio, e del nono elemento in assoluto. Tuttavia, non è possibile trovare giacimenti di tale metallo allo stato puro, e difficilmente viene trovato in grandi concentrazioni: le difficoltà nell'estrazione lo rendono perciò costoso, e questo è il grosso limite all'utilizzo del titanio in molte applicazioni nonostante le sue eccellenti proprietà, che verranno discusse in seguito. [2]

Il titanio è classificato come un metallo non ferroso leggero: la sua densità, sebbene elevata rispetto all'alluminio, è circa la metà di quella del ferro (Fig. 1.1).

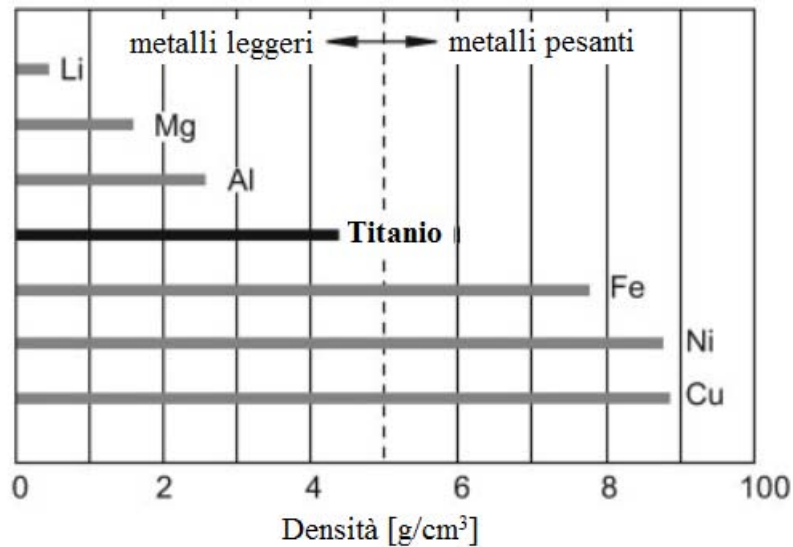


Figura 1.1 Confronto tra le densità di alcuni metalli comuni [1]

Le proprietà principali che rendono il titanio e le sue leghe così interessanti e potenzialmente utilizzabili in quasi tutti i settori sono l'ottima resistenza specifica (cioè rapporto tra il carico di rottura a trazione e densità, Fig. 1.2) e l'eccellente resistenza alla corrosione.

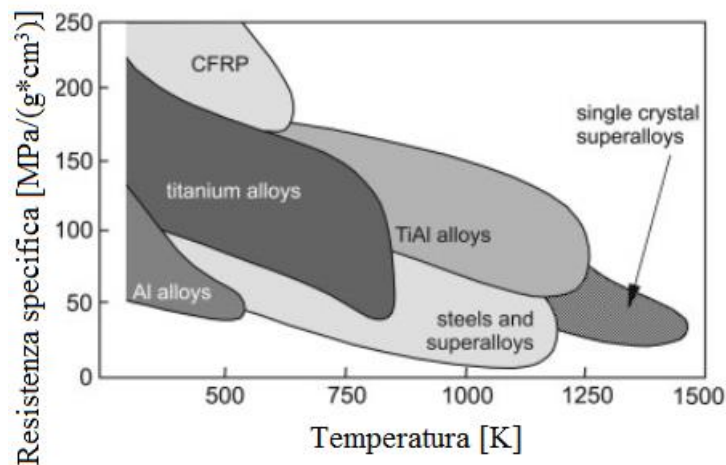


Figura 1.2 Confronto tra diverse leghe in termini di resistenza specifica al variare della temperatura [1]

Per queste ed altre proprietà l'impiego delle leghe di titanio dopo la seconda guerra mondiale è stato quasi immediato nel campo aerospaziale, e nel tempo si è allargato a molti settori (industria chimica, impianti off-shore, industria automobilistica, settore medico). Ad oggi, l'unico vero limite alla diffusione del titanio è il costo di tale metallo.

Tabella 1.1 Proprietà dell'elemento titanio [3, 4]

Numero atomico	22
Peso atomico	47.867 amu
Volume atomico	10.64 cm ³ /mol
Raggio covalente	136 pm
Energia di prima ionizzazione	658.8 kJ/mol
Struttura cristallina	α , esagonale compatta β , cubica a corpo centrato
Colore	grigio scuro
Densità	4.51 g/cm ³
Punto di fusione	1668 \pm 10 °C
Punto di ebollizione	3289 °C
Calore specifico (a 25°C)	0.518 J/kg
Conduttività termica	20 W/(m * K)
Calore latente di fusione	440 kJ/kg
Calore latente di vaporizzazione	9.83 MJ/kg
Modulo di Young	100 GPa
Modulo di Poisson	0.32
Temperatura β -transus	882 °C
Elettronegatività	1.5 Pauling's
Sezione d'urto di assorbimento di neutroni	5.6 barns
Permeabilità magnetica	1.00005
Suscettività magnetica	3.17 * 10 ⁻⁶ cm ³ /g
Rapporto di lavorabilità (machinability rating)	40
Resistività elettrica	42 μ ohm - cm
Coefficiente di espansione termica	8.4 * 10 ⁻⁶ °C ⁻¹

1.1 Struttura cristallina e fasi del titanio

Il titanio presenta un comportamento allotropico: esiste cioè in più forme cristalline. Il titanio puro, a basse temperature, cristallizza in una struttura esagonale compatta (E.C. o H.C.P., *Hexagonal Closed Pack*), chiamata fase α . Oltre la temperatura di transizione di 882°C, chiamata β -transus, il titanio presenta un reticolo cubico a corpo centrato (C.C.C. o B.C.C., *Body Centered Cubic*), denominato fase β . La grande varietà di proprietà ottenibili con le leghe di titanio è dovuta all'esistenza di queste due diverse strutture cristalline, che permettono di ottenere microstrutture differenti a seconda degli elementi presenti in lega e dei trattamenti termici eseguiti. [1, 2, 3, 5]

La deformabilità e la velocità di diffusione nel titanio sono strettamente connesse alla struttura cristallina assunta; inoltre, si ha per la struttura esagonale un caratteristico

comportamento anisotropo, con variazione delle proprietà meccaniche in funzione della direzione considerata. [1, 3, 5]

La facilità a subire deformazioni plastiche cresce passando dalla struttura cristallina esagonale compatta a quella cubica a corpo centrato: per questo fenomeno, la deformabilità plastica del titanio in fase α (E.C.) è limitata rispetto a quella della fase β (C.C.C.). [1]

Per quanto riguarda la velocità di diffusione nel materiale, la fase α presenta una diffusività considerevolmente ridotta rispetto alla fase β , a causa della maggior densità atomica della struttura E.C. rispetto alla struttura C.C.C.. A titolo esemplificativo, vengono riportati i coefficienti di auto diffusione per le due fasi α e β e le distanze coperte per due differenti temperature [1]:

$$\begin{array}{llll}
 500^{\circ}\text{C}: & D_{\alpha-Ti} \approx 10^{-19} \text{ m}^2/\text{s} & \text{Dopo } 50 \text{ h}: & d \approx 0.8 \text{ }\mu\text{m} \\
 & D_{\beta-Ti} \approx 10^{-18} \text{ m}^2/\text{s} & & d \approx 0.9 \text{ }\mu\text{m} \\
 \\
 1000^{\circ}\text{C}: & D_{\alpha-Ti} \approx 10^{-15} \text{ m}^2/\text{s} & \text{Dopo } 1 \text{ h}: & d \approx 4 \text{ }\mu\text{m} \\
 & D_{\beta-Ti} \approx 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s} & & d \approx 40 \text{ }\mu\text{m}
 \end{array}$$

La differente diffusività nel titanio α e β influenza il comportamento meccanico delle due fasi, per quanto riguarda il comportamento al creep, la lavorabilità a caldo e la superplasticità: ad esempio, il titanio α e le leghe contenenti questa fase possiedono un miglior comportamento nei confronti del fenomeno del creep, a causa della limitata diffusività di questa struttura. La diffusività dipende inoltre dal tempo e dalla temperatura alla quale il materiale si trova: pertanto, nei trattamenti termici delle leghe del titanio, regolando opportunamente la temperatura e il tempo di riscaldamento, nonché la velocità di raffreddamento del materiale, si possono ottenere differenti microstrutture; ad esempio, con elevate velocità di raffreddamento da temperature superiori alla temperatura di inizio della formazione della martensite MS, la fase β si trasforma completamente in fase α in un processo praticamente privo di diffusione, formando una microstruttura martensitica finemente lamellare, o aciculare. E' pertanto possibile, mediante i diversi trattamenti termici e l'utilizzo di diversi parametri per la loro applicazione, variare la microstruttura della lega utilizzata, e di conseguenza ottenere differenti proprietà meccaniche anche per leghe con la medesima composizione. Questo aspetto verrà approfondito in seguito. [1, 3, 5, 6, 7]

1.1.1 Classificazione degli elementi alliganti e delle leghe del titanio

L'aggiunta di elementi alliganti al titanio puro consente di ottenere un netto miglioramento di alcune proprietà, e l'utilizzo di diversi elementi in lega, associato ai diversi trattamenti termici

e processi di lavorazione, consente alle leghe di titanio di coprire un vasto spettro di applicazioni, soddisfacendone le diverse necessità.

Gli elementi presenti in lega vengono classificati in base alla loro influenza sulla temperatura di transizione tra le fasi α e β (cioè β -*transus*, definita come la più bassa temperatura di equilibrio alla quale è presente nel materiale solo fase β). Si possono distinguere tre tipi di elementi (Fig. 1.3) [1, 3, 4, 5, 6]:

- elementi neutri: elementi che non hanno influenza sulla temperatura di transizione tra le due fasi, ma che aumentano la resistenza della fase α (stagno e zirconio).
- elementi α -stabilizzanti: aumentano la temperatura di transizione tra le fasi α e β , estendendo il campo di stabilità della fase α a temperature più elevate. Tra questi ricordiamo l'alluminio, il più importante e utilizzato, l'ossigeno, il carbonio, l'azoto, il gallio e il germanio. L'alluminio, assieme allo stagno e allo zirconio citati prima tra gli elementi, è solubile in entrambe le fasi α e β e tende perciò a distribuirsi equamente tra le due, aumentando la resistenza al creep della fase α .
- elementi β -stabilizzanti: riducono la temperatura di transizione tra le due fasi, estendendo il campo di stabilità della fase β a temperature più basse. Vengono suddivisi in elementi β -isomorfi, come il molibdeno, il vanadio, il tantalio e il niobio, più importanti per la loro maggior solubilità nel titanio, e in elementi β -eutettoidici, come ferro, manganese, cromo, cobalto, nichel, rame, silicio e idrogeno, che possono portare alla formazione di composti intermetallici anche a basse percentuali e che vengono perciò utilizzati prevalentemente in presenza di elementi β -isomorfi per limitare questo fenomeno. In particolare, il silicio viene utilizzato in alcune leghe per migliorare la resistenza al creep, ferro, cromo e manganese vengono utilizzati per aumentare la temprabilità e la sensibilità ai trattamenti termici della lega, mentre nichel, molibdeno e palladio aumentano la resistenza alla corrosione.

Gli elementi α e β stabilizzanti portano inoltre alla formazione di un campo bifasico $\alpha + \beta$.

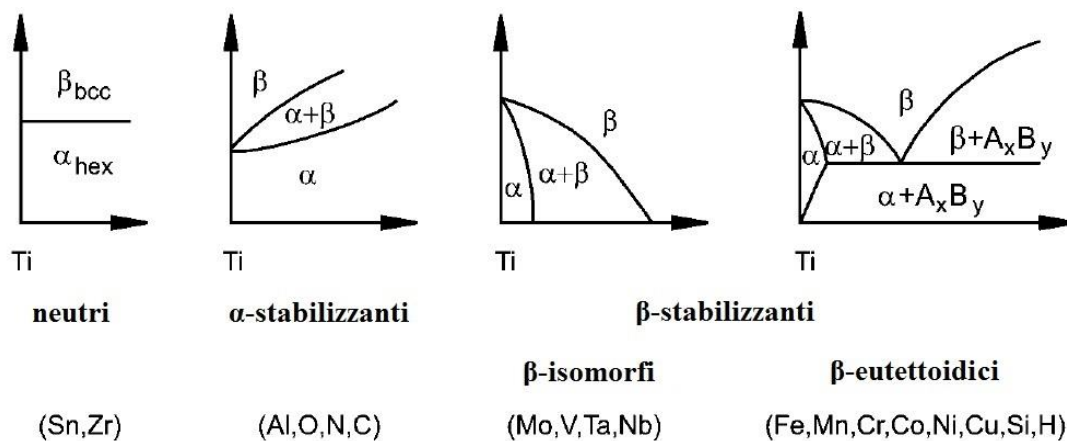


Figura 1.3 Classificazione degli elementi alliganti del titanio in base alla loro influenza sulla temperatura di transizione β -*transus* [1]

La classificazione delle leghe del titanio viene fatta in base agli elementi presenti in lega, distinguendo tra tre gruppi principali (Fig. 1.4):

- leghe α : comprendono le leghe contenenti soli elementi α stabilizzanti o neutri. Se nella lega sono contenute piccole percentuali di elementi β stabilizzanti, si parla di leghe *near- α* (o *superalpha* in alcuni testi).
- leghe $\alpha + \beta$: contengono una percentuale di fase β a temperatura ambiente che oscilla approssimativamente tra il 5 ed il 50%, data dalla presenza di elementi α e β stabilizzanti in lega. Sono le leghe più utilizzate.
- leghe β : leghe contenenti sola fase β (leghe β monofase) o contenenti fase α e β a temperatura ambiente, ma in cui anche a seguito di tempra non si ha la formazione di struttura martensitica (leghe β metastabili).

Oltre alle leghe si ha poi il titanio non legato (titanio CP o commercialmente puro), in cui gli elementi diversi dal titanio sono presenti in percentuali molto ridotte e considerati come impurità. In alcuni testi presenti in letteratura, vengono inclusi nelle leghe α . [1, 3, 4, 5, 6]

Per una sintesi delle principali leghe di titanio esistenti, si rimanda all'Appendice §A1.

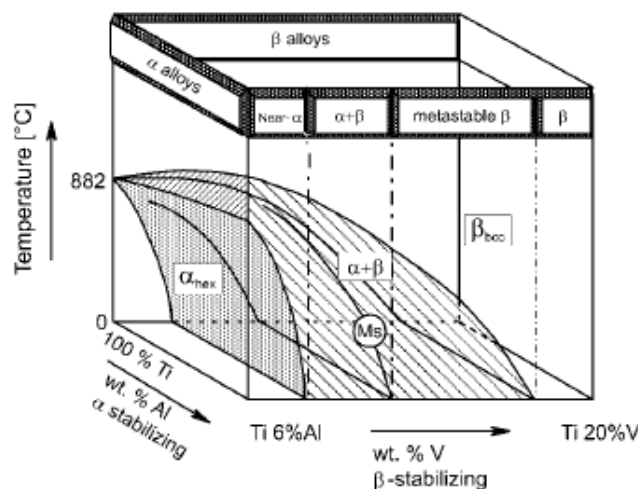


Figura 1.4 Suddivisione delle leghe di titanio in base alla percentuale di elementi α -stabilizzanti (nell'esempio, Al) e β -stabilizzanti (nell'esempio, V) presenti in lega [1]

1.1.2 Altre fasi

Oltre alle fasi principali α e β , può essere utile ricordare la formazione di alcuni composti intermetallici e alcune fasi secondarie nelle leghe del titanio. Storicamente, le fasi più importanti sono la fase omega e le fasi α_2 (Ti_3Al) e γ (TiAl). La fase ω è una fase intermedia, non di equilibrio, che anticipa la trasformazione martensitica e che può restare presente nel

caso di tempre di soluzione con velocità di raffreddamento troppo basse. La presenza di questa fase è da evitare in quanto provoca un infragilimento inaccettabile della lega, pertanto non verrà discussa nel dettaglio. [1, 3, 5, 7]

Le fasi α_2 e γ sono composti intermetallici presenti nel sistema titanio-alluminio, di cui si riporta il diagramma di fase in Fig. 1.5, essendo storicamente il sistema più studiato.

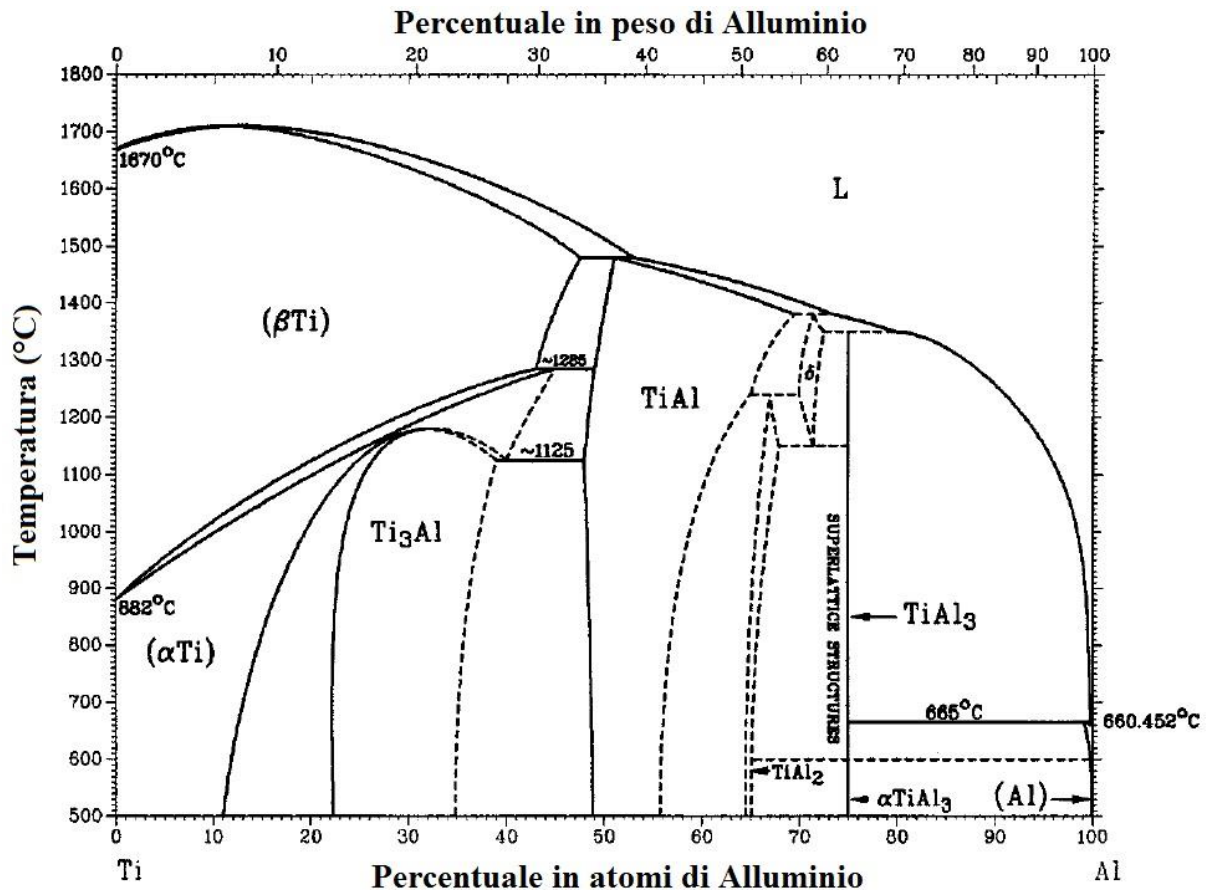


Figura 1.5 Diagramma di fase del sistema Ti-Al [1]

I composti intermetallici del sistema Ti-Al sono presenti per il titanio altamente legato, in quanto la percentuale di alluminio presente in lega deve essere elevata. Gli alluminuri di titanio di rilevanza tecnica crescente sono ad oggi le già citate fasi α_2 (Ti₃Al) e γ (TiAl): in particolare quest'ultima fase sta acquisendo un'importanza crescente per il suo possibile utilizzo in campi di temperature elevate, permettendo applicazioni oltre i 500°C, a fronte però di una duttilità estremamente limitata, mentre la fase α_2 è stata in alcuni casi considerata un fattore nell'insorgere di fenomeni di tensocorrosione. In presenza di niobio in lega, si può avere la formazione di un ulteriore composto intermetallico (Ti₂AlNb), alla base della classe degli alluminuri ortorombici di titanio. Come si può notare, oltre ai composti intermetallici precedentemente citati, sono presenti anche i composti TiAl₂ e TiAl₃, che non vengono considerati in quanto estremamente fragili. [1, 4]

Un'ultima nota riguarda la formazione di martensite conseguente ad una tempra rapida a partire da una struttura contenente fase β oltre la temperatura MS: la struttura martensitica può essere distinta nelle strutture α' e α'' (per tempre a partire da temperature inferiori a 900°C): la struttura cristallina è esagonale compatta nel primo caso, ortorombica nel secondo. [1] La struttura martensitica, nel caso del titanio, produce una distorsione del reticolo cristallino che porta ad un leggero aumento della resistenza della lega, senza portare ad un infragilimento della stessa. Inoltre la struttura α'' è caratterizzata da una buona deformabilità. [1]

Alcune delle considerazioni fatte in questo paragrafo verranno riprese successivamente parlando dei trattamenti termici delle leghe di titanio e delle proprietà meccaniche in relazione alla microstruttura, in particolare per la lega Ti-6Al-4V, ovvero la lega storicamente più utilizzata e studiata.

1.2 La microstruttura delle leghe di titanio

Come precedentemente accennato, la microstruttura influenza in maniera drastica le proprietà delle leghe del titanio, e può essere modificata scegliendo opportunamente i trattamenti termici e i processi meccanici che la lega subisce. Non è intenzione di questo lavoro fornire una trattazione dettagliata del problema dal punto di vista metallurgico, ma si ritiene che non si possa prescindere da una conoscenza basilare della metallurgia delle leghe del titanio per comprendere con un'ottica più vasta le proprietà che verranno analizzate.

La microstruttura delle leghe di titanio è descritta sostanzialmente dalla grandezza, forma e disposizione spaziale delle fasi α e β . Le due situazioni microstrutturali limite sono la microstruttura lamellare, generata da un rapido raffreddamento dal campo di stabilità della fase β , e la microstruttura equiassica, risultato di un processo di ricristallizzazione; entrambi i tipi di microstruttura possono avere una disposizione fine o grossolana delle due fasi. [1, 3, 5, 6]

Tabella 1.2 Influenza della microstruttura su alcune proprietà delle leghe di titanio [1]

Grana cristallina		Proprietà	Microstruttura	
Fine	Grossolana		Lamellare	Equiassica
O	O	Modulo elastico	O	+/- (<i>texture</i>)
+	-	Resistenza	-	+
+	-	Duttilità	-	+
-	+	Tenacità a frattura	+	-
+	-	Iniziazione cricche per fatica	-	+
-	+	Propagazione cricche per fatica	+	-
-	+	Resistenza al creep	+	-
+	-	Superplasticità	-	+
+	-	Resistenza all'ossidazione	+	-

In Tab. 1.2 sono riassunte in maniera qualitativa le proprietà meccaniche del materiale per le due microstrutture limite nominate al variare della grana cristallina.

Alcuni termini con il quale ci si riferisce per indicare la microstruttura della fase α presente in lega sono:

- fase α primaria (α_P): fase α presente per tutta la durata dei trattamenti termici che avvengono nel campo $\alpha + \beta$, e la cui microstruttura e orientazione cristallina dipendono in maniera importante dall'ultima lavorazione o trattamento termico subito. La morfologia della fase α primaria può essere lamellare, equiassica o mista. [5]
- fase α secondaria (α_S): fase β trasformata ad opera di raffreddamento o invecchiamento al di sotto della β -*transus*, ovvero fase α che nuclea e cresce in regioni di fase β metastabile o in struttura martensitica. La morfologia della fase α secondaria può essere aciculare o lamellare (di Widmanstätten, formando colonie di lamelle con la medesimo orientazione), a piastra o dentellata. [5]
- struttura martensitica: martensite aciculare formata con un raffreddamento sufficientemente rapido a partire da grani di fase β . Per leghe con bassa concentrazione di elementi β -stabilizzanti, la martensite assume un reticolo esagonale compatto distorto, a cui ci si riferisce come α' ; per effetto della profondità molto ridotta degli aghi, α' è più resistente della fase α , ma non è necessariamente fragile. Per leghe con una concentrazione media di elementi β -stabilizzanti, si ottiene una struttura ortorombica chiamata α'' , che è meccanicamente più soffice e incrementa la duttilità a temperatura ambiente. La struttura ortorombica può essere formata anche a seguito di trasformazione di fase metastabile β residua indotta da tensioni. [5]

La fase β presente in lega può essere suddivisa in fase β di equilibrio, presente in leghe $\alpha + \beta$ e leghe β a temperatura ambiente e in forma stabile, e in fase β metastabile, la cui presenza in lega è dovuta ad un rapido raffreddamento dal campo di stabilità della fase β (o dal campo $\alpha - \beta$ ad elevate temperature). La decomposizione della fase β metastabile dà luogo a precipitati molto fini di fase α ed è alla base dei trattamenti termici per ottenere leghe con elevata resistenza (risulta immediato comprendere che le leghe α non possono subire trattamenti termici atti ad aumentare la loro resistenza). Si parla di grani di fase β originaria per indicare la dimensione dei grani di fase β presenti prima della formazione di martensite o di fase α secondaria a seguito di trattamenti termomeccanici. [3, 5]

Tabella 1.3 Relazioni tra caratteristiche microstrutturali delle fasi e proprietà meccaniche delle leghe di titanio[5]

Caratteristica	Migliora	Peggiora
Fase α equiassica	Resistenza Duttilità Iniziazione cricche per fatica Resistenza LCF	Tenacità a frattura Propagazione cricche per fatica Resistenza a fatica di intagli
Fase α allungata	Tenacità a frattura Resistenza a fatica di intagli Propagazione cricche per fatica	Duttilità Iniziazione cricche per fatica Resistenza LCF
Fase α Widmanstätten	Tenacità a frattura Propagazione cricche per fatica Resistenza a fatica di intagli Creep	Duttilità Resistenza Iniziazione cricche per fatica Resistenza LCF
Fase α bimodale	Duttilità Resistenza Iniziazione cricche per fatica Resistenza LCF	Tenacità a frattura Propagazione cricche per fatica
Colonie di fase α	Tenacità a frattura Propagazione cricche per fatica Resistenza a fatica di intagli	Duttilità Resistenza Iniziazione cricche per fatica Resistenza LCF
Fase α secondaria	Duttilità Resistenza	Tenacità a frattura
Grani di forma allungata	Tenacità a frattura Propagazione cricche per fatica Resistenza a fatica di intagli	Iniziazione cricche per fatica
Grani grossi di fase β originaria	Tenacità a frattura Creep	Duttilità Resistenza Iniziazione cricche per fatica Resistenza LCF
Grani fini di fase β originaria	Duttilità Resistenza Iniziazione cricche per fatica	Tenacità a frattura Resistenza a fatica di intagli
Grani di dimensioni differenti	Resistenza Iniziazione cricche per fatica	Tenacità a frattura
Film di fase α	Iniziazione cricche per fatica Resistenza a fatica di intagli	Propagazione cricche per fatica
Bordi di grano di fase α	Tenacità a frattura Propagazione cricche per fatica Resistenza a fatica di intagli	Duttilità Iniziazione cricche per fatica Resistenza LCF

Di fondamentale importanza per i trattamenti termomeccanici che modificano la microstruttura delle leghe di titanio è la temperatura β -transus: operando un raffreddamento a partire da temperature superiori a questa, quando la temperatura scende al di sotto di T_β

nuclea fase α a partire dai bordi di grano e cresce come lamelle all'interno dei grani β originari. Aumentando la velocità di raffreddamento, la grandezza delle lamelle si riduce, fino ad arrivare al caso di formazione di struttura martensitica per raffreddamenti sufficientemente rapidi. Viceversa, per velocità di raffreddamento decrescenti la grandezza delle lamelle aumenta. Le strutture equiassiche vengono invece ottenute a partire da materiale fortemente incrudito attraverso ricottura che genera una microstruttura ricristallizzata. [3, 5, 6]

All'aumentare del tempo di ricottura, la grana cristallina della microstruttura equiassica si fa più grossolana, mentre la temperatura alla quale viene eseguita la ricottura determina la percentuale di fase α primaria presente in lega: per ricotture a temperature vicine ma inferiori alla β -*transus*, si ottengono microstrutture bimodali (o *duplex*) caratterizzate da grani di fase α_p equiassica in una matrice lamellare $\alpha + \beta$. [1, 3, 5, 6]

In Tab. 1.3 sono riportate le relazioni tra alcune caratteristiche microstrutturali e le proprietà meccaniche delle leghe di titanio.

1.3 Proprietà delle leghe di titanio

L'ampio spettro di proprietà possedute dalle leghe di titanio le rendono materiali unici nel loro genere, consentendo il loro utilizzo in un vasto range di applicazioni: la combinazione delle loro proprietà fisiche e meccaniche e di resistenza alla corrosione le rendono materiali adatti a soddisfare le necessità di molti settori, come ad esempio i settori aerospaziale, industriale, chimico, energetico, militare, medico ed altri (si veda l'App. §A2).

Sinteticamente, le principali caratteristiche del titanio e delle sue leghe si possono riassumere come segue: [2]

- leggerezza;
- alta resistenza meccanica e strutturale (elevato rapporto resistenza/densità);
- grande resistenza a fatica;
- elevata tenacità a frattura;
- elevata resistenza alla corrosione e all'erosione;
- elevate proprietà a temperature elevate (fino a circa 600°C);
- resistenza all'infragilimento a basse temperature;
- capacità di assorbire grandi quantità di energia elastica (basso modulo di Young);
- non magneticità;
- biocompatibilità;
- resistenza balistica;
- basso coefficiente di espansione termica;
- elevato punto di fusione;

- tempo di dimezzamento radioattivo molto breve;
- longevità senza richiesta di manutenzione;
- forgiabilità;
- possibilità di fusione in getti;
- impiegabilità nella metallurgia delle polveri;
- saldabilità;
- lavorabilità alle macchine utensili.

La Tab. 1.4 riporta, a scopo di confronto, le principali caratteristiche fisiche e meccaniche delle principali leghe metalliche, del titanio puro e della lega Ti-6Al-4V.

Tabella 1.4 Proprietà fisiche del titanio puro, della lega Ti-6Al-4V e dei principali metalli e loro leghe [2]

Materiale	Numero atomico	Peso atomico	Densità (g/cm^3)	Punto di fusione ($^{\circ}C$)	Coeff. di esp. termica ($1/^{\circ}C$)	Calore specifico ($cal/g^{\circ}C$)	Conducib. termica ($cal/cm^2 \cdot sec^{\circ}C/cm$)	Resistenza elettrica ($\mu\Omega \cdot cm$)	Conducib. elettrica (%IACS)	Modulo di Young (N/mm^2)	Coeff. di Poisson
Titanio puro	22	47,90	4,5	1668	$8,4 \times 10^{-6}$	0,124	0,052	55	3,1	106000	0,34
Ti-6Al-4V	-	-	4,4	1650	$8,5 \times 10^{-6}$	0,138	0,024	175	0,98	110000	0,34
Ferro	26	55,85	7,9	1530	12×10^{-6}	0,11	0,15	9,7	18	206000	0,31
Acciaio inossidabile 18-8 (AISI 304)	-	-	7,9	1400-1420	17×10^{-6}	0,12	0,039	72	2,4	200000	0,30
Alluminio	13	26,97	2,7	660	23×10^{-6}	0,21	0,49	2,7	64	69000	0,33
Lega di Alluminio (75S-T6)	-	-	2,8	476-638	23×10^{-6}	0,23	0,29	5,8	30	71600	0,33
Magnesio	12	24,32	1,7	650	25×10^{-6}	0,24	0,38	4,3	40	44800	0,35
Nickel	28	58,69	8,9	1456	15×10^{-6}	0,11	0,22	9,5	18	206000	0,30
Hastelloy C	-	-	8,9	1305	$11,3 \times 10^{-6}$	0,092	0,03	130	1,3	204600	-
Rame	29	63,57	8,9	1083	17×10^{-6}	0,092	0,962	1,724	100	108000	0,34

Acciaio inossidabile 18-8: Cr(18%)-Ni(8%)75S-T6: Extra super duralumin [Cu(1,6%)-Mg(2,5%)-Cr(0,3%)-Zn(5,6%)-Al(Bal.)], allo stato temprato Hastelloy C:58Ni-17Mo-14Cr-6Fe-5W.

Altre proprietà fisiche del titanio: Struttura cristallina tipo α ($\leq 882^{\circ}C$): reticolo esagonale compatto. Struttura cristallina tipo β ($> 882^{\circ}C$): reticolo cubico a corpo centrato.

Già in questi termini di confronto appaiono evidenti alcune caratteristiche particolarmente interessanti:

- bassa densità, quindi notevole leggerezza. La densità del titanio, intorno a $4.5 g/cm^3$, unita a proprietà meccaniche paragonabili a quelle di acciai da costruzione (che però presentano una densità di circa $7.9 g/cm^3$), lo rendono particolarmente vantaggioso in termini di efficienza: a parità di prestazioni meccaniche, lo stesso pezzo richiede la metà del materiale in termini di peso. [2, 4] La bassa densità si traduce inoltre in minori tensioni per pezzi rotanti e in moto reciproco (per le più basse inerzia e forza centrifuga sviluppate); [4]

- elevato punto di fusione: per il titanio si ha una temperatura di fusione di circa $1650 \div 1668 \text{ }^\circ\text{C}$, superiore a quella degli altri metalli in esame, ed è intuibile perciò la sua possibilità di utilizzo ad elevate temperature e la buona resistenza all'accensione e alla combustione in aria; [2, 3, 4, 5]
- basso modulo di Young: unito alla elevata resistenza allo snervamento, lo rende un materiale in grado di assorbire grandi quantità di energia elastica, e quindi particolarmente adatto alla costruzione di molle (più corte e compatte a parità di prestazioni). [2, 4] Tale proprietà limita le tensioni prodotte in applicazioni in controllo di deformazione; [4]
- basso coefficiente di espansione termica: inferiore a quello degli altri metalli, vicino a quello di vetri, materiali lapidei e ceramici e strutture composite a cui il titanio può essere accoppiato senza problemi in varie applicazioni (ad esempio nel restauro di beni architettonici), minimizzando il rischio di deformazioni e di fatica per cicli termici dovuti a dilatazione differenziale dei materiali a contatto; [2, 4]
- buona trasmissione del calore: la conducibilità termica del titanio, pur superiore a quella degli acciai inox, è solo circa un ventesimo di quella del rame, tuttavia la sua alta resistenza alla corrosione e le sue elevate caratteristiche meccanico-strutturali consentono di usare il metallo in spessori molto più sottili rispetto al rame, aumentando considerevolmente il coefficiente di scambio termico realizzato da uno scambiatore in titanio. [2] Sulla superficie del titanio non si formano inoltre prodotti di corrosione che diminuiscono il trasferimento di calore, come nel rame, e sono necessarie semplici procedure per mantenere pulite le superfici di scambio termico. [2, 4]

Oltre alle proprietà fisiche appena illustrate, il titanio possiede elevate caratteristiche di resistenza meccanica, paragonabili a quelle degli acciai. Tra le caratteristiche meccaniche più qualificanti emergono:

- ottima resistenza specifica (rapporto tra carico di rottura a trazione e densità, Fig. 1.6 e 1.7): specialmente nel campo di temperature tra i 200°C e i 500°C , questa è una caratteristica chiave per l'ambito aerospaziale; [2, 4]

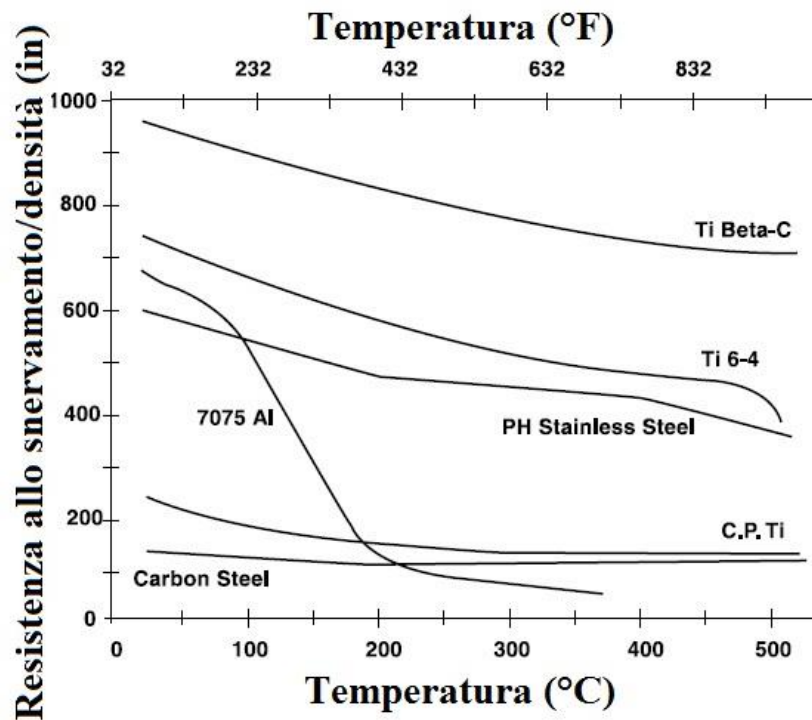


Figura 1.6 Resistenza specifica in funzione della temperatura del titanio e di altre leghe [4]

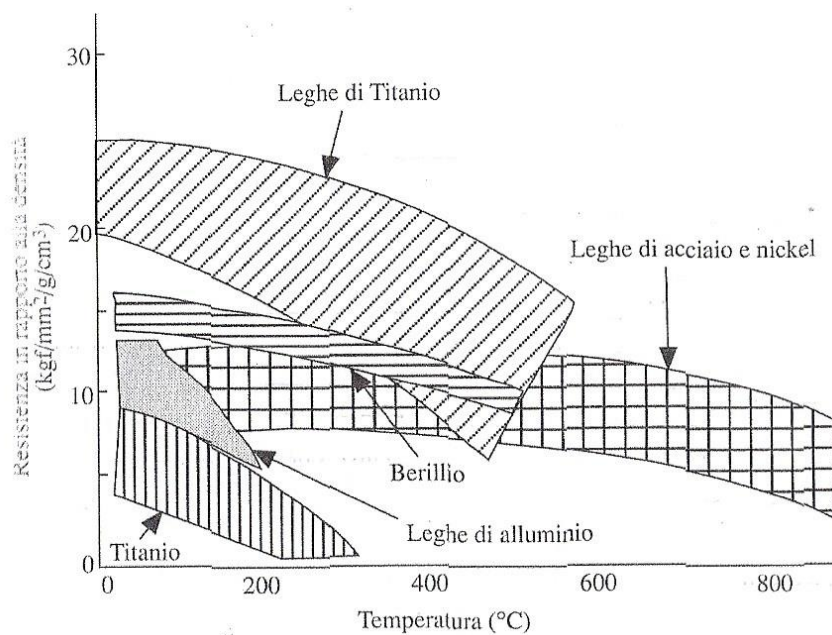


Figura 1.7 Resistenza specifica in funzione della temperatura per le leghe di titanio e altre leghe [2]

- eccellenti proprietà a temperature elevate, che rendono le leghe di titanio adatte all'utilizzo in turbine a gas e applicazioni motoristiche, in cui diverse leghe resistenti al creep possono essere selezionate per temperature fino a circa 600 $^{\circ}\text{C}$ (Fig. 1.8); [4]

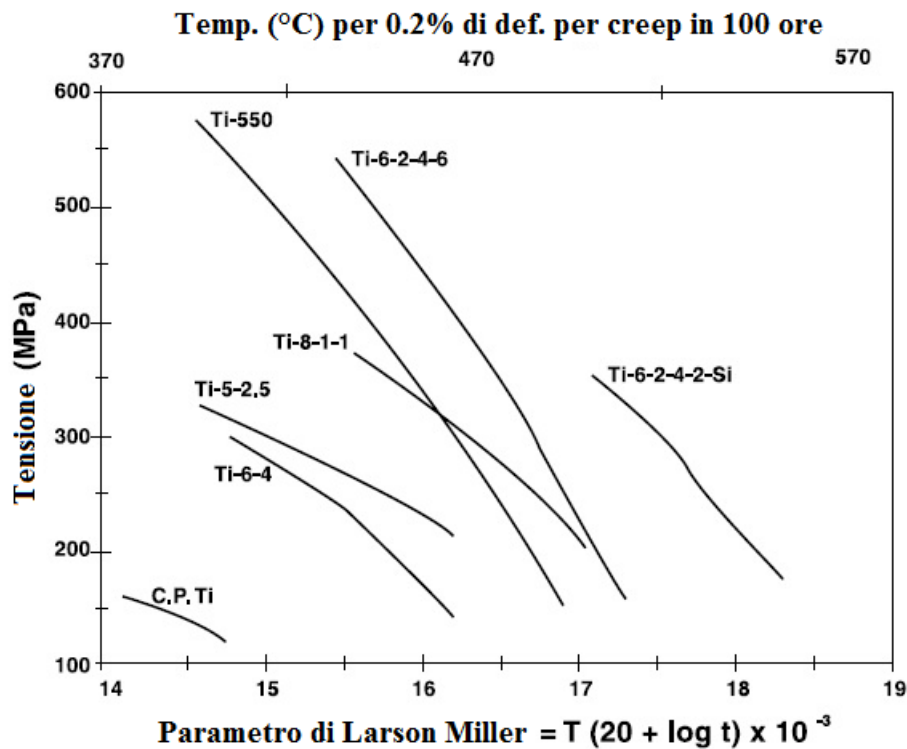


Figura 1.8 Resistenza al creep per diverse leghe di titanio [4]

- buona resilienza, caratteristica che permane anche a basse temperature rendendo il titanio idoneo ad applicazioni non solo aerospaziali, ma criogeniche più in generale (in particolare per le leghe α e $\alpha + \beta$); [2]
- buon carico di snervamento a trazione, variabile in funzione della composizione chimica e dei trattamenti termomeccanici eseguiti, e che può raggiungere valori paragonabili a quelli degli acciai alto-resistenziali; [1, 2]
- ampio spettro di combinazioni di resistenza e tenacità a frattura (Fig. 1.9), che permette l'ottimizzazione della selezione della lega più adatta in ogni applicazione a seconda che il comportamento critico in servizio del componente sia controllato dalla resistenza e dalla fatica S-N o dalla tenacità e dalla propagazione delle cricche. Inoltre, molte leghe di titanio possono subire processi atti ad assicurare elevata tenacità a frattura con buona resistenza alla degradazione ambientale (buona resistenza alla tensocorrosione); [4]

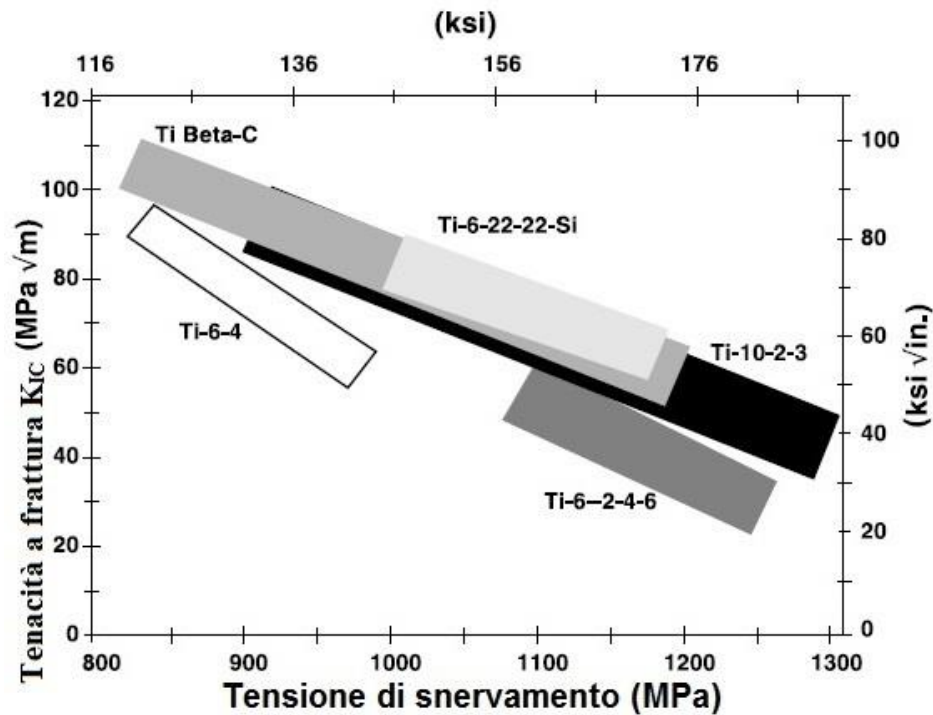


Figura 1.9 Tenacità a frattura in funzione della resistenza per alcune leghe di titanio [4]

- eccellente resistenza a fatica in aria, che rimane pressoché inalterata in acqua marina e in altri ambienti (Fig. 1.10). [4]

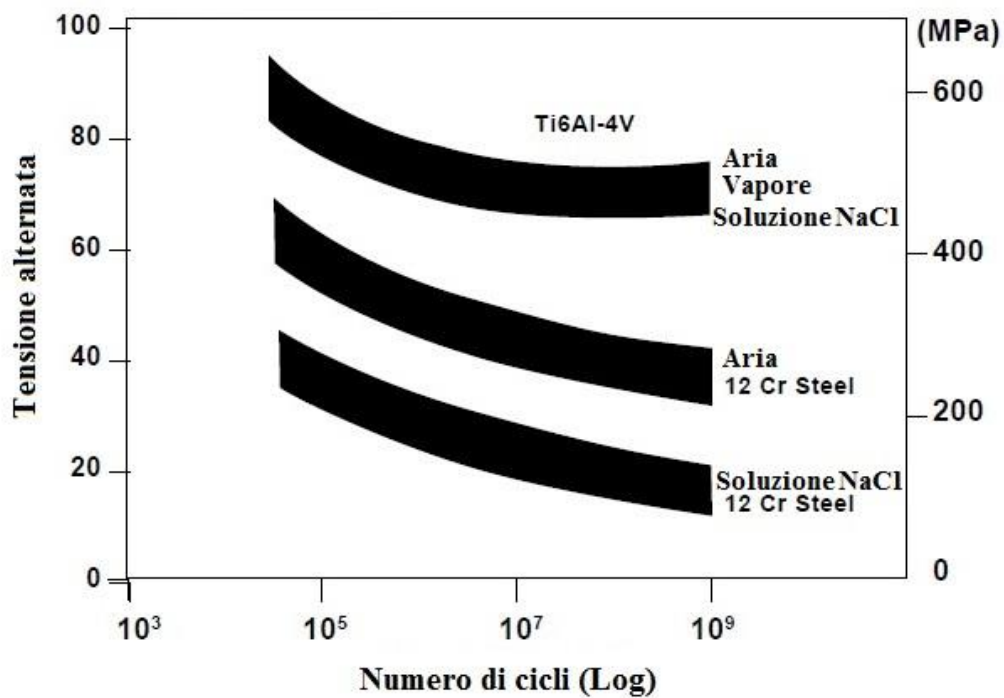


Figura 1.10 Resistenza a fatica della lega Ti-6-4 e di acciaio al cromo in diversi ambienti [4]

Per componenti la cui criticità è data da pressioni elevate e per recipienti per applicazioni industriali, le leghe di titanio sono qualificate all'interno di numerose norme di progettazione ed offrono interessanti tensioni ammissibili per temperature fino a 315°C. Alcune norme comuni per la progettazione di componenti critici a pressione sono la *ASME Boiler and Pressure Vessel Code* (sezioni I, III e VIII), la *ANSI (ASME) B31.3 Pressure Code*, la *BS-5500*, *CODAP*, *Stoomwezen and Merkblatt European Code*, l'australiana *AS 1210* e le norme giapponesi *JIS*. [4]

Altre caratteristiche del titanio e delle sue leghe che rivestono notevole importanza nelle sue applicazioni sono:

- l'eccellente resistenza alla corrosione nella maggior parte degli acidi ossidanti (acido nitrico in particolare), in ambienti salini (acqua marina, soluzioni di carburi ed idrocarburi clorurati, solfati e solfuri) e in soluzioni organiche naturali (corpo umano e prodotti alimentari). Quest'ultima caratteristica è dovuta alla capacità del titanio di ricoprirsi spontaneamente di un film passivo di biossido di titanio (TiO₂) tenace, aderente e chimicamente stabile, che presenta un'eccezionale resistenza alla corrosione. Tale capacità verrà discussa più nel dettaglio in seguito, e da questa dipendono altre proprietà qualificanti del materiale, come l'eccellente resistenza all'erosione, alla cavitazione ed alla tensocorrosione e la perfetta biocompatibilità; [2, 4]
- il brevissimo tempo di perdita di radioattività, caratteristica che ha importanti risvolti applicativi soprattutto nel settore energetico. A differenza degli acciai inossidabili, che possono richiedere diversi anni per tornare a valori basali dopo essere stati esposti a radiazioni, il titanio richiede solo alcune ore: tale proprietà lo rende adatto all'utilizzo in impianti per la lavorazione di elementi radioattivi e per lo smaltimento delle relative scorie; [2, 4]
- la buona protezione neutronica, proprietà importante per il settore nucleare nel quale sono state sviluppate leghe di titanio specifiche che sfruttano la proprietà del metallo di possedere una buona sezione di assorbimento di neutroni e di formare leghe con elementi che possiedono elevati valori di assorbimento; [2]
- l'ottima resistenza balistica, conseguente alla sua elevata tenacità, all'incapacità di dar luogo a schegge e alla ridotta propensione a dar luogo a bruciature e fusione nell'impatto balistico, e che ne permette l'impiego in campo militare per la protezione degli abitacoli di veicoli terrestri, aerei e navali; [2, 4]

- la non magneticità, che consente il suo impiego in applicazioni in cui le interferenze elettromagnetiche devono essere minimizzate, sia in ambito militare, ad esempio nelle pompe per unità navali, sia in ambito industriale, ad esempio nelle pinze per robot; [2, 4]
- l'ossidazione anodica della sua superficie, che determina strati molto stabili dai colori e dalle sfumature variabili e molto particolari con intensi ed originali effetti estetici, proprietà sfruttata nell'industria per la bigiotteria; [2]
- la memoria di forma nelle leghe con il nichel, che sono perciò idonee a meccanismi automatici di controllo della temperatura. Tale proprietà riveste notevole rilevanza in applicazioni chirurgiche e nell'industria, per esempio nell'accoppiamento di tubi; [2]
- la superconduttività elettrica, nelle leghe del titanio con il niobio; [2]
- le ottime proprietà acustiche, che rendono il titanio idoneo a creare efficaci barriere al rumore. Tale caratteristica è definita *dampening* e porta ad attenuazioni di rumore di 0.1 db/mm; [2]
- le particolari caratteristiche elettrochimiche, che rendono il titanio determinante per l'efficienza degli impianti a celle elettrolitiche per la produzione di prodotti chimici.[2]

1.4 Caratteristiche delle classi delle leghe del titanio

Ad oggi sono note più di un centinaio di leghe di titanio; tuttavia, neanche la metà di queste ha raggiunto la diffusione commerciale. Più del 50% del mercato delle leghe di titanio è coperto dalla lega Ti-6Al-4V, storicamente la più utilizzata e studiata, e circa il 20% del rimanente mercato è coperto invece dal titanio non legato. [1] In questo paragrafo verranno discusse in maniera più approfondita le classi delle leghe di titanio precedentemente elencate, anche in relazione ad alcune proprietà meccaniche (che verranno presentate dettagliatamente in seguito), per poi procedere con una panoramica delle diverse leghe presenti nel mercato.

1.4.1 Titanio non legato o commercialmente puro

Il titanio commercialmente puro (CP) è disponibile come prodotto di fonderia dal 1950. Vi sono più tipologie di titanio non legato (nella denominazione ASTM designate come gradi dall'1 al 4): la differenza primaria tra i gradi consiste nel diverso contenuto di ossigeno e ferro (e altre impurità come carbonio, idrogeno e azoto). I gradi di purezza maggiore (ovvero con un minor contenuto di elementi interstiziali) hanno resistenza e durezza minore rispetto a quelli con un maggior contenuto di elementi interstiziali, presentando tuttavia una maggior duttilità. L'elevata solubilità dell'ossigeno e dell'azoto rappresenta un'unicità del titanio rispetto agli altri metalli, con i vantaggi e gli svantaggi che ne conseguono; ad esempio, se riscaldato in aria ad elevate temperature, la diffusione di ossigeno e azoto nel metallo provoca la formazione di una soluzione solida in superficie caratterizzata dall'elevata durezza e fragilità, nota come strato contaminato dall'aria. Tale strato è generalmente rimosso per la riduzione di duttilità e resistenza a fatica che comporta. Tuttavia, l'elevata affinità tra titanio e ossigeno porta alla formazione di uno strato di ossido superficiale tenace ed aderente, chimicamente stabile e rigenerabile anche in presenza di deboli tracce di ossigeno o acqua che è responsabile dell'elevata resistenza alla corrosione del titanio e delle sue leghe. Le considerazioni finora fatte sono valide per tutte le classi di leghe. [1, 2, 3, 4, 5]

Il titanio non legato è generalmente utilizzato per la sua eccellente resistenza alla corrosione, specialmente in applicazioni in cui non è necessaria un'elevata resistenza meccanica e in cui sono invece richieste una buona duttilità e saldabilità. La tensione di snervamento (e la tensione di rottura) minima oscilla tra 170 MPa (240 MPa) per il Grado 1 e 480 MPa (550 MPa) per il Grado 4: tale differenza è legata alla variazione degli elementi interstiziali (la resistenza aumenta all'aumentare del contenuto di ossigeno e ferro). [1, 2, 3]

Per aumentare la resistenza alla corrosione, il titanio commercialmente puro può contenere limitate aggiunte di palladio e rutenio. In particolare, l'aggiunta di palladio (0.15 - 0.2 %) aumenta la resistenza alla corrosione in ambienti riducenti e ossidanti, estendendo la possibilità di utilizzo in soluzioni di acido fosforico, solforico e cloridrico. L'aggiunta di molibdeno e nichel (Ti-0.3Mo-0.8Ni, classificata come titanio CP modificato o come lega α) consente di ottenere un aumento della resistenza. [2, 4, 5]

1.4.2 Leghe α e near- α

Per effetto della limitata capacità della struttura esagonale compatta di subire deformazioni, la fase α presenta una minor duttilità rispetto alla fase β , oltre a possedere una diffusività sensibilmente inferiore. [1] Pertanto, l'aumento di α -stabilizzanti in lega (ed in particolare dell'elemento α -stabilizzante maggiormente utilizzato, ovvero l'alluminio) comporta un aumento della resistenza al creep e all'ossidazione, accompagnato da una diminuzione della

duttilità e della capacità di subire deformazioni. Per evitare che tali proprietà vengano ridotte al di sotto di soglie accettabili, nello sviluppo di nuove leghe si mantiene il parametro detto alluminio equivalente al di sotto della soglia del 9%: [1]

$$Al_{eq} = wt. \% Al + \frac{1}{3} wt. \% Sn + \frac{1}{6} wt. \% Zr + 10 wt. \% O \quad (1.1)$$

Come già discusso in precedenza, se presente in elevate percentuali l'alluminio può dar luogo a precipitati di fase α_2 (Ti_3Al) che provocano un infragilimento della lega, nonché la possibile insorgenza di fenomeni di tensocorrosione. Per queste ragioni, il contenuto di alluminio è stato limitato ad un massimo del 6 % per un lungo periodo, sebbene ad oggi tale limite sia intenzionalmente superato per le interessanti prospettive riguardanti gli alluminuri di titanio (Ti_3Al e $TiAl$). [1]

All'interno di questa classe di leghe, quelle contenenti alluminio, stagno e zirconio vengono preferite per utilizzi sia criogenici (per l'assenza di una temperatura di transizione duttile/fragile [2, 5]) che ad elevate temperature. [3] Le leghe ricche di elementi α -stabilizzanti sono generalmente più resistenti al creep ad elevate temperature rispetto alle leghe $\alpha + \beta$ o β . Le leghe *extra-low-interstitial* (ELI) mantengono una buona duttilità e tenacità anche in applicazioni criogeniche [3] (esempio per tali applicazioni è la lega Ti-5Al-2.5Sn-ELI, particolarmente resistente ad acqua di mare e acido nitrico e utilizzata per recipienti in pressione). [4, 5]

A differenza delle leghe $\alpha + \beta$ e delle leghe β , le leghe α non possono vedere aumentata la loro resistenza mediante trattamenti termici: in genere queste leghe subiscono ricotture di distensione o ricristallizzazione per rimuovere le tensioni residue indotte mediante deformazione a freddo. [1, 3, 4, 5, 6] Le leghe α possiedono una buona saldabilità (dipendente proprio dall'impossibilità di subire trattamenti termici di invecchiamento), ma una scarsa forgiabilità, manifestando infragilimento a caldo alle elevate temperature con un'elevata tendenza a bruciature e a cricche superficiali: sono pertanto richiesti più passi con riscaldamenti intermedi per le operazioni di forgiatura. [3]

Le leghe *near- α* contengono solo piccole aggiunte di elementi β -stabilizzanti (fino al 2 %), e vengono utilizzate nel campo delle elevate temperature in quanto uniscono l'eccellente resistenza al creep delle leghe α all'elevata resistenza delle leghe $\alpha + \beta$; l'inizio del loro sviluppo è dovuto appunto alla ricerca di un materiale termoresistente per compressori di turbine di motori aeronautici, e ad oggi la loro massima temperatura di impiego raggiunge i $500 \div 550$ °C. [1, 5] Le leghe *near- α* esibiscono una maggior forgiabilità rispetto alle leghe α monofasiche, e vengono generalmente forgiate e trattate termicamente nel campo $\alpha - \beta$ ad una temperatura alla quale le due fasi sono equi ripartite. [2] Esempio di tali leghe è la Ti-8Al-1Mo-1V, ovvero la lega con maggior tenore di alluminio, dalle caratteristiche meccaniche

medio-alte utilizzata per dischi e lame dei compressori in motori aerei. [5] L'elevato contenuto di alluminio ha portato tuttavia a problemi di tensocorrosione, e a tale lega è subentrata la Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo, sviluppata dalla Timet e affinata dalla RMI nel 1970 mediante l'aggiunta di una piccola quantità di silicio (0.1%): da alcune ricerche si è infatti scoperto che utilizzando una piccola percentuale di silicio in lega, il comportamento nei confronti del creep migliora in maniera sostanziale, e per questo motivo le leghe destinate ad elevate temperature contengono fino allo 0.5% di silicio. [1] Una delle leghe più avanzate per applicazioni ad elevate temperature è la lega TIMETAL 834, con temperatura massima di utilizzo prossima ai 600°C. [1]

1.4.3 Leghe $\alpha + \beta$

Le leghe appartenenti a questa classe contengono uno o più elementi α -stabilizzanti e uno o più elementi β -stabilizzanti. La quantità di fase β presente a temperatura ambiente dipende dalla quantità di elementi β -stabilizzanti e dai trattamenti termici eseguiti, ma è comunque più elevata di quella presente nelle leghe *near- α* . La resistenza delle leghe $\alpha + \beta$ può essere incrementata mediante tempra di solubilizzazione e invecchiamento. La tempra di solubilizzazione genera una microstruttura formata da fase β metastabile o trasformata in martensite, a seconda della composizione chimica della lega, della temperatura del trattamento termico, delle dimensioni del pezzo e della velocità di raffreddamento. A seguire l'invecchiamento, generalmente tra 480°C e 650°C, porta alla precipitazione di fase α generando una grana fine di fase α e β all'interno della fase β metastabile. [3, 6, 7] La tempra di soluzione e l'invecchiamento (condizione a cui ci si riferisce con la sigla STA) può portare ad un aumento di resistenza fino al 50% rispetto al semplice trattamento di ricottura. [3] Generalmente queste leghe esibiscono una buona forgiabilità, più elevata rispetto alle leghe α e *near- α* , una elevata resistenza a temperatura ambiente e una moderata resistenza ad elevate temperature. Aumentando il tenore di fase β , la saldabilità tende a diminuire. [2, 3]

La lega più utilizzata in questa classe, nonché in assoluto tra le leghe di titanio, è la già citata Ti-6Al-4V. Sviluppata intorno al 1950, è una delle prime leghe ad essere state realizzate, e pertanto è la lega più conosciuta ed indagata. [1] Le ragioni del successo di questa lega sono principalmente due. In primo luogo, il buon bilanciamento delle sue proprietà. In secondo luogo, proprio il fatto di essere stata la lega più studiata e sviluppata, in particolare nell'industria aerospaziale, prima utilizzatrice della Ti-6-4. Questa lega, come d'altronde tutte le leghe povere di β -stabilizzanti, richiede un raffreddamento molto rapido perché la tempra di solubilizzazione sia efficace e provochi un sensibile aumento della sua resistenza. [3, 7] All'aumentare del contenuto di β -stabilizzanti, la temprabilità della lega aumenta. [3]

1.4.4 Leghe β metastabili

Le leghe β metastabili presentano una composizione più ricca di elementi β -stabilizzanti e più povera di elementi α -stabilizzanti rispetto alle leghe $\alpha + \beta$. Sono caratterizzate da elevata temprabilità, con la possibilità di mantenere l'intera fase β metastabile utilizzando raffreddamento ad aria per piccole sezioni o raffreddamento ad acqua per componenti di grandi dimensioni. [3] Le leghe β sono caratterizzate da un'ottima forgiabilità, e possono essere deformate a freddo in lamiere più facilmente delle leghe $\alpha + \beta$ e delle leghe α . [3] La fase β presente è generalmente metastabile e tende a trasformarsi nella struttura di equilibrio $\alpha - \beta$. [3] Dopo tempra di solubilizzazione, le leghe β metastabili vengono invecchiate ad una temperatura compresa tra 450°C e 650°C , per trasformare parzialmente la fase β in fase α . [3] La fase α si forma come particelle finemente disperse nella fase β metastabile, e possono così essere ottenuti valori di resistenza comparabili o superiori a quelli ottenibili per le leghe $\alpha + \beta$ (anche maggiori di 1400 MPa). [1] Gli svantaggi principali delle leghe β rispetto alla classe precedente sono la maggior densità, la minor resistenza al creep, la minor duttilità nella condizione invecchiata, la modesta saldabilità e la scarsa resistenza all'ossidazione. [1] Non sono inoltre indicate per l'impiego a basse temperature, presentando una transizione di comportamento duttile/fragile. Tuttavia, la tenacità a frattura delle leghe β invecchiate è in genere maggiore di quella delle leghe $\alpha + \beta$ invecchiate, per valori simili di tensione di snervamento. [3]

Dopo il trattamento di solubilizzazione (100% di fase β metastabile), le leghe β possiedono buona duttilità e tenacità, resistenza relativamente bassa e una eccellente forgiabilità. Non è possibile l'impiego di tali leghe ad elevate temperature se prima non è stato realizzato il trattamento di invecchiamento a temperature elevate (*overaging*) per stabilizzare la microstruttura ed evitare precipitazioni di fase α durante il loro impiego. [3]

La prima lega β sviluppata è stata la Ti-13V-11Cr-3Al, utilizzata per parti strutturali dall'aviazione statunitense, che presentava però problemi di saldabilità e di fragilità al caldo (risolti con l'aggiunta di alluminio, zirconio e stagno). [2] Tra le altre leghe β , ricordiamo la Beta C, largamente utilizzata, la TIMETAL 21S (Ti-15Mo-3Nb-3Al-0.2Si), dalla particolare resistenza all'ossidazione e al creep e utilizzata come matrice per le leghe di titanio rinforzate con fibre lunghe, la TIMETAL LCB (*Low Cost Beta*), utilizzata nell'industria automobilistica, in particolare per realizzare molle per le sospensioni, e la SP 700, che esibisce un comportamento superplastico eccellente già per temperature vicine ai 700°C . [1]

1.5 Trattamenti termici delle leghe di titanio $\alpha + \beta$

Come ribadito più volte nei precedenti paragrafi, i trattamenti termici a cui vengono sottoposte alcune leghe di titanio possono alterare in maniera sensibile le loro proprietà. In particolare, per ciascuna classe di leghe, si possono osservare i seguenti comportamenti:

- Leghe α : non rispondono ai trattamenti termici;
- Leghe $\alpha + \beta$ e *near- α* : rispondono ai trattamenti termici e possono subire trasformazioni di tipo martensitico;
- Leghe β : possono essere soggette a trattamenti termici, ma non subiscono trasformazioni martensitiche.

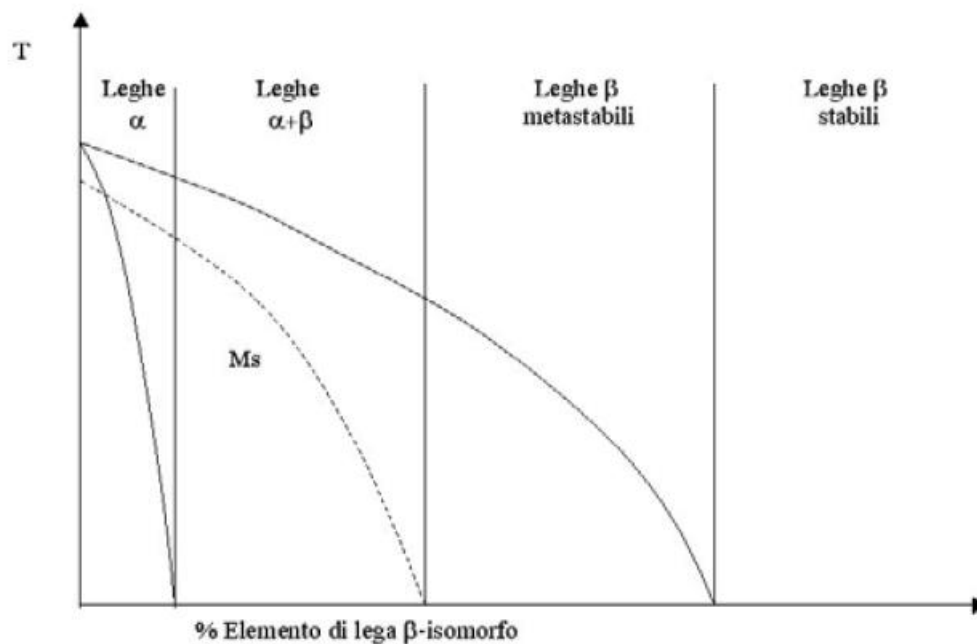


Figura 1.11 Rappresentazione di un diagramma di fase binario con un elemento di lega β -isomorfo[6]

Per le due ultime classi di leghe, la scelta del trattamento termico influenza, oltre alla resistenza statica e la duttilità del materiale, anche la tenacità a frattura e la resistenza a fatica. Verranno ora presi in esame i trattamenti termici di interesse industriale per le leghe $\alpha + \beta$, dato che queste sono le più diffuse, specie in ambito aeronautico e motoristico. In letteratura i termini utilizzati per indicare i vari trattamenti termici non sono univoci: a volte si utilizza il termine di ricottura per tutti i trattamenti termici, specificando poi la temperatura e la velocità di raffreddamento. [6] In altri casi, si distingue tra ricottura e trattamenti di tempra di solubilizzazione seguita da invecchiamento. [3, 7] In questa sede si utilizzerà termini ricottura per indicare trattamenti termici seguiti da un lento raffreddamento (in aria o in forno) e tempra per indicare trattamenti termici seguiti da un raffreddamento molto rapido (acqua, salamoie o soluzioni di soda caustica, con passaggio dal forno al mezzo di raffreddamento che in alcuni casi deve essere inferiore ai sette secondi). [3, 7]

Per effetto dell'elevata reattività del titanio (specialmente alle alte temperature), prima dei trattamenti termici il componente deve essere accuratamente pulito, sgrassato ed asciugato. Se tale fase non viene eseguita con cura, si può avere contaminazione del materiale, con rischio di infragilimento o tendenza alla tensocorrosione. [3, 6]

Per quanto riguarda l'elevata velocità di ossidazione del titanio, si può avere formazione sulla superficie del pezzo di uno strato di fase α ricca di ossigeno (α -case), che, risultando più fragile del restante materiale, può generare difficoltà durante le successive operazioni di lavorazione. Nel caso in cui la formazione di tale strato non possa essere evitata, sarà necessario procedere alla sua asportazione dopo il trattamento termico. [3, 6]

L'assorbimento dell'idrogeno deve invece essere assolutamente evitato, poiché anche quantità limitate di tale elemento possono portare ad una significativa diminuzione della tenacità e della resilienza. Se non è possibile eseguire i trattamenti termici in forni a vuoto o in atmosfera inerte, si preferisce ricorrere ad atmosfere ossidanti, per ridurre la pressione parziale dell'idrogeno e la sua velocità di diffusione, a causa della presenza della superficie ossidata del materiale. [3, 6]

Il valore della temperatura di β -transus per diverse leghe di titanio, parametro che riveste un'importanza fondamentale nei trattamenti termici, è tabellato in Tab. 1.6 con alcune proprietà meccaniche di tali leghe.

1.5.1 Trattamento di distensione

Tale trattamento favorisce il mantenimento della stabilità geometrica e dimensionale del componente, riducendo gli effetti delle tensioni residue dovute a lavorazioni per deformazione plastica, a saldature e ad altri trattamenti termici. Può essere omesso se alle lavorazioni meccaniche seguiranno trattamenti di ricottura o, in alcuni casi, invecchiamento. [3, 6]

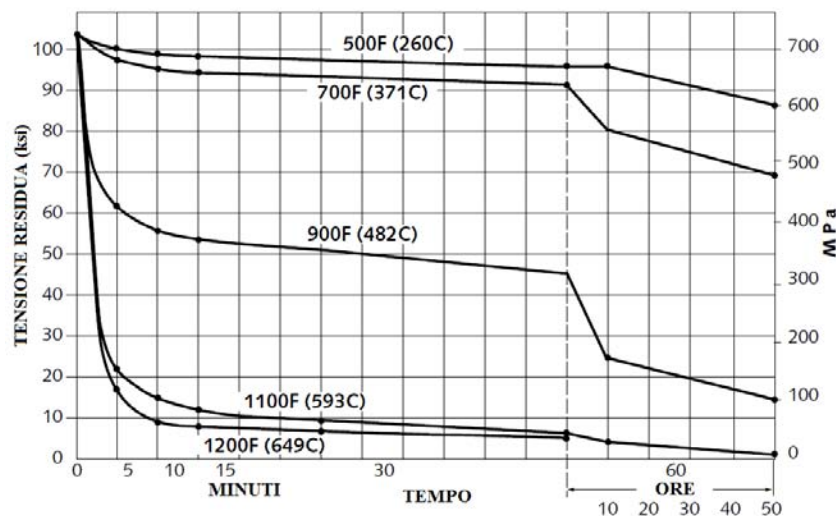


Figura 1.12 Trattamento di distensione: relazione fra tempo e riduzione delle tensioni a varie temperature nella lega Ti-6Al-4V [8]

La distensione nel titanio dipende principalmente dalla temperatura a cui viene eseguito il trattamento, che non deve comunque modificare i risultati di precedenti trattamenti termici (Fig. 1.12). Inoltre la velocità di raffreddamento non deve essere tale da generare nel materiale gradienti di temperatura eccessivi. [3, 6]

1.5.2 Ricottura (o tempra) in campo β seguita da invecchiamento

La ricottura in campo β , che è sostanzialmente una ricottura di ricristallizzazione in campo β , permette di ottenere, per le leghe di titanio $\alpha + \beta$, una microstruttura di Widmanstätten, generata durante il raffreddamento a partire dai bordi di grano della fase β (Fig. 1.13). [3, 6]

I parametri di tale microstruttura sono:

- La dimensione delle lamelle;
- La dimensione delle colonie di lamelle (ovvero gruppi di lamelle aventi la stessa orientazione sviluppatisi all'interno di un grano β);
- La presenza e lo spessore di uno strato di fase α al bordo del grano di fase β (α_{GB})

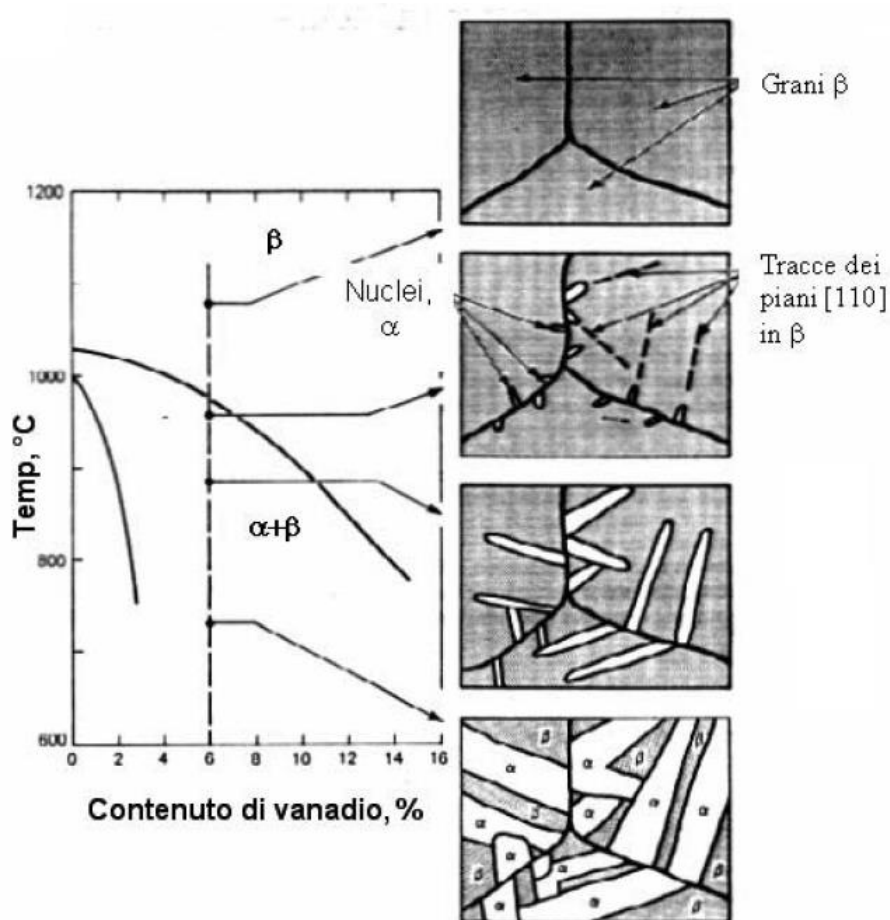


Figura 1.13 Fasi di formazione della struttura di Widmanstätten in una lega $\alpha + \beta$ [6]

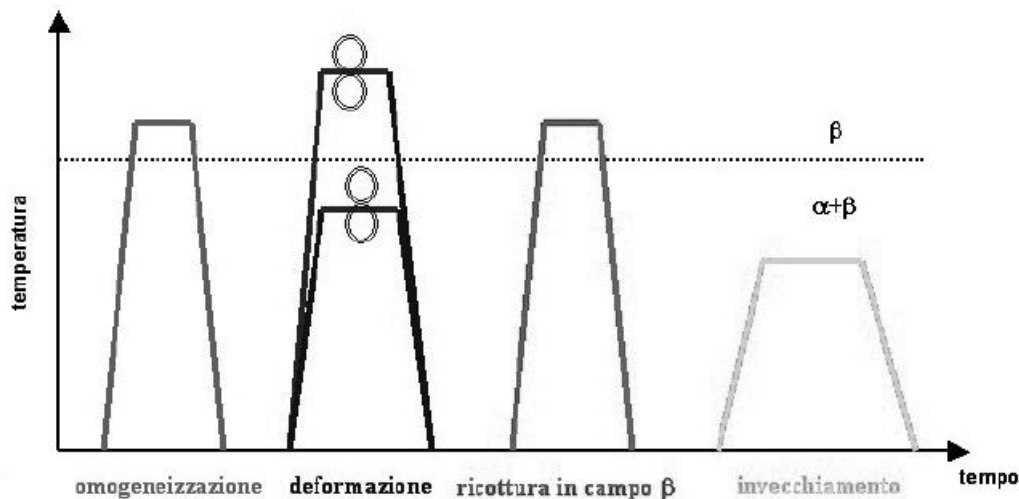


Figura 1.14 Sequenza di lavorazioni che deve subire la lega $\alpha + \beta$ prima di essere sottoposta a ricottura in campo β , a cui segue eventualmente il trattamento di invecchiamento [6]

Le sequenza di operazioni, trattamenti termici e deformazioni plastiche a cui viene sottoposto il materiale prima della ricottura in campo β è riportata in Fig. 1.14. Per evitare un eccessivo ingrossamento dei grani di fase β le deformazioni plastiche vengono effettuate a temperature di poco superiori al β -transus. In alcuni casi si ricorre ad una sequenza di deformazioni in campo β con un operazione finale in campo $\alpha + \beta$, più raramente l'operazione di deformazione viene condotta unicamente in campo $\alpha + \beta$. [6]

Mentre la scelta della temperatura di trattamento influenza la dimensione dei grani β ricristallizzati, e di conseguenza la dimensione delle colonie di lamelle, la velocità di raffreddamento determina la dimensione delle lamelle di fase α e lo spessore dello strato α_{GB} : maggiore è la velocità di raffreddamento, minori saranno questi due parametri. Per velocità di raffreddamento molto elevate (tempra di solubilizzazione in campo β) si può avere una trasformazione martensitica, con microstruttura che dipende dalla quantità di elementi β -stabilizzanti: si avrà struttura α' per basso contenuto di elementi β -stabilizzanti, viceversa si avrà una struttura α'' . [6]

Si ribadisce che una struttura molto fine, con eventuale formazione di martensite, porta ad un incremento delle tensioni di snervamento e di rottura, e della resistenza a fatica ad alto numero di cicli (Fig. 1.15). [1, 3, 6]

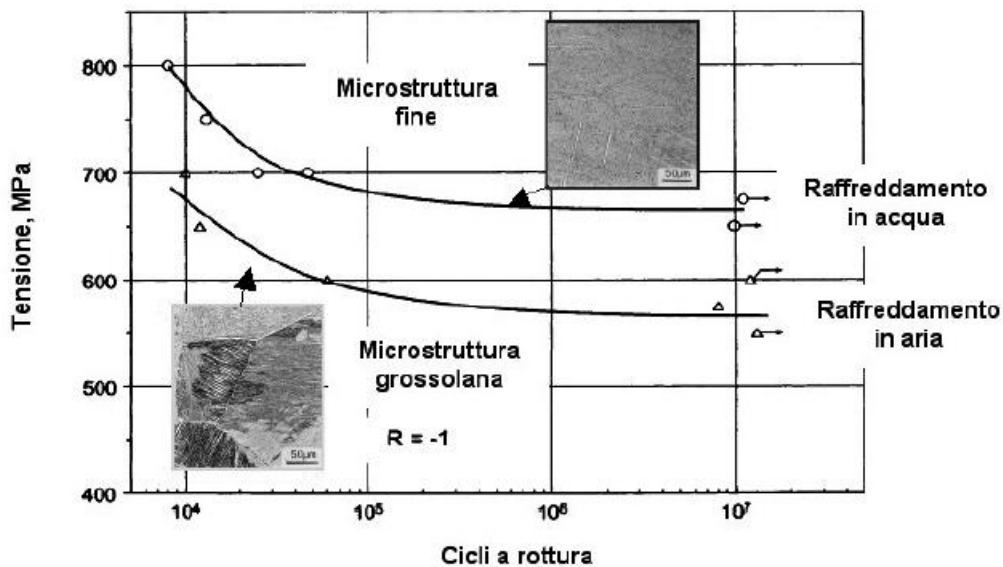


Figura 1.15 Curve di fatica della lega Ti-6Al-4V dopo ricottura in campo β e raffreddamento eseguito in acqua o in aria [6]

La duttilità tende inizialmente ad aumentare e successivamente, raggiunto un massimo, a diminuire al crescere della velocità di raffreddamento dalla temperatura di ricottura. Nel caso di tempra partendo da temperatura maggiore del β -*transus*, si ha il massimo della resistenza meccanica, tenacità a frattura e resistenza alla tensocorrosione dopo invecchiamento, ma si ottiene una duttilità molto bassa. [3, 6]

A questo trattamento termico segue generalmente un trattamento di invecchiamento, per ottenere il precipitato Ti_3Al nella fase α , per leghe con percentuale di alluminio maggiore al 6% e a temperature inferiori a quella di solubilizzazione del precipitato stesso ($550^\circ C$ per la lega Ti-6Al-4V). Per avere uno sviluppo uniforme dei precipitati, gli elementi in lega devono essere distribuiti omogeneamente. [6]

Il trattamento di invecchiamento può essere effettuato inoltre per ottenere fasi α e β stabili da fasi metastabili presenti a causa di un rapido raffreddamento. In questo modo si promuove la formazione di lamelle fini di fase α secondaria all'interno di fase β metastabile o la trasformazione della struttura martensitica in una struttura fine $\alpha + \beta$. [3, 6]

Le particelle di precipitato Ti_3Al portano ad un aumento della tensione di snervamento e ad una forte riduzione della duttilità nel caso di microstrutture lamellari grosse, mentre la trasformazione della martensite porta ad una riduzione della tensione di snervamento e ad un incremento della duttilità. [1, 3, 6]

Microstrutture più grossolane presentano valori di K_{IC} e ΔK_{th} superiori, ovvero maggiori tenacità a frattura e resistenza alla propagazione delle cricche, rispetto a microstrutture più fini, per la presenza dei bordi di grosse colonie di lamelle o di grosse lamelle che ostacolano lo sviluppo della cricca. [1, 3, 6]

1.5.3 Ricottura duplex (tempra di solubilizzazione) seguita da invecchiamento

Lo scopo di tale trattamento è quello di ottenere una struttura bimodale (o *duplex*) costituita da grani equiassici di fase α primaria e da una struttura lamellare fine di fase α secondaria, riducendo al minimo la presenza e la dimensione dello strato α_{GB} . [3, 6, 7]

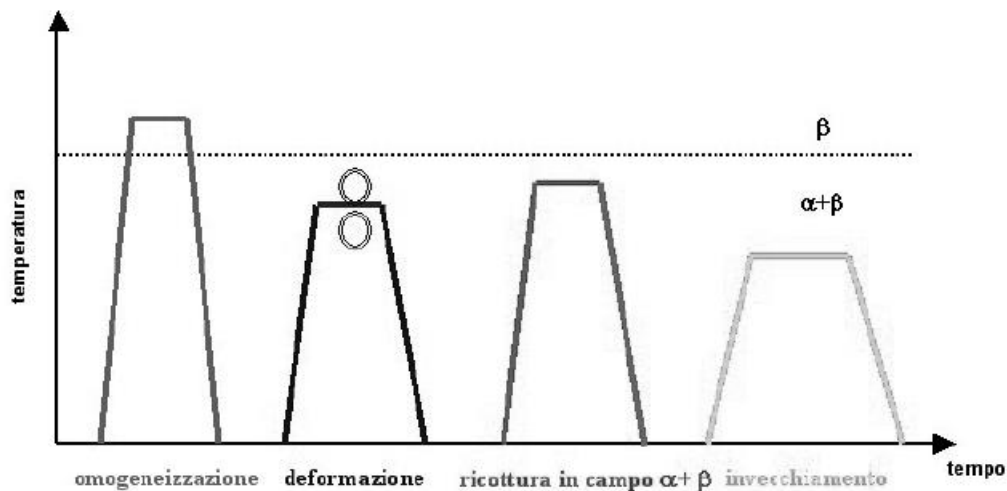


Figura 1.16 Sequenza di lavorazioni che deve subire la lega $\alpha + \beta$ per ottenere una microstruttura duplex [6]

La velocità di raffreddamento del trattamento di omogeneizzazione che precede la deformazione plastica a caldo influenza le dimensioni della struttura lamellare che si sviluppa. Lamelle fini portano a grani equiassici di fase α primaria di minori dimensioni e distribuiti più omogeneamente rispetto ad una struttura di partenza di Widmanstätten grossolana. [6]

Durante la deformazione plastica, i parametri da controllare sono la temperatura ed il grado di deformazione a cui il materiale viene sottoposto. La temperatura è sempre al di sotto del β -*transus*, e incide sulle percentuali di fase α e β presenti al momento della deformazione. Per basse temperature si ha deformazione prevalentemente della fase α a reticolo EC, mentre per temperature prossime al β -*transus* si ha deformazione prevalentemente della fase β , con reticolo CCC. Ciò incide sul reticolo cristallino della fase α che si svilupperà dopo il trattamento termico. Il grado di deformazione plastica a cui viene sottoposta la struttura lamellare deve essere sufficiente a permettere una completa ricristallizzazione della lega. [6]

Durante la ricottura in campo $\alpha + \beta$ la temperatura a cui viene eseguito il trattamento termico determina la frazione volumetrica e la dimensione dei grani di fase α primaria. Questi influenzano l'accrescimento e la dimensione finale dei grani di fase β ricristallizzati. [3, 6, 7] Le dimensioni dei grani di fase β hanno influenza sulla dimensione delle lamelle e delle colonie, e sull'estensione dello strato α_{GB} che si forma al raffreddamento. Durante il trattamento gli elementi in lega tendono ad addensarsi nelle fasi che essi stabilizzano,

portando a disomogeneità nella composizione chimica, che condiziona il successivo invecchiamento della lega: per ridurre tale inconveniente si mantiene la frazione volumetrica di fase α primaria al di sotto del 15-20 %. [6]

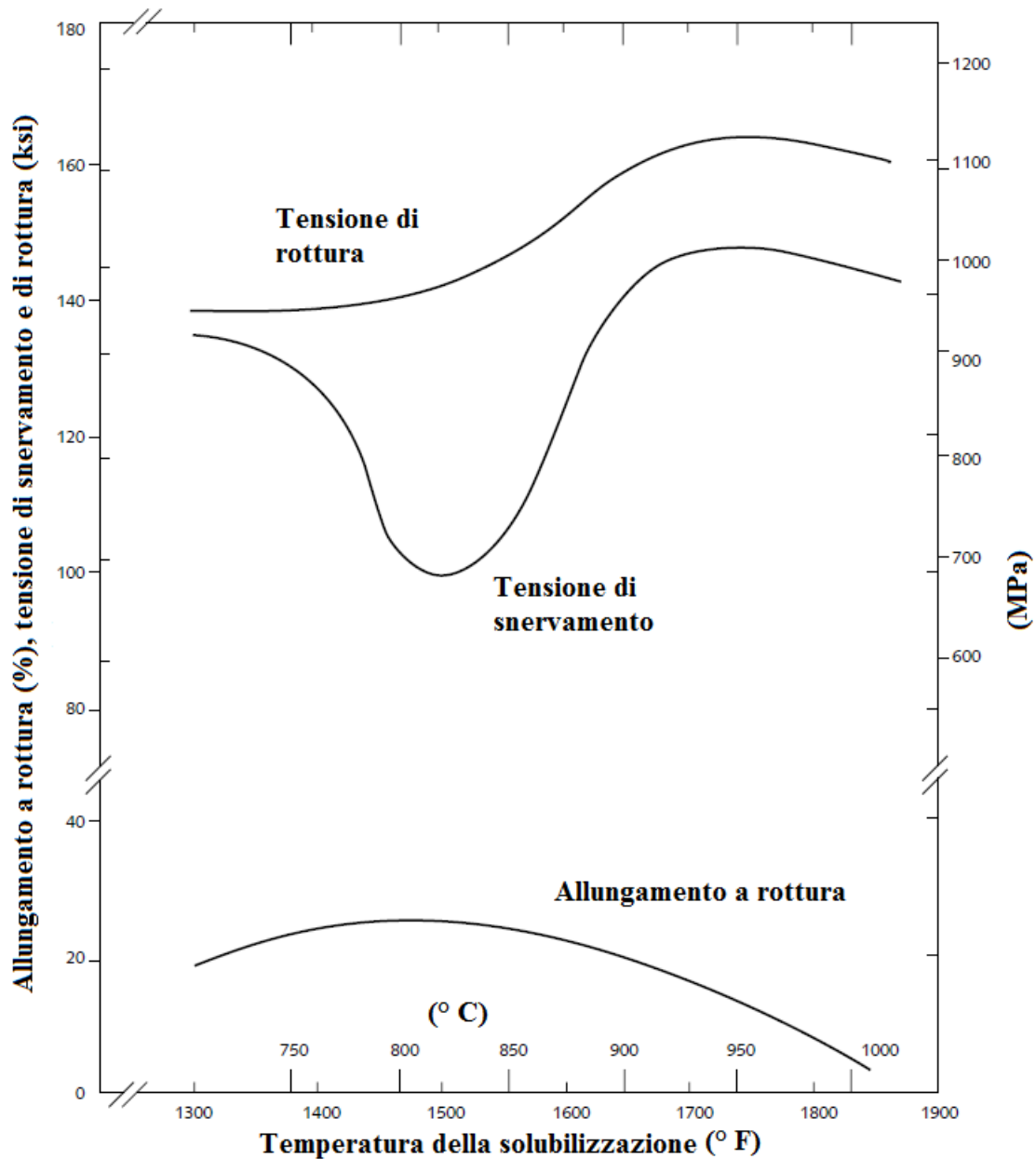


Figura 1.17 Effetti della temperatura del trattamento di solubilizzazione sulle proprietà meccaniche della lega *TIMETAL 6 – 4 (Ti-6Al-4V)* [8]

Il tempo di mantenimento ha poca influenza sulle dimensioni dei grani β , poiché il processo di ingrossamento dei grani è lento per la presenza contemporanea delle due fasi. [6]

La velocità di raffreddamento influenza la microstruttura che si sviluppa dai grani di fase β ricristallizzata, ed è in genere elevata per ottenere una struttura lamellare fine o una struttura

formata da fase β metastabile o da martensite. Tale parametro riveste invece poca influenza sulle dimensioni delle colonie di lamelle e dello strato α_{GB} . [3, 6]

Per la tempra di solubilizzazione della lega Ti-6Al-4V, le temperature utilizzate sono generalmente 900°C per le lamiere, e 950°C per i tondi e i pezzi massivi. In genere per temperature di tempra maggiori si ha formazione di una struttura martensitica, per temperature di tempra minori, tipiche del campo di ricottura in campo $\alpha + \beta$, si ha la formazione di fase β metastabile che si trasforma in martensite per incrudimento meccanico. In Fig. 1.17 è riportata la variazione delle proprietà meccaniche al variare della temperatura a cui viene eseguito il trattamento termico di solubilizzazione. Se la tempra non è sufficientemente drastica, si può avere formazione di una fase intermedia (fase *omega*) che produce fragilità inaccettabile nella lega. Per evitare ciò, oltre ad aumentare la velocità di raffreddamento, è necessario il successivo trattamento di invecchiamento. [3, 7] Come già accennato, la tempra deve essere eseguita rapidamente per non avere degrado delle proprietà meccaniche del componente (Fig.1.18).

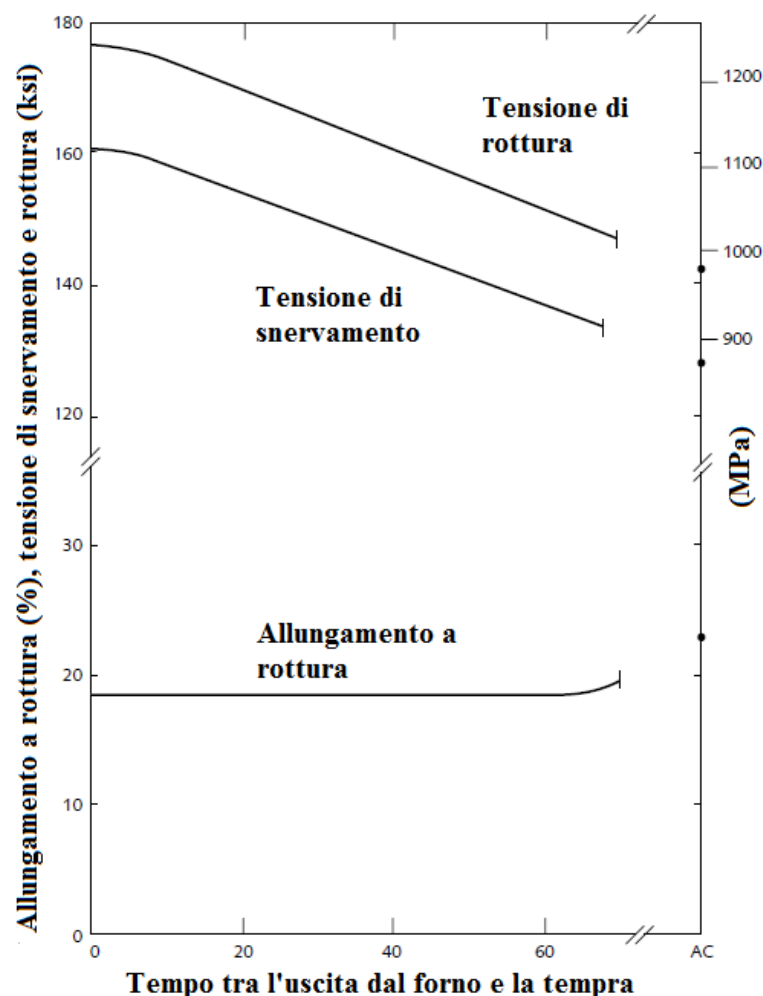


Figura 1.18 Effetti del tempo che intercorre tra l'uscita dal forno e la tempra sulle proprietà meccaniche di una barra di 13 mm di diametro in lega TIMETAL 6 – 4 (Ti-6Al-4V) [8]

L'invecchiamento che segue il trattamento termico ha ancora lo scopo di promuovere la formazione del precipitato di rinforzo Ti_3Al o lo sviluppo di una struttura fine di fasi α e β stabili a partire dalla struttura martensitica o dalla fase β metastabile presente tra i grani di fase α primaria. [6] Nel caso di tempra di solubilizzazione della lega Ti-6Al-4V, la temperatura dell'invecchiamento va da $480^\circ C$ a $595^\circ C$ per tempi variabili da 4 a 8 ore. [3] Il massimo delle caratteristiche meccaniche di resistenza, a scapito dell'allungamento, si ha per temperature intorno ai $500^\circ C$. [7] In Fig. 1.19 è riportato l'effetto della temperatura di invecchiamento sulle proprietà meccaniche della lega Ti-6Al-4V sottoposta a tempra dalla temperatura di $927^\circ C$. In alcuni casi si utilizza il trattamento di invecchiamento oltre la temperatura di invecchiamento usuale (*overaging*), per ottenere modesti incrementi di resistenza mantenendo valori di tenacità e stabilità dimensionale soddisfacenti. Tale condizione è chiamata *solution treated and overaged (STOA)*. [3]

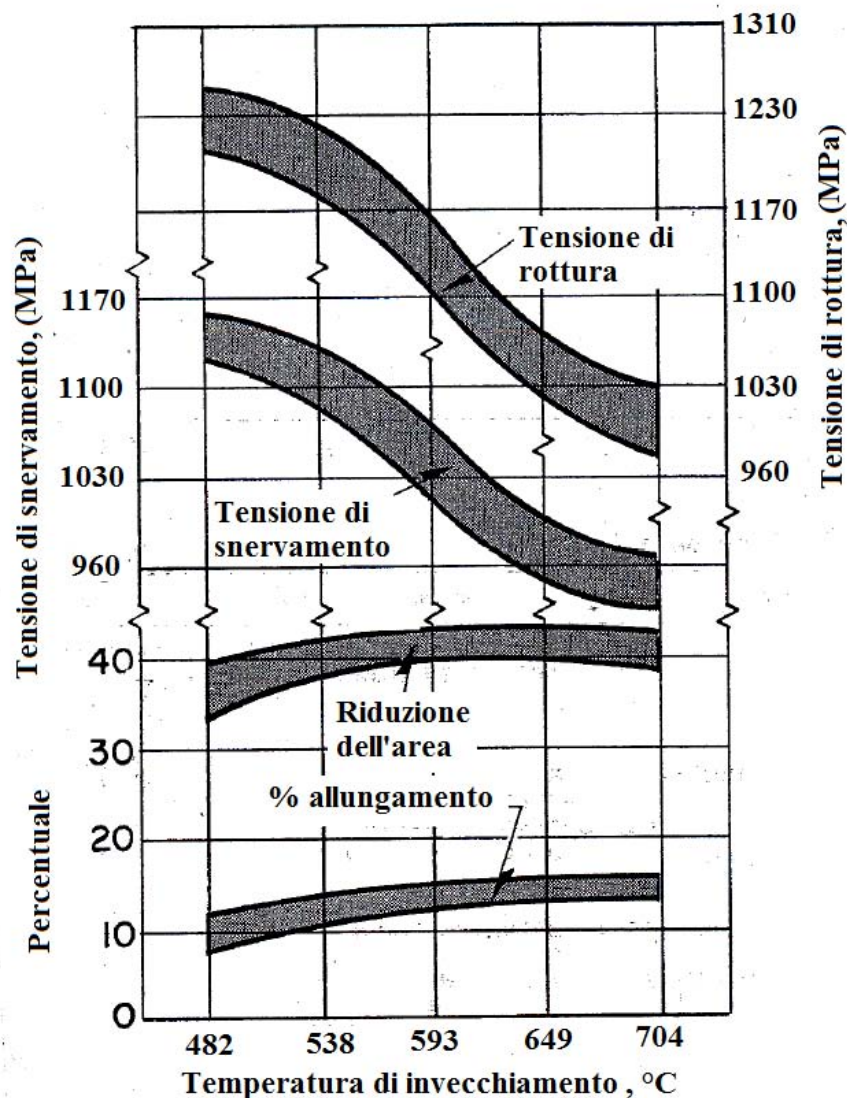


Figura 1.19 Effetto della temperatura di invecchiamento sulle proprietà meccaniche della lega Ti-6Al-4V temprata da $927^\circ C$ in acqua e invecchiata da 2 a 14 ore [7]

Anche la dimensione dei componenti influenza le proprietà meccaniche ottenibili con i trattamenti di tempra di solubilizzazione e successivo invecchiamento: componenti più spessi presentano i più bassi valori di tensione di snervamento e di rottura, e di riduzione dell'area e allungamento a rottura (Fig.1.20).

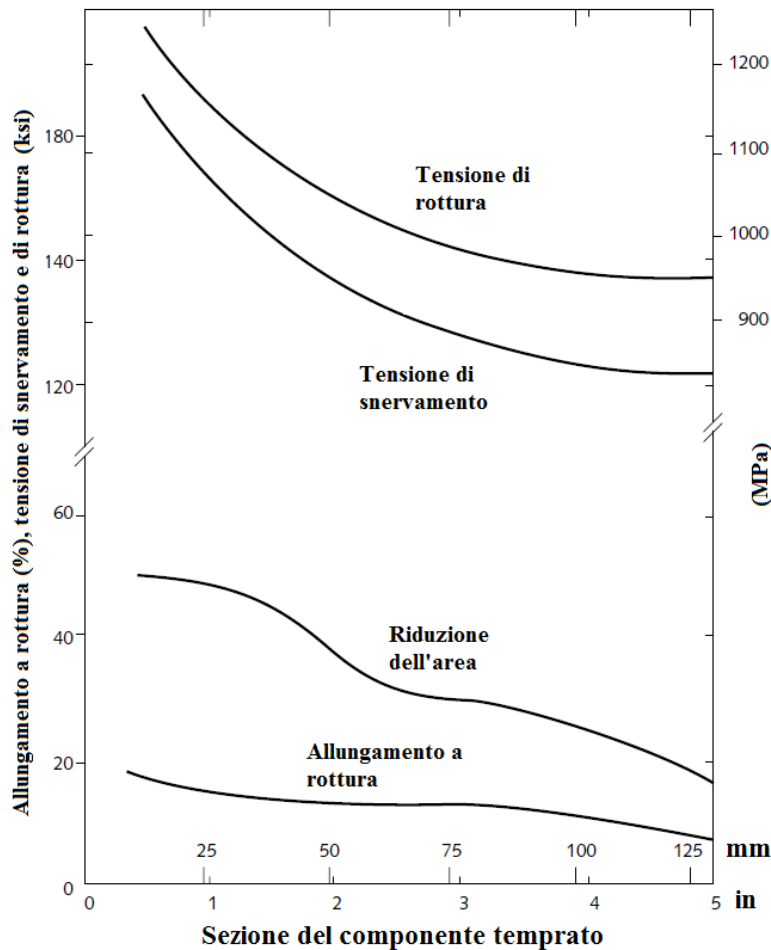


Figura 1.20 Effetto delle dimensioni sulle proprietà meccaniche della lega TIMETAL 6 – 4 (Ti-6Al-4V) sottoposta a trattamento di tempra di solubilizzazione e invecchiamento [8]

La struttura bimodale, rispetto a quella lamellare, porta ad un incremento moderato della resistenza a snervamento e a fatica a basso numero di cicli, ma ad un elevato aumento della duttilità. Per contro, si avranno modesti valori di K_{IC} e ΔK_{th} , poiché la microstruttura fine non devia in maniera apprezzabile le cricche durante la loro propagazione. Per tali microstrutture è fondamentale la percentuale di fase α primaria presente: un suo incremento porta ad una disomogeneità di composizione chimica con conseguente decadimento della resistenza meccanica, a ridotte dimensioni delle colonie di lamelle e ad una diminuzione di K_{IC} e ΔK_{th} . [1, 3, 5, 6]

Le microstrutture *duplex* presentano la migliore combinazione tra resistenza meccanica, duttilità e tenacità a frattura (Fig. 1.21 e 1.22). [3, 6]

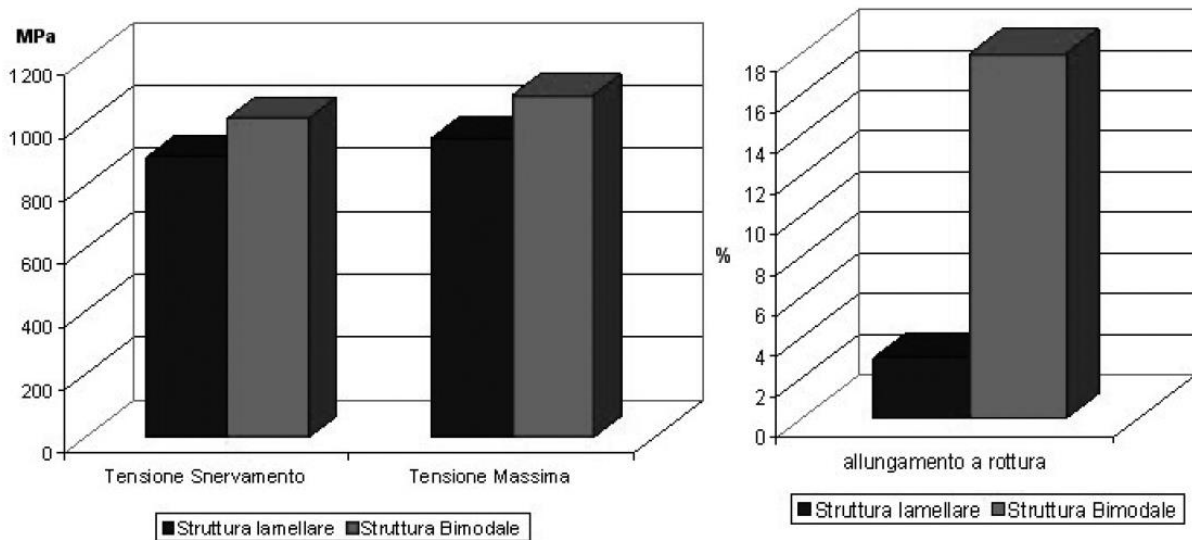


Figura 1.21 Confronto fra le tensioni di snervamento e di rottura e la duttilità della lega Ti-6Al-4V con microstruttura lamellare o duplex [6]

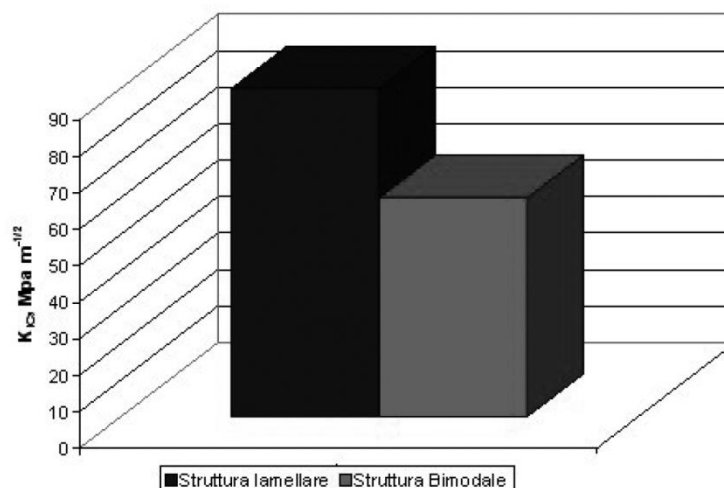


Figura 1.22 Confronto fra la tenacità a frattura della lega Ti-6Al-4V con microstruttura lamellare o duplex [6]

1.5.4 Ricottura in campo $\alpha + \beta$

Tale trattamento termico ha lo scopo di ottenere una struttura costituita da grani di fase α primaria equiassici. Si tratta di una ricottura di ricristallizzazione a cui segue un raffreddamento molto lento: in questo modo, a differenza della struttura *duplex*, non si ha la formazione di una struttura lamellare tra i grani di fase α primaria presenti, ma piuttosto un loro ingrossamento. La dimensione di tali grani è influenzata dalla microstruttura lamellare deformata di partenza (quindi dalla velocità di raffreddamento del trattamento di omogeneizzazione e dal grado di incrudimento) o dalla temperatura a cui viene eseguita la ricottura di ricristallizzazione: per temperature più elevate si avranno grani di fase α più grossi, e viceversa. [6]

Con il trattamento finale di invecchiamento si promuove la formazione del precipitato Ti_3Al . Una variante di tale trattamento termico è la ricottura di lavorabilità: con questo trattamento la ricottura di ricristallizzazione in campo $\alpha + \beta$ viene omessa, e si ottiene una microstruttura costituita da fase α primaria parzialmente ricristallizzata nella fase di deformazione, incidendo sulla temperatura a cui viene effettuata, sul grado di deformazione plastica, sul tempo di mantenimento della temperatura di deformazione e sulla velocità di raffreddamento, che deve essere estremamente ridotta. Dopo la deformazione plastica si ha trattamento di ricottura di distensione, per rilasciare le tensioni residue, a temperatura superiore a quella di solubilizzazione del precipitato di rinforzo Ti_3Al . [3, 6]

Un problema presente per tali trattamenti termici è quello delle distorsioni del pezzo: per evitare ciò, si ricorre a lavorazioni alle elevate temperature e a tecniche particolari come il *creep flattening* e il *vacuum creep flattening*. [3]

Le proprietà meccaniche delle microstrutture ricristallizzate sono influenzate dalla dimensione dei grani: per dimensioni ridotte si ha un incremento della resistenza a snervamento, a fatica e della duttilità (Fig. 1.23 e 1.24), a fronte di una diminuzione della tenacità a frattura (Fig. 1.25). [1, 3, 6]

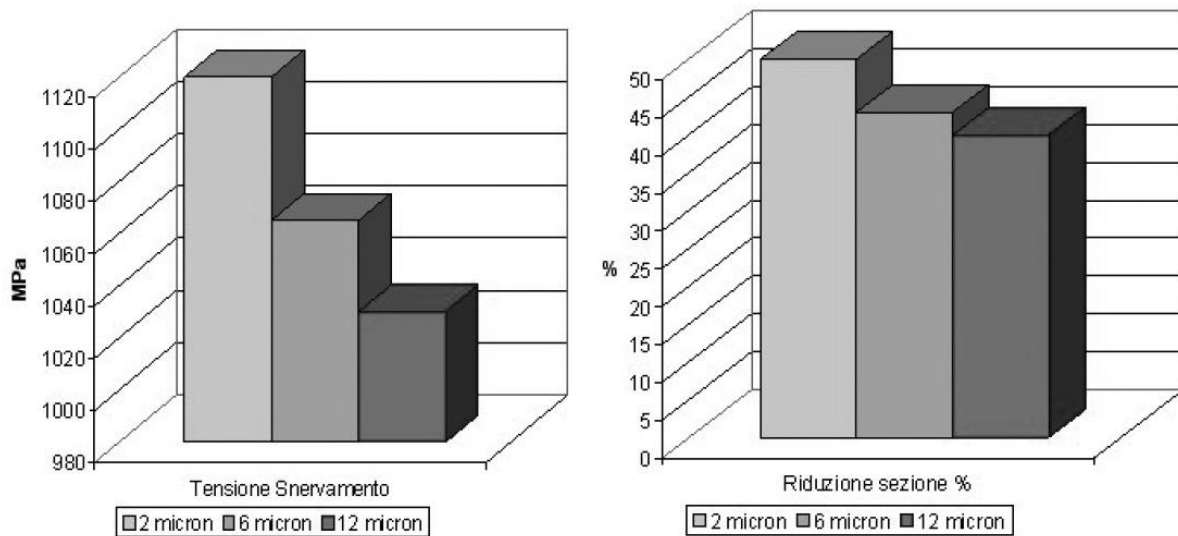


Figura 1.23 Tensione di snervamento e duttilità della lega $Ti-6Al-4V$ con microstruttura equiassica completamente ricristallizzata per diverse dimensioni dei grani [6]

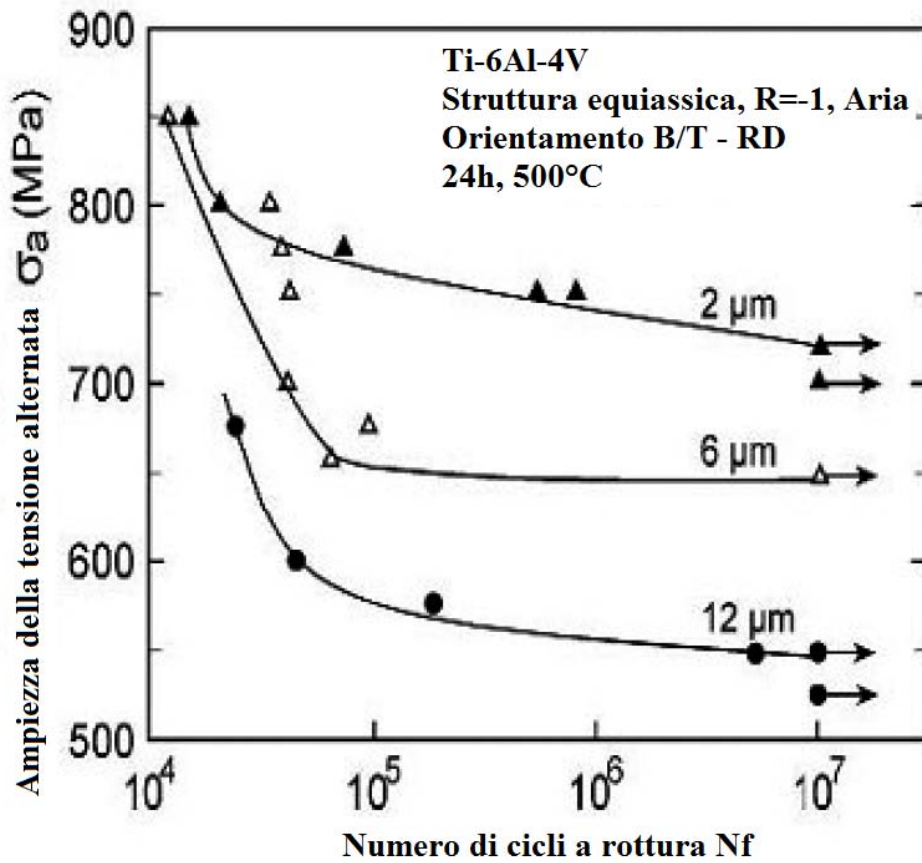


Figura 1.24 Resistenza a fatica HCF della lega Ti-6Al-4V con struttura equiassica, completamente ricristallizzata, per diverse dimensioni dei grani [6]

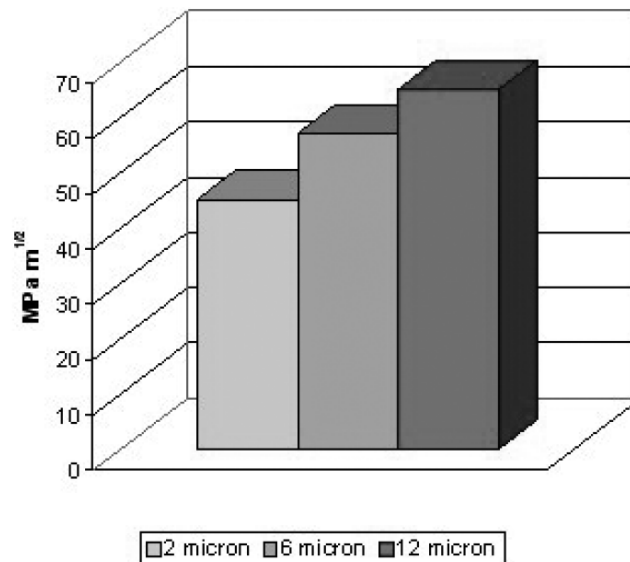


Figura 1.25 Tenacità a frattura della lega Ti-6Al-4V con struttura equiassica, completamente ricristallizzata, per diverse dimensioni dei grani [6]

1.6 Proprietà delle leghe di titanio: nel dettaglio

Generalmente, per migliorare le proprietà dei materiali, in questo caso delle leghe di titanio in particolare, vi sono essenzialmente due modi di procedere: l'alligaggio e i processi termomeccanici. Recentemente una terza opzione sta assumendo più importanza, ma non verrà discussa nel dettaglio in questa sede: la produzione di materiali compositi. [1, 2,3]

L'alligaggio sta alla base dell'aumento di resistenza (attraverso successive tempre di soluzione e invecchiamento, la cui possibilità di realizzazione dipende dalla composizione chimica della lega), permette la generazione di diverse microstrutture e fasi (ad esempio i composti intermetallici negli alluminuri di titanio), determina la maggior parte delle proprietà fisiche della lega (densità, modulo elastico, coefficiente di espansione termica) e controlla largamente la resistenza chimica del materiale (corrosione ed ossidazione). [1, 2, 3, 5, 6]

I processi termomeccanici consentono di ottenere il bilanciamento desiderato nel profilo di proprietà del materiale. In funzione del profilo di proprietà desiderato per l'applicazione finale, possono essere generate differenti microstrutture per mezzo di trattamenti termomeccanici atti ad ottimizzare la resistenza (rafforzamento per solubilizzazione e attraverso processi meccanici che portano a determinati orientamenti dei cristalli), la duttilità, la tenacità, la superplasticità, la tensocorrosione e la resistenza al creep. [1, 2, 3, 5, 6]

In tale categoria rientra la pressatura isostatica a caldo, che permette di minimizzare i difetti nei componenti gettati o nei componenti realizzati con la metallurgia delle polveri. Le tecniche di solidificazione rapida e di alligaggio meccanico permettono l'estensione dello spettro delle potenziali composizioni di lega. [1]

La terza opzione consiste nella combinazione di differenti materiali per realizzare un composito con proprietà superiori ai materiali di partenza. In questo caso, le leghe di titanio e gli alluminuri vengono rinforzati con particolati o fibre, formando così i composti a matrice metallica (MMCs, *Metal-Matrix Composites*). Oltre alla natura, alla frazione volumetrica e all'orientazione dei componenti rinforzanti e al materiale utilizzato come matrice, le caratteristiche della superficie di interfaccia tra la matrice e i materiali rinforzanti ha la maggior influenza sul comportamento meccanico del composito. [1]

Sebbene si parli spesso della dipendenza di una particolare proprietà meccanica al variare dei parametri sopra riportati, è bene ricordare che per i componenti reali il variare di tali parametri influenza più proprietà allo stesso tempo, e che l'ottimizzazione di un componente va intesa nella globalità degli effetti che si ottengono variando la composizione chimica e i trattamenti termomeccanici della lega. [1] Dopo aver presentato i profili di proprietà posseduti dalle varie classi di leghe, verranno approfondite alcune proprietà meccaniche e chimico-fisiche rilevanti del titanio, già accennate nei precedenti paragrafi.

1.6.1 Profili di proprietà delle differenti classi di leghe

Le proprietà delle leghe di titanio dipendono primariamente dalla disposizione, dalla frazione volumetrica e dalle proprietà individuali delle fasi α e β . [1, 3, 5, 6] Rispetto alla fase β , la fase α è caratterizzata da maggior resistenza alla deformazione plastica, ridotta duttilità, anisotropia delle proprietà fisiche e meccaniche, diffusività sensibilmente inferiore e maggior resistenza al creep. [1] Le diversità di proprietà meccaniche e fisiche delle due fasi del titanio sono alla base del diverso profilo di proprietà posseduto da ciascuna classe di leghe (Tab. 1.5).

Tabella 1.5 Profilo delle proprietà fisiche e meccaniche per le diverse classi di leghe di titanio [1]

	Leghe α	Leghe $\alpha + \beta$	Leghe β
Densità (+ indica minore densità)	+	+	-
Resistenza	-	+	++
Duttilità	-/+	+	+/-
Tenacità a frattura	+	-/+	+/-
Resistenza al creep	+	+/-	-
Resistenza alla corrosione	++	+	+/-
Resistenza all'ossidazione	++	+/-	-
Saldabilità	+	+/-	-
Formabilità a freddo	--	-	-/+

Le leghe α possiedono innanzitutto una minor densità delle leghe β , poiché nelle prime è contenuto principalmente alluminio, elemento la cui densità è la metà del titanio, mentre nelle seconde sono spesso contenuti elementi pesanti quali molibdeno e vanadio. Per quanto riguarda la resistenza, questa è maggiore nelle leghe $\alpha + \beta$ e β , soprattutto dopo trattamenti termici di solubilizzazione e invecchiamento che non possono essere effettuati per le leghe α monofasiche. Tuttavia, per le leghe β metastabili, se invecchiate per ottenere valori molto elevati di resistenza, si riscontra una diminuzione sensibile della duttilità, che è invece buona allo stato non invecchiato. Si ricorda comunque come la resistenza delle leghe di titanio aumenti generalmente all'aumentare della quantità di elementi in lega.

Poiché la tenacità a frattura delle leghe di titanio è fortemente correlata alla microstruttura e al trattamento di invecchiamento, non vi sono indicazioni generali per le varie classi di leghe. Questa proprietà verrà approfondita in seguito.

All'aumentare della frazione volumetrica della fase β presente, la resistenza al creep diminuisce: questa è infatti elevata nelle leghe α proprio perché la fase α è più difficilmente deformabile e possiede una diffusività ridotta rispetto alla fase β . Si osserva comunque un'elevata resistenza al creep anche per leghe bifasiche con una distribuzione discontinua di β (soprattutto per microstrutture lamellari e parzialmente per quelle bimodali).

La resistenza alla corrosione diminuisce all'aumentare della quantità di elementi in lega. Tra le classi di leghe, le leghe α esibiscono una maggior resistenza alla corrosione rispetto alle leghe β , specialmente se legate a palladio o rutenio. Un analogo considerazione può essere fatta per l'ossidazione delle leghe di titanio, ovvero la contaminazione da ossigeno e azoto presenti nell'aria che formano uno strato superficiale fragile: questo fenomeno avviene principalmente alle alte temperature, e le leghe β ne sono più suscettibili. Per il medesimo motivo, la saldabilità delle leghe β è inferiore a quella delle leghe α e $\alpha + \beta$, e le leghe di titanio devono comunque essere saldate in vuoto o in atmosfera di gas inerte.

L'ultima considerazione riguarda la deformabilità a freddo: mentre le leghe α ed $\alpha + \beta$ devono essere generalmente deformate a caldo, a causa della limitata deformabilità della fase α , all'aumentare della frazione volumetrica di fase β nella lega diminuisce la temperatura a cui questa può essere deformata. Alcune leghe β metastabili possono subire deformazioni a temperatura ambiente. Infine, per le deformazioni superplastiche, sono richieste microstrutture equiassiche fini immerse in una fase β continua.

La Tab. 1.6 riporta le proprietà di alcune delle principali leghe del titanio.

Tabella 1.6 Proprietà meccaniche di alcune delle principali leghe di titanio [1]

Alloy	Chemical Composition [wt. %]	T_p [°C]	Developer	Year	Hardness [HV]	E [GPa]	YS [MPa]	TS [MPa]	%EI	K_{Ic} [MPa m]
<i>a Titanium Alloys</i>										
high purity Ti	99.98 Ti	882			100	100–145	140	235	50	
Grade 1	(cp-Ti: 0.2Fe, 0.18O)	890	miscellaneous		120		170–310	>240	24	
Grade 4	(cp-Ti: 0.5Fe-0.40O)	950	miscellaneous		260	100–120	480–655	>550	15	
Grade 6	(Ti-5Al-2.5Sn)	1040	miscellaneous	1953	300	109	827	861	15	70
<i>Near-a Titanium Alloys</i>										
Ti-6-2-4-2-S	Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo-0.1Si	995	RMI, USA	1970	340	114	990	1010	13	70
TIMETAL 1100	Ti-6Al-2.7Sn-4Zr-0.4Mo-0.4Si	1010	Timet, USA	1988		112	900–950	1010–1050	10–16	60–75
TIMETAL 685	Ti-6Al-5Zr-0.5Mo-0.25Si	1020	IMI, UK	1969		120	850–910	990–1020	6–11	68
TIMETAL 834	Ti-5.8Al-4Sn-3.5Zr-0.5Mo-0.7Nb-0.35Si-0.06C	1045	IMI, UK	1984	350	120	910	1030	6–12	45
<i>$\alpha+\beta$ Titanium Alloys</i>										
Ti-6-4	Ti-6Al-4V	995	miscellaneous	1954	300–400	110–140	800–1100	900–1200	13–16	33–110
Ti-6-6-2	Ti-6Al-6V-2Sn	945	miscellaneous		300–400	110–117	950–1050	1000–1100	10–19	30–70
Ti-6-2-2-2-2	Ti-6Al-2Sn-2Zr-2Mo-2Cr-0.25Si					110–120	1000–1200	1100–1300	8–15	65–110
Ti-6-2-4-6	Ti-6Al-2Sn-4Zr-6Mo	940	Pratt & Whitney, USA		330–400	114	1000–1100	1100–1200	13–16	30–60
Ti-17	Ti-5Al-2Sn-2Zr-4Mo-4Cr	890	GE, USA	1968	400	112	1050	1100–1250	8–15	30–80
<i>Metastable β Titanium Alloys</i>										
SP 700	Ti-4.5Al-3V-2Mo-2Fe	900	NKK, J	1989	300–500	110	900	960	8–20	60–90
Beta III	Ti-11.5Mo-6Zr-4.5Sn	760	Colt/Crucible, USA	1960	250–450	83–103	800–1200	900–1300	8–20	50–100
Beta C	Ti-3Al-8V-6Cr-4Mo-4Zr	795	RMI, USA	1969	300–450	86–115	800–1200	900–1300	6–16	50–90
Ti-10-2-3	Ti-10V-2Fe-3Al	800	Timet, USA	1976	300–470	110	1000–1200	1000–1400	6–16	30–100
Ti-15-3	Ti-15V-3Cr-3Al-3Sn	760	Timet, USA	1981	300–450	80–100	800–1000	800–1100	10–20	40–100

1.6.2 Resistenza

Tra tutti i materiali metallici, solo gli acciai alto resistenziali più resistenti possiedono una resistenza specifica maggiore delle leghe di titanio. La resistenza allo snervamento delle leghe di titanio convenzionali oscilla tra 800 e 1200 *MPa*, con le leghe β metastabili che esibiscono i valori più elevati (oltre 1400 *MPa*). [1] Per applicazioni speciali, come bulloni e viti, sono richieste le più elevate resistenza a trazione e a fatica. Come già osservato, per aumentare la resistenza delle leghe di titanio, si può agire sulla composizione della lega, sui trattamenti termomeccanici a cui questa è sottoposta o sull'aggiunta di elementi rinforzanti in lega (MMCs).

Tuttavia, l'aumento della resistenza delle leghe di titanio non viene tipicamente realizzata mediante l'aggiunta di elementi in lega. Un'eccezione è rappresentata dalla lega Ti-6V-6Mo-6Fe-3Al (TIMETAL 125), sviluppata per viti ad elevata resistenza. Per questa lega, un doppio trattamento di invecchiamento porta alla formazione di precipitati molto fini nella matrice di fase β . Questa lega può raggiungere livelli di tensione di snervamento e di rottura di 1590 *MPa* e 1620 *MPa* rispettivamente, conservando un'elongazione a rottura del 6%. [1]

L'aumento di resistenza mediante trattamenti termomeccanici è evidenziato per la lega "Super-Alpha-2" (Ti-25Al-10Nb-3V-1Mo), a base del composto intermetallico Ti_3Al . Tramite ottimizzazione della deformazione, solubilizzazione e invecchiamento, è possibile incrementare la resistenza a trazione da 1100 *MPa* a circa 1800 *MPa*. [1]

Questi elevati valori di resistenza sono superati solo dai compositi a matrice in titanio. Per esempio, la lega Ti-6Al-4V rinforzata con SiC per una frazione volumetrica del 35% raggiunge facilmente valori di resistenza a trazione superiori a 2000 *MPa* lungo la direzione delle fibre. Nella direzione trasversale, invece, la resistenza è inferiore a quella della matrice, per effetto della debole interfaccia tra fibre e matrice. [1]

In Fig. 1.26 sono riportate la tensione di snervamento e di rottura delle leghe citate in questo paragrafo. Si può notare come un aumento di resistenza sia quasi sempre accompagnato da una diminuzione della duttilità.

In Tab. 1.7 si riportano le proprietà meccaniche ricavate da prove di trazione e la microstruttura a 25°C per una lega Ti-6Al-4V sottoposta a differenti trattamenti termici: è evidente, come ribadito più volte, l'influenza dei trattamenti termomeccanici a cui la lega è sottoposta sulle proprietà meccaniche della lega stessa.

Tabella 1.7 Tipiche proprietà meccaniche e microstrutture a 25°C di una lega Ti-6Al-4V per differenti trattamenti termici [3]

Trattamento termico	Tensione di snervamento [MPa]	Tensione di rottura [MPa]	Allungamento a rottura [%]	Riduzione dell'area [%]	Microstruttura a 25°C
955°C Raffreddamento in forno	834	937	19	46	90% fase α 10% fase β
955°C Tempra in acqua	951	1117	17	60	40% fase α primaria
900°C Raffreddamento in forno	855	965	17	43	90% fase α 10% fase β
900°C Tempra in acqua	923	1117	15	54	60% fase α primaria

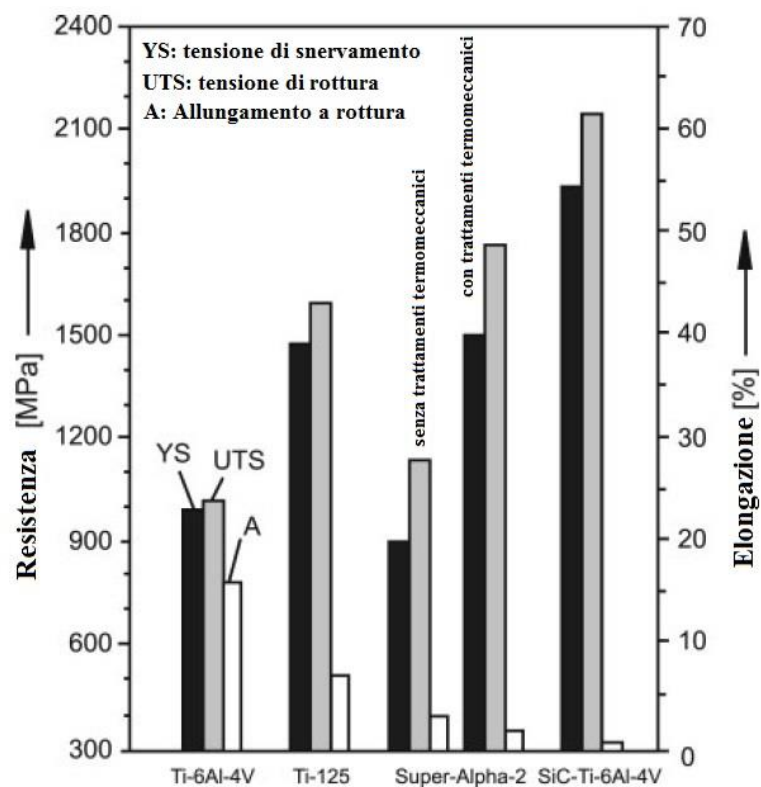


Figura 1.26 Variazioni di resistenza e duttilità ottenute per alligaggio (Ti-125), trattamenti termomeccanici (Super-Alpha-2) e aggiunta di elementi rinforzanti (SiC-Ti-6Al-4V) rispetto alla lega Ti-6Al-4V [1]

1.6.3 Rigidezza

Il modulo di Young rappresenta una misura della rigidezza di un materiale. Il suo valore è direttamente correlato ai legami atomici presenti nel reticolo cristallino, e aumenta all'aumentare del grado di ordine presente. All'aumentare della percentuale di alluminio in lega, il modulo elastico aumenta sensibilmente per effetto dei cambiamenti nella struttura cristallina, come evidenziato nella Fig. 1.27.

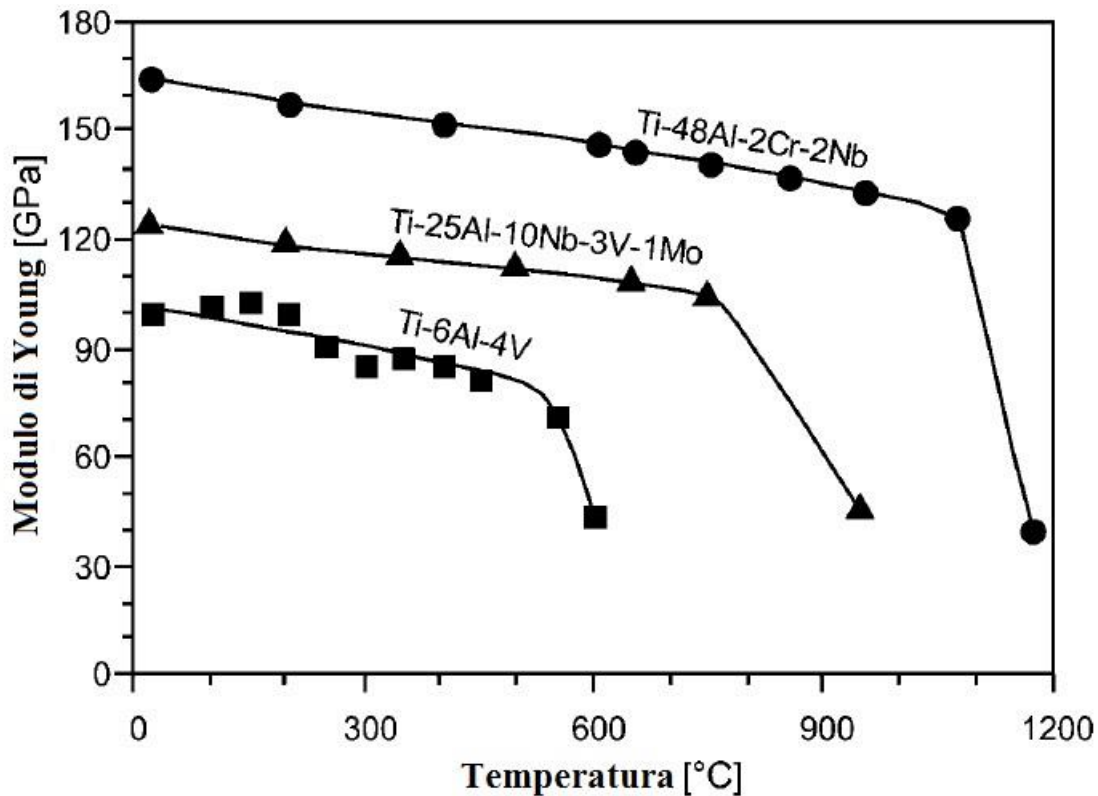


Figura 1.27 Influenza della temperatura sul modulo di Young per diverse leghe con un contenuto differente di alluminio [1]

Anche le lavorazioni meccaniche che la lega subisce possono alterare la rigidezza delle leghe di titanio. Per effetto del comportamento anisotropo della struttura esagonale della fase α , il modulo elastico di strutture fortemente orientate varia con la direzione di applicazione del carico.

La Fig. 1.28 illustra come un'orientazione trasversale o trasversale/basale prodotta nella lega Ti-6Al-4V attraverso la scelta di opportuni parametri di deformazione possa evidenziare un comportamento anisotropo del materiale in termini di rigidezza, per una struttura omogenea. Nella direzione trasversale il modulo di Young è superiore a quello ricavato nella direzione di laminazione. Generalmente si preferisce evitare un'anisotropia pronunciata delle proprietà; tuttavia, l'utilizzo di componenti con struttura propriamente orientata può essere sfruttato per accrescere la rigidezza del componente attraverso un'attenta progettazione.

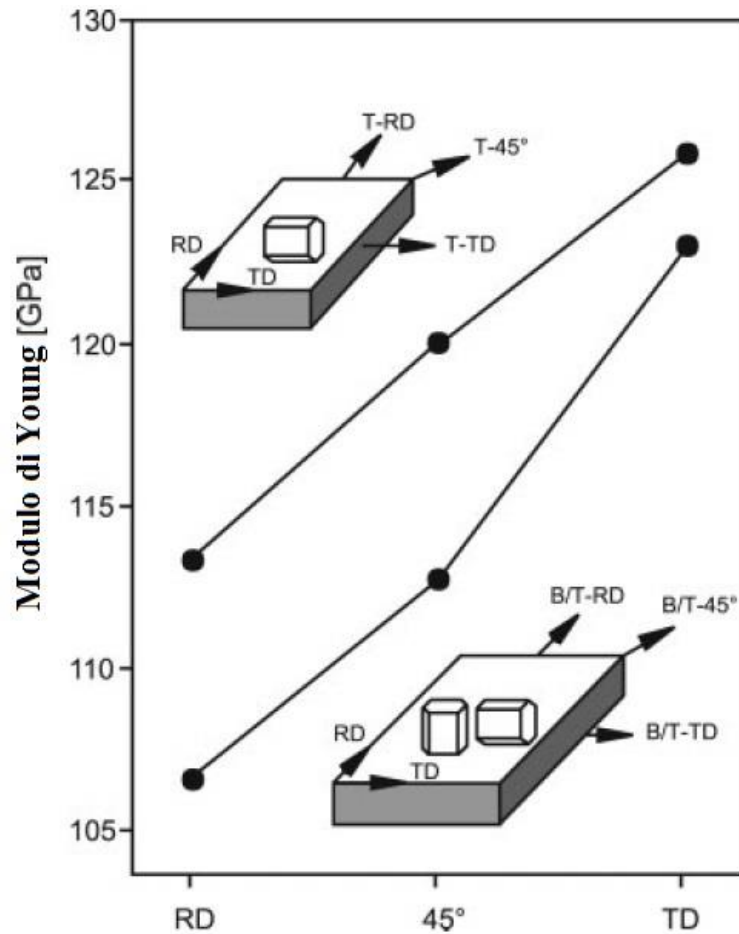


Figura 1.28 Influenza dell'orientazione cristallina sul modulo di Young della lega Ti-6Al-4V [1]

L'aumento di rigidità è lo scopo primario nello sviluppo di compositi a matrice di titanio. I componenti di rinforzo comunemente incorporati nel materiale attraverso processi di metallurgia delle polveri sono particelle di SiC, B₄C, TiB₂, BN e TiC; un'eccezione è rappresentata dal processo XD (*eXothermic Dispersion*), in cui i componenti di rinforzo vengono incorporati all'interno della matrice di titanio per precipitazione dal bagno fuso. [1] L'aumento di rigidità nel titanio rinforzato con fibre lunghe dipende generalmente da regole date dalla frazione volumetrica degli elementi di rinforzo e dal loro modulo elastico. Per rinforzi costituiti da fibre di SiC, una frazione volumetrica del 35% raddoppia la rigidità del materiale composito rispetto alla matrice di partenza di Ti-6-4, dato che il modulo elastico delle fibre di SiC è più di tre volte maggiore di quello della lega di titanio di partenza. [1]

1.6.4 Resistenza alle elevate temperature

La maggior parte delle ricerche e degli sviluppi delle leghe di titanio sono diretti a migliorare le proprietà di tali leghe a temperature elevate. Si procede essenzialmente per tre strade: ulteriori sviluppi delle leghe *near- α* convenzionali, sviluppo di leghe rinforzate per

precipitazione e sviluppo di alluminuri di titanio basati sui già citati composti intermetallici Ti_3Al e $TiAl$.

Per il miglioramento del comportamento delle leghe di titanio convenzionali ad elevate temperature, Seagle, Hall e Bomberger, nel decennio 1970, hanno dimostrato che l'aggiunta in lega dello 0.1% di Silicio aumenta sostanzialmente la resistenza al creep della lega Ti-6-2-4-2 (Fig. 1.29). [1]

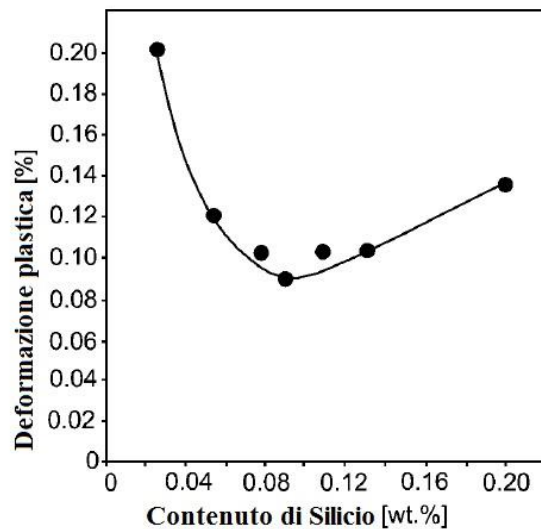


Figura 1.29 Influenza del contenuto di Si sul comportamento al creep della lega Ti-6-2-4-2 [1]

Si ipotizza che tale comportamento sia dovuto alla precipitazione ad elevate temperature di silicio in forma di siliciuri, che ostacolano il moto di risalita delle dislocazioni (*climb*), meccanismo chiave di deformazione nel creep. Sebbene tale fenomeno non sia del tutto chiarito, l'influenza positiva del silicio nella resistenza al creep è evidente.

In Tab. 1.8 si riporta la variazione della tensione di rottura e di snervamento al variare della temperatura per alcune leghe di titanio.

Tabella 1.8 Frazione della tensione di rottura (TR) e di snervamento (TS) a temperatura ambiente posseduta da diverse leghe sottoposte a prova di trazione dopo 1 h a diverse temperature[3]

Temperatura [°C]	Ti CP		Ti-6Al-4V		Ti-6Al-6V-2Sn		Ti-6Al-2Sn-4Zr-6Mo		Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo		Ti-8Al-1Mo-1V	
	TR	TS	TR	TS	TR	TS	TR	TS	TR	TS	TR	TS
93	0.80	0.75	0.90	0.87	0.91	0.89	0.90	0.89	0.93	0.90	0.93	0.92
204	0.57	0.45	0.78	0.70	0.81	0.74	0.80	0.80	0.83	0.76	0.84	0.79
316	0.45	0.31	0.71	0.62	0.76	0.69	0.74	0.75	0.77	0.70	0.76	0.67
427	0.36	0.25	0.66	0.58	0.70	0.69	0.69	0.71	0.72	0.65	0.67	0.60
482	0.33	0.22	0.60	0.53	-	-	0.66	0.69	0.69	0.62	0.61	0.55
538	0.30	0.20	0.51	0.44	-	-	0.61	0.66	0.66	0.60	0.53	0.46

Anche la microstruttura ha un'elevata influenza sulla resistenza al creep delle leghe *near- α* : a questo proposito, sono di primaria importanza la grandezza e la disposizione delle fasi α e β . Le microstrutture lamellari presentano un miglior comportamento al creep rispetto alle strutture equiassiche e bimodali (Fig. 1.30).

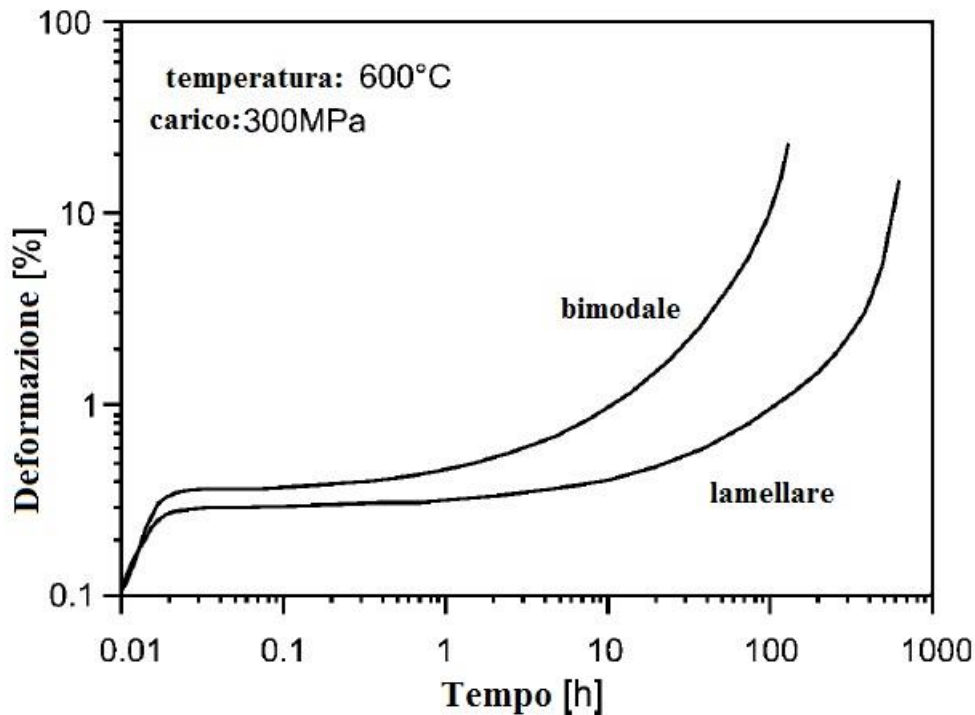


Figura 1.30 Influenza della microstruttura nella resistenza al creep della lega TIMETAL 1100 [1]

Tuttavia, le microstrutture equiassiche e bimodali esibiscono migliori proprietà di resistenza a fatica per la maggior finezza della loro microstruttura. Perciò per componenti per i quali la criticità è dovuta alla resistenza al creep, ad esempio compressori di motori a reazione, vengono utilizzate microstrutture lamellari (esempio TIMETAL 685 o 829), mentre si utilizzano microstrutture bimodali (es. TIMETAL 834) per componenti critici al fenomeno della fatica. La scelta della microstruttura dipende dall'applicazione e dalla filosofia di progettazione del costruttore. [1] In Fig. 1.31 sono riportate la microstruttura bimodale della lega TIMETAL 834 e quella lamellare della TIMETAL 1100.

Un altro modo per aumentare la proprietà di resistenza al creep è l'utilizzo di processi di solidificazione rapida. Attraverso tempre rapide si possono ottenere dispersioni di metalloidi o terre rare (Er_2O_3 , TiB, Y_2O_3) finemente distribuite e stabili alle alte temperature. [1] Per evitare l'ingrossamento di tali particelle e la loro aggregazione, che porterebbero ad una riduzione dell'efficienza di tali precipitati sulla resistenza al creep, sono richieste velocità di solidificazione elevate, che permettono di raggiungere una distribuzione omogenea delle particelle e una grandezza di ordine nanometrico per i precipitati. [1, 6] In Fig. 1.32 si può osservare la microstruttura della lega Ti-25V-2Er-0.02B rinforzata per precipitazione da solidificazione rapida.

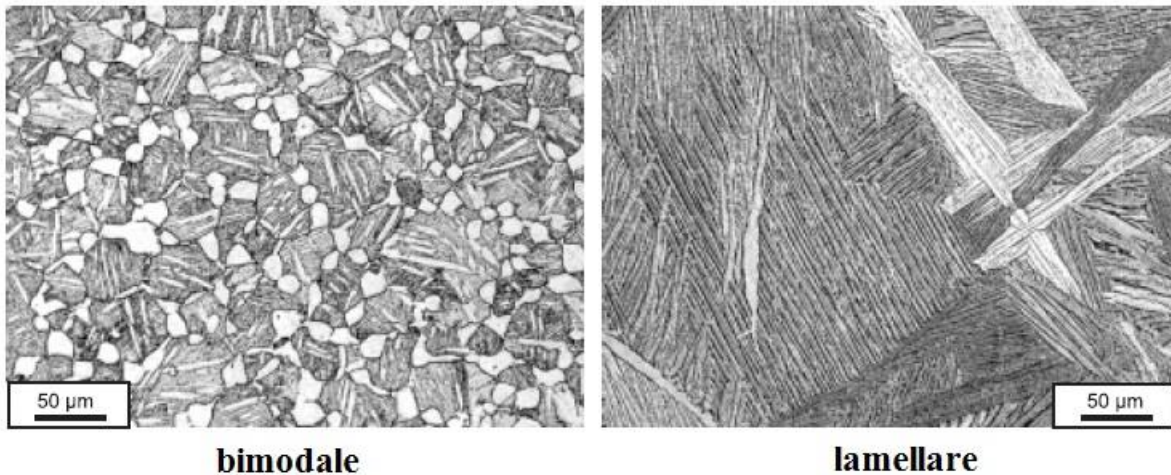


Figura 1.31 Microstruttura bimodale (TIMETAL 834) e lamellare (TIMETAL 1100) [1]

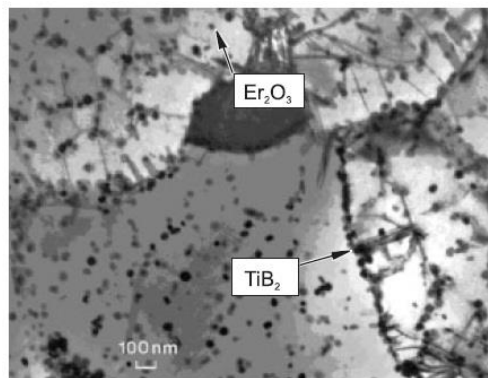


Figura 1.32 Lega Ti-25V-2Er-0.02B rinforzata per precipitazione da solidificazione rapida [1]

Le tecniche di solidificazione rapida svolgono un ruolo secondario nell'aumento delle temperature operative delle leghe di titanio: le migliori prospettive per il raggiungimento di tale scopo sono date dallo sviluppo degli alluminuri di titanio basati sui composti intermetallici Ti_3Al (α_2) e $TiAl$ (γ), che dimostrano potenzialità per l'innalzamento della temperatura limite in esercizio a $650^\circ C$ e $800^\circ C$ rispettivamente. [1] Il loro eccellente comportamento al creep è dovuto alla loro struttura ordinata, che tuttavia è anche la causa della loro fragilità e della difficoltà a subire deformazioni. E' possibile aumentare la duttilità degli alluminuri basati sul composto Ti_3Al aggiungendo in lega elementi β -stabilizzanti come Nb, V o Mo, mentre per ragioni simili gli alluminuri basati sul composto $TiAl$, di duttilità ancor più limitata, vengono legati con Cr, Nb, V o Mn. Ad oggi gli sforzi maggiori si concentrano sullo sviluppo degli alluminuri γ , dato che le leghe basate sul composto α_2 presentano una stabilità a lungo termine moderata. [1]

1.6.5 Danneggiamento e fatica

Nell'industria aerospaziale la progettazione avviene a rottura sicura, ovvero vengono generate delle previsioni di vita di un componente sulla base del confronto tra l'entità del danno osservata (lunghezza cricche, ..) e una condizione considerata critica per tale materiale. Un parametro che misura la resistenza del materiale in presenza di danni e difetti come cricche è la tenacità a frattura: per le leghe di titanio, il valore tipico della tenacità a frattura raggiunge solo la metà di quella degli acciai. [1] L'influenza degli elementi presenti in lega su tale proprietà è piccola, anche se si può osservare che generalmente le leghe β metastabili presentano una tenacità a frattura maggiore delle leghe $\alpha + \beta$. Per ottenere tuttavia variazioni più accentuate di tale proprietà bisogna intervenire modificando la microstruttura, ovvero con processi termomeccanici. I valori tipici di tenacità a frattura per alcune leghe di titanio sono riportati in Tab. 1.9.

Tabella 1.9 Valori tipici della tenacità a frattura per alcune leghe di titanio [3]

Lega	Morfologia della fase α	Tensione di snervamento [MPa]	Tenacità a frattura K_{IC} [MPa m^{1/2}]
Ti-6Al-4V	Equiassica	910	44-66
	Trasformata	875	88-110
Ti-6Al-6V-2Sn	Equiassica	1085	33-55
	Trasformata	980	55-77
Ti-6Al-2Sn-4Zr-6Mo	Equiassica	1155	22-23
	Trasformata	1120	33-55

Il comportamento a fatica delle leghe di titanio è influenzato da un elevato numero di parametri, alcuni del materiale, come la composizione della lega e la sua microstruttura, alcuni dipendenti dalla geometria del componente e dal carico ciclico applicato in termini di ampiezza di tensione, tensione media, frequenza di ciclo e successione di diversi carichi, altri dall'ambiente esterno, come la temperatura e appunto l'ambiente di lavoro (aria, soluzione salina, ..). Come è ben noto, la vita del materiale sottoposto a carichi ciclici può essere suddivisa in due fasi successive: la prima, chiamata fase di iniziazione, in cui si genera la cricca per fatica; la seconda, chiamata fase di propagazione, in cui la cricca propaga fino a portare al cedimento del componente. In prima approssimazione, si può asserire che per la vita misurata in un test di fatica è preponderante il contributo dato dalla fase di iniziazione della cricca: pertanto, un test a fatica è una misura grossolana di questo contributo. Generalmente, nelle leghe di titanio la resistenza all'iniziazione di cricche a fatica diminuisce all'aumentare della dimensione della grana cristallina: ad esempio, microstrutture equiassiche con grana fine presentano una maggior resistenza a fatica di microstrutture lamellari a grana di dimensioni maggiori. [1, 3, 5, 6]

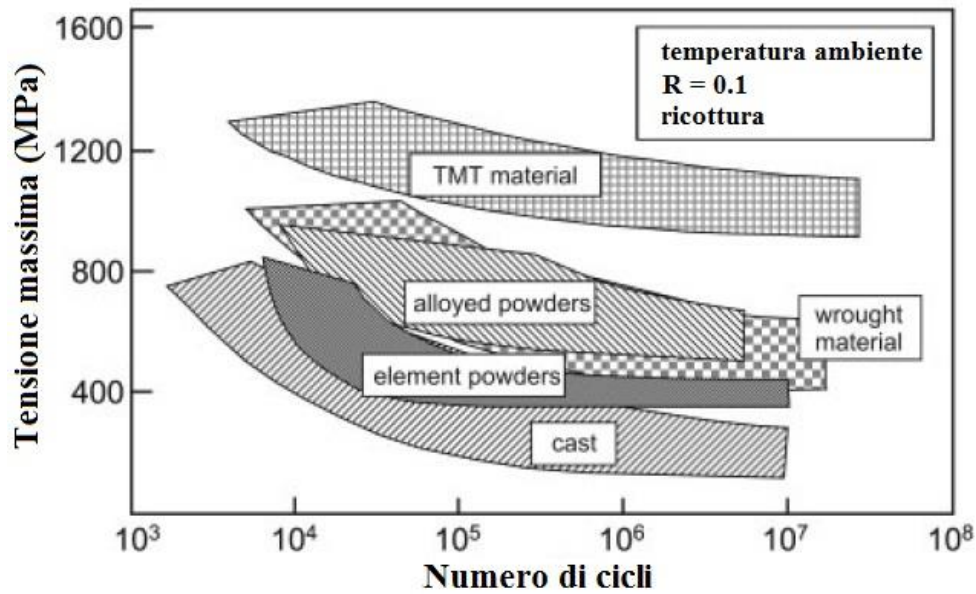


Figura 1.33 Diagramma di Wöhler per provini di leghe di Titanio che hanno subito diversi processi [1]

Si può notare dal diagramma di Wöhler di Fig. 1.33, compilato per provini che hanno subito processi diversi sottoposti a test di fatica, che i più alti valori di resistenza a fatica si ottengono per provini con microstruttura fine equiassica generata da trattamenti termomeccanici (*TMT material*), mentre per microstrutture lamellari grossolane generate da processi di fusione si hanno i valori più bassi.

Per quanto concerne la seconda fase della vita a fatica, ovvero la fase di propagazione delle cricche, si fa riferimento a diagrammi riportanti la velocità di propagazione della cricca (da/dN) in funzione del range del fattore di intensificazione delle tensioni (ΔK).

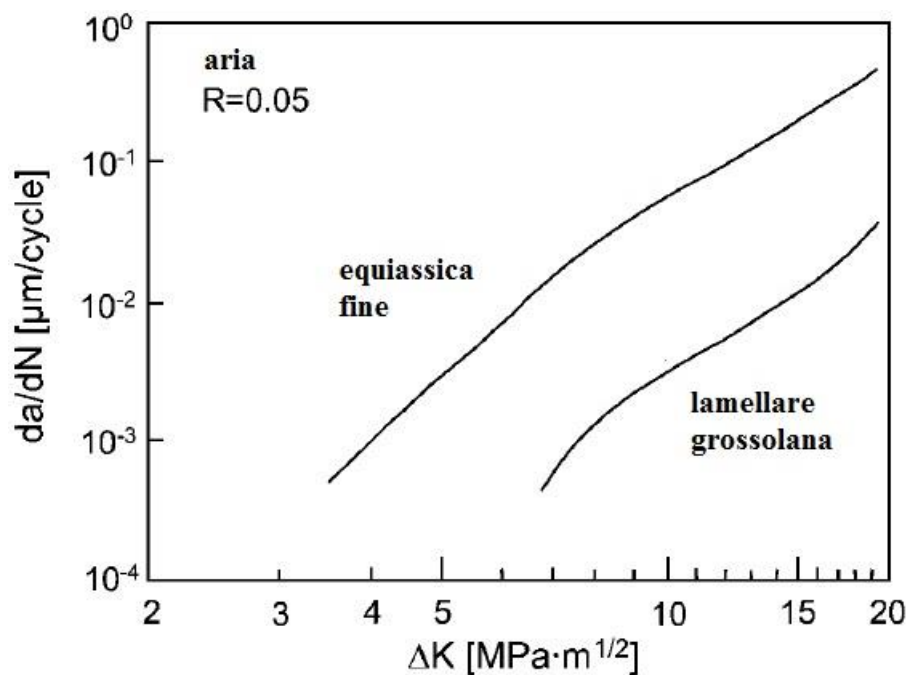


Figura 1.34 Velocità di propagazione delle cricche in due microstrutture limite della lega Ti-6Al-4V [1]

Come evidenziato nel diagramma di Fig. 1.34, a parità di ΔK e di rapporto di ciclo R, la microstruttura lamellare esibisce una maggior resistenza alla propagazione delle cricche rispetto alla microstruttura equiassica: sembra infatti che la prima microstruttura porti alla formazione di un fronte di cricca non lineare, che consuma più energia per la propagazione, grazie all'abilità di deviare le cricche che propagano lungo lamelle di orientazione differente. Il comportamento a fatica delle leghe di titanio verrà ulteriormente approfondito nel seguito di questo lavoro.

In maniera del tutto simile alla resistenza meccanica e alla duttilità, che non possono essere ottimizzate allo stesso tempo, così è generalmente vero che in microstrutture con elevata resistenza all'iniziazione di cricche per fatica le cricche propagano più velocemente, e vice versa.

1.6.6 Resistenza alla corrosione e all'erosione

Come già anticipato, le leghe di titanio esibiscono un'eccezionale resistenza in un vasto range di ambienti chimici, proprietà dovuta allo strato di biossido di titanio TiO_2 che ricopre la superficie del metallo. Tale ossido è resistente, aderente e chimicamente stabile, e se rimosso con abrasioni o graffi si rigenera spontaneamente e velocemente in presenza delle più piccole tracce di ossigeno o di acqua nell'ambiente (umidità). [1, 2, 4] La protezione offerta dall'ossido di titanio si estende da ambienti lievemente riducenti ad ambienti fortemente ossidanti, e da condizioni fortemente acide a condizioni moderatamente alcaline, anche alle temperature più elevate. Il titanio è noto in particolare per la sua elevata resistenza ad attacchi localizzati e alla tensocorrosione in cloruri acquosi (soluzioni saline e acqua di mare), in alogenuri e alogeni umidi (Cl_2 umido o Cl_2 in soluzioni saline sature) e in soluzioni acide calde fortemente ossidanti ($FeCl_3$ e soluzioni di acido nitrico), campi in cui la maggior parte degli acciai, anche inossidabili, e delle leghe di nichel e rame sono soggetti a corrosione pronunciata. Alle leghe di titanio è inoltre riconosciuta elevata resistenza all'erosione e alla cavitazione. Lo strato di ossido protettivo, formandosi spontaneamente, ricopre anche zone termicamente alterate e fuse dei cordoni di saldatura, assicurando a queste le medesime proprietà di resistenza alla corrosione del materiale base. [2, 4]

Le caratteristiche di resistenza del titanio sono però limitate in soluzione acide fortemente riducenti, come soluzioni con concentrazioni moderate o elevate di HCl , HBr , H_2SO_4 e H_3PO_4 , e in soluzioni di HF a qualsiasi concentrazione, soprattutto all'aumentare della temperatura. La presenza di specie ossidanti (aria, ossigeno, prodotti della corrosione del ferro, ioni metallici e altri composti ossidanti), anche in concentrazioni molto ridotte ($20 \div 100 ppm$), può estendere il campo di utilizzo del titanio a soluzioni acide moderatamente riducenti. [4]

Tabella 1.10 Ambienti chimici in cui le leghe di titanio si sono dimostrate resistenti e sono state applicate con successo [4]

Materiale generico	Esempi tipici	Accorgimenti da adottare
Acidi (ossidanti)	HNO ₃ , H ₂ CrO ₄ , HClO ₄	—
Acidi (riducenti)	HCl, HBr, HI, H ₂ SO ₄ , H ₃ PO ₄ , acidi amminosolfonico, ossalico, tricloroacetico	Osservare i limiti della concentrazione e temperatura degli acidi, evitare soluzioni di HF *
Alcoli	Metanolo, etanolo, propanolo, glicolo	Evitare metanolo anidro, può causare cricche da tensocorrosione
Soluzioni alcaline (forti)	NaOH, KOH, LiOH	Eccessiva velocità di corrosione e /o assorbimento di idrogeno a temperature >75-80°C
Soluzioni alcaline (moderate)	Mg(OH) ₂ , Ca(OH) ₂ , NH ₄ OH, ammine	—
Candeggianti	ClO ₂ , clorati, ipocloriti, Cl ₂ umido, perclorati, Br ₂ umido, bromati	*
Cloruri	NaCl, KCl, LiCl	*
Gas	O ₂ , Cl ₂ , Br ₂ , I ₂ , NO ₂ , N ₂ O ₄	Possibile accensione/combustione in O ₂ puro, o in alogeni gassosi secchi (NO ₂ , N ₂ O ₄)
Altri gas	H ₂ , N ₂ , CO ₂ , CO, SO ₂ , H ₂ S, NH ₃ , NO	Eccessivo assorbimento di idrogeno in H ₂ secco ad elevate temperature e pressioni
Alogeni	Cl ₂ , Br ₂ , I ₂ , F ₂	Evitare alogeni secchi, bisogno di umidità per avere buona resistenza. Evitare F ₂ e HF gassosi
Idrocarburi	Alcani, alcheni, aromatici, petrolio greggio e gas	—
Idrocarburi alogenati	Cloro- o Cloro-fluoro- o -bromati alcani, alcheni o aromatici	Per avere passivazione del titanio, necessarie tracce di acqua (<10-100 ppm)
Metalli liquidi	Na, K, Mg, Al, Pb, Sn, Hg	Temperature limitate, evitare Zn, Li, Ga e Cd fusi
Soluzioni di alogenuri metallici idrolizzabili	MgCl ₂ , CaCl ₂ , AlCl ₃ , ZnCl ₂	Temperature e concentrazioni limitate
Soluzioni di alogenuri metallici ossidanti	FeCl ₃ , CuCl ₂ , CuSO ₄ , NiCl ₂ , Fe ₂ (SO ₄) ₃	*
Acidi organici	TPA, acidi acetico, stearico, adipico, formico, tartarico, tannico	Temperature e concentrazioni limitate per l'acido formico, selezionare leghe contenenti Pd- o Ru- se necessario
Altri composti organici	Aldeidi, chetoni, eteri, esteri, glicoli	—
Soluzioni di sali	Solfati, fosfati, nitrati, solfiti, carbonati, cianati, etc.	—
Acqua di mare	Condizioni aerate, deaerate, contaminate o leggermente acidificate	*

* Selezionare leghe contenenti Pd o Ru, o ricche di Ni e/o Mo per prevenire corrosione localizzata (in fessura) quando le temperature superano 75-80 °C

Nel caso in cui sia richiesta una particolare resistenza ad acidi riducenti diluiti o alla corrosione in fessura in soluzioni di cloruri-alogenuri a temperature superiori ai 75°C, vengono aggiunte in lega piccole quantità di palladio, rutenio e nichel o quantità più considerevoli di molibdeno (>3.5%). Alcuni esempi di leghe che possiedono una maggior resistenza alla corrosione sono i gradi ASTM 7, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 26, 27, 28 e 29. [4] In sintesi, le leghe di titanio offrono generalmente una elevata resistenza in un range di temperature e di ambienti chimici più vasto rispetto agli acciai e alle leghe di nichel, rame e alluminio. In Tab. 1.10 si riportano alcune indicazioni sugli ambienti chimici in cui il titanio può essere utilizzato e alcuni suggerimenti sugli eventuali accorgimenti da adottare in proposito.

1.6.7 Caratteristiche di scambio termico

Il titanio è un materiale utilizzato per la realizzazione di scambiatori a fascio tubiero e a piastre destinati al riscaldamento o al raffreddamento di fluidi di processo, specialmente per il raffreddamento di acqua marina. Il coefficiente di scambio termico degli scambiatori di calore in titanio può essere ottimizzato grazie all'eccezionale resistenza alla corrosione e all'erosione di tale metallo, alla conduttività dello strato di ossido superficiale, alla difficoltà di adesione sulle sue superfici, alla conduttività termica moderatamente buona, all'elevata resistenza del titanio e alla facilità di condensazione sulla sua superficie. Nonostante il titanio CP esibisca una conduttività termica più bassa del rame e dell'alluminio, ma comunque superiore del 10-20% a quella dei tipici acciai inossidabili, grazie alla sua elevata resistenza meccanica e alla corrosione è possibile ridurre notevolmente gli spessori degli elementi degli scambiatori, aumentando il coefficiente di scambio termico. La resistenza alla corrosione e la difficoltà di adesione di depositi alla superficie del titanio contribuisce a mantenere pulite le superfici di scambio termico, limitando gli interventi di pulizia e rendendoli più semplici. Inoltre, la superficie del titanio promuove la condensazione in gocce dei vapori acquosi, aumentando la velocità di condensazione, che è più elevata rispetto agli altri metalli (Fig. 1.35). [2, 4]

Gli attributi fin qui visti consentono l'utilizzo del titanio in scambiatori di calore che presentano taglia, costi di mantenimento e materiale richiesto ridotti, risultando così più efficienti ed economicamente vantaggiosi rispetto agli scambiatori realizzati in altre leghe comuni. [2, 4]

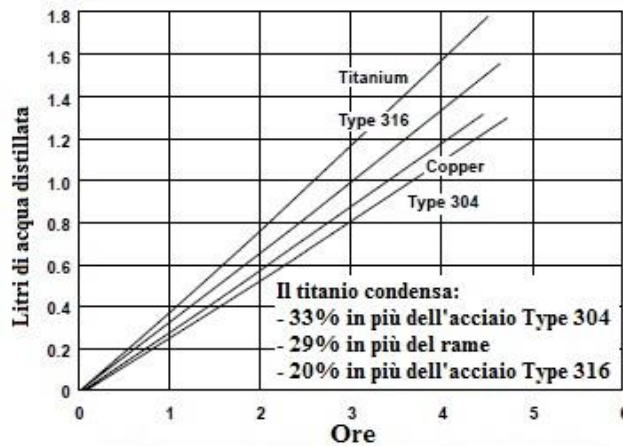


Figura 1.35 Litri di acqua condensata da una soluzione di cloruro di sodio in funzione del tempo per il titanio e altri metalli [4]

1.7 Comportamento a fatica delle leghe di titanio

Verrà ora approfondito maggiormente il comportamento a fatica delle leghe di titanio, già esaminato parzialmente in altri paragrafi. Le leghe di titanio sono infatti sottoposte a cicli di fatica in moltissime applicazioni. La vita di componenti privi di difetti soggetti a carichi ciclici può essere scomposta in una porzione relativa all'iniziazione della cricca (N_I) e in una porzione relativa alla sua propagazione (N_F).

Per la vita LCF (*Low Cycle Fatigue*) delle leghe di titanio, ovvero in presenza di tensioni e deformazioni elevate, la vita spesa per l'iniziazione della cricca nel componente è molto piccola rispetto alla vita totale del componente: pertanto per la fatica LCF il comportamento a fatica è controllato dalla resistenza alla propagazione delle cricche. Viceversa, nel caso di fatica HCF (*High Cycle Fatigue*), la resistenza a fatica del componente è approssimativamente una misura della resistenza all'iniziazione delle cricche.

La fase della propagazione della cricca può essere a sua volta suddivisa in una fase di crescita di microcricche, ed in una successiva fase di crescita di cricche macroscopiche. Parametri microstrutturali quali la grandezza dei grani e le fasi presenti possono avere effetti contraddittori sulla propagazione di micro e macro cricche. Come regola generale, la vita di componenti piccoli sottoposti a tensioni elevate è controllata dalla resistenza alla propagazione di microcricche, mentre per componenti di grandi dimensioni sottoposti a tensioni modeste la vita a fatica è determinata maggiormente dalla propagazione delle cricche macroscopiche, per la differente lunghezza critica delle cricche.

Verranno ora analizzati i parametri metallurgici che influenzano in misura maggiore la resistenza a fatica delle leghe di titanio. Alcune nozioni sono già state riportate nei precedenti paragrafi, ma si ritiene utile ribadirle per avere un quadro completo del comportamento a fatica di tali leghe in un'unica sezione.

1.7.1 Influenza della microstruttura

A seconda delle classi di leghe, i parametri microstrutturali hanno una sensibile influenza sulla vita a fatica delle leghe di titanio.

1.7.1.1 Titanio commercialmente puro e leghe α

La microstruttura di tali leghe consiste nella sola presenza di grani di fase α . I parametri microstrutturali che possono variare sono la dimensione dei grani, il contenuto di ossigeno interstiziale e il grado di incrudimento indotto dalle lavorazioni.

La resistenza a fatica del titanio commercialmente puro risulta maggiore per grani di dimensioni minori, per maggiore contenuto di ossigeno interstiziale e per un più elevato grado di incrudimento indotto dalle lavorazioni. La velocità di propagazione delle cricche lunghe risulta ridotta per grani di dimensioni maggiori e per maggior contenuto di ossigeno interstiziale. [1, 6]

Il comportamento a fatica delle leghe α è inoltre condizionato dal trattamento di invecchiamento: la formazione del precipitato di rinforzo Ti_3Al porta infatti ad un aumento della resistenza allo snervamento e a fatica HCF. È da ricordare tuttavia come in questo caso la duttilità venga notevolmente ridotta. [1, 6]

A differenza della propagazione delle cricche lunghe, a parità di ΔK , la propagazione delle microcricche risulta invece più veloce per grani di dimensioni maggiori, per la minor densità di bordi di grano, che tenderebbero ad ostacolarne la propagazione. Le cricche lunghe, invece, propagano più lentamente in presenza di grani di dimensioni maggiori, per diversi fattori tra i quali la geometria del fronte della cricca e l'effetto di chiusura della cricca. Inoltre un aumento della quantità di ossigeno e del grado di invecchiamento intensifica l'influenza della grandezza dei grani sulle macrocricche, per l'influenza sull'effetto di chiusura della cricca. [1, 6]

1.7.1.2 Leghe *near- α* e $\alpha + \beta$

In aggiunta ai fattori visti per le leghe α e per il titanio CP, le proprietà a fatica delle leghe bifasiche sono fortemente influenzate dalla morfologia e dalla disposizione delle due fasi α e β . Si ricorda che per tali leghe possono essere ottenute microstrutture lamellari, equiassiche e *duplex* con i metodi descritti nei trattamenti termici. I parametri microstrutturali più importanti per le microstrutture lamellari sono la grandezza dei grani β di partenza, la grandezza delle colonie di lamelle e la larghezza delle lamelle di fase α . Per le microstrutture *duplex*, si aggiungono ai parametri precedenti la grandezza dei grani e la frazione volumetrica dei grani di fase α primaria. [1, 6]

Si ha un incremento di resistenza a fatica riducendo la larghezza delle lamelle di fase α per le microstrutture lamellari e *duplex* e riducendo la grana cristallina per le microstrutture equiassiche. [1, 6]

Per quanto riguarda la propagazione delle microcricche, la microstruttura lamellare grossolana presenta una velocità di propagazione maggiore rispetto alla struttura equiassica. La velocità di propagazione delle macrocricche risulta invece minore per la microstruttura lamellare. Alcune prove condotte per microstrutture lamellari fini e microstrutture *duplex* della lega Ti-6Al-4V hanno dimostrato che la velocità di propagazione delle cricche è compresa tra i due casi estremi di microstruttura equiassica e microstruttura lamellare grossolana. La morfologia della microstruttura ha quindi un'influenza sensibile sulla propagazione delle cricche per fatica. [1]

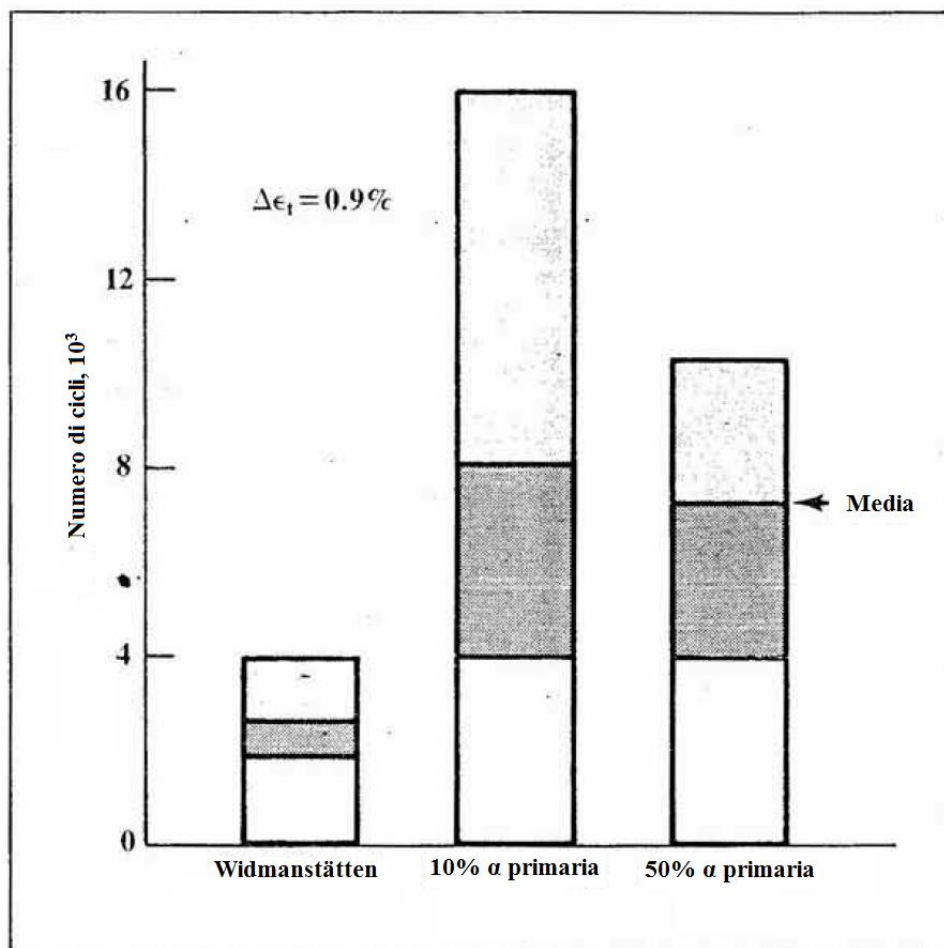


Figura 1.36 Numero di cicli necessari alla formazione della prima cricca per cicli di fatica LCF per la lega Ti-6Al-4V con diverse microstrutture [3]

Per un dato tipo di microstruttura di leghe *near- α* e $\alpha + \beta$, l'influenza delle dimensioni dei grani di fase α e del contenuto di ossigeno interstiziale è simile a quanto osservato in precedenza per le leghe α . Nel caso di microstrutture lamellari, al posto della grandezza dei

grani di fase α si considera la larghezza delle lamelle. All'ingrossarsi della grana cristallina si osserva una riduzione della velocità di propagazione delle cricche per fatica: tale andamento può essere osservato anche diminuendo la quantità di ossigeno, a parità di morfologia microstrutturale. [1]

Nelle strutture *duplex* la resistenza allo snervamento e la duttilità sono simili al variare della frazione volumetrica di fase α primaria; tuttavia una riduzione delle dimensioni dei grani β originari nelle strutture lamellari (che saranno quindi fini) e una riduzione della frazione volumetrica di fase α primaria presente nelle strutture *duplex* porta ad un aumento della resistenza a fatica. Per quanto riguarda la propagazione delle cricche per fatica, la microstruttura lamellare fine presenta un comportamento migliore rispetto alla microstruttura lamellare grossolana, mentre si osserva una minor velocità di propagazione delle cricche per strutture *duplex* con una minor frazione volumetrica di fase α primaria. [1]

In Fig. 1.36 si può notare il tempo necessario alla formazione della prima cricca nella lega Ti-6Al-4V soggetta a fatica LCF per diverse microstrutture.

1.7.1.3 Leghe β

La resistenza a fatica nelle leghe β è controllata dai seguenti parametri microstrutturali: la grandezza dei grani di fase β , il grado di invecchiamento della lega e le zone in cui non vi sono precipitati per le leghe ricche di soluto, come la lega Beta C. Per leghe con piccole percentuali di soluto devono essere considerati anche i bordi di grano della fase α , la grandezza dei grani di fase α primaria e la frazione volumetrica di tale fase. [1]

Nelle leghe ricche di soluto, come la lega Beta C, il trattamento di invecchiamento può essere eseguito in due step per portare alla precipitazione di fase α secondaria all'interno dei grani di fase β . Nel caso di invecchiamento in due passi, non variano le caratteristiche di resistenza allo snervamento e di duttilità della lega rispetto all'invecchiamento convenzionale, mentre aumenta leggermente la resistenza a fatica: tale comportamento è dovuto alla non omogeneità di distribuzione dei precipitati nell'invecchiamento convenzionale, che porta alla formazione di zone senza precipitati, identificate come siti di nucleazione delle cricche. Per quanto riguarda la velocità di propagazione delle micro e macro cricche, non si osservano differenze sostanziali tra i due casi. [1]

Per le leghe β povere di soluto la microstruttura può essere variata in misura maggiore, dato che una frazione volumetrica di fase α primaria può essere generata in maniera simile alle leghe $\alpha + \beta$. Ad esempio, per la lega Ti-10V-2Fe-3Al, che appartiene a questo gruppo, si osserva un aumento della resistenza a fatica per una frazione volumetrica di fase α primaria del 5%, e ancor più del 15%, mentre se tale valore raggiunge il 30% la resistenza a fatica cala drasticamente. [1]

1.7.2 Influenza dell'orientazione dei cristalli

Per l'anisotropia della struttura cristallina esagonale compatta le proprietà meccaniche delle leghe α e $\alpha + \beta$ sono caratterizzate da un comportamento anisotropo. Non solo i singoli cristalli possiedono proprietà che dipendono dall'orientazione: anche i materiali policristallini con elevate frazioni volumetriche di fase α possono presentare un comportamento a fatica anisotropo. L'orientazione dei cristalli (*texture* o tessitura) può essere variata in misura maggiore nelle leghe $\alpha + \beta$ rispetto alle leghe α e alle leghe β . Le quattro tipologie di orientazione vengono definite basale (B), trasversale (T), mista (B/T) e debole, che non verrà presa in considerazione. [1, 9] Le tipologie di orientazione in relazione al carico applicato sono indicate con le sigle riportate in Fig. 1.37, dove RD (*rolling direction*) indica la direzione di laminazione e TD indica la direzione perpendicolare a quest'ultima.

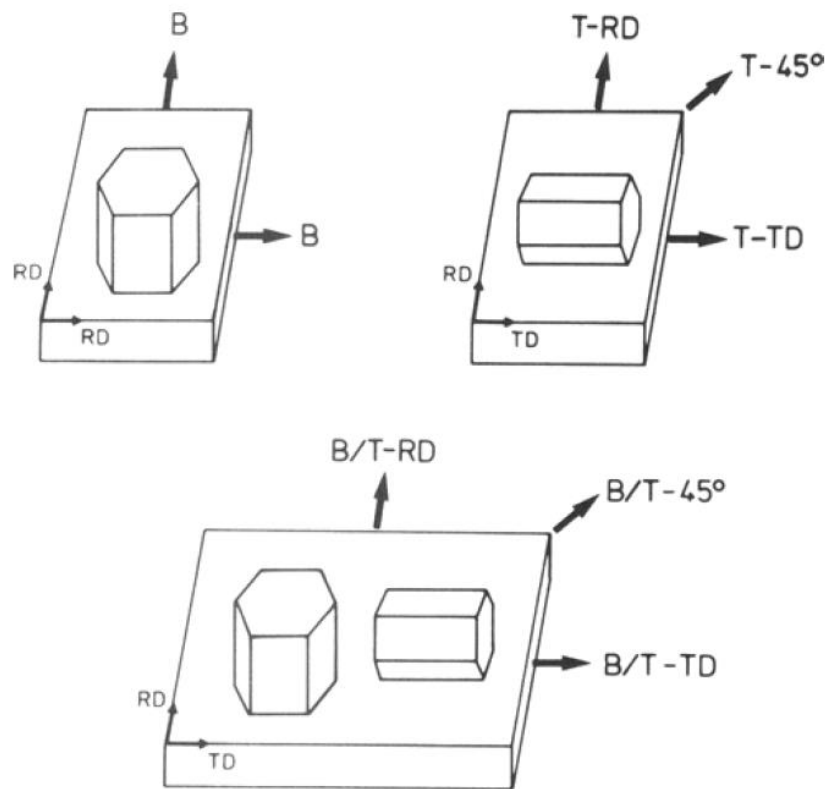


Figura 1.37 Sigle utilizzate per indicare la direzione del carico in relazione all'orientazione dei cristalli [9]

Per la lega Ti-6-4 con microstruttura equiassica si osserva una dipendenza della resistenza a fatica dall'orientazione dei cristalli rispetto al carico applicato. Comparando i risultati dei test di fatica condotti in aria con quelli condotti in vuoto, risulta evidente non solo come l'aria rappresenti un ambiente che degrada le proprietà di resistenza a fatica della lega, ma anche come l'entità di tale degradazione dipenda fortemente dall'orientazione dei cristalli e dalla direzione del carico, come si può osservare nella Fig. 1.38.

Anche per microstrutture equiassiche si osserva una variazione della resistenza a fatica al variare della percentuale di deformazione indotta da processi uniaxiali di laminazione. [1]

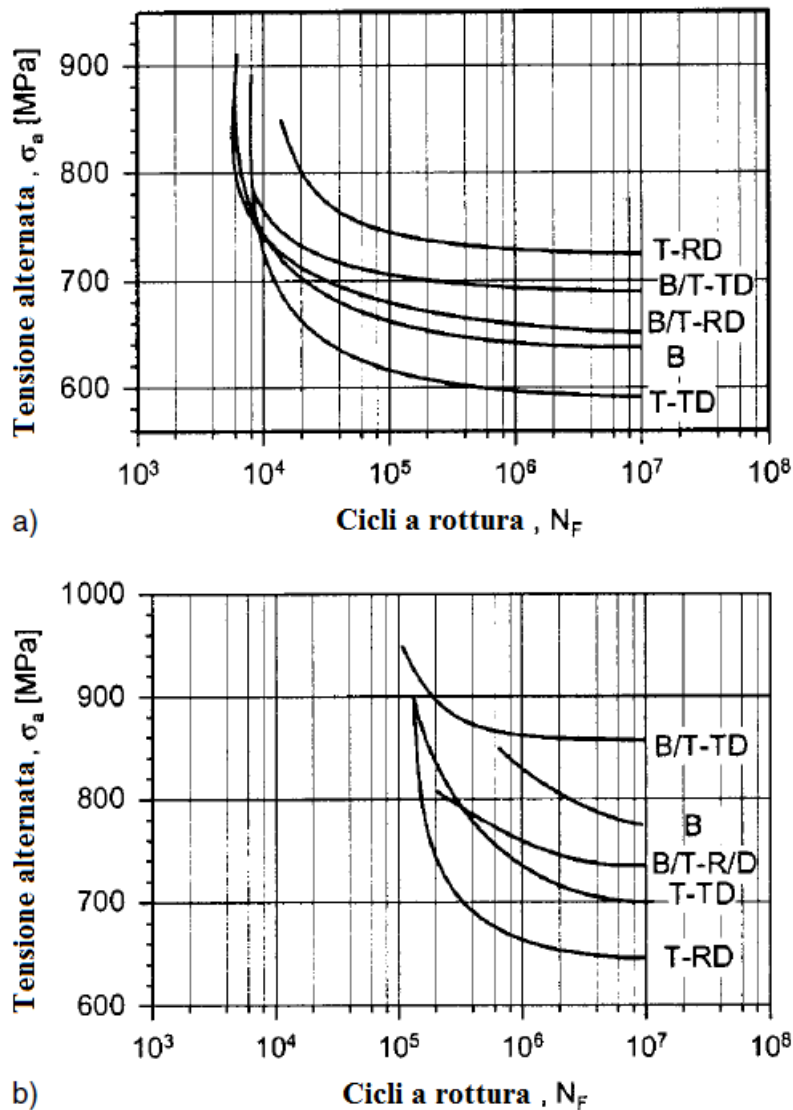


Figura 1.38 Comportamento a fatica HCF con $R = -1$ della lega Ti-6Al-4V (microstruttura equiassica). a) aria; b) vuoto [1]

1.7.3 Influenza della tensione media

La vita a fatica delle leghe α e $\alpha + \beta$ è sensibilmente influenzata dalla tensione media presente durante il ciclo di fatica. Questo effetto è evidenziato nel diagramma di Goodman-Smith in Fig. 1.39, in cui è evidente la minor resistenza a fatica di microstrutture *duplex* rispetto a microstrutture lamellari per basse tensioni medie a temperatura ambiente. La dipendenza dalla tensione media è stata osservata anche in ambienti inerti, e sembra interessare specialmente il meccanismo di iniziazione della cricca. Tale effetto dipende inoltre dall'orientazione cristallografica e si attenua a temperature elevate. [1]

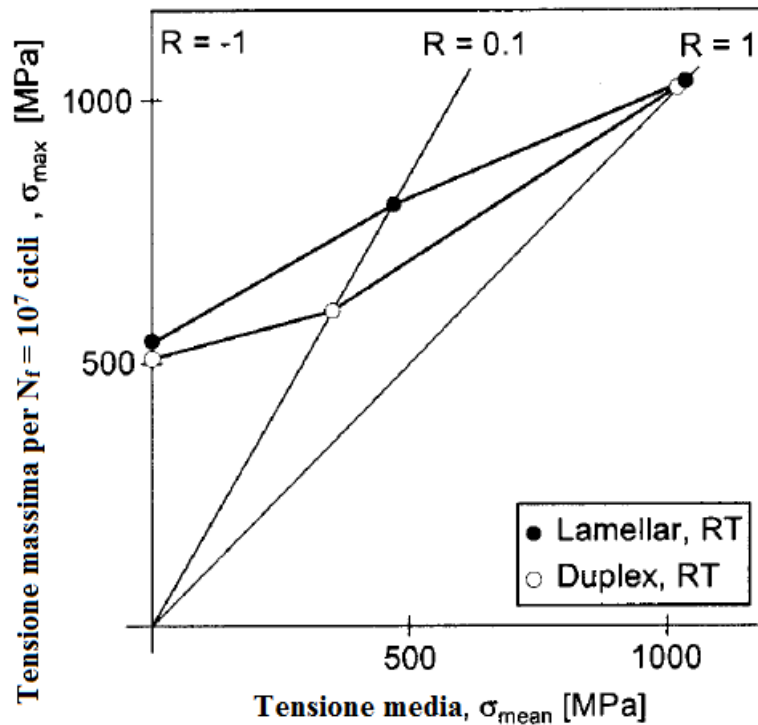


Figura 1.39 Diagramma di Goodman-Smith che illustra l'influenza della tensione media sul comportamento a fatica HCF della lega TIMETAL 1100 a temperatura ambiente [1]

1.7.4 Influenza dei trattamenti meccanici superficiali

I trattamenti meccanici superficiali come la pallinatura o la sabbatura con perle di vetro, la lucidatura e la laminazione profonda possono essere utilizzati per aumentare la resistenza a fatica delle leghe di titanio, in quanto modificano le caratteristiche superficiali di rugosità, il grado di incrudimento e le tensioni residue. [1, 3] Le influenze che tali parametri esercitano sulla vita a fatica in termini di iniziazione delle cricche e propagazione delle microcricche sono riportati in Tab. 1.11.

Tabella 1.11 Parametri che influenzano la vita a fatica modificabili con trattamenti meccanici superficiali e loro influenza sull'iniziazione e la propagazione delle microcricche

Proprietà superficiale	Iniziazione delle cricche	Propagazione delle microcricche
Rugosità	Accelerata	-
Incrudimento superficiale	Ritardata	Accelerata
Tensioni residue	Piccola influenza	Ritardata

E' bene tuttavia ricordare che gli effetti introdotti con trattamenti meccanici superficiali non sono necessariamente stabili, in quanto eventuali trattamenti termici di distensione possono eliminare o ridurre le tensioni residue e trattamenti di ricristallizzazione possono eliminare o ridurre il grado di incrudimento. [1, 3]

Inoltre il trattamento meccanico superficiale deve essere scelto tenendo conto del tipo di applicazione che avrà il componente. Prendendo come riferimento un provino di lega Ti-6Al-4V sottoposto a lucidatura elettrochimica (EP), si nota che a temperatura ambiente il solo trattamento di pallinatura (SP) incrementa la resistenza a fatica, mentre a temperature elevate tale trattamento porta ad una riduzione consistente della resistenza a fatica, come si può osservare in Fig. 1.40.

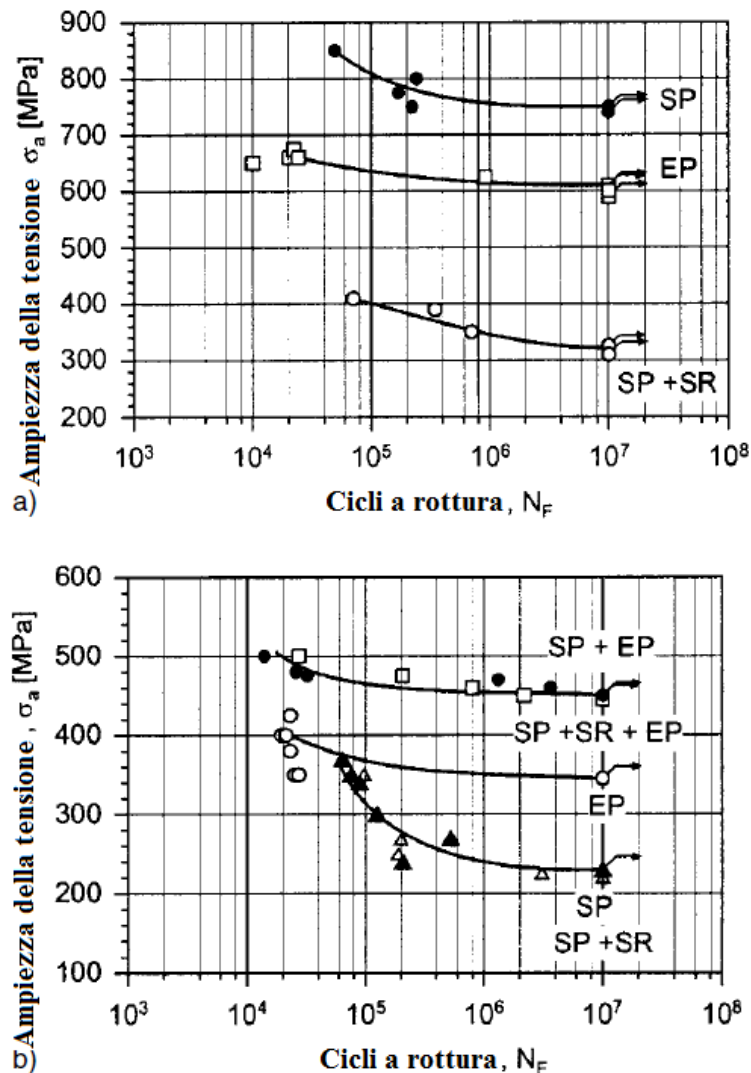


Figura 1.40 Comportamento a fatica HCF, con $R = -1$, della lega Ti-6Al-4V al variare dei trattamenti meccanici superficiali realizzati. a) temperatura ambiente; b) 500°C [1]

Per spiegare tali comportamenti, bisogna tenere conto dei singoli contributi che ciascun trattamento superficiale comporta. Si può notare infatti che a temperatura ambiente l'aumento di resistenza a fatica dato dalla pallinatura consiste principalmente nella presenza di tensioni residue, dato che un successivo trattamento di distensione (SR) porta ad un calo drastico della resistenza. A temperature elevate non si ha la presenza di tensioni residue, pertanto la

pallinatura non presenta gli stessi vantaggi del caso precedente, mentre gli effetti della lucidatura elettrochimica, che agisce invece sulla rugosità superficiale, sono comunque presenti. Ne è la prova il fatto che, ad elevate temperature, per un provino sottoposto a pallinatura e successivamente a lucidatura elettrochimica la resistenza a fatica è più elevata dei casi di sola pallinatura o sola lucidatura (per via dell'incrudimento superficiale e della ridotta rugosità), e ciò non varia nel caso di trattamento di distensione, dato che non sono presenti tensioni residue.

Per quanto riguarda invece la propagazione delle microcricche (Fig. 1.41), i provini sottoposti a trattamento di pallinatura presentano una velocità di propagazione minore rispetto ai provini sottoposti a lucidatura elettrochimica e a pallinatura seguita da distensione. In questo ultimo caso, infatti, resta solo l'incrudimento superficiale indotto dalla pallinatura, che accelera la propagazione delle microcricche, mentre si perdono i benefici delle tensioni residue. Ad elevate temperature i provini sottoposti a pallinatura ed eventualmente a successiva distensione presentano lo stesso andamento, che risulta peggiore rispetto ai provini sottoposti a lucidatura elettrochimica per via della presenza di incrudimento superficiale indotto dalla pallinatura.

In Fig. 1.42 si riporta l'effetto dei trattamenti di pallinatura e sabbatura con sfere di vetro sulla vita LCF della lega Ti-6Al-4V.

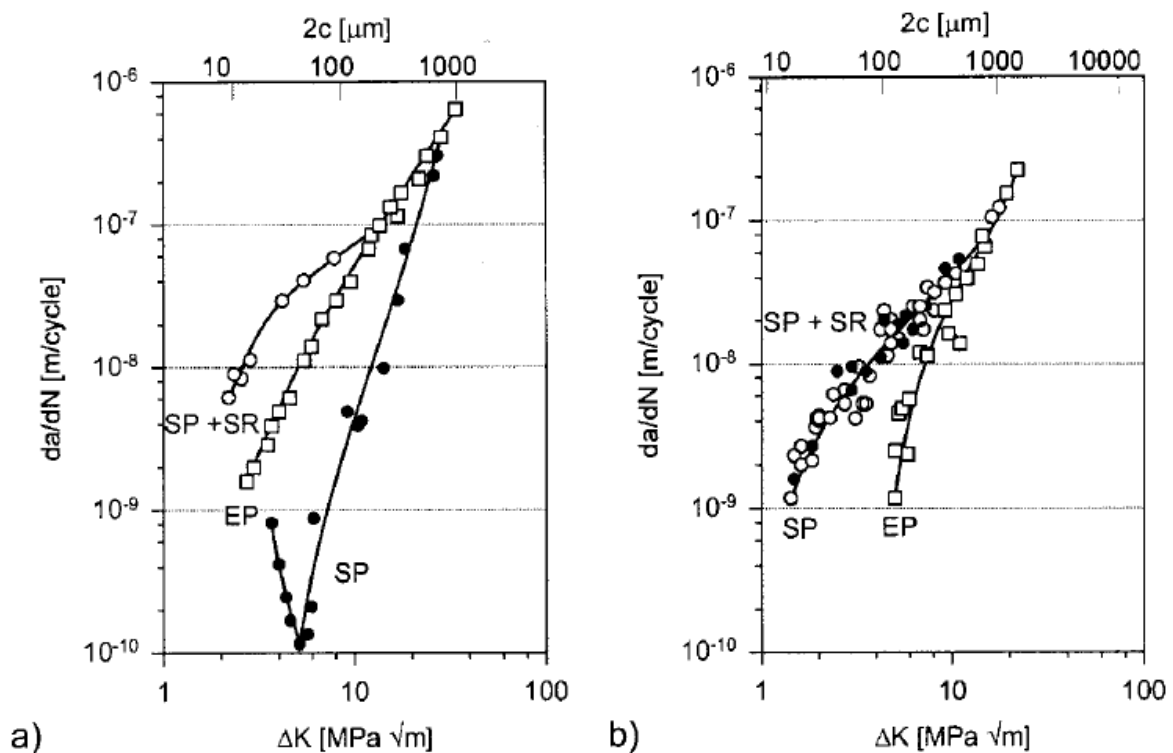


Figura 1.41 Propagazione delle microcricche nella lega Ti-6Al-4V con $R = -1$. a) temperatura ambiente; b) 500°C [1]

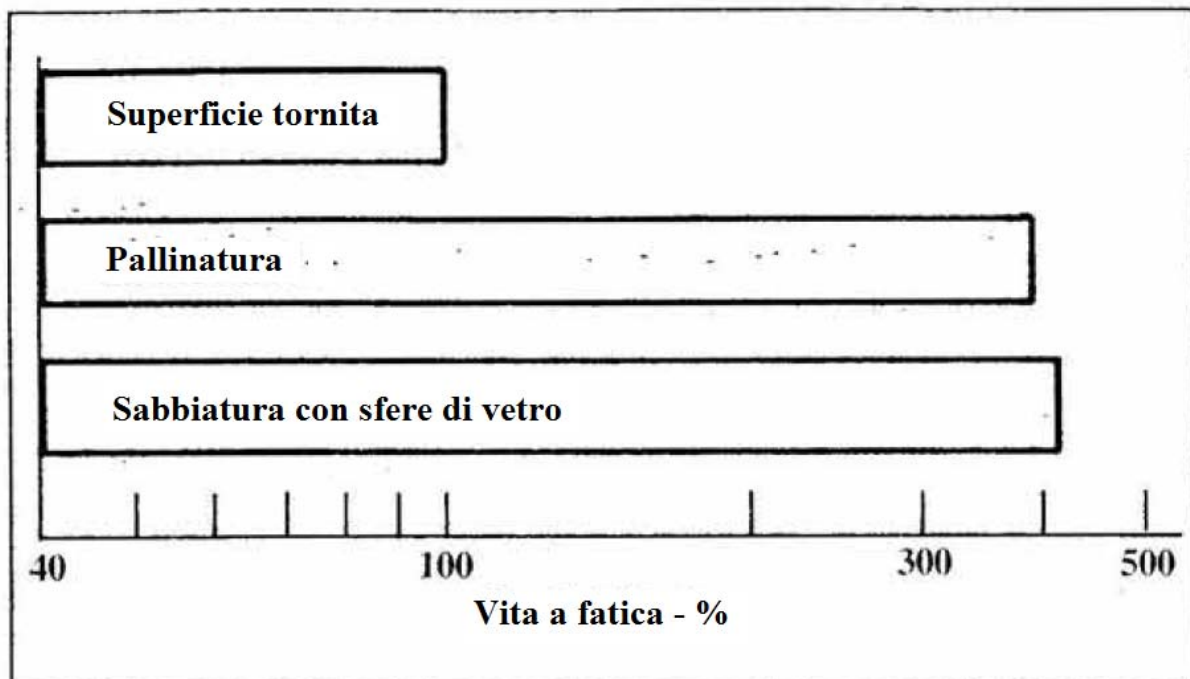


Figura 1.42 Effetti di diversi trattamenti meccanici superficiali sulla vita LCF della lega Ti-6Al-4V [3]

1.7.5 Influenza dei trattamenti termomeccanici superficiali

Si ricorre a trattamenti termomeccanici superficiali per modificare la microstruttura dello strato adiacente alla superficie del componente, potendo così avere una maggior resistenza all'iniziazione e alla propagazione delle microcricche in superficie, ed una maggior resistenza alla propagazione delle cricche lunghe al cuore dei componenti, specialmente per elevati spessori di questi ultimi. Gli effetti indotti dai trattamenti termomeccanici risultano più stabili rispetto a quelli indotti dai soli trattamenti meccanici. Verranno analizzati gli effetti di tali trattamenti per ciascuna classe di leghe.

1.7.5.1 Leghe α

Trattamenti meccanici combinati con una successiva ricottura di ricristallizzazione possono portare ad ottenere una grana cristallina fine vicino alla superficie, con elevate proprietà di resistenza statica e a fatica, lasciando invariata la grana cristallina sottostante, in genere grossolana, per avere maggior resistenza alla propagazione delle cricche lunghe ed eccellente tenacità a frattura. [1] Un esempio di trattamento per ottenere tale microstruttura è quello della pallinatura seguito da ricottura a 820°C per un'ora nel caso della lega Ti-8.6Al, con grana cristallina grossolana: il miglioramento della resistenza a fatica è evidente, come illustrato in Fig. 1.43.

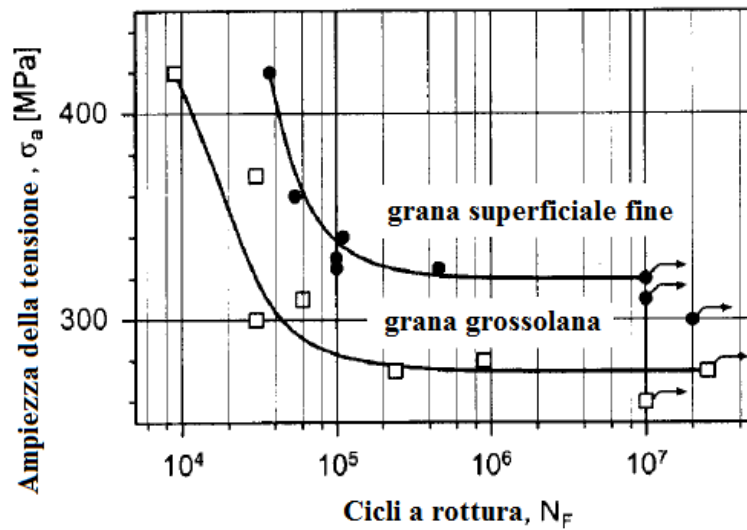


Figura 1.43 Influenza di trattamenti termomeccanici superficiali sulla resistenza a fatica HCF della lega Ti-8.6Al, con $R = -1$ e temperatura di 350°C [1]

1.7.5.2 Leghe near- α e $\alpha + \beta$

Queste due classi di leghe, specialmente le leghe near- α , sono utilizzate per applicazioni ad elevate temperature: per questo motivo si prediligono microstrutture lamellari, che presentano miglior resistenza al creep. Tuttavia tali microstrutture presentano scarsa resistenza a fatica, specialmente LCF, in cui le microcricche propagano a velocità elevate. Anche in questo caso, si ricorre a trattamento di pallinatura seguito da ricottura di ricristallizzazione, che porta alla presenza di una microstruttura equiassica alla superficie. [1] In Fig. 1.44 si può osservare il miglioramento in termini di resistenza a fatica ad elevate temperature di un componente in lega Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo sottoposto a tale trattamento.

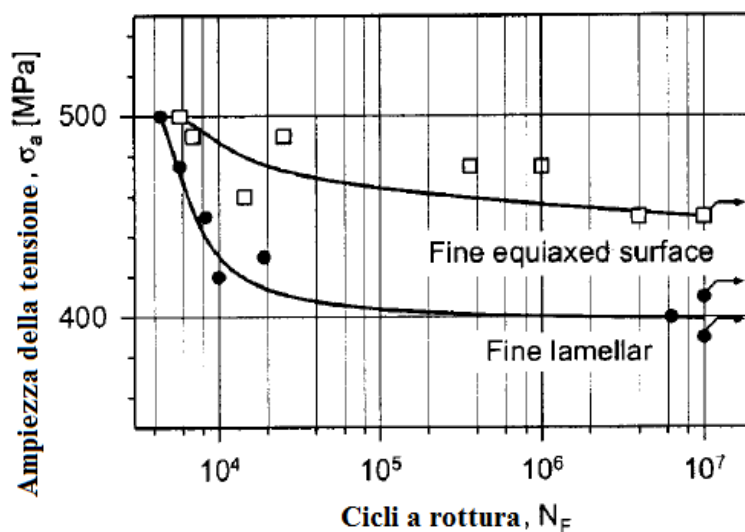


Figura 1.44 Influenza di trattamenti termomeccanici superficiali sulla resistenza a fatica HCF della lega Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo, con $R = -1$ e temperatura di 550°C [1]

1.7.5.3 Leghe β

Per applicazioni in leghe per molle ad elevata resistenza e per elementi di fissaggio si ottengono miglioramenti della vita a fatica mediante trattamenti di pallinatura e laminazione seguiti da trattamenti di invecchiamento appositamente sviluppati. I trattamenti di invecchiamento superficiale selettivo (SSA, *selective surface aging*) portano ad ottenere resistenza a fatica più elevata rispetto a quella che si può ottenere con i trattamenti di invecchiamento tradizionali, mentre l'elevata duttilità della condizione ottenuta con il trattamento di solubilizzazione (SHT, *solution heat treated*) nel cuore del materiale porta ad una elevata tenacità a frattura. [1]

In Fig. 1.45 si può notare come già la laminazione aumenti in maniera sensibile la resistenza a fatica rispetto alla condizione SHT, e come tale caratteristica possa essere ulteriormente aumentata o deteriorata a seconda del successivo trattamento di invecchiamento eseguito.

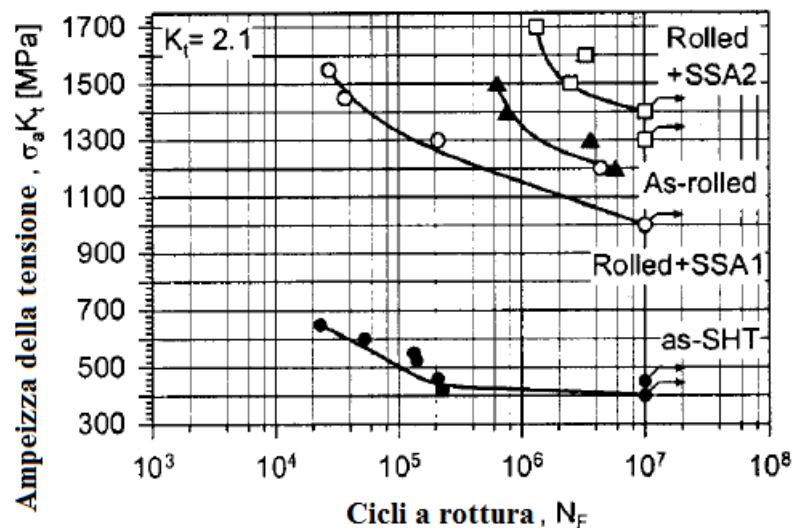


Figura 1.45 Influenza di trattamenti termomeccanici superficiali sulla resistenza a fatica HCF della lega Ti-3Al-6Cr-4Mo-4Zr, con $R = -1$ e $k_t = 2.1$ [1]

1.7.6 Altri fattori che influenzano la vita a fatica delle leghe di titanio e considerazioni sulla lega Ti-6Al-4V

Verranno ora citati altri fattori che influenzano la vita a fatica delle leghe di titanio, prendendo in esame nel caso specifico la lega commercialmente più utilizzata: Ti-6Al-4V. A questo scopo sono state raccolte e sintetizzate diverse informazioni presentate nella letteratura scientifica nell'ultimo decennio. Il risultato di tale sintesi è disponibile nell'Appendice §A3.

Oltre ai fattori precedentemente visti, la vita a fatica delle leghe di titanio è influenzata dalla presenza di intagli e di caratteristiche geometriche che portano ad effetti di concentrazione

delle tensioni. Prove sperimentali eseguite sulla lega Ti-6Al-4V hanno evidenziato la presenza di un effetto di sensibilità all'intaglio che sembra dipendere dalle caratteristiche microstrutturali del pezzo, permettendo di ricavare alcuni valori dell'indice di sensibilità all'intaglio che non sembrano poter essere interpolati con le espressioni di Neuber, di Peterson e di Heywood (Par. §A3.2.4, §A3.2.5 e §A3.2.7). La sensibilità all'intaglio della lega Ti-6Al-4V appare essere ridotta rispetto alla sensibilità all'intaglio degli acciai. [10]

Sono stati inoltre indagati gli effetti sulla vita a fatica HCF della lega Ti-6Al-4V di cicli iniziali con carichi tipici della fatica oligociclica (Par. §A3.2.6). Per provini lisci un iniziale numero di cicli condotto con ampiezze tipiche della vita LCF (fino al 75% della vita a termine di 10^4 cicli) non ha effetti significativi sulla resistenza a fatica dei seguenti cicli HCF, mentre per provini intagliati si osservano variazioni della resistenza HCF al variare del numero di cicli LCF inizialmente eseguiti. Tale dipendenza sembra essere causata da effetti di redistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio e varia nel caso di trattamenti termici di rilassamento eseguiti dopo i cicli di carico LCF.

Si ritiene invece che non vi siano effetti significativi di allenamento nella lega Ti-6Al-4V: [11] per tale motivo, i dati della resistenza a fatica ad elevato numero di cicli vengono ricavati con la tecnica *step loading* (Par. §A3.1.1).

Per la lega presa in esame è presente inoltre un effetto di riduzione della vita a fatica a seconda dell'ambiente di utilizzo, specialmente per valori di K_t ridotti (Par. §A3.2.1 e §A3.2.2). Si ricorda inoltre, come già enunciato precedentemente, che prove di fatica eseguite in aria e in vuoto hanno evidenziato come nel primo caso si abbia un calo delle caratteristiche di resistenza a fatica, probabilmente a causa dell'assorbimento di idrogeno dall'aria.

E' stato inoltre riscontrato come la resistenza a fatica HCF sia influenzata dalla frequenza di applicazione del carico, e come tale dipendenza sia funzione del rapporto di ciclo (Par. §A3.2.3). Si ipotizza come tale influenza sia dovuta ad effetti dati dalla velocità di deformazione, dalla presenza di un accumulo di deformazione plastica (*ratcheting* o deformazione progressiva) e da effetti della tensione media.

Da alcuni provini su lega Ti-6Al-4V con microstruttura *duplex* è stata inoltre ricavata, per il rapporto di ciclo $R = -1$, l'ampiezza della tensione alternata per una vita a fatica di 10^9 cicli, che è risultata approssimativamente di 410 MPa (§A3.2.3).

Si rimanda ai Par. §A3.2.7 e §A3.2.8 per un'indagine sul metodo della distanza critica basato su diversi criteri per previsioni sulla vita a fatica di componenti in lega Ti-6Al-4V per diverse dimensioni dell'intaglio e diversi valori di K_t . Come riportato nei lavori presi in esame in tali paragrafi, il metodo della distanza critica basato sul range di tensione e sulla tensione media del ciclo di carico a cui è sottoposto il provino permettono di ottenere una stima della tensione massima per una vita a fatica prefissata con errori contenuti (entro il 12%) rispetto alla tensione massima ottenuta sperimentalmente.

Nell'articolo analizzato nel Par. §A3.2.9 si riporta infine l'utilizzo di un approccio basato sul parametro di danneggiamento di Findley e sul gradiente di tensione per la previsione della vita a fatica HCF di componenti intagliati, tenendo conto di uno stato di sollecitazione multiassiale all'apice dell'intaglio. Per la valutazione della vita a fatica multiassiale di componenti in lega Ti-6Al-4V si cita un lavoro di Kallmeyer *et al.* [12] in cui sono stati confrontati diversi parametri di danneggiamento. I risultati di tale confronto sono riportati in Tab. 1.12, e dimostra come gli autori concludano che il parametro di danneggiamento di Findley dimostri il maggior grado di correlazione tra risultati sperimentali e previsioni teoriche sia per i casi di fatica uniassiale che per i casi di fatica multiassiale, in termini di media e di ampiezza della banda di dispersione.

Tabella 1.12 Confronto diversi parametri di danneggiamento in termini di bontà e banda di dispersione delle previsioni della vita a fatica uniassiale e multiassiale di provini in lega Ti-6Al-4V [12]

Model	Damage Parameter DP = f(N _f)	Correlation of Uniaxial Data	Correlation of Biaxial Data		
			Mean	Scatter	
Equivalent Stress Models	1a) Goodman (v. Mises)	$\sigma_{a,VM} [1 - (\sigma_{m,VM}/\sigma_{ut})]^{-1}$	Fair	Centered	High
	1b) Gerber (v. Mises)	$\sigma_{a,VM} [1 - (\sigma_{m,VM}/\sigma_{ut})^2]^{-1}$	Poor	Centered	High
	1c) Soderberg (v. Mises)	$\sigma_{a,VM} [1 - (\sigma_{m,VM}/\sigma_y)]^{-1}$	Fair	Centered	High
	2a) Goodman (hydro.)	$\sigma_{a,VM} [1 - (\sigma_{m,H}/\sigma_{ut})]^{-1}$	Poor	Centered	High
	2b) Gerber (hydro.)	$\sigma_{a,VM} [1 - (\sigma_{m,H}/\sigma_{ut})^2]^{-1}$	Poor	Centered	High
	2c) Soderberg (hydro.)	$\sigma_{a,VM} [1 - (\sigma_{m,VM}/\sigma_y)]^{-1}$	Poor	Centered	High
	3) Multiaxiality factor	$\sigma_{a,VM} = f(N_f, MF)$	Poor	Centered	High
	4) Manson-McKnight	$\sigma_{a,psu}^{(1-w)} \sigma_{max}^w$	Good	Centered	Moderate
Critical Plane Models	5) Morrow	$\epsilon_a = f(N_f, \sigma_m)$	Fair	Centered	Moderate
	6) Smith-Watson-Topper	$\epsilon_a \sigma_{max}$	Good	Low	Low
	7a) Goodman (normal)	$\sigma_a [1 - (\sigma_m/\sigma_{ut})]^{-1}$	Fair	Low	Moderate
	7b) Gerber (normal)	$\sigma_a [1 - (\sigma_m/\sigma_{ut})^2]^{-1}$	Poor	Low	Moderate
	7c) Soderberg (normal)	$\sigma_a [1 - (\sigma_m/\sigma_y)]^{-1}$	Fair	Low	Moderate
	8a) Goodman (shear)	$\tau_a [1 - (\tau_m/\tau_{ut})]^{-1}$	Fair	Centered	High
	8b) Gerber (shear)	$\tau_a [1 - (\tau_m/\tau_{ut})^2]^{-1}$	Poor	Centered	High
	8c) Soderberg (shear)	$\tau_a [1 - (\tau_m/\tau_y)]^{-1}$	Fair	Centered	High
	9) Kandil-Brown-Miller	$\gamma_a + \epsilon_a$	Poor	Centered	Moderate
	10) Findley	$\tau_a + k\sigma_{max} \quad (k = 0.45)$	Fair	Centered	Low
	11) McDiarmid	$\tau_a [1 - (\sigma_{max}/2\sigma_{ut})]^{-1}$	Poor	Centered	Moderate
	12) Fatemi-Socie-Kurath	$\gamma_a [1 + k(\sigma_{max}/\sigma_y)] \quad (k = 1)$	Fair	Centered	Moderate
	13) Chu-Conle-Bonnen	$2\gamma_a \tau_{max} + \epsilon_a \sigma_{max}$	Good	High	Moderate
	14) Glinka-Wang-Plum.	$\gamma_a \tau_a [(1 - \tau_{mx}/\tau'_f)^{-1} + (1 - \sigma_{mx}/\sigma'_f)^{-1}]$	Poor	Centered	High

Per quanto riguarda le leghe di titanio, non è stato possibile reperire informazioni su eventuali effetti dimensionali del pezzo sulla resistenza a fatica.

1.7.7 Cenni sulle proprietà a fatica degli alluminuri e dei compositi di titanio

Gli alluminuri di titanio basati sulla fase Ti_3Al presentano valori di ΔK_{th} leggermente più elevati rispetto alle altre leghe di titanio. Per gli alluminuri γ , basati sulla fase $TiAl$, l'influenza della microstruttura sulle proprietà di resistenza a fatica è simile a quanto osservato per le leghe $\alpha + \beta$. Si ha una velocità di propagazione delle cricche decrescente passando da struttura equiassica a struttura *duplex* e infine a quella lamellare, mentre eventuali variazioni della composizione chimica presentano un'influenza minore. Le microstrutture con grana cristallina fine presentano velocità di propagazione delle cricche più elevate rispetto alla microstruttura grossolana.

Per i materiali compositi a matrice metallica (MMC) a base di titanio, le proprietà del materiale sono influenzate dall'interfaccia tra la fibra e la matrice. Nel caso di cricche che propagano perpendicolarmente alle fibre, ad esempio, un legame debole tra fibre e matrice porta a dissipare energia nel processo di delaminazione all'interfaccia dei materiali, e quindi ad una velocità minore di propagazione delle cricche. Se si considera la resistenza statica del materiale, è invece da preferire un forte legame tra fibre di rinforzo e matrice.

Poiché gli MMC di titanio vengono utilizzati per elevate temperature, nelle applicazioni a lungo termine il ruolo dominante è quello della stabilità dell'adesione tra fibra e matrice ad elevate temperature. A questo scopo si indaga il comportamento di compositi a matrice di titanio dopo ricottura a temperature elevate per tempi che vanno da alcune ore ad interi giorni: se inizialmente si osserva una diminuzione della velocità di propagazione delle cricche, tale parametro tende a crescere per tempi di ricottura maggiori, a seconda del tipo di fibra utilizzata come rinforzo. Questo comportamento è causato dal meccanismo di delaminazione.

Appendice A1

Tabella riassuntiva sulle leghe di titanio

Composizione della lega (Grado ASTM) [nome comune]	Descrizione Generale	Applicazioni
Titanio non legato (CP)		
Ti puro	Contenuto di ossigeno minore dello 0.1% in peso.	Applicazioni che richiedono un minimo contenuto di elementi interstiziali come ossigeno, azoto, carbonio e idrogeno.
Ti Grado 1	Grado più puro e con minor resistenza, maggior duttilità a temperatura ambiente e forgiabilità tra i gradi di titanio CP, con eccellente resistenza alle soluzioni da lievemente riducenti a fortemente ossidanti con o senza cloruri ed elevata saldabilità.	Applicazioni che richiedono elevata forgiabilità e basso contenuto di elementi interstiziali per aumentare la resistenza alla corrosione. Servizio continuo: fino a 425°C. Usato per applicazioni che richiedono imbutitura profonda o come rivestimento per reattori in acciaio e per esplosivi.
Ti Grado 2	Resistenza moderata, eccellenti saldabilità, formabilità a freddo, resistenza a soluzioni da lievemente riducenti a fortemente ossidanti con o senza cloruri. Tensione di snervamento minima di 275 MPa. Approvata per l'utilizzo in ambiente acido dalla norma <i>NACE MR-01-75</i> .	Applicazioni industriali che richiedono buona duttilità e resistenza alla corrosione. Servizio continuo: fino a 425°C. Servizio intermittente: fino a 540°C. Componenti aeronautici, recipienti per reazioni chimiche, scambiatori di calore, equipaggiamenti per i processi elettrochimici.
Ti Grado 3	Versione più resistente del Grado 2 con resistenza alla corrosione simile, buone saldabilità, formabilità a freddo e duttilità.	Applicazioni simili al Grado 2.
Ti Grado 4	Grado con maggior resistenza tra i primi 4. Versione più resistente e con contenuto maggiore di elementi interstiziali dei gradi 2 e 3, con duttilità e formabilità a freddo ridotte e saldabilità moderata.	Utilizzata spesso come alternativa al Grado 3.

Titanio commercialmente puro modificato

<p>Ti-0.15Pd (Grado 7) [Ti-Pd]</p>	<p>Lega del Ti più resistente alla corrosione in acidi riducenti e alla corrosione in fessura in alogenuri ad alte temperature. Proprietà meccaniche e fisiche equivalenti al Grado 2, eccellente saldabilità e lavorabilità.</p>	<p>Applicazioni nelle quali è richiesta una particolare resistenza alla corrosione.</p>
<p>Ti-0.15Pd (Grado 11)</p>	<p>Come il Grado 7, ma proprietà fisiche e meccaniche analoghe al Grado 1.</p>	<p>Applicazioni nelle quali è richiesta una particolare resistenza alla corrosione.</p>
<p>Ti-0.05Pd (Grado 16)</p>	<p>Versione più economica del Grado 7 con proprietà fisico-meccaniche equivalenti e resistenza alla corrosione simile.</p>	<p>—</p>
<p>Ti-0.05Pd (Grado 17)</p>	<p>Versione più economica del Grado 11 con proprietà fisico-meccaniche equivalenti e resistenza alla corrosione simile.</p>	<p>—</p>
<p>Ti-0.1Ru (Grado 26) [TiRu-26]</p>	<p>Versione alternativa, più economica del Grado 7 con proprietà fisico-meccaniche equivalenti e resistenza alla corrosione simile.</p>	<p>—</p>
<p>Ti-0.1Ru (Grado 27) [TiRu-27]</p>	<p>Versione alternativa, più economica del Grado 11 con proprietà fisico-meccaniche equivalenti e resistenza alla corrosione simile.</p>	<p>—</p>
<p>Ti-0.3Mo-0.8Ni (Grado 12) [Ti-12]</p>	<p>Lega con elevata saldabilità e fabbricabilità, con maggior resistenza, miglior comportamento alla corrosione in fessura in soluzioni saline ad alte temperature e alla corrosione in acidi riducenti rispetto ai gradi 1, 2 e 3. Maggior tensione ammissibile secondo l'<i>ASME Pressure Vessel Code</i> rispetto a questi. Approvata per l'utilizzo in ambiente acido dalla norma <i>NACE MR-01-75</i>.</p>	<p>—</p>

Leghe α e near- α

Ti-3Al-2.5V (Grado 9) [Ti-3-2.5]	Media resistenza (fino al 50% in più del Ti CP), non invecchiabile, offre la maggior resistenza a pressione secondo l'ASME <i>Pressure Vessel Code</i> . Presenta buona saldabilità e formabilità a freddo. Resistente in soluzioni da lievemente riducenti a lievemente ossidanti.	Disponibile in lamine, tubi continui e prodotti laminati. Utilizzato principalmente in forma tubolare in applicazioni aerospaziali e non.
Ti-3Al-2.5V-Pd (Grado 18) [Ti-3-2.5-Pd]	Analoga alla Ti-3Al-2.5V, con l'aggiunta di Pd, che conferisce elevata resistenza ad acidi riducenti diluiti e alla corrosione in fessura in alogenuri e soluzioni saline ad alte temperature.	_____
Ti-3Al-2.5V-Ru (Grado 28) [Ti-3-2.5-Ru]	Analoga alla Ti-3Al-2.5V, con l'aggiunta di Ru, che conferisce elevata resistenza ad acidi riducenti diluiti e alla corrosione in fessura in alogenuri e soluzioni saline ad alte temperature. Approvata per l'utilizzo in ambiente acido dalla norma <i>NACE MR-01-75</i> .	_____
Ti-5Al-2.5Sn (Grado 6) [Ti-5-2.5]	Saldabile, non invecchiabile, con elevata resistenza. Dotata di stabilità e resistenza all'ossidazione e al creep ad elevate temperature (fino a 480°C).	In molte applicazioni è stata sostituita dalla lega Ti-6Al-4V.
Ti-5Al-2.5Sn ELI [Ti-5-2.5 ELI]	Versione <i>Extra Low Interstitial</i> della Ti-5Al-2.5Sn, esibisce un'eccezionale combinazione di tenacità e resistenza nelle applicazioni criogeniche.	Recipienti in applicazioni criogeniche fino a -255°C.
Ti-6Al-2Nb-1Ta-0.8Mo [Ti-6-2-1-0.8]	Lega sviluppata nel decennio 1950 per sommergibili della marina statunitense. Possiede eccellente tenacità a frattura in ambienti marini.	Scafi e veicoli marini, recipienti in pressione che richiedono elevata tenacità.
Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo-0.1Si [Ti-6-2-4-2-S]	E' una delle leghe con maggior resistenza al creep, raccomandata per utilizzi fino a 550°C. Saldabile, possiede elevata resistenza.	Primariamente utilizzata per componenti di turbine, ma anche in lastre per postcombustori e altre applicazioni aeronautiche.
Ti-8Al-1Mo-1V [Ti-8-1-1]	Elevata resistenza al creep, non invecchiabile, saldabile, indicata per utilizzi fino a 455°C. Possiede la minor densità e il più elevato modulo di elasticità tra le leghe commerciali. A temperatura ambiente, possiede resistenza comparabile alla Ti-6Al-4V.	Utilizzata per strutture aeronautiche e turbine.

Leghe α e near- α meno comuni

<p>Ti-5Al-6Sn-2Zr-1Mo-0.25Si [Ti-5-6-2-1-S]</p>	<p>Lega semi commerciale sviluppata dalla <i>RMI Titanium Company</i> nel decennio 1960 per applicazioni fino a 540°C.</p>	<p>Componenti di motori jet.</p>
<p>Ti-6Al-2Sn-1.5Zr-1Mo-0.35Bi-0.1Si [Ti-11]</p>	<p>Sviluppata da <i>Timet</i> per aumentare la resistenza al creep.</p>	<p>Non diffusa commercialmente in quanto il suo costo di qualificazione supera i benefici tecnici presentati.</p>
<p>Ti-6Al-2.75Sn-4Zr-0.4Mo-0.45Si [Ti-1100]</p>	<p>Sviluppata per elevate temperature, fino a 600°C.</p>	<p>Dischi di compressori per elevate pressioni, pale di turbine di bassa pressione, valvole automobilistiche.</p>
<p>Ti-2.5Cu [IMI 230]</p>	<p>Combina la formabilità e saldabilità del Ti non legato con l'aumento di resistenza per indurimento per precipitazione.</p>	<p>Utilizzata per temperature fino a 350°C e usata allo stato ricotto per realizzare componenti come condotti di bypass per turbine.</p>
<p>Ti-5.8Al-4.0Sn-3.5Zr-0.7Nb-0.5Mo-0.35Si-0.06C [IMI 417]</p>	<p>E' la versione generale della lega IMI 834.</p>	<p>Utilizzata per parti di turbine o di motori a combustione interna colate o formate. Ideale per applicazioni sensibili alla fatica ad elevate temperature (fino a 600°C)</p>
<p>Ti-11Sn-5Zr-2.25Al-1Mo-0.25Si [IMI 679]</p>	<p>Introdotta nel decennio 1960 come lega per le alte temperature.</p>	<p>Nelle applicazioni la lega è stata sostituita da altre leghe per alte temperature come la Ti-6-2-4-2-S.</p>
<p>Ti-6Al-5Zr-0.5Mo-0.25Si [IMI 685]</p>	<p>Introdotta nel 1969 e sviluppata per soddisfare i requisiti di motori aerospaziali.</p>	<p>Lega per turbine con temperatura massima di utilizzo di 520°C.</p>
<p>Ti-5Al-3.5Sn-3.0Zr-1Nb-0.3Si [Ti-5-3-3-1-S] [IMI 829]</p>	<p>Lega con media resistenza per temperature fino a 540°C.</p>	<p>Utilizzata per dischi e pale in compressori di turbine.</p>
<p>Ti-5.8Al-4Sn-3.5Zr-0.7Nb-0.5Mo-0.35Si [IMI 834]</p>	<p>Lega con media resistenza e buona resistenza a fatica per temperature fino a 600°C.</p>	<p>Utilizzata prevalentemente per pale e dischi di compressori nell'industria aerospaziale.</p>

Leghe $\alpha + \beta$

<p>Ti-5Al-4Cr-4Mo-2Sn-2Zr [Ti-17]</p>	<p>Temprabile per spessori elevati, lega ad elevata resistenza con resistenza meccanica e al creep superiori alla lega Ti-6Al-4V per temperature fino a 400°C. Saldabilità limitata.</p>	<p>Utilizzata per la forgiatura di sezioni spesse fino a 150 mm per componenti di turbine a gas.</p>
<p>Ti-6Al-4V (Grado5) [Ti-6-4]</p>	<p>Lega commercialmente più disponibile, ad elevata resistenza, per uso fino a 400°C, offre un'eccellente combinazione di resistenza, tenacità e duttilità con buona saldabilità e formabilità. Utilizzata prevalentemente allo stato ricotto, se invecchiata raggiunge tensioni di snervamento di 1140 MPa.</p>	<p>L'80% dell'utilizzo della lega è destinato applicazioni aerospaziali. Utilizzata in applicazioni automobilistiche e marine dove sono richieste elevate prestazioni per la riduzione di peso che comporta il suo utilizzo.</p>
<p>Ti-6Al-4V ELI (Grado23) [Ti-6-4 ELI]</p>	<p>Versione ELI della lega precedente, offre duttilità e tenacità a frattura in aria e ambienti marini più elevate, insieme a eccellenti resistenza, tenacità e duttilità in applicazioni criogeniche fino a -255°C. Utilizzata tipicamente allo stato ricotto per massimizzare la tenacità.</p>	<p>Applicazioni aerospaziali, protesi mediche (sebbene siano in studio leghe che non contengono Al per tale applicazione).</p>
<p>Ti-6Al-4V-0.1Ru (Grado 29) [Ti-6-4-Ru]</p>	<p>Versione ELI della lega Ti-6-4 contenente Ru, esibisce maggior tenacità a frattura in aria, ambiente marino e soluzioni saline, con resistenza alla corrosione localizzata in soluzioni saline acide fino a 330°C. Approvata per l'utilizzo in ambiente acido dalla norma <i>NACE MR-01-75</i>.</p>	<p style="text-align: center;">—</p>
<p>Ti-6Al-7Nb [IMI 367]</p>	<p>Sviluppata specificatamente per la componente femorale della protesi d'anca. Eccellente biocompatibilità, elevata resistenza con buona tenacità e duttilità.</p>	<p>Utilizzata in ambito biomedico per la eccellente biocompatibilità.</p>
<p>Ti-6Al-6V-2Sn [Ti-6-6-2]</p>	<p>Lega con resistenza e temprabilità maggiori della Ti-6-4, ma con minor tenacità e duttilità, e saldabilità limitata. Può essere utilizzata allo stato ricotto o invecchiato (tensione di rottura di 1200 MPa).</p>	<p>Utilizzata per strutture aeronautiche quando è richiesta una resistenza maggiore della Ti-6-4. Uso generalmente limitato a strutture secondarie.</p>
<p>Ti-6Al-2Sn-4Zr-6Mo [Ti-6-2-4-6]</p>	<p>Elevate temprabilità e limitata saldabilità, utilizzata per carichi costanti applicati fino a 400°C e carichi applicati per brevi periodi fino a 540°C. Approvata per l'utilizzo in ambiente acido dalla norma <i>NACE MR-01-75</i>.</p>	<p>Utilizzata per componenti forgiati di turbine di motori e per componenti aeronautiche.</p>

Ti-4Al-4Mo-2Sn-0.5Si [Ti-550] [IMI 550]	Lega con elevata resistenza (tensione di rottura di 1100 MPa) per forgiatura, esibisce buona resistenza e comportamento al creep fino a 400°C. Invecchiabile per spessori fino a 150 mm.	Utilizzata per strutture aeronautiche e componenti motoristiche.
Ti-6Al-2Sn-2Zr-2Mo-2Cr-0.15Si [Ti-6-22-22-S]	Resistenza e rapporto tenacità a frattura/resistenza maggiori della Ti-6-4, con eccellenti formabilità superplastica e stabilità termica.	Utilizzata in componenti aeronautici.
Ti-4.5Al-3V-2Mo-2Fe [SP-700]	Sviluppata per offrire proprietà di formabilità superplastica molto elevate. Esibisce buone duttilità e resistenza a fatica, e resistenza maggiore della Ti-6-4.	Formata superplasticamente per componenti aerospaziali, testa di bastoni da golf, sfere metalliche, utensili da lavoro, casse di orologi da polso, componenti dell'industria automotive, equipaggiamenti per l'arrampicata.
Leghe $\alpha + \beta$ meno comuni		
Ti-7Al-4Mo	Offre maggior resistenza al creep rispetto alla Ti-6-4 fino a 480°C.	Uso estremamente limitato, prevalentemente per antenne in equipaggiamenti ultrasonici.
Ti-4Al-4Mo-4Sn-0.5Si [IMI 551]	Simile alla IMI 550, ma con maggior resistenza. Tensione di rottura compresa tra 1250 e 1400 MPa.	Prevalentemente utilizzata in componenti aeronautici, per braccetti di supporto e intelaiatura di pompe e carrello. Utilizzata anche per bielle.
Ti-6Al-1.7Fe-0.1Si [Ti-62S]	Contiene ferro come β -stabilizzante, ha caratteristiche simili alla Ti-6-4, ma costi più contenuti.	Medesime della Ti-6-4.

Altre leghe $\alpha + \beta$

Ti-4Al-3Mo-1V [Ti-4-3-1]	Sviluppato nel decennio 1950. Buona combinazione di resistenza e stabilità per temperature fino a 480°C.	Usata nel decennio 1960 per fusoliere, irrigidimenti e strutture aeronautiche interne.
Ti-4.5Al-5Mo-1.5Cr [Corona 5]	Prodotta per programmi sperimentali della marina.	Soppiantata dalla Ti-10V-2Fe-3Al per applicazioni per le quali è critica la frattura. Mai utilizzata commercialmente.
Ti-5Al-1.5Fe-1.4Cr-1.2Mo [Ti-155A]	Produzione cessata.	Obsoleta.
Ti-5Al-2.5Fe	Possiede resistenza alla corrosione, biocompatibilità, propensione all'osteointegrazione e biofunzionalità (elevato rapporto resistenza/modulo di Young) tali da renderlo adatto per impianti permanenti.	Protesi per articolazioni, impianti spinali, viti, chiodi e piastre per la chirurgia.
Ti-5Al-5Sn-2Zr-2Mo-0.25Si [Ti-5522-S]	Lega povera di elementi β -stabilizzanti con buone tensione di rottura e proprietà di resistenza al creep.	Lega semi commerciale per applicazioni ad elevate temperature (tra 425°C e 540°C).
Ti-6.4Al-1.2Fe	Alternativa economica alla Ti-6-4.	Nessuna applicazione riportata.
Ti-2Fe-2Cr-2Mo	Non prodotta dal 1960, sviluppata in piastre.	Sostituita dalla Ti-6-4.
Ti-8Mn	Sviluppata per l'eccellente formabilità, di media resistenza. Buona resistenza e stabilità fino a 315°C.	Non più prodotta, sostituita dalla Ti-6-4. Presente nei caccia aeronautici F8 e F9.

Leghe β

Ti-10V-2Fe-3Al [Ti-10-2-3]	Lega <i>near</i> - β sviluppata per elevata resistenza (1240 MPa) e tenacità in applicazioni per temperature fino a 315°C. Attraverso trattamenti termici si può ottenere un vasto range di livelli di resistenza. Temprabile, con elevate resistenza a fatica e tenacità e ottima forgiabilità con stampi a caldo.	Utilizzata per forgiatura di componenti altoresistenziali in applicazioni aeronautiche che richiedono uniformità di proprietà al cuore e in superficie del pezzo.
Ti-3Al-8V-6Cr-4Zr-4Mo (Grado 19) [Ti Beta-C]	Laminabile a freddo e imbutibile, utilizzata principalmente in barre e fili per molle. Possiede elevata temprabilità, buone combinazioni di tenacità e resistenza, basso modulo elastico ed elevata resistenza alla tensocorrosione e corrosione localizzata in soluzioni saline ad elevata temperatura ed acidi. Approvata per l'utilizzo in ambiente acido dalla norma <i>NACE MR-01-75</i> .	Viti e coppiglie, molle, barre di torsione, lamine per strutture sandwich. Utilizzata in forma tubolare e per telai in pozzi per l'estrazione di idrocarburi.
Ti-3Al-8V-6Cr-4Zr-4Mo-0.05Pd (Grado 20) [Ti Beta-C/Pd]	Versione analoga alla Beta-C, contenente Pd, dalle proprietà fisiche e meccaniche equivalenti ma con maggior resistenza alla tensocorrosione e alla corrosione localizzata in presenza di soluzioni saline ad elevate temperature.	
Leghe β meno comuni		
Ti-11.5Mo-6Zr-4.5Sn [Beta III]	Sviluppata nel decennio 1960, ha eccellente formabilità e proprietà meccaniche nello stato invecchiato. Difficile ottenere componenti per fusione.	Viti e coppiglie, rivetti e lastre nell'industria aeronautica. Utilizzata anche per molle e applicazioni ortodontiche.
Ti-13V-11Cr-3Al [Ti-13-11-3]	Prima lega β sviluppata nella metà del decennio 1950. Per diversi anni, è stata l'unica lega β commercialmente diffusa.	Usata in quantità limitate, è tuttavia presente in molle e lastre per l'industria aeronautica. Applicazioni nelle quali è richiesta resistenza estremamente elevata per piccoli intervalli di tempo.
Ti-15V-3Al-3Cr-3Sn [Ti-15-3]	Sviluppata in piastre nel decennio 1970, è oggi utilizzata in diverse forme.	Applicazioni aeronautiche, possibile scelta per cisterne aerospaziali, tubature idrauliche ad elevata resistenza, viti e coppiglie.
Ti-1.5Al-5.5Fe-6.8Mo [Timetal LCB]	Lega β a basso costo, può essere prodotta ad un prezzo inferiore alla metà di quello tipico di leghe β .	Molle elicoidali e a balestra, molle per orologi. Applicazioni in viti e nella blindatura.

Ti-5Al-2Sn-4Zr-4Mo-2Cr-1Fe [Beta CEZ]	Lega con elevata resistenza e tenacità.	Molle, viti, sezioni per dischi di turbine per temperature intermedie.
Ti-8Mo-8V-2Fe-3Al [Ti-8-8-2-3]	Presenta buona formabilità e caratteristiche dopo invecchiamento simili alle altre leghe β . Invecchiabile per sezioni fino a 150 mm.	Disponibile in lastre.
Ti-15Mo-3Al-2.7Nb-0.25Si [Beta 21S]	Lega ad elevata resistenza con particolare resistenza all'ossidazione, resistenza al creep e stabilità alle alte temperature.	Lamine per strutture a nido d'ape, lastre, piastre e barre per motori e carlinghe. Possibile scelta per compositi, protesi e tubazioni per fluidi caldi.
Ti-15Mo-5Zr	Formabile a freddo, invecchiabile, disponibile in barre, fili e lamiere laminate a freddo per spessori fino a 0.1 mm. Elevata resistenza meccanica e alla corrosione in soluzioni riducenti (miglior resistenza alla corrosione della lega Ti-0.2Pd).	Applicazioni in cui sono richieste elevata resistenza meccanica e alla corrosione.
Ti-15Mo-5Zr-3Al	Rispetto alla lega precedente, l'aggiunta dell'alluminio limita l'infragilimento dato dalla possibile formazione di fase ω .	Materiale per pozzi di estrazione di gas acidi, utilizzato anche come schermo protettivo per l'erosione in pale di turbine.

Altre leghe β

Ti-11.5V-2Al-2Sn-11Zr [Transage 129]	Lega non commerciale, invecchiabile, raccomandata per applicazioni di lastre formate a freddo.	Lega sperimentale per aumentare l'efficienza strutturale in applicazioni chimiche ed aeronautiche.
Ti-12V-2.5Al-2Sn-6Zr [Transage 134]	Lega non commerciale, invecchiabile.	Applicazioni ad elevata resistenza.
Ti-13V-2.7Al-7Sn-2Zr [Transage 175]	Lega non commerciale, invecchiabile.	Applicazioni ad elevata resistenza.
Ti-8V-5Fe-1Al	Disponibile in barre e billette.	Viti e applicazioni in cui sono critiche la resistenza a taglio e la resistenza a rottura.
Ti-16V-2.5Al	Disponibile soli per ordinazioni speciali.	Sviluppata dalla <i>RMI Titanium Co.</i> per l'utilizzo in lastre in applicazioni che richiedono elevata resistenza.

Ti-35V-15Cr [Tiadyne 3515]	Resistente alla combustione prolungata.	Disponibile in forgiati e in polvere.
--------------------------------------	---	---------------------------------------

Altri materiali contenenti titanio

Alluminuri α_2 (Ti ₃ Al)	Può contenere fase ortorombica che presenta resistenza al creep e tenacità a frattura elevate.	Leghe sperimentali e semi commerciali per applicazioni ad elevate temperature.
Alluminuri γ (TiAl)	Contengono Al in percentuale variabile tra il 46% e il 52%, e dall'1% al 10% di almeno uno dei seguenti elementi: V, Cr, Mn, Mo, Nb, W, Ta.	Leghe sperimentali e semi commerciali per applicazioni ad elevate temperature.
Leghe a memoria di forma Ti-Ni	Le proprietà di memoria di forma delle leghe Ti-Ni dipendono largamente dalla composizione, dalla storia del materiale e dall'aggiunta di altri elementi.	Utilizzate in elementi accoppianti, attuatori e altri componenti per recuperare deformazioni, tensioni e lavoro.
Leghe di Ti rinforzate con particolati [CERMETi]	I compositi CERMETi sono rinforzati con una varietà di particolati ceramici e intermetallici come TiC, TiB ₂ e TiAl. Resistenza e modulo elastico elevati, sia a temperatura ambiente che a temperature elevate. Durezza e resistenza all'usura elevate.	Non riportate.

Appendice A2

Settori applicativi delle leghe di titanio

Le applicazioni originarie delle leghe di titanio sono state nel campo aerospaziale e aeronautico, per poi estendersi in numerosi altri settori. Si ritiene opportuno sintetizzare le principali applicazioni del titanio e delle sue leghe per quei settori le cui necessità possono essere soddisfatte pienamente con l'utilizzo di questi materiali.

Settore Applicativo	Principali proprietà considerate	Esempi di applicazioni
----------------------------	---	-------------------------------

INDUSTRIA AERONAUTICA

Aeromobili (civili/militari)	Elevato rapporto resistenza/densità. Sviluppo di tecnologie di lavorazione specifiche per il titanio (<i>superplastic forming/diffusion bonding</i>). Elevata resistenza a fatica.	Componenti del motore (turbogetto). Componenti strutturali (laminati, forgiati e getti). Sperimentazione di profili alari in titanio (maggior portanza-minor consumo combustibile). Sperimentazione di velivoli supersonici per il trasporto civile (programma HSCT). Sperimentazione dell'utilizzo di componenti monolitici in alluminuri di titanio per motori a turbina ad elevate prestazioni (programma IHPTET).
-------------------------------------	--	---

INDUSTRIA CHIMICA ED ELETTROCHIMICA

Settore ecologico	Resistenza alla corrosione. Resistenza all'erosione. Atossicità. Resistenza ad elevate temperature.	Impianti per il trattamento di reflui solidi, liquidi e gassosi altamente inquinanti. Utilizzo di rivestimenti in titanio in impianti nuovi e già esistenti (<i>Cladding e Lining</i>). Rivestimenti di condotti e camini di impianti di desolforazione per l'abbattimento e la depurazione di fumi di combustione.
--------------------------	--	---

Settore chimico	<p>Resistenza alla corrosione (in particolare titanio CP). Sviluppo di leghe particolarmente resistenti alla corrosione (contenenti Pd o Ru). Resistenza agli agenti ossidanti.</p>	<p>Stoccaggio (serbatoi), movimentazione (pompe e tubazioni) e produzione (impianti) di cloruri e idrocarburi clorurati. Condensatori di vapore e scambiatori di calore in piattaforme di pompaggio <i>off-shore</i> (liquido di raffreddamento: acqua di mare, liquido da raffreddare contenente solfuri altamente aggressivi). Pale di sezioni di bassa pressione di turbine a vapore che utilizzano i vapori prodotti in grande quantità dall'industria chimica. Galleggianti per impianti chimici. Impianti per la produzione di fibre sintetiche, urea, acetaldeide, acetone, acido solforico caldo, acido tereftalico, acido nitrico, acido cromico, cloruri e bromuri (fabbricazione di reattori chimici, tubi e valvole).</p>
Settore elettrochimico	<p>Passivazione rapida in condizioni anodiche, con formazione di un film di ossido resistente. Resistenza alla corrosione (in particolare titanio CP).</p>	<p>Anodi per la produzione di cloro e per l'elettrosintesi di composti organici. Anodi per la produzione di zinco elettrolitico da soluzioni solforiche. Utilizzo per bagni di nichelatura, ramatura e di soluzioni a base di cloruro ferrico e cromo esenti da fluoruri: cestelli anodici, telai, serpentine, pinze, ganci porta anodi ed altri componenti.</p>
Altri impieghi	<p>Resistenza alla corrosione.</p>	<p>Valvolame e raccorderia prodotti con getti fusi per il settore petrolchimico e per altri settori. Fabbricazione di filtri per sterilizzatori. Otturatori e corpo delle macchine fotografiche, apparecchiature per lo sviluppo fotografico. Rivestimenti interni dei barili nell'industria conciaria e componenti a contatto con il pellame e con l'acido cromico utilizzato nel processo. Trattamento di reflui solidi e liquidi per il recupero dei reagenti nell'industria conciaria. Impianti di sbiancamento della cellulosa e trattamento e recupero di reflui inquinanti nell'industria cartaria.</p>

INDUSTRIA PETROLCHIMICA

Impianti petrolchimici	Resistenza alla corrosione nei confronti dei composti contenenti zolfo.	Valvolame e <i>fittings</i> , camere di <i>cracking</i> , <i>piping lines</i> negli impianti di trasformazione e raffinazione di petroli ed olii ad elevato contenuto di zolfo, anche in piattaforme <i>off-shore</i> , nelle sezioni più sollecitate e sottoposte ad erosione e corrosione.
Piattaforme petrolifere d'alto mare	Elevato rapporto resistenza/densità. Elevata resistenza alla corrosione (anche per petrolio contenente solfuri ad elevate temperature). Elevata resistenza all'erosione. Maggior flessibilità rispetto all'acciaio. Elevata resistenza a fatica.	Utilizzo della lega BETA C per tubi di collegamento con la bocca del pozzo fissati sul fondo del mare: applicazione critica per la maggior parte dei metalli per la presenza di petrolio caldo contenente solfuri, per l'acqua marina all'esterno e per la continua flessione a cui sono sottoposti i tubi a causa dei movimenti della piattaforma (resistenza contemporanea a sollecitazioni meccaniche, corrosione e calore). Utilizzo in tubi spiralati, pozzi di petrolio e pozzi geotermici (vapori con alto contenuto di carbonati, solfuri e bromuri).

INDUSTRIA ENERGETICA

Condensatori e scambiatori di calore	Vantaggi dell'utilizzo del titanio in scambiatori e condensatori.	Condensatori e scambiatori di calore per centrali termiche, operanti anche con acqua salina.
Centrali termoelettriche	Resistenza alla corrosione. Resistenza ad elevate temperature.	Componenti per l'abbattimento dei fumi di acido cloridrico e cloro nelle centrali termoelettriche (esempio: giranti per ventilatori, gorgogliatori di lavaggio).
Centrali nucleari	Resistenza alla corrosione, anche microbiologicamente indotta. Vantaggi dell'utilizzo del titanio in scambiatori e condensatori illustrati tra le proprietà del titanio.	Sistemi tubieri, condensatori relativi a servizi principali e accessori. Utilizzo in processi <i>Purex</i> (riciclo combustibili nucleari esausti) che utilizzano acido nitrico (lega Ti-5Ta) Contenitori resistenti alle alte temperature e alla corrosione in fessura per lo stoccaggio di rifiuti radioattivi (Grado 12). Studi per l'utilizzo del titanio come materiale strutturale per la costruzione di reattori a fusione nucleare.

Altri impieghi	<p>Elevato rapporto resistenza/densità. Leggerezza (forze centrifughe e inerziali contenute). Resistenza alla corrosione, alla tensocorrosione e all'erosione. Breve tempo di dimezzamento radioattivo.</p>	<p>Caldaje e costruzione di pale di grande diametro per turbine a vapore a bassa pressione (per la leggerezza del titanio: pale più lunghe e più leggere). Utilizzo di leghe niobio-titanio per superconduttori in generatori, trasformatori, apparecchiature in campo biomedicale (risonanza magnetica nucleare). Tubazioni, valvole e pompe in processi di generazione e trasformazione dell'energia. Rivestimento di elementi scaldanti elettrici immersi in soluzioni corrosive. Contenitori e impianti per lo stoccaggio ed il trattamento di materiali radioattivi.</p>
-----------------------	---	---

DESANILIZZAZIONE E POTABILIZZAZIONE ACQUE

Impianti di desalinizzazione	<p>Resistenza alla corrosione, anche in soluzioni saline e in fessura e a temperature elevate (120°C). Vantaggi dell'utilizzo del titanio in scambiatori e condensatori illustrati tra le proprietà del titanio.</p>	<p>Componenti di impianti di desalinizzazione dell'acqua di mare (scambiatori, condensatori, tubi di raccolta e di ricircolo di soluzioni saline concentrate): possibili problemi di corrosione indotta se accoppiato con altri metalli.</p>
Impianti di potabilizzazione	<p>Atossicità. Resistenza all'erosione e agli agenti ossidanti. Resistenza alla corrosione.</p>	<p>Applicazioni negli ozonizzatori. Applicazioni che devono sostenere lavaggi debolmente acidi o applicazioni di antiossidanti <i>antifouling</i> come ipoclorito o altri composti contenenti cloro attivo.</p>

INDUSTRIA MARINA

Acquacoltura	<p>Elevato rapporto resistenza/densità. Leggerezza. Resistenza alla corrosione.</p>	<p>Installazioni galleggianti in mare aperto per la produzione di pesce (griglie con struttura portante in titanio e reti in polipropilene).</p>
---------------------	---	--

Cantieristica navale	<p>Resistenza alla corrosione, all'abrasione, alla cavitazione e alla tensocorrosione. Elevato rapporto resistenza/densità. Leggerezza. Amagneticità. Resistenza balistica. Resistenza alle alte temperature. Elevata resistenza a fatica.</p>	<p>Manufatti di bordo come turbine, scambiatori di calore, dissalatori, condensatori, tubazioni, valvolame e separatori centrifughi.</p> <p>Elementi strutturali come assi-elica, eliche, idrogetti, rivestimenti e particolari quali griglie a mare per navi militari, portelli, porte a tenuta stagna, bitte, serrande tagliafuoco, timoni, alberi di propulsione, pompe di raffreddamento e pompe antincendio.</p> <p>Costruzione di imbarcazioni con lo scafo in titanio.</p> <p>Componenti di sommergibili e mezzi di ricerca sottomarina (tubazioni interne per il raffreddamento delle linee di servizio, scafo interno, applicazioni per l'esplorazione di fondali marini).</p> <p>Possibili applicazioni in sovrastrutture, alberi e antenne di unità navali.</p>
	Nautica da diporto	<p>Elevato rapporto resistenza/densità. Leggerezza. Resistenza alla corrosione.</p>

INDUSTRIA ALIMENTARE

Settore alimentare	<p>Biocompatibilità. Atossicità. Resistenza alla corrosione e all'erosione. Leggerezza. Resistenza alle basse temperature e a cicli termici notevoli.</p>	<p>Coltelli in titanio ad ultrasuoni (industria dolciaria).</p> <p>Forni per la cottura dei salumi (convogliatori e diffusori del vapore, volte dei forni di cottura dove condensa la salamoia, vasche di cottura, altri componenti). In questo campo, componenti in titanio resistono per più di 15 anni, mentre componenti in acciaio inossidabile possono richiedere la sostituzione dopo un solo anno.</p> <p>Trafile per la produzione di pasta.</p> <p>Macchinari per la concentrazione e sterilizzazione dei prodotti nell'industria conserviera e saccarifera.</p> <p>Macchinari per l'industria degli olii alimentari (centrifughe, componenti per la spremitura ed altri).</p> <p>Impianti per la produzione e l'imbottigliamento del vino.</p> <p>Posateria e pentolame.</p> <p>Dettagli estetici di alcuni manufatti.</p>
---------------------------	---	---

INDUSTRIA BIOMEDICA

Protesi, *pace makers*, implantologia dentaria

Atossicità.
Resistenza alla
corrosione e
all'erosione.
Elevato rapporto
resistenza/densità.
Leggerezza.
Basso modulo elastico.
Osteointegrazione.
Elevata resistenza a
fatica.

Materiale per protesi, placche, chiodi, viti, *pace makers*
e valvole cardiache.
Protesi e impianto nella gengiva di denti artificiali
(odontotecnica).
Scatole che contengono i *pace makers*.
Pompe per installazioni in cuori con difficoltà di
pompaggio (cuore elettrico permanente a batterie
ricaricabili).

Attrezzature ospedaliere e sperimentazione medica

Atossicità.
Resistenza alla
corrosione.
Elevato rapporto
resistenza/densità.
Leggerezza.

Ferri chirurgici, pompe dosatrici per l'insulina,
strumentazione analogica, sonde, carrozzelle per
portatori di handicap, particolari di arredamento
(mancorrenti ed elementi di arredo attraverso i quali si
possono trasmettere batteri).
Piastrelle e rivestimenti sanitari antibatterici ricoperti da
biossido di titanio.
Fibre conduttrici in Nb-Ti per magneti per la
tomografia a risonanza magnetica nucleare.

EDILIZIA CIVILE E RESTAURI

Costruzioni per l'edilizia civile

Elevato rapporto
resistenza/densità.
Leggerezza.
Resistenza alla
corrosione (agenti
atmosferici e
inquinanti).
Resistenza alle alte
temperature.
Basso modulo elastico.
Capacità di
smorzamento del
rumore.

Coperture di edifici, grondaie e tubazioni di scolo,
infissi e finestre, rivestimenti esterni, pannelli
insonorizzanti e barriere anti-incendio.
Ricoperture dei tetti e rivestimento di edifici.
Applicazioni strutturali (torri di sostegno di
monumenti).
Rivestimento di edifici molto alti e gallerie sotterranee
(per la limitata manutenzione).
Ventilatori ed oggetti decorativi.
Utilizzo nel restauro di beni culturali.
Arredo urbano e per esterni (panchine, pensiline,
mancorrenti ed altri).
Pannelli corrugati insonorizzanti a nido d'ape.

Anodi per protezione catodica di acciaio

Resistenza alla corrosione.

Impiego di maglie di Ti espanso (con alimentazione elettrica) nel cemento in prossimità dei rinforzi in acciaio di ponti in cemento per la protezione di tali rinforzi soggetti a corrosione dai sali antigelo e da prodotti corrosivi.

Restauri ed archeologia

Elevato rapporto resistenza/densità.
Basso coefficiente di dilatazione termica.
Resistenza alla corrosione e all'erosione.
Basso modulo elastico.

Grappe per il sostegno, barre di rinforzo, strutture di supporto per beni artistici.
Vantaggio del titanio: assenza di prodotti da corrosione che deturpano i beni restaurati; coefficiente di dilatazione termica ed elasticità che garantiscono compatibilità con materiali lapidei (pietre, marmi) e materiali inerti da costruzione (cemento, mattoni).

INDUSTRIA DELLE ATTIVITA' SPORTIVA E VARIE**Articoli sportivi**

Affidabilità.
Elevato rapporto resistenza/densità.
Leggerezza.
Resistenza alla corrosione.
Basso modulo elastico.
Amagnetività.

Attrezzature per alpinismo (chiodi da roccia, racchette da neve, ramponi, piccozze, moschettoni, chiodi da ghiaccio ed altro).
Moschettoni di sicurezza e bombole per acetilene per il settore speleologico.
Attrezzature subacquee (profondimetri, respiratori).
Perni, telai, attacchi per manubrio, bloccaggi ruota, forcelle e carrello per selle (settore ciclistico).
Parte interna di sci, telaio di slitte (settore sciistico).
Racchette da tennis e mazze da golf.

Bigiotteria, orologeria, occhialeria e vari articoli

Biocompatibilità.
Atossicità.
Estetica e colorazioni ottenute da ossidazione anodica.

Applicazioni in gioielleria e bigiotteria (collane, orecchini, spille, fermacravatte, ferma soldi, soprammobili,..).
Montature di occhiali, orologi e penne stilografiche.
Utilizzo nelle membrane di altoparlanti.
Articoli come portachiavi, bottoni, forbici, accendini, cornici da tavolo, lampade ed altri.

INDUSTRIA MECCANICA

<p>Mezzi di trasporto civili e militari (automotive)</p>	<p>Elevato rapporto resistenza/densità. Elevata resistenza a fatica. Leggerezza. Basso modulo elastico. Resistenza balistica.</p>	<p>Costruzione di molle per sospensioni. Valvole e molle delle valvole. Sistemi di scarico. Bielle di collegamento tra pistoni e albero a gomiti, mozzi ruota, pinze freno, altre parti in movimento (per automobili ad alte prestazioni). Blindatura di veicoli militari o privati. Sperimentazione nei veicoli pesanti per la realizzazione di semiassi, bielle, valvole, scatole cambio e differenziale, sospensioni, viteria, bulloneria, barre di torsione e giunti. Utilizzo della lega Nb-Ti per magneti per treni a levitazione magnetica.</p>
<p>Robotica e attrezzature meccaniche</p>	<p>Elevato rapporto resistenza/densità. Elevata resistenza a fatica. Leggerezza. Resistenza alla corrosione. Amagneticità.</p>	<p>Pinze per robot di saldatura. Equipaggiamenti ed ingranaggi di robot manipolatori per impianti siderurgici e per impieghi subacquei. Cilindri oleodinamici operanti in ambienti corrosivi. Iniettori, guarnizioni e distanziali per impianti di stampaggio delle materie plastiche. Sviluppo di utensili specifici per le lavorazioni meccaniche del titanio.</p>
<p>Industria tessile e tintoria, macchine confezionatrici, attrezzature per la neve e impianti di risalita, settore agricolo</p>	<p>Elevato rapporto resistenza/densità. Elevata resistenza a fatica. Leggerezza. Resistenza alla corrosione e all'erosione.</p>	<p>Componenti utilizzati nei processi di sbiancatura e colorazione. Utilizzo in macchine confezionatrici per ridurre le inerzie. Possibile utilizzo per lame degli spazzaneve. Utilizzo prospettabile per funivie, <i>ski-lift</i> e seggiovie e per ascensori. Applicazioni dirette su tronchi e rami per alberi da frutta e viti. Utilizzo in mezzi aerei utilizzati in agricoltura (serbatoi, pompe e diffusori per l'irrorazione di pesticidi e fertilizzanti).</p>
<p>Sistemi di accoppiamento</p>	<p>Elevate caratteristiche meccaniche. Resistenza alla corrosione.</p>	<p>Viti, chiodi e rivetti.</p>

Appendice A3

Sintesi di alcuni lavori presenti in letteratura riguardanti il comportamento a fatica della lega Ti-6Al-4V

Dopo aver classificato le leghe di titanio e aver presentato le caratteristiche meccaniche e i campi di applicazione di tali materiali, si ritiene utile presentare la sintesi di alcuni risultati disponibili in vari articoli della letteratura riguardanti il comportamento a fatica della lega Ti-6Al-4V (Grado 5 ASTM o Ti-6-4). Questa sintesi si propone come l'inizio di una raccolta di informazioni e dati sperimentali riguardanti la lega commercialmente più disponibile e utilizzata tra le leghe di titanio, per l'eccellente combinazione di resistenza, tenacità e duttilità e la buona saldabilità e formabilità.

A3.1. Metodi accelerati per indagare il comportamento a fatica ad elevato numero di cicli

Alcuni degli articoli proposti fanno riferimento a metodi accelerati per determinare la resistenza a fatica di provini in lega Ti-6-4 ad elevato numero di cicli (HCF, *High Cycle Fatigue*), in particolare del metodo *step loading* e del metodo *staircase*. Per la descrizione dettagliata di tali metodi, si rimanda alla letteratura. [13] Si ritiene tuttavia utile riportare alcune nozioni riguardo ai simboli e alle espressioni utilizzate per il metodo del *step loading*. La possibilità di utilizzare tale metodo per l'indagine del comportamento a fatica HCF di provini di lega Ti-6-4 senza problemi di allenamento del provino è documentata in letteratura. [11, 13]

A3.1.1. Metodo step loading (step-test)

Il metodo *step loading* si propone di calcolare la tensione limite di resistenza a fatica con la seguente procedura: ad un determinato rapporto di ciclo, il provino viene caricato per un blocco di N^* cicli (tipicamente 10^7) ad una tensione minore della resistenza a fatica prevista. Dopo tale numero di cicli, la tensione viene aumentata di una piccola quantità (tipicamente 5%) rispetto alla tensione precedentemente applicata, per ulteriori N^* cicli. Si prosegue fino a quando si verifica la rottura del provino ad una data tensione applicata per meno di N^* cicli.

- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: N^* cicli.
- Incremento della tensione massima tra due blocchi di carico successivi: piccolo (5%)
- Calcolo della tensione massima per il limite di fatica a N^* cicli secondo la formula:

$$\sigma_{FL,max} = \sigma_{prior,max} + \frac{N_f}{N^*} (\sigma_{final,max} - \sigma_{prior,max})$$

Significato dei simboli:

N_f	Cicli a rottura dell'ultimo blocco di carico applicato
$\sigma_{final,max}$	Tensione massima nominale applicata alla sezione ristretta nel blocco di carico in cui avviene il cedimento (MPa)
$\sigma_{prior,max}$	Tensione massima nominale applicata alla sezione ristretta nel blocco di carico precedente a quello in cui avviene il cedimento (MPa)
$\sigma_{FL,max}$	Tensione limite interpolata (intesa come tensione massima nominale del ciclo nella sezione ristretta) per N^* cicli (MPa)

Calcolo della tensione limite alternata per N^* cicli:

$$\sigma_{alt,lim} = \frac{\Delta\sigma_{FL}}{2} = \frac{\sigma_{FL,max} - R * \sigma_{FL,max}}{2}$$

A3.1.2. Metodo staircase

Il metodo si propone di ricavare la resistenza a fatica a N^* cicli procedendo con blocchi di carico di N^* cicli per ciascun provino: se per tale provino si giunge a rottura, il provino successivo verrà caricato con una tensione inferiore. Se il provino non giunge a rottura, si procede caricando il provino successivo con una tensione più elevata. La resistenza a fatica a N^* cicli viene quindi ricavata sulla base di metodi statistici. Per ulteriori dettagli si rimanda alla letteratura. [13]

A3.2. Raccolta e sintesi degli articoli

Per ciascuno degli articoli inseriti nella raccolta, si procederà analizzando il tema trattato, la tipologia dei provini, la procedura sperimentale e i risultati presentati nell'articolo, con le discussioni e le osservazioni ritenute di maggiore rilevanza. Le figure e le tabelle riportate fanno parte degli articoli considerati, e verranno esposte e commentate a seguire: non si riportano perciò le didascalie. Il titolo di ciascun paragrafo coincide con il titolo dell'articolo analizzato, i cui dati riguardanti la pubblicazione si trovano tra i riferimenti bibliografici.

A3.2.1. Fatigue behaviour of notched Ti-6Al-4V in air and corrosive environment [14]

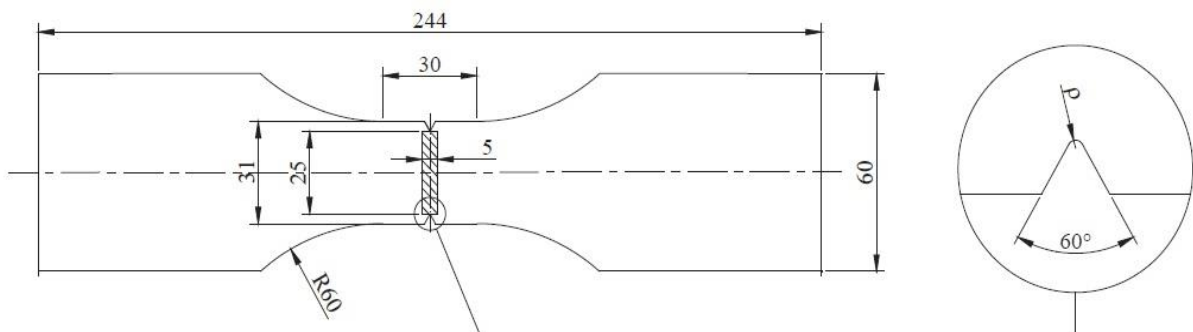
Tema trattato: confronto del limite di fatica di componenti intagliati in Ti-6Al-4V in diversi ambienti (aria e soluzione 3,5% di NaCl) per diversi valori di K_t .

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (wt.%: 5.97 Al, 4.07 V, 0.20 Fe, 0.1885 O, 0.003 C).

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Provini ottenuti da piastre laminate a caldo;
- Solubilizzazione a 925°C (1 h);
- Ricottura in vuoto a 700°C (2 h) (*overaging*);
- Lavorazione dell'intaglio: fresatura a velocità ridotta e successiva elettroerosione per ottenere il valore di ρ desiderato;
- Ricottura di distensione in vuoto a 700°C (1 h).

Geometria dei provini utilizzati:



ρ (mm)	0.06	0.26	1.50	2.50
K_t (modello FEM)	13.34	6.63	3.10	2.55

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale, $R = 0.1$;
- Frequenza: $f = 10 \text{ Hz}$.

Procedura e note sperimentali:

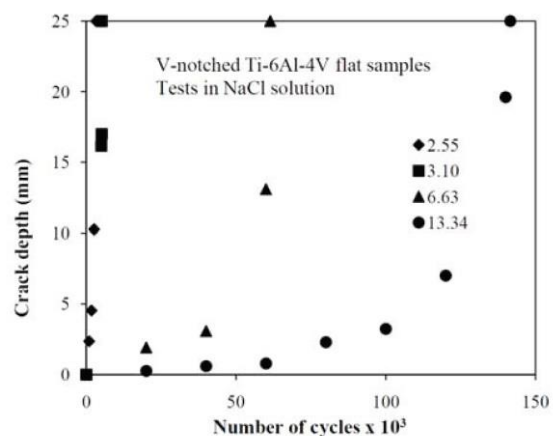
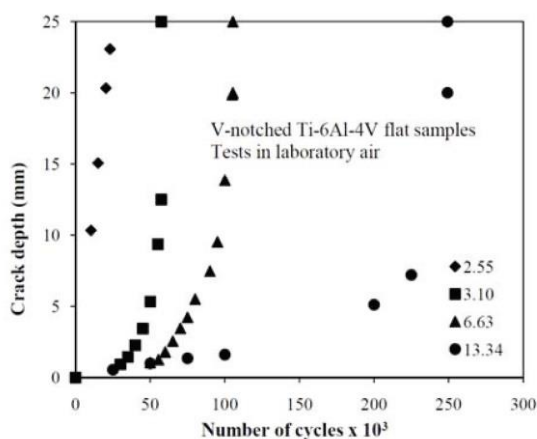
- Caratterizzazione quasi-statica del materiale base dopo solubilizzazione e *overaging*, in direzione longitudinale.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per il test di fatica.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 2 * 10^5$ cicli.
- Utilizzo di strisce di acetato per localizzare la presenza di cricche e monitorarle con analisi di immagini.
- Analisi di alcune superfici di frattura con microscopio stereoscopico.
- Test eseguiti in aria e in ambiente salino (soluzione 3.5% in peso di NaCl) con l'utilizzo di una cella per il ricircolo della soluzione salina attorno alla sezione ristretta del provino.

Risultati e discussione:

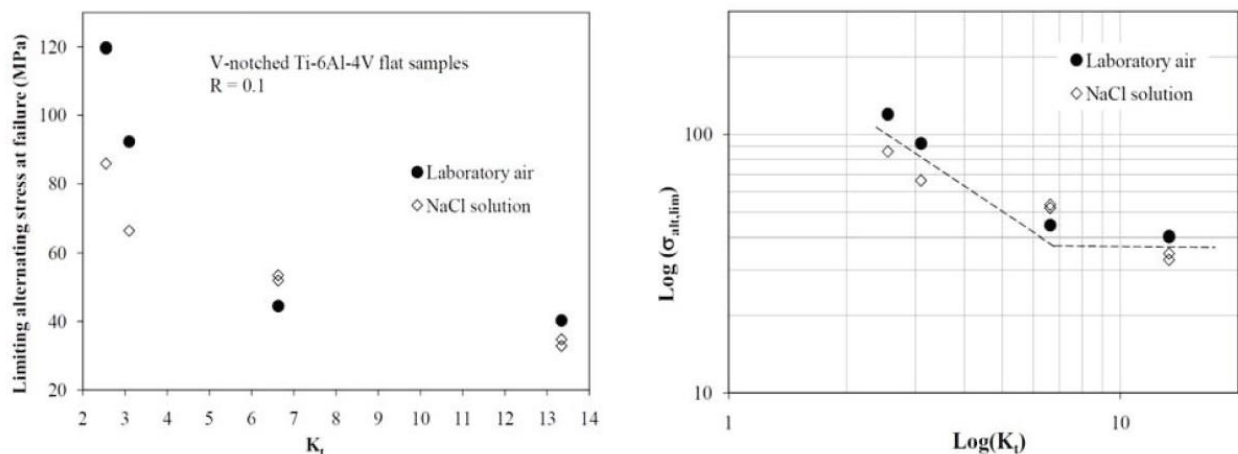
- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo solubilizzazione ed *overaging*) in direzione longitudinale:

Tensione di rottura	990 MPa
Tensione di snervamento	945 MPa
Modulo di Young	110 GPa

- Propagazione della cricca dopo l'innescò nei due ambienti analizzati, in termini di lunghezza della cricca in funzione del numero di cicli spesi per la sua propagazione (in aria e in ambiente salino):



- Maggior velocità di propagazione della cricca in ambiente salino rispetto all'aria, per tutti i valori di K_t considerati (effetto più pronunciato per bassi valori di K_t);
 - Maggior velocità di propagazione della cricca per bassi valori di K_t ;
- Tensione limite alternata in funzione del valore di K_t (in scala lineare e logaritmica) per una vita costante di $2 * 10^5$ cicli:



- Per gli intagli con valore di K_t minori di 6.63, la tensione limite alternata in ambiente salino è significativamente ridotta rispetto a quella ricavata in aria (fino al 28% in meno);
- Per gli intagli con valore di K_t pari a 6.63, l'ampiezza della tensione alternata limite in ambiente salino supera del 19% l'ampiezza della tensione alternata ricavata nel test condotto in aria;
- Per il successivo valore di K_t , la soluzione salina torna a penalizzare il comportamento a fatica; l'entità della riduzione della tensione limite alternata a $2 * 10^5$ cicli in questo caso è tuttavia minore rispetto a quella riscontrata per bassi valori di K_t ;
- Si osserva che la tensione limite alternata tende asintoticamente ad un limite inferiore al crescere di K_t : viene assunto dagli autori un valore K_t^* di soglia, compreso tra 6 e 7, oltre il quale il comportamento a fatica dell'intaglio non è più controllato dal K_t .

A3.2.2. Fatigue behaviour of notched Ti-6Al-4V in inert environment [15]

Tema trattato: confronto del limite di fatica di componenti intagliati in Ti-6Al-4V in ambiente inerte (paraffina) per diversi valori di K_t . Confronto con i dati precedentemente ottenuti per test condotti in aria e in soluzione salina.

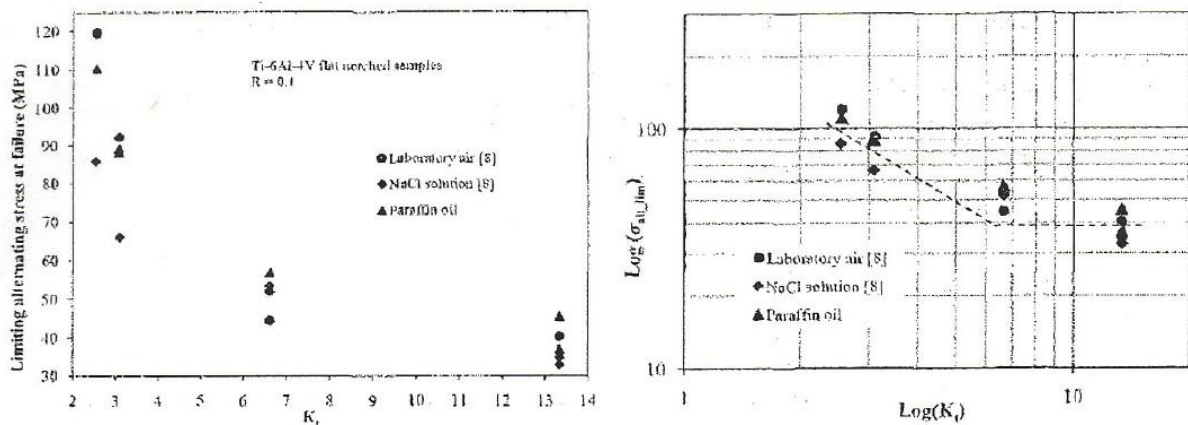
Per la descrizione dei materiali, delle lavorazioni, della geometria dei provini, dei parametri sperimentali e della procedura utilizzata si rimanda all'articolo precedente.

Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo solubilizzazione ed *overaging*) in direzione longitudinale:

Tensione di rottura	990 MPa
Tensione di snervamento	945 MPa
Modulo di Young	110 GPa

- Tensione limite alternata in funzione del valore di K_t (in scala lineare e logaritmica) per una vita costante di $2 \cdot 10^5$ cicli:



Come si può notare, in entrambi i diagrammi i risultati ottenuti in ambiente inerte vengono confrontati con i risultati ottenuti per i provini testati in aria e in soluzione salina del precedente articolo.

- o Per gli intagli con bassi ed elevati valori di K_t , la tensione limite alternata in aria e in ambiente inerte è maggiore di quella ottenuta in ambiente salino;

- Per gli intagli con valore di K_t pari a 6.63, la tensione limite alternata in aria crolla al di sotto di quella ottenuta per l'ambiente salino (-19%), mentre la tensione limite alternata ottenuta per l'ambiente inerte resta superiore a questa;
- La differenza tra la tensione limite alternata ottenuta nei diversi ambienti è più marcata per bassi valori di K_t ;
- Per bassi valori di K_t , il comportamento del provino in aria è leggermente migliore del comportamento del provino in ambiente inerte (si ipotizza vi sia un contributo dall'ossidazione del provino);
- Si osserva che la tensione limite alternata tende asintoticamente ad un limite inferiore al crescere di K_t : viene assunto dagli autori un valore K_t^* di soglia, compreso tra 6 e 7, oltre il quale il comportamento a fatica dell'intaglio non è più controllato dal K_t .

A3.2.3. Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V [16]

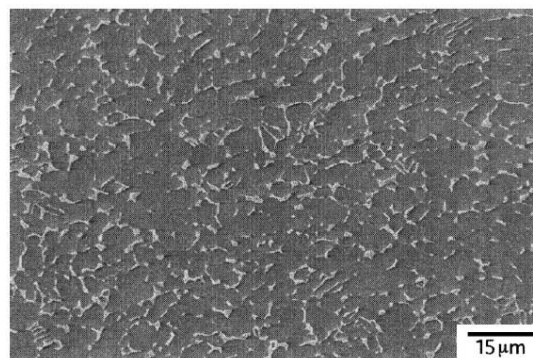
Tema trattato: determinazione degli effetti della frequenza di applicazione del carico nel comportamento a fatica ad elevato numero di cicli (HCF) della lega Ti-6Al-4V al variare del rapporto di ciclo R .

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (barre forgiate da 45 mm di diametro).

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Riscaldamento in vuoto a 705°C (2 h);
- Raffreddamento in Argon fino a 149°C ;
- Ricottura in vuoto a 549°C (2 h);
- Raffreddamento in Argon fino a 149°C ;
- Lavorazione di molatura con tecnica *low-stress-grind*;
- Lucidatura superficiale (finitura superficiale a $15\ \mu\text{m}$)

Microstruttura del provino: equiassica con 90% fase α e 10 % fase β .



Geometria dei provini utilizzati: provini *dogbone* con sezione ristretta di lunghezza 15.2 mm e di diametro 3.8 mm.

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale, diversi valori di rapporto di ciclo ($R = 0.1$, $R = 0.5$, $R = 0.8$);
- Tre frequenze di test: $f = 70\ \text{Hz}$, $f = 400\ \text{Hz}$ e $f = 1800\ \text{Hz}$.

Procedura sperimentale:

- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per il test di fatica.

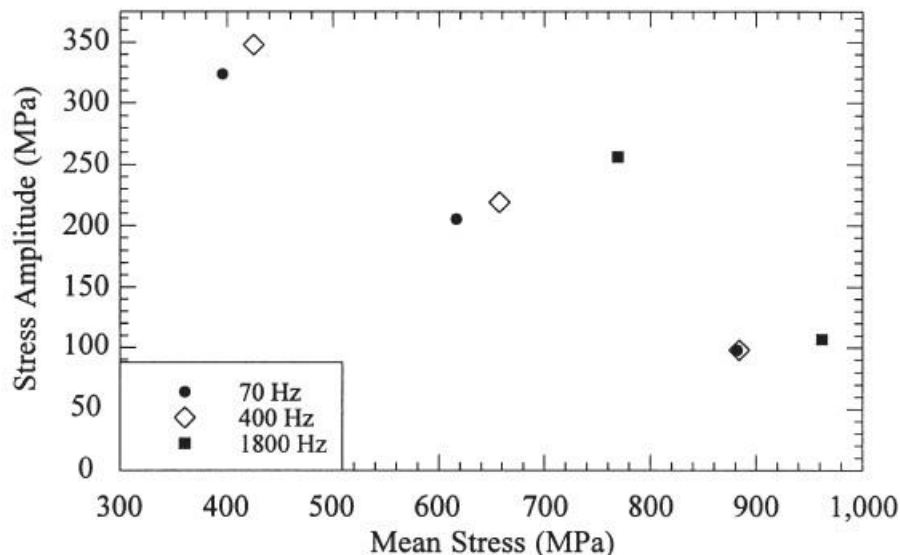
- Ad intervalli prestabiliti, acquisizione di dati in forma di tensione media di ciclo, numero di cicli e spostamento degli afferraggi del provino.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 10^7$ cicli.
- Prove effettuate per le seguenti combinazioni rapporto di ciclo – frequenza:
 - $R = 0.1 / (f = 70 \text{ Hz}; f = 400 \text{ Hz});$
 - $R = 0.5 / (f = 70 \text{ Hz}; f = 400 \text{ Hz}; f = 1800 \text{ Hz});$
 - $R = 0.8 / (f = 70 \text{ Hz}; f = 400 \text{ Hz}; f = 1800 \text{ Hz});$
- Per ogni condizione sperimentale, sono state eseguite tre prove.

Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici) in direzione longitudinale:

Tensione di rottura	1030 MPa
Tensione di snervamento	980 MPa

- Diagramma di High riportante il valor medio e la tensione limite alternata a 10^6 cicli ottenuti per ciascuna condizione sperimentale:



- Dispersione minore del 5 % per i risultati ottenuti per le frequenze di 70 e 400 Hz;
- Dispersione apprezzabile per i risultati ottenuti alla frequenza di 1800 Hz;
- Presenza di una significativa influenza della frequenza sulla tensione limite alternata a 10^7 cicli, specialmente per bassi valori di R : al crescere della frequenza, aumenta la tensione limite alternata che porta a cedimento dopo 10^7 cicli.

- Possibili spiegazioni dell'influenza della frequenza di applicazione del carico sulla tensione limite alternata fornite dagli autori:

- Dipendenza della velocità di deformazione dallo scorrimento plastico

Per la lega Ti-6Al-4V (come per altre leghe del titanio) si è notato sperimentalmente che per un certo valore della deformazione, la tensione di scorrimento aumenta al crescere della velocità di deformazione, e che tale dipendenza aumenta per elevate velocità di deformazione.

La prima possibile spiegazione per tale fenomeno è il fatto che all'aumentare della velocità di deformazione le dislocazioni hanno un minor tempo per superare ostacoli via attivazione termica, pertanto si riduce la deformazione plastica accumulata. Questo effetto è tanto più presente a bassi valori di R , in cui aumenta l'effetto dinamico a causa dell'aumento dell'ampiezza della tensione applicata. Poiché la fatica è un fenomeno indotto da plasticizzazioni locali, tale spiegazione è compatibile con un aumento di resistenza a fatica alle alte frequenze, con un effetto più marcato per bassi valori di R .

Una seconda spiegazione possibile riguarda la dipendenza della velocità della deformazione dalla struttura cristallina del materiale.

- Fattori ambientali

E' stato dimostrato sperimentalmente che la resistenza a fatica della lega Ti-6Al-4V in aria è molto inferiore a quella in vuoto, probabilmente a causa di un infragilimento dovuto alla diffusione di idrogeno nel titanio. Pertanto il maggior tempo richiesto per le prove a bassa frequenza potrebbe aver inciso negativamente a causa del deterioramento delle proprietà di resistenza a fatica del provino stesso. Gli autori non ritengono tale aspetto rilevante in questo caso.

- Effetto della temperatura

Un incremento della frequenza di prova dovrebbe tradursi in un aumento della temperatura del provino, pertanto in una riduzione della resistenza a fatica del provino stesso. In questo caso non è evidentemente osservabile tale comportamento: si ritiene che l'incremento di temperatura sia

ininfluente, ovvero che l'energia dissipata per ciclo di carico sia di modesta entità (plausibile parlando di fatica ad elevato numero di cicli).

- Creep

Ad elevati rapporti di ciclo, parte del ciclo può essere svolto ad elevate tensioni, vicine alla tensione di snervamento del materiale: per tali tensioni, la lega Ti-6Al-4V risente del creep anche a temperatura ambiente. Inoltre, in alcuni materiali è stato dimostrato che la velocità di scorrimento viscoso durante l'applicazione di carichi ciclici supera quella statica. All'aumentare della frequenza, ogni blocco di carico ha una durata minore nel tempo: pertanto, si attende una minor influenza degli effetti del creep. In questo studio, tuttavia, al crescere del rapporto di ciclo la dipendenza dalla frequenza è presente in maniera meno marcata: ciò è in contrasto con tale spiegazione.

- Rapporto di ciclo

Utilizzando la tecnica dello *step loading*, si ritiene che non siano presenti fenomeni di allenamento e danneggiamento per il materiale.

Il fenomeno dell'allenamento è ritenuto trascurabile per le leghe di titanio dopo che alcuni lavori hanno pubblicato dei confronti di tensioni limite alternate ottenute per un certo numero di cicli con metodi tradizionali di costruzione della curva S-N e con la tecnica dello *step loading*.

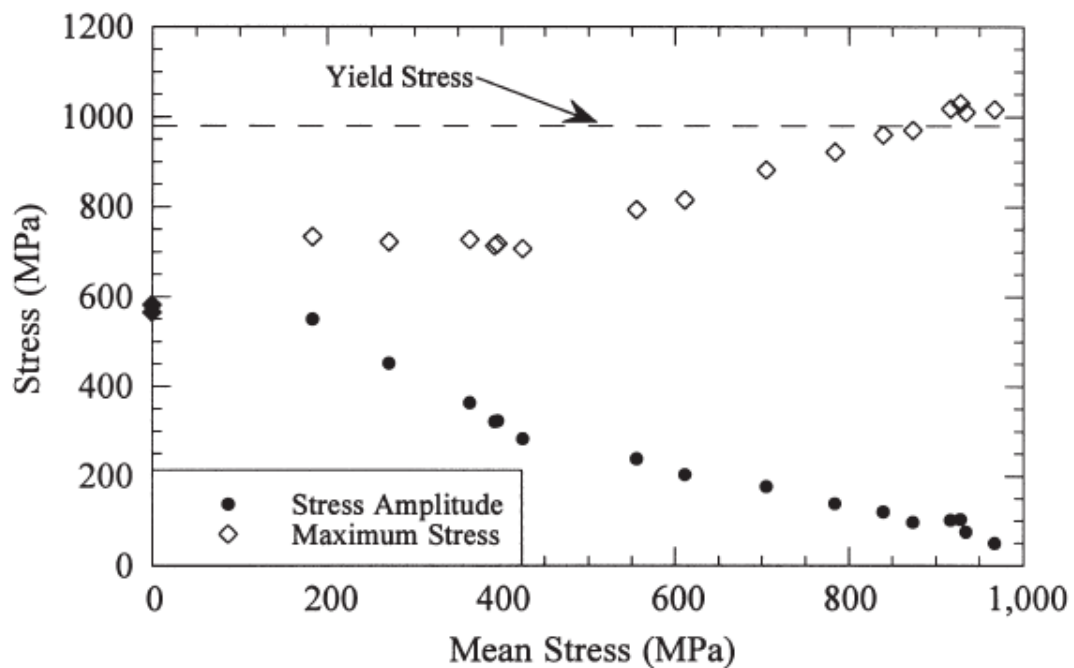
Per quanto riguarda l'assenza di danneggiamento ad opera dei blocchi di carico precedentemente eseguiti, si ritiene che tale ipotesi sia più aderente alla realtà per bassi rapporti di ciclo. Per elevati rapporti di ciclo, infatti, le misure dell'elongazione del provino (inteso come distanza degli afferraggi dello stesso) rivelano un accumulo di deformazione plastica per tensioni ben al di sotto della tensione limite calcolata successivamente. Una spiegazione di tale fenomeno può essere data dal *ratcheting* o deformazione progressiva.

- Effetto della tensione media

Mentre per rapporti di ciclo inferiori a 0.8 non si nota un accumulo di deformazione progressiva durante la prova, come enunciato al punto precedente nel caso di $R = 0.8$ si registra un accumulo di deformazione

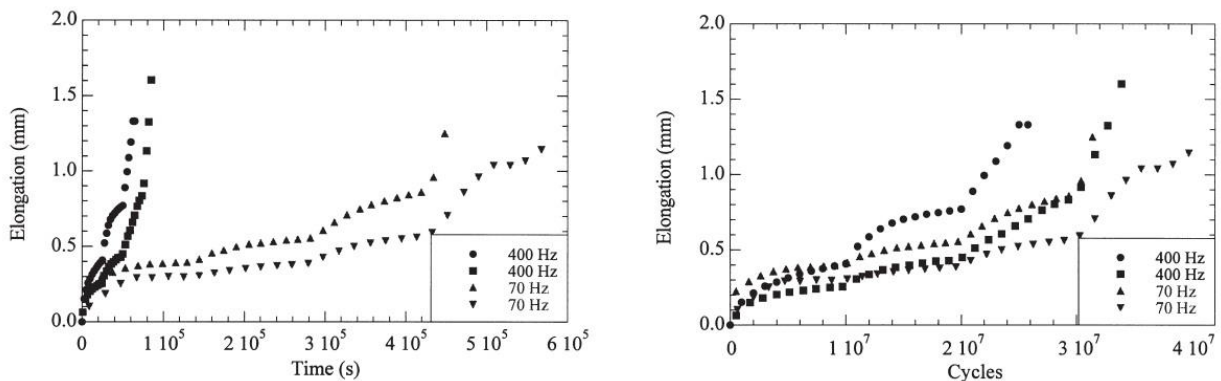
plastica in funzione del numero di cicli (e non del tempo) durante il test. L'analisi eseguita sulle superfici di frattura dei provini testati con rapporto di ciclo pari a 0.5 e 0.8 evidenziano segni evidenti di propagazione di cricche per il primo valore di R , mentre per il secondo si può notare una superficie di frattura tipicamente duttile, con la nucleazione e crescita di cavità. Si pensa, in virtù di lavori precedenti, che il passaggio da un comportamento all'altro avvenga per valori di rapporto ciclo di circa 0.75. Al punto successivo verrà approfondita l'influenza della tensione media.

- Diagramma di Nicholas-Haigh, ovvero tensione limite massima e tensione limite alternata in funzione della tensione media per $N_f = 10^7$ cicli a 70 Hz (dati da pubblicazioni precedenti):



- Per elevati valori di R , aumenta la dispersione dei risultati;
- Per elevati valori di R , la tensione limite massima si avvicina alla tensione di snervamento, fino a superarla: per tensioni maggiori di 0.9 volte la tensione di snervamento, come in questo caso, sono presenti fenomeni di creep e *ratcheting*, che spiegherebbero la deformazione accumulata per $R = 0.8$;

- Elongazione del provino in funzione del tempo e del numero di cicli (per due provini):



Tali diagrammi possono essere utili per comprendere quale meccanismo (*ratcheting* o *creep*) svolge un ruolo predominante nell'accumulo di deformazione plastica per $R = 0.8$.

- o L'elongazione del provino appare essere più una funzione del numero di cicli che una funzione del tempo;
 - o Pertanto il principale meccanismo responsabile dell'accumulo di deformazione è il *ratcheting*, combinato alla presenza del *creep*, di secondaria importanza;
 - o La forma delle curve nel diagramma elongazione/numero di cicli ricorda quello delle curve di creep: fase iniziale più ripida seguita da una fase intermedia stazionaria con una velocità di deformazione minore.
- Altre osservazioni:
 - o Per elevati rapporti di ciclo, l'elongazione a rottura del provino calcolata come se tutta la deformazione fosse relativa alla sezione ristretta è in accordo con l'elongazione a rottura misurata con test di creep statici (elongazione a rottura leggermente superiore al 10%). Pertanto, la vita a fatica ad elevato numero di cicli per elevati rapporti di ciclo potrebbe ben prestarsi ad essere stimata da tecniche di previsione basate sulla deformazione a rottura, per evitare rotture nella forma di nucleazione e crescita di cavità.

A3.2.4. Notch size effects in HCF behaviour of Ti-6Al-4V [17]

Tema trattato: effetto di intaglio per la fatica ad elevato numero di cicli (HCF) in provini cilindrici in lega Ti-6Al-4V con tre dimensioni di intaglio aventi valore di K_t simile. Confronto tra i risultati ottenuti con provini lavorati da barre e da piastre forgiate.

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (barre forgiate da 45 mm di diametro e piastre forgiate).

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Provini dalle barre laminate a caldo:
 - Riscaldamento in vuoto a 705°C (2 h);
 - Raffreddamento in Argon fino a 149°C;
 - Ricottura in vuoto a 549°C (2 h);
 - Raffreddamento in Argon fino a 149°C;
 - Lavorazione di molatura con tecnica *low stress grind*;
 - Lucidatura a mano.

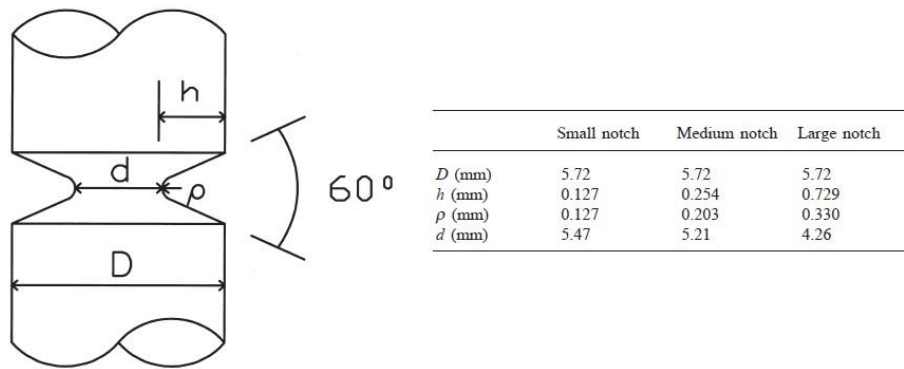
- Provini dalle piastre forgiate:
 - Preriscaldamento a 938°C (30 min);
 - Solubilizzazione a 932°C (75 min);
 - Raffreddamento in aria forzata;
 - Ricottura in vuoto a 704°C (2 h);
 - Raffreddamento in Argon forzato;
 - Lavorazione alle macchine utensili per ottenere i provini (*low stress grind technique*);
 - Lucidatura a mano;

Microstruttura del provino:

- equiassica con 90% fase α e 10 % fase β per i provini derivati dalle barre;
- struttura aciculare di Widmanstätten per i provini derivati dalle piastre.

Geometria dei provini utilizzati: provini cilindrici con intaglio a V circonferenziale con angolo di apertura pari a 60°.

La geometria e le dimensioni delle sezioni ristrette dei provini sono riportate qui di seguito:



- Tutti i provini sono lunghi 130 mm.
- I provini con intaglio piccolo e medio hanno valore di K_t di circa 2.8, mentre i provini con dimensioni dell'intaglio maggiori hanno un valore di K_t vicino a 2.7. Viene utilizzato un valore medio di K_t pari a 2.78.

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale, diversi valori di rapporto di ciclo ($R = 0.1, R = 0.5, R = 0.8$);
- Frequenza di applicazione del carico: $f = 50$ Hz.

Procedura sperimentale:

- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per il test di fatica.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 10^6$ cicli.
- Calcolo del coefficiente di riduzione della resistenza a fatica per $N^* = 10^6$ cicli:

$$K_f = \frac{\sigma_{alt,lim,provino\ liscio}}{\sigma_{alt,lim,provino\ intagliato}}$$

- Calcolo dell'indice di sensibilità all'intaglio:

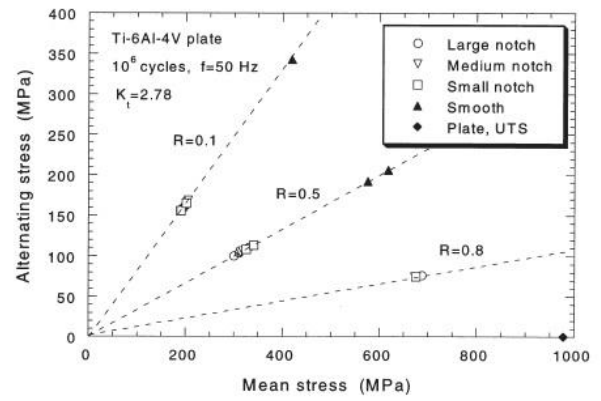
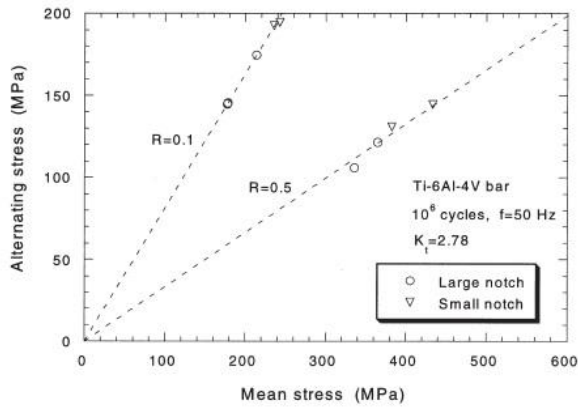
$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici) in direzione longitudinale:

	Bar	Plate
Yield stress (MPa)	990	930
Ultimate stress (MPa)	1035	978
Elastic modulus (GPa)	109	118

- Diagrammi di High per i provini ricavati dalle barre e dalle piastre e valori di K_f ottenuti:



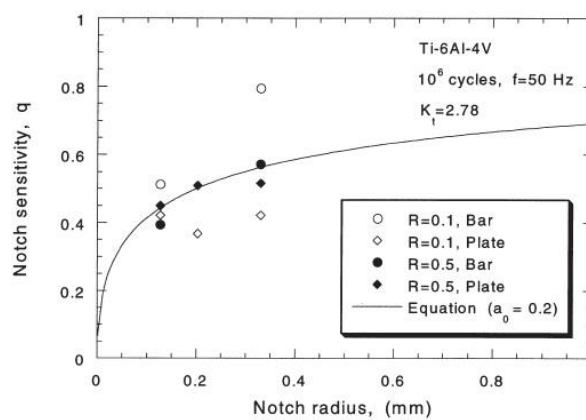
- Valori di K_f dei provini ricavati dalle barre forgiate:

Notch size	$K_f (R=0.1)$	$K_f (R=0.5)$
Large	2.35	1.93
Small	1.75	1.64

- Valori di K_f dei provini ricavati dalle piastre forgiate:

Notch size	$K_f (R=0.1)$	$K_f (R=0.5)$	$K_f (R=0.8)$
Large	2.16	1.80	1.24
Medium	2.05	1.83	1.27
Small	2.20	1.74	1.26

- Appare esserci un effetto d'intaglio per i provini ricavati dalle barre: per l'intaglio di dimensioni ridotte si è ricavato infatti un minor valore per K_f ;
 - Non è tuttavia evidente un effetto di intaglio per i provini ricavati dalla piastra forgiata;
 - Si può riscontrare che il valore di K_f diminuisce all'aumentare del rapporto di ciclo R .
- Indice di sensibilità all'intaglio ricavato per i diversi provini in funzione del raggio di fondo intaglio:



- La linea continua nel diagramma rappresenta il valore di q calcolato con l'espressione di Neuber per a_0 pari a 0.2 mm:

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a_0}{\rho}}}$$

- Si può notare come l'equazione rappresentata non interpoli in maniera soddisfacente i risultati sperimentali ottenuti.

- Altre osservazioni

- Nel caso dei componenti intagliati oggetto dello studio, per $R = 0.8$ non si è riscontrata una frattura duttile come in lavori precedenti riguardanti provini lisci con lo stesso rapporto di ciclo, bensì tracce dell'innesco e propagazione di cricche per fatica. Si pensa tale variazione nel comportamento del materiale sia dovuta al fatto che per il componente intagliato si ha solo una piccola zona vicina all'apice dell'intaglio ad elevate tensioni, mentre per il provino liscio l'intera sezione ristretta è sottoposta ad elevate tensioni che portano all'insorgere dei fenomeni precedentemente descritti.

A3.2.5. Influence of stress state on high cycle fatigue of notched Ti-6Al-4V specimens [18]

Tema trattato: effetto di intaglio per la fatica ad elevato numero di cicli (HCF) in provini *dogbone* in lega Ti-6Al-4V con due dimensioni di intaglio aventi lo stesso valore del fattore teorico di concentrazione delle tensioni $K_t = 2.72$. Confronto con precedenti risultati ottenuti per provini cilindrici.

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (piastra forgiata da una barra).

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Preriscaldamento a 938°C (30 min);
- Solubilizzazione a 932°C (75 min);
- Raffreddamento in aria forzata;
- Ricottura in vuoto a 704°C (2 h);
- Raffreddamento in Argon forzato;
- Lavorazione alle macchine utensili per ottenere i provini (*low stress grind technique*);
- Ricottura di distensione su alcuni provini.

Microstruttura del provino: struttura aciculare di Widmanstätten.

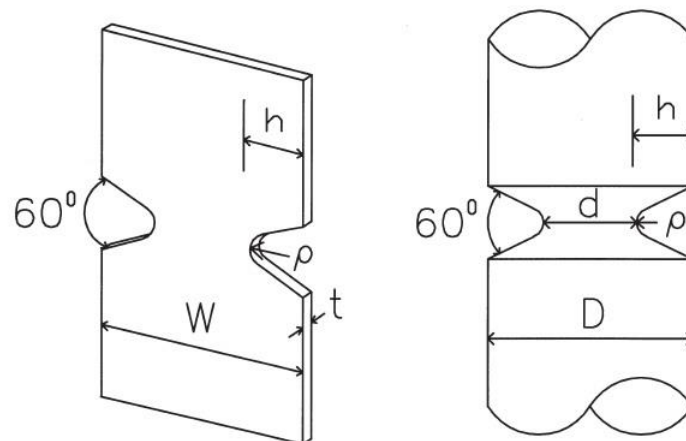
Geometria dei provini utilizzati: provini *dogbone* con intagli a V laterali con angolo di apertura pari a 60°. Due diverse grandezze per gli intagli dei provini:

- Provino FS (*flat dogbone, small notch*);
- Provino FL (*flat dogbone, large notch*).

Risultati successivamente confrontati con quelli ottenuti per provini cilindrici in uno studio precedente, a cui ci si riferirà con le seguenti sigle:

- Provino CS (*cylindrical, small notch*);
- Provino CM (*cylindrical, medium notch*);
- Provino CL (*cylindrical, large notch*).

La geometria e le dimensioni delle sezioni ristrette dei provini sono riportate qui di seguito:



Notch size	D (mm)	h (mm)	ρ (mm)	d (mm)	W (mm)	t (mm)
Small notch, cylindrical	5.72	0.127	0.127	5.47		
Medium notch, cylindrical	5.72	0.254	0.203	5.21		
Large notch, cylindrical	5.72	0.729	0.330	4.26		
Small notch, flat		0.131	0.152		5.51	1.52
Large notch, flat		0.635	0.432		5.51	1.52

- Tutti i provini sono lunghi 130 mm.
- Il fattore teorico di concentrazione delle tensioni per i provini FS e FL è lo stesso ($K_t = 2.72$) ed è stato valutato utilizzando risultati del Peterson.
- Il fattore teorico di concentrazione delle tensioni per i provini vale 2.8 per i provini CS e CM, mentre per il provino CL vale 2.7. E' stato utilizzato un valore medio di K_t pari a 2.78.

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale, diversi valori di rapporto di ciclo ($R = 0.1, R = 0.5, R = 0.8$);
- Frequenza di applicazione del carico: $f = 50 \text{ Hz}$.

Procedura sperimentale:

- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per il test di fatica.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 10^6$ cicli.
- Calcolo del coefficiente di riduzione della resistenza a fatica per $N^* = 10^6$ cicli:

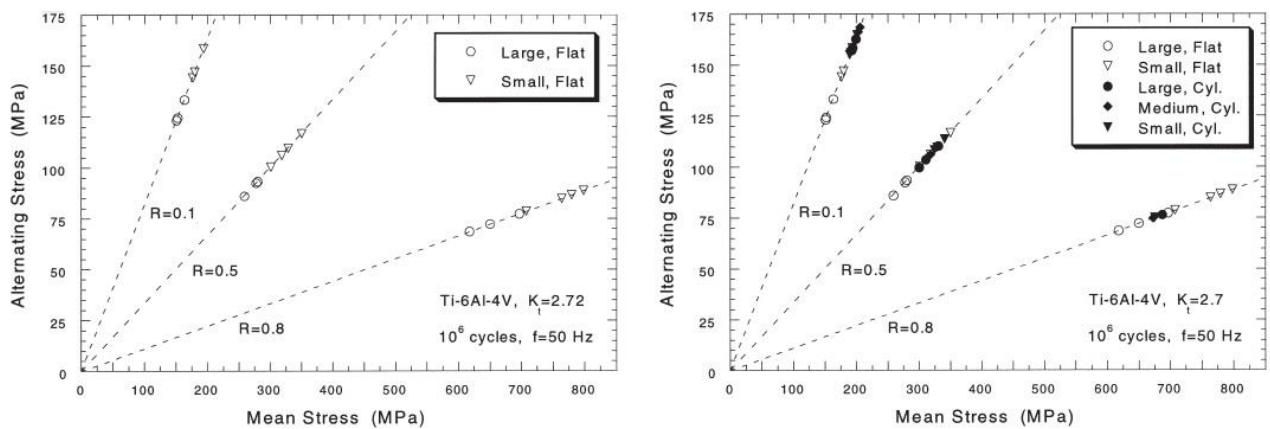
$$K_f = \frac{\sigma_{alt,lim,provino\ liscio}}{\sigma_{alt,lim,provino\ intagliato}}$$

Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici) in direzione longitudinale:

Tensione di rottura	978 MPa
Tensione di snervamento	930 MPa
Modulo di Young	118 GPa

- Diagramma di High per i diversi provini utilizzati:

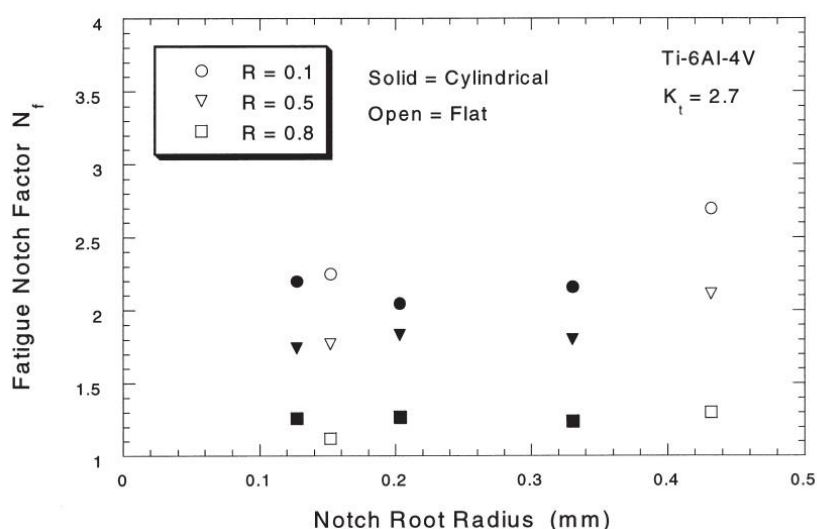


Il primo diagramma riporta i soli risultati per i provini *dogbone*, mentre nel secondo tali risultati sono confrontati con quelli ottenuti per i provini cilindrici.

- Appare esserci un effetto d'intaglio per i provini *dogbone*, in quanto con un maggior valore del raggio di fondo intaglio (FL) la tensione limite alternata per una vita di 10^6 cicli risulta minore rispetto a quella ottenuta per il raggio di fondo intaglio più piccolo (FS);
- Non è tuttavia evidente un effetto di intaglio per i provini cilindrici, per i quali la tensione limite alternata per una vita di 10^6 cicli risulta essere molto simile per tutte le dimensioni dell'intaglio;

- Coefficiente di riduzione della resistenza a fatica per una vita limite di 10^6 cicli per i diversi provini al variare del rapporto di ciclo R :

Notch size	$K_f (R=0.1)$	$K_f (R=0.5)$	$K_f (R=0.8)$
Small, cylindrical	2.20	1.79	1.26
Medium, cylindrical	2.05	1.89	1.27
Large, cylindrical	2.16	1.86	1.24
Small, flat	2.25	1.84	1.12
Large, flat	2.70	2.19	1.30



- Appare esserci, per i provini *dogbone*, un effetto di intaglio, in quanto si può osservare un aumento del coefficiente di riduzione della vita a fatica K_f all'aumentare del raggio del fondo intaglio ρ ;
 - Tale effetto appare essere più marcato per i provini testati a bassi valori del rapporto di ciclo R ;
 - Non appare esserci alcun evidente effetto di intaglio per i provini cilindrici.
- Stato di tensione all'apice dell'intaglio per i diversi provini

Una possibile spiegazione fornita dagli autori riguardo la contraddizione tra l'apparente esistenza di un effetto di intaglio per provini *dogbone* piatti e la mancanza di tale fenomeno per i provini cilindrici riguarda lo stato di tensione presente all'apice dell'intaglio.

Mentre il valore di K_f è ricavato sperimentalmente e tiene conto dello stato di tensione effettivamente presente sul provino, la soluzione del fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t può essere ricavata ipotizzando la presenza di una sollecitazione uniassiale o multiassiale agente sul provino. All'apice dell'intaglio, per ragioni di equilibrio, lo stato di tensione sarà biassiale per entrambi i provini *dogbone* e cilindrici, in quanto solo due componenti di tensione risultano diverse da zero. Per misurare l'entità di tale stato di tensione multiassiale, si può effettuare il calcolo della tensione equivalente di von Mises:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

La tensione equivalente all'apice dell'intaglio nel caso di stato di deformazione piana può essere espressa come:

$$\sigma_{eff} = \sigma_x \sqrt{\nu^2 - \nu + 1}$$

Dove σ_x è la tensione assiale nella direzione del carico. Per un modulo di Poisson ν pari a 0.34 (Ti-6Al-4V) si ottiene $\sigma_{eff} = 0.88 \sigma_x$.

In caso di tensione piana, è invece valida la relazione $\sigma_{eff} = \sigma_x$.

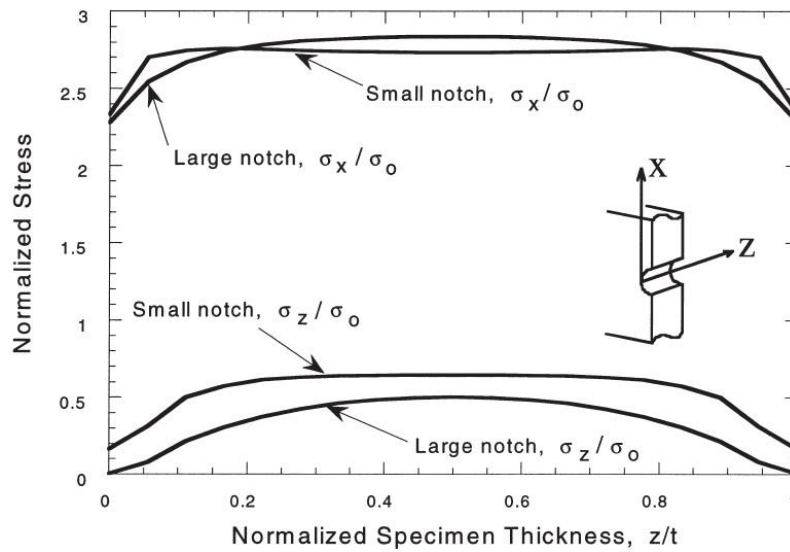
Si riportano nella seguente tabella i valori di $\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_x}$ calcolati per i provini.

Specimen type	σ_{eff}/σ_x
Small notch, cylindrical	0.883
Medium notch, cylindrical	0.884
Large notch, cylindrical	0.887
Small notch, flat (mid-thickness)	0.905
Large notch, flat (mid-thickness)	0.924

Si nota che per i provini cilindrici si può ragionevolmente considerare uno stato di deformazione piana all'apice dell'intaglio.

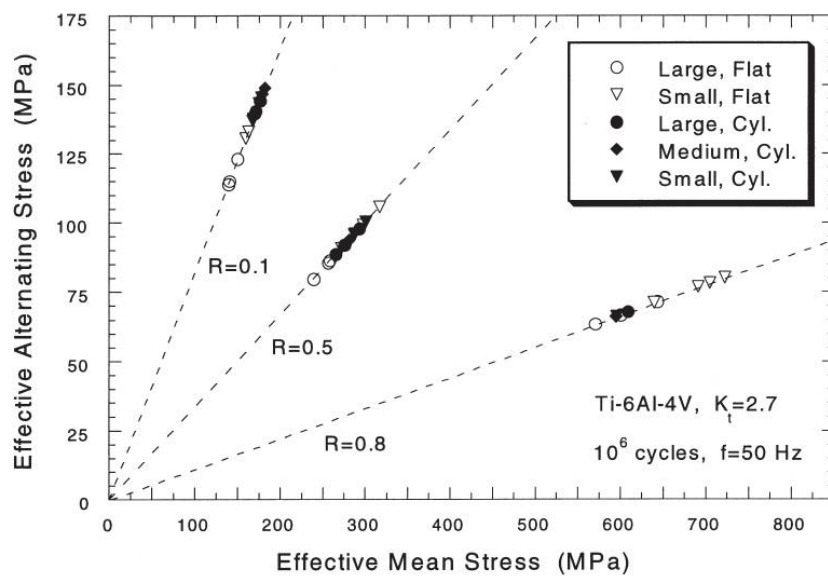
Per i provini *dogbone*, è stato preso come riferimento il valore della tensione nella metà dello spessore del provino: considerando uno stato di tensione biassiale, le tensioni variano infatti lungo lo spessore dello stesso, ma entrambe raggiungono il loro massimo nella metà dello spessore del provino (come riportato nei seguenti

diagrammi). Pertanto le cricche per fatica dovrebbero nucleare e propagare da questa zona (come d'altronde osservato sperimentalmente per i provini).



- Alla luce dei valori di σ_{eff}/σ_x riportati in precedenza, si può concludere che lo stato di tensione presente all'apice dell'intaglio nel caso di provini *dogbone* è una via di mezzo tra lo stato di deformazione piana e lo stato di tensione piana.

- Diagramma di Haigh utilizzando la tensione di von Mises:



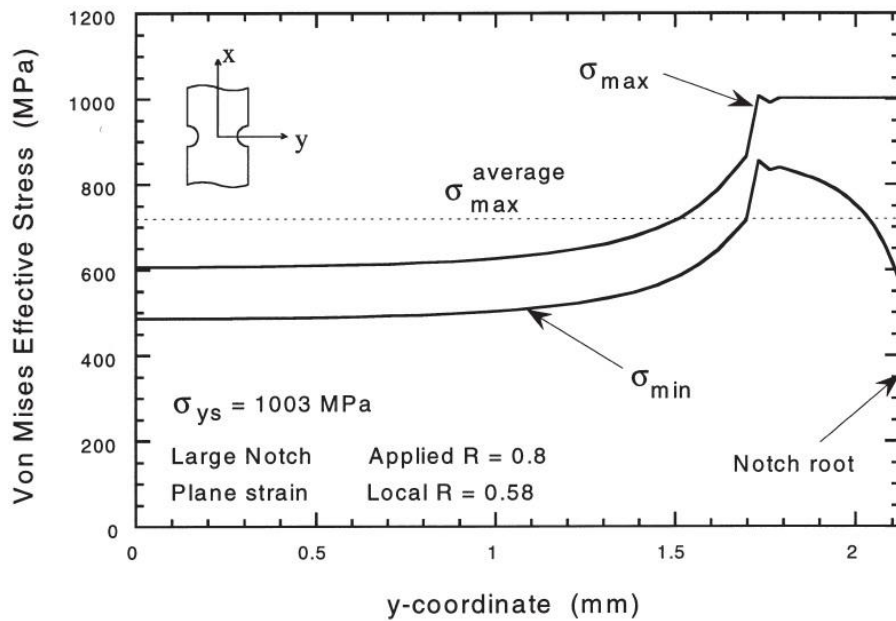
- L'utilizzo della tensione di von Mises nel diagramma di Haigh non si dimostra efficace per quantificare l'influenza della dimensione dell'intaglio;
 - Pertanto, non si ritiene che la tensione equivalente di von Mises sia il parametro più appropriato per rappresentare la fatica ad elevato numero di cicli.
- Ridistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio

Per elevati valori del rapporto di ciclo, la tensione massima del ciclo arriva a superare la tensione di snervamento. Nel caso di $R = 0.8$, la media della tensione massima nella sezione ristretta per il provino FL risulta essere 767 MPa . Ricordando che si ha $K_t = 2.72$, la tensione di picco elastico all'apice dell'intaglio risulterebbe essere 2086 MPa , che supera di molto la tensione di snervamento del materiale: pertanto si ha una ridistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio.

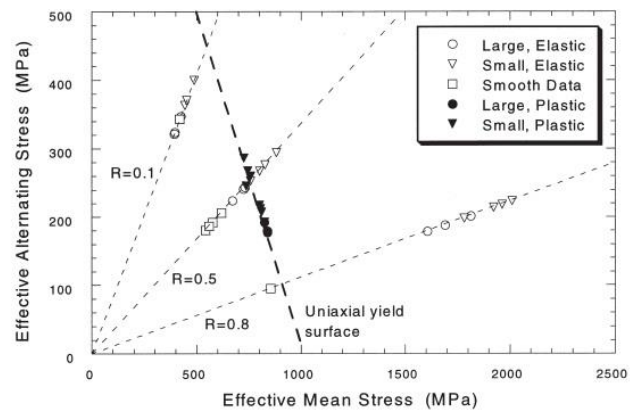
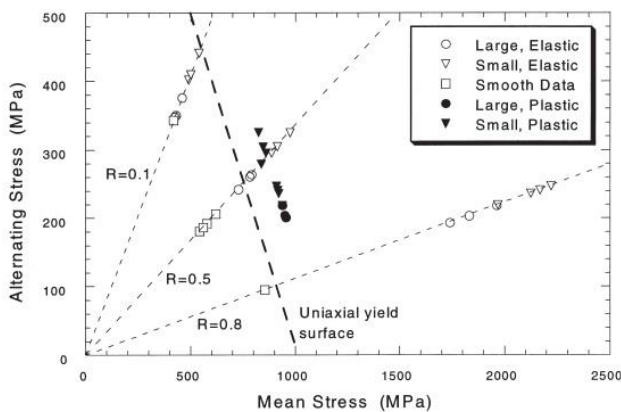
E' stata determinata la ridistribuzione delle tensioni attraverso metodo FEM con i seguenti parametri per il materiale, che tengono conto del fatto che a 50 Hz le proprietà del materiale differiscono da quelle ricavate con una prova quasi-statica:

Tensione di snervamento	1003 MPa
Modulo di Young	127 GPa

Tali dati sono stati ottenuti per una velocità di deformazione di 0.05 s^{-1} , mentre la velocità di deformazione a 50 Hz per $R = 0.8$ è pari a 0.3 s^{-1} . Il comportamento è stato ipotizzato elastico-perfettamente lineare. Numericamente, si sono ricavati i valori di $K_t = 2.82$ per il provino FL e $K_t = 2.78$ per il provino FS. Non sono stati modellati comportamenti del materiale dipendenti dal tempo: pertanto, dopo il primo ciclo in cui si ha ridistribuzione delle tensioni, gli altri cicli si ripetono uguali al precedente. Per rapporti di ciclo $R = 0.1$ e $R = 0.5$ non si ha superamento della tensione di snervamento all'apice dell'intaglio, mentre per $R = 0.8$ si ha ridistribuzione delle tensioni, come riportato nel seguente diagramma per il provino FL:



- Si può notare che il rapporto di ciclo all'apice dell'intaglio, calcolato con le sole componenti assiali per essere coerenti con il rapporto di ciclo imposto sperimentalmente, è diverso dal rapporto di ciclo applicato al provino.
 - In questo modo si possono calcolare la tensione media e l'ampiezza della tensione alternata presenti all'apice dell'intaglio di ciascun provino.
- Confronto tra le tensioni calcolate all'apice dell'intaglio in campo elastico e in campo elasto-plastico dopo redistribuzione delle tensioni per i provini *dogbone* in termini di tensione assiale alternata e tensione equivalente alternata:



- In questo caso si nota la maggior bontà dell'utilizzo delle tensioni equivalenti di von Mises: i punti corrispondenti alla situazione all'apice dell'intaglio dopo redistribuzione delle tensioni in termini di tensione equivalente alternata

giacciono infatti sulla retta tratteggiata, rappresentante il limite tra comportamento elastico e plastico del materiale;

- La determinazione del rapporto di ciclo locale e delle tensioni alternata, media ed equivalente di von Mises all'apice dell'intaglio possono pertanto essere parametri importanti per la previsione della resistenza a fatica di componenti intagliati in presenza di redistribuzione di tensione.

A3.2.6. Low-cycle fatigue/high-cycle fatigue interactions in notched Ti-6Al-4V [19]

Tema trattato: Influenza di cicli iniziali con carichi tipici della fatica oligociclica sulla resistenza a fatica ad elevato numero di cicli di provini in lega Ti-6Al-4V con due dimensioni di intaglio aventi lo stesso fattore teorico di concentrazione delle tensioni $K_t = 2.7$.

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (barre laminate a caldo da 45 mm di diametro e piastre forgiate).

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Provini dalle barre laminate a caldo:
 - Riscaldamento in vuoto a 705°C (2 h);
 - Raffreddamento in Argon fino a 149°C;
 - Ricottura in vuoto a 549°C (2 h);
 - Raffreddamento in Argon fino a 149°C;
 - Lavorazione di molatura con tecnica *low-stress-grind*;
 - Lucidatura a mano.

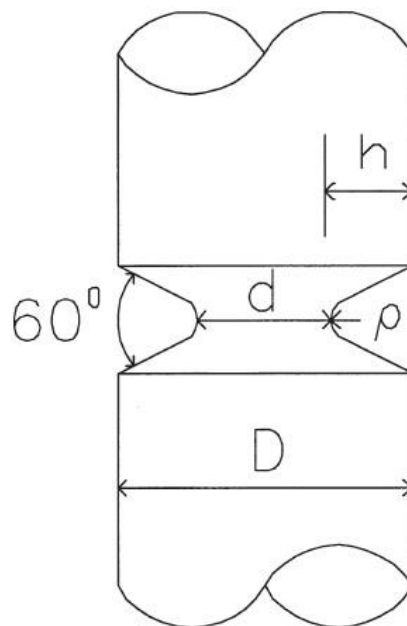
- Provini dalle piastre forgiate:
 - Preriscaldamento a 938°C (30 min);
 - Solubilizzazione a 932°C (75 min);
 - Raffreddamento in aria forzata;
 - Ricottura in vuoto a 704°C (2 h);
 - Raffreddamento in Argon forzato;
 - Lavorazione alle macchine utensili per ottenere i provini (*low stress grind technique*);
 - Lucidatura a mano;
 - La metà dei provini ha subito una ricottura di rilassamento in vuoto a 704°C (1 h).

Microstruttura del provino:

- equiassica con 90% fase α e 10 % fase β per i provini derivati dalle barre;
- struttura aciculare di Widmanstätten per i provini derivati dalle piastre.

Geometria dei provini utilizzati:

- Provini dalle barre laminate a caldo: sezione ristretta cilindrica senza intagli, diametro 6.35 mm .
- Provini dalle piastre forgiate: provini lisci (sezione ristretta cilindrica di diametro 5.72 mm) e provini intagliati con due dimensioni diverse dell'intaglio (a V con apertura 60°), per entrambe $K_t = 2.7$.



	D (mm)	b (mm)	ρ (mm)	d (mm)
Small notch	5.72	0.127	0.127	5.47
Large notch	5.72	0.729	0.330	4.26

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale con diversi valori di rapporto di ciclo ($R = -1$, $R = 0.1$, $R = 0.5$, $R = 0.8$);
- Due frequenze di test: $f = 50\text{ Hz}$ e $f = 70\text{ Hz}$;
- Prove combinate con carichi tipici della LCF e dell'HCF, descritte nella procedura sperimentale.

Procedura sperimentale:

- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per il test di fatica.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 10^6$ (o 10^7) cicli.

- Prove effettuate per tre tipologie di provini:
 - Provini lisci da barre laminate a caldo;
 - Provini lisci da piastra forgiata;
 - Provini intagliati da piastra forgiata.

- Tipologie di prova (combinazioni carichi LCF/HCF):
 - Provini lisci da barre laminate a caldo:
Soggetti a carico LCF per il 10% della vita a termine di 10^4 cicli o per il 25% di 10^5 cicli, a rapporti di ciclo $R = 0.1$ o $R = -1$. Successiva applicazione del carico HCF a 70 Hz e per vari valori di R per determinare la tensione limite a 10^7 cicli.

 - Provini lisci da piastre laminate a caldo:
Soggetti a carico LCF per un numero di cicli compreso tra il 10% e il 75% della vita a fatica di 10^4 cicli, a rapporto di ciclo $R = -1$. Successiva applicazione del carico HCF a 70 Hz e per $R = 0.5$.

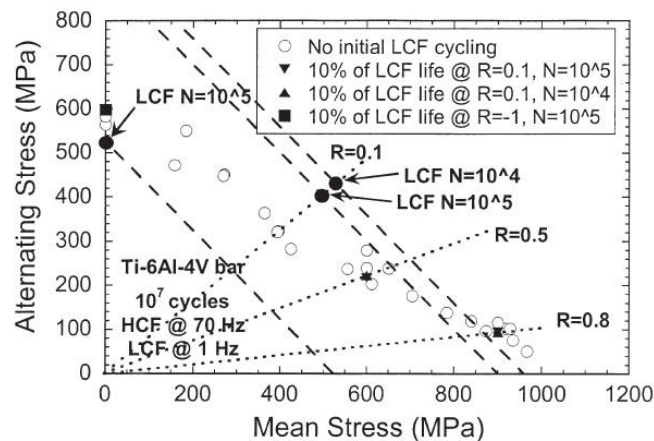
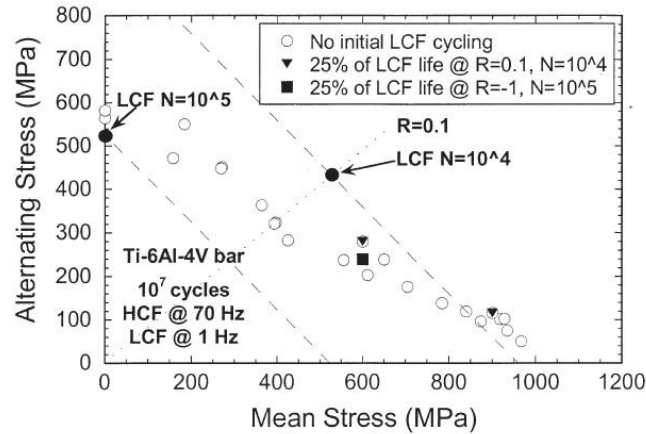
 - Provini intagliati:
Stima della resistenza a fatica a 10^4 cicli a frequenza $f = 1$ Hz e rapporto di ciclo $R = 0.1$. Carico LCF così calcolato applicato per una durata tra i 10 e i 2500 cicli. Valutazione della tensione limite di fatica HCF a 10^6 cicli usando la tecnica *step loading* con frequenza di ciclo $f = 50$ Hz e rapporti di ciclo $R = 0.1$ o $R = 0.8$.

Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici):

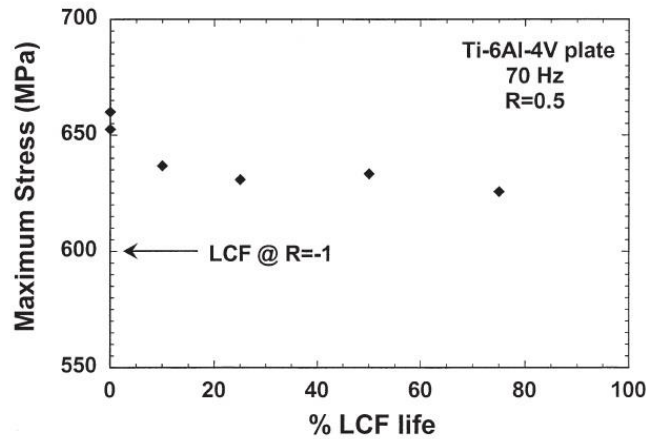
	Round bar	Forged plate
Yield strength (MPa)	990	930
Ultimate tensile strength (MPa)	1035	978
Elastic modulus (GPa)	109	118

- Provini lisci da barre laminate a caldo. Diagrammi di Haigh per una vita a termine di 10^7 cicli con il 10% e il 25% di cicli LCF:



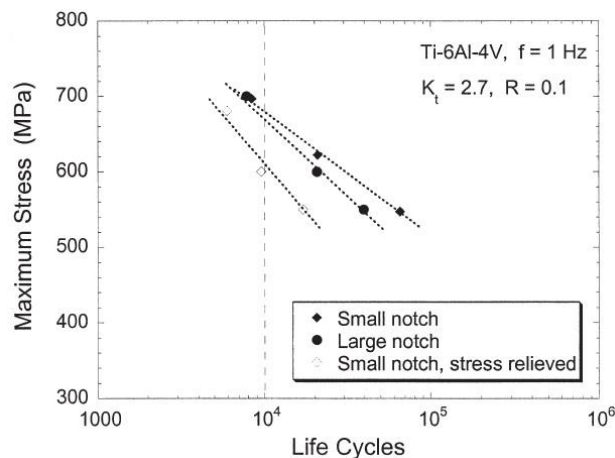
- I cerchi pieni, non riportati in legenda, rappresentano le condizioni di tensione in cui sono stati svolti i cicli di carico LCF;
- Le linee tratteggiate grosse rappresentano la condizione di tensione massima di ciclo costante;
- Per entrambe le figure, i punti relativi a combinazioni di cicli LCF/HCF non si discostano sensibilmente dai punti ricavati per la sola fatica HCF, pertanto non appare esserci un evidente fenomeno di danneggiamento nel materiale;
- Per il diagramma relativo al 10% di cicli a termine LCF, si può osservare per un rapporto di ciclo $R = -1$ che le tensioni (alternata e massima) risultano maggiori per la fatica HCF a 10^7 cicli rispetto alla fatica LCF a 10^5 cicli. Ciò può essere spiegato dalla sensibilità del materiale alla frequenza di prova poiché mentre la tensione alternata limite per le prove HCF viene ricavata con test alla frequenza di 70 Hz , le prove LCF vengono eseguite con frequenza di test di 1 Hz : pertanto la tensione limite nel caso HCF risulta incrementata (tale spiegazione è in accordo con osservazioni riportate in articoli precedenti).

- Provini lisci da piastre forgiate. Tensione massima per una vita di 10^7 cicli in funzione del numero di cicli LCF inizialmente eseguiti (espressi come percentuale della vita a termine LCF di 10^4 cicli).



Come riportato nel diagramma, i cicli LCF sono stati eseguiti con una tensione massima di 600 MPa e un rapporto di ciclo $R = -1$.

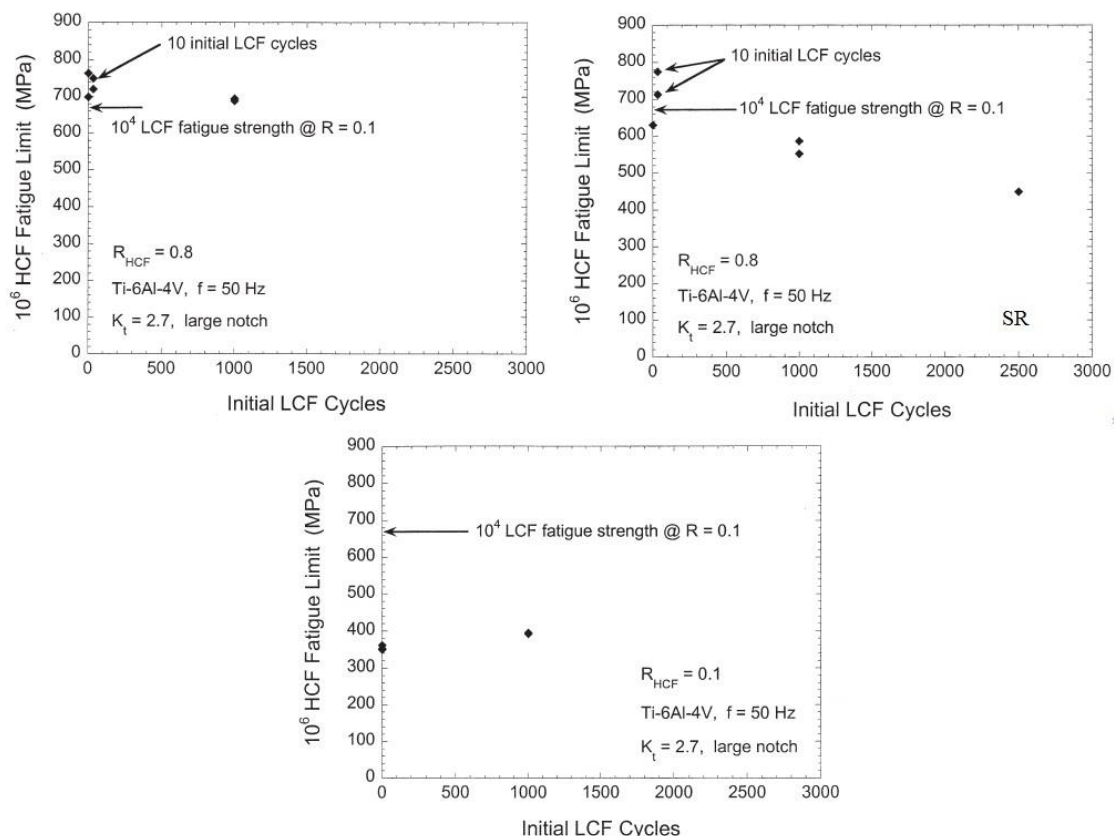
- o Si verifica un leggero calo della tensione massima per una vita a termine di 10^7 cicli all'aumentare del numero di cicli LCF eseguiti inizialmente sul provino, ma tale variazione, minore del 3%, risulta compresa nella banda di dispersione dei risultati.
 - o Si può quindi concludere che per componenti soggetti a fatica HCF, un iniziale numero di cicli condotti ad ampiezza LCF fino al 75% della vita a termine di 10^4 cicli con rapporto di ciclo $R = -1$ non ha effetti significativi sulla resistenza a seguenti cicli HCF.
- Provini intagliati. Resistenza a fatica per 10^4 cicli:



Large notch (MPa)	672
Small notch (MPa)	680
Small notch, stress relieved (MPa)	609

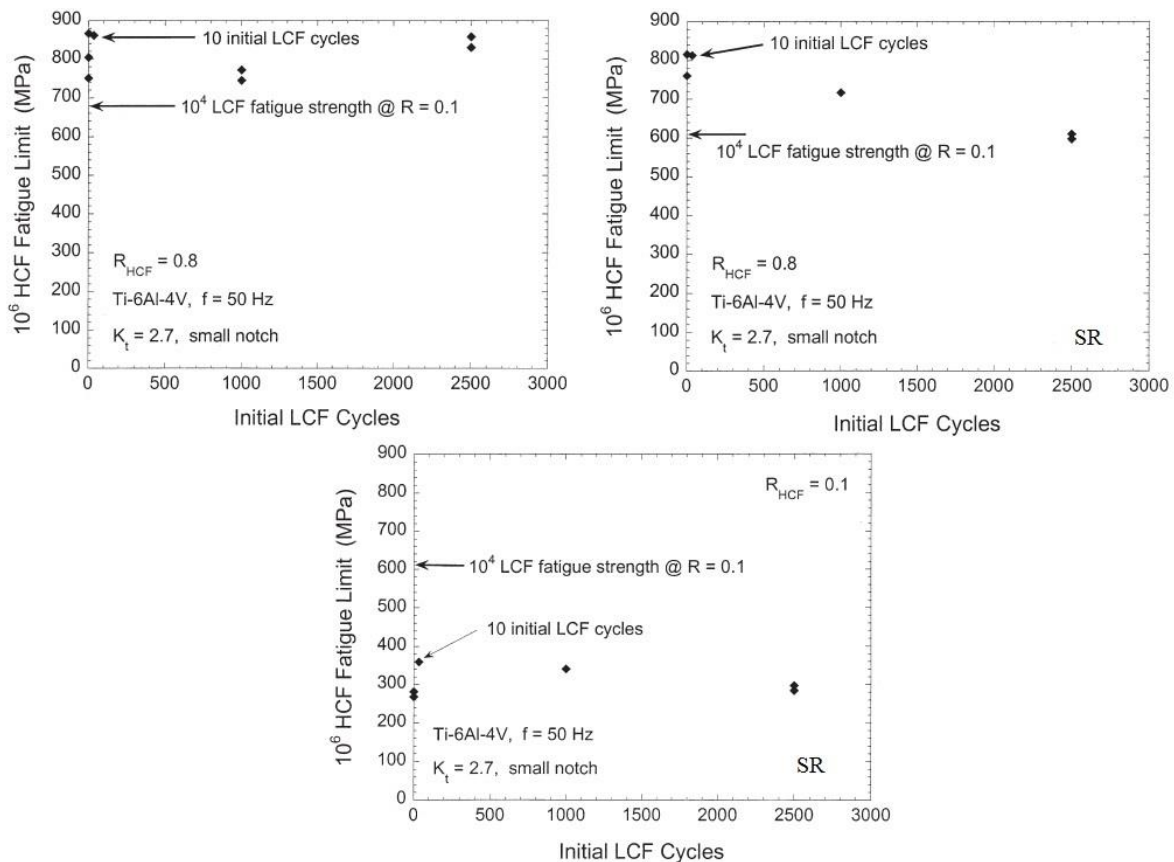
- Non sono stati eseguiti test di fatica per i provini con intaglio di dimensioni maggiori e rilassamento dalle tensioni residue attraverso ricottura. Per tali provini, la resistenza a fatica dei provini rilassati con intaglio maggiore è stata supposta uguale a quella dei provini non rilassati (il che equivale a supporre l'assenza di tensioni residue);
 - Per i provini con l'intaglio di dimensioni minori, la resistenza a fatica dei provini sottoposti a rilassamento è inferiore a quella degli stessi provini non rilassati: pertanto appare esserci la presenza di tensioni residue che comportano un aumento della resistenza a fatica dei provini non rilassati (dovute al processo di lavorazione eseguito).
- Provini intagliati. Tensione massima per una vita di 10^6 cicli in funzione del numero di cicli LCF inizialmente eseguiti (espressi come percentuale della vita a termine LCF di 10^4 cicli):
- I parametri dei test eseguiti sono riportati in ogni diagramma. La sigla SR indica i provini sottoposti a rilassamento.

Provini con intaglio di dimensioni maggiori:



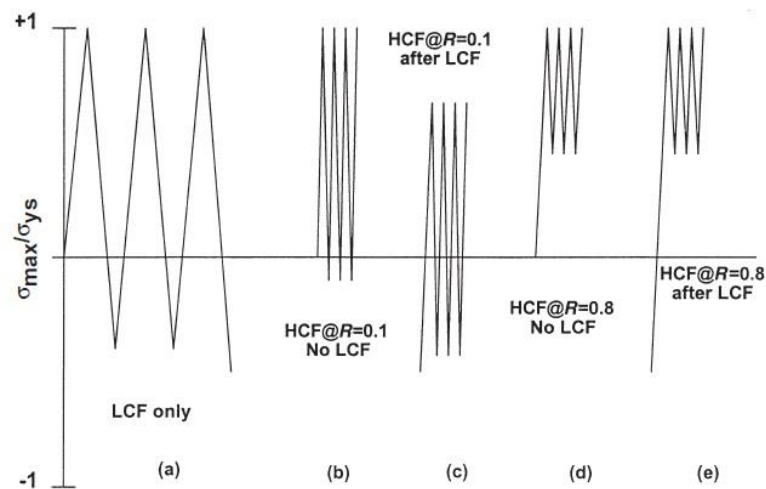
- Per $R_{HCF} = 0.8$, appare esservi un lieve calo della resistenza a fatica a 10^6 cicli all'aumentare del numero di cicli LCF eseguiti in precedenza sul provino;
- Nello stesso caso, per provini che hanno subito rilassamento, si verificano i seguenti comportamenti:
 - Il limite di fatica HCF aumenta per un basso numero di cicli LCF precedentemente realizzati. Questo può essere dovuto ad una redistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio (dove viene superato il limite di snervamento) durante i cicli LCF. Ciò comporta una riduzione della tensione raggiunta all'apice dell'intaglio e del rapporto di ciclo calcolato all'apice dell'intaglio durante i successivi cicli HCF.
 - La resistenza a fatica diminuisce sensibilmente all'aumentare del numero di cicli LCF inizialmente eseguiti. Questo può indicare la presenza di danneggiamento dovuto ai cicli LCF. Bisogna però ricordare che la resistenza a fatica a 10^4 cicli del provino che ha subito rilassamento è stata assunta uguale a quella del provino non rilassato. In realtà tale resistenza potrebbe essere inferiore a quella del provino non rilassato, pertanto i cicli LCF eseguiti raggiungerebbero percentuali maggiori del 10% e 25% della vita di 10^4 cicli (poiché sarebbero stato eseguiti ad una tensione limite con valore maggiore, corrispondente ad una vita a termine minore in termini di numero di cicli). Il danneggiamento per un numero di cicli LCF pari al 10% e 25% di 10^4 cicli potrebbe perciò essere di entità inferiore a quello evidenziato nel diagramma.
 - Per $R_{HCF} = 0.1$ la resistenza a fatica HCF cresce leggermente per effetto dei cicli LCF. Ancora, la spiegazione di tale fenomeno può essere dovuta ad una redistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio.

Provini con intaglio di dimensioni minori:



- Per $R_{HCF} = 0.8$ non appare evidente un calo nella resistenza a fatica HCF al crescere del numero di cicli LCF eseguiti. Appare anzi un leggero aumento di tale parametro, che però resta compreso all'interno della banda di dispersione dei risultati. Si verifica ancora un aumento della resistenza a fatica HCF con l'esecuzione di cicli LCF, fenomeno da attribuire alla redistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio.
- Per $R_{HCF} = 0.8$, nei provini che hanno subito rilassamento si può osservare un calo della resistenza a fatica HCF all'aumentare del numero di cicli LCF eseguiti in precedenza, indice di danneggiamento del materiale per i cicli LCF eseguiti.
- Come nel caso precedente, per $R_{HCF} = 0.1$, nei provini che hanno subito rilassamento si può osservare un calo della resistenza a fatica HCF all'aumentare del numero di cicli LCF eseguiti in precedenza. Inoltre si può osservare come un limitato numero di cicli HCF abbia l'effetto di aumentare la resistenza a fatica HCF per effetto della redistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio già discusso in precedenza.

- Provini intagliati. Commento ai risultati ottenuti comparando lo stato di tensione all'apice dell'intaglio nei diversi casi.



La figura è utile a comprendere le interazioni tra LCF/HCF nei soli termini di redistribuzione delle tensioni.

- Per $R_{HCF} = 0.1$, l'esecuzione di cicli LCF comporta una redistribuzione delle tensioni che porta il rapporto di ciclo all'apice dell'intaglio vicino al valore di -1 . Pertanto, si ha un aumento della resistenza a fatica HCF dovuta alla sola redistribuzione delle tensioni.
 - Per $R_{HCF} = 0.8$, l'esecuzione o meno di cicli LCF non comporta una variazione sul rapporto di ciclo all'apice dell'intaglio: pertanto, non vi sono variazioni sulla resistenza a fatica imputabili ad una redistribuzione delle tensioni.
- Si ricorda infine come nei provini non sottoposti a rilassamento le tensioni residue dovute alle lavorazioni del provino abbiano portato ad una resistenza a fatica maggiore dei provini sottoposti a ricottura di rilassamento.

A3.2.7. On the use of critical distance theories for the prediction of the high cycle fatigue limit stress in notched Ti-6Al-4V [20]

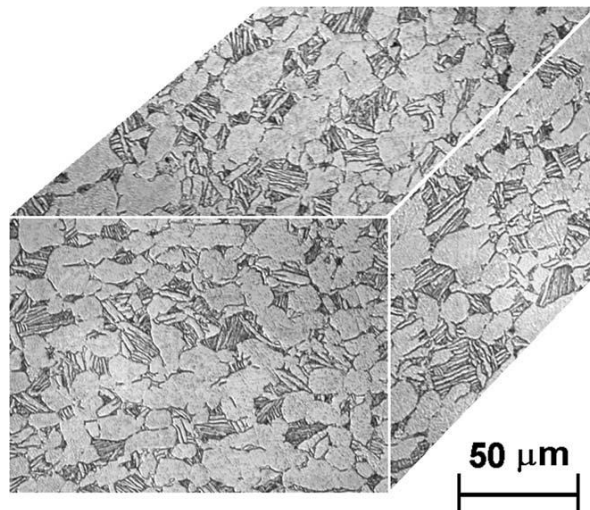
Tema trattato: indagine su diversi metodi per applicare la teoria della distanza critica per la progettazione a fatica di componenti intagliati in lega Ti-6Al-4V.

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (piastra forgiata da una barra).

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

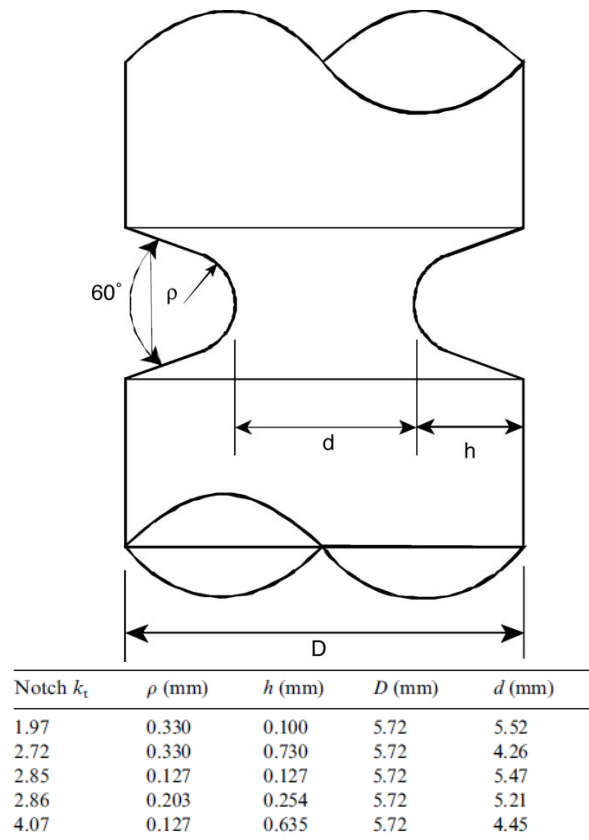
- Preriscaldamento a 938°C (30 min);
- Solubilizzazione a 932°C (75 min);
- Raffreddamento in aria forzata;
- Ricottura in vuoto a 704°C (2 h);
- Raffreddamento in Argon forzato;
- Lavorazione alle macchine utensili per ottenere i provini (*low stress grind technique*);
- Ricottura di distensione a 704°C (1 h) in vuoto (tranne che per il provino liscio e per il provino con $K_t = 2.86$ testati con $R = 0.8$).

Microstruttura del provino: struttura duplex.



Geometria dei provini utilizzati: provini lisci (sezione ristretta cilindrica di diametro 5.08 mm) e provini intagliati con diverse dimensioni dell'intaglio (a V con apertura 60°), aventi diversi valori di fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t .

La geometria e le dimensioni delle sezioni ristrette dei provini sono riportate qui di seguito:



- Tutti i provini sono lunghi 130 mm.
- I valori del fattore teorico di concentrazione delle tensioni sono stati ottenuti dalla letteratura e confrontati con i risultati di modelli FEM.

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale con diversi valori di rapporto di ciclo ($R = -1$, $R = 0.1$, $R = 0.5$, $R = 0.65$, $R = 0.8$);
- Frequenza di applicazione del carico: 50 – 70 Hz (40 Hz per le prove a $R = -1$)

Procedura sperimentale:

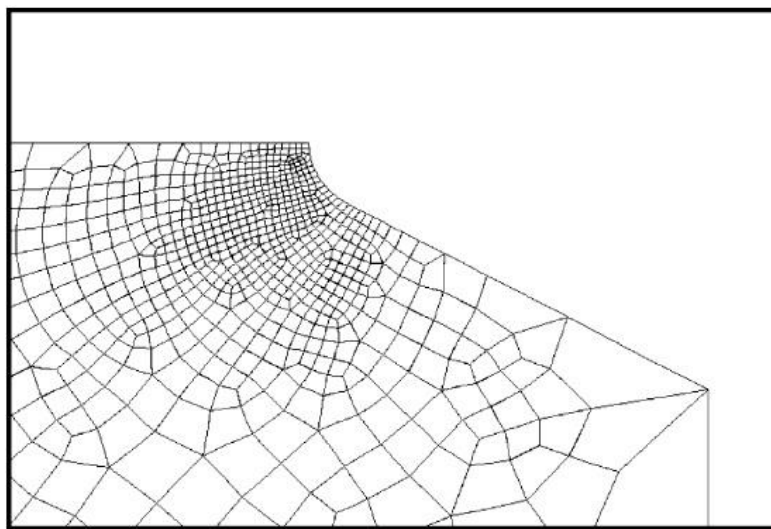
- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per i test di fatica.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 10^6$ cicli.
- Calcolo del coefficiente di riduzione della resistenza a fatica per $N^* = 10^6$ cicli:

$$K_f = \frac{\sigma_{alt,lim,provino\ liscio}}{\sigma_{alt,lim,provino\ intagliato}}$$

- Calcolo dell'indice di sensibilità all'intaglio:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

- Calcolo della distribuzione delle tensioni e dell'entità della deformazione plastica mediante modello FEM (elementi quadrangolari assial-simmetrici a quattro nodi) utilizzando un comportamento elastico-perfettamente plastico e le proprietà del materiale per una velocità di deformazione di 0.05 s^{-1} in seguito riportate. Nell'immagine seguente si nota un esempio di mesh all'apice dell'intaglio:

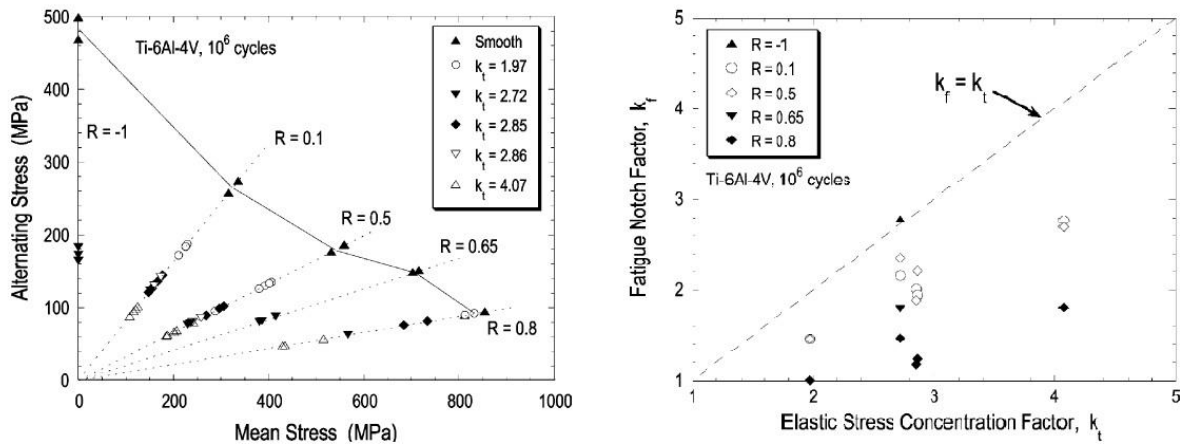


Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici) in direzione longitudinale:

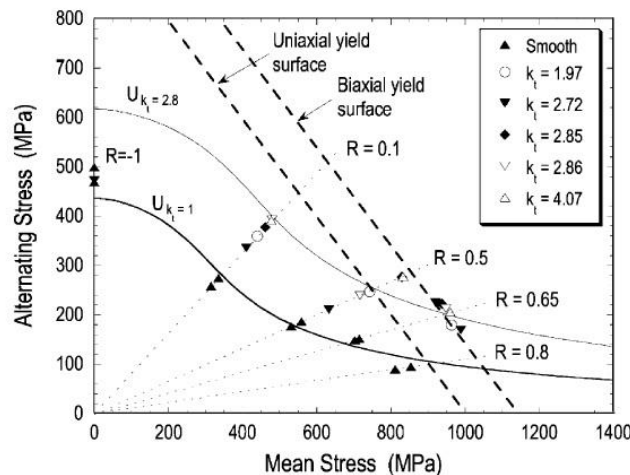
Material property	Strain rate	
	0.0005 (s^{-1})	0.05 (s^{-1})
Yield stress (MPa)	930	1003
Ultimate stress (MPa)	978	1014
Elastic modulus (GPa)	119	127

- Diagramma di High per i diversi provini utilizzati considerando la tensione nominale nella sezione netta e fattore di intensificazione delle tensioni K_f in funzione del K_t per diversi rapporti di ciclo R :



- o La linea tratteggiata nel secondo diagramma rappresenta la condizione in cui $K_f = K_t$, ovvero si ha piena sensibilità all'intaglio;
- o La condizione con $K_f = 1$ non comporta alcuna riduzione della vita a fatica nonostante la presenza dell'intaglio;
- o Si nota nel diagramma di Haigh come al crescere di K_t la tensione limite alternata per una vita di 10^6 cicli diminuisce nonostante la dispersione dei risultati;
- o Appare una dipendenza di K_f dal rapporto di ciclo R : in particolare, i risultati ottenuti per $R = 0.8$ presentano un trend differente rispetto a quelli ottenuti per gli altri rapporti di ciclo.

- Diagramma di Haigh riportante la tensione alternata all'apice dell'intaglio:

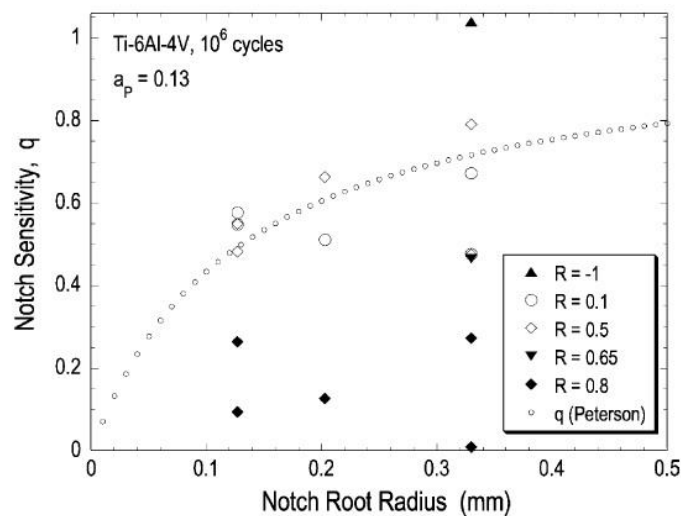


- Nel diagramma è riportata l'ampiezza della tensione alternata in funzione della tensione media presenti all'apice dell'intaglio, calcolate col modello FEM;
- Vengono riportate in tratteggio le linee corrispondenti a snervamento per uno stato di tensione uniassiale ($\sigma_{ys} = 1003 \text{ MPa}$) e biassiale ($\sigma_{eff} = 1.14 \sigma_{ys}$, utilizzando il criterio di von Mises). Nel modello FEM è utilizzato il criterio di von Mises, per cui in presenza di deformazione plastica i punti giaceranno su quest'ultima linea: si può notare pertanto come per i rapporti di ciclo $R = 0.65$ e $R = 0.80$ vi sia la presenza di deformazione plastica;
- Vengono inoltre riportate nel diagramma due curve tracciate per ΔU costante, dove ΔU è la variazione della densità di energia di deformazione, calcolate per due diversi valori di K_t ($K_t = 1$ e $K_t = 2.8$) con l'equazione di Jasper:

$$\Delta U = \frac{1}{2E} (\sigma_{max}^2 \pm \sigma_{min}^2)$$

Dove si utilizza il segno positivo per $R < 0$ e il segno negativo per $R > 0$. In studi precedenti, l'equazione di Jasper si è dimostrata valida per rappresentare i dati di provini lisci sul diagramma di High. In questo studio, i dati relativi a rapporti di ciclo $R = -1$, $R = 0.65$ e $R = 0.8$ non si dimostrano in accordo con l'equazione di Jasper: nel caso dei rapporti di ciclo più elevati, ciò può essere dovuto alla presenza di deformazione plastica e per la presenza di creep che, per la lega Ti-6Al-4V, è presente anche a temperatura ambiente per tensioni vicine allo snervamento.

- Indice di sensibilità all'intaglio q :

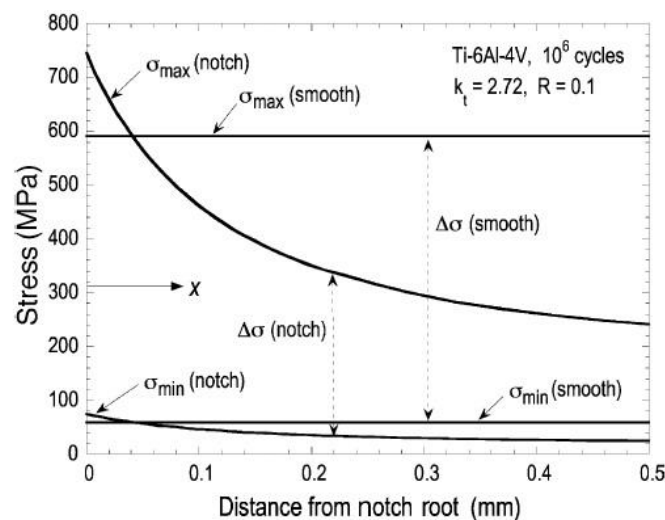


- Nel diagramma è riportato l'andamento dell'indice di sensibilità all'intaglio q ricavato dall'espressione di Peterson per un valore a_p di 0.13;
 - Si nota una dipendenza di q dal rapporto di ciclo R , soprattutto per $R = 0.8$;
 - L'andamento di q ricavato con l'equazione di Peterson approssima l'andamento dei dati per i rapporti di ciclo $R = 0.1$ e $R = 0.5$;
 - Appare evidente come una sola curva non sia in grado di approssimare l'andamento di tutti i dati, anche con diversi valori di a_p (si ricorda che le equazioni di Neuber e Heywood per il calcolo di q hanno un andamento simile all'equazione di Peterson qui riportata);
 - Appare perciò evidente come i tre modelli per il calcolo di q sopracitati non riescano a cogliere l'effetto di sensibilità all'intaglio della lega Ti-6Al-4V in questione.
- Calcolo della distanza critica basato sullo *stress range* $\Delta\sigma$:

Il primo criterio utilizzato, nonché il più semplice, consiste nel ricavare la distanza critica d come quel particolare valore di x (distanza dall'apice dell'intaglio in direzione radiale, normale al carico) per il quale sussiste la seguente uguaglianza:

$$d = x, \quad \Delta\sigma_{notch}(x) = \Delta\sigma_{smooth}$$

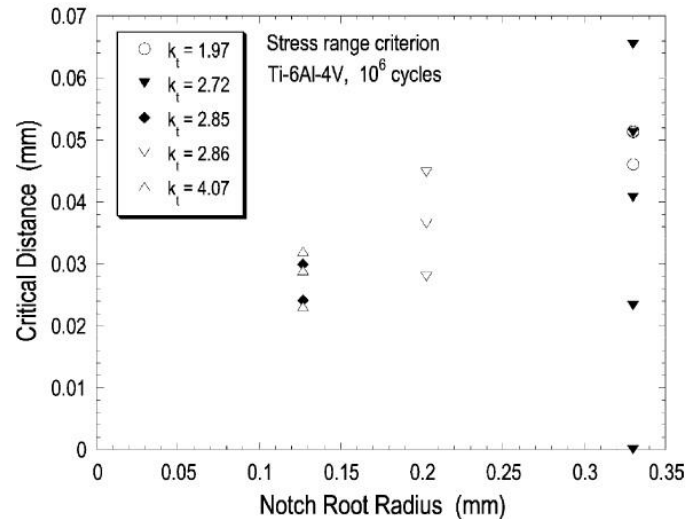
Un esempio di distribuzione di tensioni di fronte all'apice dell'intaglio o nel provino liscio è il seguente:



In assenza di deformazione plastica, la posizione in cui il range di tensione del provino intagliato è pari a quello del provino liscio corrisponde all'intersezione dei due set di curve.

I risultati ottenuti per le distanze critiche sono riportati nella seguente tabella, e sono stati calcolati sia con le tensioni assiali che con le tensioni di von Mises. Le distanze critiche sono poi state normalizzate con la distanza critica calcolata per la geometria con $K_t = 2.72$ con rapporto di ciclo $R = 0.1$, al solo scopo di facilitare un confronto tra i dati. Per il rapporto di ciclo $R = 0.8$ (e per il provino con $K_t = 2.72$ e rapporto di ciclo $R = 0.65$) è stata calcolata la distribuzione delle tensioni tenendo conto della deformazione plastica che si ha in questi casi: è stato così calcolato il rapporto di ciclo all'apice dell'intaglio, ed è stato eseguito il confronto tra la distribuzione di tensione dovuta all'intaglio e lo stato di tensione di un provino liscio con il rapporto di ciclo R pari a quello ricavato per l'apice dell'intaglio, ottenuto per interpolazione dai dati riportati nel diagramma di High. Pertanto, in questi casi, saranno disponibili due valori della distanza critica: uno tenendo conto del range di tensione del provino liscio al rapporto di ciclo R nominale applicato al provino intagliato, l'altro tenendo conto del range di tensione del provino liscio al rapporto di ciclo R locale all'apice dell'intaglio. Oltre alla forma tabellare, viene riportato un diagramma con le distanze critiche calcolate utilizzando la tensione assiale.

R	No. of tests	k_t	ρ (mm)	Stress in axial direction		von Mises equivalent stress	
				d (mm)	$d_{\text{normalized}}$	d (mm)	$d_{\text{normalized}}$
0.1	4	1.97	0.330	0.051	1.26	0.026	2.01
0.5	6	1.97	0.330	0.051	1.26	0.026	2.02
0.8	3	1.97	0.330	0.255	6.25	0.114	8.80
0.8 Plastic	–	1.97	0.330	0.046	1.13	0.017	1.34
–1	3	2.72	0.330	0.000	0.00	0.000	0.00
0.1	1	2.72	0.330	0.041	1.00	0.013	1.00
0.5	2	2.72	0.330	0.023	0.57	0.002	0.16
0.65	3	2.72	0.330	0.082	2.01	0.036	2.79
0.65 Plastic	–	2.72	0.330	0.065	1.61	0.027	2.07
0.8	1	2.72	0.330	0.143	3.52	0.066	5.12
0.8 Plastic	–	2.72	0.330	0.057	1.26	0.017	1.31
0.1	4	2.85	0.127	0.024	0.59	0.011	0.87
0.5	3	2.85	0.127	0.030	0.73	0.015	1.13
0.8	2	2.85	0.127	0.118	2.90	0.052	4.03
0.8 Plastic	–	2.85	0.127	0.024	0.59	0.009	0.73
0.1	2	2.86	0.203	0.045	1.10	0.021	1.61
0.5	2	2.86	0.203	0.028	0.69	0.011	0.85
0.8	2	2.86	0.203	0.155	3.81	0.071	5.44
0.8 Plastic	–	2.86	0.203	0.036	0.90	0.014	1.08
0.1	4	4.07	0.127	0.029	0.71	0.012	0.93
0.5	5	4.07	0.127	0.032	0.78	0.014	1.05
0.8	3	4.07	0.127	0.084	2.06	0.037	2.83
0.8 Plastic	–	4.07	0.127	0.023	0.57	0.008	0.62



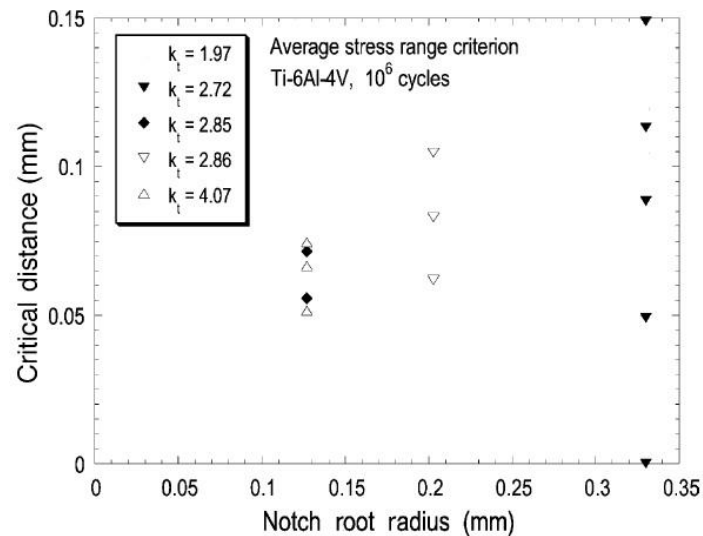
- Si nota una considerevole dispersione dei dati ottenuti: tuttavia i risultati dei test di fatica per questa forma di Ti-6Al-4V presentavano già una notevole dispersione;
- Non appare esserci alcuna dipendenza della distanza critica dal rapporto di ciclo per i casi in cui la deformazione è completamente elastica ($R = 0.1$ e $R = 0.5$);
- Per il rapporto di ciclo $R = 0.8$, l'utilizzo del range di tensione per il provino liscio corrispondente ad un rapporto di ciclo R pari al rapporto di ciclo all'apice dell'intaglio porta la distanza critica calcolata ad essere simile a quella ottenuta per i casi con $R = 0.1$ e $R = 0.5$; si può vedere invece che utilizzando il rapporto di ciclo $R = 0.8$ nominale per il calcolo del range di tensione del provino liscio, la distanza critica ricavata è molto maggiore di quelle ottenute per gli altri rapporti di ciclo e, quindi, non comparabile con queste;
- Per ricavare il rapporto di ciclo locale all'apice dell'intaglio nel caso di $R = 0.8$, si calcola la redistribuzione delle tensioni (che avviene nel primo ciclo di carico). Si nota come all'apice dell'intaglio il rapporto di ciclo sia più basso per effetto della plasticizzazione di una parte di materiale di fronte all'intaglio, mentre allontanandosi dall'apice il rapporto di ciclo tenda al rapporto nominale $R = 0.8$. Si nota tra i dati che la distanza critica calcolata utilizzando il range di tensione del provino liscio con rapporto di ciclo pari al rapporto locale all'apice dell'intaglio è generalmente minore rispetto a quella calcolata negli altri casi: questo poiché, aumentando il rapporto di ciclo

all'aumentare della distanza dall'apice dell'intaglio, si ha un maggior contributo al fenomeno della fatica nel volume critico del materiale rispetto al caso in cui R è costante in tutto il provino;

- Si nota che l'utilizzo della tensione equivalente di von Mises comporta una riduzione della distanza critica rispetto al calcolo computato utilizzando la tensione assiale, e la dispersione dei risultati risulta invece aumentare: pertanto si ritiene che la tensione di von Mises non sia un buon parametro per il calcolo della distanza critica.
 - Si può notare che la distanza critica media per le geometrie con le dimensioni dell'intaglio più ridotte ($\rho = 0.127 \text{ mm}$, $K_t = 2.85$ e 4.07) è notevolmente inferiore rispetto alle altre geometrie ($d = 0.029 \text{ mm}$ nel primo caso, $d = 0.040 \text{ mm}$ nel secondo). Pertanto si ritiene possibile la presenza di un effetto di intaglio (*notch size effect*) nei risultati ottenuti.
 - Per quanto riguarda il provino testato a $R = -1$, si ricava una distanza critica pari a 0, ovvero la tensione di picco elastico del provino intagliato è pari alla tensione applicata sul provino liscio. Un'osservazione sui risultati per $R = -1$ riguarda la rilevazione di piccole cricche nei blocchi di carico precedenti all'ultimo durante lo *step test*, in lavori precedenti. Queste cricche non propagano fino al raggiungimento dell'ultimo livello di carico. Si può quindi ipotizzare che mentre i test condotti con rapporti di ciclo positivi siano relativi all'iniziazione della cricca (fenomeno innescato dal range di tensione totale), i test condotti con rapporti di ciclo negativi siano relativi alla propagazione della stessa (fenomeno guidato dalla sola porzione positiva del range di tensione). Pertanto si ritiene che i risultati ottenuti per rapporti ciclo positivi non siano facilmente trasferibili in casi in cui vi siano rapporti di ciclo negativi.
- Il passo successivo nel calcolo della distanza critica consiste nell'utilizzo del range di tensione medio di fronte all'apice dell'intaglio entro una certa distanza d dallo stesso (che è, appunto, la distanza critica):

$$d = x, \quad \frac{1}{d} \int_0^d \Delta\sigma_{notch}(x) dx = \Delta\sigma_{smooth}$$

I risultati vengono riportati nel diagramma seguente:



- Si nota come la dispersione è simile a quella ottenuta per il caso precedente, anche se i valori della distanza critica calcolati differiscono;
 - E' stata determinata dagli autori la maggior bontà dei risultati ottenuti con il primo metodo riportato;
- E' stato effettuato un confronto tra i dati ottenuti sperimentalmente e i dati ricavati da previsioni utilizzando il primo metodo della distanza critica riportato. Il confronto è stato effettuato per i soli rapporti di ciclo R di 0.1 e 0.5, utilizzando una distanza critica d pari a 0.040 mm per i provini con $K_t = 1.97, 2.72$ e 2.86, e una distanza critica pari a 0.029 mm per i provini con $K_t = 2.85$ e 4.07. La tabella seguente illustra i risultati ottenuti (le tensioni sono espresse in termini di tensione nominale nella sezione netta):

Notch k_t	ρ (mm)	R	Experimental stress (MPa)	Predicted Stress (MPa)	% Difference
1.97	0.330	0.1	404	385	-4.7%
1.97	0.330	0.5	501	476	-5.0%
2.72	0.330	0.1	274	273	-0.4%
2.72	0.330	0.5	310	338	9.0%
2.86	0.203	0.1	303	296	-2.3%
2.86	0.203	0.5	328	366	11.6%
2.85	0.127	0.1	294	311	5.8%
2.85	0.127	0.5	387	383	-1.0%
4.07	0.127	0.1	213	214	0.5%
4.07	0.127	0.5	273	264	-3.3%

- La differenza massima tra i valori ottenuti e previsti è inferiore al 12%.

- Calcolo della distanza critica basato sulla tensione media σ_m :

Il seguente approccio consiste nel calcolo della distanza dall'apice dell'intaglio per la quale la tensione media limite per una vita di 10^6 cicli del provino intagliato è pari alla tensione media del provino liscio per la stessa vita a fatica:

$$d = x, \quad \sigma_{m,notch}(x) = \sigma_{m,smooth}$$

Anche per questo metodo è stata in seguito utilizzata la tensione media mediata lungo una distanza d di fronte all'apice dell'intaglio (che diventa la nuova distanza critica):

$$d = x, \quad \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_{m,notch}(x) dx = \sigma_{m,smooth}$$

I risultati di questi metodi non vengono riportati in quanto considerati non incoraggianti.

- Calcolo della distanza critica basato sulla variazione di densità di energia di deformazione ΔU :

Per questo approccio, si utilizza come distanza critica la distanza dall'apice dell'intaglio per la quale la variazione di densità di energia di deformazione del provino intagliato è pari alla variazione di densità di energia di deformazione del provino liscio.

$$d = x, \quad \Delta U_{notch}(x) = \Delta U_{smooth}$$

Anche in questo caso, i risultati non sono stati incoraggianti e quindi non sono stati riportati.

- Utilizzo delle funzioni di peso:

In questo ultimo metodo, si è trattato il contributo delle tensioni presenti di fronte all'apice dell'intaglio in maniera non uniforme. Infatti, le tensioni presenti all'apice dell'intaglio, sulla superficie libera, avranno un maggior contributo al fenomeno della

fatica rispetto alle tensioni dei punti più interni. E' stata utilizzata perciò una funzione come peso dei vari contributi:

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x}{d}\right)^m$$

dove m è un esponente maggiore o uguale a zero.

La condizione per ricavare la distanza critica è ora:

$$d = x, \quad \frac{1}{d} \int_0^d \Delta U_{notch}(x) \varphi(x) dx = \Delta U_{smooth}$$

I risultati di tale metodo non sono stati tuttavia migliori dei casi precedenti.

- Osservazioni finali:

- In questo studio non si è tenuto conto dell'effetto che le deformazioni plastiche hanno sulle proprietà a fatica del materiale. In studi precedenti riguardanti la pallinatura del titanio, si è attribuito il miglioramento delle proprietà di resistenza a fatica della lega non solo alle tensioni residue di compressione introdotte dal trattamento meccanico, ma anche agli effetti dell'incrudimento superficiale, che si ha anche nei casi in esame per rapporti di ciclo elevati.
- Una seconda osservazione riguarda la correlazione tra la distanza critica ricavata nel primo metodo e altre distanze critiche ricavate in studi precedenti. Taylor ha dimostrato che per fori circolari il metodo della distanza critica dà risultati accettabili se viene utilizzato il valore $a_0/2$ come distanza critica, dove a_0 è la lunghezza della cricca intrinseca di El Haddad e Topper. Taylor ha osservato inoltre come per intagli molto severi la tensione ad una distanza critica di $a_0/2$ produce il medesimo limite di fatica per un intaglio e per una cricca delle stesse dimensioni, risultato che dà un significato fisico alla quantità a_0 . Il parametro a_0 si è rivelato non essere una costante del materiale, ma dipendere dal rapporto di ciclo R .
- I valori di a_0 ricavati per la lega oggetto del presente studio sono 0.137 mm (per $R = 0.1$), 0.131 mm (per $R = 0.5$) e 0.266 mm (per $R = 0.8$), pertanto concordano solo in maniera molto larga con i risultati ottenuti da Taylor.

A3.2.8. The effect of notch geometry on critical distance high cycle fatigue predictions [21]

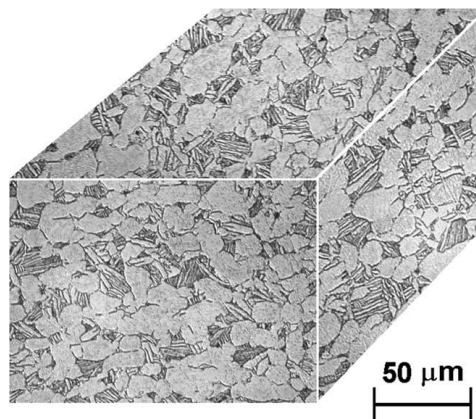
Tema trattato: indagine sul metodo della distanza critica per previsioni sulla vita a fatica di componenti in lega Ti-6Al-4V al variare delle dimensioni dell'intaglio e del fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t .

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (piastra forgiata da una barra).

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

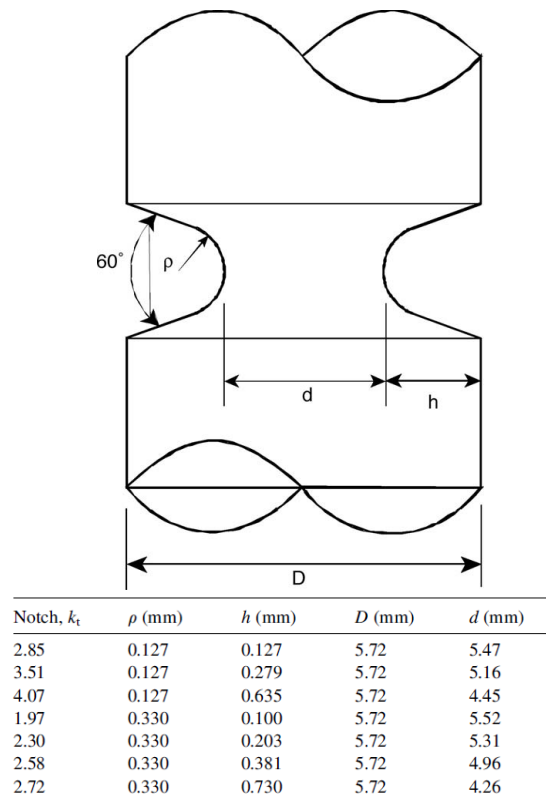
- Preriscaldamento a 938°C (30 min);
- Solubilizzazione a 932°C (75 min);
- Raffreddamento in aria forzata;
- Ricottura in vuoto a 704°C (2 h);
- Raffreddamento in Argon forzato;
- Lavorazione alle macchine utensili per ottenere i provini (*low stress grind technique*);
- Ricottura di distensione a 704°C (1 h) in vuoto.

Microstruttura del provino: struttura duplex.



Geometria dei provini utilizzati: provini lisci (sezione ristretta cilindrica di diametro 5.08 mm) e provini intagliati con diverse dimensioni dell'intaglio (a V con apertura 60°), aventi diversi valori di fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t e due diversi valori del raggio di fondo intaglio, per vedere come questo influenza i risultati ($\rho = 0.127\text{ mm}$, $\rho = 0.330\text{ mm}$).

La geometria e le dimensioni delle sezioni ristrette dei provini sono riportate qui di seguito:



- Tutti i provini sono lunghi 130 mm.
- I valori del fattore teorico di concentrazione delle tensioni sono stati ottenuti dalla letteratura e confrontati con i risultati di modelli FEM.

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale con diversi valori di rapporto di ciclo ($R = 0.1$, $R = 0.5$);
- Frequenza di applicazione del carico: $f = 50 - 70$ Hz.

Procedura sperimentale:

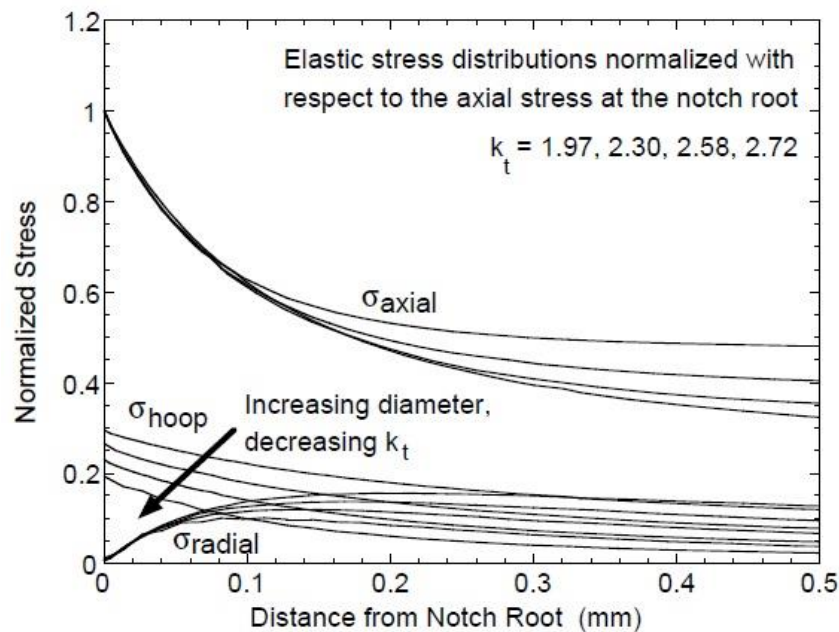
- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per i test di fatica.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 10^6$ cicli.
- Calcolo della distribuzione delle tensioni mediante modello FEM (elementi quadrangolari asimmetrici a quattro nodi) utilizzando un comportamento elastico-perfettamente plastico e le proprietà del materiale per una velocità di deformazione di 0.05 s^{-1} in seguito riportate. Per il modello FEM, è stato utilizzato il criterio di snervamento basato sulla tensione equivalente di von Mises.

Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici) in direzione longitudinale:

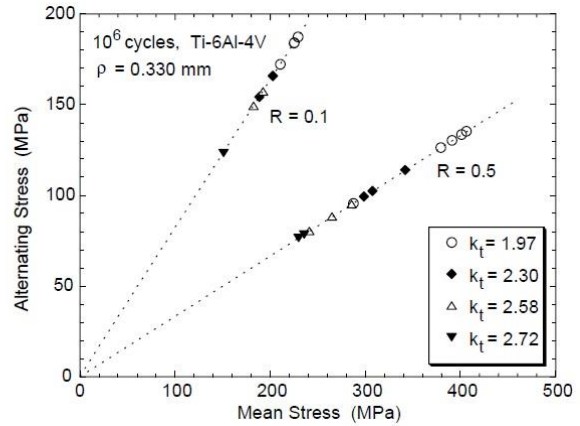
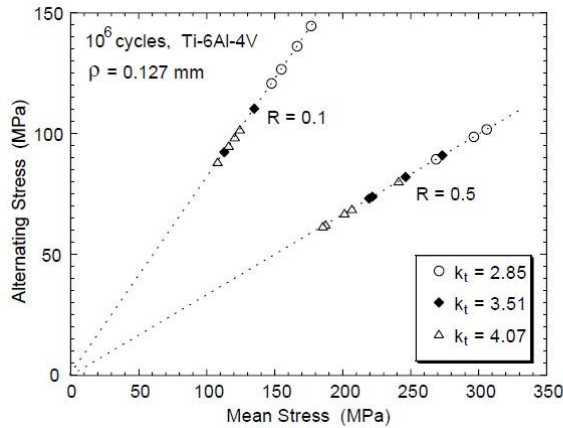
Material property	Strain rate	
	0.0005 (s ⁻¹)	0.05 (s ⁻¹)
Yield stress (MPa)	930	1003
Ultimate stress (MPa)	978	1014
Elastic modulus (GPa)	119	127

- Distribuzione delle tensioni di fronte all'apice dell'intaglio (tensioni normalizzate rispetto alla tensione assiale di picco elastico):



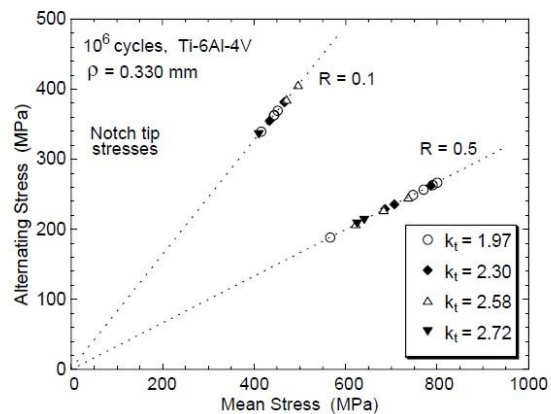
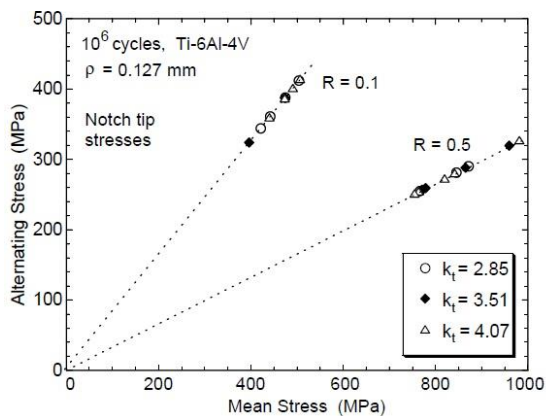
- L'andamento delle tensioni è simile per tutte le geometrie analizzate;
- Solo la tensione tangenziale (σ_{hoop}) all'apice dell'intaglio decresce sensibilmente al calare di K_t , pertanto eventuali differenze significative nei risultati ottenuti per diversi K_t saranno da imputare alla tensione tangenziale.

- Diagrammi di High riferiti alla tensione nella sezione netta per i due diversi valori di ρ :



- o Appare evidente come al crescere di K_t si riduca l'ampiezza della tensione alternata limite per una vita a fatica di 10^6 cicli.

- Diagrammi di High riferiti alla tensione all'apice dell'intaglio per i due diversi valori di ρ :



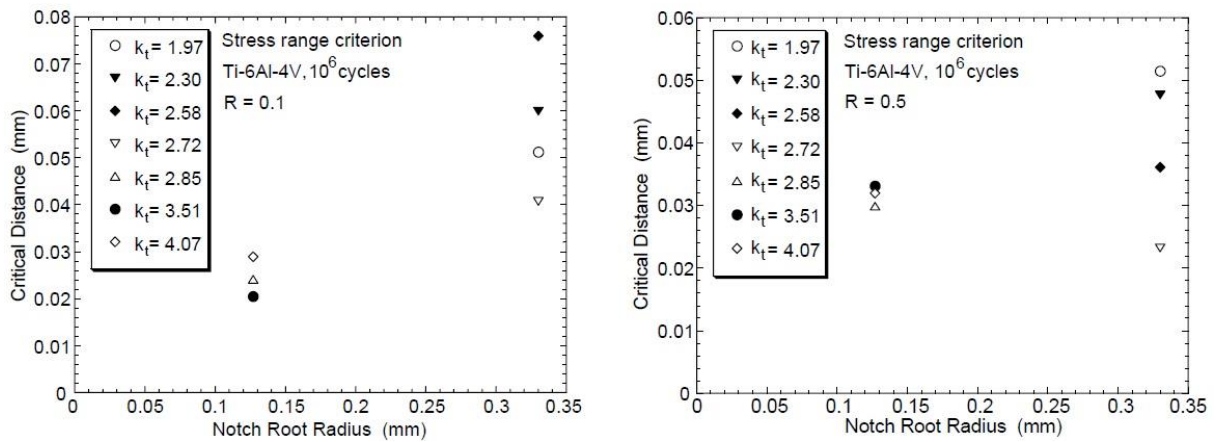
- o La dispersione dei risultati è minore rispetto al caso precedente: i dati sono ora molto più vicini tra loro;
- o Appare ancora una certa dipendenza dal K_t : al crescere di questo, diminuisce leggermente la tensione limite alternata per una vita a fatica di 10^6 cicli, anche se tale effetto è meno osservabile rispetto al caso precedente;
- o Tale leggera dipendenza sarà dovuta alla differente distribuzione delle tensioni, come riportato precedentemente.

- Calcolo della distanza critica:

Il criterio per il calcolo della distanza critica è basato sul range di tensione, ovvero sulla seguente uguaglianza:

$$d = x, \quad \Delta\sigma_{notch}(x) = \Delta\sigma_{smooth}$$

I valori della distanza critica ottenuti sono riportati nei seguenti diagrammi, per i rapporti di ciclo $R = 0.1$ e $R = 0.5$ rispettivamente:



- I diagrammi riportano i risultati medi ottenuti per più prove con provini della stessa geometria;
- Si può notare una modesta dispersione dei risultati;
- Per il rapporto di ciclo $R = 0.1$, si può notare la presenza di un effetto di intaglio (*notch size effect*), poiché le geometrie con un raggio di fondo intaglio $\rho = 0.127 \text{ mm}$ portano a distanze critiche inferiori rispetto alle geometrie con $\rho = 0.330 \text{ mm}$;
- Esaminando i dati di entrambi i diagrammi, non appare esserci legame tra il valore di K_t e la distanza critica calcolata;

- Sono state fatte delle previsioni sulla vita a fatica dei provini utilizzando come distanza critica, per le geometrie con $\rho = 0.127 \text{ mm}$ e $K_t = 2.85, 3.51$ e 4.07 , il valore $d = 0.028 \text{ mm}$, ovvero il valore medio tra i dati riportati nei due diagrammi precedenti per il raggio di fondo intaglio di valore minore. I risultati del confronto tra le previsioni e i risultati sperimentali vengono riportati nella seguente tabella:

Notch k_t	R	Experimental stress (MPa)	Predicted stress (MPa)	Difference (%)
2.85	0.1	294	307	4.7
2.85	0.5	387	380	-1.7
3.51	0.1	225	248	10
3.51	0.5	320	307	-4.0
4.07	0.1	213	214	0.1
4.07	0.5	273	264	-3.0

- Analogamente, per i provini con $\rho = 0.330 \text{ mm}$, sono state fatte previsioni simili utilizzando come valore della distanza critica $d = 0.048 \text{ mm}$, ovvero il valore medio delle distanze critiche calcolate per i provini di queste dimensioni. I risultati ottenuti sono poi stati confrontati con i risultati sperimentali, come riportato nella tabella:

Notch, k_t	R	Experimental stress (MPa)	Predicted stress (MPa)	Difference (%)
1.97	0.1	405	400	-1.2
1.97	0.5	501	495	-1.3
2.30	0.1	360	342	-5.1
2.30	0.5	421	423	0.5
2.58	0.1	341	303	-11
2.58	0.5	352	375	6.5
2.72	0.1	274	284	3.7
2.72	0.5	310	352	13

- o Si nota come in entrambi i casi la differenza tra le previsioni effettuate con i valori della distanza critica ricavati e i valori ottenuti sperimentalmente in termini di ampiezza della tensione alternata limite per una vita a fatica di 10^6 cicli sia contenuta.
- o Unendo i risultati ottenuti a quelli del precedente studio, si può notare come si abbia un calo della distanza critica al decrescere del raggio di fondo intaglio.

A3.2.9. A critical plane gradient approach for the prediction of notched HCF life [22]

Tema trattato: utilizzo di un approccio basato sul parametro di danneggiamento di Findley e sul gradiente di tensione per la previsione della vita HCF di componenti intagliati, tenendo conto dello stato di sollecitazione multiassiale all'apice dell'intaglio. Sviluppo di due criteri basati sulla distanza critica per definire un fattore del gradiente di Findley G_F .

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (piastra forgiata da una barra).

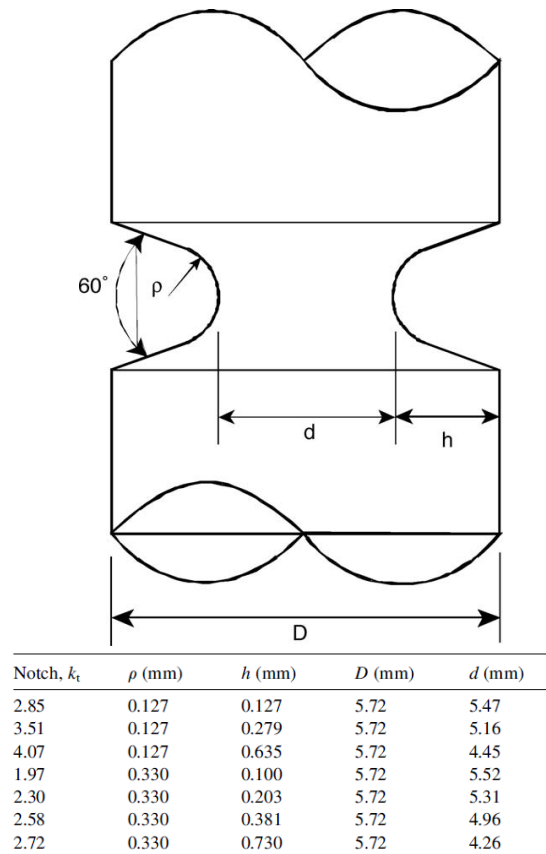
Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Preriscaldamento a 938°C (30 min);
- Solubilizzazione a 932°C (75 min);
- Raffreddamento in aria forzata;
- Ricottura in vuoto a 704°C (2 h);
- Raffreddamento in Argon forzato;
- Lavorazione alle macchine utensili per ottenere i provini (*low stress grind technique*);
- Ricottura di distensione a 704 °C (1 h) in vuoto.

Microstruttura del provino: 60% di fase α e 40 % di struttura lamellare $\alpha + \beta$.

Geometria dei provini utilizzati:

- Provini da Lanning *et al.*; [20]
- Provini lisci (sezione ristretta cilindrica di diametro 5.08 mm) e provini intagliati con diverse dimensioni dell'intaglio (a V con apertura 60°), aventi diversi valori del fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t e due diversi valori del raggio di fondo intaglio, per vedere come questo influenza i risultati ($\rho = 0.127\text{ mm}$, $\rho = 0.330\text{ mm}$);
- La geometria e le dimensioni delle sezioni ristrette dei provini sono riportate qui di seguito:



- Tutti i provini sono lunghi 130 mm.
- I valori del fattore teorico di concentrazione delle tensioni sono stati ottenuti dalla letteratura e confrontati con i risultati di modelli FEM.
- Provini testati in questo studio: provini con doppio intaglio laterale con fattore teorico di concentrazione delle tensioni $K_t = 2.68$, raggio di fondo intaglio $\rho = 0.53$ mm

Parametri sperimentali:

- Test di fatica assiale con diversi valori di rapporto di ciclo ($R = -1$, $R = 0.1$, $R = 0.5$);
- Frequenza di applicazione del carico: $f = 50 - 60$ Hz.

Procedura sperimentale:

- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo della tecnica *step loading* per i test di fatica.
- Cicli di carico per ciascun valore della tensione massima: $N^* = 10^6$ cicli.
- Calcolo del coefficiente di riduzione della resistenza a fatica per $N^* = 10^6$ cicli:
- Calcolo della distribuzione delle tensioni mediante modello FEM (elementi quadrangolari asimmetrici ad otto nodi) utilizzando un comportamento elastico-perfettamente plastico e le proprietà del materiale per una velocità di deformazione di

0.05 s^{-1} in seguito riportate. Per il modello FEM, è stato utilizzato il criterio di snervamento basato sulla tensione equivalente di von Mises.

- Utilizzo dei risultati FEM per il calcolo del parametro di Findley:

$$FIN = \tau_a + k\sigma_{max}$$

con τ_a massima ampiezza della tensione tangenziale e σ_{max} massima tensione normale, e k parametro di *fitting* dei dati.

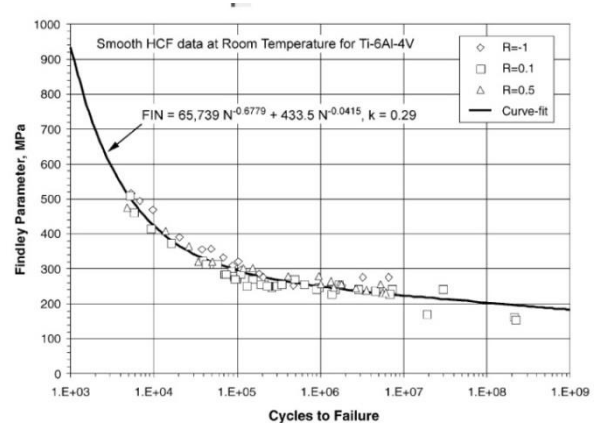
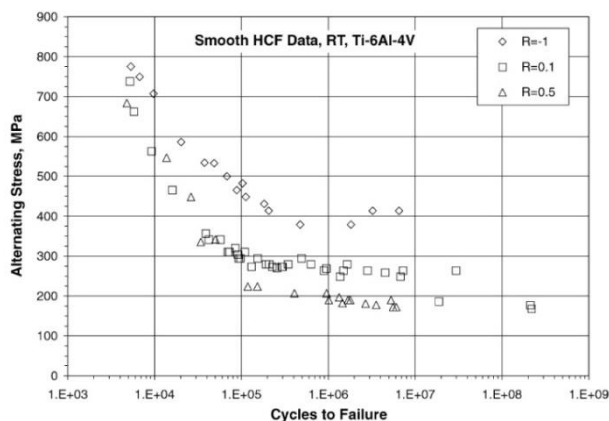
- Calcolo del parametro di Findley per tutte le orientazioni θ dei piani possibili, per determinare l'orientazione θ_{FIN} per la quale il parametro di Findley è massimo (questo è il piano critico).
- Determinazione di k ottimale che corredi in maniera adeguata i dati relativi a provini lisci per diversi valori del rapporto di ciclo R .
- Utilizzo di dati sperimentali presentati in studi precedenti.

Risultati e discussione:

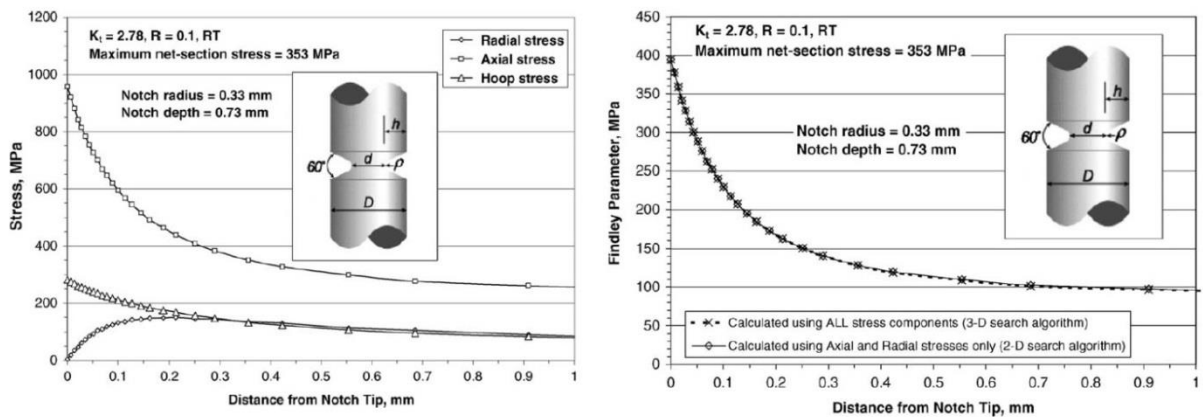
- Proprietà meccaniche del materiale dopo trattamenti termici:

Material property	Strain rate	
	0.0005 (s^{-1})	0.05 (s^{-1})
Yield stress (MPa)	930	1003
Ultimate stress (MPa)	978	1014
Elastic modulus (GPa)	119	127

- Determinazione del parametro k dai dati relativi a provini lisci (dati utilizzati presentati nell'articolo di Kallmeyer *et al.*); [12]



- Il secondo diagramma riporta il parametro di Findley calcolato per i diversi provini in funzione del numero di cicli a fatica per il quale si ha cedimento. Il fattore k che correla nel miglior modo i dati è $k = 0.29$. Con questo valore, le curve del parametro di Findley del secondo diagramma per diversi valori del rapporto di ciclo R diventano approssimativamente un'unica curva.
 - Si ritiene che per un utilizzo dell'approccio presentato in questo articolo, che fa riferimento al parametro di Findley, il fattore di *fitting* k sia da ricavare dai dati relativi ad almeno due differenti rapporti di ciclo R .
- Distribuzione di tensioni e parametro di Findley in funzione della distanza dall'apice dell'intaglio:



- Il parametro di Findley per uno stato tensionale bidimensionale viene calcolato con la seguente espressione:

$$FIN = \max_{\theta=0-90} \left[\max_{fatigue\ cycle} \{FIN1, FIN2\} \right]$$

con $FIN1 = \tau_a + k\sigma_{x,max}$ e $FIN2 = \tau_a + k\sigma_{y,max}$;

- L'espressione riportata può essere ulteriormente generalizzata per includere tutti i componenti di uno stato tridimensionale di tensione;
- Il parametro di Findley è stato calcolato utilizzando tutte le componenti di tensione o solo le componenti assiale e radiale, ed entrambe le curve sono riportate nel secondo diagramma: dal confronto tra le due curve si può notare come la componente tangenziale di tensione sia trascurabile;
- In questo studio è stato quindi utilizzato il parametro di Findley per uno stato di tensione biassiale di fronte all'intaglio, considerando le sole tensioni assiale e radiale.

- Utilizzo del parametro di Findley per ricavare la distanza critica:

La distribuzione del parametro di Findley all'apice dell'intaglio è stata utilizzata per lo sviluppo di due criteri di cedimento basati sulla distanza critica legati alla curva che riporta il parametro di Findley in funzione del numero di cicli a rottura per la vita HCF di provini lisci.

Per il primo criterio, il cedimento del componente intagliato avviene dopo N cicli quando il parametro di Findley $FIN(a_c)$, ad una distanza a_c dall'apice dell'intaglio, raggiunge il valore del parametro di Findley del provino liscio FIN_{smooth} per una vita di N cicli:

$$FIN(a_c, N) = FIN_{smooth}(N)$$

Per il secondo criterio, viene utilizzata la media della distribuzione del parametro di Findley entro una distanza a_c dall'apice dell'intaglio:

$$G_r(a_c, N) = \frac{1}{a_c} \int_0^{a_c} FIN(x, N) dx = G_F * FIN_{smooth}(N)$$

In termini fisici, questo criterio afferma che il cedimento avviene ad N cicli quando la media della distribuzione del parametro di Findley G_r entro una distanza a_c dall'apice dell'intaglio raggiunge un valore limite dato dal prodotto di una costante, G_F , e del parametro di Findley del provino liscio, FIN_{smooth} , per una vita di N cicli. Il parametro G_F è chiamato fattore del gradiente di Findley. Tale parametro si dimostra essere indipendente dalla geometria dell'intaglio e dal rapporto di ciclo R , e perciò adatto ad essere usato come parametro del materiale per previsioni sulla vita a fatica HCF.

- Analisi dei risultati di Lanning *et al.* [20] Presentazione riassuntiva dei dati e calcolo dei parametri di Findley:

Test case	K_t	Notch radius (mm)	Notch depth (mm)	R-ratio	Number of specimens tested	Average alternating HCF strength at 10^6 cycles (MPa)	Average K_t
1	2.00	0.330	0.100	0.1	3	181.3	1.58
2	2.00	0.330	0.100	0.5	4	123.0	1.49
3	2.78	0.330	0.729	-1	3	173.6	2.79
4	2.78	0.330	0.729	0.1	4	158.9	1.80
5	2.78	0.330	0.729	0.5	3	104.6	1.75
6	2.78	0.330	0.729	0.65	3	83.5	1.80
7	2.78	0.203	0.254	0.1	2	167.2	1.71
8	2.78	0.203	0.254	0.5	2	105.2	1.74
9	2.78	0.127	0.127	0.1	5	144.7	1.98
10	2.78	0.127	0.127	0.5	2	111.0	1.65
11	4.10	0.127	0.635	0.1	2	93.6	3.06
12	4.10	0.127	0.635	0.5	3	63.8	2.87

Test case	K_t	Notch radius (mm)	Notch depth (mm)	R -ratio	Critical distance a_c (mm)	G_r ($N=10^6$ cycles) (MPa)	G_F
1	2.00	0.330	0.100	0.1	0.041	284.9	1.14
2	2.00	0.330	0.100	0.5	0.043	284.0	1.14
3	2.78	0.330	0.729	-1	0.030	279.7	1.11
4	2.78	0.330	0.729	0.1	0.079	313.7	1.25
5	2.78	0.330	0.729	0.5	0.079	306.9	1.23
6	2.78	0.330	0.729	0.65	0.104	309.9	1.24
7	2.78	0.203	0.254	0.1	0.064	325.9	1.30
8	2.78	0.203	0.254	0.5	0.056	314.5	1.25
9	2.78	0.127	0.127	0.1	0.025	305.7	1.21
10	2.78	0.127	0.127	0.5	0.041	318.3	1.27
11	4.10	0.127	0.635	0.1	0.020	295.5	1.17
12	4.10	0.127	0.635	0.5	0.023	294.1	1.18
Average						302.8	1.21
Standard deviation						14.9	0.06

- Per una vita di $N = 10^6$ cicli, è stato utilizzato come parametro di Findley del provino liscio il valore $FIN_{smooth} = 250 \text{ MPa}$;
 - Si può notare dai risultati come il fattore del gradiente di Findley G_F sia pressoché invariante per un'ampia gamma di geometrie dell'intaglio e di rapporti di ciclo R . Considerando la variabilità dei dati sul comportamento a fatica della lega, si può concludere che tale parametro è effettivamente invariante e può essere potenzialmente usato come un parametro del materiale nell'analisi del comportamento HCF di provini intagliati;
 - Si nota invece come la distanza critica a_c vari significativamente con la geometria dell'intaglio e il rapporto di ciclo R e non possa perciò essere utilizzata come una costante del materiale per l'analisi HCF di componenti intagliati.
 - Il valore di G_r presenta una variabilità limitata poiché ci si riferisce per tutti i provini ad una vita a termine di 10^6 cicli. Tuttavia, tale parametro sarà differente per diversi valori della vita a termine N ;
 - Si può stabilire che il rapporto $G_r(N)/FIN_{smooth}(N)$, calcolato per un certo valore di N , sia costante per tutti i valori di N e pari a G_F .
- Procedura per la verifica HCF di componenti intagliati utilizzando i risultati FEM e il parametro G_F
- Per prima cosa, è necessario determinare il valore di G_F per il materiale dato, conducendo test su una o due geometrie di intaglio e rapporti di ciclo R .
 - E' quindi possibile determinare, mediante modello FEM, la distribuzione delle tensioni all'apice di intagli di qualsiasi altra geometria per una tensione arbitraria applicata. La distribuzione di tensione così ricavata viene utilizzata per determinare la distribuzione del parametro di Findley all'apice dell'intaglio

utilizzando le equazioni precedentemente riportate. La curva riportante il parametro di Findley del provino liscio FIN_{smooth} in funzione del numero di cicli N può essere utilizzata per determinare il parametro di Findley per una qualsiasi vita a fatica, $FIN_{smooth}(N)$.

- Si procede quindi con il calcolo del rapporto $G_r(x, N)/FIN_{smooth}(N)$ per i punti lungo la bisettrice dell'intaglio: tale rapporto avrà un valore inizialmente vicino all'unità, per poi crescere. La distanza critica per la geometria dell'intaglio e il rapporto di ciclo in esame potrà essere ricavata come il particolare valore di x per il quale il rapporto $G_r(x, N)/FIN_{smooth}(N)$ è uguale al valore di G_F . Ora si potrà ricavare l'ampiezza della tensione alternata limite per una vita a fatica di N cicli come la particolare tensione per la quale si verifica l'uguaglianza $FIN(a_c, N) = FIN_{smooth}(N)$. Ripetendo la procedura per differenti valori di N , si potranno ricavare le curve che rappresentano l'ampiezza della tensione alternata limite in funzione del numero di cicli a rottura per la geometria e il rapporto di ciclo in esame.
- Espressione del parametro di Findley in forma chiusa per uno stato bidimensionale di tensione

Considerando uno stato bidimensionale di tensione in cui il materiale è soggetto ad una variazione ciclica delle tensioni, le cui componenti possono essere descritte come una forma d'onda sinusoidale con ampiezza σ_{xa} , σ_{ya} e τ_a e con valore medio σ_{xm} , σ_{ym} e τ_m , le componenti $FIN1$ e $FIN2$ del parametro di danneggiamento di Findley possono essere riscritte in funzione dell'angolo θ , utilizzando le espressioni di trasformazione delle tensioni di Cauchy:

$$FIN1(\theta) = \tau_a \cos(2\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_{xa} - \sigma_{ya}) \sin(2\theta) + k[(\sigma_{xa} + \sigma_{xm}) \cos^2(\theta) + (\sigma_{ya} + \sigma_{ym}) \sin^2(\theta) + (\tau_a + \tau_m) \sin(2\theta)]$$

$$FIN2(\theta) = \tau_a \cos(2\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_{xa} - \sigma_{ya}) \sin(2\theta) + k[(\sigma_{xa} + \sigma_{xm}) \sin^2(\theta) + (\sigma_{ya} + \sigma_{ym}) \cos^2(\theta) - (\tau_a + \tau_m) \sin(2\theta)]$$

I piani critici corrispondenti, θ_{FIN1} e θ_{FIN2} , possono essere derivati massimizzando i parametri di Findley rispetto all'orientazione θ :

$$\frac{\partial(FIN1)}{\partial\theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(FIN2)}{\partial\theta} = 0$$

Si ricava:

$$\theta_{FIN1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2k(\tau_a + \tau_m) - (\sigma_{xa} - \sigma_{ya})}{2\tau_a + k[(\sigma_{xa} + \sigma_{xm}) - (\sigma_{ya} + \sigma_{ym})]} \right)$$

$$\theta_{FIN2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2k(\tau_a + \tau_m) + (\sigma_{xa} - \sigma_{ya})}{-2\tau_a + k[(\sigma_{xa} + \sigma_{xm}) - (\sigma_{ya} + \sigma_{ym})]} \right)$$

Infine, per uno stato di tensione bidimensionale in generale, si ha che:

$$FIN = \max(FIN1(\theta_{FIN1}), FIN2(\theta_{FIN2}))$$

- Espressione del parametro di Findley in forma chiusa per la distribuzione all'apice di un intaglio

Per ricavare una soluzione in forma chiusa per la distribuzione del parametro di Findley di fronte all'apice di un intaglio, si ricorre alle espressioni della distribuzione delle tensioni di Creager-Paris-Glinka, che lungo la bisettrice dell'intaglio sono (S_{ta} è la tensione nella sezione netta):

$$\sigma_{ya} = \frac{K_t S_{ta}}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\rho}{x + \frac{\rho}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{x + \frac{\rho}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\sigma_{xa} = \frac{K_t S_{ta}}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\rho}{x + \frac{\rho}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{x + \frac{\rho}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\tau_a = \tau_m = 0$$

Dove $S_{ta}(N)$ è l'ampiezza di tensione applicata alla sezione netta che porta ad una vita a fatica di N cicli.

Dall'ultima condizione, si ricava che $\theta_{FIN1} = -\theta_{FIN2}$. Osservando le espressioni, si nota che $FIN2 > FIN1$, pertanto $FIN2$ sarà il parametro di danneggiamento di

Findley. Sostituendo le espressioni di Creager-Paris-Glinka nelle espressioni del parametro di Findley si può esprimere il valore di tale parametro alla distanza critica a_c :

$$FIN(a_c, N) = \left(\frac{kK_t S_{ta}(N)(A_0 + s)}{(1 - R)(A_0 \sqrt{A_0})} \right)$$

Con:

$$A_0 = \left(1 + \frac{2a_c}{\rho} \right)$$

$$s = \sqrt{1 + \left(\frac{1 - R}{2k} \right)^2}$$

Si può altresì determinare la seguente espressione che lega G_F e A_0 :

$$(G_F - 2)A_0^2 + (G_F(s - 1) + 2s)A_0 - 2(s - 1)A_0^{3/2} - G_F s = 0$$

Poiché G_F non varia con il rapporto di ciclo R e con la geometria dell'intaglio ma è una costante per un certo materiale, dall'equazione sopra riportata è possibile ricavare il valore di A_0 e quindi la distanza critica a_c per una qualsiasi geometria dell'intaglio e rapporto di ciclo R .

Una volta determinata la distanza critica, si potrà procedere al calcolo di $FIN(a_c, N)$ e quindi alla determinazione dell'ampiezza della tensione alternata limite per N cicli con il procedimento riportato in precedenza.

Avendo ricavato le espressioni a partire dalla formulazione di Creager-Paris-Glinka, si utilizza l'ipotesi di *small scale yielding*, ovvero si ipotizza che all'apice dell'intaglio plasticizzi una porzione di materiale trascurabile e l'analisi possa essere di tipo lineare elastico. Inoltre, le espressioni di Creager-Paris sono state ricavate per intagli molto profondi, e Glinka ha dimostrato che la loro validità può essere estesa con un certo grado di approssimazione per intagli arrotondati: per intagli simmetrici ad U, le espressioni possono essere utilizzate entro una distanza dall'apice dell'intaglio pari a 3ρ con un'accuratezza del 7%. Per intagli molto arrotondati, come fori circolari o intagli semicircolari, le equazioni possono essere applicate con un'accuratezza del 10% entro una distanza pari a 1.5ρ dall'apice dell'intaglio.

I dati considerati sono entro i campi di validità delle equazioni, mentre per *sharp notches* o intagli dolci che non rientrano nei campi di validità delle forme chiuse

ricavate sarà necessario ricorrere alle analisi FEM seguendo il procedimento riportato in precedenza.

- Espressione in forma chiusa per il coefficiente di riduzione della resistenza a fatica K_f :

Analogamente al caso del provino intagliato, può essere ricavata un'espressione in forma chiusa per il parametro di Findley del provino liscio:

$$FIN_{smooth}(N) = \left(\frac{kS_{sa}(N)(1+s)}{(1-R)} \right)$$

Dove $S_{sa}(N)$ è l'ampiezza che porta ad una vita a fatica di N cicli.

Sostituendo le espressioni del parametro di Findley nel criterio di cedimento $FIN(a_c, N) = FIN_{smooth}(N)$, è possibile ricavare un'espressione per il coefficiente K_f , data dal rapporto tra le tensioni $S_{sa}(N)$ del provino liscio e $S_{ta}(N)$ del provino intagliato:

$$K_f = K_t \left(\frac{A_0 + s}{A_0^{3/2}(1+s)} \right)$$

Una notevole differenza rispetto alle altre formulazioni di K_f più note in letteratura (Neuber, Peterson, Heywood) consiste nel fatto che in questa espressione è contenuta la dipendenza del coefficiente di riduzione della vita a fatica dal rapporto di ciclo R , oltre che dalla geometria dell'intaglio e dal materiale tramite A_0 (che è ricavato in funzione di G_F). Poiché il valore di K_f varia al variare di R e del raggio di fondo intaglio ρ , si propone l'utilizzo di G_F come parametro di fatica per componenti intagliati, in quanto costante del materiale.

- G_F e sensibilità all'intaglio:

Il fattore del gradiente di Findley viene legato alla sensibilità all'intaglio attraverso due casi limite: un materiale con elevata sensibilità all'intaglio e un materiale completamente insensibile all'effetto di intaglio.

Nel primo caso, il fenomeno è governato dalla tensione presente all'apice dell'intaglio, pertanto a_c è pari a zero e $G_F = 1$. Nel secondo caso, a_c tenderà ad essere molto elevata, al limite tendente all'infinito, condizione per la quale si ottiene $G_F = 2$.

La sensibilità all'intaglio di un materiale può perciò essere espressa in termini di G_F attraverso un parametro proposto dagli autori e chiamato parametro di sensibilità all'intaglio di Findley:

$$Q_F = 2 - G_F = \frac{2(A_0\sqrt{A_0}(1-s) + (2A_0s - A_0 - s))}{(A_0 - 1)(A_0 + s)}$$

Pertanto, Q_F è pari a 1 per materiali con piena sensibilità all'intaglio, e pari a zero per materiali insensibili all'effetto di intaglio.

A differenza della tradizionale definizione di q basata sui valori di K_t e K_f , il parametro proposto tiene conto dello stato di tensione multiassiale all'apice dell'intaglio e del rapporto di ciclo applicato. Come G_F , anche Q_F sarà costante, indipendentemente dalla geometria dell'intaglio e dal rapporto di ciclo applicato. Nei dati analizzati in questo articolo, q varia tra 0.4 e 1, mostrando una forte dipendenza dal rapporto di ciclo applicato, mentre Q_F è costante e vale 0.79 (per il valore medio ricavato di G_F pari a 1.21).

- Confronto tra i risultati ottenuti con il metodo FEM e con le espressioni in forma chiusa:

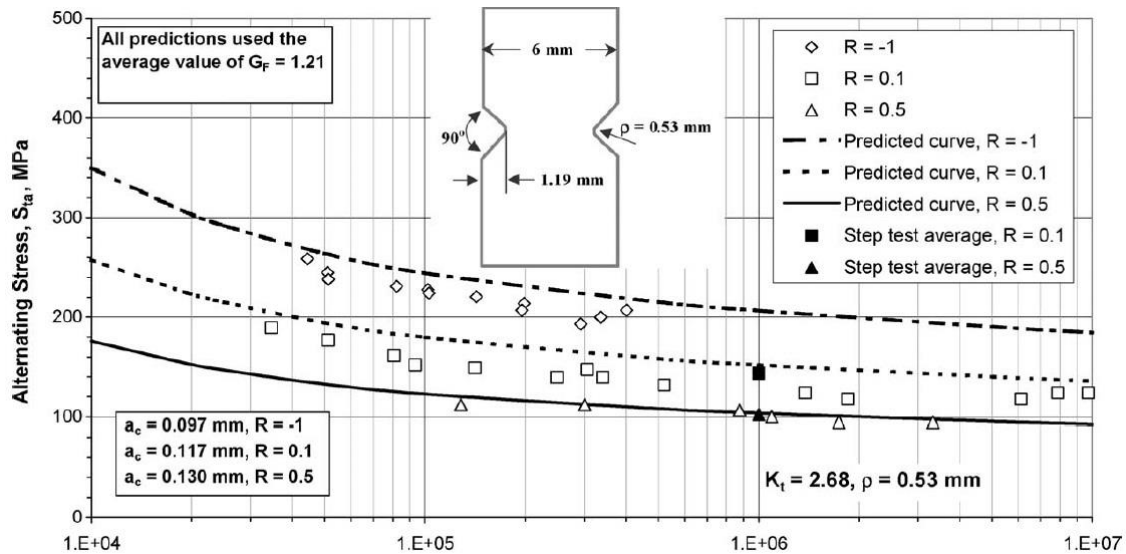
Test case	K_t	Notch radius (mm)	Notch depth (mm)	R-ratio	Critical distance a_c (mm) (FEM)	$FIN(a_c, 10^6)$ cycles (MPa) (FEM)	$FIN(a_c, 10^6)$ cycles (MPa) (Eq. (11))	$G_r(10^6)$ cycles (MPa) (FEM)	$G_r(10^6)$ cycles (MPa) (Eq. (12))
1	2.00	0.330	0.100	0.1	0.041	250.8	259.6	284.9	292.9
2	2.00	0.330	0.100	0.5	0.043	250.2	259.8	284.0	292.3
3	2.78	0.330	0.729	-1	0.030	252.0	259.1	279.7	288.1
4	2.78	0.330	0.729	0.1	0.079	251.5	263.5	313.7	323.7
5	2.78	0.330	0.729	0.5	0.079	250.5	262.8	306.9	317.6
6	2.78	0.330	0.729	0.65	0.104	249.7	258.6	309.9	323.6
7	2.78	0.203	0.254	0.1	0.064	249.9	250.9	325.9	322.4
8	2.78	0.203	0.254	0.5	0.056	251.7	252.2	314.5	311.3
9	2.78	0.127	0.127	0.1	0.025	251.9	254.0	305.7	304.0
10	2.78	0.127	0.127	0.5	0.041	250.1	252.2	318.3	318.7
11	4.10	0.127	0.635	0.1	0.020	252.2	258.0	295.5	299.9
12	4.10	0.127	0.635	0.5	0.023	250.1	250.1	294.1	298.7
Average						250.9	257.3	302.8	307.8

- o Come si può notare dai risultati riportati nella tabella, i valori dei parametri $FIN(a_c, 10^6)$ e $G_r(10^6)$ calcolati con le forme chiuse distano dai risultati FEM del 5%, per tutta la gamma di rapporti di ciclo e di geometrie considerate.

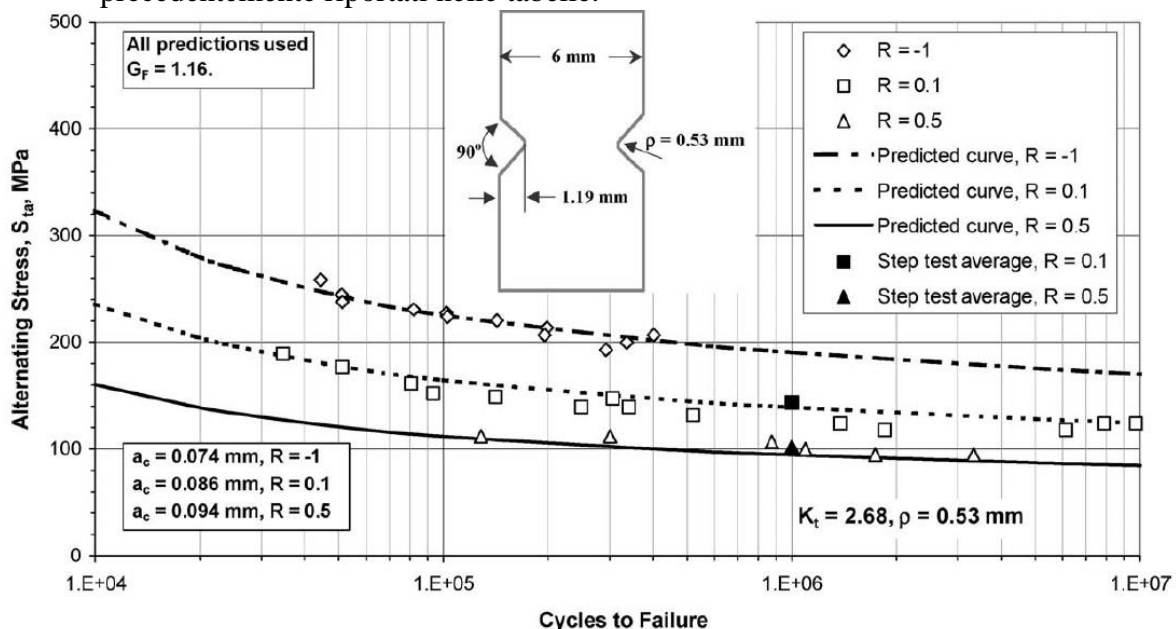
- Al fine di dimostrare l'applicabilità del metodo anche quando si ha a disposizione un set di dati sperimentali limitato, è stato effettuato il calcolo del parametro G_F tenendo conto solamente dei provini con $K_t = 2$ (con rapporti di ciclo 0.1 e 0.5): per tali dati, si ottiene un valor medio del parametro pari a $G_F = 1.14$ (contro il valore medio di tutti i dati pari a 1.21). Tale valore del parametro del gradiente di Findley è stato utilizzato poi per calcolare il valore di K_f per tutti i test eseguiti, sia con il metodo FEM che con le espressioni in forma chiusa, secondo le procedure illustrate in precedenza. I valori di K_f così calcolati sono stati confrontati con i valori di K_f ricavati sperimentalmente. I risultati sono riportati nella seguente tabella.

Test case	K_t	Notch radius (mm)	Notch depth (mm)	R -ratio	Maximum measured K_f	Minimum measure K_f	Average measure K_f	K_f using FEM	K_f using closed-form analysis
1	2.00	0.330	0.100	0.1	1.66	1.53	1.58	1.61	1.57
2	2.00	0.330	0.100	0.5	1.91	1.35	1.49	1.51	1.56
3	2.78	0.330	0.729	-1	2.94	2.64	2.79	2.72	2.17
4	2.78	0.330	0.729	0.1	1.82	1.76	1.80	2.21	2.18
5	2.78	0.330	0.729	0.5	1.83	1.66	1.75	2.08	2.17
6	2.78	0.330	0.729	0.65	1.86	1.71	1.80	2.17	2.17
7	2.78	0.203	0.254	0.1	1.72	1.70	1.71	2.35	2.18
8	2.78	0.203	0.254	0.5	1.75	1.73	1.74	2.16	2.17
9	2.78	0.127	0.127	0.1	2.37	1.74	1.98	2.32	2.18
10	2.78	0.127	0.127	0.5	1.69	1.61	1.65	2.08	2.17
11	4.10	0.127	0.635	0.1	3.24	2.90	3.06	3.32	3.21
12	4.10	0.127	0.635	0.5	2.96	2.73	2.87	3.12	3.20

- I risultati delle previsioni di K_f appaiono correlati ai valori di K_f ricavati sperimentalmente, considerando anche il grado di variabilità del fenomeno;
 - In particolare, per entrambi i metodi di previsione, i risultati presentano un andamento analogo ai valori di K_f sperimentali.
- E' stata poi operata una previsione in termini di curva S-N utilizzando i dati dei provini con il doppio intaglio laterale, considerando il valor medio del parametro $G_F = 1.21$ ricavato per i dati precedentemente presentati. In questo caso, il set di dati è completamente differente, come pure la geometria dell'intaglio. E' stata utilizzata la procedura illustrata in precedenza per le espressioni in forma chiusa. I risultati, confrontati con i dati ricavati sperimentalmente, vengono riportati nel seguente diagramma.



- Le previsioni basate sulle espressioni in forma chiusa appaiono buone per il rapporto di ciclo $R = 0.5$;
 - Per gli altri valori del rapporto di ciclo, $R = -1$ e $R = 0.1$, il grado di correlazione tra i valori misurati e le previsioni effettuate appare inferiore.
- E' stato infine effettuato un ultimo confronto, analogo al precedente, utilizzando un valore per il parametro del gradiente di Findley pari a $G_F = 1.16$, cioè ad una deviazione standard dal valore medio (1.21) calcolato con i dati dei provini cilindrici precedentemente riportati nelle tabelle.



- Appare evidente la maggior bontà delle previsioni rispetto ai risultati misurati;
- Considerata la variabilità del fenomeno della fatica, i risultati fin qui illustrati evidenziano la sostanziale costanza del parametro G_F e l'applicabilità dell'approccio proposto basato sul criterio di Findley.

A3.2.10. Fatigue strength of Ti-6Al-4V at very long lives [23]

Tema trattato: Resistenza a fatica della lega Ti-6Al-4V per una vita di 10^9 cicli con test ad elevata frequenza. Valutazione dell'effetto della frequenza e della temperatura del provino (generata per smorzamento interno del materiale) sulla resistenza a fatica.

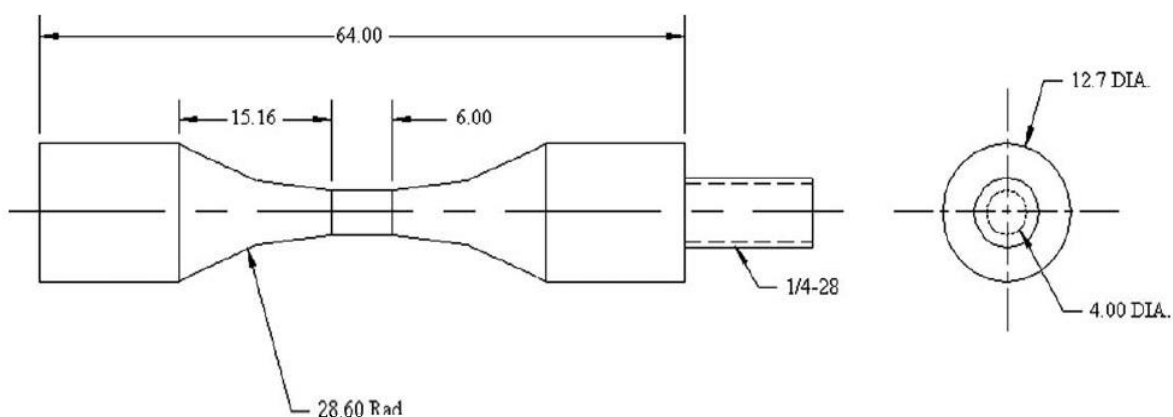
Materiale dei provini: Ti-6Al-4V.

Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Solubilizzazione a 930°C (2 h);
- Raffreddamento in aria forzata;
- Ricottura a 700°C (2 h);
- Lavorazione di molatura con tecnica *low stress grind*;
- Lucidatura a mano;
- Ricottura di distensione a 700°C (1 h)
- Fresatura chimica in soluzione di acido nitrico e idrofluorico per rimuovere lo strato superficiale

Microstruttura del provino: struttura *duplex* con il 60% di fase primaria α e il 40% di fase lamellare $\beta + \alpha$.

Geometria dei provini utilizzati: riportata in figura (in mm).



Parametri sperimentali:

- Rapporto di ciclo $R = -1$;
- Frequenza di prova $f = 20 \text{ kHz}$

Procedura sperimentale:

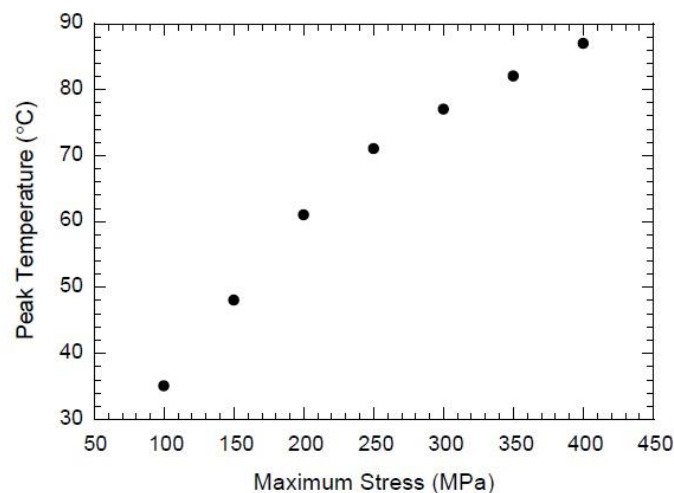
- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Utilizzo di un sistema di prova ultrasonico (per ulteriori informazioni fare riferimento all'articolo).
- Utilizzo del metodo *staircase* per la determinazione della tensione limite alternata a 10^9 cicli.
- Utilizzo di una telecamera a raggi infrarossi per determinare la distribuzione di temperatura della superficie del provino.
- Rilevamento della temperatura sviluppata dal provino testato ad elevate frequenze per diversi livelli di tensione.

Risultati e discussione:

- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici), a temperatura ambiente:

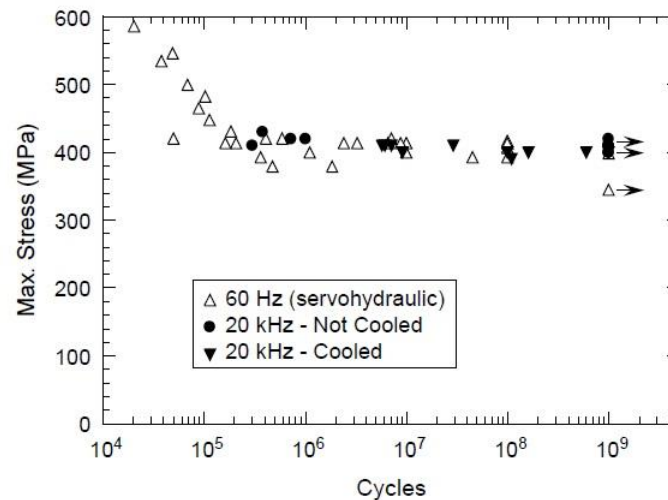
Tensione di rottura	968 MPa
Tensione di snervamento	930 MPa
Modulo di Young	116 GPa

- Aumento di temperatura del provino dovuto allo smorzamento interno del materiale testato ad elevate frequenze. Temperatura del provino in funzione della tensione massima utilizzata nel ciclo, per $R = -1$:



- Nel campo delle tensioni utilizzate, vengono raggiunte temperature di circa 85°C ;

- Non si ritiene che tale aumento di temperatura possa influire sulla resistenza a fatica del materiale.
- Resistenza a fatica dei provini (frequenza di test $f = 20 \text{ kHz}$) raffreddati o meno e confronto con la resistenza a fatica ottenuta in altre pubblicazioni con frequenza di test di 60 Hz :



Si ricorda che tutte le prove sono state effettuate con rapporto di ciclo $R = -1$.

- Il raffreddamento dei provini non influisce sulla resistenza a fatica degli stessi. L'aumento di temperatura del provino alle elevate frequenze a causa della dissipazione di energia del materiale non è di entità tale da condizionare il comportamento del materiale stesso.
- I risultati ottenuti per le prove condotte a 20 kHz concordano con quelli ottenuti per le prove condotte in precedenza alla frequenza di 60 Hz : pertanto si ritiene che per cicli a fatica con rapporto di ciclo $R = -1$ la frequenza di applicazione del carico non influenzi la resistenza a fatica del pezzo.
- Per $R = -1$, la tensione limite (alternata o massima) per una vita di 10^9 cicli della lega Ti-6Al-4V con struttura *duplex* considerata è approssimativamente 410 MPa .
- Apparentemente la lega Ti-6Al-4V con struttura *duplex* considerata possiede un limite di fatica di 410 MPa .

A3.2.11. Behaviour of fatigue cracks emanating from circular notches under bending [24]

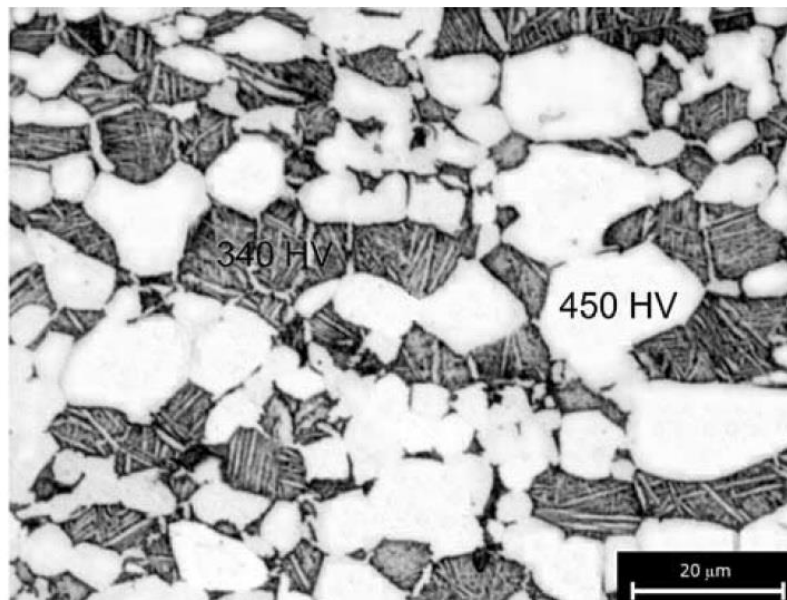
Tema trattato: comportamento delle *small cracks* che propagano da intagli di componenti in lega Ti-6Al-4V. Provini con intaglio circolare centrale sottoposti a fatica con test di flessione a 4 punti.

Materiale dei provini: Ti-6Al-4V (laminati ricotti).

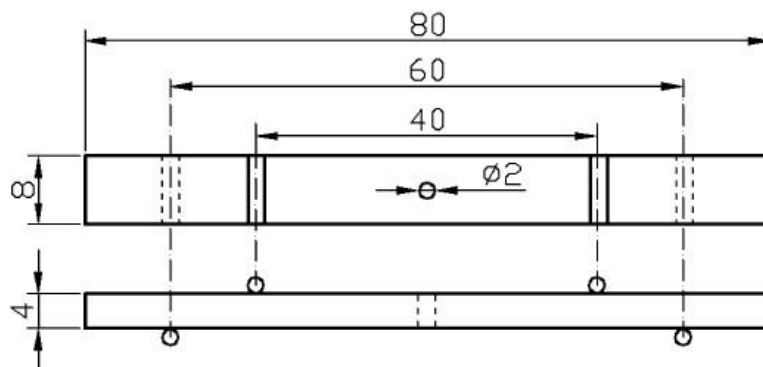
Sequenza lavorazioni e trattamenti termici:

- Ricottura di ricristallizzazione in azoto a 925°C (1 h);
- Raffreddamento in azoto (velocità di raffreddamento $100^{\circ}\text{C}/\text{min}$);
- Invecchiamento a 500°C (4 h);
- Lavorazione del provino;
- Foratura del provino;
- Rettifica del foro.

Microstruttura del provino: duplex con grani di fase α primaria (51%) e grani $\alpha + \beta$ con struttura lamellare (49%). Organizzazione di alcuni grani di fase α primaria in *clusters* (aggregati) di circa $200\ \mu\text{m}$.



Geometria dei provini utilizzati: provini con foro centrale da sottoporre a prova di flessione a 4 punti. Dimensioni riportate nell'immagine (in mm).



- Per tale geometria, si ha un fattore teorico di concentrazione delle tensioni di circa $K_t = 1.86$.
- L'asse del provino è parallelo all'asse di laminazione. Il foro centrale è rettificato per ottenere una rugosità superficiale di $0.1 \mu m$.

Parametri sperimentali:

- Test di fatica flessionale con rapporto di ciclo $R = 0.1$ e frequenza $f = 15 \text{ Hz}$;
- Due diversi valori di tensione massima: $\sigma_{max} = 900 \text{ MPa}$ e $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$.

Procedura sperimentale:

- Caratterizzazione quasi-statica del materiale dopo trattamenti termici.
- Test di microdurezza per determinare la resistenza delle due fasi.
- Test di fatica flessionale con i parametri sopra riportati.
- Confronto delle distribuzioni di tensione per i due diversi valori di tensione massima mediante modello FEM (software Ansys[®] 5.7, elementi *brick* a otto nodi).
- Studio della propagazione delle cricche attraverso analisi di immagini con microscopio stereoscopico, rilevate ad intervalli regolari della prova a fatica applicando il 50% della tensione massima per tenere le cricche in apertura.
- Analisi delle superfici di frattura con microscopio SEM.

Risultati e discussione:

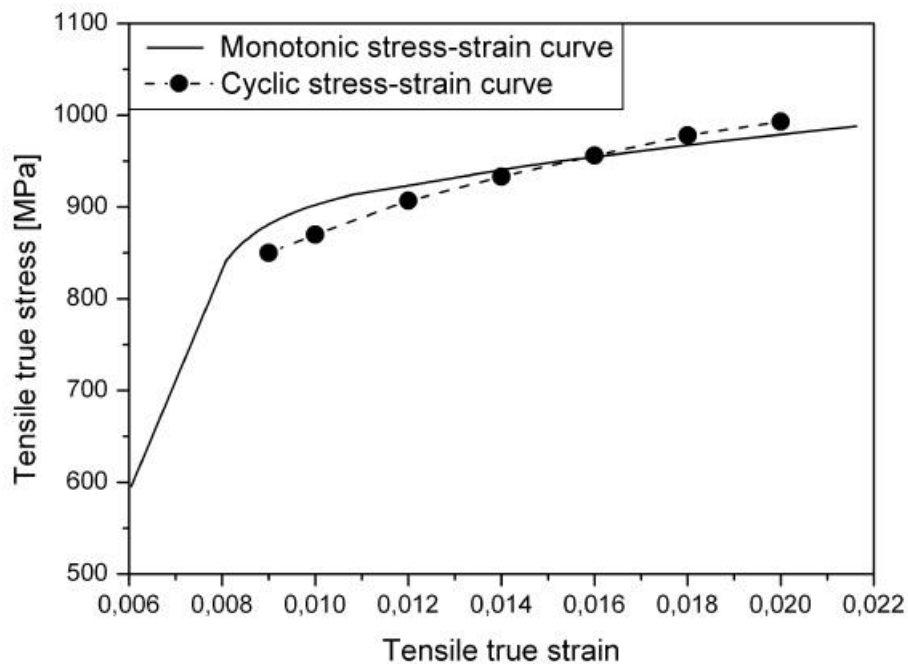
- Proprietà meccaniche del materiale base (dopo trattamenti termici) in direzione longitudinale:

Tensione di rottura	1030 MPa
Tensione di snervamento	900 MPa
Tensione di rottura vera	1320 MPa
Modulo elastico	107 GPa
Elongazione a rottura	12%
Riduzione area	26%

- Test di microdurezza sulla microstruttura:

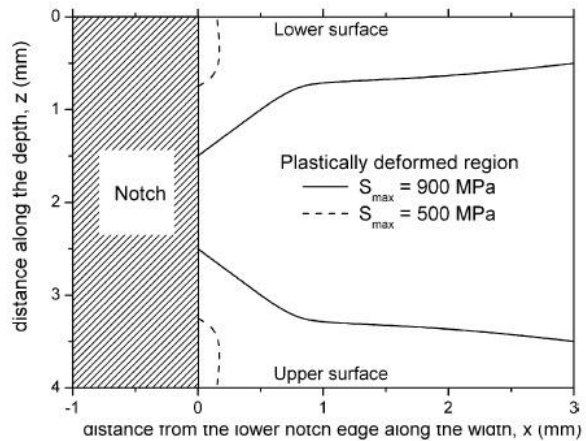
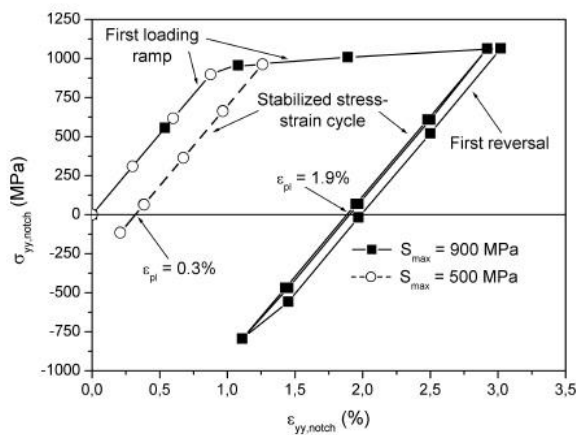
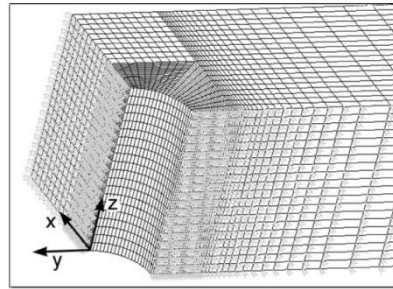
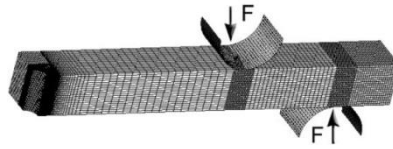
I risultati dei test di microdurezza eseguiti evidenziano una durezza maggiore per la fase α primaria (circa $450 HV_{0.01}$) rispetto alle colonie $\alpha + \beta$ ($340 HV_{0.01}$). Ciò è dovuto al fatto che durante il trattamento di ricristallizzazione i grani di fase α primaria si arricchiscono di elementi α -stabilizzanti, in particolare alluminio e ossigeno. Pertanto, le lamelle di fase α formate dalla fase β nei grani $\alpha + \beta$ presentano una minor concentrazione di alluminio e ossigeno. Poiché questi elementi favoriscono l'invecchiamento per precipitazione di fase α_2 (Ti_3Al), i grani $\alpha + \beta$ presentano una minor durezza.

- Confronto tra curva monotona e curva ciclica stabilizzata (ottenuta con test assiali in controllo di deformazione con $R_\epsilon = -1$)



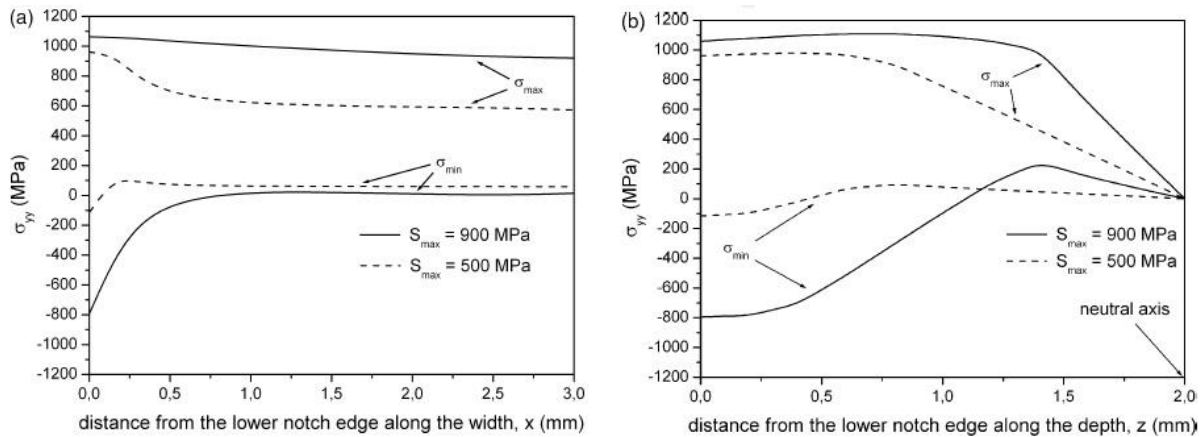
- La tensione di snervamento della curva ciclica stabilizzata è minore di quella monotona ($870 MPa$ contro $900 MPa$);
- La pendenza del tratto plastico evidenzia un incrudimento del materiale, per cui la curva ciclica stabilizzata interseca la curva monotona a causa di una maggior pendenza del tratto plastico.

- Analisi elastoplastiche. Modello FEM e redistribuzione delle tensioni:



- o La stabilizzazione del ciclo di carico-scarico del provino all'apice dell'intaglio avviene dopo un ciclo per la tensione massima di valore minore (500 MPa) e dopo tre cicli per la tensione massima di valore maggiore (900 MPa);
- o Le deformazioni plastiche permanenti all'apice dell'intaglio ammontano all'1.9 % per $\sigma_{max} = 900 \text{ MPa}$ e allo 0.3 % per $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$;
- o L'intero provino, nella sua larghezza, subisce la deformazione plastica per $\sigma_{max} = 900 \text{ MPa}$, mentre per $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$ la zona deformata plasticamente è notevolmente ridotta;
- o Si può notare come, nonostante al provino sia applicato un rapporto di ciclo positivo, il rapporto di ciclo all'apice dell'intaglio sia invece negativo, cioè parzialmente di compressione.

- Valori delle tensioni massime e minime lungo la larghezza e lo spessore del provino:

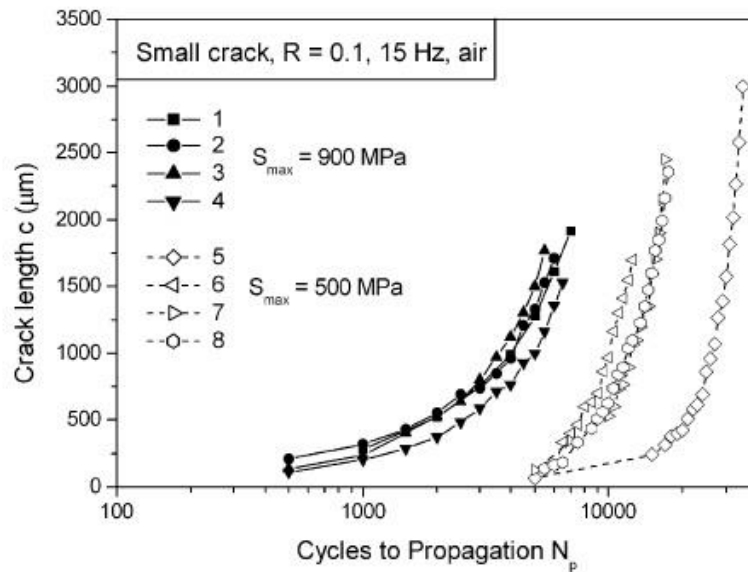


- Si può notare come per entrambi i valori di tensione massima si abbia redistribuzione delle tensioni all'apice dell'intaglio, poiché qui la tensione supera localmente la tensione di snervamento del materiale (si ricorda che per questa geometria e per il tipo di carico, si ha $K_t = 1.86$);
- Il rapporto di ciclo all'apice dell'intaglio non è uguale al rapporto di ciclo nominale $R = 0.1$ applicato, mentre all'aumentare della distanza dall'apice dell'intaglio il rapporto di ciclo locale tende ad essere uguale a quello nominale.

- Considerazioni sull'iniziazione delle cricche per fatica:

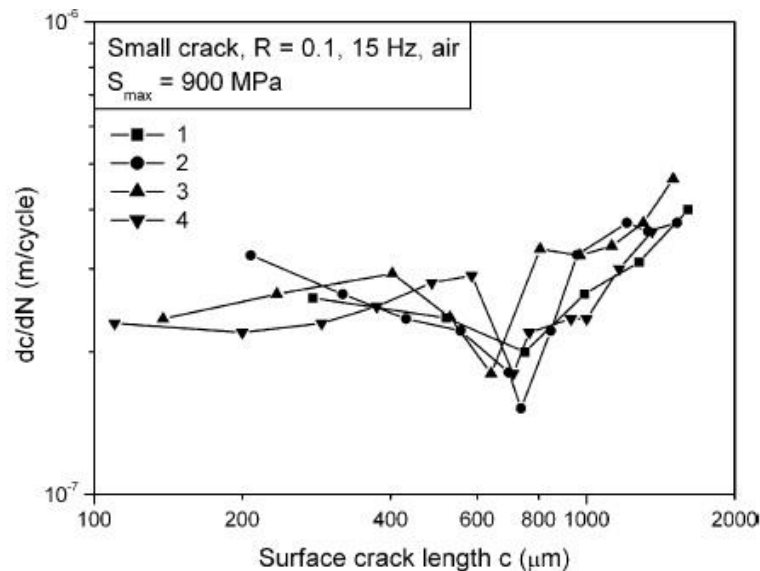
Nel provino si formano, sulla faccia inferiore, cricche a quarto di ellisse. Sulla faccia superiore non si osservano cricche. Per la tensione massima di valore superiore, $\sigma_{max} = 900 \text{ MPa}$, si osserva che la condizione critica di tensione per l'iniziazione della cricca, calcolata con la formulazione di Sines nel modello FEM, è raggiunta all'apice dell'intaglio, nella faccia inferiore del provino, mentre per il valore inferiore di tensione massima, $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$, tale condizione si può avere all'apice dell'intaglio, nella faccia inferiore o lungo la superficie del foro a circa $100 \mu\text{m}$ dalla superficie inferiore. Tali risultati sono in accordo con le osservazioni al microscopio SEM delle superfici del provino. Inoltre per la tensione massima di $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$, si è osservato che l'innescò della cricca avviene nella regione lamellare, probabilmente a causa della minor resistenza provata dai risultati del test di microdurezza precedentemente riportati. Si può concludere quindi che a livelli di tensione più bassi la posizione di innescò della cricca dipenda dalla posizione in cui si trova la parte più debole della microstruttura.

- Considerazioni sulla propagazione delle cricche per fatica:



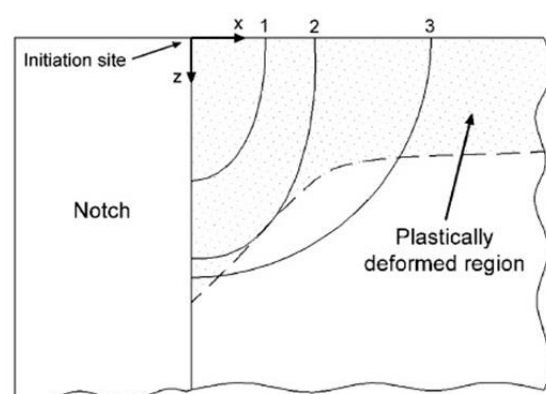
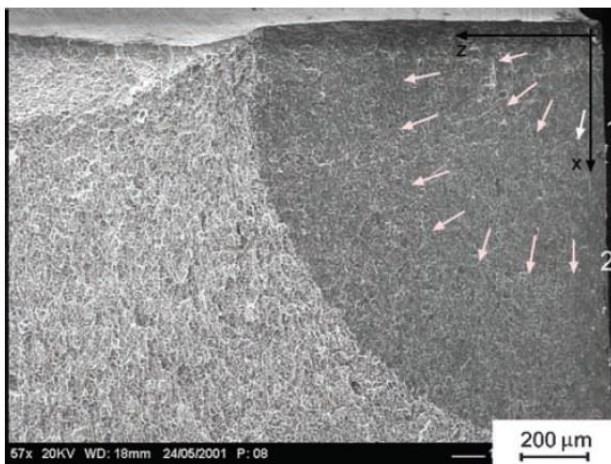
- o La vita a fatica spesa per l'iniziazione delle piccole cricche copre l'85% dell'intera vita a fatica per il livello di tensione maggiore e il 75% per il livello di tensione inferiore.

- Propagazione della cricca per $\sigma_{max} = 900 \text{ MPa}$

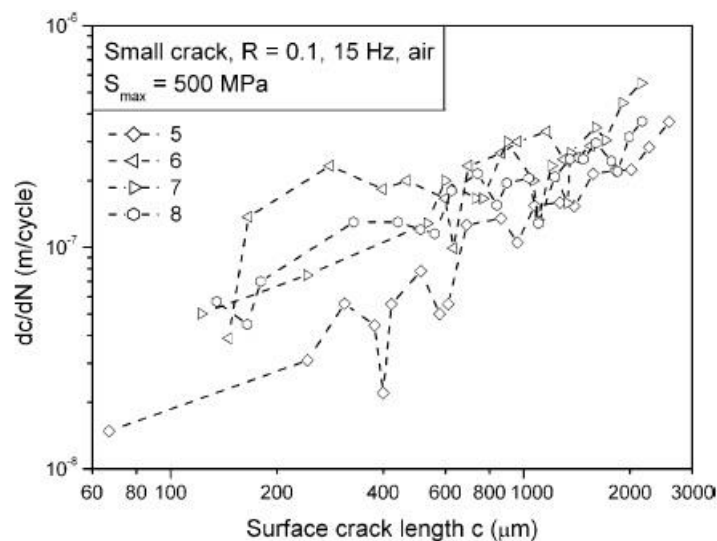


Il diagramma riporta la velocità di propagazione della cricca in funzione della lunghezza superficiale della stessa. Si può notare che la velocità di propagazione della cricca resta costante dopo l'iniziazione, ma si rileva la presenza di un minimo per una

lunghezza superficiale della cricca di circa $700 \mu\text{m}$. Una spiegazione di tale fenomeno è data dal fatto che si tratta di una cricca meccanicamente piccola (*mechanically small crack*), la cui forza propagante è data prevalentemente dalla zona di plasticizzazione di fronte all'apice dell'intaglio. La plasticizzazione del materiale porta ad incrudimento a freddo (cioè aumento della densità delle dislocazioni) e presenza di tensioni interne. Da osservazioni precedenti, l'incrudimento a freddo riduce la microduttilità e quindi la resistenza alla propagazione delle cricche. Le tensioni interne localizzate dovute ad una distribuzione non omogenea delle dislocazioni (per il loro accumulo ai bordi di grano) vanno ad aggiungersi alle tensioni applicate, portando ad un aumento locale della tensione media del ciclo. Pertanto, la velocità di propagazione delle cricche è elevata, come osservato nel diagramma. Allo stesso tempo, la presenza di tensioni di compressione all'apice dell'intaglio per effetto della redistribuzione delle tensioni porta ad un effetto di chiusura della cricca, impedendo alla velocità di propagazione di aumentare man mano che la cricca propaga. Il valore minimo della velocità di propagazione della cricca può essere dovuto all'interazione del fronte della cricca con il confine della zona di deformazione plastica di fronte all'apice dell'intaglio: la cricca propaga velocemente all'interno di tale zona, mentre il superamento della stessa porta ad un rallentamento nella propagazione della cricca. A ciò si associa un cambiamento della forma della cricca durante la sua propagazione, dovuto ad una non omogeneità del rapporto di ciclo locale nella zona in cui la cricca propaga (risultato ottenuto in lavori precedenti). Tali ipotesi sono supportate dalle osservazioni della superficie di frattura.



- Propagazione della cricca per $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$

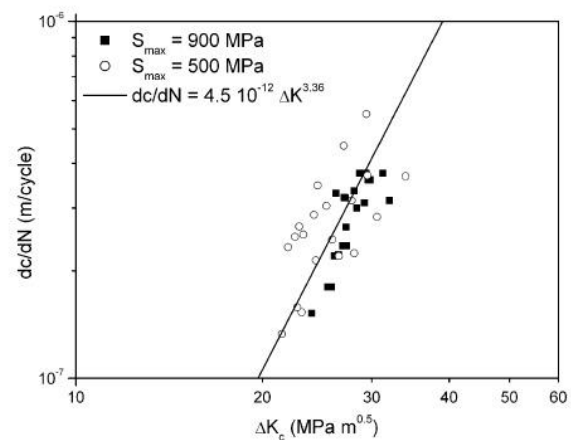
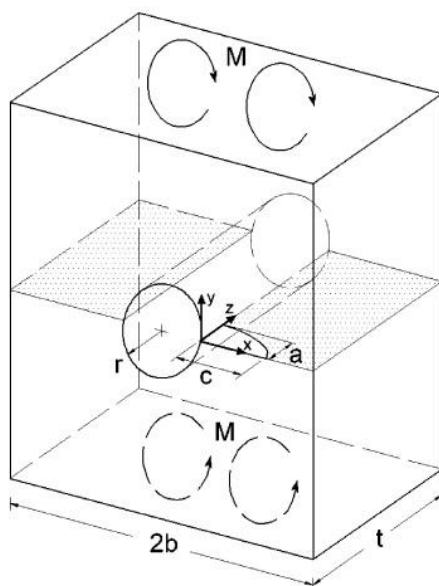


Il diagramma riporta la velocità di propagazione della cricca in funzione della lunghezza superficiale della stessa. Si può notare come il valore iniziale della velocità di propagazione della cricca sia più basso rispetto al caso con tensione massima maggiore. La zona di deformazione plastica in seguito alla redistribuzione delle tensioni è in questo caso limitata a circa $200 \mu\text{m}$ dall'apice dell'intaglio, pertanto i fenomeni che entrano in gioco nel caso precedente hanno solo un ruolo marginale.

Per i provini 6-7-8, le immagini SEM evidenziano come l'innesco della cricca sia stato sub-superficiale, pertanto le curve iniziano più tardi e a valori di velocità di propagazione più alti rispetto al provino 5: quando la cricca si è manifestata in superficie, per gli ultimi tre provini questa aveva dimensioni maggiori. Si notano oscillazioni nella velocità di propagazione della cricca: questo a causa delle interazioni locali della zona di plasticizzazione all'apice della cricca con barriere microstrutturali. Infatti si nota come le oscillazioni avvengano in intervalli di lunghezza della cricca di $200 \mu\text{m}$, dimensione dei *clusters* di fase α primaria osservati nella microstruttura. Si può quindi intuire che per questo livello di tensione la propagazione della cricca sia controllata dalla dimensione dei *clusters* di fase primaria α , in cui la cricca propaga più velocemente, per poi rallentare in corrispondenza dell'attraversamento della matrice lamellare $\alpha + \beta$. Tuttavia per i provini con nucleazione della cricca sub-superficiale, tali osservazioni possono non essere valide, in quanto basate sull'osservazione superficiale della cricca senza conoscere le caratteristiche microstrutturali della regione interna del provino. Osservando poi come le oscillazioni nella velocità di propagazione della cricca si riducano per sparire ad una lunghezza superficiale della cricca di $1800 \mu\text{m}$, si può pensare che le osservazioni superficiali siano valide per

studiare l'interazione tra le cricche e la microstruttura per cricche di lunghezza minore di qualche volta il diametro dei grani. In particolare, come osservato in lavori precedenti, il comportamento della cricca nella sua propagazione risulta influenzato dalle caratteristiche microstrutturali (*microstructurally small crack*) per cricche lunghe fino a otto volte il parametro microstrutturale dominante.

- Si può concludere che il comportamento delle cricche che propagano per fatica attraversa quindi due fasi: la prima durante la propagazione nella zona di deformazione plastica con velocità di propagazione della cricca più elevata (*mechanically small cracks*), la seconda influenzata dalla microstruttura, che introduce oscillazioni nella velocità di propagazione della cricca correlata alla grandezza dei *clusters* di grani di fase α primaria per la microstruttura in esame.
- Calcolo del fattore di intensificazione delle tensioni di modo I (K) e curva di Paris:



- Il fattore di intensificazione delle tensioni di modo I è stato calcolato utilizzando la formulazione di Newman e Raju per una cricca a quarto di ellisse propagante da un foro circolare in una piastra finita soggetta a flessione:

$$K = H_{ch} * S * \sqrt{\frac{\pi * a}{Q}} * F_{ch} \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{r}{t}, \frac{r}{b}, \frac{c}{b} \right)$$

$$\text{Con } Q = 1 + 1.464 * \left(\frac{c}{a} \right)^{1.65}$$

- Nelle espressioni precedenti, Q è un fattore di forma, H_{ch} un moltiplicatore per la flessione, S è la tensione di flessione delle fibre più esterne e F_{ch} un fattore correttivo. In questo caso, è stato assunto un rapporto (a/c) pari a 0.9, basato su osservazioni delle superfici di frattura. Come discusso precedentemente, la cricca varia la propria forma durante la propagazione: pertanto tale assunzione è valida solo per gli ultimi stadi di propagazione, in cui la forma della cricca risulta essere costante.
- Il fattore di intensificazione delle tensioni varia tra $20 MPa\sqrt{m}$ e $32 MPa\sqrt{m}$. La zona di plasticizzazione all'apice della cricca risulta perciò essere compresa tra 100 e $250 \mu m$, significativamente piccola. Pertanto l'utilizzo della meccanica della frattura lineare elastica risulta giustificato.
- I dati relativi al livello di tensione più elevato ($\sigma_{max} = 900 MPa$) sono relativi a cricche di lunghezza maggiore di $700 \mu m$, ovvero quando la cricca si trova ormai nella regione elastica del provino (*mechanically long crack*);
- I dati relativi al livello di tensione minore ($\sigma_{max} = 500 MPa$) sono relativi a cricche di lunghezza maggiore di $1800 \mu m$, ovvero quando cessano le oscillazioni nella velocità di propagazione della cricca (*microstructurally long crack*);
- I dati ricavati per i due livelli di tensione giacciono sulla medesima curva di Paris, e sono in accordo con quelli ottenuti per microstrutture simili in lavori precedenti.

Capitolo 2

Campi di tensione all'apice di cricche e intagli: problema tridimensionale

Nei problemi di interesse ingegneristico, la determinazione dello stato tensionale in campo lineare elastico all'interno di un componente in prossimità di cricche o intagli, di fondamentale importanza per la progettazione statica e a fatica del componente stesso, viene effettuata attraverso metodi analitici o numerici.

Per i metodi analitici, utilizzati per i componenti più semplici, si ricorre nella quasi totalità dei casi ad approssimazioni bidimensionali, assumendo uno stato di tensione piana o di deformazione piana: ciò equivale a considerare il componente dotato, rispettivamente, di spessore esiguo o di spessore infinito. Per l'utilizzo di tali metodi, che permettono di ricavare lo stato di tensione di fronte all'apice di cricche e intagli, è comunque necessaria la disponibilità di dati ricavati sperimentalmente o numericamente (ad esempio, il fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t dal Peterson per intagli poco severi, il fattore di forma α dal Nakamura per cricche, SIFs ed N-SIFs per cricche e intagli severi).

Per quanto riguarda i metodi numerici, ci si riferisce invece a metodi atti a risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali che governano il problema dell'equilibrio di un corpo elastico: tali metodi, approssimati, vengono generalmente implementati all'interno di codici di calcolo agli elementi finiti, in cui forze, vincoli e spostamenti vengono applicati su un modello più o meno dettagliato del componente. I risultati ottenuti con tale metodo dipendono in modo sostanziale dal tipo di modello scelto per rappresentare il componente e dal grado di accuratezza del modello stesso. Per modelli complessi, le analisi richiedono tempi elevati e una notevole occupazione di risorse computazionali: per tali motivi, anche nel campo degli elementi finiti si ricorre spesso all'utilizzo delle approssimazioni bidimensionali precedentemente citate.

Sono tuttavia presenti delle soluzioni analitiche per alcuni problemi tridimensionali di concentrazione delle tensioni. Per un riassunto esaustivo delle soluzioni presenti, si rimanda all'introduzione dell'articolo di Zappalorto M. e Lazzarin P. [25] e ai riferimenti in questo contenuti.

Un ulteriore resoconto completo riguardante gli effetti dell'estensione tridimensionale di un componente che presenta un intaglio o una cricca è disponibile nel lavoro di Pook [26] e nei riferimenti in esso contenuti. In tale articolo si tratta inoltre del problema della singolarità dei *corner point*, ovvero i punti in cui una cricca o un intaglio intersecano la superficie libera del componente. Sempre in tale lavoro viene riportata una descrizione facente uso delle distorsioni di Volterra per il campo di spostamenti in componenti tridimensionali criccati o con un intaglio.

In entrambi gli articoli citati in questa introduzione si riportano inoltre numerosi riferimenti riguardanti la comparsa di sollecitazioni tipiche del modo III per provini in tre dimensioni sollecitati con carichi di modo II, e viceversa: si ritiene infatti che i modi II e III non possano esistere indipendentemente l'uno dall'altro. [25, 26, 27, 28, 29]

Verrà ora esposto il frame analitico utilizzato da Lazzarin e Zappalorto per la soluzione di campi di tensione tridimensionali, che tiene conto delle interazioni tra i modi II e III per cricche e intagli severi in piastre spesse, a partire dalle assunzioni di Kane e Mindlin di stato di deformazione piana generalizzato.

2.1 Frame analitico

Il frame analitico proposto da Lazzarin e Zappalorto [25, 30] per la soluzione dello stato di tensione tridimensionale di fronte all'apice di cricche e intagli si basa sulle ipotesi di Kane e Mindlin di stato di deformazione piana generalizzato. [31]

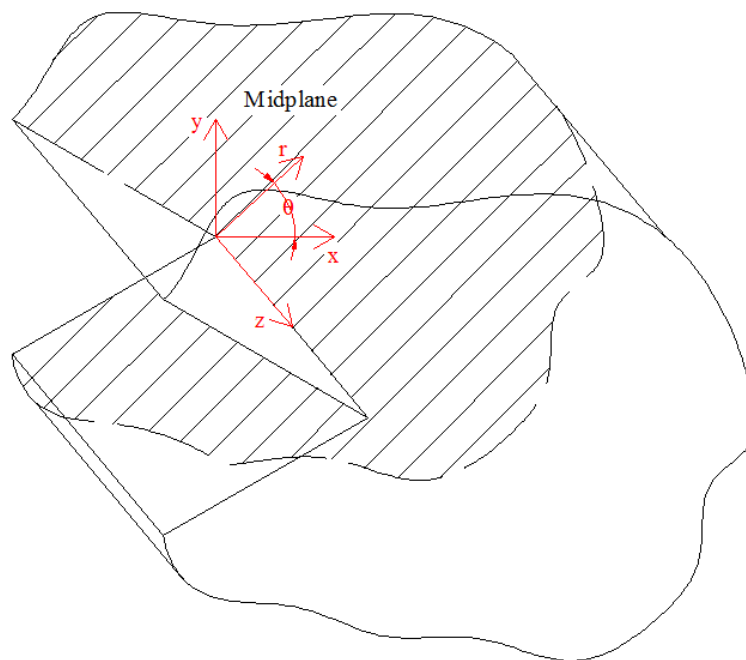


Figura 2.1 Sistemi di coordinate cartesiano e cilindrico utilizzati per componenti tridimensionali

Le ipotesi di Kane e Mindlin sulle componenti degli spostamenti sono le seguenti:

$$\begin{aligned}u_x &= u(x, y) \\u_y &= v(x, y) \\u_z &= f(z)w(x, y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

con $f(z) = bz$.

Le componenti della deformazione si possono quindi scrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= f'(z) * w = bw \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= f(z) * \frac{\partial w}{\partial y} = bz \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= f(z) * \frac{\partial w}{\partial x} = bz \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Come si può notare dalle equazioni, assumendo le ipotesi sugli spostamenti di Kane e Mindlin le componenti normali delle deformazioni, ε_{ii} , e la componente γ_{xy} risultano indipendenti dalla coordinata z . Pertanto, richiamando le relazioni tensione-deformazione note dalla teoria dell'elasticità, è evidente come anche le componenti di tensione σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} e σ_{zz} risultino indipendenti da z . Risultano infatti:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + f'(z) * w \right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f'(z) * w \right) \right] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[(1-\nu) f'(z) * w + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= G * \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\tau_{yz} = G * f(z) \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xz} = G * f(z) \frac{\partial w}{\partial x} = \tau_{zx}$$

Computando l'equilibrio nella direzione z , si ottiene la seguente equazione:

$$\nabla^2 w + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} * \frac{f''(z)}{f(z)} * w = 0 \quad (2.4)$$

Per le ipotesi iniziali, $f(z) = bz$, pertanto $f''(z) = 0$. L'equazione può quindi essere scritta semplicemente come:

$$\nabla^2 w = 0 \quad (2.5)$$

Si considerano ora le equazioni di equilibrio nelle direzioni x e y :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + Gb \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Gb \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Derivando la prima equazione secondo x e la seconda equazione secondo y e sommandole, si ottiene (ricordando il teorema di Schwarz per le derivate parziali):

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + Gb \nabla^2 w = 0 \quad (2.7)$$

Considerando l'equazione precedentemente ottenuta, si ha $\nabla^2 w = 0$, pertanto questa seconda equazione può essere ridotta come:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Tale equazione risulta automaticamente soddisfatta introducendo la funzione di Airy:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.9)$$

L'equazione di compatibilità nel piano xy è la seguente:

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = \nu\nabla^2\sigma_{zz} \quad (2.10)$$

Si considera la terza equazione di Beltrami-Mitchell:

$$\nabla^2\sigma_{zz} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (2.11)$$

Ricordando che le componenti di tensione σ_{ii} risultano indipendenti dalla coordinata z , tale equazione garantisce:

$$\nabla^2\sigma_{zz} = 0 \quad (2.12)$$

Da tale risultato, si può ridurre l'equazione di compatibilità nel piano come:

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = 0 \quad (2.13)$$

Si può asserire quindi che, considerate le ipotesi di Kane e Mindlin sulle componenti degli spostamenti, il problema tridimensionale può essere convertito nella somma di un problema biarmonico, tipico delle condizioni di deformazione piana e tensione piana, e un problema armonico, tipico del caso di carico di taglio fuori piano:

$$\begin{cases} \nabla^4\phi = 0 \\ \nabla^2 w = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Tali equazioni devono essere simultaneamente soddisfatte. La prima è l'equazione biarmonica soluzione del problema nel piano, mentre la seconda è l'equazione che fornisce la soluzione di problemi fuori piano, ed è stata largamente usata per problemi di barre intagliate soggette a torsione.

2.2 Problema nel piano, $\nabla^4\phi = 0$

Per quanto riguarda il problema nel piano, governato dall'equazione biarmonica, si considera la soluzione ricavata da Williams [32] utilizzando un'espansione di autofunzioni (qui arrestata ai termini del primo ordine) e da England [33] e Lazzarin-Tovo [34] per intagli a spigolo vivo (raggio di fondo intaglio $\rho = 0$) utilizzando la trattazione di Mushkelisvily-Kolosov. Nel caso di intagli raccordati, non esaminato in tale trattazione, si rimanda a Filippi *et al.* [35]

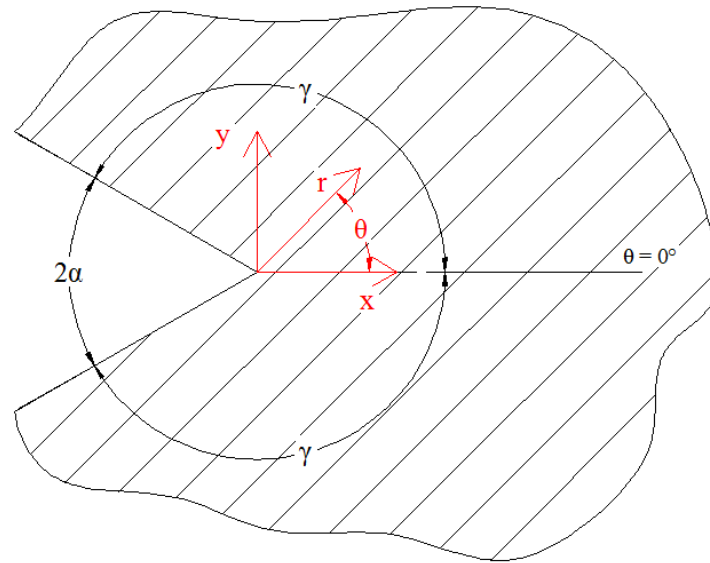


Figura 2.2 Sistemi di riferimento cartesiano e polare per il problema nel piano

In tale soluzione, per ciascuna delle tensioni nel piano si possono distinguere un contributo simmetrico, legato al modo I, ed un contributo antisimmetrico, legato al modo II.

Vengono ora riportate le componenti di tensione in coordinate polari, secondo il sistema di riferimento illustrato in Fig. 2.2.

- Contributo di modo I:

$$\begin{pmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2.15)$$

- Contributo di modo II:

$$\begin{pmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{pmatrix}^{(2)} \quad (2.16)$$

Le funzioni angolari $\widetilde{\sigma}_\theta$, $\widetilde{\sigma}_r$ e $\widetilde{\tau}_{r\theta}$, di modo I e II, presenti nelle scritture precedenti, assumono la seguente forma:

- Modo I:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{pmatrix}^{(1)} = \frac{1}{[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left[\begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\theta \end{pmatrix} + \chi_1(1 - \lambda_1) \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1)\theta \\ -\cos(1 + \lambda_1)\theta \\ \sin(1 + \lambda_1)\theta \end{pmatrix} \right] \quad (2.17)$$

- Modo II:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{pmatrix}^{(2)} = \frac{1}{[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]} \left[\begin{pmatrix} -(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\theta \\ -(3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\theta \end{pmatrix} + \chi_2(1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} -\sin(1 + \lambda_2)\theta \\ \sin(1 + \lambda_2)\theta \\ \cos(1 + \lambda_2)\theta \end{pmatrix} \right] \quad (2.18)$$

In tali scritte, i fattori di intensificazione delle tensioni di modo I e II sono quelli definiti da Gross e Mendelson: [36]

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_1} \quad (2.19)$$

$$K_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_2} \quad (2.20)$$

λ_1 e λ_2 rappresentano, rispettivamente, la prima soluzione dell'equazione agli autovalori di Williams di modo I e modo II, ottenute applicando le condizioni al contorno di assenza di tensioni sui fianchi liberi dell'intaglio:

$$\lambda_1 \sin 2\gamma + \sin 2\lambda_1 \gamma = 0 \quad (2.21)$$

$$\lambda_2 \sin 2\gamma - \sin 2\lambda_2 \gamma = 0 \quad (2.22)$$

Infine i termini χ_1 e χ_2 valgono:

$$\chi_1 = -\frac{\sin(1 - \lambda_1)\gamma}{\sin(1 + \lambda_1)\gamma} \quad (2.23)$$

$$\chi_2 = -\frac{\sin(1 - \lambda_2)\gamma}{\sin(1 + \lambda_2)\gamma} \quad (2.24)$$

Si noti come nel caso di angolo di apertura dell'intaglio nullo ($2\alpha = 0$, caso della cricca) le definizioni dei fattori di intensificazione delle tensioni di modo I e II definiti da Gross e Mendelson per intagli vivi (N-SIFs, *notch stress intensity factor*) coincidano con i fattori di intensificazione delle tensioni definiti per la cricca nella meccanica della frattura (SIF, *stress intensity factor*), ovvero, per $2\alpha = 0$, $K_1 = K_I$ e $K_2 = K_{II}$.

2.3 Problema fuori piano, $\nabla^2 w = 0$

La soluzione del problema fuori piano è stata ricavata per problemi torsionali di alberi con intagli da Zappalorto *et al.*, [37] utilizzando la trattazione di Mushkelisvily-Kolosov.

Le tensioni fuori piano assumono la seguente forma:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{r^{(1-\lambda_3)}} \begin{Bmatrix} \sin \lambda_3 \theta \\ \cos \lambda_3 \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{r^{(1-\lambda_3)}} \begin{Bmatrix} \widetilde{\tau_{zr}} \\ \widetilde{\tau_{z\theta}} \end{Bmatrix}^{(3)} \quad (2.25)$$

In cui l'N-SIF di modo III è ottenuto dall'estensione delle definizioni di Gross e Mendelson precedentemente riportate per i problemi piani:

$$K_3 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{z\theta})_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_3} \quad (2.26)$$

Anche in questo caso, per $2\alpha = 0$, $K_3 = K_{III}$.

Si noti come anche per queste componenti si possa distinguere una parte simmetrica e una parte antisimmetrica. Dall'applicazione delle condizioni al contorno di assenza di tensioni ai fianchi liberi dell'intaglio si ottengono due equazioni che permettono di ottenere i valori di $\lambda_{3,s}$ e $\lambda_{3,a}$, in cui i pedici s e a indicano rispettivamente la parte simmetrica e la parte antisimmetrica della tensione di taglio:

$$\sin \lambda_{3,s} \gamma = 0 \quad (2.27)$$

$$\cos \lambda_{3,a} \gamma = 0 \quad (2.28)$$

Poiché risolvendo queste equazioni si ottengono i seguenti valori per gli autovalori $\lambda_{3,s}$ e $\lambda_{3,a}$:

$$\lambda_{3,s} = 2 \lambda_{3,a} = \frac{\pi}{\gamma} \quad (2.29)$$

Risulta evidente come la sola parte antisimmetrica della tensione di taglio fuori dal piano abbia un comportamento singolare, mentre la componente simmetrica risulti in un comportamento non singolare. Pertanto, ove non diversamente specificato, si farà riferimento alla sola componente antisimmetrica della soluzione. Per la soluzione che considera anche il contributo simmetrico si rimanda ai riferimenti. [38]

Le equazioni agli autovalori ottenute per il sistema inizialmente riportato applicando le condizioni al contorno di tensione nulla ai fianchi liberi dell'intaglio sono le seguenti:

$$(\lambda_1 \sin 2\gamma + \sin 2\lambda_1 \gamma) \sin \lambda_{3,s} \gamma = 0 \quad (2.30)$$

$$(\lambda_2 \sin 2\gamma - \sin 2\lambda_2 \gamma) \cos \lambda_{3,a} \gamma = 0 \quad (2.31)$$

Si nota come risolvendo tali equazioni, riportate solo per completezza, si ottengono le equazioni agli autovalori delle soluzioni del problema nel piano e fuori piano.

2.4 Espressioni dell'energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica

In questo paragrafo si discuterà della formulazione del SED (*Strain Energy Density*, ovvero densità di energia di deformazione) all'interno di un volume di controllo per problemi tridimensionali utilizzando le soluzioni precedentemente riportate.

Punto di partenza di tale formulazione sono le espressioni dell'energia di deformazione totale, deviatorica e idrostatica in campo lineare elastico in un generico punto P : [39, 40]

$$W_P = \frac{1}{2E} [\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_\theta\sigma_r + \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_r\sigma_z) + 2(1 + \nu)(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{rz}^2)] \quad (2.32)$$

$$W_{P,idr} = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} [\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_\theta\sigma_r + \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_r\sigma_z)] \quad (2.33)$$

$$W_{P,dev} = \frac{(1 + \nu)}{3E} [\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_\theta\sigma_r + \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_r\sigma_z) + 3(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{rz}^2)] \quad (2.34)$$

In tale trattazione, si utilizzeranno le seguenti ipotesi:

- all'interno del volume di controllo, le tensioni sono rappresentate dalle sole componenti del primo ordine della soluzione di Williams (saranno quindi trascurate componenti di ordine superiore, compresa la T-stress);
- la tensione normale nella direzione z , σ_z , verrà espressa mediante il *constraint factor* C_z in funzione delle tensioni in direzione radiale e tangenziale: $\sigma_z = C_z\nu(\sigma_\theta + \sigma_r)$

Si riportano ora le componenti di tensione, ricavate nelle soluzioni citate, utilizzate nel computo della densità di energia di deformazione:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \tilde{\sigma}_\theta^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \tilde{\sigma}_\theta^{(2)} \\ \sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \tilde{\sigma}_r^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \tilde{\sigma}_r^{(2)} \\ \sigma_z &= \frac{C_z}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \nu(\tilde{\sigma}_\theta^{(1)} + \tilde{\sigma}_r^{(1)}) + \frac{C_z}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \nu(\tilde{\sigma}_\theta^{(2)} + \tilde{\sigma}_r^{(2)}) \\ &= \frac{C_z}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \tilde{\sigma}_z^{(1)} + \frac{C_z}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \tilde{\sigma}_z^{(2)} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \\ \tau_{zr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{r^{(1-\lambda_3)}} \tilde{\tau}_{zr}^{(3)} \\ \tau_{z\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_3}{r^{(1-\lambda_3)}} \tilde{\tau}_{z\theta}^{(3)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Il SED totale, idrostatico e deviatorico può essere scritto quindi come:

$$\begin{aligned}
W_P = \frac{1}{2E} & \left[\frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_1)}} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right. \right. \\
& + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \\
& + \frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_2)}} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} \right. \\
& + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \\
& + \frac{1}{2\pi r^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} \right. \\
& + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \\
& \left. \left. + 4(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) + \frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_3)}} \left(2(1+\nu)(\widetilde{\tau}_{zr}^{(3)2} + \widetilde{\tau}_{z\theta}^{(3)2}) \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
W_{P,id} = \frac{(1-2\nu)}{6E} & \left[\frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_1)}} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right. \right. \\
& \left. \left. + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right) \right. \\
& + \frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_2)}} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} \right. \\
& \left. \left. + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} \right) \right. \\
& + \frac{1}{2\pi r^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} \right. \\
& \left. \left. + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
W_{P,dev} = \frac{(1+\nu)}{3E} & \left[\frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_1)}} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right. \right. \\
& + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \\
& + \frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_2)}} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} \right. \\
& - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \\
& + \frac{1}{2\pi r^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} \right. \\
& + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \\
& \left. \left. + 6\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) + \frac{1}{2\pi r^{2(1-\lambda_3)}} \left(3(\widetilde{\tau}_{zr}^{(3)2} + \widetilde{\tau}_{z\theta}^{(3)2}) \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.38}$$

2.5 Espressioni della densità di energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica

Per integrazione dell'energia di deformazione puntuale definita nel paragrafo precedente, si può ottenere l'energia di deformazione all'interno di un volume di controllo cilindrico, di raggio R ed altezza $h = z_2 - z_1$ centrato sull'apice della cricca o dell'intaglio (sistema di riferimento di Fig. 2.1):

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{z_1}^{z_2} \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} W_P r \, d\theta \, dr \, dz \\
 E_{id} &= \int_{z_1}^{z_2} \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} W_{P,id} r \, d\theta \, dr \, dz \\
 E_{dev} &= \int_{z_1}^{z_2} \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} W_{P,dev} r \, d\theta \, dr \, dz
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

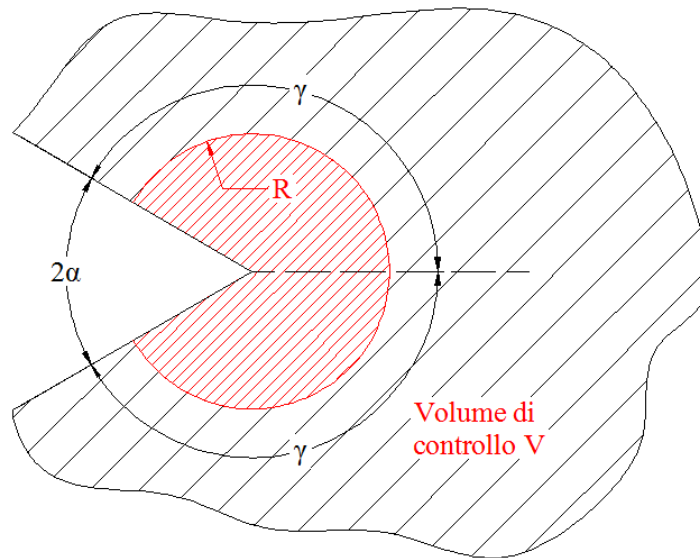


Figura 2.3 Volume di controllo per il calcolo del SED

Si trascurano tuttavia l'integrazione e l'estensione del volume di controllo lungo la coordinata z , pensando tutti i parametri all'interno del volume di controllo costanti rispetto a tale coordinata. In questo caso l'integrazione in z porta solo a moltiplicare gli integrali in r e θ per l'altezza del volume di controllo h , e tale termine si elide nel successivo calcolo della densità dell'energia di deformazione, dividendo per il volume $V = \gamma R^2 h$ del cilindro che costituisce il volume di controllo.

$$\bar{W} = \frac{E}{V} \tag{2.40}$$

2.5.1 Densità di energia di deformazione totale

Per integrazione dell'energia di deformazione totale puntuale nel volume di controllo si ottiene la seguente scrittura:

$$E = \frac{1}{2E} \left[\frac{K_1^2}{2\lambda_1 R^{-2\lambda_1}} I_1(\gamma, \nu, C_z) + \frac{K_2^2}{2\lambda_2 R^{-2\lambda_2}} I_2(\gamma, \nu, C_z) + \frac{K_1 K_2}{(\lambda_1 + \lambda_2) R^{-\lambda_1 - \lambda_2}} I_{12}(\gamma, \nu, C_z) + \frac{K_3^2}{2\lambda_3 R^{-2\lambda_3}} I_3(\gamma, \nu) \right] \quad (2.41)$$

In cui gli integrali I_1 , I_2 e I_{12} (funzioni di γ , del modulo di Poisson ν e del constraint factor C_z) e l'integrale I_3 (funzione del modulo di Poisson e del constraint factor C_z) sono:

$$I_1(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)}) + 2(1 + \nu) \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_2(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)}) + 2(1 + \nu) \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta \quad (2.42)$$

$$I_{12}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)}) + 4(1 + \nu) \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) d\theta$$

$$I_3(\gamma, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(2(1 + \nu) (\widetilde{\tau}_{zr}^{(3)2} + \widetilde{\tau}_{z\theta}^{(3)2}) \right) d\theta$$

La densità di energia di deformazione all'interno del volume di controllo si ottiene dividendo l'energia di deformazione del volume di controllo per il volume di controllo stesso:

$$\bar{W} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1(\gamma, \nu, C_z)}{2\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2(\gamma, \nu, C_z)}{2\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12}(\gamma, \nu, C_z)}{(\lambda_1 + \lambda_2) \gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} + \frac{I_3(\gamma, \nu)}{2\lambda_3 \gamma} \frac{K_3^2}{R^{2(1-\lambda_3)}} \right] \quad (2.43)$$

Nelle trattazioni che seguono, i termini $1/[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]$ e $1/[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]$ verranno portati fuori dalle espressioni angolari delle equazioni (2.17) e (2.18), che quindi diventano:

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(1)} = \left[\begin{Bmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} + \chi_1(1 - \lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} \right] \quad (2.44)$$

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(2)} = \left[\begin{Bmatrix} -(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ -(3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} + \chi_2(1 + \lambda_2) \begin{Bmatrix} -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} \right] \quad (2.45)$$

Supponendo C_z costante all'interno del volume di controllo, gli integrali precedentemente riportati possono essere riscritti come:

$$I_1(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]^2} \left[(1 + C_z^2 \nu^2 - 2C_z \nu^2) (I_1^{(1)}(\gamma) + I_1^{(2)}(\gamma)) \right. \\ \left. - 2\nu(1 + 2C_z \nu - C_z^2 \nu) I_1^{(3)}(\gamma) + 2(1 + \nu) I_1^{(4)}(\gamma) \right] \quad (2.46)$$

Con:

$$I_1^{(1)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} d\theta \\ = (1 + \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ + \chi_1 (1 - \lambda_1)^2 \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1 \gamma)}{\lambda_1} \right]$$

$$I_1^{(2)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} d\theta \\ = (3 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ - \chi_1 (3 - \lambda_1)(1 - \lambda_1) \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1 \gamma)}{\lambda_1} \right] \quad (2.47)$$

$$I_1^{(3)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} d\theta \\ = (3 - \lambda_1)(1 + \lambda_1) \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ - \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ + \chi_1 (1 - \lambda_1)^2 \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1 \gamma)}{\lambda_1} \right]$$

$$I_1^{(4)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} d\theta \\ = (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ - \chi_1 (1 - \lambda_1)^2 \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_1 \gamma)}{\lambda_1} \right]$$

$$I_2(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]^2} \left[(1 + C_z^2 \nu^2 - 2C_z \nu^2) (I_2^{(1)}(\gamma) + I_2^{(2)}(\gamma)) \right. \\ \left. - 2\nu(1 + 2C_z \nu - C_z^2 \nu) I_2^{(3)}(\gamma) + 2(1 + \nu) I_2^{(4)}(\gamma) \right] \quad (2.48)$$

Con:

$$I_2^{(1)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)^2} d\theta \\ = (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_2)} \right] \\ + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\ - \chi_2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right] \\ I_2^{(2)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(2)^2} d\theta \\ = (3 - \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_2)} \right] \\ + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\ + \chi_2 (3 - \lambda_2)(1 + \lambda_2) \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right] \quad (2.49)$$

$$I_2^{(3)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\ = (3 - \lambda_2)(1 + \lambda_2) \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_2)} \right] \\ - \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\ - \chi_2 (1 - \lambda_2^2) \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right]$$

$$I_2^{(4)}(\gamma) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)^2} d\theta \\ = (1 - \lambda_2)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_2)} \right] \\ + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\ + \chi_2 (1 - \lambda_2^2) \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right]$$

$$\begin{aligned}
I_{12}(\gamma, \nu, C_z) = & \frac{1}{2\pi[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)][1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left[2(1 + C_z^2 \nu^2 \right. \\
& - 2C_z \nu^2) \left(I_{12}^{(1)}(\gamma) + I_{12}^{(2)}(\gamma) \right) \\
& \left. - 2\nu(1 + 2C_z \nu - C_z^2 \nu) \left(I_{12}^{(3)}(\gamma) + I_{12}^{(4)}(\gamma) \right) + 4(1 + \nu) I_{12}^{(5)}(\gamma) \right]
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Con:

$$\begin{aligned}
I_{12}^{(1)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} d\theta \\
I_{12}^{(2)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\
I_{12}^{(3)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\
I_{12}^{(4)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} d\theta \\
I_{12}^{(5)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} d\theta
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Si evita di sviluppare tali integrali, in quanto nulli per la simmetria del volume di controllo rispetto alla bisettrice dell'intaglio.

E infine:

$$I_3(\gamma, \nu) = \frac{2(1 + \nu)}{\pi} \gamma \tag{2.52}$$

2.5.2 Densità di energia di deformazione idrostatica

Per integrazione della densità di energia di deformazione idrostatica nel volume di controllo si ottiene la seguente scrittura:

$$E_{id} = \frac{(1-2\nu)}{6E} \left[\frac{K_1^2}{2\lambda_1 R^{-2\lambda_1}} I_{1,id}(\gamma, \nu, C_z) + \frac{K_2^2}{2\lambda_2 R^{-2\lambda_2}} I_{2,id}(\gamma, \nu, C_z) + \frac{K_1 K_2}{(\lambda_1 + \lambda_2) R^{-\lambda_1 - \lambda_2}} I_{12,id}(\gamma, \nu, C_z) \right] \quad (2.53)$$

In cui gli integrali $I_{1,id}$, $I_{2,id}$ e $I_{12,id}$ (funzioni di γ , del modulo di Poisson ν e del constraint factor C_z) sono:

$$I_{1,id}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)}) \right) d\theta$$

$$I_{2,id}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)}) \right) d\theta \quad (2.54)$$

$$I_{12,id}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)}) \right) d\theta$$

La densità di energia di deformazione all'interno del volume di controllo si ottiene come nel caso precedente dividendo l'energia di deformazione del volume di controllo per il volume di controllo stesso:

$$\overline{W}_{id} = \frac{(1-2\nu)}{6E} \left[\frac{I_{1,id}(\gamma, \nu, C_z)}{2\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,id}(\gamma, \nu, C_z)}{2\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,id}(\gamma, \nu, C_z)}{(\lambda_1 + \lambda_2) \gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \quad (2.55)$$

Supponendo C_z costante all'interno del volume di controllo, gli integrali precedentemente riportati possono essere riscritti come:

$$I_{1,id}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]^2} \left[(1 + C_z \nu)^2 \left(I_{1,id}^{(1)}(\gamma) + I_{1,id}^{(2)}(\gamma) + 2I_{1,id}^{(3)}(\gamma) \right) \right] \quad (2.56)$$

Con:

$$\begin{aligned} I_{1,id}^{(1)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} d\theta \\ &= (1 + \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1 (1 - \lambda_1^2) \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1\gamma)}{\lambda_1} \right] \\ I_{1,id}^{(2)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} d\theta \\ &= (3 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ &\quad - \chi_1 (3 - \lambda_1)(1 - \lambda_1) \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1\gamma)}{\lambda_1} \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} I_{1,id}^{(3)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} d\theta \\ &= (3 - \lambda_1)(1 + \lambda_1) \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad - \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1 (1 - \lambda_1)^2 \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1\gamma)}{\lambda_1} \right] \end{aligned}$$

E:

$$I_2(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]^2} \left[(1 + C_z \nu)^2 \left(I_{2,id}^{(1)}(\gamma) + I_{2,id}^{(2)}(\gamma) + 2I_{2,id}^{(3)}(\gamma) \right) \right] \quad (2.58)$$

Con:

$$\begin{aligned} I_{2,id}^{(1)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)^2} d\theta \\ &= (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\ &\quad - \chi_2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right] \\ I_{2,id}^{(2)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(2)^2} d\theta \\ &= (3 - \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\ &\quad + \chi_2 (3 - \lambda_2)(1 + \lambda_2) \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} I_{2,id}^{(3)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\ &= (3 - \lambda_2)(1 + \lambda_2) \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad - \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\ &\quad - \chi_2 (1 - \lambda_2^2) \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right] \end{aligned}$$

$$I_{12,ia}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)][1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left[2(1 + C_z \nu)^2 \left(I_{12}^{(1)}(\gamma) + I_{12}^{(2)}(\gamma) + I_{12}^{(3)}(\gamma) + I_{12}^{(4)}(\gamma) \right) \right] \quad (2.60)$$

Con:

$$\begin{aligned} I_{12}^{(1)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} d\theta \\ I_{12}^{(2)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\ I_{12}^{(3)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\ I_{12}^{(4)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} d\theta \end{aligned} \quad (2.61)$$

Anche in questo caso, tali integrali risultano nulli per la simmetria del volume di controllo rispetto alla bisettrice dell'intaglio.

2.5.3 Densità di energia di deformazione deviatorica

Per integrazione della densità di energia di deformazione deviatorica nel volume di controllo si ottiene la seguente scrittura:

$$E_{dev} = \frac{(1 + \nu)}{3E} \left[\frac{K_1^2}{2\lambda_1 R^{-2\lambda_1}} I_{1,dev}(\gamma, \nu, C_z) + \frac{K_2^2}{2\lambda_2 R^{-2\lambda_2}} I_{2,dev}(\gamma, \nu, C_z) \right. \\ \left. + \frac{K_1 K_2}{(\lambda_1 + \lambda_2) R^{-\lambda_1 - \lambda_2}} I_{12,dev}(\gamma, \nu, C_z) + \frac{K_3^2}{2\lambda_3 R^{-2\lambda_3}} I_{3,dev}(\gamma, \nu) \right] \quad (2.62)$$

In cui gli integrali $I_{1,dev}$, $I_{2,dev}$ e $I_{12,dev}$ (funzioni di γ , del modulo di Poisson ν e del constraint factor C_z) e $I_{3,dev}$ (funzione del modulo di Poisson ν e del constraint factor C_z) sono:

$$I_{1,dev}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right. \\ \left. + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta \\ I_{2,dev}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} \right. \\ \left. - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)}) + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta \quad (2.63)$$

$$I_{12,dev}(\gamma, \nu, C_z) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2C_z^2 \widetilde{\sigma}_z^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \right. \\ \left. + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right. \\ \left. + 6\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) d\theta \\ I_{3,dev}(\gamma, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(3(\widetilde{\tau}_{zr}^{(3)2} + \widetilde{\tau}_{z\theta}^{(3)2}) \right) d\theta$$

La densità di energia di deformazione all'interno del volume di controllo si ottiene come nei casi precedenti dividendo l'energia di deformazione del volume di controllo per il volume di controllo stesso:

$$\overline{W}_{dev} = \frac{(1 + \nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}(\gamma, \nu, C_z)}{2\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}(\gamma, \nu, C_z)}{2\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right. \\ \left. + \frac{I_{12,dev}(\gamma, \nu, C_z)}{(\lambda_1 + \lambda_2) \gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} + \frac{I_{3,dev}(\gamma, \nu)}{2\lambda_3 \gamma} \frac{K_3^2}{R^{2(1-\lambda_3)}} \right] \quad (2.64)$$

Supponendo C_z costante all'interno del volume di controllo, gli integrali precedentemente riportati possono essere riscritti come:

$$I_{1,dev}(\gamma, \nu, C_z) = \frac{1}{2\pi[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]^2} \left[(1 + C_z^2 \nu^2 - C_z \nu) \left(I_{1,dev}^{(1)}(\gamma) + I_{1,dev}^{(2)}(\gamma) \right) - (1 + 2C_z \nu - 2C_z^2 \nu^2) I_{1,dev}^{(3)}(\gamma) + 3I_{1,dev}^{(4)}(\gamma) \right] \quad (2.65)$$

Con:

$$\begin{aligned} I_{1,dev}^{(1)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)^2} d\theta \\ &= (1 + \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1 (1 - \lambda_1)^2 \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1\gamma)}{\lambda_1} \right] \\ I_{1,dev}^{(2)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(1)^2} d\theta \\ &= (3 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ &\quad - \chi_1 (3 - \lambda_1)(1 - \lambda_1) \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1\gamma)}{\lambda_1} \right] \\ I_{1,dev}^{(3)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} d\theta \\ &= (3 - \lambda_1)(1 + \lambda_1) \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad - \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1 (1 - \lambda_1)^2 \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_1\gamma)}{\lambda_1} \right] \\ I_{1,dev}^{(4)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)^2} d\theta \\ &= (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_1)\gamma) \cos((1 - \lambda_1)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\ &\quad + \chi_1^2 (1 - \lambda_1)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_1)\gamma) \cos((1 + \lambda_1)\gamma)}{(1 + \lambda_1)} \right] \\ &\quad - \chi_1 (1 - \lambda_1)^2 \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_1\gamma)}{\lambda_1} \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}
I_{2,dev}(\gamma, \nu, C_z) &= \frac{1}{2\pi[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]^2} \left[(1 + C_z^2 \nu^2 - C_z \nu) \left(I_{2,dev}^{(1)}(\gamma) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + I_{2,dev}^{(2)}(\gamma) \right) - (1 + 2C_z \nu - 2C_z^2 \nu^2) I_{2,dev}^{(3)}(\gamma) + 3I_{2,dev}^{(4)}(\gamma) \right] \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Con:

$$\begin{aligned}
I_{2,dev}^{(1)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)^2} d\theta \\
&= (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\
&\quad + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\
&\quad - \chi_2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right] \\
I_{2,dev}^{(2)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(2)^2} d\theta \\
&= (3 - \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\
&\quad + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\
&\quad + \chi_2 (3 - \lambda_2)(1 + \lambda_2) \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right] \quad (2.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2,dev}^{(3)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\
&= (3 - \lambda_2)(1 + \lambda_2) \left[\gamma - \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_1)} \right] \\
&\quad - \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma - \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\
&\quad - \chi_2 (1 - \lambda_2^2) \left[\sin(2\gamma) - \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2,dev}^{(4)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)^2} d\theta \\
&= (1 - \lambda_2)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 - \lambda_2)\gamma) \cos((1 - \lambda_2)\gamma)}{(1 - \lambda_2)} \right] \\
&\quad + \chi_2^2 (1 + \lambda_2)^2 \left[\gamma + \frac{\sin((1 + \lambda_2)\gamma) \cos((1 + \lambda_2)\gamma)}{(1 + \lambda_2)} \right] \\
&\quad + \chi_2 (1 - \lambda_2^2) \left[\sin(2\gamma) + \frac{\sin(2\lambda_2\gamma)}{\lambda_2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12,dev}(\gamma, \nu, C_z) &= \frac{1}{2\pi[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)][1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left[2(1 + C_z^2 \nu^2 \right. \\
&\quad \left. - C_z \nu) \left(I_{12}^{(1)}(\gamma) + I_{12}^{(2)}(\gamma) \right) \right. \\
&\quad \left. - (1 + 2C_z \nu - 2C_z^2 \nu^2) \left(I_{12}^{(3)}(\gamma) + I_{12}^{(4)}(\gamma) \right) + 6I_{12}^{(5)}(\gamma) \right]
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Con:

$$\begin{aligned}
I_{12,dev}^{(1)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} d\theta \\
I_{12,dev}^{(2)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\
I_{12,dev}^{(3)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} d\theta \\
I_{12,dev}^{(4)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} d\theta \\
I_{12,dev}^{(5)}(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} d\theta
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Anche in questo caso, tali integrali risultano nulli per la simmetria del volume di controllo rispetto alla bisettrice dell'intaglio.

E infine:

$$I_{3,dev}(\gamma, \nu) = \frac{3}{\pi} \gamma \tag{2.71}$$

Capitolo 3

Analisi numerica di un giunto saldato a sovrapposizione

Per constatare gli effetti che sorgono nel tenere conto dell'estensione tridimensionale finita di un componente, e in particolare la comparsa di componenti di tensione di modo III indotte dalla presenza di modo II, si è scelta la geometria del giunto saldato a sovrapposizione. Il software utilizzato per le analisi è Ansys[®] 13.0.

3.1 Descrizione della geometria del giunto

Per poter confrontare alcuni risultati ottenuti con dati già presenti nella letteratura, [41] le dimensioni scelte per il giunto a sovrapposizione sono le seguenti:

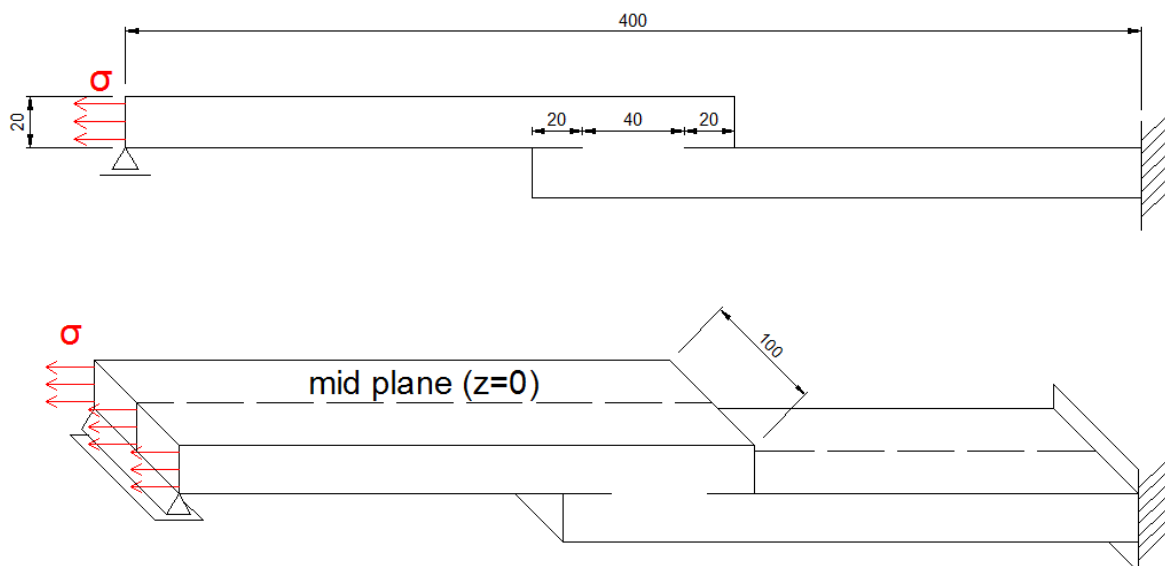


Figura 3.1 Geometria del giunto saldato a sovrapposizione

Lo spessore di 20 mm è stato scelto per massimizzare l'entità del fattore di intensificazione delle tensioni di modo III indotto dal modo II. [41]

Il giunto a sovrapposizione presenta un difetto assimilabile ad una cricca dovuto alla non completa penetrazione del cordone di saldatura lungo le porzioni di superficie sovrapposte delle lamiere che realizzano la giunzione. Ci si riferirà da ora in avanti a tale difetto con il termine di cricca, in quanto verrà modellato nelle simulazioni numeriche con un raggio di fondo intaglio e un angolo di apertura nulli. Si farà uso del termine SIF (*Stress Intensity Factor*) per indicare il fattore di intensificazione delle tensioni di tale difetto. Di volta in volta si specificherà se tale fattore è riferito al modo I, al modo II o al modo III.

Il sistema di riferimento utilizzato per la descrizione delle componenti di tensione, centrato all'apice della cricca, è riportato in Fig. 3.2.

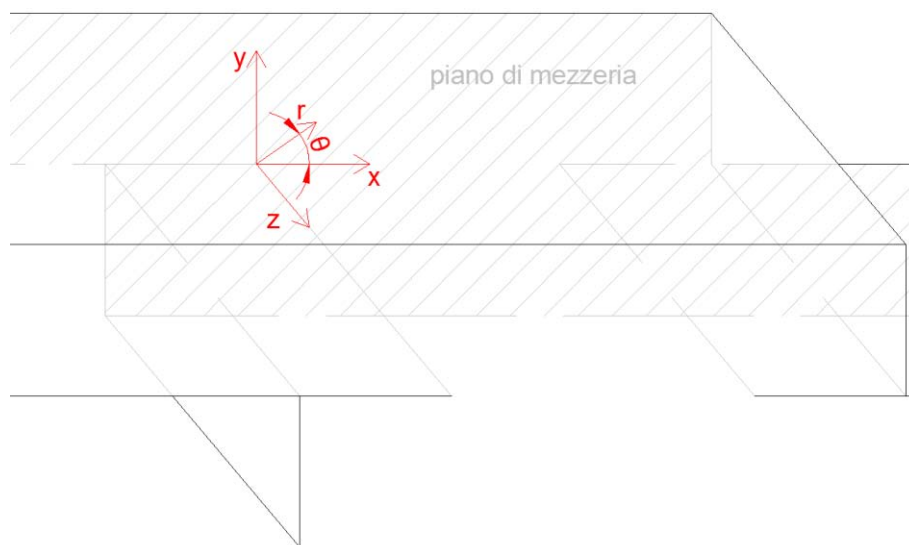


Figura 3.2 Sistema di riferimento utilizzato per descrivere le componenti di tensione

3.2 Modello bidimensionale

La geometria e la mesh del modello bidimensionale sono state generate con un codice APDL opportunamente pensato per poter eventualmente effettuare analisi su giunti a sovrapposizione con spessori che differiscono da quello prescelto effettuando un esiguo numero di modifiche sull'APDL stesso.

3.2.1 Geometria e mesh

Il codice APDL scritto per generare la geometria del giunto è riportato al termine del capitolo. Per poter cogliere adeguatamente l'aumento di tensioni all'apice della cricca e predisporre i due volumi di controllo entro i quali verranno calcolate le densità di energie di deformazione, sono state create tre circonferenze centrate sull'apice della cricca, i cui raggi corrispondono ai valori di R0, R1 e R2 riportati nell'APDL.

La prima circonferenza, di raggio $R0 = 0.001 \text{ mm}$, è stata realizzata per poter creare una mesh fitta intorno all'apice della cricca cogliendo l'effetto di intensificazione delle tensioni in questa zona.

Le rimanenti circonferenze, di raggio $R1 = 0.15 \text{ mm}$ e $R2 = 0.28 \text{ mm}$, sono state realizzate per poter calcolare con agilità i valori della densità di energia di deformazione entro volumi di controllo con tali raggi.

Gli elementi utilizzati per la mesh del modello bidimensionale sono gli elementi a 8 nodi, denominati "PLANE 183" in ANSYS® 13.0.

Il criterio seguito per la realizzazione della mesh è stato quello di suddividere le aree create in elementi che presentino una variazione di forma e dimensioni il più regolare possibile.

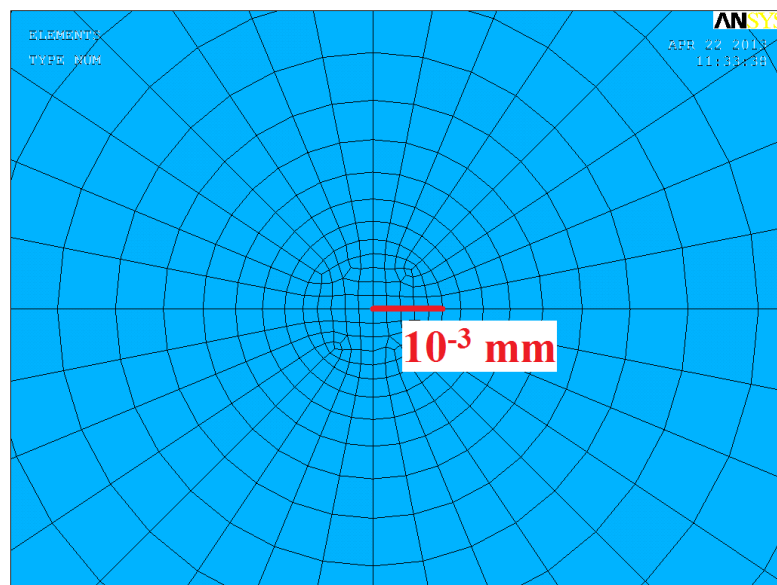


Figura 3.3 Mesh nell'immediato intorno dell'apice della cricca

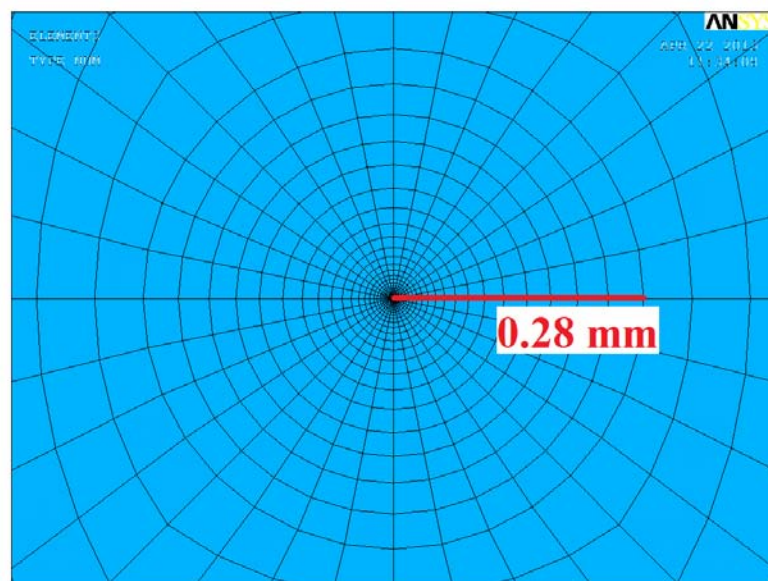


Figura 3.4 Particolare della mesh all'interno dei volumi di controllo

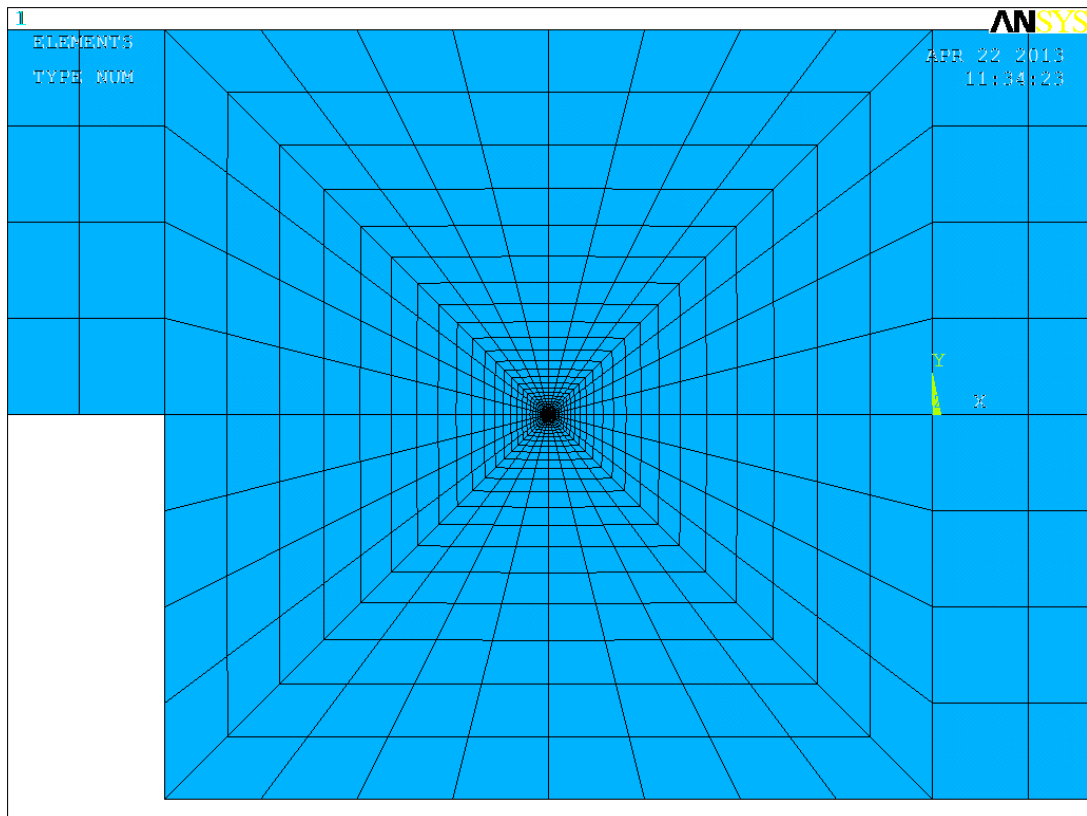


Figura 3.5 Particolare della mesh nella zona di giunzione

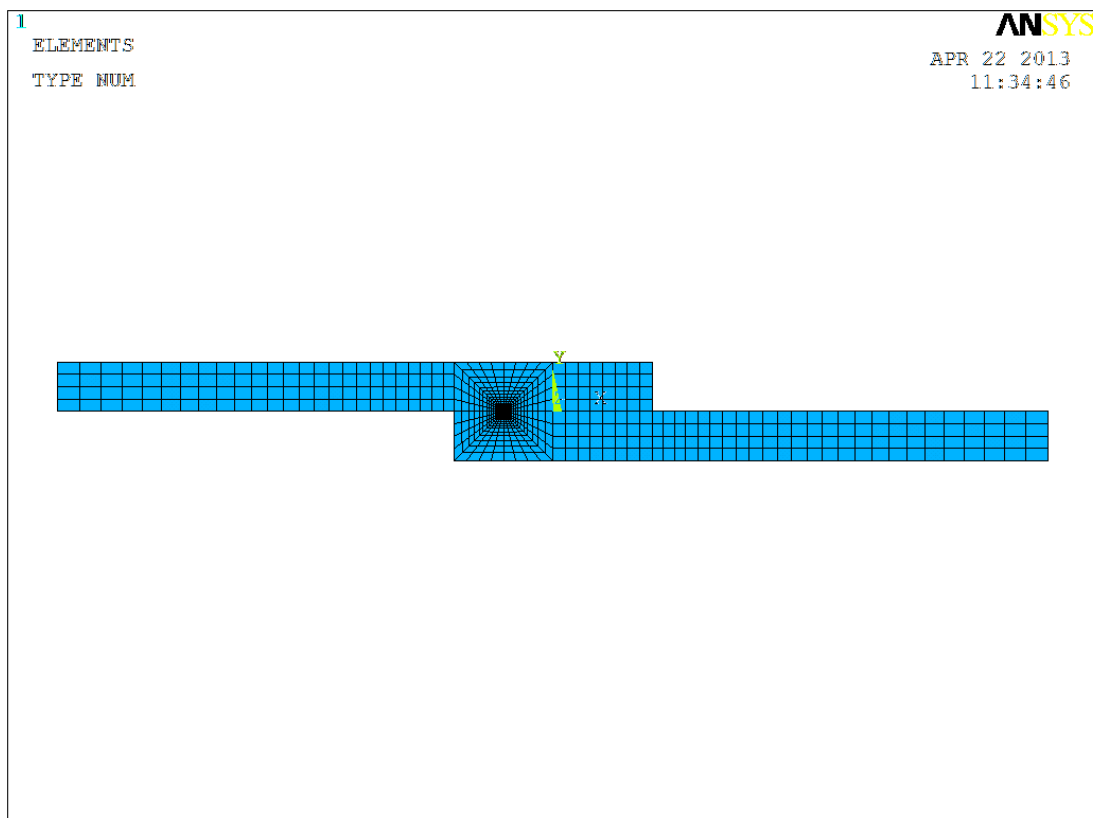


Figura 3.6 Mesh dell'intero giunto saldato a sovrapposizione

3.2.2 Vincoli

Per l'assegnazione dei vincoli si è cercato di riprodurre in modo efficace le condizioni di una prova di trazione per un giunto saldato a sovrapposizione.

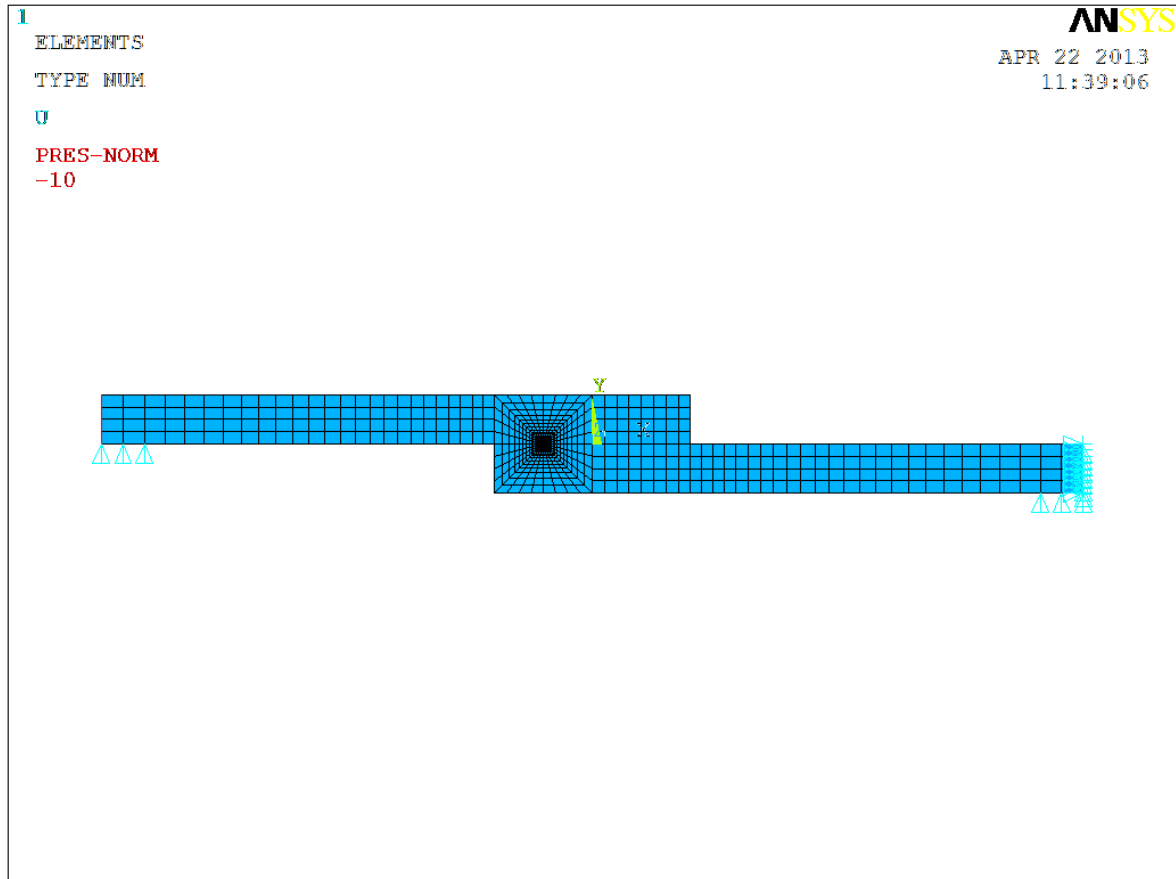


Figura 3.7 Vincoli per il modello bidimensionale del giunto saldato a sovrapposizione

I vincoli assegnati sono stati pertanto:

- incastro per la linea che rappresenta l'estremità destra del giunto;
- appoggio con spostamenti lungo la direzione y impediti per le prime tre file di nodi degli elementi delle linee inferiori delle estremità destra e sinistra del giunto;
- pressione di 10 MPa alla linea di estremità sinistra del giunto.

3.3 Modello tridimensionale

Per creare il modello tridimensionale, si è sfruttata la simmetria presente nel giunto, modellandone solo la metà e imponendo successivamente le opportune condizioni al contorno.

3.3.1 Geometria e mesh

La geometria per il giunto saldato tridimensionale è stata ottenuta estrudendo la sezione realizzata per il modello bidimensionale. Utilizzando le opzioni presenti nella sezione *Preprocessor>Modeling>Operate>Extrude*, è stato possibile estrarre la mesh utilizzata per il modello bidimensionale lungo delle linee con opportune suddivisioni per ottenere direttamente la mesh del modello tridimensionale, utilizzando il comando *Extrude>Areas>Along lines*.

Sono state perciò realizzate delle linee-guida per l'estrusione, suddivise in modo tale da avere elementi grossolani per la porzione del giunto più vicina alla mezzeria, in cui le tensioni variano meno sensibilmente [25, 41] e una mesh più fitta avvicinandosi alla superficie libera del giunto, con una buona regolarità dell'infittimento degli elementi stessi. Sono state utilizzate perciò tre linee-guida per l'estrusione: una prima con suddivisioni più grossolane per la regione centrale del giunto, una terza con suddivisioni fitte che copre la regione della superficie libera fino a circa due millimetri di profondità, e la seconda linea guida in cui si esegue un progressivo infittimento delle suddivisioni in modo da poter realizzare una mesh che sia il più regolare possibile. In questo modo, si è pensato di poter cogliere in maniera soddisfacente gli effetti dovuti alla presenza della superficie libera (e quindi all'estensione finita del giunto nello spazio) mantenendo una mesh non troppo pesante computazionalmente grazie alle suddivisioni più grossolane nella regione centrale del giunto.

Gli elementi utilizzati per la mesh sono elementi quadrangolari a 20 nodi, denominati "SOLID 186" nel software ANSYS® 13.0.

Si riporta nella Fig. 3.8 un esempio della mesh così ottenuta. In Fig. 3.9 si può apprezzare il raffinamento della mesh all'avvicinarsi della superficie libera del giunto.

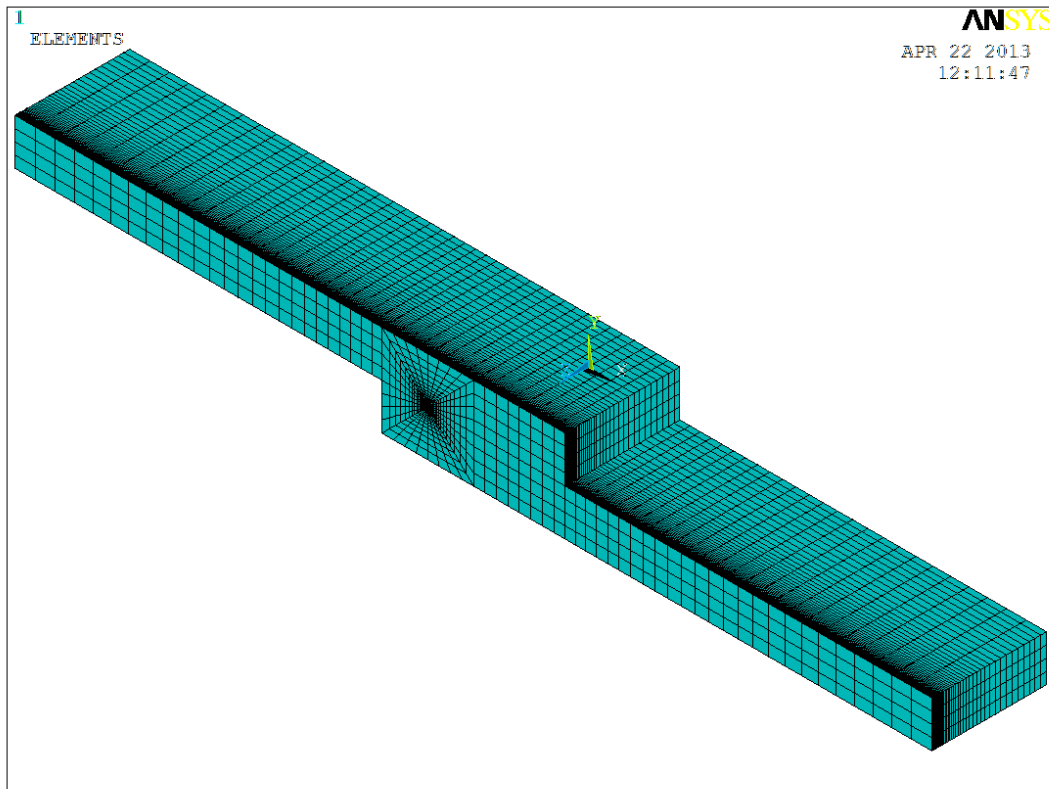


Figura 3.8 Mesh del modello tridimensionale del giunto saldato a sovrapposizione

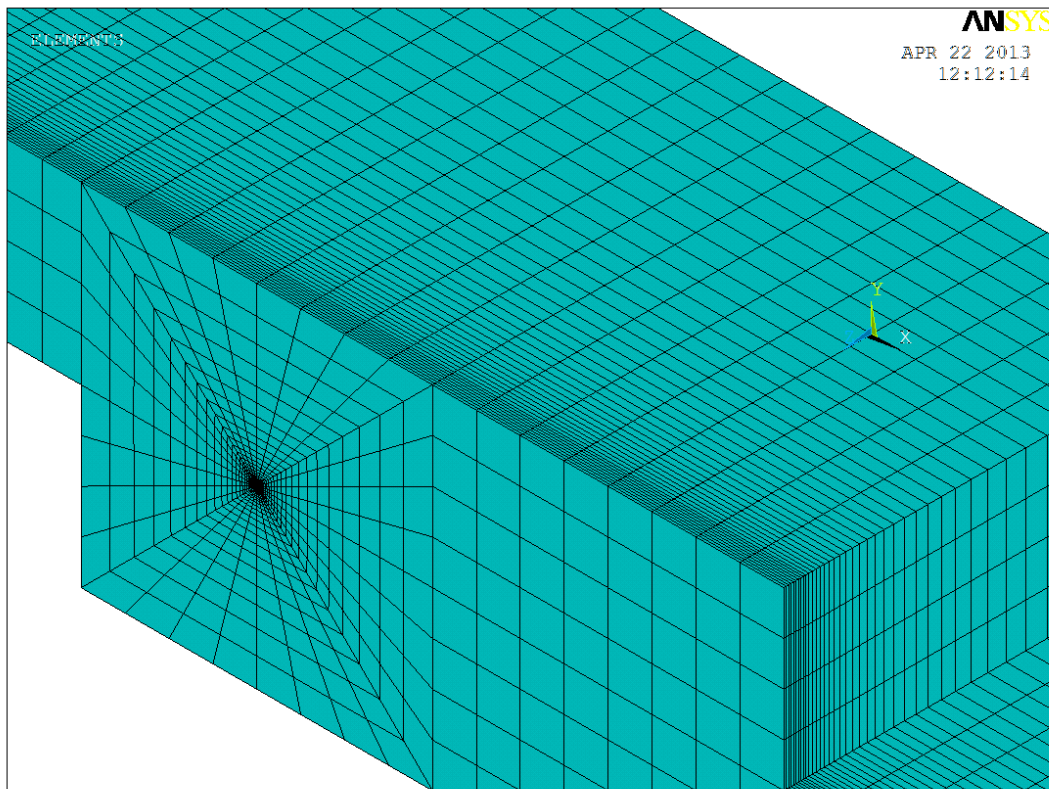


Figura 3.9 Particolare della mesh del giunto saldato a sovrapposizione per evidenziare il raffinamento della mesh nelle vicinanze della superficie libera

3.3.2 Vincoli

Le condizioni di vincolo sono le medesime elencate per il caso bidimensionale, applicate questa volta tenendo conto dell'estensione tridimensionale del pezzo e delle simmetrie presenti nel giunto.

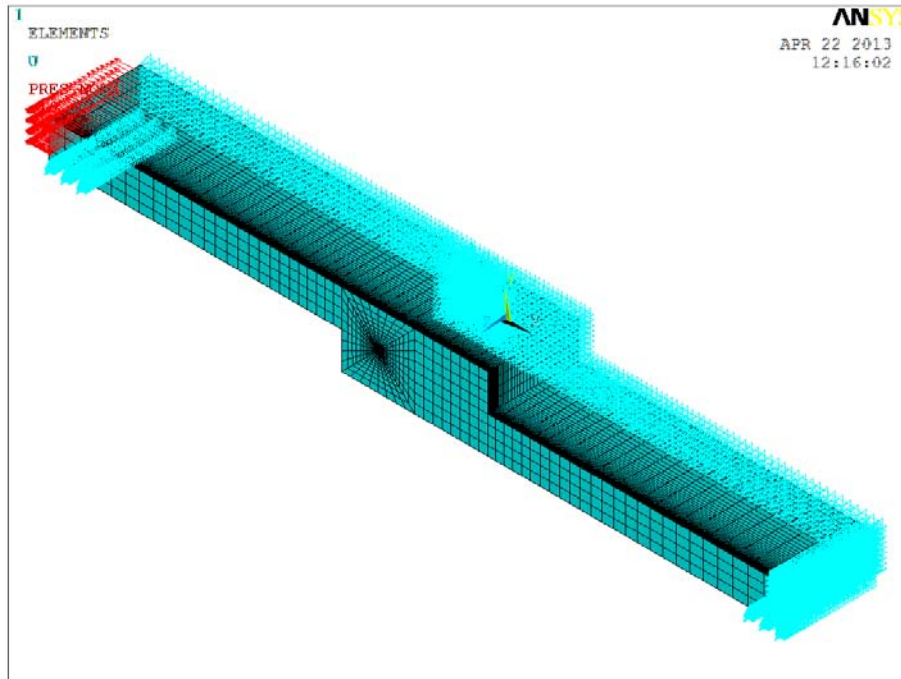


Figura 3.10 Vincoli e carichi applicati al modello tridimensionale del giunto a sovrapposizione

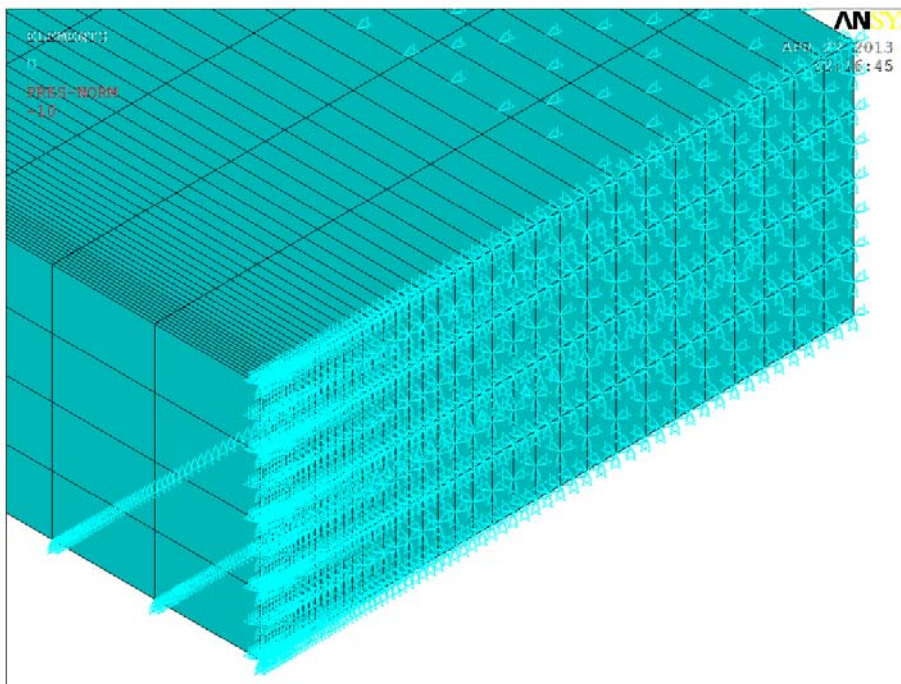


Figura 3.11 Particolare dei vincoli all'estremità destra del giunto

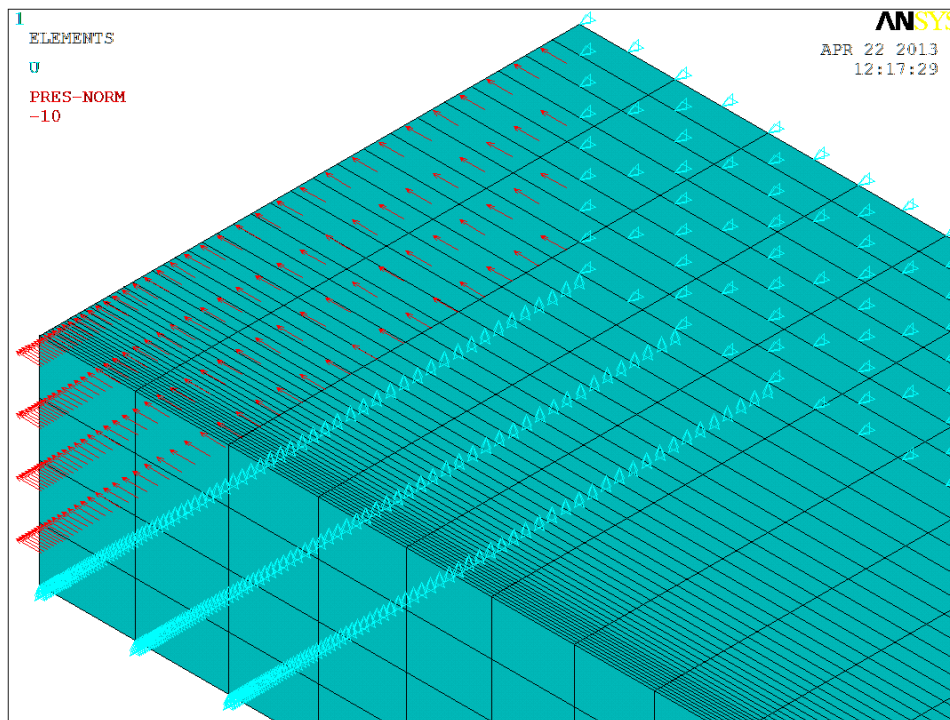


Figura 3.12 Particolare dei vincoli e dei carichi all'estremità sinistra del giunto

Le condizioni di vincolo assegnate sono pertanto:

- vincolo di simmetria sugli spostamenti della superficie di mezzeria del giunto, che si traduce in spostamenti impediti lungo la direzione z ;
- vincolo di incastro per la superficie di estremità destra del giunto;
- vincolo di appoggio per le prime tre file di nodi della superficie inferiore di ciascuna estremità del giunto, ovvero spostamenti impediti lungo la direzione y ;
- pressione di 10 MPa sulla superficie di estremità sinistra del giunto.

3.4 Modelli numerici analizzati

Sono state effettuate analisi numeriche per due modelli di giunto a sovrapposizione. Il primo modello, realizzato con una mesh più grossolana, è servito per un rapido confronto con i risultati già presenti nella letteratura, [41] verificando così la bontà del modello stesso, e per scegliere le zone in cui infittire la mesh. Il secondo modello è stato realizzato appunto con una mesh più fitta nelle vicinanze della superficie libera, per poter cogliere con maggior precisione le variazioni delle tensioni nelle zone in cui queste presentano gradienti più alti. Per tale modello si è poi proceduto con un'analisi approfondita dei risultati ottenuti dal codice di calcolo. I valori del modulo di Young e del modulo di Poisson utilizzati nelle simulazioni sono $E = 206000$ e $\nu = 0.3$, valori tipici dell'acciaio.

3.4.1 Primo modello

Il modello tridimensionale è stato ottenuto per estrusione lungo tre linee-guida le cui caratteristiche vengono espresse nel codice di calcolo utilizzato nei termini del parametro *Element edge length* (*SIZE*, lunghezza del lato dell'elemento) o dei parametri *No. of element division* (*NDIV*, numero di elementi in cui è suddivisa la linea) e *Spacing ratio* (*SPACE*, rapporto tra le dimensioni del primo e dell'ultimo elemento in cui è suddivisa la linea):

- linea-guida 1: lunghezza 20 mm, *SIZE*: 2.5 mm;
- linea-guida 2: lunghezza 27.5 mm, *NDIV*: 25, *SPACE*: 0.150;
- linea-guida 3: lunghezza 2.5 mm, *SIZE*: 0.28 mm;

L'andamento delle tensioni ottenuto con tale analisi viene riportato nei seguenti grafici, in cui la coordinata *z* indica la distanza dalla sezione di simmetria del giunto, e i simboli SX, SY, SZ, SXY e SYZ indicano le tensioni σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} e τ_{yz} , mentre con C_z si indica il *constraint factor*.

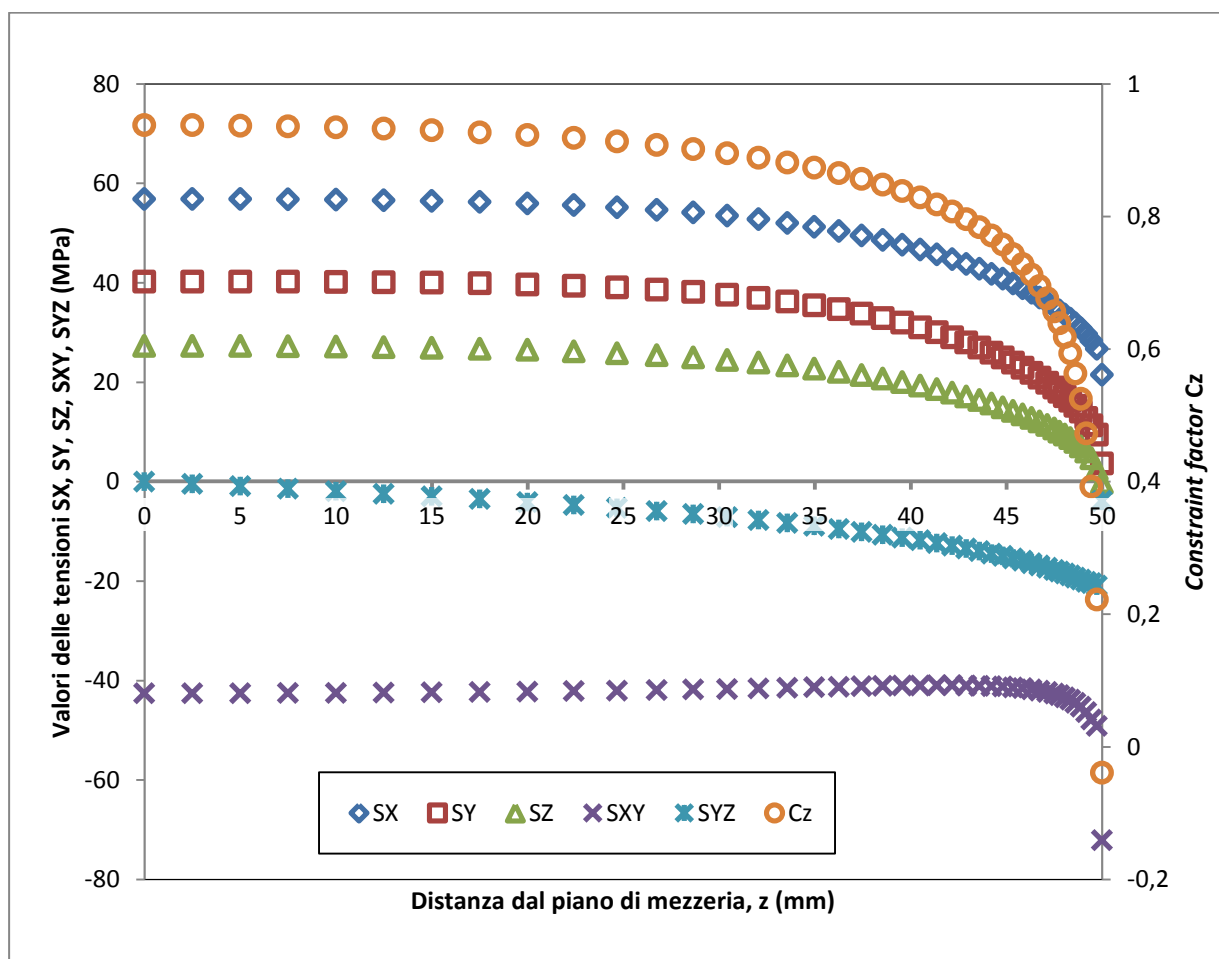


Figura 3.13 Andamento delle tensioni lungo la coordinata *z* ad una distanza $x = 0.15$ mm dall'apice della cricca

L'andamento delle tensioni ricavato è in accordo con quello riportato in letteratura per i giunti a sovrapposizione. [41] Un commento su tale andamento delle tensioni verrà riportato nella sezione dei risultati dell'analisi del secondo modello.

3.4.2 Secondo modello

Si è realizzato un modello che presenta una mesh più fitta nella zona adiacente alla superficie libera, con lo scopo di cogliere con una sensibilità maggiore gli effetti dovuti alla presenza del *corner point* (ovvero del punto in cui la cricca interseca la superficie libera del giunto) in questa regione. Come si può vedere dai risultati riportati per l'analisi precedente, lungo lo spessore z del giunto si ha una zona in cui la variazione delle tensioni è solo esigua, mentre in prossimità della superficie libera le tensioni subiscono variazioni più accentuate. La mesh di tale modello è stata ottenuta sempre per estrusione della mesh del modello bidimensionale lungo tre linee-guida dalle seguenti caratteristiche:

- linea-guida 1: lunghezza 25 mm, SIZE: 2.5 mm;
- linea-guida 2: lunghezza 23 mm, NDIV: 35, SPACE: 0.025;
- linea-guida 3: lunghezza 2 mm, SIZE: 0.05 mm;

I risultati ottenuti per le analisi numeriche di tale modello verranno riportati nel dettaglio nel prossimo paragrafo (§ 3.5).

3.5 Risultati delle analisi numeriche

Si riportano nel dettaglio in questa sezione i risultati ottenuti con il metodo degli elementi finiti per il secondo modello del giunto a sovrapposizione. Per prima cosa si procederà con la definizione dei simboli utilizzati nelle legende dei grafici (Tab. 3.1). Il sistema di riferimento utilizzato per riportare i risultati delle analisi numeriche è quello illustrato in Fig. 3.2.

Tabella 3.1 Significato dei simboli utilizzati nei grafici riportati per i risultati

SX	σ_x
SY	σ_y
SZ	σ_z
SXY	τ_{xy}
SYZ	τ_{yz}
Cz	<i>Constraint factor</i> , definito come $C_z = \sigma_z / [v(\sigma_x + \sigma_y)]$
K1	SIF di modo I secondo la definizione di Gross e Mendelson
K2	SIF di modo II secondo la definizione di Gross e Mendelson
K3	SIF di modo III secondo la definizione di Gross e Mendelson
KO	SIF di modo O coincidente con il SIF di modo III secondo la definizione di Gross e Mendelson
z	Distanza dalla sezione di mezzeria del giunto
P1	Tensione principale σ_1
P2	Tensione principale σ_2
P3	Tensione principale σ_3
TAU max	Tensione di taglio massima τ_{max}
W	Densità di energia di deformazione (SED) totale
Wdev	Densità di energia di deformazione (SED) deviatorica
Wid	Densità di energia di deformazione (SED) idrostatica
E%	Errore relativo percentuale tra il SED ricavato dal FEM e calcolato analiticamente
Edev%	Errore relativo percentuale tra il SED deviatorico ricavato dal FEM e calcolato analiticamente
Eid%	Errore relativo percentuale tra il SED idrostatico ricavato dal FEM e calcolato analiticamente

3.5.1 Andamento delle tensioni lungo lo spessore

L'andamento delle tensioni lungo lo spessore è quasi coincidente con quello riportato nell'analisi del modello precedente. L'andamento delle tensioni è stato ottenuto per due distanze dall'apice della cricca, $x = 0.15 \text{ mm}$ (Fig. 3.14) e $x = 0.28 \text{ mm}$ (Fig. 3.15), al fine di cogliere eventuali variazioni al variare della distanza dall'apice.

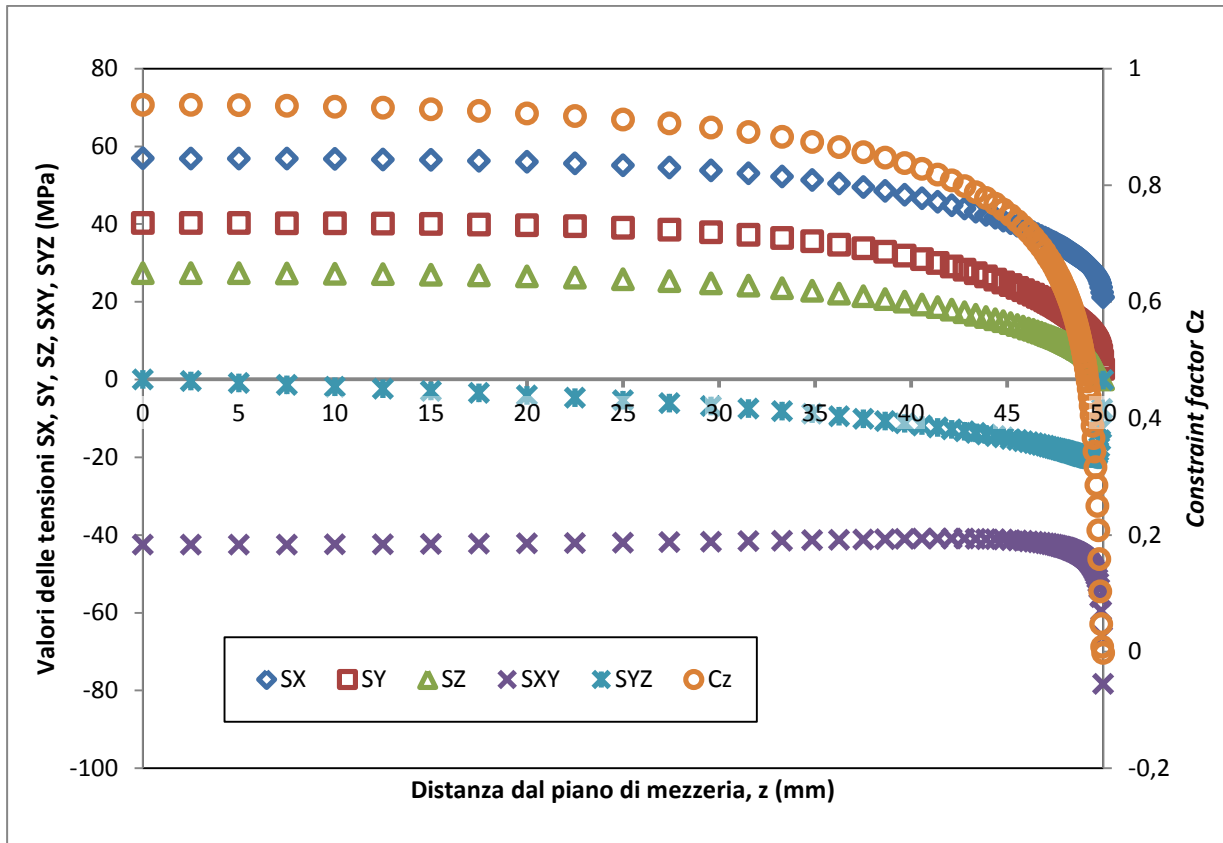


Figura 3.14 Andamento delle tensioni lungo la coordinata z ad una distanza $x = 0.15$ mm dall'apice della cricca

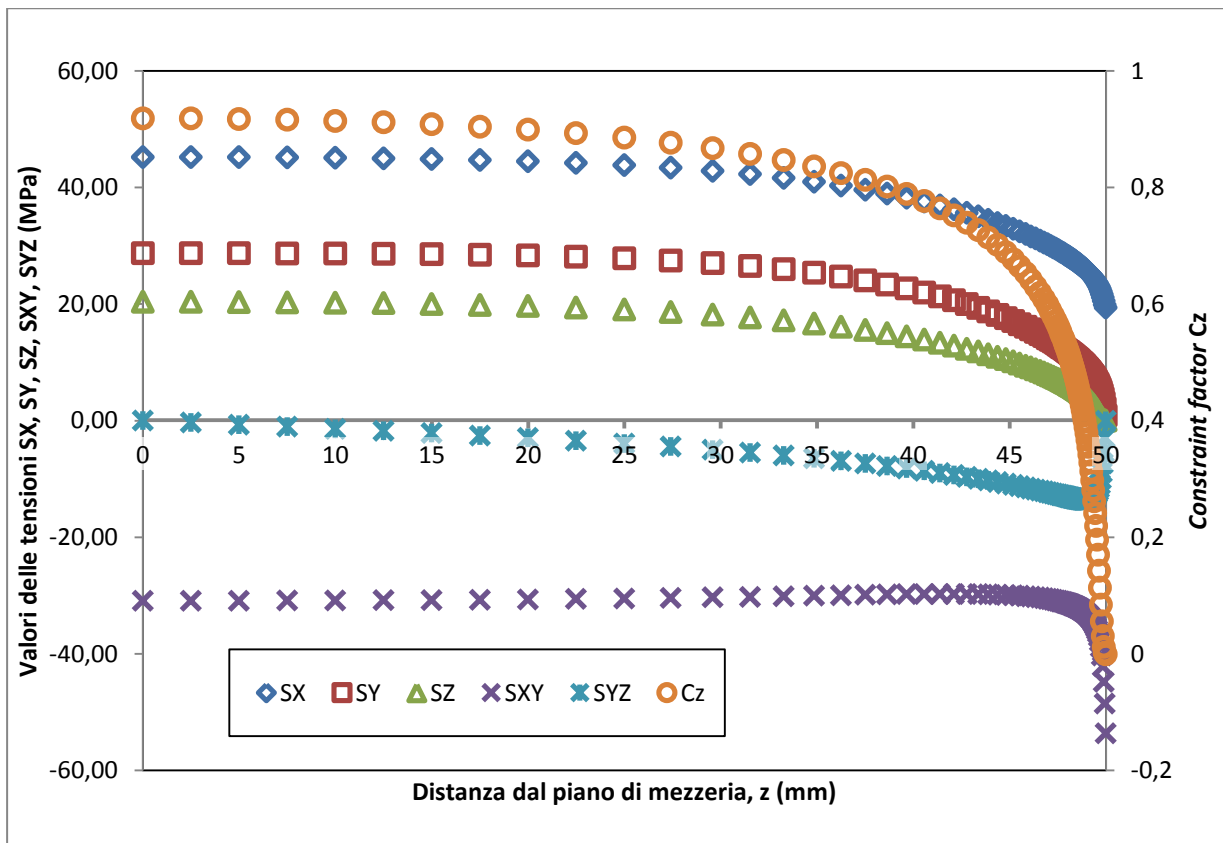


Figura 3.15 Andamento delle tensioni lungo la coordinata z ad una distanza $x = 0.28$ mm dall'apice della cricca

Come si può notare, nella sezione di mezzzeria la tensioni di taglio fuori piano τ_{yz} è nulla e per entrambi i casi si ha uno stato tensionale vicino alla deformazione piana, poiché il *constraint factor* C_z è vicino all'unità. Allontanandosi dalla sezione di mezzzeria si nota che le tensioni normali σ_x , σ_y e σ_z calano, nel caso delle ultime due fino a diventare nulle (σ_z) o di entità praticamente nulla (σ_y) in corrispondenza della superficie libera, mentre si ha la comparsa di tensioni di taglio τ_{yz} tipiche del modo III, denominato modo fuori piano. La comparsa di tali tensioni non è legata all'applicazione di carichi di modo III esterni, ma è indotta dalla presenza di carichi di modo II e di un modulo di Poisson non nullo: si ritiene opportuno perciò parlare più propriamente di modo indotto fuori piano, denominato *modo O* (*out-of-plane mode*), evidenziando così anche nella terminologia utilizzata il fatto che tale modo è indotto dal modo II, e che esiste perciò una differenza concettuale con il modo III ritenuto effetto di applicazione di carichi esterni. [27] L'entità di tali tensioni di taglio di modo O raggiunge un massimo a qualche decimo di millimetro di distanza dalla superficie libera (0.6 mm nel caso di $x = 0.15$ mm, 1 mm nel caso di $x = 0.28$ mm), per poi calare bruscamente ed arrivare ad annullarsi sulla superficie libera. La tensione di taglio nel piano, τ_{xy} , cala leggermente allontanandosi dalla sezione di mezzzeria, per poi crescere rapidamente nella regione più vicina alla superficie libera e raggiungere un massimo proprio in corrispondenza della superficie libera.

Al fine di poter apprezzare più facilmente le differenze tra gli andamenti delle tensioni alle due distanze dall'apice della cricca considerate, le tensioni sono state riportate in grafici comparativi (Fig. 3.16, 3.17 e 3.18).

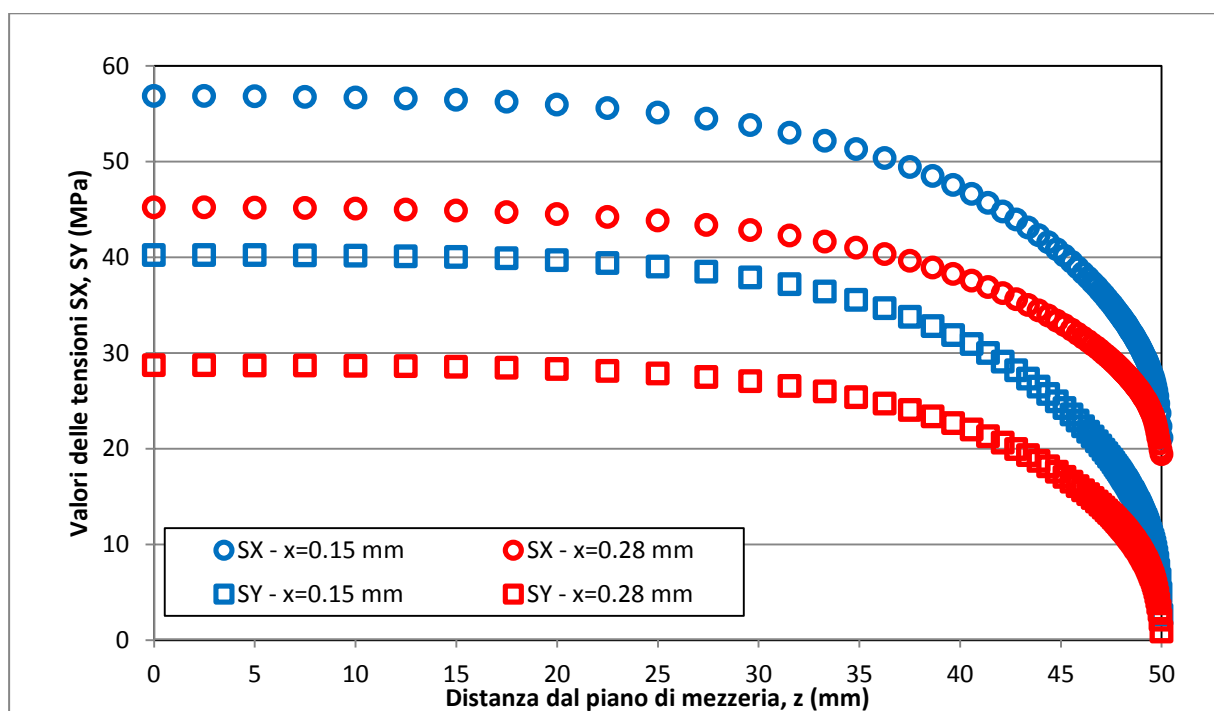


Figura 3.16 Confronto tra l'andamento lungo la coordinata z delle tensioni σ_x e σ_y a diversa distanza dall'apice della cricca

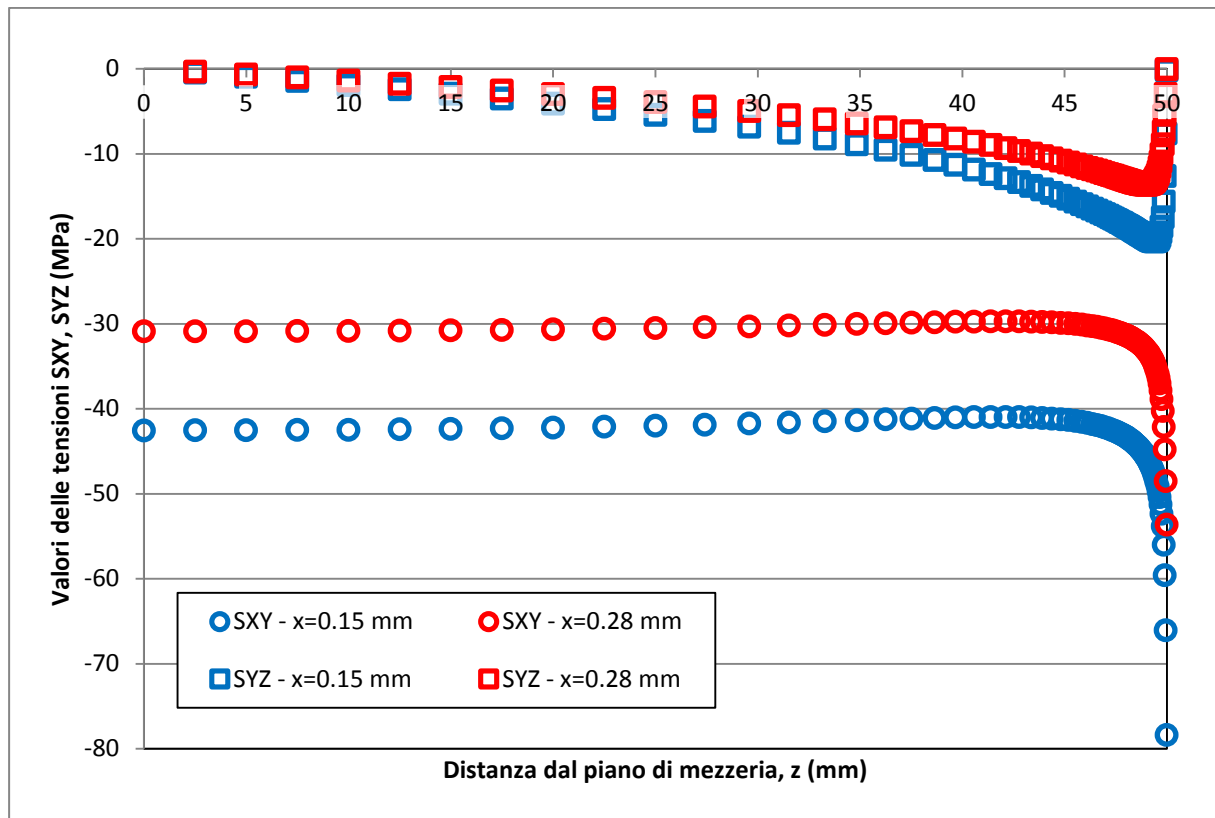


Figura 3.17 Confronto tra l'andamento lungo la coordinata z delle tensioni τ_{xy} e τ_{yz} a diversa distanza dall'apice della cricca

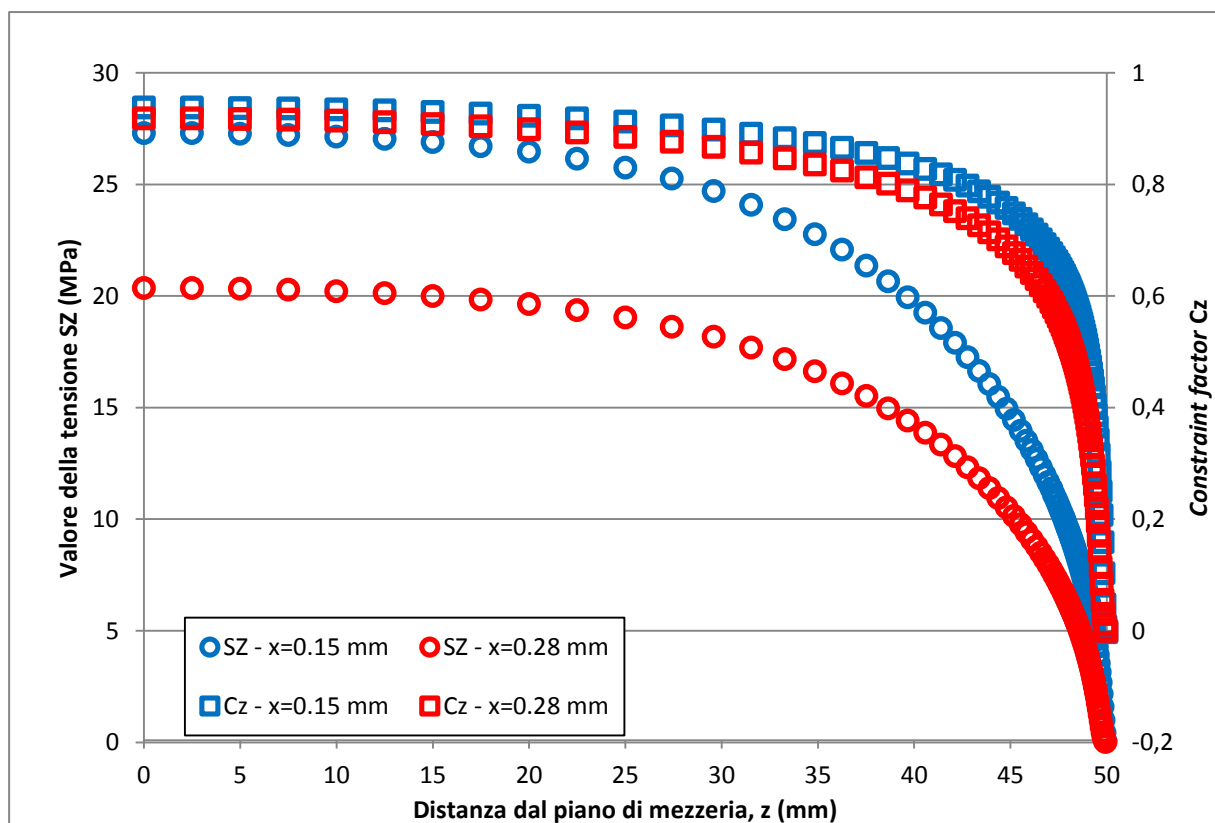


Figura 3.18 Confronto tra l'andamento lungo la coordinata z della tensione σ_z e del constraint factor C_z a diversa distanza dall'apice della cricca

Come si può notare dai grafici riportati nelle Fig. 3.16, 3.17 e 3.18, non si hanno sensibili variazioni dell'andamento delle tensioni: la differente entità delle tensioni può essere benissimo ricondotta alla diversa distanza dall'apice della cricca, mentre il loro andamento è praticamente il medesimo.

Anche l'andamento del *constraint factor* C_z non presenta variazioni molto sensibili: tuttavia, l'andamento di tale coefficiente sarà ripreso in esame parlando del computo della densità di energia di deformazione (SED).

3.5.2 Calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni (SIFs)

Si è proceduto poi col calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni di modo I, modo II e modo O per ciascuna sezione individuata dalle diverse file di elementi. A tale scopo si riportano gli andamenti delle tensioni di fronte all'apice della cricca per diverse sezioni individuate dalla coordinata z nelle Fig. 3.19-3.23.

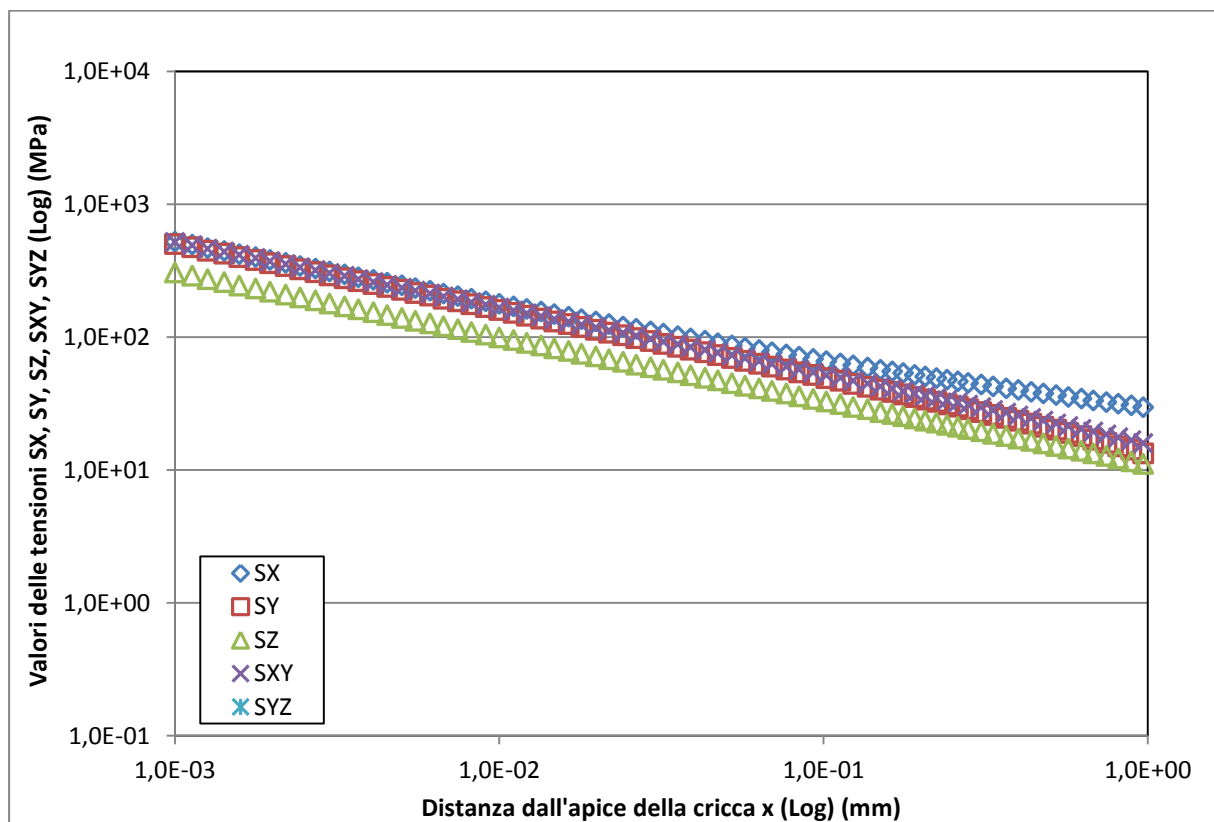


Figura 3.19 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice della cricca per la sezione $z = 0$ mm

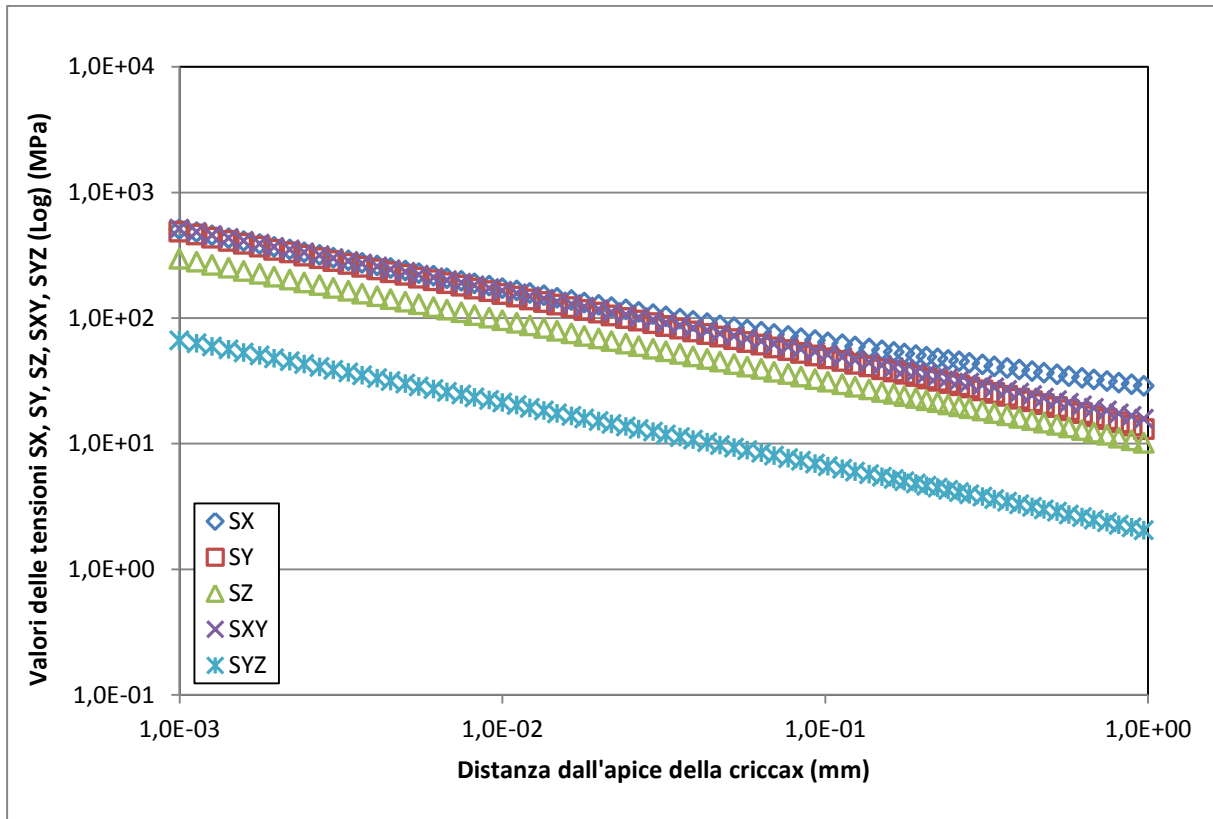


Figura 3.20 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice della cricca per la sezione $z = 25$ mm

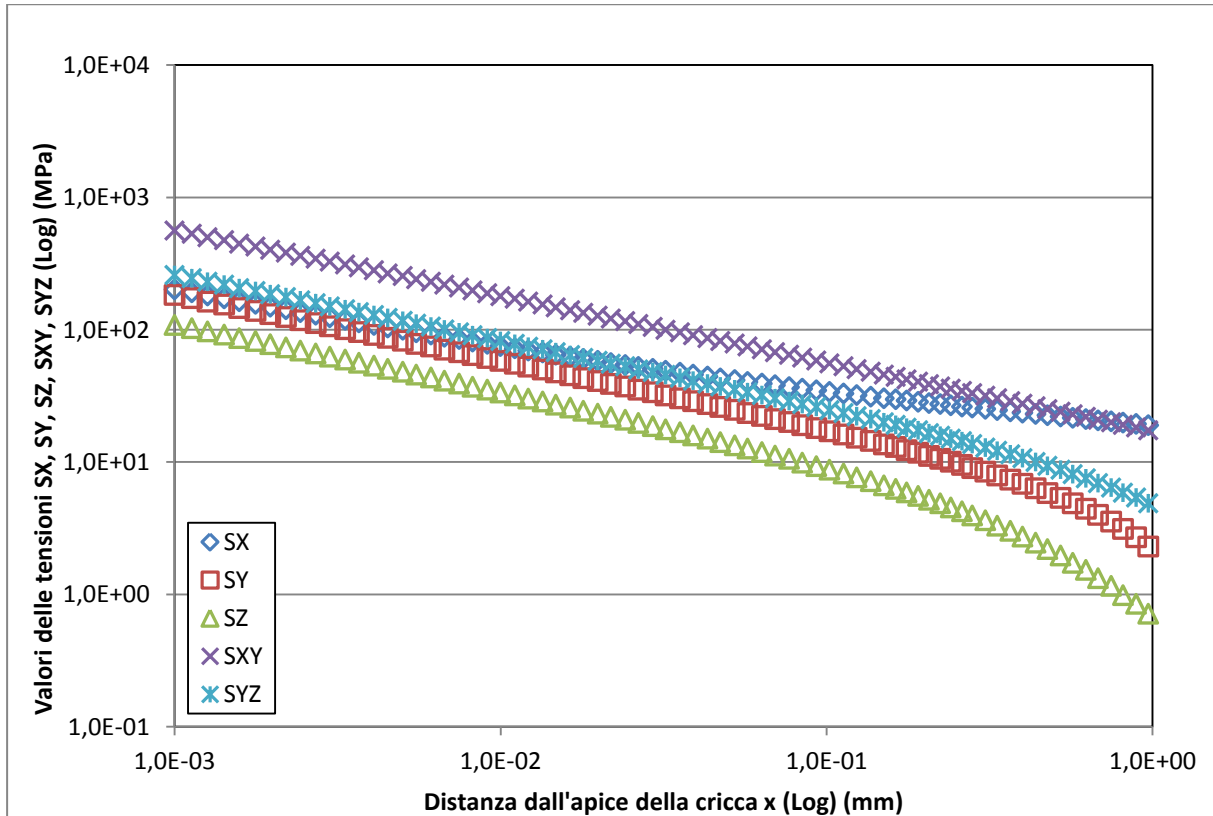


Figura 3.21 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice della cricca per la sezione $z = 49$ mm

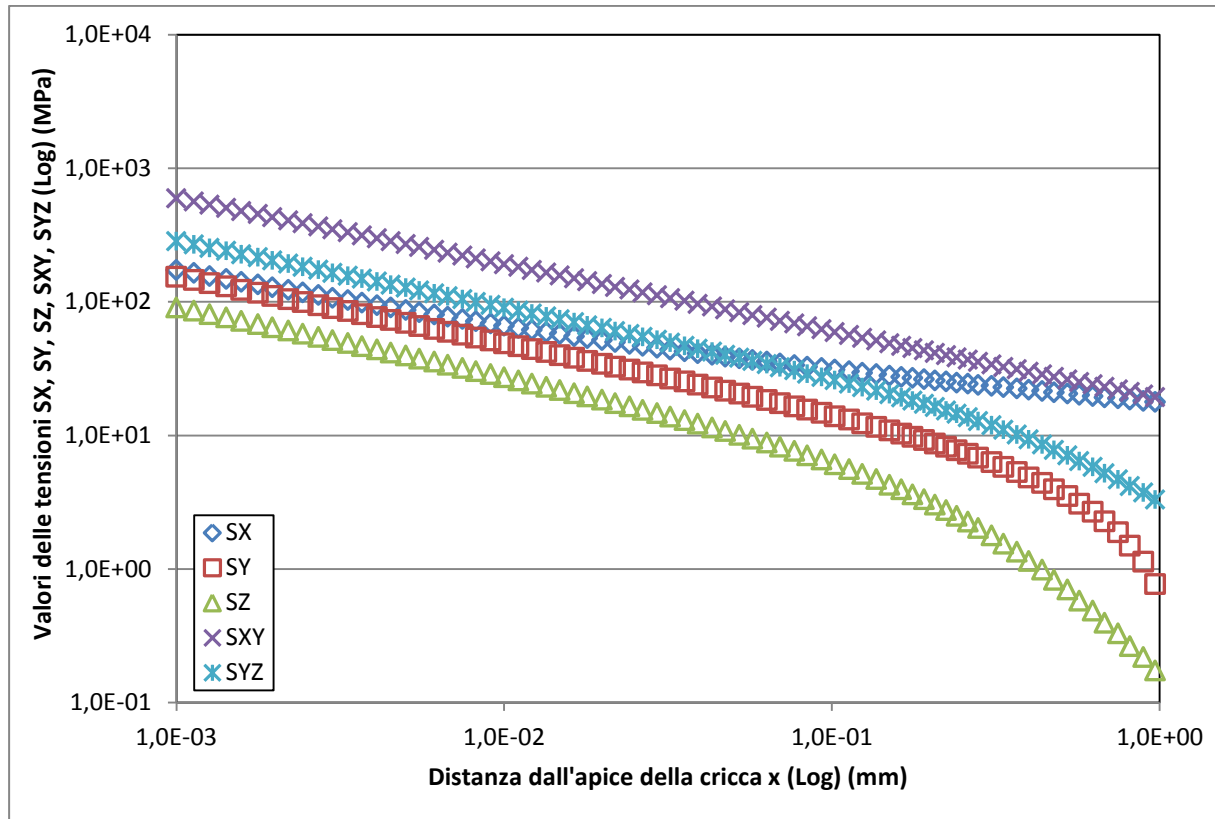


Figura 3.22 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice della cricca per la sezione $z = 49.5$ mm

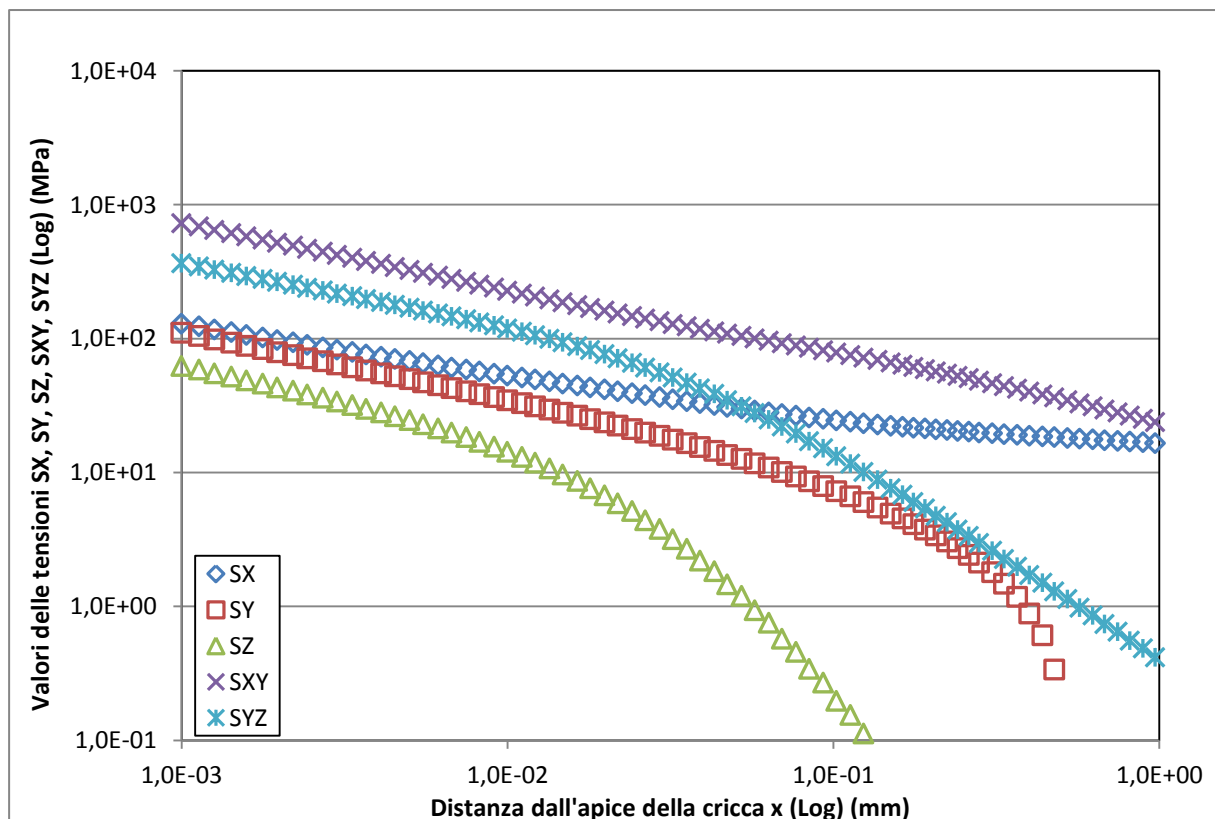


Figura 3.23 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice della cricca per la sezione $z = 49.95$ mm

Come si può notare dai grafici riportati, avvicinandosi alla superficie libera compare la già discussa tensione fuori piano di modo O, τ_{yz} . Si può notare inoltre che avvicinandosi alla superficie libera si ha una riduzione della regione in cui è valida la soluzione di Williams del primo ordine.

Sono state effettuate alcune considerazioni sull'andamento delle tensioni σ_y , τ_{xy} e τ_{yz} , per verificare che il loro grado di singolarità sia quello previsto dalla teoria. Nelle figure 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27 i valori delle tensioni nodali lungo la bisettrice di fronte all'apice della cricca sono stati infatti interpolati in diagrammi doppio logaritmici, attraverso linee di potenza le cui equazioni riportano come esponenti i gradi di singolarità delle tensioni stesse.

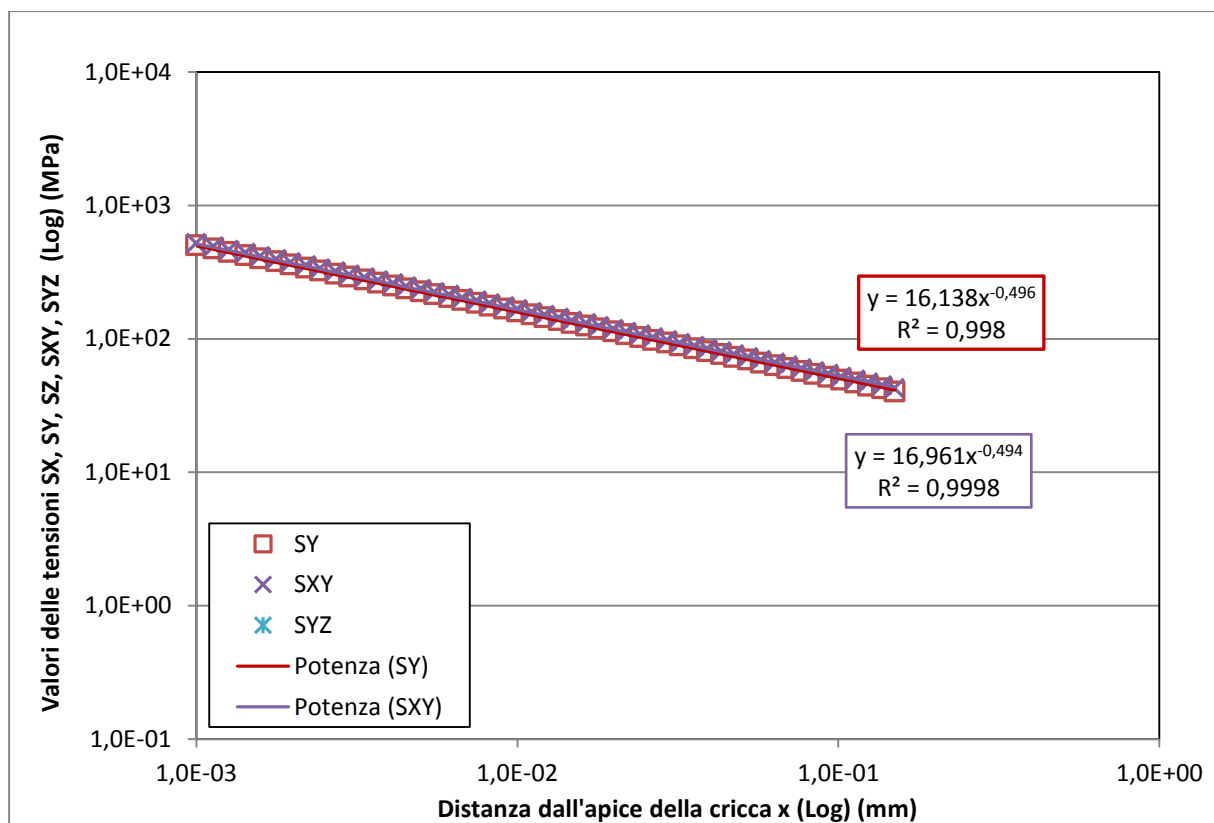


Figura 3.24 Interpolazione dei valori nodali delle tensioni σ_y , τ_{xy} e τ_{yz} per la sezione $z = 0$ mm

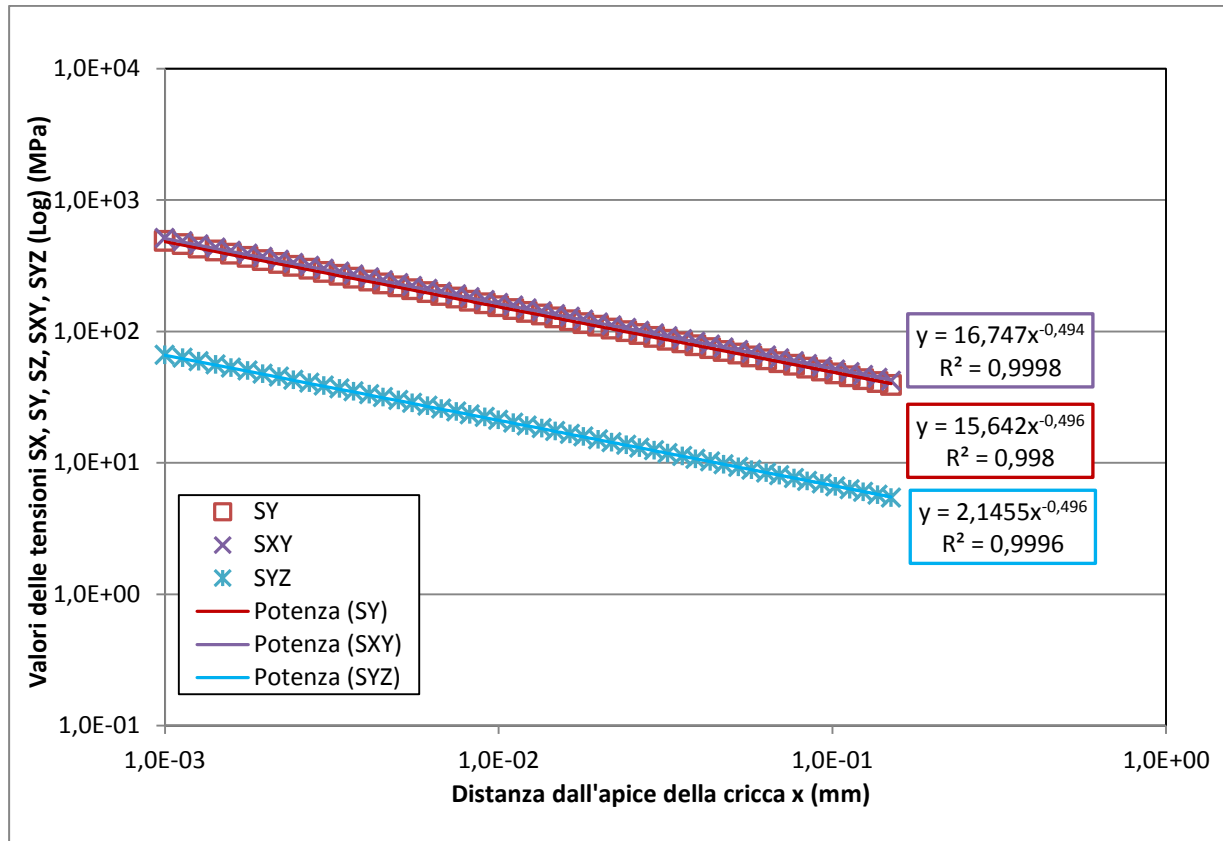


Figura 3.25 Interpolazione dei valori nodali delle tensioni σ_y , τ_{xy} e τ_{yz} per la sezione $z = 25$ mm

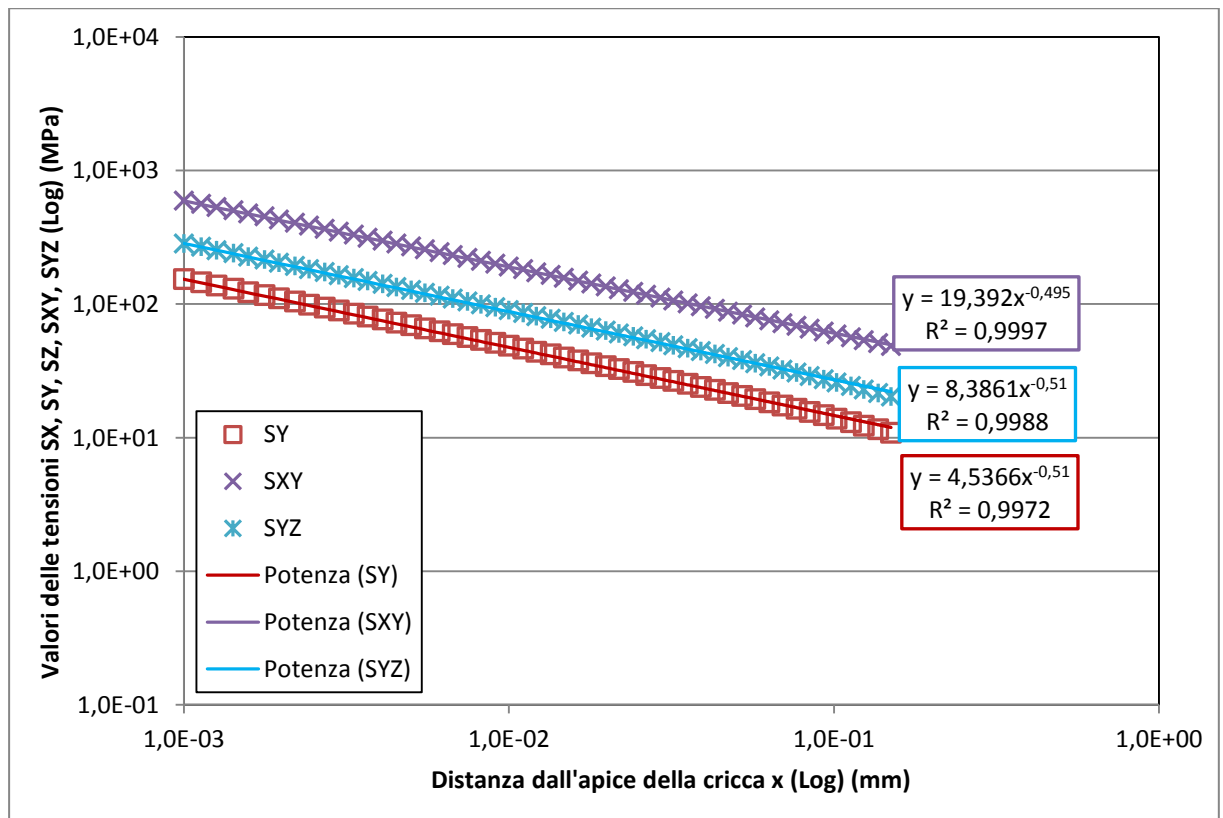


Figura 3.26 Interpolazione dei valori nodali delle tensioni σ_y , τ_{xy} e τ_{yz} per la sezione $z = 49.5$ mm

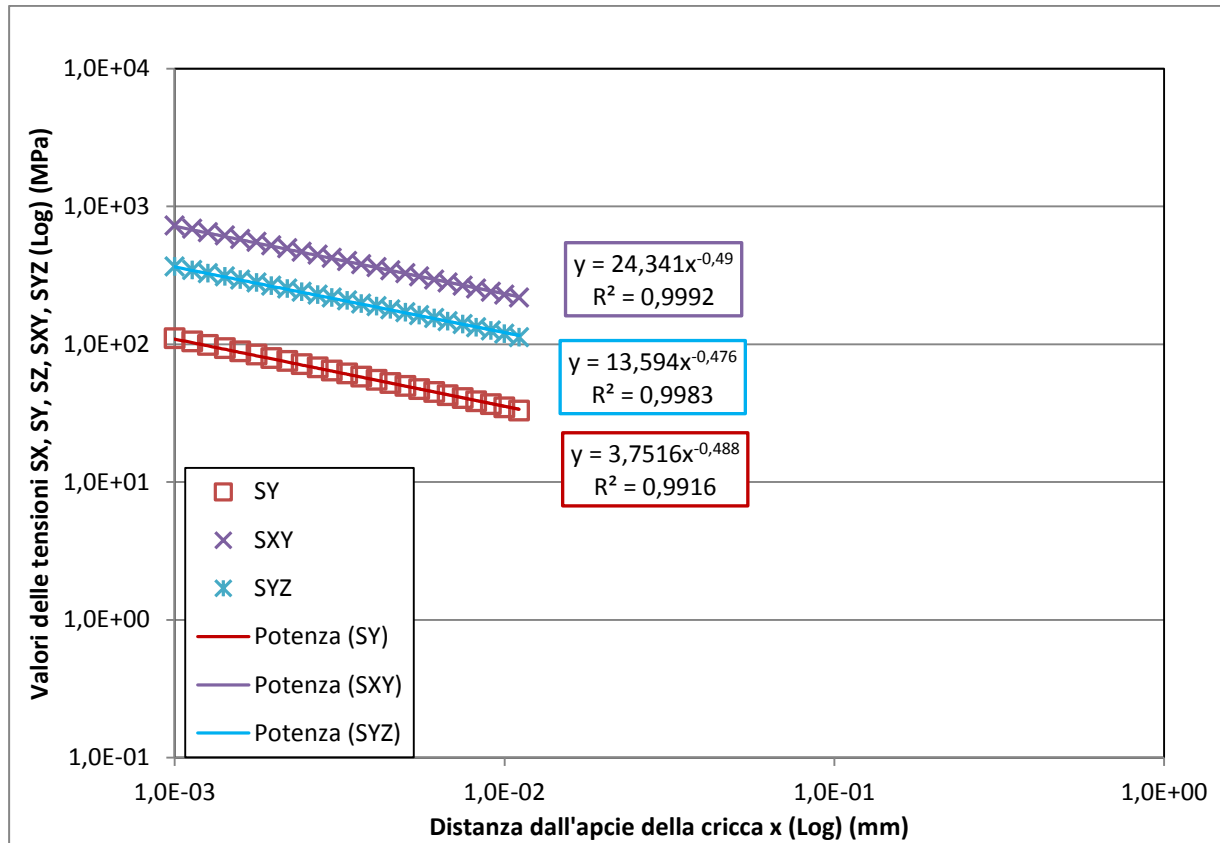


Figura 3.27 Interpolazione dei valori nodali delle tensioni σ_y , τ_{xy} e τ_{yz} per la sezione $z = 49.95$ mm

Tabella 3.2 Confronto tra i gradi di singolarità di modo I, modo II e modo III teorici e ottenuti dal FEM

SEZIONE	Grado di singolarità	Teorico	FEM	Errore percentuale [%]
$z = 0$ mm	$(1-\lambda_1)$	0.500	0.496	- 0.8
	$(1-\lambda_2)$	0.500	0.494	- 1.2
	$(1-\lambda_3)$	0.500	τ_{yz} nulle	*
$z = 25$ mm	$(1-\lambda_1)$	0.500	0.496	- 0.8
	$(1-\lambda_2)$	0.500	0.494	- 1.2
	$(1-\lambda_3)$	0.500	0.496	- 0.8
$z = 49.5$ mm	$(1-\lambda_1)$	0.500	0.510	2
	$(1-\lambda_2)$	0.500	0.495	- 1
	$(1-\lambda_3)$	0.500	0.510	2
$z = 49.95$ mm	$(1-\lambda_1)$	0.500	0.488	- 2.4
	$(1-\lambda_2)$	0.500	0.490	- 2
	$(1-\lambda_3)$	0.500	0.476	- 4.8

Si può notare come il grado di singolarità delle tensioni nelle diverse sezioni sia molto vicino a quello teorico, presentando errori molto limitati, e come tale errore cresca leggermente avvicinandosi alla superficie libera del giunto (Tab. 3.2). Si ritiene tuttavia corretto considerare il grado di singolarità pari a 0.5 per tutte le sezioni del giunto. Va sottolineato come, per le sezioni nelle immediate vicinanze della superficie libera, le tensioni presentino

un andamento lineare in un diagramma doppio logaritmico solo in una regione limitata vicino all'apice della cricca, abbandonando rapidamente tale andamento (Fig. 3.23 e 3.27).

Si è quindi proceduto con il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando le definizioni di Gross e Mendelson [36] ed estendendole alle componenti fuori piano:

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 0} (\sigma_y)_{\theta=0^\circ} x^{1-\lambda_1} \quad (3.1)$$

$$K_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 0} (\tau_{xy})_{\theta=0^\circ} x^{1-\lambda_2} \quad (3.2)$$

$$K_0 (= K_3) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 0} (\tau_{yz})_{\theta=0^\circ} x^{1-\lambda_3} \quad (3.3)$$

Per le definizioni sopra riportate, si possono utilizzare le componenti di tensione nel sistema di riferimento cartesiano all'apice della cricca in quanto, lungo la bisettrice della cricca, coincidono con le componenti di tensione nel sistema di riferimento polare. Sono stati calcolati i SIFs anche per le sezioni immediatamente vicine alla superficie libera, utilizzando pochi valori delle tensioni nodali vicino all'apice della cricca. Si sottolinea infatti nuovamente come per le sezioni vicine alla superficie libera l'andamento delle tensioni nel diagramma doppio logaritmico si discosti da un andamento rettilineo già per distanze limitate dall'apice della cricca. Pertanto in tali sezioni la zona di validità delle espressioni delle tensioni e dei SIFs risulterà limitata e non estesa all'intero volume di controllo: Pook suggerisce che nella prossimità di un *corner point*, come quello di una cricca che raggiunge la superficie libera, i fattori di intensificazione delle tensioni cessano di avere significato, potendo ricavare solo valori rappresentativi per la pratica. [42]

L'andamento delle tensioni fino alla sezione $z = 49.5 \text{ mm}$ sembra tuttavia poter essere ben descritto dalle espressioni in termini di SIFs all'interno del volume di controllo (Fig. 3.22 e 3.26). Il valore dei SIFs calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson sono riportati in Fig. 3.28.

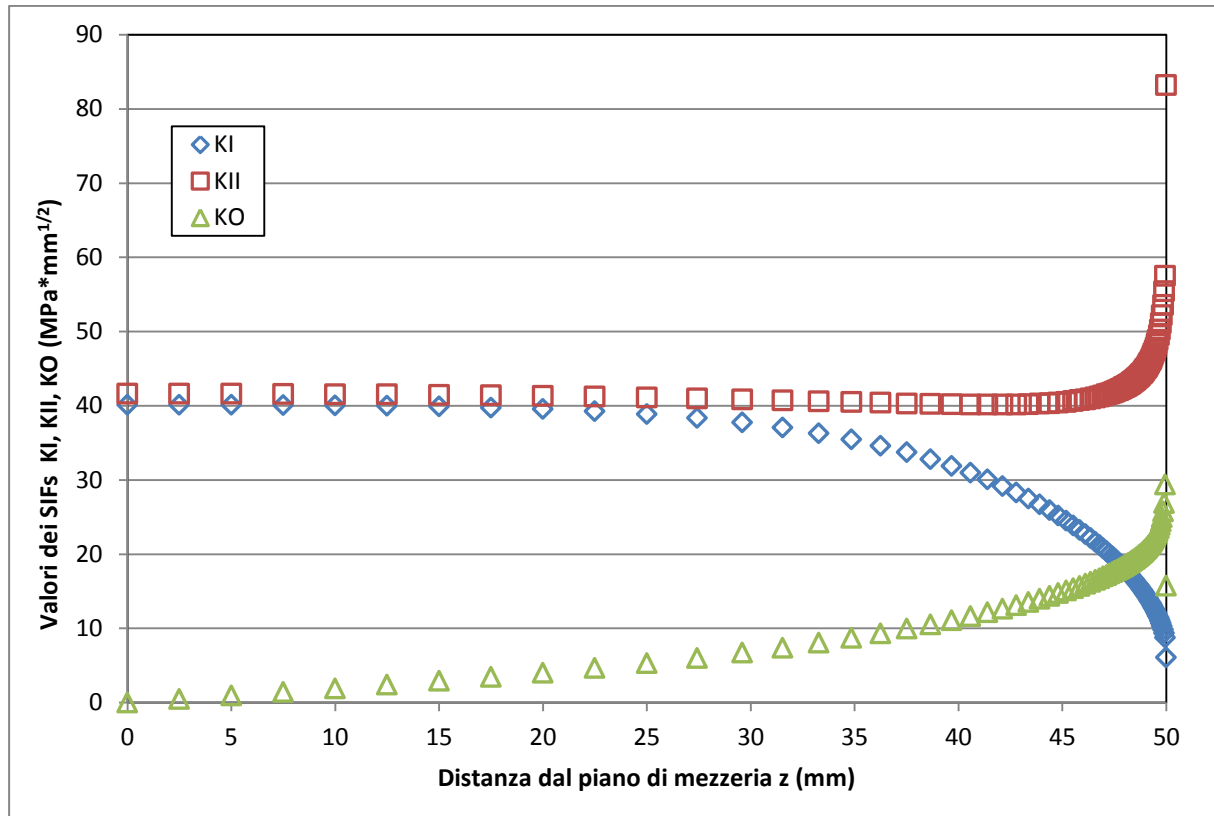


Figura 3.28 Andamento dei fattori di intensificazione delle tensioni lungo la coordinata z

Si può notare come nella sezione di mezzeria si abbia presenza dei soli modi I e II, e completa assenza del modo O. Segue poi una seconda regione in cui i SIFs di modo I e II presentano un andamento costante, mentre compare e aumenta leggermente il modo O. Si ha una terza regione, in cui la diminuzione del modo I si fa più accentuata, accompagnata da un più forte aumento del modo O e da una leggera flessione del modo II. Nella zona più vicina alla superficie libera si ha una rapida crescita dei modi II e O, mentre prosegue la diminuzione del modo I. Sulla superficie libera si ha infine una brusca diminuzione del modo O e un rapido aumento del modo II.

Non è chiaro se sulla superficie libera i SIFs di modo I e O siano nulli mentre il modo II tenda all'infinito, o se vengano effettivamente raggiunti valori esigui o molto grandi, ma finiti. Nella letteratura sono stati introdotti i gradi di singolarità chiamati *corner point singularities*, sostenendo che in corrispondenza di un *corner point* vi sia una zona di estensione non conosciuta (ma che sembra dipendere dal carico, dallo spessore e dal modulo di Poisson) entro la quale i campi di tensione e di spostamenti cessano di seguire i gradi di singolarità tipici dei problemi bidimensionali (dipendenti solamente dall'angolo di apertura dell'intaglio), per seguire dei gradi di singolarità dipendenti dal modulo di Poisson e dall'angolo con cui la cricca (o intaglio) interseca la superficie libera. [42] Per approfondire il problema delle *corner point singularities* e per un riassunto sul problema di cricche e intagli, con un approccio

descrittivo degli effetti tridimensionali in termini di spostamenti basato sulle distorsioni di Volterra, si rimanda ad un recente lavoro di Pook [26] e ai riferimenti in esso contenuti.

3.5.3 Tensioni principali

Sono state ricavate direttamente dall'analisi FEM le tensioni principali per ognuna delle sezioni precedenti lungo lo spessore z per due differenti distanze dall'apice della cricca ($x = 0.15 \text{ mm}$ in Fig. 3.29 e $x = 0.28 \text{ mm}$ in Fig. 3.30). Si è poi proceduto con il calcolo della tensione equivalente di Guest, corrispondente alla tensione di taglio massima, ovvero al raggio del cerchio di Mohr più esterno, per uno stato di tensione triassiale.

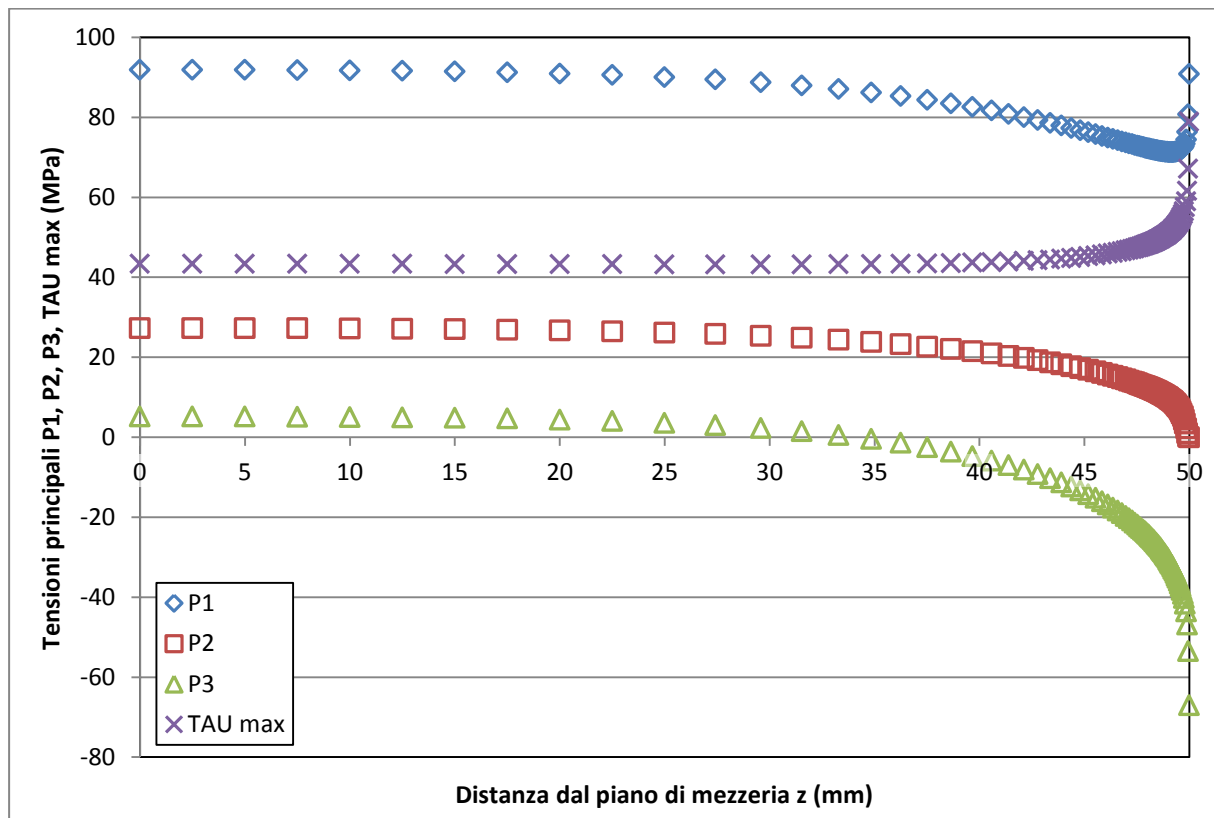


Figura 3.29 Andamento delle tensioni principali lungo la coordinata z ad una distanza $x = 0.15 \text{ mm}$ dall'apice della cricca

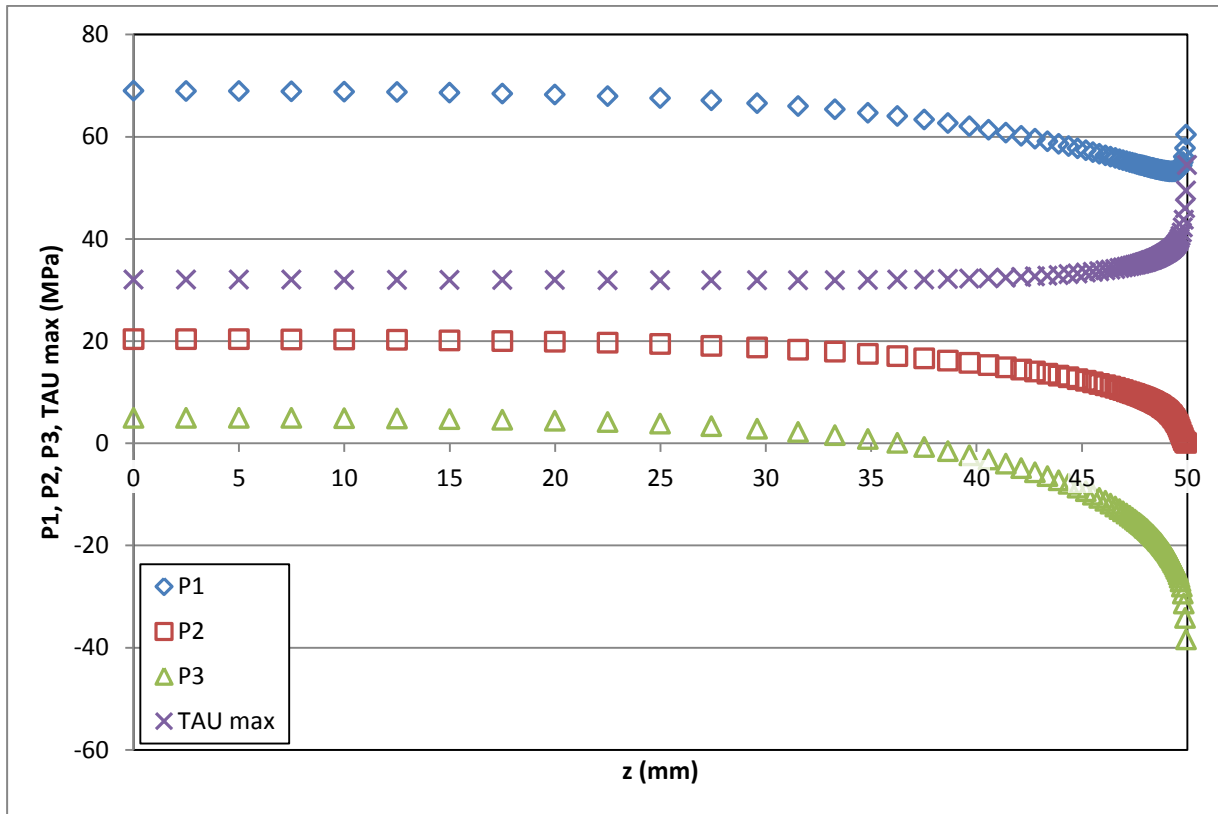


Figura 3.30 Andamento delle tensioni principali lungo la coordinata z ad una distanza $x = 0.28$ mm dall'apice della cricca

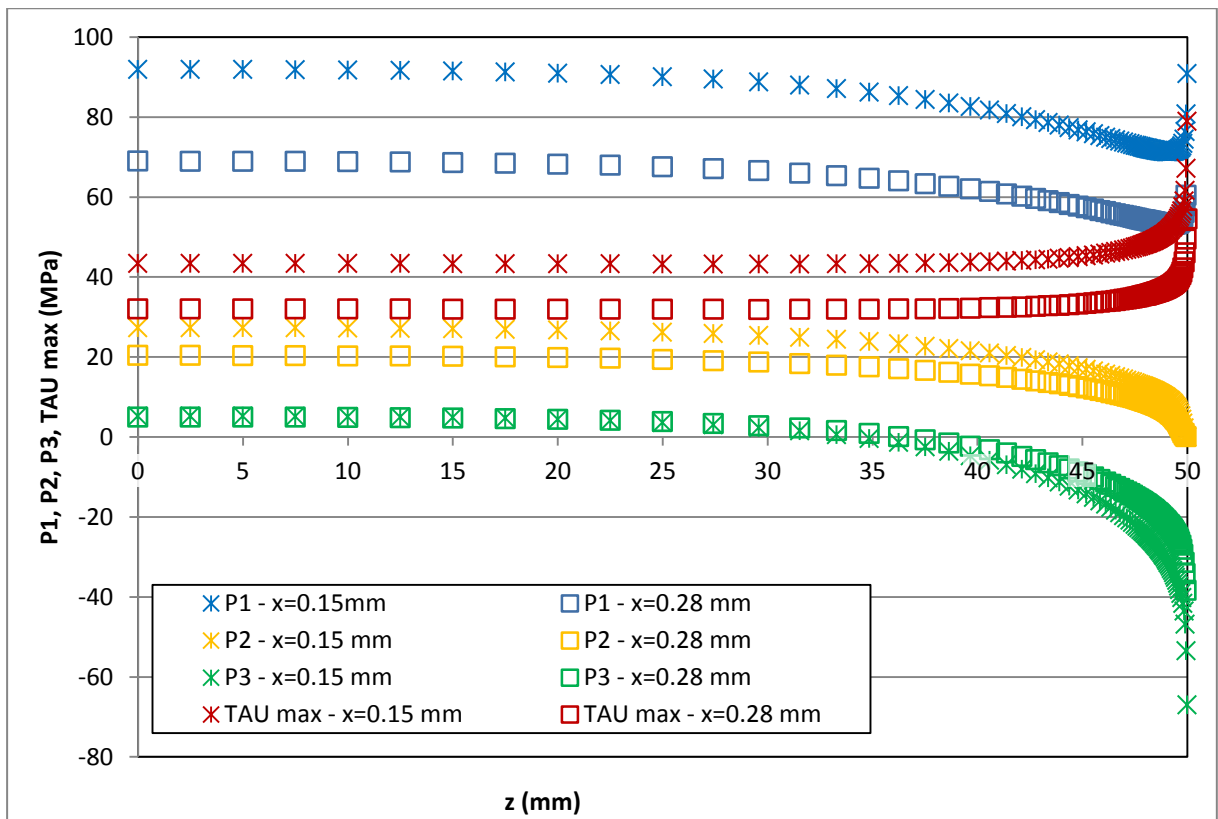


Figura 3.31 Confronto tra l'andamento delle tensioni principali lungo la coordinata z ad una distanza $x = 0.28$ mm e $x = 0.15$ mm dall'apice della cricca

L'andamento delle tensioni principali è molto simile per entrambe le distanze dall'apice della cricca considerate, come è evidente dalla Fig. 3.31. Vi è una prima regione in cui le tre tensioni principali sono tutte di trazione, e praticamente costanti. Avvicinandosi alla superficie libera si nota come la terza tensione principale σ_3 cala in maniera accentuata, diventando di compressione, mentre la seconda tensione principale σ_2 decresce fino a diventare nulla in corrispondenza della superficie libera, per la quale si ha quindi uno stato di tensione piano. Tale osservazione è in accordo con il risultato precedentemente riportato sull'andamento del *constraint factor* C_z lungo lo spessore z del giunto, coefficiente che risultava essere nullo in corrispondenza della superficie libera (Fig. 3.14 e 3.15). La tensione principale σ_1 invece decresce leggermente per poi aumentare nella prossimità della superficie libera. In conseguenza di tali variazioni delle tensioni principali, la tensione di taglio massima τ_{max} risulta essere crescente all'avvicinarsi della superficie libera, per raggiungere qui il suo massimo.

3.5.4 Densità di energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica

Il valore dell'energia di deformazione totale, deviatorica e, per sottrazione tra le due, idrostatica, è stato ricavato direttamente dall'analisi agli EF effettuata e successivamente confrontata con valori ottenuti analiticamente con le formulazioni riportate nel precedente capitolo (§2), utilizzando nelle espressioni i valori dei SIFs (K_I , K_{II} e K_{III} o K_O) calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson e il valore del *constraint factor* C_z ottenuto al limite del volume di controllo, cioè ad una distanza pari a $x = 0.15 \text{ mm}$ o a $x = 0.28 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio, a seconda del caso. È stata ricavata e calcolata analiticamente la densità di energia di deformazione per due differenti raggi del volume di controllo: $R_1 = 0.15 \text{ mm}$ e $R_2 = 0.28 \text{ mm}$.

Il valore della densità di energia di deformazione è ottenuto nel software a partire dall'energia di deformazione di un layer di elementi, dividendo quest'ultima per il volume totale degli elementi stessi. La formula utilizzata è quindi la seguente:

$$\bar{W} = \frac{\sum_i E_{t_i}}{\sum_i V_i} \quad (3.4)$$

In cui \bar{W} rappresenta la densità di energia di deformazione, E_{t_i} rappresenta l'energia di deformazione dell'elemento i -esimo e V_i il volume di tale elemento.

Per il calcolo della densità di energia di deformazione deviatorica, il valore di partenza, ricavato dall'analisi agli EF, è invece il valore medio della tensione di von Mises all'interno dell'elemento i -esimo. In questo caso l'espressione da utilizzare è la seguente:

$$\overline{W_{dev}} = \frac{\sum_i E_{d_i}}{\sum_i V_i} \quad (3.5)$$

Con

$$E_{d_i} = \frac{(1 + \nu)}{3E} [\overline{\sigma_{vM,i}}^2] * V_i \quad (3.6)$$

In cui $\overline{\sigma_{vM,i}}$ rappresenta la tensione media di von Mises all'interno dell' i -esimo elemento, E_{d_i} l'energia di deformazione deviatorica dell'elemento i -esimo e $\overline{W_d}$ la densità di tale energia per gli elementi considerati.

La densità di energia di deformazione idrostatica sarà ricavata banalmente dalla sottrazione tra le grandezze precedenti:

$$\overline{W_{id}} = \overline{W} - \overline{W_{dev}} \quad (3.7)$$

Essendo la densità di energia di deformazione ricavata un valore medio per gli elementi considerati, si considera tale valore come rappresentativo della sezione centrale rispetto alle estremità del singolo layer di elementi per il quale è stato effettuato il calcolo.

Ad esempio: il SED ottenuto per il layer di elementi visibile nella Fig. 3.32 sarà considerato rappresentativo della sezione individuata dal piano giallo nella Fig. 3.33.

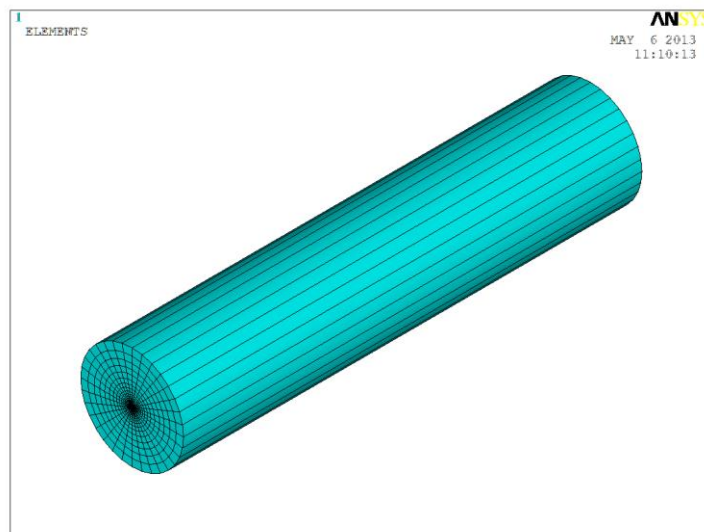


Figura 3.32 Cilindro costituito da un layer di elementi all'interno del volume di controllo

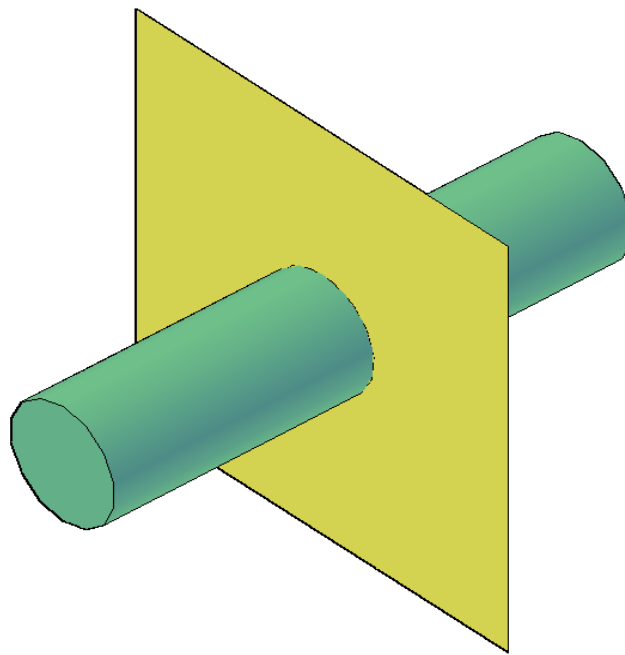


Figura 3.33 Cilindro costituito da un layer di elementi nel volume di controllo e sezione per la quale si considerano rappresentativi i risultati ottenuti per tale layer

Nei grafici delle Fig. 3.34 e 3.35 si può notare l'andamento della densità di energia di deformazione lungo la coordinata z del giunto a sovrapposizione.

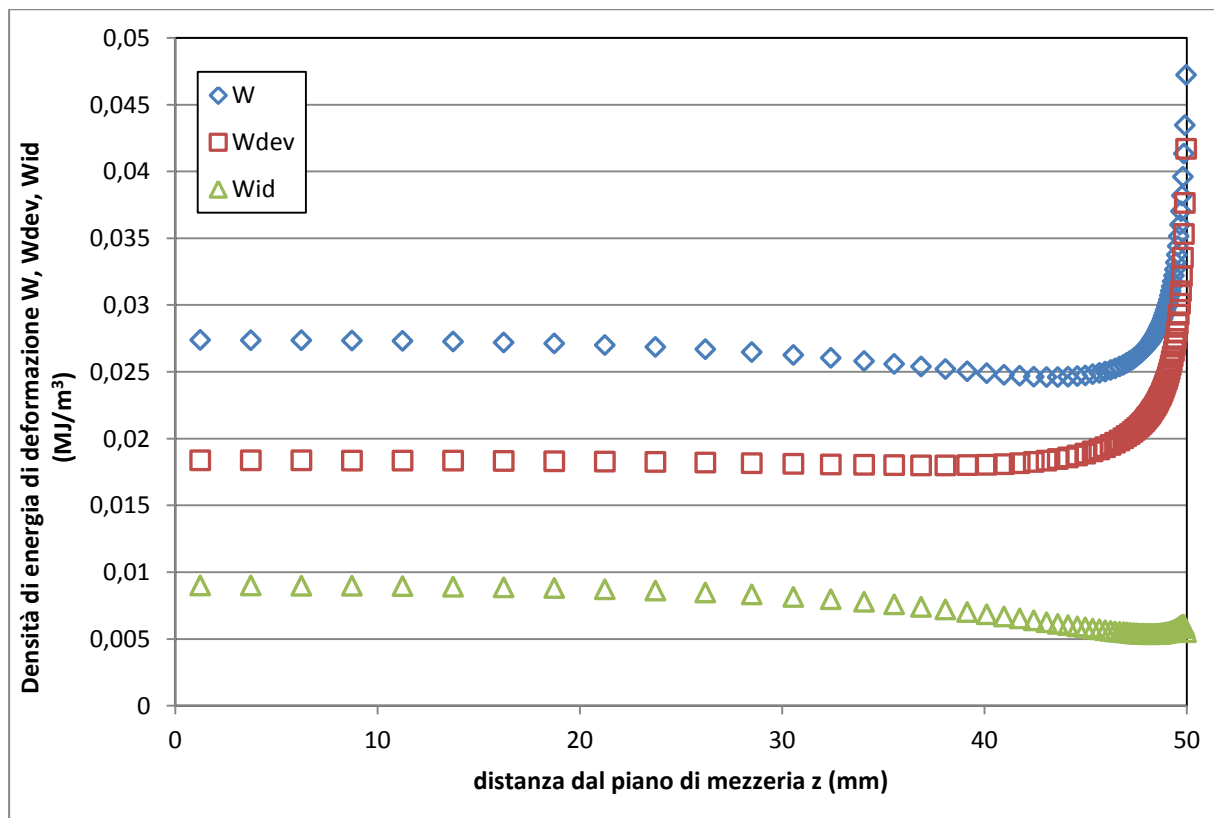


Figura 3.34 Andamento della densità di energia di deformazione totale, deviatorica ed idrostatica lungo la coordinata z per volumi di controllo di raggio $R = 0.15$ mm

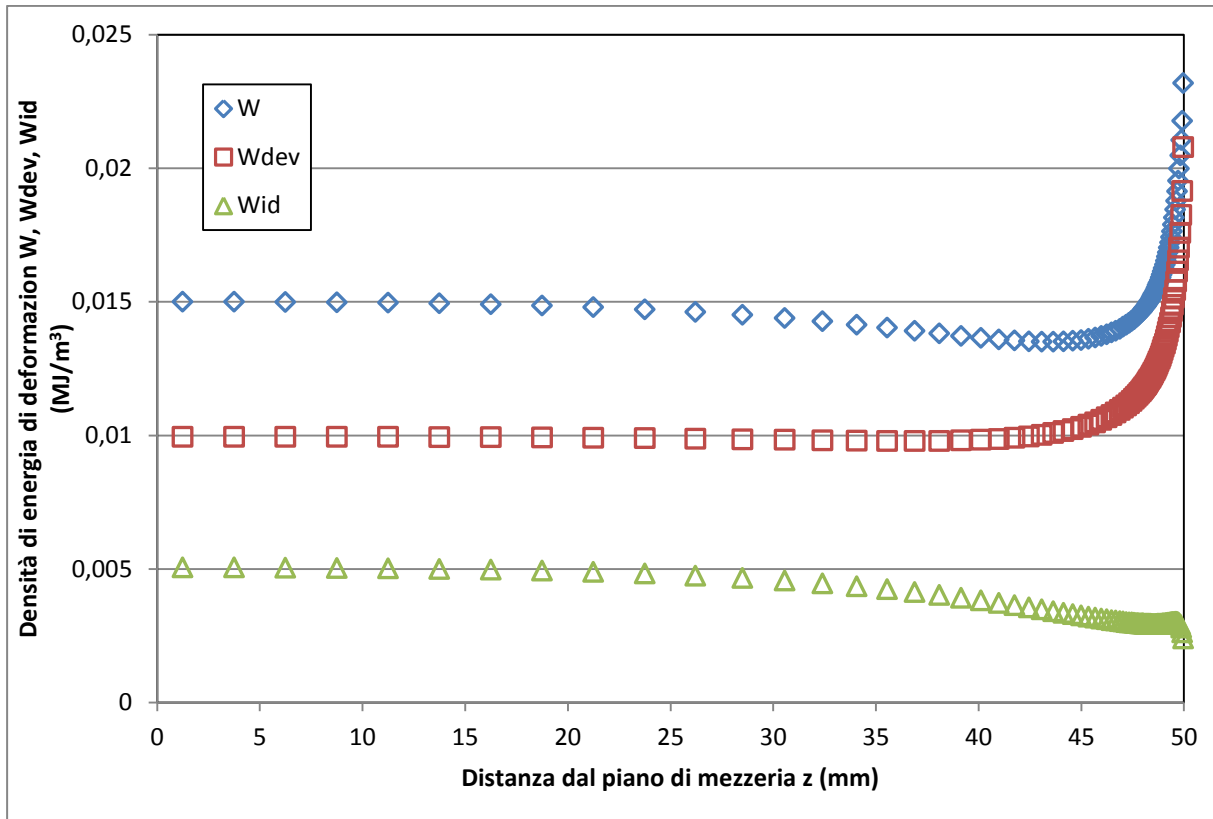


Figura 3.35 Andamento della densità di energia di deformazione totale, deviatorica ed idrostatica lungo la coordinata z per volumi di controllo di raggio $R = 0.28$ mm

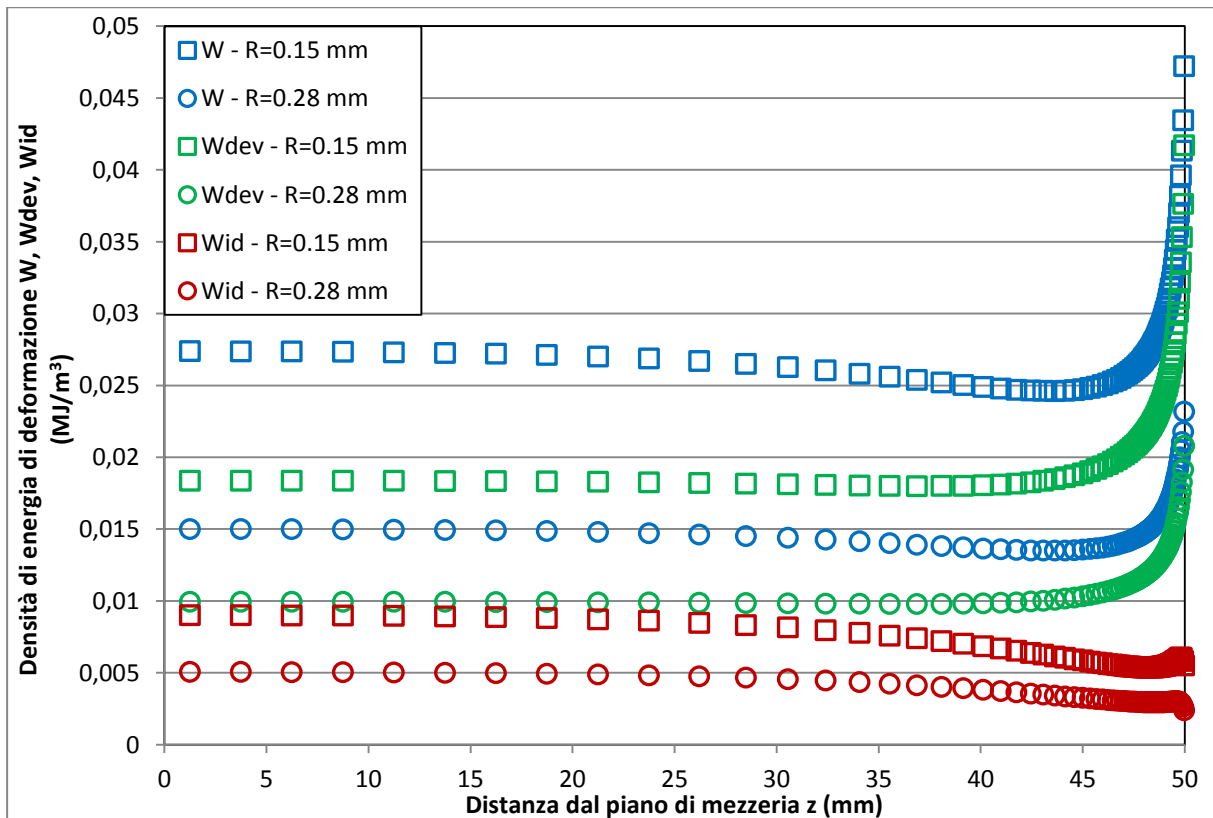


Figura 3.36 Confronto dell'andamento della densità di energia di deformazione totale, deviatorica ed idrostatica lungo la coordinata z per volumi di controllo di raggio $R = 0.15$ mm e $R = 0.28$ mm

Si nota dalla Fig. 3.36 come per entrambi i volumi di controllo considerati l'andamento del SED totale, deviatorico e idrostatico sia il medesimo, nonostante tali grandezze abbiano entità diverse (più elevate nel volume di controllo più piccolo, per l'elevata intensità del campo di tensione vicino all'apice della cricca, mediato in una zona più limitata). La densità di energia di deformazione totale resta costante fino a circa metà della profondità del giunto, per poi decrescere leggermente e aumentare rapidamente nell'intorno della superficie libera. Il leggero calo del SED totale può essere quasi totalmente ricondotto ad un calo del SED idrostatico: si può notare infatti come anche questa grandezza sia costante fino a circa metà della profondità del giunto, per poi decrescere. La densità di energia di deformazione deviatorica si mantiene invece praticamente costante per una quota maggiore della profondità del giunto, per poi crescere rapidamente nell'intorno della superficie libera.

Ricordando che nei noti criteri di resistenza di Beltrami e von Mises vengono utilizzate rispettivamente le energie di deformazione totale e deviatorica per ricavare una tensione equivalente da confrontare con un valore limite, si può pensare, osservando i risultati delle analisi effettuate, che la zona più critica per il giunto analizzato sia quella più prossima alla superficie libera, poiché entrambe queste grandezze presentano in questa regione il loro massimo (più precisamente, è proprio la quota legata alla densità di energia di deformazione deviatorica che porta ad un rapido aumento della densità di energia di deformazione totale, essendo quest'ultima grandezza somma del SED deviatorico e idrostatico).

3.5.5 Confronto tra il SED ricavato dal calcolatore e il SED ricavato analiticamente

Il valore della densità di energia di deformazione ottenuta dal codice di calcolo è stato confrontato con il valore ottenuto utilizzando la formulazione analitica riportata nel capitolo §2. Per maggiore chiarezza, si riportano qui le espressioni del SED utilizzate:

$$\bar{W} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R^{2(1-\lambda_3)}} \right] \quad (3.8)$$

$$\overline{W_{dev}} = \frac{(1 + \nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,dev}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} + \frac{I_{3,dev}}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R^{2(1-\lambda_3)}} \right] \quad (3.9)$$

$$\overline{W_{id}} = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} \left[\frac{I_{1,id}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,id}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,id}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \quad (3.10)$$

Non si riportano nuovamente, per brevità, le formulazioni degli integrali $I_1, I_2, I_{12}, I_3, I_{1,dev}, I_{2,dev}, I_{12,dev}, I_{3,dev}, I_{1,id}, I_{2,id}$ e $I_{12,id}$ (§2), limitandosi a ricordare che i loro valori dipendono da tre fattori:

- angolo di apertura dell'intaglio 2α (o, equivalentemente, angolo $\gamma = \pi - \alpha$);
- modulo di Poisson ν ;
- *constraint factor* C_z .

I valori degli integrali sono stati tabellati nell'appendice §A4 per il caso della cricca ($2\alpha = 0$).

Una volta nota la geometria (2α o $\gamma, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3) e il materiale (E e ν) del provino, i dati necessari per il calcolo del SED totale, deviatorico ed idrostatico in ciascuna sezione sono:

- il *constraint factor* C_z ;
- gli N-SIFs di modo I, II e III (o modo O indotto) (K_1, K_2 e K_3 o K_O) o, nel caso in esame (cricca) i SIFs K_I, K_{II} e K_{III} (K_O).

Poiché tali dati sono stati calcolati per le due sezioni alle estremità di ciascun layer di elementi considerato, si è eseguita la loro media aritmetica e si è considerato quest'ultimo valore come rappresentativo della sezione centrale del layer di elementi, e costante all'interno di tutto il layer di elementi.

Per quanto riguarda le grandezze del SED totale e deviatorico, il calcolo è stato effettuato tenendo conto della presenza del modo O (modo III indotto) o trascurandone la presenza. Non ha senso operare un confronto di questo tipo per il SED idrostatico poiché, come è evidente nell'espressione sopra riportata, tale grandezza è indipendente dalla presenza o meno del modo O. Intuitivamente, si può pensare che la presenza del modo O (modo III indotto) possa essere colta con maggior sensibilità dal SED deviatorico, poiché nel SED totale si somma a quest'ultima grandezza il SED idrostatico, indipendente dal modo O.

Sono stati ottenuti i valori del SED totale, idrostatico e deviatorico anche per il modello bidimensionale, impostando l'analisi con elementi dal comportamento di deformazione piana (*plane strain*) e tensione piana (*plane stress*).

Si riportano dalla Fig. 3.37 alla Fig. 3.42 i grafici che riassumono il confronto tra la soluzione ottenuta dal codice di calcolo e la soluzione analitica.

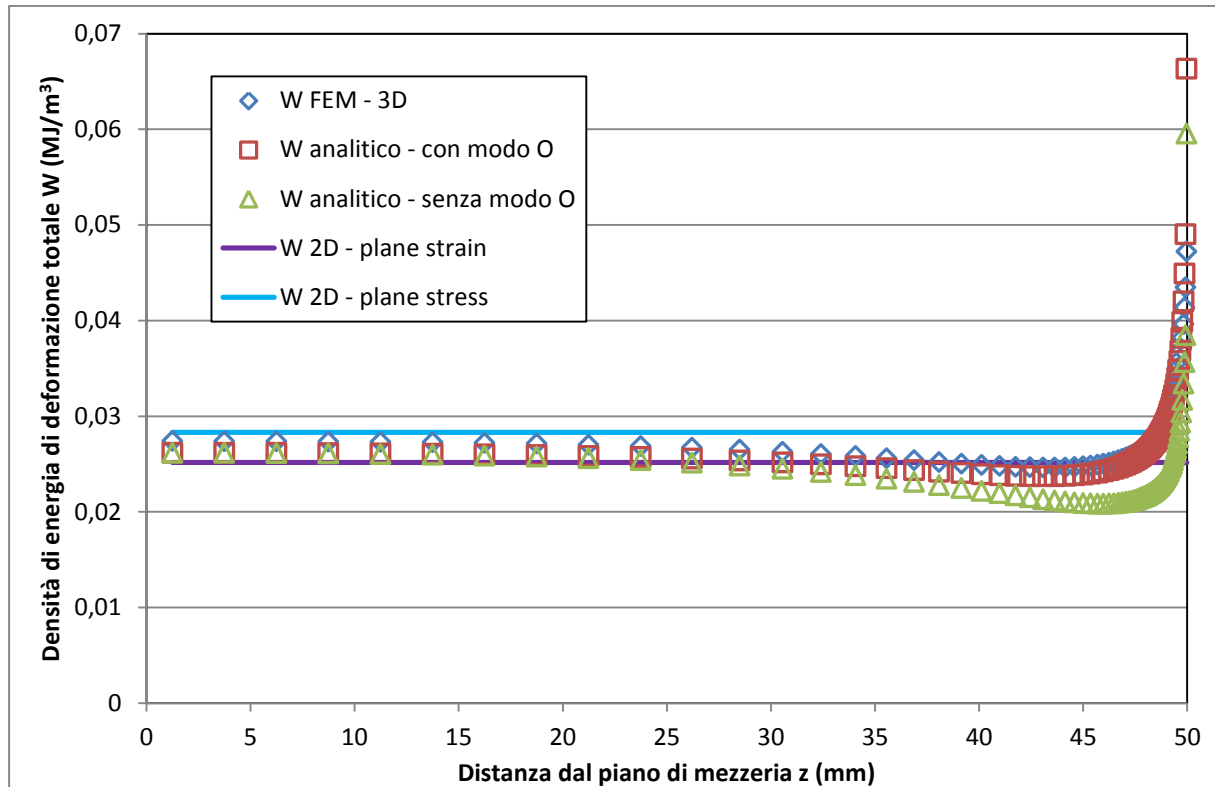


Figura 3.37 SED totale ricavato dal FEM ed analiticamente (tenendo conto o meno della presenza del modo O) all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z . Confronto con i casi bidimensionali di deformazione piana e di tensione piana

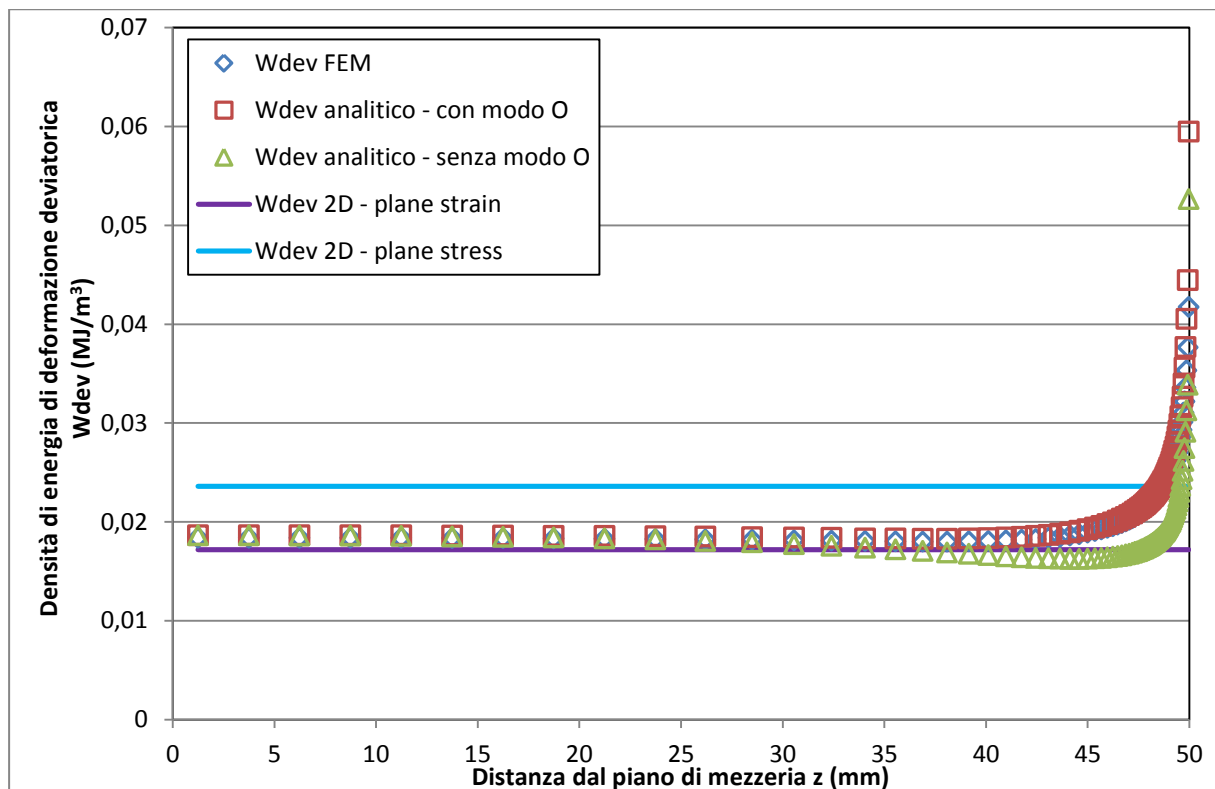


Figura 3.38 SED deviatorico ricavato dal FEM ed analiticamente (tenendo conto o meno della presenza del modo O) all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z . Confronto con i casi bidimensionali di deformazione piana e tensione piana

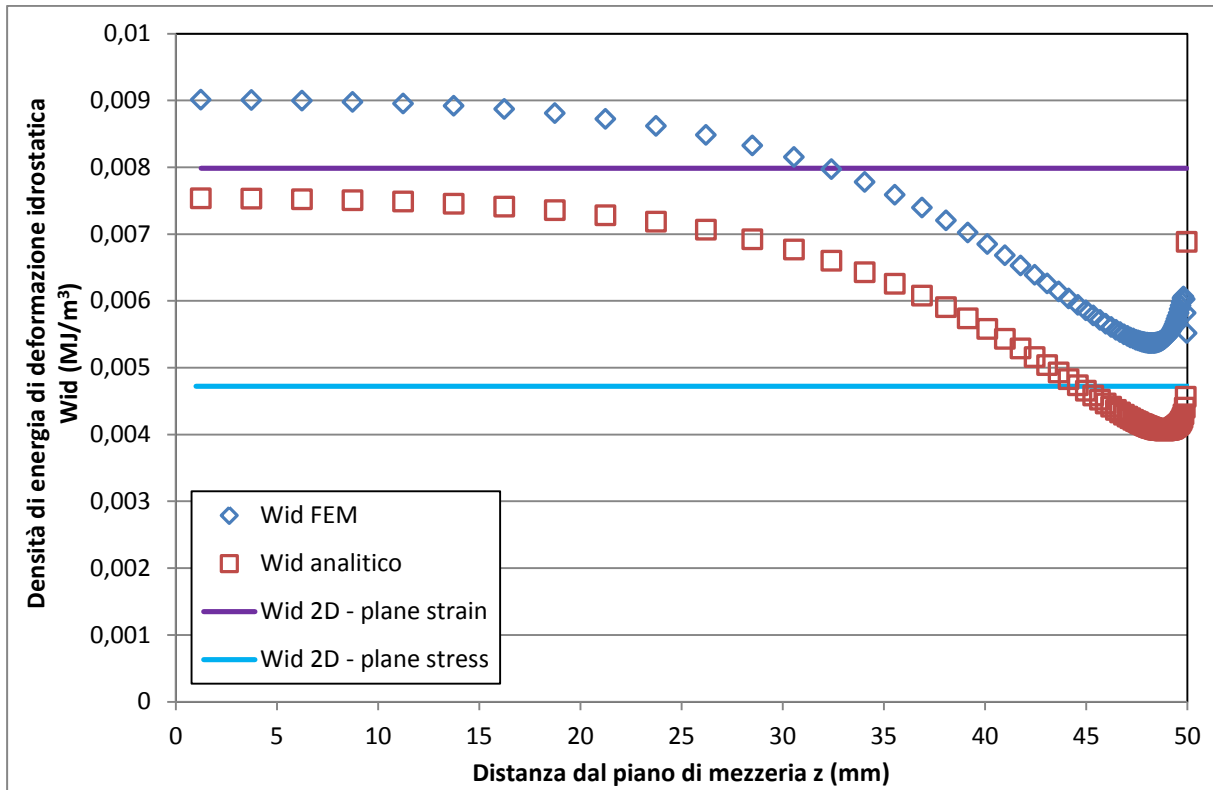


Figura 3.39 SED idrostatico ricavato dal FEM ed analiticamente (tenendo conto o meno della presenza del modo O) all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z . Confronto con i casi bidimensionali di deformazione piana e tensione piana

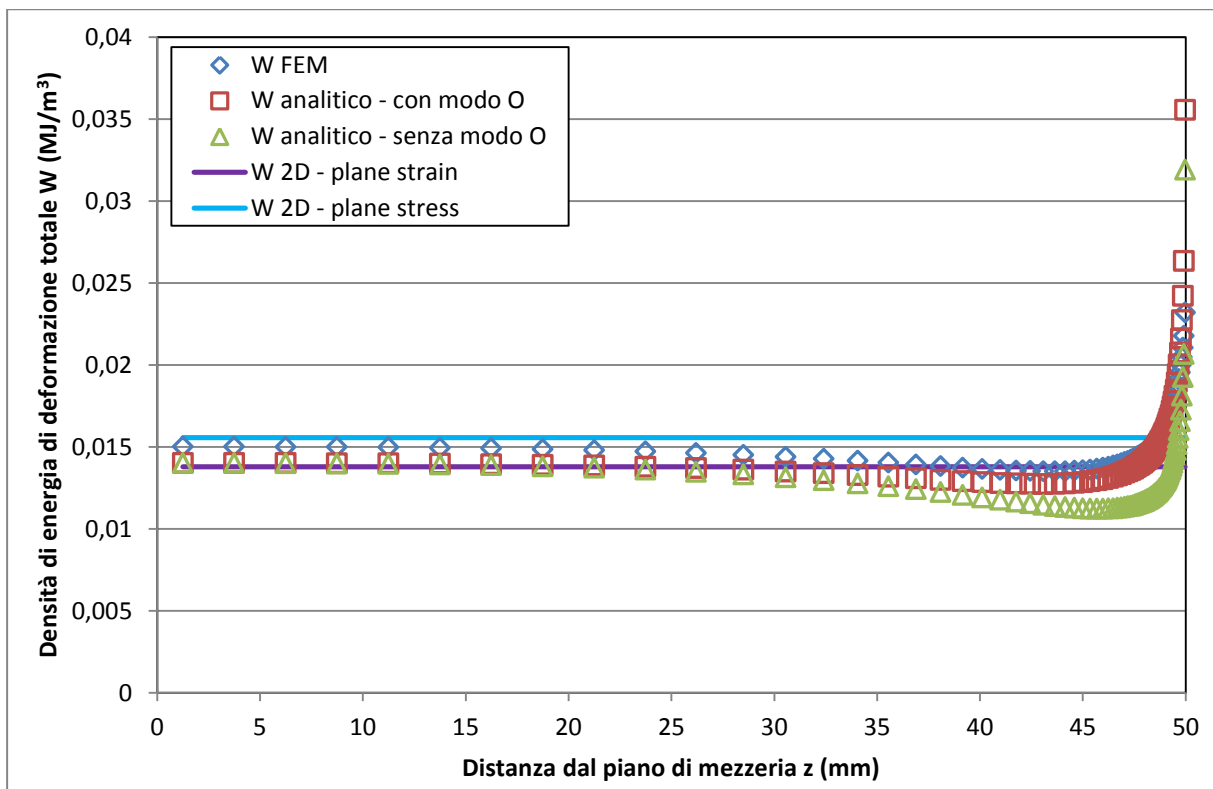


Figura 3.40 SED totale ricavato dal FEM ed analiticamente (tenendo conto o meno della presenza del modo O) all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.28$ mm lungo la coordinata z . Confronto con i casi bidimensionali di deformazione piana e di tensione piana

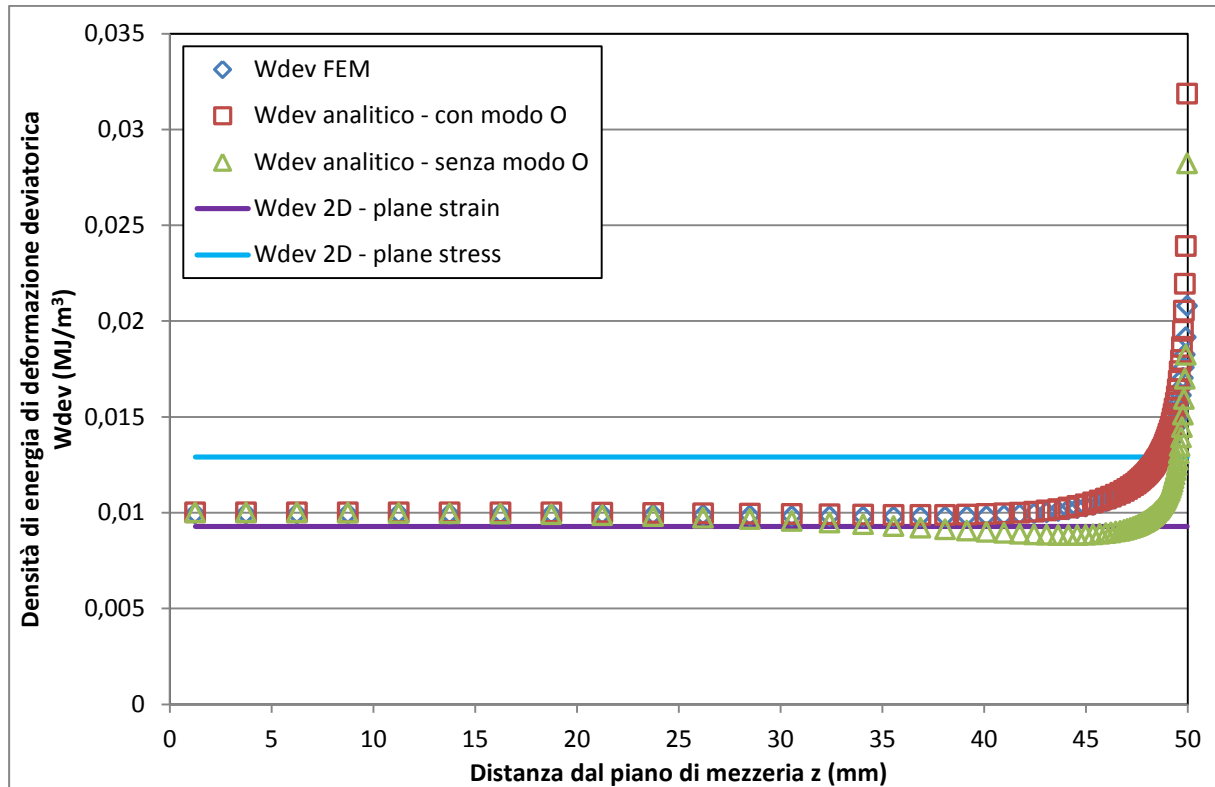


Figura 3.41 SED deviatorico ricavato dal FEM ed analiticamente (tenendo conto o meno della presenza del modo O) all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.28$ mm lungo la coordinata z . Confronto con i casi bidimensionali di deformazione piana e di tensione piana

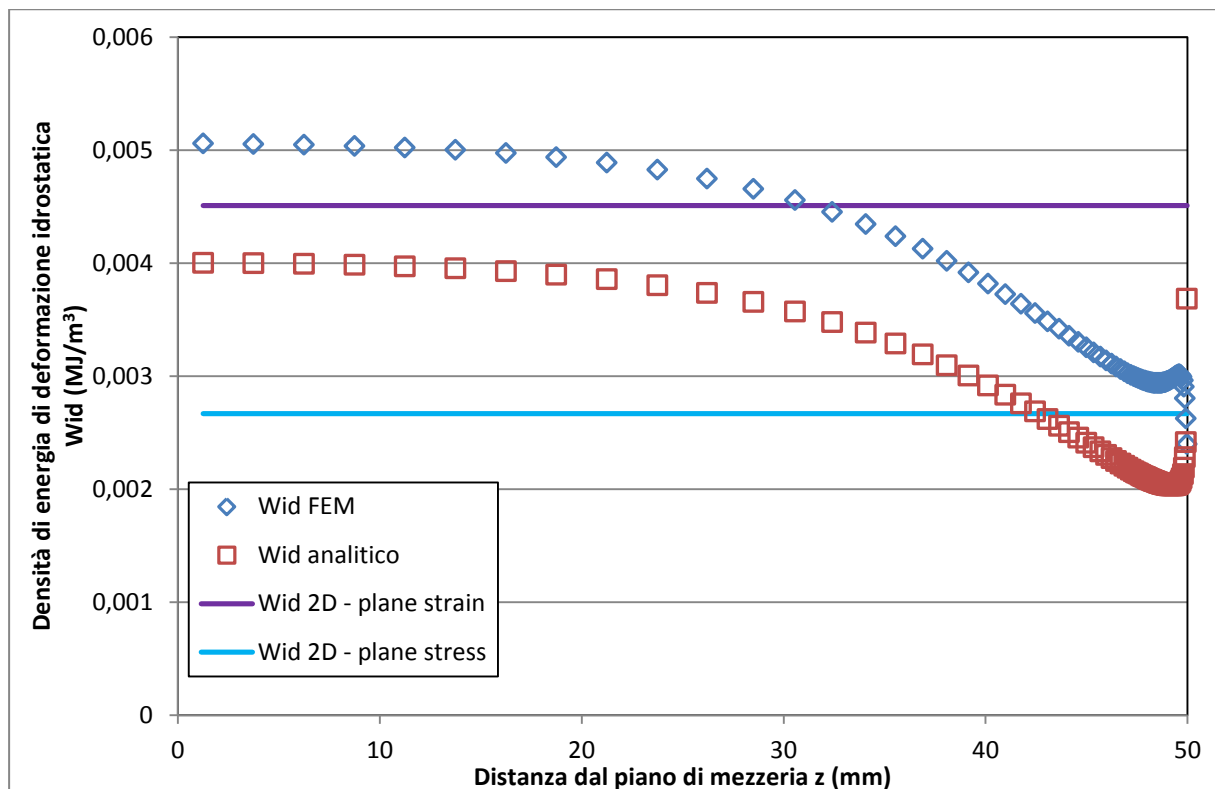


Figura 3.42 SED idrostatico ricavato dal FEM ed analiticamente (tenendo conto o meno della presenza del modo O) all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.28$ mm lungo la coordinata z . Confronto con i casi bidimensionali di deformazione piana e tensione piana

Come si può notare dai grafici riportati, nel caso della densità di energia di deformazione deviatorica (Fig. 3.38 e 3.41) la soluzione analitica che tiene conto della presenza del modo O segue molto fedelmente la soluzione ottenuta dal codice di calcolo, esclusa la regione immediatamente adiacente alla superficie libera dove la soluzione analitica supera la soluzione numerica. Si ricorda comunque come la soluzione analitica proposta non sia valida nell'immediata vicinanza della superficie libera, dato che qui le ipotesi di Kane e Mindlin (linearità degli spostamenti u_z e delle componenti di tensione τ_{yz} e τ_{xz} rispetto alla coordinata z) non sono verificate [30] (si veda ad esempio la distribuzione delle τ_{yz} lungo z di Fig. 3.14: appare evidente come tale componente di tensione abbia un andamento approssimativamente lineare per la parte centrale del provino, ma si allontani dalla linearità avvicinandosi alla superficie libera). Poiché il calcolo del SED analitico è basato sulla soluzione proposta ritenendo valide le ipotesi di Kane e Mindlin, si ritiene possibile che nella zona adiacente alla superficie libera l'espressione analitica del SED proposta non sia valida. Se non si considera il modo O, la soluzione analitica si discosta sensibilmente dalla soluzione numerica, decrescendo all'avvicinamento della superficie libera per poi crescere rapidamente nelle immediate vicinanze di questa. Nel caso della densità di energia di deformazione idrostatica (Fig. 3.39 e 3.42), si nota come l'andamento della soluzione analitica sia simile a quello della soluzione numerica, ma traslato verso il basso di un errore pari a circa il 20%. Anche in questo caso, nelle immediate vicinanze della superficie libera, la soluzione analitica cresce velocemente, superando quella numerica. Essendo infine il SED totale somma delle due componenti precedenti, si osserva facilmente come l'andamento della grandezza ottenuta analiticamente sia simile all'andamento della grandezza numerica (Fig. 3.37 e 3.40), sfalsato rispetto a questa (contributo idrostatico) e superiore alla soluzione numerica in prossimità della superficie libera (contributi idrostatico e deviatorico).

Confrontando i valori del SED per il modello tridimensionale con i valori del SED ottenuto per il modello bidimensionale, nelle ipotesi di deformazione piana e tensione piana, risulta evidente come la soluzione 3D non sia approssimabile con nessuna delle soluzioni bidimensionali trovate. Considerando l'andamento del *constraint factor* lungo la bisettrice, si sarebbe potuto invece supporre che nel piano di mezzeria e nelle sue immediate vicinanze il valore del SED per il modello 3D fosse molto vicino al valore del SED calcolato per il modello 2D con le ipotesi di deformazione piana. Tale ipotesi non è quindi verificata.

Per meglio apprezzare l'entità dell'errore tra le grandezze analitiche e numeriche in ognuna delle sezioni considerate, si ricorre ai grafici delle Fig. 3.43 e 3.44, riportanti l'errore relativo percentuale così calcolato:

$$E_{\%} = \frac{\bar{W}_{analitico} - \bar{W}_{FEM}}{\bar{W}_{FEM}} * 100 \quad (3.11)$$

per le grandezze totale, deviatorica e idrostatica (tenendo conto ovviamente del contributo del modo O).

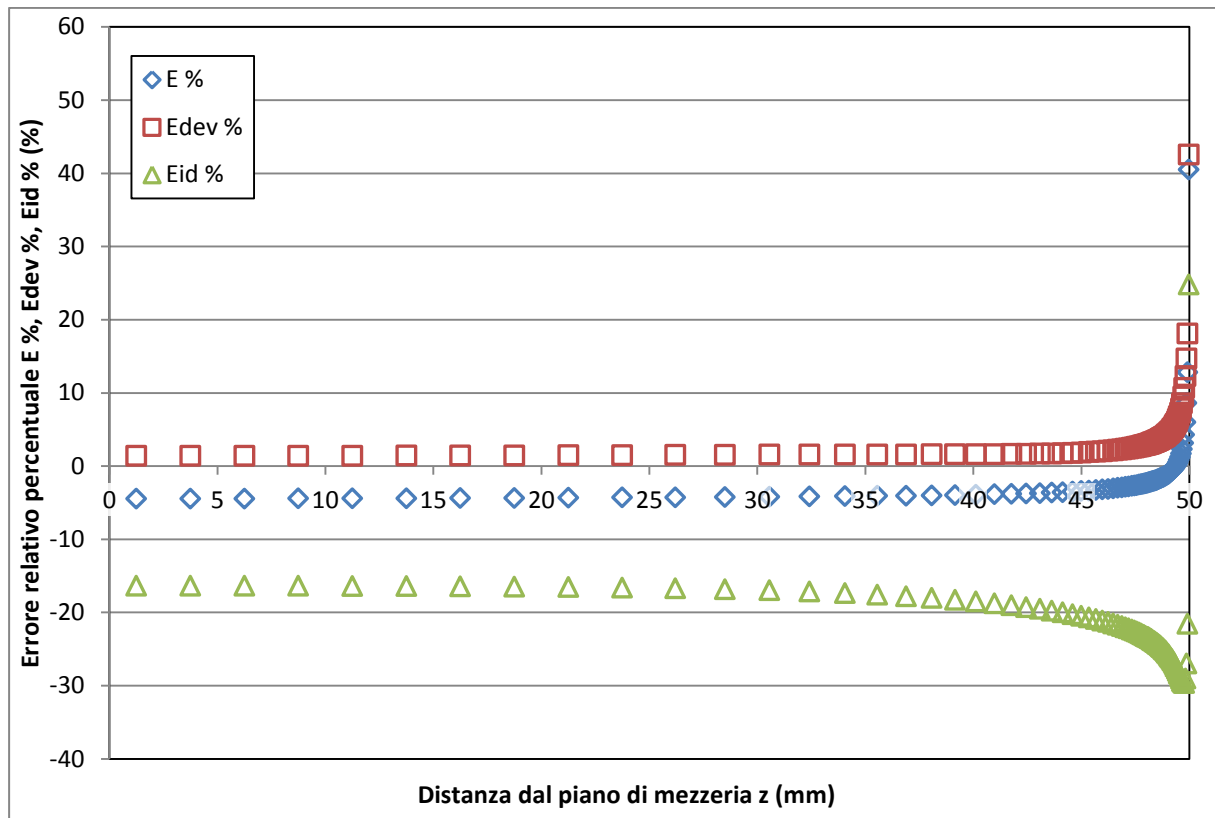


Figura 3.43 Errore relativo percentuale del SED totale, deviatorico ed idrostatico all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z

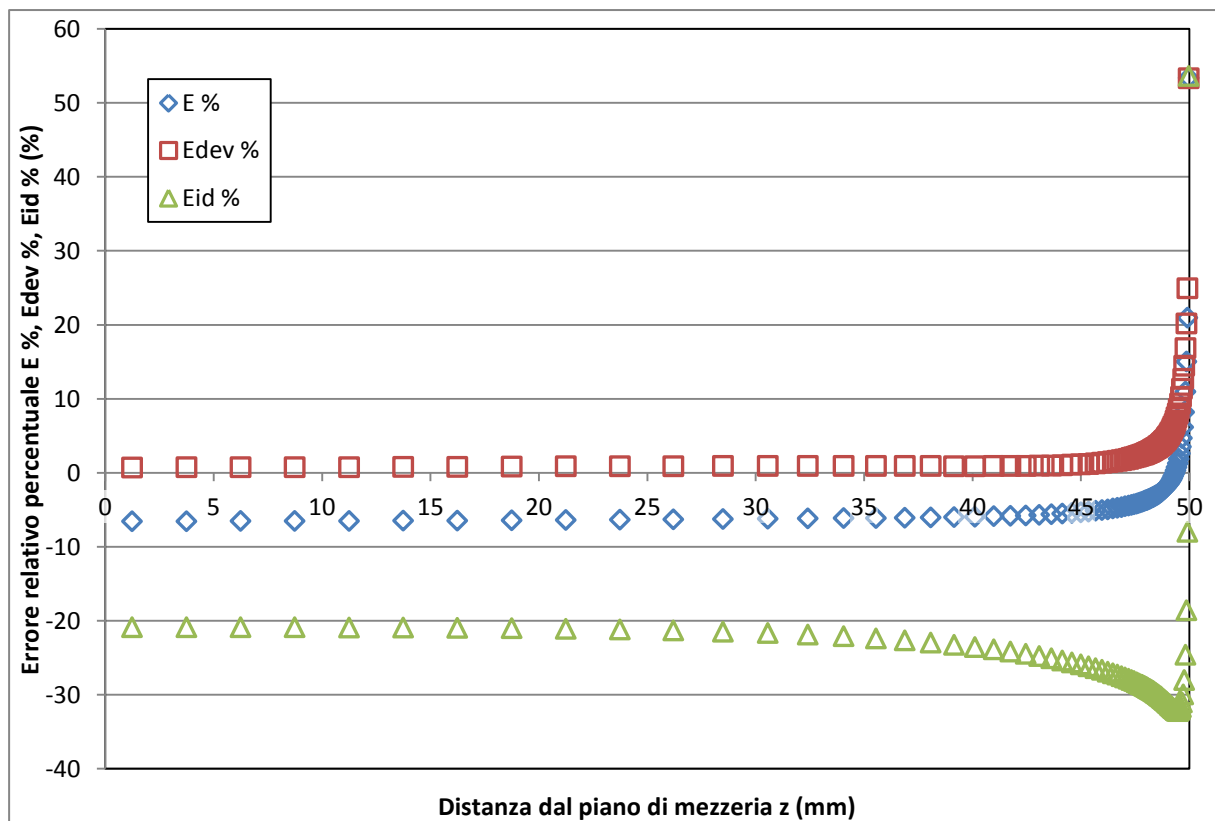


Figura 3.44 Errore relativo percentuale del SED totale, deviatorico ed idrostatico all'interno del volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z

Come già enunciato nel commento delle Fig. 3.35 - 3.40, sono evidenti due tipologie di errore: il primo è il forte incremento dell'errore nell'immediata vicinanza della superficie libera, il secondo è l'errore rilevante relativo al SED idrostatico, che è sensibilmente elevato in ognuna delle sezioni considerate e che porta a sottostimare la densità di energia di deformazione idrostatica per quasi tutta la totalità della profondità del giunto, fatta eccezione per la parte terminale in cui si verifica, come già osservato, un rapido aumento della grandezza.

Si può ipotizzare che le cause di tali errori siano essenzialmente due, a meno di altre discrepanze incognite non rilevate:

- l'aver considerato il *constraint factor* C_z costante all'interno del volume di controllo, e aver preso come valore di riferimento per l'intero volume di controllo il valore di tale parametro calcolato lungo la bisettrice della cricca ad una distanza pari al raggio del volume di controllo considerato;
- l'aver considerato una distribuzione delle tensioni arrestata al primo ordine come rappresentativa all'interno dell'intero volume di controllo.

Entrambe queste cause troverebbero parziale conferma nell'osservare che l'entità di entrambi gli errori è maggiore per il SED calcolato nel volume più esteso: in questo caso infatti i contributi di ordine superiore nella distribuzione delle tensioni acquistano una maggiore rilevanza, mentre il *constraint factor* viene calcolato ad una distanza maggiore dall'apice della cricca. Inoltre si ribadisce come avvicinandosi alla superficie libera appare meno estesa la regione in cui si può considerare valida una descrizione dei campi di tensione utilizzando la soluzione di Williams del primo ordine (Fig. 3.23 e 3.27): ciò potrebbe contribuire all'aumento dell'errore sul calcolo del SED nelle vicinanze della superficie libera.

3.5.6 Osservazioni sul *constraint factor* C_z

Per osservare qualitativamente quanto possa essere ingiustificata l'ipotesi della costanza del *constraint factor* C_z all'interno del volume di controllo, ipotesi che permette di calcolare gli integrali all'interno delle espressioni del SED senza la necessità di conoscere puntualmente l'entità di tale parametro, è stato calcolato C_z per tutti i nodi all'interno del volume di controllo per la sezione di mezzeria ($z = 0.0 \text{ mm}$). Il risultato è riportato in Fig. 3.45

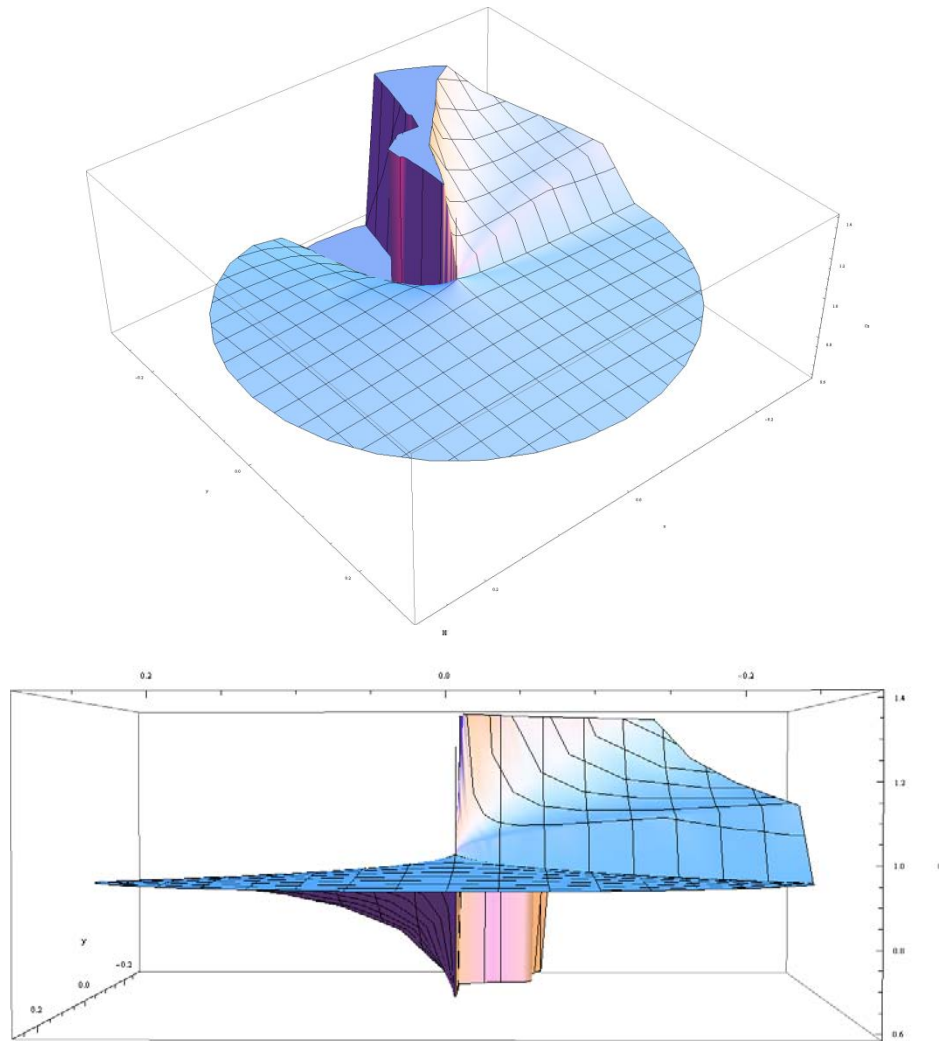


Figura 3.45 Andamento del constraint factor C_z all'interno del volume di controllo

Per provare a ridurre l'errore e a vedere come questo dipenda dal coefficiente C_z utilizzato, si è pensato di utilizzare una definizione differente del *constraint factor*, mantenendo comunque valida l'ipotesi della sua costanza all'interno del volume di controllo. Il *constraint factor* precedentemente utilizzato era infatti calcolato ad una distanza $x = 0.15 \text{ mm}$ o $x = 0.28 \text{ mm}$ dall'apice della cricca, a seconda del volume di controllo considerato, e potrebbe essere poco rappresentativo per la situazione all'interno del volume di controllo stesso, come si può notare dalla Fig. 3.45. La nuova definizione si basa sulla ben nota espressione di σ_z in funzione delle tensioni σ_x e σ_y :

$$\sigma_z = C_z \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.12)$$

Tale uguaglianza è pensata valida in termini medi all'interno dell'elemento i -esimo:

$$\sigma_{z,i} = C_{z,i} \nu (\sigma_{x,i} + \sigma_{y,i}) \quad (3.13)$$

Ora si effettua la sommatoria di ambo i membri, destro e sinistro, dell'uguaglianza:

$$\sum_i \sigma_{z,i} = \nu \sum_i C_{z,i} (\sigma_{x,i} + \sigma_{y,i}) \quad (3.14)$$

Se si assume che C_z sia costante in tutti gli elementi che compongono il volume di controllo ($C_{z,i} = C_z^*$, $\forall i$), si potrà portare tale coefficiente fuori dalla sommatoria, ottenendo:

$$\sum_i \sigma_{z,i} = C_z^* \nu \sum_i (\sigma_{x,i} + \sigma_{y,i}) \quad (3.15)$$

Da cui segue che:

$$C_z^* = \frac{\sum_i \sigma_{z,i}}{\nu \sum_i (\sigma_{x,i} + \sigma_{y,i})} \quad (3.16)$$

Le tensioni medie all'interno dell'elemento ($\sigma_{z,i}$, $\sigma_{x,i}$ e $\sigma_{y,i}$) sono facilmente ottenibili direttamente dal codice numerico: ecco perciò che il nuovo *constraint factor* C_z^* è facilmente ottenibile per ogni fila di elementi, e verrà considerato, come il precedente parametro, rappresentativo della sezione di mezzzeria rispetto alle estremità degli elementi considerati.

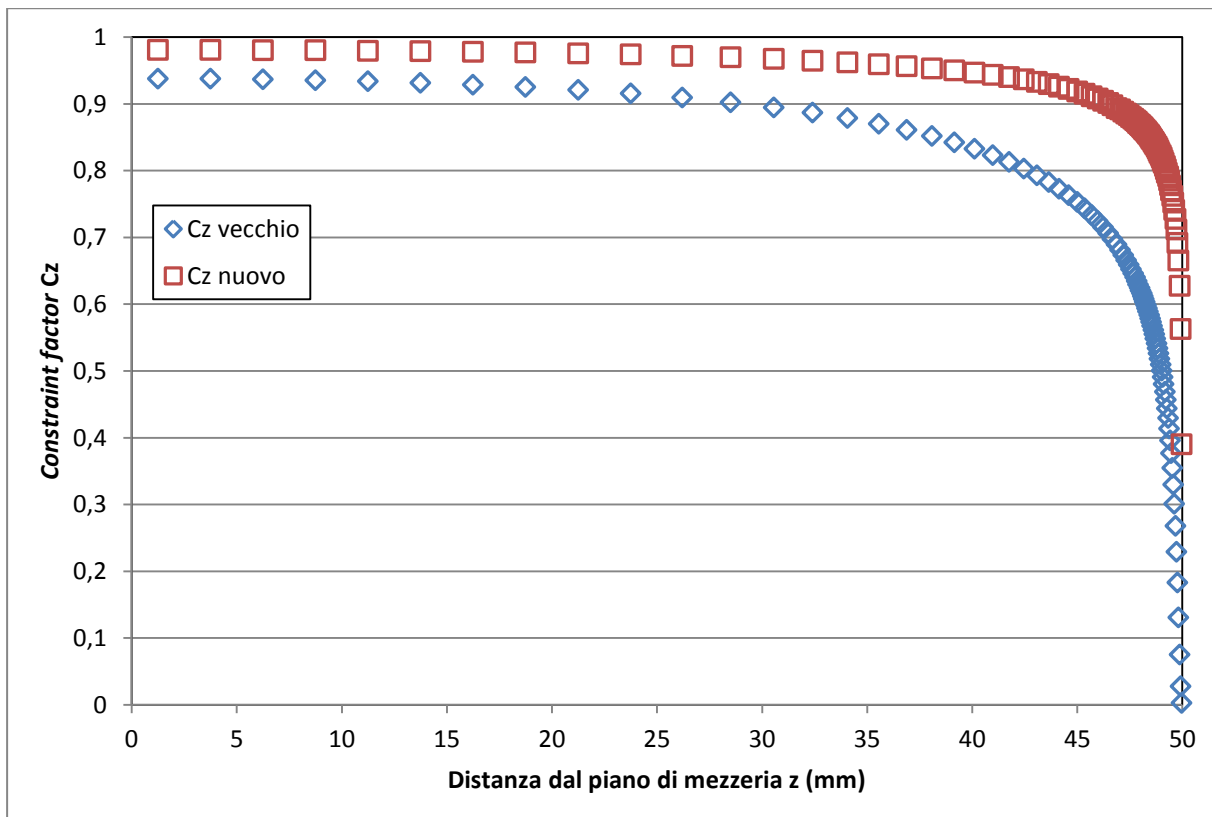


Figura 3.46 Andamento del constraint factor ricavato all'estremità del volume di controllo (*Cz vecchio*) e calcolato con la nuova definizione (*Cz nuovo*) per il volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z

La Fig. 3.46 riporta i valori del *constraint factor* precedentemente utilizzato e i valori del *constraint factor* calcolati con la nuova definizione per il volume di controllo di raggio $R = 0.15 \text{ mm}$. Si può notare una differenza importante tra il coefficiente precedentemente utilizzato e il nuovo *constraint factor* C_z^* appena definito: ora tale parametro decresce in misura minore, e resta comunque maggiore di zero anche nell'ultima sezione considerata.

La variazione del *constraint factor* utilizzato nel calcolo analitico del SED porta ad una sensibile diminuzione dell'errore tra la grandezza calcolata analiticamente e quella calcolata numericamente, come si può apprezzare nelle Fig. 3.47, 3.48 e 3.49, che riportano appunto l'errore relativo percentuale tra il valore del SED ottenuto con il codice di calcolo e quello ottenuto con l'espressione analitica utilizzando le due diverse definizioni del *constraint factor*, per il volume di controllo di raggio $R = 0.15 \text{ mm}$.

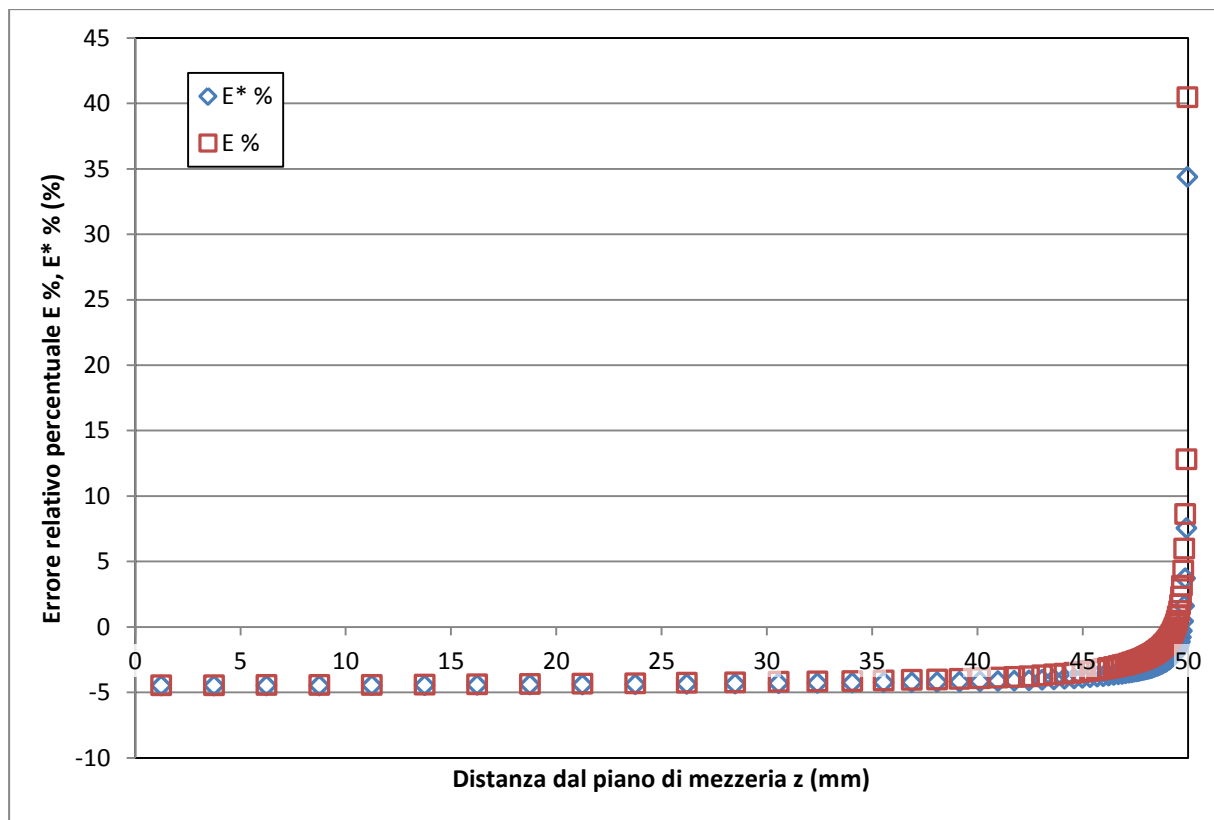


Figura 3.47 Andamento dell'errore relativo percentuale tra il valore del SED totale ricavato dal codice di calcolo e il valore del SED totale calcolato con l'espressione analitica utilizzando il *constraint factor* ricavato all'estremità del volume di controllo (E) e il *constraint factor* calcolato con la nuova definizione (E^*) per il volume di controllo di raggio $R = 0.15 \text{ mm}$ lungo la coordinata z

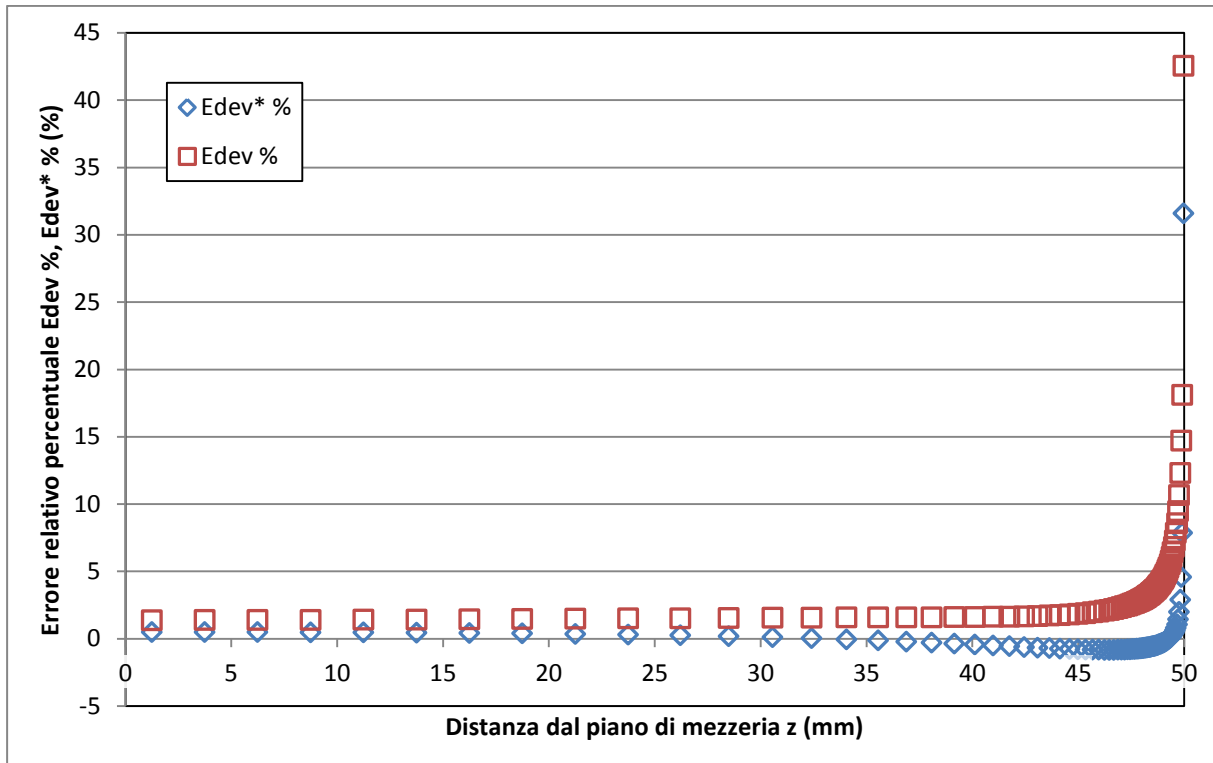


Figura 3.48 Andamento dell'errore relativo percentuale tra il valore del SED deviatorico ricavato dal codice di calcolo e il valore del SED deviatorico calcolato con l'espressione analitica utilizzando il constraint factor ricavato all'estremità del volume di controllo (E) e il constraint factor calcolato con la nuova definizione (E^*) per il volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z

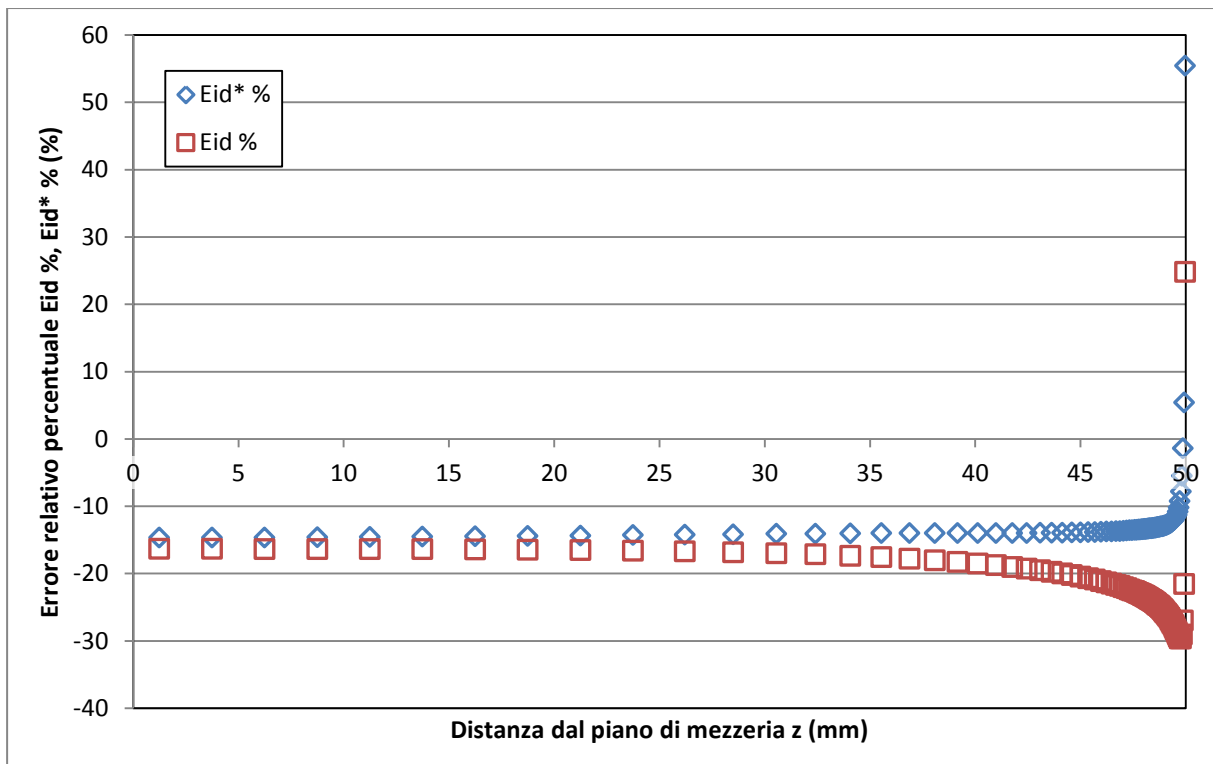


Figura 3.49 Andamento dell'errore relativo percentuale tra il valore del SED idrostatico ricavato dal codice di calcolo e il valore del SED idrostatico calcolato con l'espressione analitica utilizzando il constraint factor ricavato all'estremità del volume di controllo (E) e il constraint factor calcolato con la nuova definizione (E^*) per il volume di controllo di raggio $R = 0.15$ mm lungo la coordinata z

L'errore resta comunque elevato nell'ultima sezione considerata, ma si può apprezzare come sia ridotto notevolmente con l'avvicinamento alla superficie libera nei casi idrostatico e deviatorico, mentre si nota un leggero peggioramento per il SED totale.

Si può quindi osservare come la scelta della definizione del *constraint factor* da utilizzare nei calcoli analitici influenzi pesantemente la bontà della soluzione analitica. Per una analisi approfondita di come tale fattore possa influenzare il calcolo del SED, si rimanda al capitolo riguardante l'analisi di una piastra con intaglio quadro tridimensionale (Cap. §6).

3.5.7 Considerazioni sul calcolo del SED

Si ritiene opportuna un'osservazione sul valore del SED ricavato dal codice di calcolo: nei casi bidimensionali, è stato dimostrato come il valore della densità di energia di deformazione totale o deviatorica all'interno di un volume di controllo dal raggio opportuno possa essere confrontato con un valore critico della densità di energia di deformazione (totale o deviatorica), fornendo un valido criterio di cedimento. [43] Estendendo tale concetto al caso tridimensionale, risulterebbe immediato pensare alla densità di energia di deformazione all'interno di un volume di controllo sferico centrato all'apice della cricca o dell'intaglio considerato, con un opportuno raggio. Data l'odierna impossibilità di effettuare il calcolo su un volume di controllo sferico in un'analisi FEM, per come viene strutturata la mesh in più strati di elementi a partire da una mesh bidimensionale, si può pensare di ricavare il SED in un volume di controllo costituito da un cilindro con raggio pari a quello del volume di controllo bidimensionale, e altezza opportuna. A titolo di esempio, Berto *et al.* hanno ricavato il SED utilizzando un volume di controllo cilindrico con altezza approssimativamente uguale al raggio del cilindro stesso, [44] dimostrando come la presenza del modo fuori piano (modo O) causato dall'estensione tridimensionale del pezzo porti ad avere una densità di energia di deformazione massima in prossimità della superficie libera. Da ciò si può trarre la conclusione che il parametro del SED sia uno strumento che riesce a rilevare la presenza di effetti tridimensionali sul pezzo (in particolare il SED totale e deviatorico per il caso in esame, come si nota nelle Fig. 3.37-3.38 e 3.40-3.41).

Si sottolinea tuttavia come i valori del SED ricavati nel precedente paragrafo non possano essere in alcun modo confrontati con valori critici della densità di energia di deformazione, come criterio di resistenza: il volume di controllo nei pressi della superficie libera presenta un'altezza ridotta ($h = 0.05 \text{ mm}$) rispetto al raggio ($R = 0.15 \text{ mm}$ o $R = 0.28 \text{ mm}$), scelta effettuata per cogliere al meglio gli effetti causati dall'avvicinamento alla superficie libera. Inoltre non è documentata in letteratura l'altezza opportuna del volume di controllo cilindrico per utilizzare il SED come criterio di cedimento.

Il valore della densità di energia di deformazione è stato ricavata numericamente in tale paragrafo quindi con lo scopo di poter essere confrontato con il valore ottenuto dall'espressione analitica del SED, nelle modalità descritte all'inizio del paragrafo §3.5.5, utilizzando per ciascun *layer* di elementi il valore medio dei SIFs calcolati alle sezioni di estremità degli elementi stessi, e pensandoli costanti all'interno dell'intero strato. In tal senso, una altezza ridotta del volume di controllo dovrebbe permettere un calcolo del SED attraverso l'espressione analitica che meglio approssima la soluzione ricavata con il metodo degli elementi finiti.

3.6 Osservazioni conclusive

I risultati ottenuti con il modello di giunto saldato a sovrapposizione analizzato concordano con i risultati presenti in letteratura. Si osserva la comparsa di un modo III indotto dalla presenza di carichi esterni di modo II. Tale modo III indotto viene chiamato modo O (*out-of-plane mode*). Il fattore di intensificazione delle tensioni del modo O cresce avvicinandosi alla superficie libera, e raggiunge un valore massimo prima di decrescere rapidamente.

Il SIF di modo I presenta una decrescita sempre più rapida con l'avvicinamento alla superficie libera, mentre il SIF di modo II si mantiene circa costante per poi crescere in maniera molto veloce nella vicinanza di tale superficie.

I parametri del SED e della tensione ideale di Guest (coincidente con la tensione di taglio massima) evidenziano come la zona più critica del giunto analizzato sia quella adiacente alla superficie libera.

In particolare la densità di energia di deformazione totale, e ancor più quella deviatorica, risultano essere ottimi parametri per cogliere la presenza degli effetti causati dall'estensione tridimensionale del giunto.

I valori del SED calcolati con le espressioni analitiche non coincidono però con i valori ottenuti con il metodo degli elementi finiti. Principale motivo di tale discrepanza appare essere la variabilità del *constraint factor* all'interno dei volumi di controllo considerati. Si è infatti dimostrato come, variando il valore del *constraint factor* inserito nelle espressioni analitiche, l'errore relativo percentuale tra il valore del SED calcolato analiticamente e quello ottenuto con il codice di calcolo cambi in maniera sensibile. Non è stato tuttavia ricavato un valore di C_z che permetta di avere accordo tra i due parametri.

Allegato

Codice APDL per generare il modello bidimensionale

Si riporta ora il codice APDL utilizzato per generare la geometria e la mesh del modello bidimensionale del giunto saldato a sovrapposizione:

```

/PREP7
!*****
!Tipo di elemento
ET,1,PLANE183
!*****
!Proprietà del materiale elemento 1
MP,EX,1,206000      !Modulo di elasticità
MP,PRXY,1,0.3      !Modulo di Poisson
! Parametri geometrici
t=20
d=2*t
L=20*t
R0=0.001
R1=0.15
R2=0.28
!*****
! Costruzione geometria
! Keypoints
K,1,-L/2,t
K,2,-2*t,t
K,3,-t,t
K,4,0,t
K,5,t,t
K,6,2*t,t
K,7,-L/2,0
K,8,-2*t,0
K,9,-t,0
K,10,0,0
K,11,t,0
K,12,2*t,0
K,13,L/2,0
K,14,-2*t,-t
K,15,-t,-t
K,16,0,-t
K,17,t,-t
K,18,2*t,-t
K,19,L/2,-t
K,20,-R0-t,0
K,21,-t,R0

```

```
K,22,R0-t,0
K,23,-t,-R0
K,24,-R1-t,0
K,25,-t,R1
K,26,R1-t,0
K,27,-t,-R1
K,28,-R2-t,0
K,29,-t,R2
K,30,R2-t,0
K,31,-t,-R2
K,32,-R0-t,0
K,33,-R1-t,0
K,34,-R2-t,0
K,35,-2*t,0
K,36,2*t,0
! Linee
LARC,20,21,9,R0
LARC,21,22,9,R0
LARC,22,23,9,R0
LARC,23,32,9,R0
LARC,24,25,9,R1
LARC,25,26,9,R1
LARC,26,27,9,R1
LARC,27,33,9,R1
LARC,28,29,9,R2
LARC,29,30,9,R2
LARC,30,31,9,R2
LARC,31,34,9,R2
L,9,20
L,9,21
L,9,22
L,9,23
L,20,24
L,21,25
L,22,26
L,23,27
L,24,28
L,25,29
L,26,30
L,27,31
L,28,8
L,29,3
L,30,10
L,31,15
L,7,1
L,8,2
L,10,4
L,11,5
L,12,6
L,35,14
L,10,16
L,11,17
L,36,18
L,13,19
L,3,2
L,3,4
L,5,4
L,5,6
L,11,10
L,11,12
```

```

L,15,14
L,15,16
L,17,16
L,17,18
L,8,7
L,2,1
L,36,13
L,18,19
L,9,32
L,32,33
L,33,34
L,34,35
L,11,36
! Aree
AL,1,14,13
AL,2,15,14
AL,3,16,15
AL,4,53,16
AL,5,18,1,17
AL,6,19,2,18
AL,7,20,3,19
AL,8,54,4,20
AL,9,22,5,21
AL,10,23,6,22
AL,11,24,7,23
AL,12,55,8,24
AL,9,25,30,39,26
AL,10,26,40,31,27
AL,11,27,35,46,28
AL,12,28,45,34,56
AL,29,50,30,49
AL,31,41,32,43
AL,35,43,36,47
AL,32,42,33,44
AL,36,57,37,48
AL,37,51,38,52
APLOT
!*****
! Suddivisione delle linee per la mesh
LESIZE,1,,,8
LESIZE,2,,,8
LESIZE,3,,,8
LESIZE,4,,,8
LESIZE,5,,,8
LESIZE,6,,,8
LESIZE,7,,,8
LESIZE,8,,,8
LESIZE,9,,,8
LESIZE,10,,,8
LESIZE,11,,,8
LESIZE,12,,,8
LESIZE,13,,,5
LESIZE,14,,,5
LESIZE,15,,,5
LESIZE,16,,,5
LESIZE,53,,,5
LESIZE,17,,,25,100
LESIZE,18,,,25,100
LESIZE,19,,,25,100
LESIZE,20,,,25,100

```

```
LESIZE,54,,25,100
LESIZE,21,,4,1.5
LESIZE,22,,4,1.5
LESIZE,23,,4,1.5
LESIZE,24,,4,1.5
LESIZE,55,,4,1.5
LESIZE,25,,24,60
LESIZE,26,,24,60
LESIZE,27,,24,60
LESIZE,28,,24,60
LESIZE,56,,24,60
LESIZE,29,,4
LESIZE,30,,4
LESIZE,31,,4
LESIZE,32,,4
LESIZE,33,,4
LESIZE,34,,4
LESIZE,35,,4
LESIZE,36,,4
LESIZE,37,,4
LESIZE,38,,4
LESIZE,39,,4
LESIZE,40,,4
LESIZE,41,,4
LESIZE,42,,4
LESIZE,43,,4
LESIZE,44,,4
LESIZE,57,,4
LESIZE,45,,4
LESIZE,46,,4
LESIZE,47,,4
LESIZE,48,,4
LESIZE,49,,25,2
LESIZE,50,,25,2
LESIZE,51,,25,2
LESIZE,52,,25,2
! Meshatura
LCCAT,30,39
LCCAT,40,31
LCCAT,35,46
LCCAT,45,34
AMESH,ALL
LDELE,58,61,1
EPLOT
!*****
```


Capitolo 4

Influenza della fittezza della mesh sul calcolo del SED totale e deviatorico

Come è noto, nelle analisi numeriche, per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni per cricche (SIFs) e intagli vivi (N-SIFs), è necessario utilizzare mesh molto fitte in aree e volumi adiacenti all'apice. I fattori di intensificazione delle tensioni, che rappresentano l'intensità del campo tensionale all'interno di una zona limitata adiacente all'apice della cricca e dell'intaglio, entro la quale la distribuzione delle tensioni può essere considerata in sostanza coincidente ai termini del primo ordine della soluzione di Williams, vengono infatti calcolati a partire dalle entità delle tensioni ricavate con analisi agli elementi finiti; il grado di approssimazione con cui viene colto l'incremento delle tensioni dipende dalla fittezza della mesh, ovvero dalla dimensione degli elementi che discretizzano tale volume. E' già stato dimostrato come la dipendenza dalla fittezza della mesh sia invece estremamente ridotta per densità di energia di deformazione (SED): [45] ciò permette di ottenere con ottima approssimazione la densità di energia di deformazione pur utilizzando mesh molto più grossolane. Questo si traduce in risparmi di tempo e di risorse computazionali rilevanti per la soluzione di problemi complessi.

Non è tuttavia chiaro se tale sostanziale indipendenza dal grado di fittezza della mesh sia presente anche per la densità di energia di deformazione deviatorica.

Nei paragrafi che seguono, dopo un breve cenno teorico sulla quasi indipendenza del valore del SED dal grado di fittezza della mesh, verranno messi a confronto i valori del SED, totale e deviatorico, ricavati da analisi agli EF con mesh con un diverso grado di infittimento per cricche trasversali e inclinate su piastra finita.

4.1 Calcolo del SED nel metodo degli elementi finiti

Verranno ora riportati alcuni cenni teorici sul calcolo del SED con il metodo degli elementi finiti. [40, 45]

In ambito strutturale, con il metodo degli elementi finiti viene risolto il problema dell'equilibrio elastico in un dominio discretizzato in nodi ed elementi. La soluzione nodale ottenuta con metodi approssimati viene poi interpolata localmente all'interno di ogni elemento, fornendo così la soluzione approssimata del problema nel continuo.

Considerando un generico elemento, si definiscono i seguenti vettori:

- $\{d\}$: vettore degli spostamenti nodali
- $\{f\}$: vettore delle forze nodali

Per esprimere lo spostamento $\{u\}$ e la deformazione $\{\varepsilon\}$ di un generico punto all'interno dell'elemento considerato, si ricorre alla matrice di interpolazione $[N]$, che dipende dal tipo di elemento scelto. Si potrà scrivere così, considerato un generico punto dell'elemento:

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (4.1)$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial\{u\}}{\partial x_i} = [B]\{d\} \quad (4.2)$$

In cui $[B]$ è la matrice che lega deformazioni e spostamenti, ottenuta differenziando opportunamente la matrice di interpolazione degli spostamenti $[N]$.

Se si considera valida l'ipotesi di elasticità lineare, si possono legare tensioni e deformazioni attraverso l'espressione:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (4.3)$$

Pertanto la densità di energia di deformazione in un punto P appartenente all'elemento finito potrà essere scritta come:

$$W_p = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^t\{\sigma\} = \frac{1}{2}([B]\{d\})^t[E][B]\{d\} = \frac{1}{2}\{d\}^t[B]^t[E][B]\{d\} \quad (4.4)$$

L'energia di deformazione totale immagazzinata nell'elemento i -esimo sarà perciò:

$$E_{t_i} = \int_V W \, dV = \frac{1}{2}\{d\}^t \left(\int_V [B]^t[E][B] \, dV \right) \{d\} = \frac{1}{2}\{d\}^t[K]\{d\} \quad (4.5)$$

In cui V è il volume dell'elemento e $[K]$ è la matrice di rigidezza dell'elemento stesso:

$$[K] = \int_V [B]^t [E] [B] dV \quad (4.6)$$

Si può notare dalla scrittura dell'energia di deformazione totale immagazzinata nell'elemento come tale grandezza possa essere direttamente determinata dagli spostamenti nodali, senza alcun calcolo riguardo tensioni e deformazioni, una volta nota la matrice di rigidezza dell'elemento. Pertanto anche la densità di energia di deformazione all'interno dell'elemento sarà funzione degli soli spostamenti nodali:

$$\bar{W} = \frac{\sum_i E_{t_i}}{\sum_i V_i} \quad (4.7)$$

Il grado di accuratezza con cui verrà valutata la densità di energia di deformazione all'interno dell'elemento dipenderà quindi fortemente dall'ordine del polinomio utilizzato localmente per ricavare le funzioni di forma presenti nella matrice di interpolazione degli spostamenti, ovvero dal tipo di elemento finito utilizzato nella discretizzazione. Nelle analisi FEM, le grandezze E_{t_i} e V_i possono essere ricavate direttamente dal codice di calcolo.

Tuttavia per il calcolo della densità di energia di deformazione deviatorica all'interno dell'elemento è necessario il seguente procedimento.

Partiamo dalla definizione di densità di energia deviatorica in un generico punto P all'interno dell'elemento:

$$W_P = \frac{(1 + \nu)}{3E} [\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_\theta \sigma_r + \sigma_\theta \sigma_z + \sigma_r \sigma_z) + 3(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{rz}^2)] \quad (4.8)$$

Si può notare come la scrittura tra parentesi quadre sia la tensione equivalente di von Mises elevata al quadrato (infatti si ricorda come la formulazione di tale criterio di resistenza consisteva nell'eguagliare la densità di energia di deformazione deviatorica di uno stato tensionale triassiale a quella di uno stato tensionale monoassiale):

$$\begin{aligned} W_P &= \frac{(1 + \nu)}{3E} [\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_\theta \sigma_r + \sigma_\theta \sigma_z + \sigma_r \sigma_z) + 3(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{rz}^2)] \\ &= \frac{(1 + \nu)}{3E} [\sigma_{vM}^2] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dal codice di calcolo è quindi possibile ricavare per l'elemento i -esimo la tensione equivalente di von Mises media all'interno di tale elemento, $\overline{\sigma_{vM,i}}$. A partire da questo valore, è quindi possibile ricavare per ogni elemento l'energia di deformazione deviatorica e, da questa, la densità di energia di deformazione deviatorica per gli elementi considerati:

$$E_{d_i} = \frac{(1 + \nu)}{3E} [\overline{\sigma_{vM,i}}]^2 * V_i \quad (4.10)$$

$$\overline{W_{dev}} = \frac{\sum_i E_{d_i}}{\sum_i V_i} \quad (4.11)$$

Si può vedere come per ottenere la densità di energia di deformazione deviatorica sia quindi necessario il calcolo della tensione equivalente di von Mises: poiché entrano qui in gioco calcoli di tensioni e deformazioni, si può pensare che l'approssimazione con cui viene calcolata tale grandezza sia fortemente legata alla fittezza della mesh, come i fattori di intensificazione delle tensioni. Tuttavia, considerando che viene utilizzato il valore medio della tensione di von Mises all'interno di ciascun elemento, la fittezza della mesh utilizzata per la discretizzazione potrebbe pesare meno di quanto si può pensare in un primo momento.

Per ulteriori dettagli sul metodo degli elementi finiti e sulla sua applicazione nel problema dell'equilibrio elastico si rimanda ai riferimenti. [39, 46]

4.2 Geometrie e modelli utilizzati per le analisi numeriche

In questo paragrafo verranno descritte le geometrie oggetto delle analisi numeriche, riportando alcuni dettagli delle mesh utilizzate nei modelli numerici e l'immagine della mesh più grossolana a scopo di esempio. I valori del modulo di Young e del modulo di Poisson utilizzati nelle simulazioni sono $E = 206000$ e $\nu = 0.3$, valori tipici dell'acciaio.

Piastra con cricca centrale trasversale

Le prime analisi sono state effettuate su una piastra criccata con cricca centrale e trasversale rispetto alla direzione del carico.

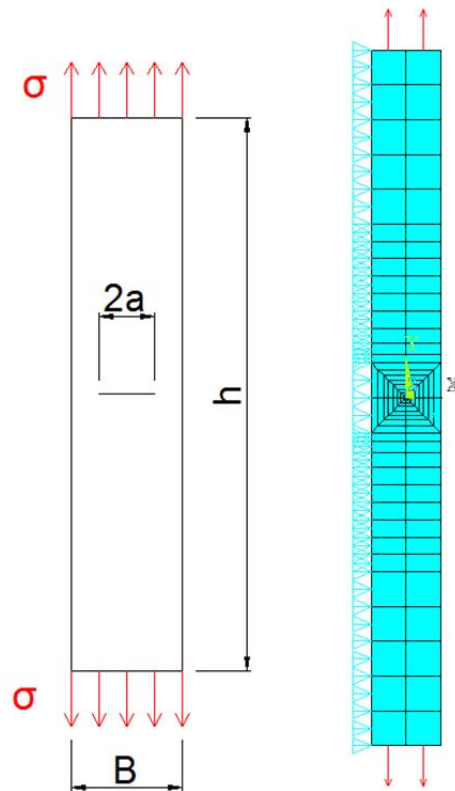


Figura 4.1 Geometria della piastra con cricca centrale e modello numerico della metà destra della piastra (apice della cricca centrato sull'origine del sistema di riferimento)

Sono state effettuate analisi su due diversi rapporti tra l'estensione della cricca e la larghezza della piastra, dalle seguenti dimensioni:

- Caso 1: $a = 10 \text{ mm}$, $B = 40 \text{ mm}$, $h = 200 \text{ mm}$, $a/B = 0.25$
- Caso 2: $a = 10 \text{ mm}$, $B = 80 \text{ mm}$, $h = 400 \text{ mm}$, $a/B = 0.125$

Gli elementi utilizzati per il modello FEM sono elementi quadrangolari a 8 nodi. Per entrambi i casi, si è effettuata una prima analisi con una mesh molto fitta, per determinare il valore della densità di energia di deformazione con un'ottima approssimazione. Si è proceduto poi a ripetere le analisi per altri quattro gradi di fittezza della mesh. Per entrambi i casi, è stato calcolato il SED all'interno di un volume di controllo circolare di raggio $R_C = 0.28 \text{ mm}$, centrato all'apice della cricca. Per ragioni di simmetria, nelle analisi si è considerata solo metà piastra (si noti come si sarebbe potuto considerare anche solo $\frac{1}{4}$ della stessa). La piastra è stata sottoposta ad una tensione di trazione di 100 MPa , applicata alle sue estremità. Si

possono osservare i vincoli e i carichi applicati nella Fig. 4.1, che riporta l'esempio della mesh più grossolana.

Per quantificare il grado di fittezza della mesh, si indicherà il numero di elementi presenti all'interno del volume di controllo utilizzato per il calcolo del SED, all'interno di un quadrato di lato 2.5 mm centrato all'apice della cricca e all'interno dell'intero modello.

Piastra con cricca centrale inclinata

Ulteriori analisi sono state effettuate su una piastra con una cricca centrale inclinata a 45° rispetto alla direzione del carico.

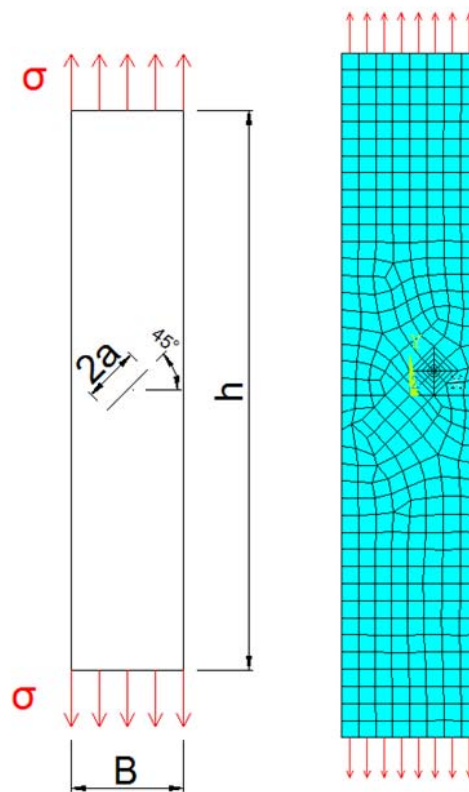


Figura 4.2 Geometria e modello numerico della piastra con cricca centrale inclinata a 45°

Per questa seconda geometria, si è considerato un solo caso, dalle seguenti dimensioni:

- $a = 10 \text{ mm}, B = 40 \text{ mm}, h = 200 \text{ mm}, a/B = 0.25$

Il modo di procedere è analogo al caso precedente: si è effettuata una prima analisi con una mesh molto fitta, per determinare il valore della densità di energia di deformazione con un'ottima approssimazione; si è proceduto poi a ripetere le analisi per altri quattro gradi di fittezza della mesh. In queste analisi è stato calcolato il SED all'interno di un volume di

controllo circolare di raggio $R_c = 0.28 \text{ mm}$, centrato all'apice della cricca, e all'interno di un volume di controllo semicircolare, sopra all'apice della cricca, poiché in questo caso si avrà la presenza di tensioni di modo II, oltre alla presenza di tensioni di modo I, che portano ad un diverso valore del SED nei due semicerchi centrati sull'apice della cricca.

Gli elementi utilizzati per il modello FEM sono elementi quadrangolari a 8 nodi. La piastra è stata sottoposta ad una tensione di trazione di 100 MPa , applicata alle sue estremità. Si possono osservare i vincoli e i carichi applicati nella Fig. 4.2, che riporta l'esempio della mesh più grossolana (si noti come in questo secondo caso la piastra sia stata modellata interamente e si sia utilizzata una mesh di tipo "free" al di fuori della zona adiacente alla cricca, data la complicazione della forma delle aree in cui la piastra può essere suddivisa a causa dell'inclinazione della cricca).

Per quantificare il grado di fittezza della mesh, si indicherà il numero di elementi presenti all'interno del volume di controllo utilizzato per il calcolo del SED, all'interno di un quadrato di lato 2.5 mm centrato all'apice della cricca e all'interno dell'intero modello.

Piastra con cricca laterale inclinata

Ulteriori analisi sono state effettuate su una piastra con una cricca laterale inclinata a 45° rispetto alla direzione del carico.

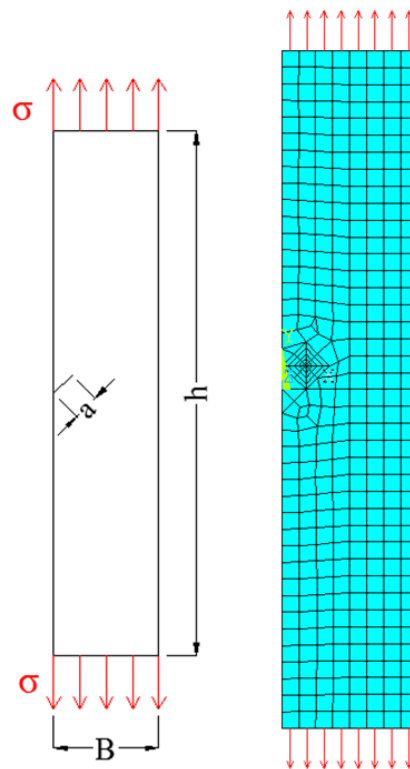


Figura 4.3 Geometria e modello numerico della piastra con cricca laterale inclinata a 45°

Per questa geometria, si è considerato un solo caso, dalle seguenti dimensioni:

$$- a = 10 \text{ mm}, B = 40 \text{ mm}, h = 200 \text{ mm}, a/B = 0.25 \text{ mm}$$

Il modo di procedere è analogo ai casi precedenti: si è effettuata una prima analisi con una mesh molto fitta, per determinare il valore della densità di energia di deformazione con un'ottima approssimazione; si è proceduto poi a ripetere le analisi per altri quattro gradi di fittezza della mesh. In queste analisi è stato calcolato il SED all'interno di un volume di controllo circolare di raggio $R_c = 0.28 \text{ mm}$, centrato all'apice della cricca, e all'interno di un volume di controllo semicircolare, posizionato sopra all'apice della cricca, poiché anche in questo caso si avrà la presenza di tensioni di modo II, oltre alla presenza di tensioni di modo I. Gli elementi utilizzati per il modello FEM sono elementi quadrangolari a 8 nodi. La piastra è stata sottoposta ad una tensione di trazione di 100 MPa , applicata alle sue estremità. Si possono osservare i vincoli e i carichi applicati nella Fig. 4.3, che riporta l'esempio della mesh più grossolana (si noti come anche in questo caso la piastra sia stata modellata interamente e si sia utilizzata una mesh di tipo "free" al di fuori della zona adiacente alla cricca).

Per quantificare il grado di fittezza della mesh, si indicherà come nei casi precedenti il numero di elementi presenti all'interno del volume di controllo utilizzato per il calcolo del SED, all'interno di un quadrato di lato 2.5 mm centrato all'apice della cricca e all'interno dell'intero modello.

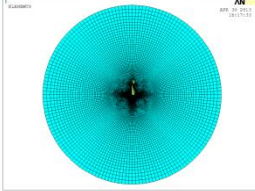
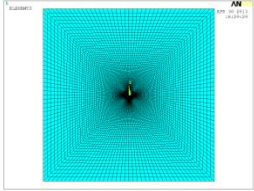
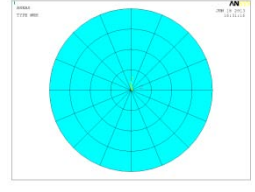
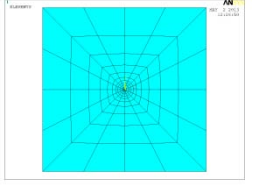
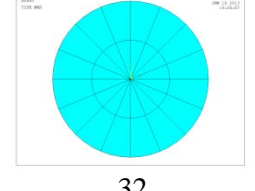
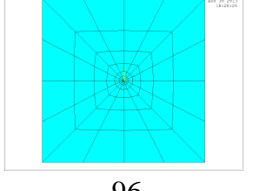
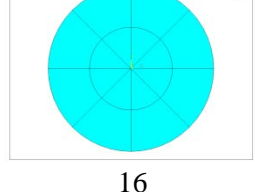
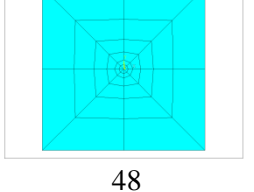
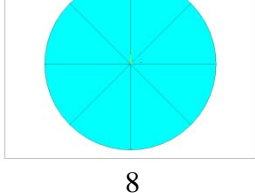
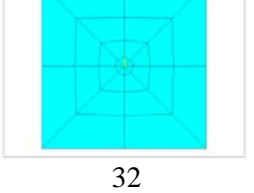
4.3 Risultati delle analisi numeriche

Si riportano in questo paragrafo i risultati delle analisi numeriche eseguite sui modelli precedentemente riportati, organizzati in tabelle con la seguente struttura: le prime colonne contengono il numero degli elementi all'interno del volume di controllo considerato, all'interno del quadrato utilizzato per il controllo della fittezza della mesh e nell'intero modello; seguono, per ciascuna tipologia di mesh, i valori del SED totale \overline{W}_t e deviatorico \overline{W}_d e gli errori relativi di queste due grandezze rispetto al SED totale ($\Delta_t\%$) e deviatorico ($\Delta_d\%$) calcolati con la mesh fitta, considerati come valori di riferimento.

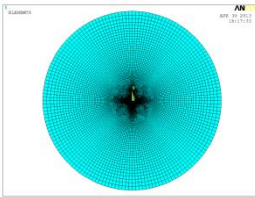
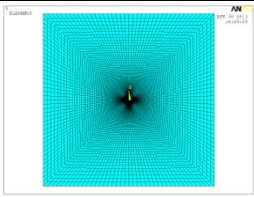
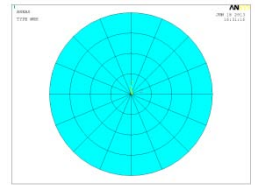
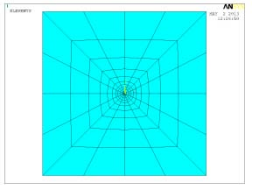
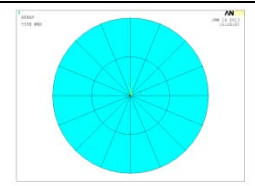
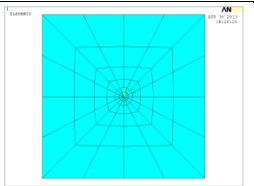
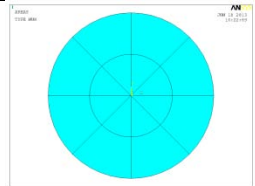
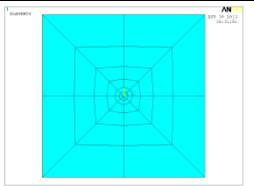
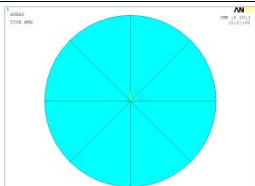
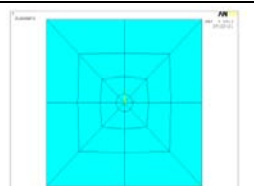
4.3.1 Piastra con cricca centrale trasversale

- Caso 1:

Tabella 4.1 Risultati relativi alla piastra con cricca centrale trasversale, $a/b = 0.25$

Numero EF (cerchio)	Numero EF (quadrato)	Numero EF (modello)	\overline{W}_t (MJ/m ³)	\overline{W}_d (MJ/m ³)	$\Delta_t\%$	$\Delta_d\%$
 21,176	 29,176	48,376	1.00920	0.55690	-	-
 64	 160	408	1.01325	0.53958	+0.40	-3.11
 32	 96	344	1.01724	0.53394	+0.80	-4.12
 16	 48	144	1.02173	0.49980	+1.24	-10.25
 8	 32	128	1.02928	0.48921	+1.99	-12.15

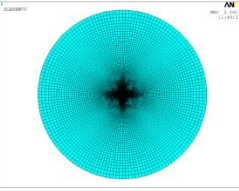
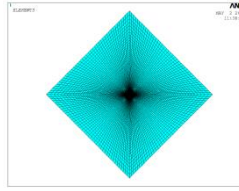
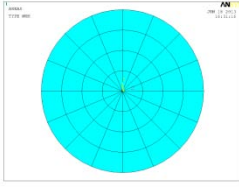
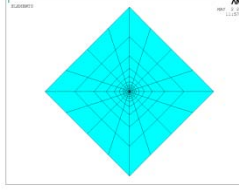
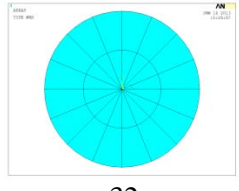
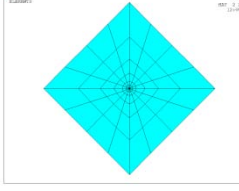
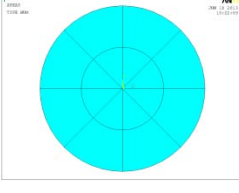
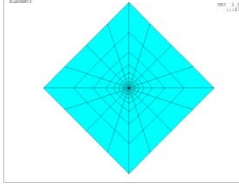
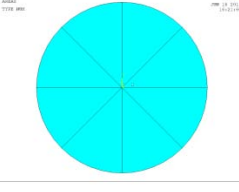
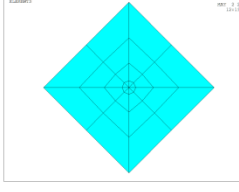
- **Caso 2:****Tabella 4.2** Risultati relativi alla piastra con cricca centrale trasversale, $a/b = 0.125$

Numero EF (cerchio)	Numero EF (quadrato)	Numero EF (modello)	\bar{W}_t (MJ/m ³)	\bar{W}_d (MJ/m ³)	$\Delta_t\%$	$\Delta_d\%$
 21,176	 29,176	344,000	0.77396	0.42362	-	-
 64	 160	896	0.77740	0.41036	+0.44	-3.13
 32	 96	832	0.78066	0.40610	+0.87	-4.14
 16	 48	324	0.78533	0.38066	+1.47	-10.14
 8	 32	308	0.79161	0.37270	+2.28	-12.02

4.3.2 Piastra con cricca centrale inclinata

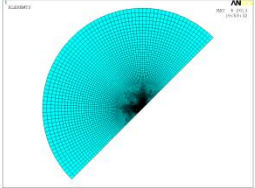
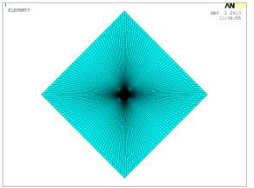
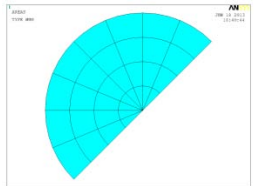
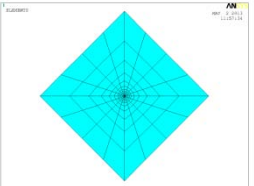
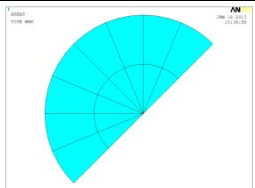
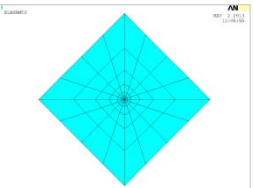
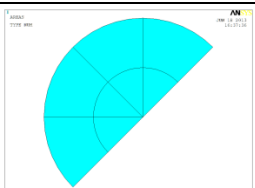
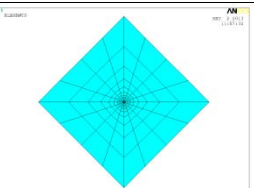
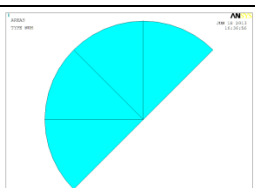
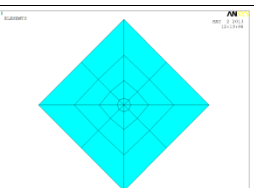
- Volume di controllo circolare:

Tabella 4.3 Risultati relativi alla piastra con cricca centrale inclinata, per il volume di controllo circolare

Numero EF (cerchio)	Numero EF (quadrato)	Numero EF (modello)	\overline{W}_t (MJ/m ³)	\overline{W}_d (MJ/m ³)	$\Delta_t\%$	$\Delta_d\%$
 21,252	 29,252	58,721	0.82018	0.56467	-	-
 64	 160	1513	0.80462	0.53959	-1.90	-4.44
 32	 96	1449	0.80429	0.52942	-1.94	-6.24
 16	 48	396	0.79054	0.50166	-3.61	-11.16
 8	 32	380	0.79113	0.47893	-3.54	-15.18

- **Volume di controllo semicircolare:**

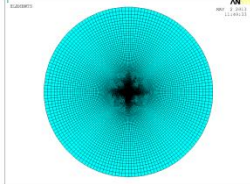
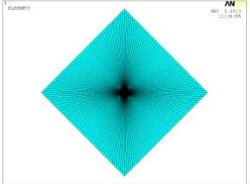
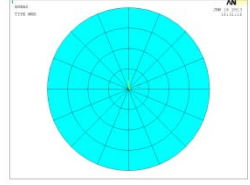
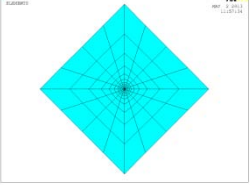
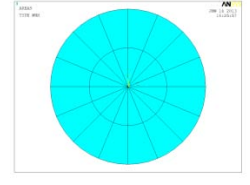
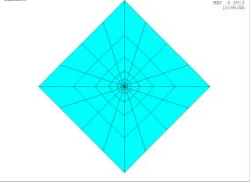
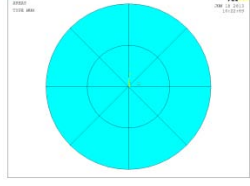
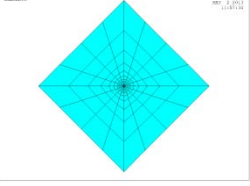
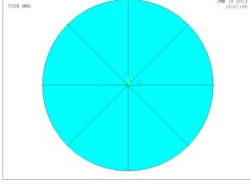
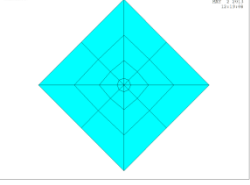
Tabella 4.4 Risultati relativi alla piastra con cricca centrale inclinata, per il volume di controllo semicircolare

Numero EF (semicerchio)	Numero EF (quadrato)	Numero EF (modello)	\overline{W}_t (MJ/m ³)	\overline{W}_d (MJ/m ³)	$\Delta_t\%$	$\Delta_d\%$
 10,626	 29,252	58,721	0.64150	0.54554	-	-
 32	 160	1513	0.63313	0.51869	-1.30	-4.92
 16	 96	1449	0.63500	0.50637	-1.01	-7.18
 8	 48	396	0.62659	0.48205	-2.32	-11.64
 4	 32	380	0.63203	0.45730	-1.47	-16.17

4.3.3 Piastra con cricca laterale inclinata

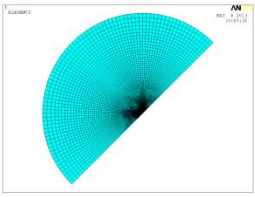
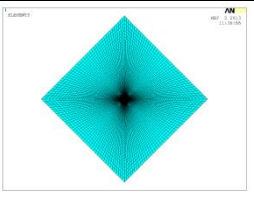
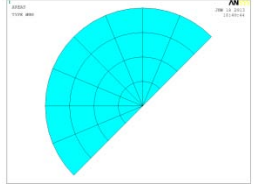
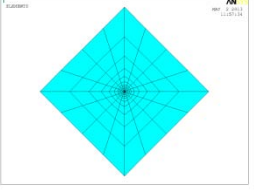
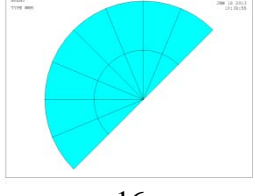
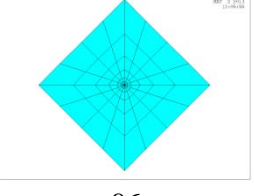
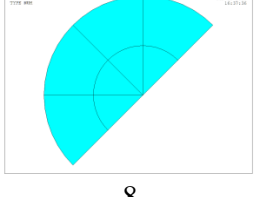
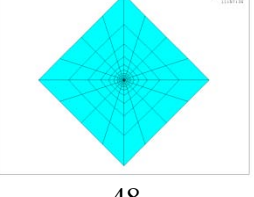
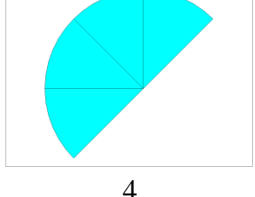
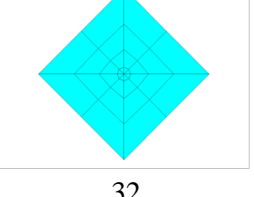
- Volume di controllo circolare:

Tabella 4.5 Risultati relativi alla piastra con cricca laterale inclinata, per il volume di controllo circolare

Numero EF (cerchio)	Numero EF (quadrato)	Numero EF (modello)	\overline{W}_t (MJ/m ³)	\overline{W}_d (MJ/m ³)	$\Delta_t\%$	$\Delta_d\%$
 21,399	 29,399	55,702	0.85132	0.49166	-	-
 64	 160	1497	0.85204	0.47608	0.08	-3.17
 32	 96	1433	0.85286	0.46713	0.18	-4.99
 16	 48	391	0.85646	0.44252	0.60	-9.44
 8	 32	375	0.85906	0.42672	0.91	-13.21

- **Volume di controllo semicircolare:**

Tabella 4.6 Risultati relativi alla piastra con cricca laterale inclinata, per il volume di controllo semicircolare

Numero EF (semicerchio)	Numero EF (quadrato)	Numero EF (modello)	\overline{W}_t (MJ/m ³)	\overline{W}_d (MJ/m ³)	$\Delta_t\%$	$\Delta_d\%$
 10,648	 29,399	55,702	0.60696	0.43100	-	-
 32	 160	1497	0.61299	0.41358	0.99	-4.04
 16	 96	1433	0.61698	0.40264	1.65	-6.58
 8	 48	391	0.62255	0.38426	2.57	-10.84
 4	 32	375	0.63196	0.36497	4.12	-15.32

4.4 Osservazioni conclusive

In tutti i casi analizzati si può affermare che la densità di energia di deformazione totale è praticamente indipendente dalla mesh: già con soli otto elementi all'interno del volume di controllo circolare, l'errore relativo rispetto al SED calcolato con una mesh fitta non va oltre qualche punto percentuale. Si possono trarre le stesse conclusioni per volumi di controllo costituiti da semicerchi. Il risultato è pertanto in accordo con le documentazioni presenti in letteratura: già con mesh molto grossolane è possibile ottenere con un elevato grado di approssimazione il valore della densità di energia di deformazione totale all'interno del volume di controllo.

Per quanto riguarda la densità di energia di deformazione deviatorica, utilizzando mesh più grossolane l'errore relativo calcolato rispetto alla stessa grandezza valutata con una mesh molto fitta aumenta in maniera più severa. Per volumi di controllo circolari suddivisi in soli otto elementi e per volumi di controllo semicircolari suddivisi in soli quattro elementi, tale errore raggiunge e supera il 15%. Si osserva tuttavia che aumentando la fittezza della mesh fino a raggiungere 64 elementi per un volume di controllo circolare o, analogamente, 32 elementi in un volume di controllo semicircolare, tale errore viene limitato a soli 3 o 4 punti percentuali.

Si può quindi concludere che utilizzando mesh senza un elevato grado di infittimento è comunque possibile ottenere con un elevato grado di approssimazione il valore della densità di energia di deformazione deviatorica, pur con una precisione minore rispetto alla densità di energia di deformazione totale, la cui indipendenza dalla fittezza della mesh era già stata documentata. Se si desidera il valore del SED deviatorico con un buon grado di approssimazione, non si possono comunque utilizzare mesh esageratamente grossolane.

Capitolo 5

Calcolo degli N-SIFs (SIFs) basato sul SED in problemi bidimensionali

Tradizionalmente, per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni per cricche (SIFs) e intagli (N-SIFs), quando non disponibili dalla letteratura, si utilizzano le definizioni di Gross e Mendelson, [36] di seguito riportate (gli indici I e II riferiti alle cricche, mentre gli indici 1 e 2 riferiti agli intagli, considerando il problema nel piano e trascurando quindi contributi di modo III):

$$K_1(o K_I) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_1} \quad (5.1)$$

$$K_2(o K_{II}) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_2} \quad (5.2)$$

Tuttavia, per poter ottenere tali fattori con un'adeguata precisione, è necessario utilizzare modelli numerici con mesh molto fitte: di conseguenza, le risorse numeriche e i tempi richiesti per tali analisi, proporzionali ai costi delle stesse, sono elevati.

Negli ultimi anni sono stati presentati due metodi per effettuare un calcolo più rapido dei fattori di intensificazione delle tensioni, basati sull'utilizzo della densità di energia di deformazione (SED). Si procederà con la descrizione di tali metodi e con l'introduzione di un nuovo metodo che permette il calcolo dei fattori di intensificazione per cricche e intagli. Si proseguirà poi con la descrizione del frame analitico utilizzato e con alcuni esempi di calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni nel caso di sollecitazioni di moto misto.

Le espressioni dettagliate degli integrali utilizzati nelle trattazioni, e indicate con i simboli I_1 , I_2 , $I_{1,dev}$, $I_{2,dev}$, $I_{1,s}$, $I_{2,s}$ e $I_{12,s}$, vengono riportate nell'appendice §A5, con i risultati già calcolati e tabellati per alcuni angoli di apertura dell'intaglio e per diversi valori del modulo di Poisson.

5.1 Metodi per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni

Verranno ora presentati i metodi utilizzati per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando la densità di energia di deformazione.

5.1.1 Metodo Lazzarin

Il primo metodo è stato presentato nel 2010 da Lazzarin P., Berto F. e Zappalorto M., [45] e utilizza la densità di energia di deformazione totale all'interno di volumi di controllo circolari centrati all'apice dell'intaglio o della cricca (Fig. 5.1), la cui espressione è la seguente:

$$\bar{W} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12}}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \quad (5.3)$$

Essendo nullo l'integrale I_{12} legato al termine misto, poiché il volume di controllo è ora simmetrico rispetto alla bisettrice dell'intaglio (o della cricca), l'espressione si semplifica nel seguente modo:

$$\bar{W} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right] \quad (5.4)$$

Per i casi di puro modo I o di puro modo II, il fattore di intensificazione delle tensioni è immediatamente ricavabile dall'espressione sopra riportata:

- Modo I ($K_1 \neq 0, K_2 = 0$):

$$K_1 = R^{(1-\lambda_1)} \sqrt{\frac{4E\lambda_1\gamma\bar{W}}{I_1}} \quad (5.5)$$

- Modo II ($K_1 = 0, K_2 \neq 0$):

$$K_2 = R^{(1-\lambda_2)} \sqrt{\frac{4E\lambda_2\gamma\bar{W}}{I_2}} \quad (5.6)$$

Nel caso di modo misto, ovvero di presenza combinata dei modi I e II, compaiono tuttavia nell'equazione entrambe le variabili K_1 e K_2 . Nel caso di intagli, ovvero di angoli di apertura non nulli ($2\alpha \neq 0, \gamma \neq \pi$), è possibile ricavare un sistema di due equazioni nelle due

incognite K_1 e K_2 valutando la densità di energia di deformazione totale all'interno di due volumi di controllo con raggio differente, qui indicati con gli indici a e b (Fig. 5.1):

$$\begin{cases} \overline{W}_a = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} \right] \\ \overline{W}_b = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} \right] \end{cases} \quad (5.7)$$

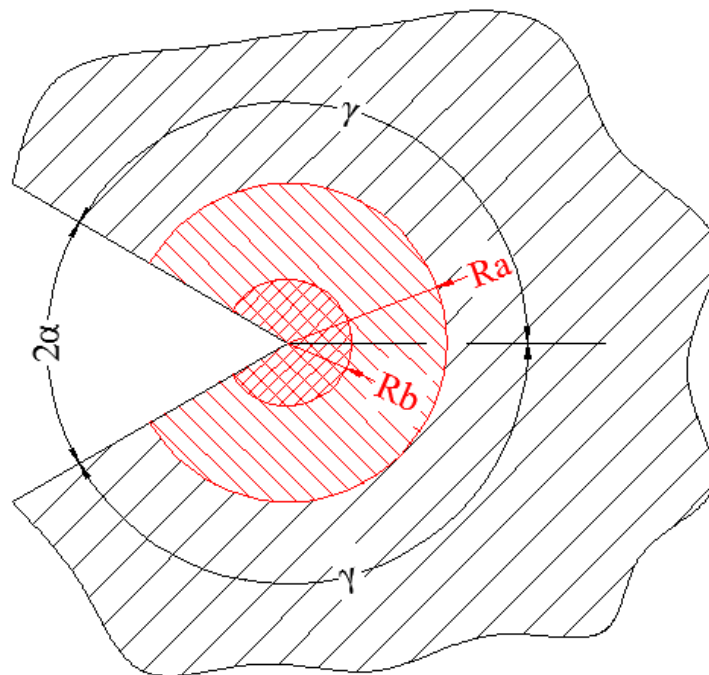


Figura 5.1 Volumi di controllo per il metodo Lazzarin

Per gli intagli, è possibile disaccoppiare i contributi dei due modi grazie al loro differente grado di singolarità ($(1 - \lambda_1) \neq (1 - \lambda_2)$).

Tale metodo non è però pensato per l'applicazione in caso di cricche: in tale caso, infatti, i gradi di singolarità di modo I e di modo II diventano uguali ($(1 - \lambda_1) = (1 - \lambda_2) = 0.5$), e il sistema risulterebbe quindi indeterminato, vedendo impedita la possibilità di disaccoppiare i contributi dei due modi.

5.1.2 Metodo Treifi

Il presente metodo è stato presentato nel 2013 da Treifi M. e Oyadiji S. O., [47] e nella sua formulazione originale fa uso dell'energia di deformazione all'interno di volumi di controllo semicircolari centrati sull'apice dell'intaglio o della cricca (Fig. 5.2). In questa sede, il

metodo verrà riformulato in termini di densità di energia di deformazione, dividendo l'energia di deformazione per l'area del volume di controllo:

$$\bar{W} = \frac{E}{\gamma R^2} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{1,s}}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,s}}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,s}}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{K_1 K_2}{\gamma R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \quad (5.8)$$

In questo caso il contributo del termine misto non viene annullato, in quanto l'integrazione non è eseguita su un volume di controllo simmetrico rispetto alla bisettrice dell'incisione.

Mentre per i casi di puro modo I e puro modo II il fattore di intensificazione delle tensioni del modo applicato si ricava allo stesso modo del metodo precedente, nel caso di modo misto si possono ottenere gli N-SIFs (o SIFs) dal sistema di due equazioni ricavate dai due differenti volumi di controllo, entrambi di raggio R : il primo con estensione angolare da $-\gamma$ a 0 (pedice a), il secondo con estensione angolare da 0 a $+\gamma$ (pedice b).

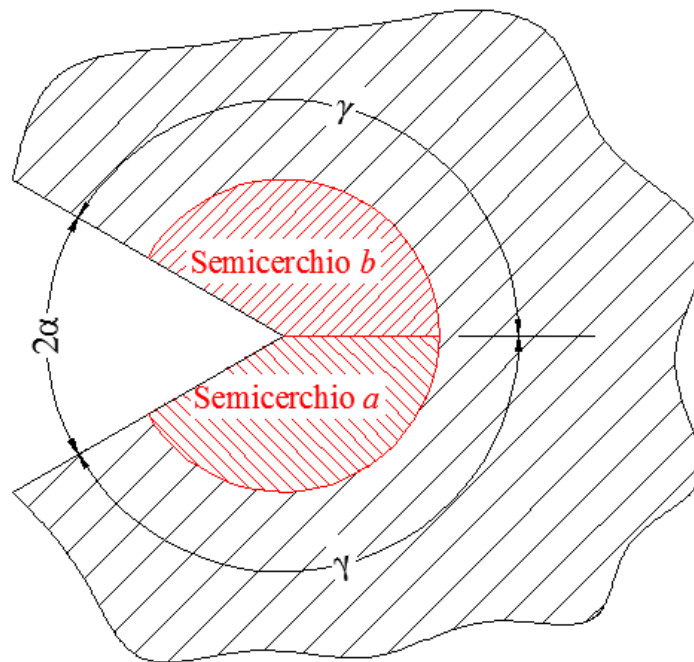


Figura 5.2 Volumi di controllo per il metodo Treifi

$$\begin{cases} \bar{W}_a = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{1,s_a}}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,s_a}}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,s_a}}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{K_1 K_2}{\gamma R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \\ \bar{W}_b = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{1,s_b}}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,s_b}}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,s_b}}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{K_1 K_2}{\gamma R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \end{cases} \quad (5.9)$$

Per motivi di simmetria, sussistono le seguenti relazioni tra gli integrali calcolati per i due semicerchi:

$$I_{1,s_a} = I_{1,s_b} = I_{1,s} \quad (5.10)$$

$$I_{2,s_a} = I_{2,s_b} = I_{2,s} \quad (5.11)$$

$$I_{12,s_a} = -I_{12,s_b} = I_{12,s} \quad (5.12)$$

Il sistema si può pertanto riscrivere nella forma seguente:

$$\begin{cases} \overline{W}_a = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{1,s}}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,s}}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,s}}{(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\gamma}{2}} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \\ \overline{W}_b = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{1,s}}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,s}}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} - \frac{I_{12,s}}{(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\gamma}{2}} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \end{cases} \quad (5.13)$$

Grazie alla presenza del contributo di modo misto è possibile quindi disaccoppiare i contributi di modo I e di modo II, ottenendo entrambi i fattori di intensificazione delle tensioni, anche nel caso della cricca, ovvero con angolo di apertura nullo.

5.1.3 Metodo del SED totale e deviatorico

Il metodo ora proposto per poter ottenere i fattori di intensificazione delle tensioni di modo I e modo II sia nel caso di intagli (N-SIFs) che nel caso di cricche (SIFs), in presenza di sollecitazioni di modo misto, è basato sulla valutazione della densità di energia di deformazione totale e deviatorica all'interno di un volume di controllo circolare centrato sull'apice dell'intaglio (o della cricca, Fig. 5.3). Si riporta ora l'espressione della densità di energia di deformazione deviatorica:

$$\overline{W}_{dev} = \frac{(1 + \nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,dev}}{(\lambda_1 + \lambda_2) \gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \quad (5.14)$$

Per la simmetria del volume di controllo considerato rispetto all'apice dell'intaglio, l'integrale legato al contributo di modo misto si annulla ($I_{12,dev} = 0$), e l'espressione si semplifica:

$$\overline{W}_{dev} = \frac{(1 + \nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right] \quad (5.15)$$

Verrà ora discusso il caso di sollecitazioni *mixed mode*, in quanto per la presenza di puro modo I o puro modo II si potrà procedere in maniera analoga al primo metodo descritto. Per sollecitazioni di modo misto, è possibile ricavare i fattori di intensificazione delle tensioni procedendo alla soluzione del sistema costituito dalle espressioni della densità di energia di deformazione totale e deviatorica compute all'interno del medesimo volume di controllo circolare:

$$\begin{cases} \bar{W} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right] \\ \bar{W}_{dev} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right] \end{cases} \quad (5.16)$$

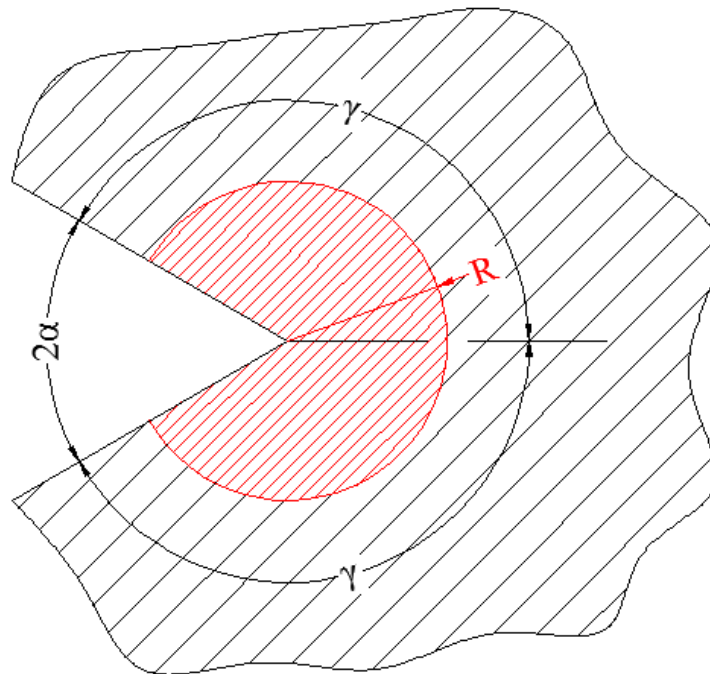


Figura 5.3 Volume di controllo per il metodo del SED totale e deviatorico

Essendo le due equazioni indipendenti, il sistema permette di ricavare i SIFs anche nel caso delle cricche, permettendo di disaccoppiare i contributi di modo I e di modo II.

5.1.4 Alcune considerazioni preliminari sui metodi descritti

Come già enunciato nell'introduzione del capitolo, il principale vantaggio che si mira ad ottenere con l'utilizzo di criteri energetici per ricavare i fattori di intensificazione delle tensioni è la possibilità di utilizzare mesh meno fitte di fronte all'apice di cricche e intagli,

diminuendo i tempi per la creazione della mesh stessa e per la soluzione del modello numerico al calcolatore.

Si è dimostrato infatti nel capitolo precedente (§4) come il SED totale ottenuto in un'analisi numerica sia fortemente indipendente dal grado di fittezza della mesh utilizzata nel modello, poiché in un codice di calcolo che utilizza il metodo degli elementi finiti il computo di tale grandezza avviene nelle prime fasi di applicazione del metodo stesso, a partire dagli spostamenti nodali e dalla matrice di rigidezza dell'elemento ed escludendo quindi operazioni di derivazione. [45]

Si è visto tuttavia come il computo del SED deviatorico con un codice di calcolo che implementa il metodo degli elementi finiti passi necessariamente per il calcolo della tensione principale di von Mises, mediata all'interno dell'elemento considerato. Tale grandezza è quindi più sensibile al grado di fittezza della mesh utilizzata, ma si è potuto apprezzare come in volumi di controllo circolari il SED deviatorico ottenuto con mesh di 64 elementi si discosti solo di qualche punto percentuale rispetto al risultato ottenuto per lo stesso volume di controllo con mesh molto fitte (decine di migliaia di elementi, §4).

Alla luce di queste considerazioni, si può pensare che i primi due metodi riportati, facenti uso della sola densità di energia di deformazione totale, siano fortemente indipendenti dal grado di fittezza della mesh, mentre l'ultimo metodo, che utilizza anche la densità di energia di deformazione deviatorica, non sia indipendente dal grado di fittezza della mesh. Si ritiene tuttavia che, utilizzando mesh tali da ridurre di pochi punti percentuali l'errore sul SED deviatorico, assimilabili cioè alle mesh utilizzate nel capitolo §4, si possano ottenere valori degli N-SIFs (o SIFs) accurati.

Bisognerà comunque aver cura di scegliere per l'applicazione di tutti i metodi un volume di controllo entro il quale le componenti di tensione ottenute dalla soluzione di Williams arrestata ai termini del primo ordine rappresentino con ottima approssimazione il campo di tensione realmente presente di fronte all'intaglio, ovvero un volume di controllo in cui i termini di ordine superiore della soluzione di Williams possano essere trascurati e le tensioni possano essere espresse solo in funzione degli N-SIFs (o SIFs). Riguardo a quest'ultima precisazione, si ritiene tuttavia non necessario ricorrere all'utilizzo di volumi di controllo di dimensioni estremamente esigue rispetto alla grandezza dominante dell'intaglio o della cricca, come quelli utilizzati originariamente da Treifi M. e Oyadiji S. O. nella pubblicazione del metodo, poiché si possono perdere i notevoli vantaggi che comporta l'utilizzo di una mesh grossolana in un volume di controllo adeguato.

Si ribadisce infine come il primo metodo enunciato (Lazzarin) non preveda l'applicazione nel caso di cricche, a differenza degli altri due metodi.

5.2 Frame analitico

E' stato realizzato un foglio di calcolo con Microsoft® Excel® 2010 in cui, inseriti come dati di input l'angolo γ (legato all'angolo 2α di apertura dell'intaglio mediante l'equazione $\gamma = \pi - 2\alpha/2$), i moduli di Young E e di Poisson ν , i valori degli autovalori di Williams λ_1 e λ_2 per la geometria considerata, gli integrali I_1 , I_2 , $I_{1,dev}$, $I_{2,dev}$, $I_{1,s}$, $I_{2,s}$ e $I_{12,s}$ (vedi appendice §A5), il raggio del volume di controllo (o dei due volumi di controllo utilizzati nel caso del metodo Lazzarin) e il valore della densità di energia totale e deviatorica dei volumi di controllo considerati, si ottengono come output i valori dei fattori di intensificazione delle tensioni, mediante l'utilizzo delle espressioni che verranno ora riportate.

5.2.1 Metodo Lazzarin

Per tale metodo si deve procedere alla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \overline{W}_{a,FEM} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma R_a^{2(1-\lambda_2)}} \right] = C_a K_1^2 + D_a K_2^2 \\ \overline{W}_{b,FEM} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma R_b^{2(1-\lambda_2)}} \right] = C_b K_1^2 + D_b K_2^2 \end{cases} \quad (5.17)$$

Dove il pedice FEM indica le grandezze ricavate dal codice di calcolo, mentre le grandezze ausiliare valgono:

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{1}{2E} * \frac{I_1}{2\lambda_1\gamma R_a^{2(1-\lambda_1)}} \\ D_a &= \frac{1}{2E} * \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma R_a^{2(1-\lambda_2)}} \\ C_b &= \frac{1}{2E} * \frac{I_1}{2\lambda_1\gamma R_b^{2(1-\lambda_1)}} \\ D_b &= \frac{1}{2E} * \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma R_b^{2(1-\lambda_2)}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Una volta definiti i raggi dei volumi di controllo R_a e R_b e ottenuti i valori della densità di energia di deformazione totale in tali volumi ($\overline{W}_{a,FEM}$ e $\overline{W}_{b,FEM}$), si è proceduto col definitivo calcolo degli N-SIFs utilizzando le seguenti espressioni:

$$K_1 = \sqrt{\frac{D_a * \overline{W}_{b,FEM} - D_b * \overline{W}_{a,FEM}}{D_a C_b - C_a D_b}} \quad (5.19)$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{\overline{W_{a,FEM}} - C_a * K_1^2}{D_a}} \quad (5.20)$$

5.2.2 Metodo Treifi

Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \overline{W_{a,FEM}} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{1,s}}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,s}}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,s}}{(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\gamma}{2}} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] = MK_1^2 + NK_2^2 + QK_1 K_2 \\ \overline{W_{b,FEM}} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{1,s}}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,s}}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} - \frac{I_{12,s}}{(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\gamma}{2}} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] = MK_1^2 + NK_2^2 - QK_1 K_2 \end{cases} \quad (5.21)$$

Dove il pedice *FEM* indica le grandezze ricavate dal codice di calcolo, mentre le grandezze ausiliare valgono:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2E} * \frac{I_{1,s}}{\lambda_1 \gamma R^{2(1-\lambda_1)}} \\ N &= \frac{1}{2E} * \frac{I_{2,s}}{\lambda_2 \gamma R^{2(1-\lambda_2)}} \\ Q &= \frac{1}{2E} * \frac{I_{12,s}}{(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\gamma}{2} R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Una volta definito il raggio *R* dei due volumi semicircolari di controllo e aver ottenuto il valore del SED totale per i due volumi di controllo ($\overline{W_{a,FEM}}$ e $\overline{W_{b,FEM}}$), si procede al calcolo degli N-SIFs (o SIFs) risolvendo le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} 2MK_1^4 - (\overline{W_{a,FEM}} + \overline{W_{b,FEM}})K_1^2 + \frac{N(\overline{W_{a,FEM}} - \overline{W_{b,FEM}})^2}{2Q^2} &= 0 \\ K_2 &= \frac{(\overline{W_{a,FEM}} - \overline{W_{b,FEM}})}{2QK_1} \end{aligned} \quad (5.23)$$

La soluzione della prima equazione è quindi:

$$K_1^2 = \frac{(\overline{W_{a,FEM}} + \overline{W_{b,FEM}}) \pm \sqrt{(\overline{W_{a,FEM}} + \overline{W_{b,FEM}})^2 - \frac{4MN(\overline{W_{a,FEM}} - \overline{W_{b,FEM}})^2}{Q^2}}}{4M} \quad (5.24)$$

Dalle equazioni sopra riportate si ottiene più di un set di soluzioni. La scelta del set di soluzioni adeguato, quando non ovvia, può essere eseguita con considerazioni sugli spostamenti relativi delle due facce della cricca o dell'intaglio. [47] Nei casi analizzati in questa trattazione, tuttavia, è sempre stato immediato capire quale era il set di soluzioni corretto, mediante il confronto con i risultati degli altri metodi.

5.2.3 Metodo del SED totale e deviatorico

Per applicare tale metodo si risolve il sistema:

$$\begin{cases} \bar{W}_{FEM} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right] = SK_1^2 + TK_2^2 \\ \bar{W}_{dev,FEM} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right] = S_{dev}K_1^2 + T_{dev}K_2^2 \end{cases} \quad (5.25)$$

Dove ancora una volta il pedice *FEM* indica le grandezze ricavate dal codice di calcolo, mentre le grandezze ausiliare valgono:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2E} * \frac{I_1}{2\lambda_1\gamma R^{2(1-\lambda_1)}} \\ T &= \frac{1}{2E} * \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma R^{2(1-\lambda_2)}} \\ S_{dev} &= \frac{(1+\nu)}{3E} * \frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma R^{2(1-\lambda_1)}} \\ T_{dev} &= \frac{(1+\nu)}{3E} * \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma R^{2(1-\lambda_2)}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Una volta definito il raggio *R* del volume circolare di controllo e aver ottenuto il valore del SED totale e deviatorico per tale volume di controllo (\bar{W}_{FEM} e $\bar{W}_{dev,FEM}$), si procede al calcolo degli N-SIFs (o SIFs) nel seguente modo:

$$K_1 = \sqrt{\frac{T * \bar{W}_{dev,FEM} - T_{dev} * \bar{W}_{FEM}}{TS_{dev} - T_{dev}S}} \quad (5.27)$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{\bar{W}_{dev,FEM} - S_{dev} * K_1^2}{T_{dev}}} \quad (5.28)$$

Per controllare la corretta impostazione del foglio di calcolo, si è provato a procedere per alcuni dei casi riportati risolvendo direttamente il sistema di partenza di ogni metodo utilizzando il software Wolfram Mathematica[®] 9: i risultati sono coincidenti.

5.3 Geometrie e modelli analizzati per l'applicazione dei metodi

I metodi precedentemente descritti sono stati applicati su sei modelli di piastre intagliate: intagli a diamante con due diversi angoli di apertura, intaglio quadro, cricca inclinata a 45° su piastra finita e infinita e cricca laterale inclinata a 45° . Per ciascun modello, si è proceduto con il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando le definizioni di Gross e Mendelson, quindi con una mesh molto fitta, per poi proseguire con l'applicazione dei metodi descritti per il calcolo degli N-SIFs (o SIFs) per tre diversi raggi del volume di controllo, utilizzando per ciascun modello prima una mesh fitta e poi una mesh grossolana. I dettagli sulle mesh verranno dati in seguito.

5.3.1 Intaglio a diamante

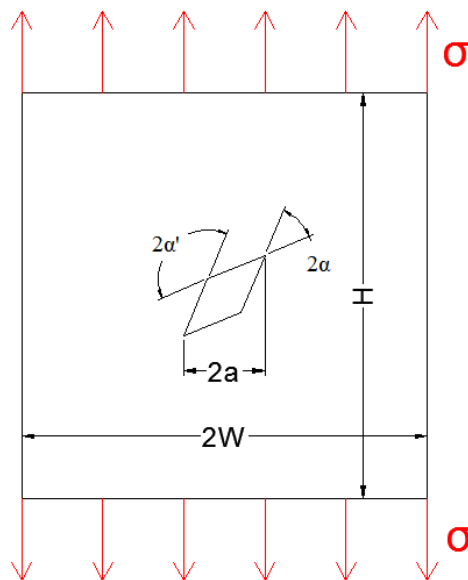


Figura 5.4 Piastra con intaglio a diamante

Per questa geometria sono stati analizzati entrambi i vertici con diverso angolo di apertura dell'intaglio: il primo, con $2\alpha = 45^\circ$, presenta entrambi i modi I e II singolari, mentre per il secondo, con $2\alpha' = 135^\circ$, solo il modo I è singolare. È stato poi analizzato un secondo caso di intaglio a diamante, con angoli $2\alpha = 30^\circ$ e $2\alpha' = 150^\circ$.

Le dimensioni utilizzate per la piastra e la tensione applicata sono le seguenti:

- $2W = H = 10 \text{ mm}$
- $2a = 2 \text{ mm}$
- $\sigma = 1 \text{ MPa}$

5.3.2 Intaglio quadro

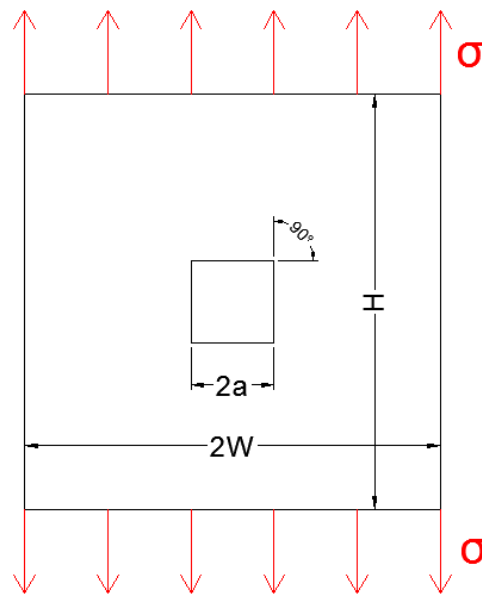


Figura 5.5 Piastra con intaglio quadro

Per questa geometria, l'angolo di apertura dell'intaglio è $2\alpha = 90^\circ$, per il quale si hanno entrambi i modi singolari.

Le dimensioni utilizzate per la piastra e la tensione applicata sono le seguenti:

- $2W = H = 10 \text{ mm}$
- $2a = 2 \text{ mm}$
- $\sigma = 1 \text{ MPa}$

5.3.3 Cricca inclinata a 45°, piastra finita

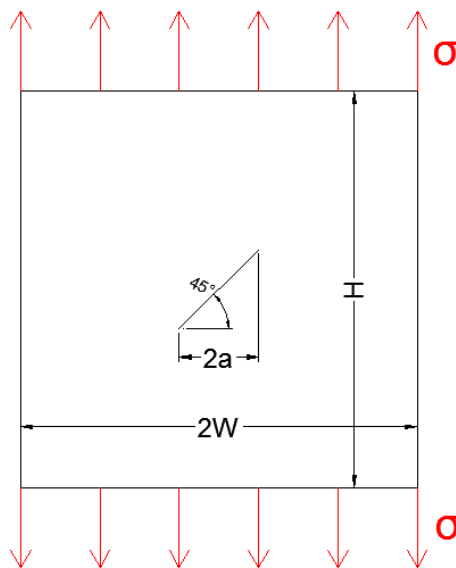


Figura 5.6 Cricca inclinata a 45° , piastra di dimensioni finite

Le dimensioni della piastra e la tensione applicata per il caso della cricca inclinata a 45° sono:

- $2W = H = 10 \text{ mm}$
- $2a = 2 \text{ mm}$
- $\sigma = 1 \text{ MPa}$

5.3.4 Cricca inclinata a 45°, piastra infinita:

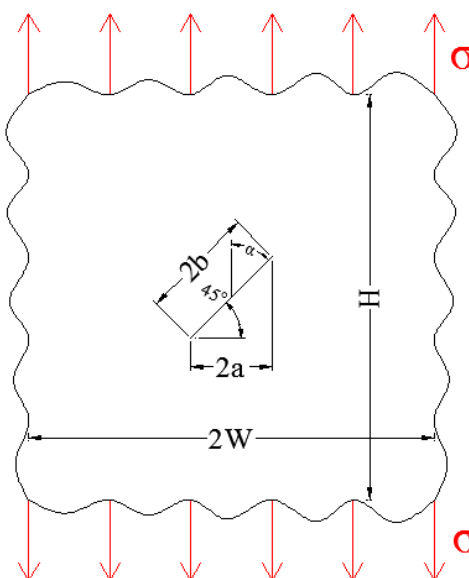


Figura 5.7 Cricca inclinata a 45° , piastra di dimensioni infinite

I valori delle dimensioni della piastra e del carico applicato sono i seguenti:

- $2W = H = \infty$
- $2a = 2 \text{ mm}$
- $\sigma = 1 \text{ MPa}$

Per questa geometria, si conosce la soluzione analitica dei fattori di intensificazione delle tensioni, formulata originariamente da Erdogan e Sih: [48]

$$K_I = \sigma \sin^2 \alpha \sqrt{\pi b} \quad (5.29)$$

$$K_{II} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\pi b} \quad (5.30)$$

Con $b = \sqrt{2} \text{ mm}$ lunghezza della semicricca.

5.3.5 Cricca laterale inclinata a 45°

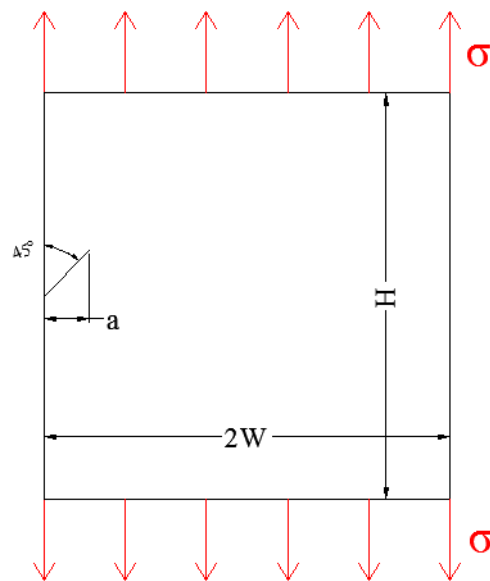


Figura 5.8 Piastra con cricca laterale inclinata a 45°

Le dimensioni della piastra e la tensione applicata per il caso della cricca laterale inclinata a 45° sono:

- $2W = H = 10 \text{ mm}$
- $a = 1 \text{ mm}$
- $\sigma = 1 \text{ MPa}$

5.3.6 Modelli numerici e mesh utilizzate

Per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni è stata utilizzata una mesh molto fitta, mentre per l'applicazione dei metodi descritti è stata strutturata una mesh nel seguente modo:

- una circonferenza di raggio 0.6 mm centrata sull'apice dell'intaglio, con lo scopo di garantire intorno a quest'ultimo un graduale infittimento della mesh;
- una circonferenza con raggio pari a quello del volume di controllo considerato, ovvero:
 - a) $R = 0.1 \text{ mm}$ ($R_a = 0.1 \text{ mm}$, $R_b = 0.075 \text{ mm}$ per l'applicazione del Metodo Lazzarin);
 - b) $R = 0.01 \text{ mm}$ ($R_a = 0.01 \text{ mm}$, $R_b = 0.0075 \text{ mm}$ per l'applicazione del Metodo Lazzarin);
 - c) $R = 0.001 \text{ mm}$ ($R_a = 0.001 \text{ mm}$, $R_b = 0.00075 \text{ mm}$ per l'applicazione del Metodo Lazzarin);

Si noti come il volume di controllo di dimensioni maggiori abbia raggio inferiore a $a/10$ per ognuna delle geometrie illustrate: all'interno di tale zona, si considera influente il trascurare termini di ordine superiore della soluzione di Williams per i campi di tensione. Per ciascuna dimensione del volume di controllo, sono state realizzate due mesh: la prima fine, la seconda grossolana, in modo simile a quanto riportato nel capitolo §4. La mesh grossolana è strutturata nel seguente modo: il volume di controllo è suddiviso in quattro file di elementi, di estensione radiale uguale tra loro. Così, in un volume di controllo di raggio $R = 0.1 \text{ mm}$, gli elementi avranno ciascuno estensione radiale di 0.025 mm , in un volume di controllo di raggio $R = 0.01 \text{ mm}$ gli elementi avranno ciascuno estensione radiale di 0.0025 mm e così via. Il numero di suddivisioni in elementi circolari dipenderà invece dall'angolo di apertura dell'intaglio: gli intagli con angoli pari a 90° , 135° e 150° avranno 12 suddivisioni in senso circolare, i rimanenti 16 suddivisioni. Un esempio di tale suddivisione è evidente in Fig. 5.12 per l'intaglio a diamante con $2\alpha = 45^\circ$ e $2\alpha' = 135^\circ$.

Si riportano le immagini, per l'esempio dell'intaglio a diamante, della suddivisione in aree per un controllo adeguato dell'infittimento della mesh (Fig. 5.9), delle mesh fitta (Fig. 5.10) e grossolana (Fig. 5.11) realizzate con il volume di controllo più grande ($R = 0.1 \text{ mm}$), e il particolare del volume di controllo per la mesh grossolana (Fig. 5.12).

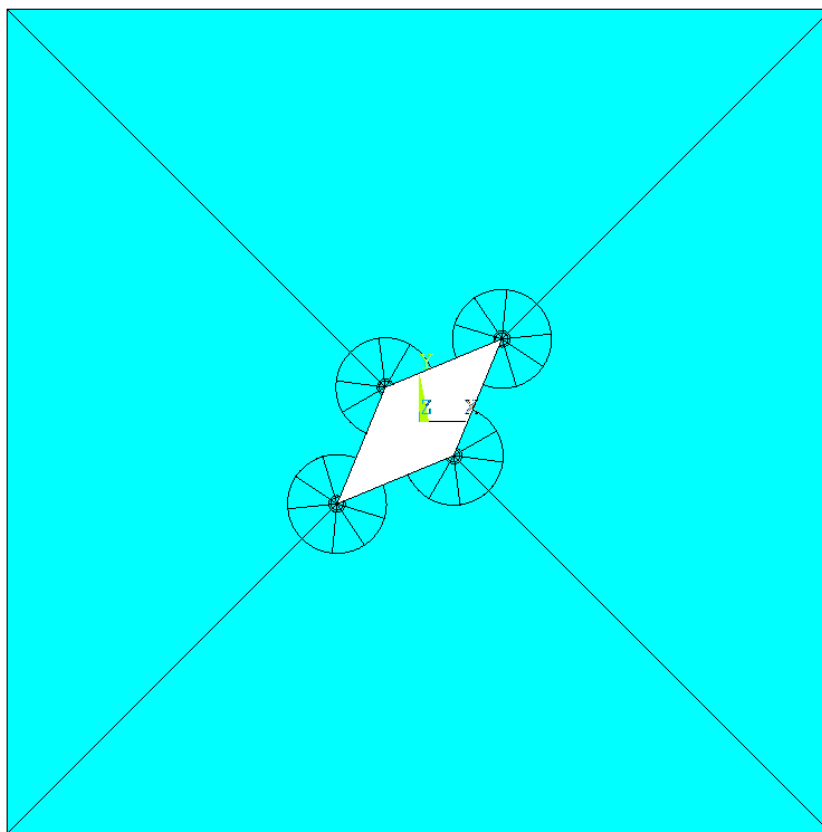


Figura 5.9 Esempio di suddivisione in aree per la piastra con intaglio a diamante ($2\alpha = 45^\circ$ e $2\alpha' = 135^\circ$)

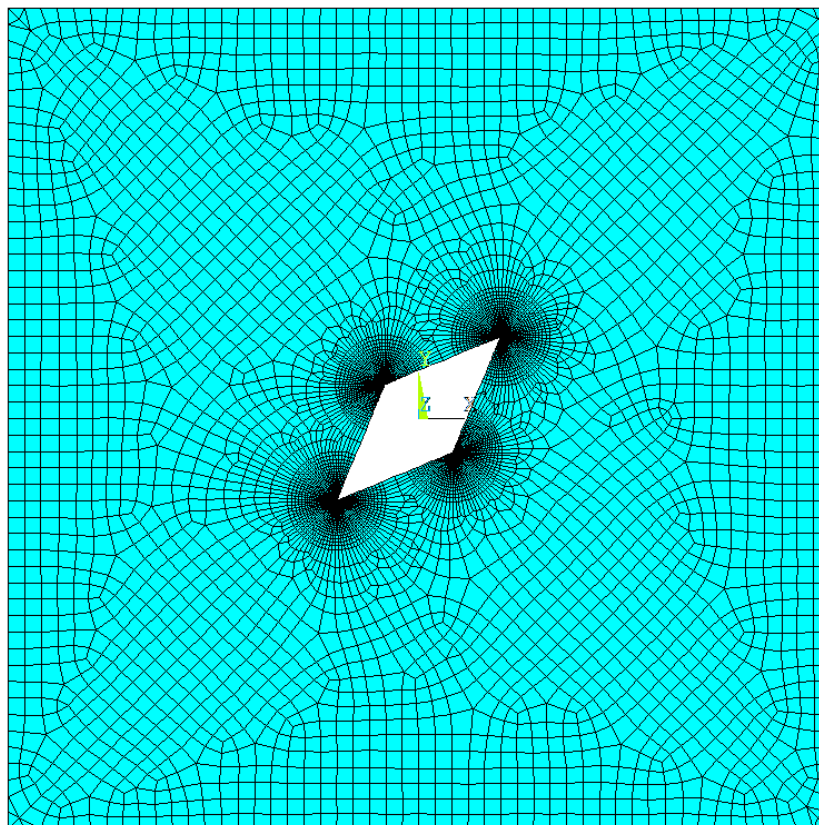


Figura 5.10 Esempio di mesh fitta per il modello della piastra con intaglio a diamante ($2\alpha = 45^\circ$ e $2\alpha' = 135^\circ$)

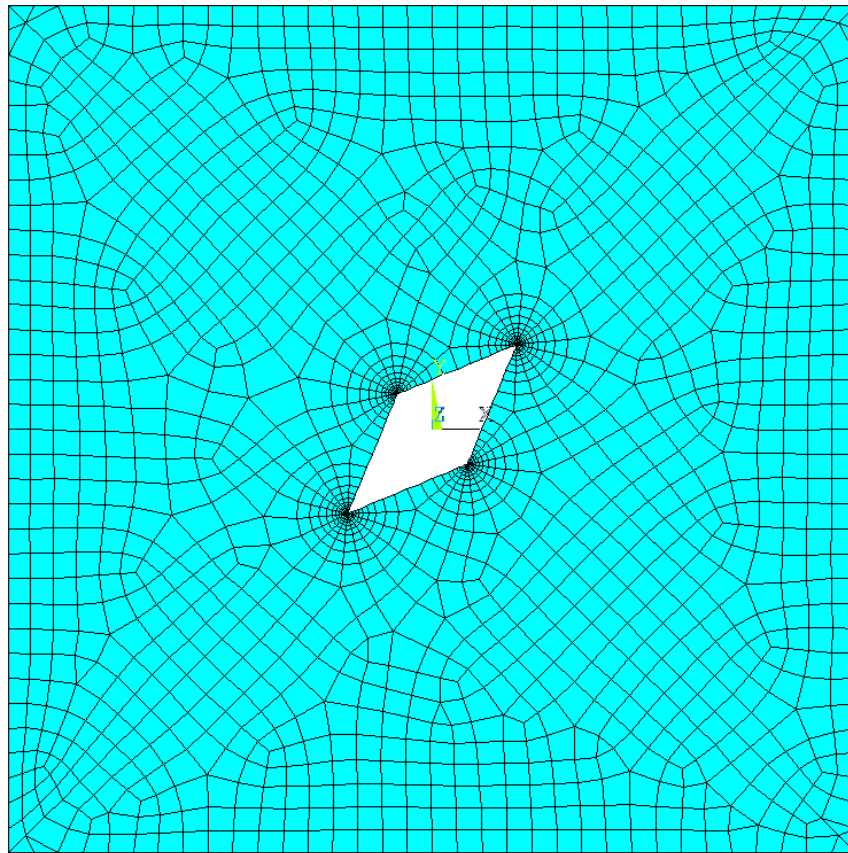


Figura 5.11 Esempio di mesh grossolana per il modello della piastra con intaglio a diamante ($2\alpha = 45^\circ$ e $2\alpha' = 135^\circ$)

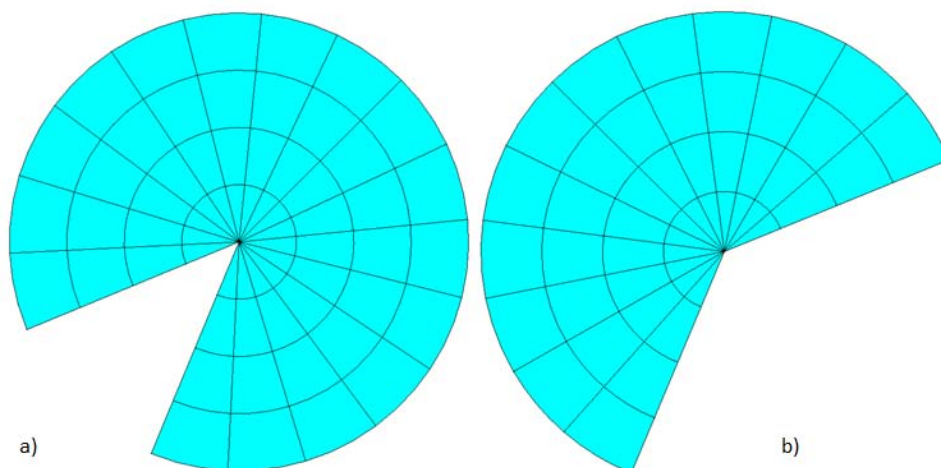


Figura 5.12 Esempio di mesh grossolana del volume di controllo (intaglio a diamante, a) 45° , b) 135°)

Si ritiene opportuno sottolineare come per il caso della cricca inclinata su piastra infinita si sia in realtà modellata una piastra finita con altezza e larghezza che superano di due ordini di grandezza la dimensione della cricca ($2W = H = 100 \text{ mm}$, a fronte di $a = 1 \text{ mm}$)

Il codice di calcolo utilizzato per le analisi è Ansys® 13.0. Gli elementi utilizzati per la discretizzazione della piastra sono elementi quadrangolari ad 8 nodi (“PLANE 183” nel software utilizzato), con attivata l’opzione di deformazione piana.

I valori del modulo di Young e del modulo di Poisson utilizzati nelle simulazioni sono $E = 206000$ e $\nu = 0.3$, valori tipici dell’acciaio.

5.4 Risultati delle analisi numeriche

Vengono ora riportati i risultati delle analisi numeriche effettuate, organizzati, per ciascun tipo di intaglio, nel seguente modo: per prima cosa si riportano i fattori di intensificazione delle tensioni calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson, per poi elencare, per ciascuna grandezza del volume di controllo, i valori degli N-SIFs (o SIFs) calcolati con i tre metodi descritti, e il loro errore relativo, in termini percentuali, rispetto alle soluzioni calcolate con le definizioni di Gross e Mendelson.

I fattori di intensificazione delle tensioni sono stati scalati rispetto alla tensione applicata e alle dimensioni della cricca, in modo analogo a quanto fatto nella pubblicazione di Treifi M. e Oyadiji S. O., [47] utilizzando la seguente espressione:

$$K_{i,scalato} = \frac{K_i}{\sigma\sqrt{\pi}(a)^{(1-\lambda_i)}} \quad (5.31)$$

Nel riportare i risultati si ometterà il pedice *scalato*; si tenga tuttavia presente che tutti i valori numerici dei fattori di intensificazione delle tensioni riportati sono stati scalati secondo l’espressione precedentemente riportata. Per la mesh grossolana, verrà riportato tra parentesi il numero di elementi in cui è stato suddiviso il volume di controllo. Per la mesh fitta, si riporterà tra parentesi il numero di elementi all’interno del volume di controllo con raggio $R = 0.1 \text{ mm}$.

- **Intaglio a diamante, $2\alpha = 45^\circ$:**

		K_1	K_2						
Gross e Mendelson:		0.656	0.911						
R_C [mm]		Mesh fitta (3128 el.)				Mesh grossolana (64 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1 (0.075)	Lazzarin	0.650	0.919	-0.91	0.88	0.650	0.919	-0.91	0.88
	Treifi	0.693	0.878	5.64	-3.62	0.694	0.878	5.79	-3.62
	SED t/d	0.666	0.905	1.52	-0.66	0.681	0.891	3.81	-2.20
0.01 (0.0075)	Lazzarin	0.655	0.912	-0.15	0.11	0.657	0.909	0.15	-0.22
	Treifi	0.663	0.897	1.07	-1.54	0.665	0.895	1.37	-1.76
	SED t/d	0.657	0.909	0.15	-0.22	0.671	0.883	2.29	-3.07
0.001 (0.00075)	Lazzarin	0.656	0.909	0.00	-0.22	0.659	0.901	0.46	-1.10
	Treifi	0.657	0.908	0.15	-0.33	0.658	0.907	0.31	-0.44
	SED t/d	0.658	0.901	0.30	-1.10	0.671	0.856	2.29	-6.04

- **Intaglio a diamante, $2\alpha' = 135^\circ$:**

		K_1	K_2						
Gross e Mendelson:		0.302	1.142						
R_C [mm]		Mesh fitta (2222 el.)				Mesh grossolana (48 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1 (0.075)	Lazzarin	0.302	1.211	0.00	6.04	0.302	1.212	0.00	6.13
	Treifi	0.329	1.070	8.94	-6.30	0.327	1.079	8.28	-5.52
	SED t/d	0.316	1.140	4.64	-0.18	0.321	1.117	6.29	-2.19
0.01 (0.0075)	Lazzarin	0.302	1.206	0.00	5.60	0.302	1.209	0.00	5.87
	Treifi	0.303	1.131	0.33	-0.96	0.303	1.135	0.33	-0.61
	SED t/d	0.302	1.162	0.00	1.75	0.303	1.145	0.33	0.26
0.001 (0.00075)	Lazzarin	0.302	1.185	0.00	3.77	0.302	1.246	0.00	9.11
	Treifi	0.302	1.135	0.00	-0.61	0.302	1.138	0.00	-0.35
	SED t/d	0.302	1.080	0.00	-5.43	0.302	1.341	0.00	17.43

- **Intaglio a diamante, $2\alpha = 30^\circ$:**

		K_1	K_2						
Gross e Mendelson:		0.654	0.813						
R_C [mm]		Mesh fitta (3063 el.)				Mesh grossolana (64 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1 (0.075)	Lazzarin	0.650	0.817	-0.61	0.49	0.648	0.818	-0.92	0.62
	Treifi	0.681	0.796	4.13	-2.09	0.670	0.803	2.45	-1.23
	SED t/d	0.663	0.808	1.38	-0.62	0.686	0.792	4.89	-2.58
0.01 (0.0075)	Lazzarin	0.655	0.813	0.15	0.00	0.657	0.811	0.46	-0.25
	Treifi	0.638	0.829	-2.45	1.97	0.621	0.847	-5.05	4.18
	SED t/d	0.657	0.811	0.46	-0.25	0.677	0.789	3.52	-2.95
0.001 (0.00075)	Lazzarin	0.656	0.811	0.31	-0.25	0.660	0.807	0.92	-0.74
	Treifi	0.660	0.805	0.92	-0.98	0.673	0.784	2.91	-3.57
	SED t/d	0.659	0.807	0.76	-0.74	0.675	0.779	3.21	-4.18

- **Intaglio a diamante, $2\alpha' = 150^\circ$:**

		K_1	K_2						
Gross e Mendelson:		0.199	1.122						
R_C [mm]		Mesh fitta (2047 el.)				Mesh grossolana (48 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1 (0.075)	Lazzarin	0.201	1.222	1.01	8.91	0.201	1.223	1.01	9.00
	Treifi	0.238	0.999	19.60	-10.96	0.237	1.004	19.10	-10.52
	SED t/d	0.218	1.130	9.55	0.71	0.224	1.094	12.56	-2.50
0.01 (0.0075)	Lazzarin	0.199	1.275	0.00	13.64	0.199	1.277	0.00	13.81
	Treifi	0.200	1.117	0.50	-0.45	0.200	1.118	0.50	-0.36
	SED t/d	0.200	1.177	0.50	4.90	0.199	1.269	0.00	13.10
0.001 (0.00075)	Lazzarin	0.199	1.348	0.00	20.14	0.199	1.396	0.00	24.42
	Treifi	0.199	1.121	0.00	-0.09	0.199	1.121	0.00	-0.09
	SED t/d	0.199	1.416	0.00	26.20	0.198	3.508	-0.50	212.66

- **Intaglio quadro, $2\alpha = 90^\circ$:**

		K_1	K_2
Gross e Mendelson:		0.618	1.209

R_C [mm]		Mesh fitta (2206 el.)				Mesh grossolana (48 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1 (0.075)	Lazzarin	0.613	1.229	-0.81	1.65	0.613	1.229	-0.81	1.65
	Treifi	0.632	1.184	2.27	-2.07	0.604	1.249	-2.27	3.31
	SED t/d	0.625	1.200	1.13	-0.74	0.635	1.175	2.75	-2.81
0.01 (0.0075)	Lazzarin	0.617	1.210	-0.16	0.08	0.617	1.205	-0.16	-0.33
	Treifi	0.618	1.200	0.00	-0.74	0.617	1.211	-0.16	0.17
	SED t/d	0.617	1.212	-0.16	0.25	0.601	1.394	-2.75	15.30
0.001 (0.00075)	Lazzarin	0.618	1.182	0.00	-2.23	0.618	1.166	0.00	-3.56
	Treifi	0.617	1.202	-0.16	-0.58	0.618	1.213	0.00	0.33
	SED t/d	0.618	1.178	0.00	-2.56	0.627	****	1.46	***

- **Cricca inclinata a 45° , $2\alpha = 0^\circ$:**

		K_1	K_2
Gross e Mendelson:		0.655	0.638

R_C [mm]		Mesh fitta (3395 el.)				Mesh grossolana (64 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1	Treifi	0.660	0.637	0.76	-0.16	0.636	0.642	-2.90	0.63
	SED t/d	0.639	0.645	-2.44	1.10	0.697	0.62	6.41	-2.82
0.01	Treifi	0.635	0.647	-3.05	1.41	0.613	0.654	-6.41	2.51
	SED t/d	0.653	0.640	-0.31	0.31	0.708	0.616	8.09	-3.45
0.001	Treifi	0.644	0.644	-1.68	0.94	0.624	0.651	-4.73	2.04
	SED t/d	0.662	0.636	1.07	-0.31	0.712	0.615	8.70	-3.61

- **Cricca inclinata a 45°, 2α = 0°, piastra infinita:**

R_c [mm]		Mesh fitta (3395 el.)				Mesh grossolana (64 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
Soluzione teorica:		0.595	0.595						
0.1	Treifi	0.703	0.547	18.15	-8.07	0.667	0.564	12.10	-5.21
	SED t/d	0.596	0.595	0.17	0.00	0.649	0.572	9.08	-3.87
0.01	Treifi	0.603	0.592	1.34	-0.50	0.582	0.599	-2.18	0.67
	SED t/d	0.597	0.594	0.34	-0.17	0.649	0.571	9.08	-4.03
0.001	Treifi	0.593	0.595	-0.34	0.00	0.575	0.602	-3.36	1.18
	SED t/d	0.612	0.588	2.86	-1.18	0.649	0.571	9.08	-4.03

- **Cricca laterale inclinata a 45°, 2α = 0°:**

R_c [mm]		Mesh fitta (3395 el.)				Mesh grossolana (64 el.)			
		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)	K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
Gross e Mendelson:		0.942	0.474						
0.1	Treifi	****	****	***	***	****	****	***	***
	SED t/d	1.003	0.435	6.48	-8.23	1.044	0.395	10.83	-16.67
0.01	Treifi	****	****	***	***	****	****	***	***
	SED t/d	0.97	0.454	2.97	-4.22	1.012	0.418	7.43	-11.81
0.001	Treifi	****	****	***	***	0.764	0.588	-18.90	24.05
	SED t/d	0.958	0.462	1.70	-2.53	0.996	0.430	5.73	-9.28

5.5 Metodo del SED totale e deviatorico su una corona circolare

Si procede infine con un tentativo di miglioramento dei risultati ottenuti con il metodo del SED totale e deviatorico, nei casi che utilizzano la mesh grossolana. Tale metodo è analogo al precedente, ma viene applicato su un volume di controllo costituito da una corona circolare, eliminando la prima fila di elementi attorno all'apice dell'intaglio. Essendo il calcolo del SED deviatorico legato alle tensioni nodali calcolate con il metodo FEM, ed essendo queste dipendenti dalla fittezza della mesh, si ritiene utile escludere la zona con più alto gradiente delle tensioni nel caso della mesh grossolana. Il volume di controllo è perciò ora costituito da una corona circolare di raggio esterno R_a e raggio interno R_b (Fig. 5.13).

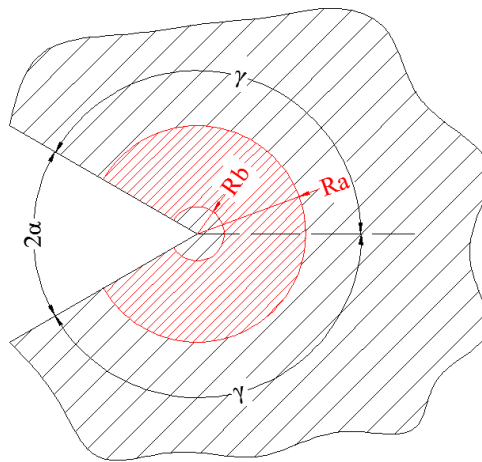


Figura 5.13 Volume di controllo per il metodo del SED totale e deviatorico su una corona circolare

Per tale volume di controllo, la scrittura del SED totale e deviatorico è la seguente (per la simmetria del volume di controllo rispetto alla bisettrice dell'intaglio, si trascurerà da subito il contributo di modo misto):

$$\bar{W} = \frac{1}{2E\gamma(R_a^2 - R_b^2)} \left[\frac{I_1 K_1^2}{2\lambda_1} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_1}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_1}} \right) + \frac{I_2 K_2^2}{2\lambda_2} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_2}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_2}} \right) \right] \quad (5.32)$$

$$\overline{W_{dev}} = \frac{(1+\nu)}{3E\gamma(R_a^2 - R_b^2)} \left[\frac{I_{1,dev} K_1^2}{2\lambda_1} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_1}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_1}} \right) + \frac{I_{2,dev} K_2^2}{2\lambda_2} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_2}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_2}} \right) \right] \quad (5.33)$$

Nel caso di sollecitazioni di modo misto, si potranno determinare i fattori di intensificazione delle tensioni risolvendo il sistema costituito dalle due equazioni precedentemente riportate:

$$\begin{cases} \bar{W} = \frac{1}{2E\gamma(R_a^2 - R_b^2)} \left[\frac{I_1 K_1^2}{2\lambda_1} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_1}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_1}} \right) + \frac{I_2 K_2^2}{2\lambda_2} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_2}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_2}} \right) \right] \\ \overline{W_{dev}} = \frac{(1+\nu)}{3E\gamma(R_a^2 - R_b^2)} \left[\frac{I_{1,dev} K_1^2}{2\lambda_1} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_1}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_1}} \right) + \frac{I_{2,dev} K_2^2}{2\lambda_2} \left(\frac{1}{R_a^{-2\lambda_2}} - \frac{1}{R_b^{-2\lambda_2}} \right) \right] \end{cases} \quad (5.34)$$

Il sistema è stato risolto utilizzando il software Wolfram Mathematica[®] 9. Per un rapido confronto, si riporteranno oltre ai risultati di tale metodo quelli ottenuti con i metodi precedenti.

- **Intaglio a diamante, $2\alpha = 45^\circ$:**

		K_1	K_2		
		Gross e Mendelson:		0.656	0.911
R_C [mm]		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1	Lazzarin	0.650	0.919	-0.91	0.88
	Treifi	0.694	0.878	5.79	-3.62
	SED tot/dev	0.681	0.891	3.81	-2.20
	SED tot/dev, corona circolare	0.664	0.908	1.22	-0.33
0.01	Lazzarin	0.657	0.909	0.15	-0.22
	Treifi	0.665	0.895	1.37	-1.76
	SED tot/dev	0.671	0.883	2.29	-3.07
	SED tot/dev, corona circolare	0.656	0.911	0.00	0.00
0.001	Lazzarin	0.659	0.901	0.46	-1.10
	Treifi	0.658	0.907	0.31	-0.44
	SED tot/dev	0.671	0.856	2.29	-6.04
	SED tot/dev, corona circolare	0.658	0.905	0.30	-0.66

- **Intaglio a diamante, $2\alpha' = 135^\circ$:**

		K_1	K_2		
		Gross e Mendelson:		0.302	1.142
R_C [mm]		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1	Lazzarin	0.302	1.212	0.00	6.13
	Treifi	0.327	1.079	8.28	-5.52
	SED tot/dev	0.321	1.117	6.29	-2.19
	SED tot/dev, corona circolare	0.321	1.126	6.29	-1.40
0.01	Lazzarin	0.302	1.209	0.00	5.87
	Treifi	0.303	1.135	0.33	-0.61
	SED tot/dev	0.303	1.145	0.33	0.26
	SED tot/dev, corona circolare	0.301	1.295	-0.33	13.40
0.001	Lazzarin	0.302	1.246	0.00	9.11
	Treifi	0.302	1.138	0.00	-0.35
	SED tot/dev	0.302	1.341	0.00	17.43
	SED tot/dev, corona circolare	0.300	2.902	-0.66	154.12

- Intaglio a diamante, $2\alpha = 30^\circ$:

		Gross e Mendelson:			
		K_1	K_2		
		0.654	0.813		
R_C [mm]		K_1	K_2	$\Delta K_1(\%)$	$\Delta K_2(\%)$
0.1	Lazzarin	0.648	0.818	-0.92	0.62
	Treifi	0.670	0.803	2.45	-1.23
	SED tot/dev	0.686	0.792	4.89	-2.58
	SED tot/dev, corona circolare	0.660	0.810	0.92	-0.37
0.01	Lazzarin	0.657	0.811	0.46	-0.25
	Treifi	0.621	0.847	-5.05	4.18
	SED tot/dev	0.677	0.789	3.52	-2.95
	SED tot/dev, corona circolare	0.656	0.812	0.31	-0.12
0.001	Lazzarin	0.660	0.807	0.92	-0.74
	Treifi	0.673	0.784	2.91	-3.57
	SED tot/dev	0.675	0.779	3.21	-4.18
	SED tot/dev, corona circolare	0.658	0.809	0.31	-0.49

- Intaglio a diamante, $2\alpha' = 150^\circ$:

		Gross e Mendelson:			
		K_1	K_2		
		0.199	1.122		
R_C [mm]		K_1	K_2	$\Delta K_1(\%)$	$\Delta K_2(\%)$
0.1	Lazzarin	0.201	1.223	1.01	9.00
	Treifi	0.237	1.004	19.10	-10.52
	SED tot/dev	0.224	1.094	12.56	-2.50
	SED tot/dev, corona circolare	0.226	1.098	13.57	-2.14
0.01	Lazzarin	0.199	1.277	0.00	13.81
	Treifi	0.200	1.118	0.50	-0.36
	SED tot/dev	0.199	1.269	0.00	13.10
	SED tot/dev, corona circolare	0.199	1.347	0.00	20.05
0.001	Lazzarin	0.199	1.396	0.00	24.42
	Treifi	0.199	1.121	0.00	-0.09
	SED tot/dev	0.198	3.508	-0.50	212.66
	SED tot/dev, corona circolare	0.197	4.277	-1.01	281.19

- Intaglio quadro, $2\alpha = 90^\circ$:

		K_1	K_2		
		Gross e Mendelson:			
		0.618	1.209		
R_C [mm]		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1	Lazzarin	0.613	1.229	-0.81	1.65
	Treifi	0.604	1.249	-2.27	3.31
	SED tot/dev	0.635	1.175	2.75	-2.81
	SED tot/dev, corona circolare	0.629	1.196	1.78	-1.08
0.01	Lazzarin	0.617	1.205	-0.16	-0.33
	Treifi	0.617	1.211	-0.16	0.17
	SED tot/dev	0.601	1.394	-2.75	15.30
	SED tot/dev, corona circolare	0.618	1.192	0.00	-1.41
0.001	Lazzarin	0.618	1.166	0.00	-3.56
	Treifi	0.618	1.213	0.00	0.33
	SED tot/dev	0.627	****	1.46	***
	SED tot/dev, corona circolare	0.619	1.130	0.16	-6.53

- Cricca inclinata a 45° , $2\alpha = 0^\circ$:

		K_1	K_2		
		Gross e Mendelson:			
		0.655	0.638		
R_C [mm]		K_1	K_2	ΔK_1 (%)	ΔK_2 (%)
0.1	Treifi	0.636	0.642	-2.90	0.63
	SED tot/dev	0.697	0.62	6.41	-2.82
	SED tot/dev, corona circolare	0.639	0.645	-2.44	1.10
0.01	Treifi	0.613	0.654	-6.41	2.51
	SED tot/dev	0.708	0.616	8.09	-3.45
	SED tot/dev, corona circolare	0.653	0.640	-0.31	0.31
0.001	Treifi	0.624	0.651	-4.73	2.04
	SED tot/dev	0.712	0.615	8.70	-3.61
	SED tot/dev, corona circolare	0.657	0.639	0.31	0.16

- Cricca inclinata a 45° , $2\alpha = 0^\circ$, piastra infinita:

		Soluzione teorica:			
		K_1	K_2		
R_C [mm]		K_1	K_2	$\Delta K_1(\%)$	$\Delta K_2(\%)$
0.1	Treifi	0.667	0.564	12.10	-5.21
	SED tot/dev	0.649	0.572	9.08	-3.87
	SED tot/dev, corona circolare	0.598	0.594	0.50	-0.17
0.01	Treifi	0.582	0.599	-2.18	0.67
	SED tot/dev	0.649	0.571	9.08	-4.03
	SED tot/dev, corona circolare	0.598	0.594	0.50	-0.17
0.001	Treifi	0.575	0.602	-3.36	1.18
	SED tot/dev	0.649	0.571	9.08	-4.03
	SED tot/dev, corona circolare	0.598	0.594	0.50	-0.17

- Cricca laterale inclinata a 45° , $2\alpha = 0^\circ$:

		Gross e Mendelson:			
		K_1	K_2		
R_C [mm]		K_1	K_2	$\Delta K_1(\%)$	$\Delta K_2(\%)$
0.1	Treifi	****	****	***	***
	SED tot/dev	1.044	0.395	10.83	-16.67
	SED tot/dev, corona circolare	1.020	0.421	8.28	-11.18
0.01	Treifi	****	****	***	***
	SED tot/dev	1.012	0.418	7.43	-11.81
	SED tot/dev, corona circolare	0.984	0.444	4.46	-6.33
0.001	Treifi	0.764	0.588	-18.90	24.05
	SED tot/dev	0.996	0.430	5.73	-9.28
	SED tot/dev, corona circolare	0.965	0.458	2.44	-3.38

5.6 Osservazioni conclusive

Si è estesa l'applicazione del metodo proposto da Lazzarin *et al.* per intagli con angolo di apertura $2\alpha > 0^\circ$ e del metodo proposto da Treifi e Oyadiji per cricche e intagli a più modelli numerici rispetto a quanto presente in letteratura. Si è introdotto un nuovo metodo per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni di cricche e intagli, che utilizza la densità di energia di deformazione totale e deviatorica all'interno del medesimo volume di controllo. Tutti i metodi sono stati applicati sui modelli di piastra con intaglio a diamante (con intaglio inclinato di 45° e angoli interni dell'intaglio di 45° e 135° o di 30° e 150°) e con intaglio quadro ($2\alpha = 90^\circ$). I metodi Treifi e del SED totale e deviatorico sono stati applicati anche nei casi di cricca centrale inclinata di 45° su piastra finita e infinita e di cricca laterale inclinata di 45° su piastra finita. I valori dei fattori di intensificazione delle tensioni così ottenuti sono stati confrontati con i valori ottenuti utilizzando le definizioni di Gross e Mendelson.

Si è notato come utilizzando mesh fitte i metodi permettano il calcolo degli N-SIFs (o SIFs) con un elevato grado di approssimazione. Nel caso specifico di intagli a diamante, per angoli di apertura dell'intaglio di 135° e 150° i metodi Lazzarin e del SED totale/deviatorico permettono di calcolare con un elevato grado di approssimazione l'N-SIF di modo I, ma non l'N-SIF di modo II. Va tuttavia sottolineato che per tale angolo di apertura dell'intaglio il modo II risulta non singolare. Si osserva inoltre che applicando il metodo Treifi al caso di cricca laterale inclinata di 45° non è addirittura possibile ricavare risultati, se non utilizzando un volume di controllo molto piccolo ($R = 0.001 \text{ mm}$) e una mesh grossolana. Nei casi di cricche centrali, con mesh fitte, il metodo del SED totale e deviatorico sembra in generale più stabile del metodo Treifi.

Per quanto riguarda la mesh grossolana, per gli intagli a diamante con angolo di apertura di 30° e 45° , il metodo Lazzarin fornisce ottime approssimazioni delle soluzioni già con il volume di controllo più grande, mentre per angoli di apertura di 135° e 150° si ribadiscono le osservazioni già riportate per i casi di mesh fitte. Da segnalare come generalmente il metodo che risente maggiormente della diminuzione del numero di elementi nella mesh è il metodo del SED totale e deviatorico, come ci si poteva attendere dalle considerazioni sulla dipendenza della densità di energia di deformazione deviatorica dalla mesh.

Si è introdotto infine un metodo basato sulla densità di energia di deformazione totale e deviatorica in un volume di controllo costituito da una corona circolare, ottenuta escludendo la prima fila di elementi intorno all'apice dell'intaglio o della cricca nel caso della mesh grossolana. Escludendo i casi degli angoli di apertura di 135° e 150° negli intagli a diamante (specialmente per quanto riguarda il modo II), si segnala come tale metodo porti ad ottenere migliori approssimazioni dei SIFs nel caso delle cricche, rispetto al metodo Treifi, e ottime approssimazioni degli N-SIFs nei rimanenti casi.

Capitolo 6

Calcolo degli N-SIFs basato sul SED in problemi in tre dimensioni

Nel precedente capitolo (§5) sono stati illustrati dei metodi per ricavare i fattori di intensificazione delle tensioni in problemi bidimensionali utilizzando la densità di energia di deformazione, totale e/o deviatorica, all'interno di opportuni volumi di controllo, costituiti da semicerchi, cerchi completi o da una corona circolare.

Si proverà ad impostare un metodo per la determinazione degli N-SIFs utilizzando criteri energetici nel caso di problemi tridimensionali. La complicazione rispetto ai casi precedenti è la comparsa del fattore di intensificazione delle tensioni del modo III indotto, o modo O (Cap. §3), che costituisce un'incognita aggiuntiva. In questo capitolo, si farà uso indifferentemente dei termini modo III o modo O per indicare la presenza di tensioni tipiche del modo III.

Si farà inizialmente uso delle espressioni analitiche della densità di energia di deformazione riportate nel Cap. §2, ricavate appunto per problemi tridimensionali; il sistema di riferimento utilizzato è quello riportato in Fig. 6.1.

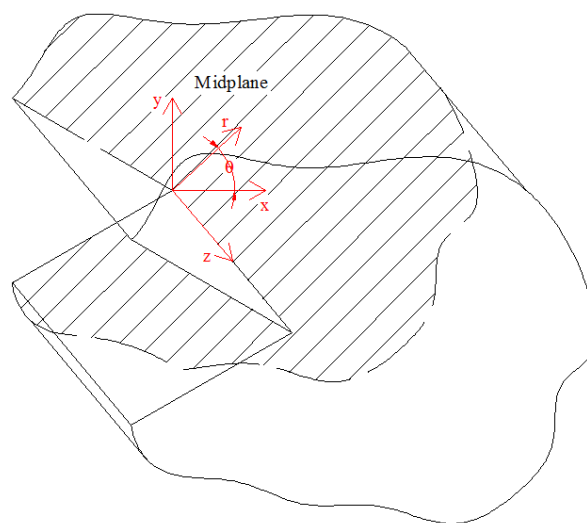


Figura 6.1 Sistema di riferimento utilizzato nelle trattazioni

6.1 Utilizzo del SED totale e deviatorico in volumi di controllo cilindrici con raggi differenti

Come primo approccio al problema, si è pensato di poter ottenere il valore degli N-SIFs di modo I, modo II e modo III utilizzando come equazioni le espressioni della densità di energia di deformazione totale e deviatorica all'interno di due volumi di controllo cilindrici di raggio differente (R_a e R_b , Fig. 6.2) e di uguale profondità h , uguagliate ai valori della densità di energia di deformazione totale e deviatorica presupposte note (ottenute da modello FEM).

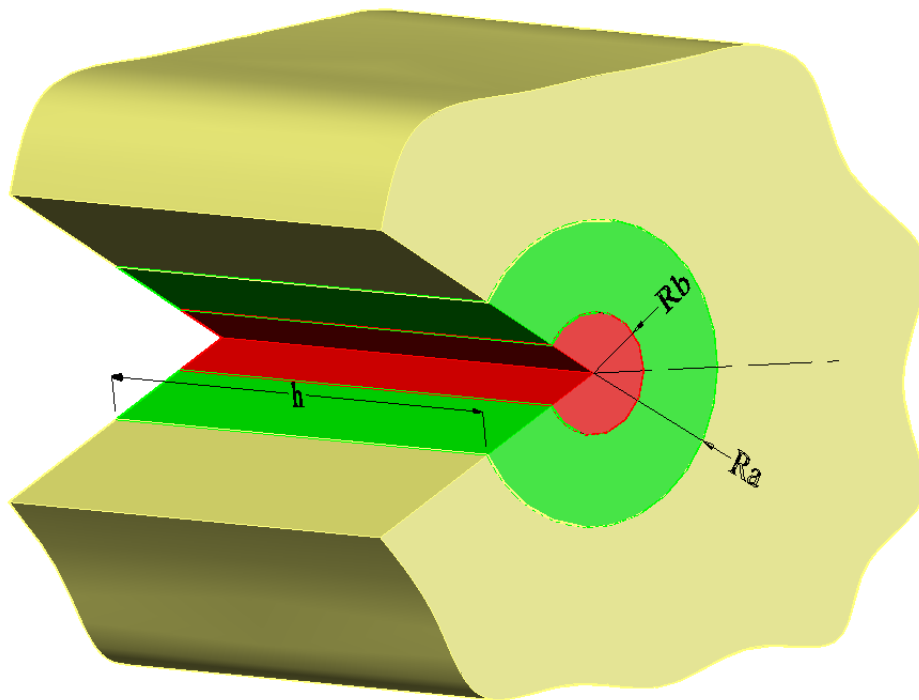


Figura 6.2 Volumi di controllo utilizzati nel metodo proposto

In questo approccio, si considera valida l'ipotesi di deformazione piana. Intuitivamente, tale ipotesi è tanto più vera nella sezione di simmetria rispetto allo spessore del provino considerato, ovvero la sezione segnata come *midplane* (piano di mezzeria) in Fig. 6.1, in quanto si prevede una variabilità del *constraint factor* lungo la coordinata z , come osservato per il caso del giunto saldato a sovrapposizione nel Cap. §3.

Avendo a disposizione ora quattro equazioni (SED totale e deviatorico all'interno di ciascun volume di controllo) e sole tre variabili (K_1 , K_2 e $K_3 = K_0$), una delle equazioni a disposizione risulta sovrabbondante per la determinazione degli N-SIFs. Nelle analisi che seguono, si è considerato il sistema costituito dalle espressioni del SED totale in entrambi i volumi di controllo, e dall'espressione del SED deviatorico nel volume di controllo di raggio

maggiore. Ribadendo l'utilizzo dell'ipotesi di deformazione piana, si riportano le espressioni utilizzate nel sistema per ottenere gli N-SIFs:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_a = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \bar{W}_b = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_b^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \bar{W}_{a,dev} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \end{array} \right. \quad (6.1)$$

6.2 Geometria della piastra e modello agli elementi finiti per le analisi numeriche

Il metodo esposto nel paragrafo precedente è stato applicato sul modello di una piastra quadra con intaglio quadro, analogo al modello precedentemente utilizzato per la determinazione degli N-SIFs di modo I e II in problemi bidimensionali (Par. §5.3.2), dotato ora di uno spessore finito e non trascurabile. I dettagli riguardanti la geometria della piastra considerata sono riportati in Fig. 6.3.

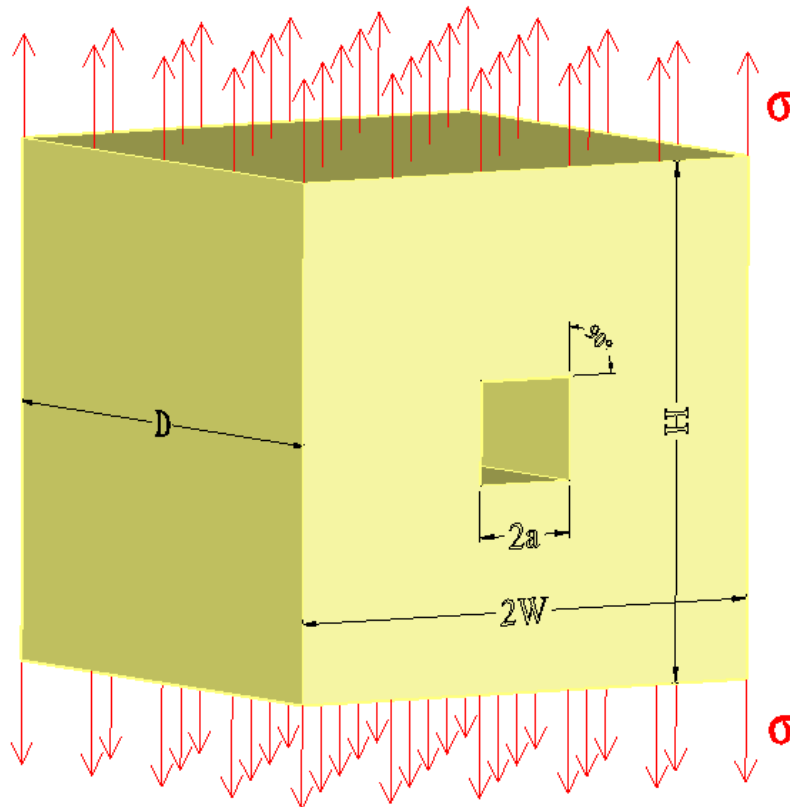


Figura 6.3 Caratteristiche geometriche e dei carichi per il modello di piastra tridimensionale con intaglio quadro

Le dimensioni della piastra sono le seguenti:

- $2W = H = 10 \text{ mm}$;
- $a = 1 \text{ mm}$;
- $D = 10 \text{ mm}$.

Sulle facce superiore e inferiore della piastra, è applicato un carico unitario ($\sigma = 1 \text{ MPa}$).

Per effetto delle simmetrie geometriche e dei carichi applicati, è possibile realizzare il modello di un solo ottavo della piastra (Fig. 6.4), imponendo successivamente gli opportuni vincoli.

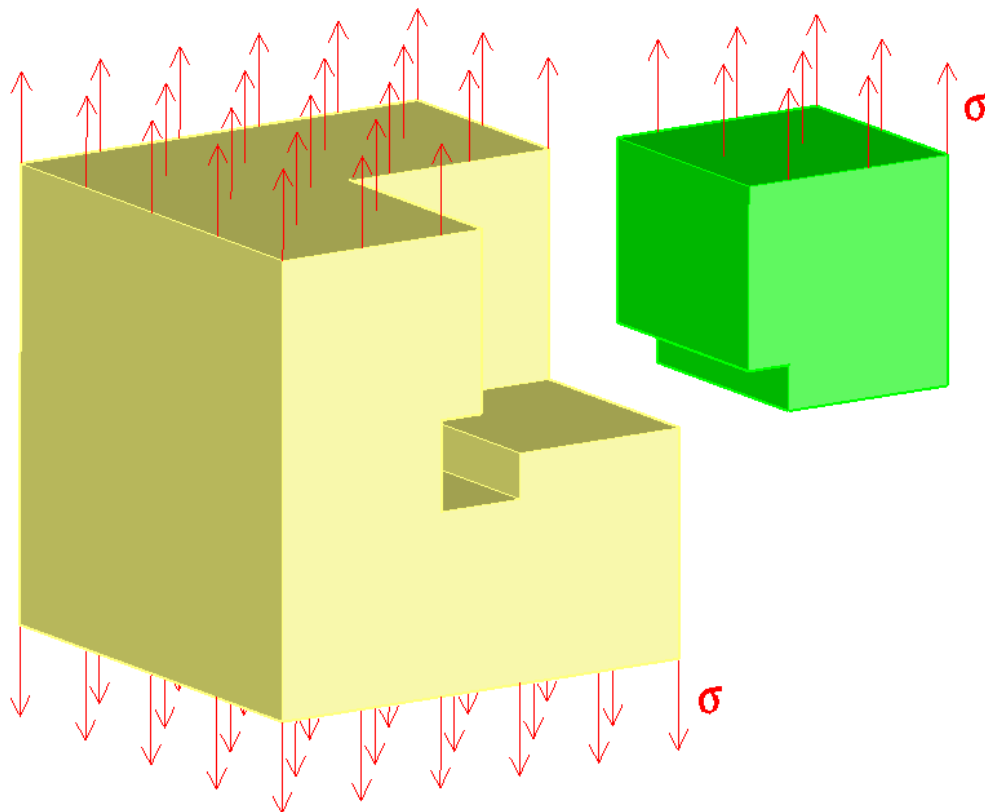


Figura 6.4 Parte della piastra presa come riferimento per la realizzazione del modello numerico

Il modello è stato ottenuto per estrusione di una mesh bidimensionale fitta, per cogliere adeguatamente l'intensificazione delle tensioni all'apice dell'intaglio. Il modello bidimensionale è stato realizzato in modo tale da avere a disposizione volumi di controllo circolari, di raggio $R_a = 0.1 \text{ mm}$ e $R_b = 0.075 \text{ mm}$ (Fig. 6.5). Per estrusione della mesh del modello bidimensionale (Fig.6.6) lungo una linea guida opportunamente suddivisa, si sono quindi ottenuti volumi di controllo cilindrici di altezza $h = 0.1 \text{ mm}$.

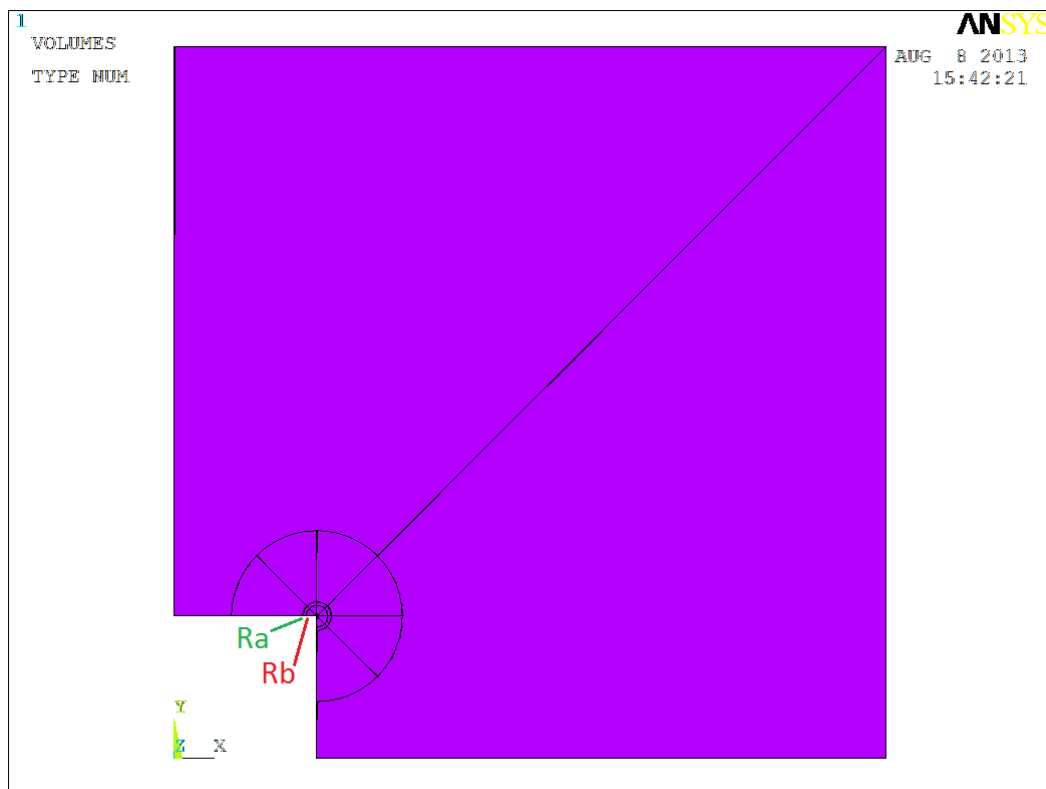


Figura 6.5 *Suddivisione in aree del modello bidimensionale*

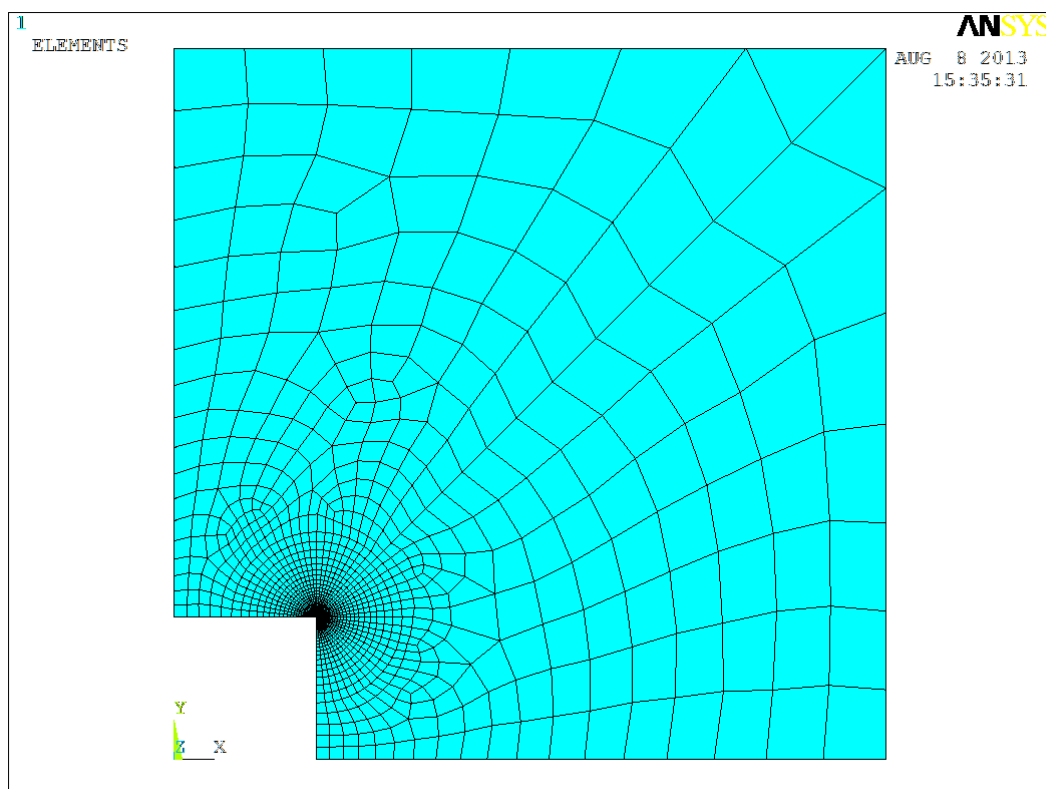


Figura 6.6 *Mesh del modello bidimensionale che è stata estrusa per ottenere il modello tridimensionale*

Realizzata l'estrusione della mesh, sono state imposte le opportune condizioni di vincolo e di carico, riportate in Fig. 6.7, tenendo conto delle condizioni di simmetria presenti.

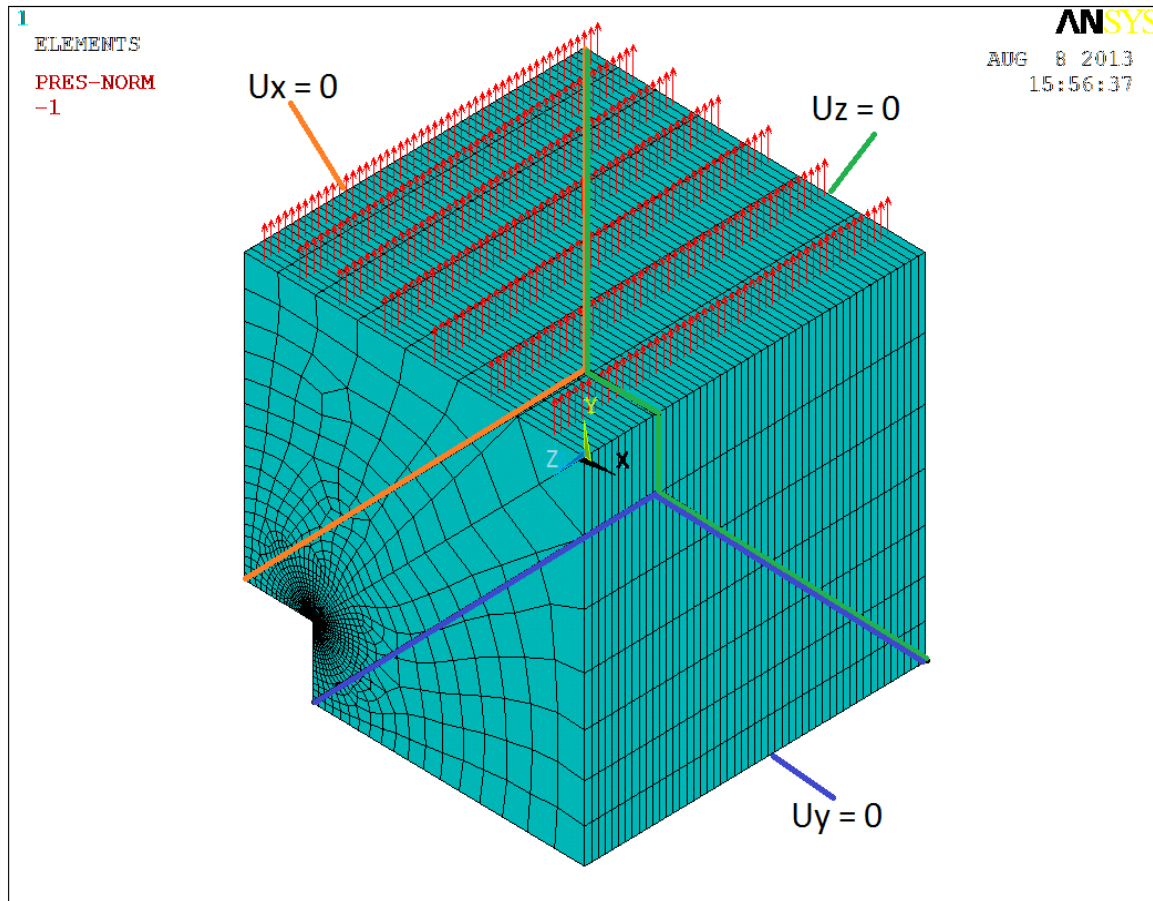


Figura 6.7 Mesh, vincoli e carichi applicati al modello tridimensionale

Gli elementi utilizzati nel modello sono elementi quadrangolari a 20 nodi, denominati “SOLID 186” nel codice di calcolo ANSYS® 13.0.

I valori del modulo di Young e del modulo di Poisson utilizzati nelle simulazioni sono $E = 206000$ e $\nu = 0.3$, valori tipici dell'acciaio.

6.3 Risultati delle analisi numeriche

Verranno ora esposti i risultati ottenuti dalle analisi numeriche. Il significato dei simboli adottati nei grafici e nelle figure inserite nel capitolo è riportato in Tab. 6.1.

Tabella 6.1 Significato dei simboli utilizzati nei grafici riportati per i risultati

SR	σ_r
ST	σ_θ
SZ	σ_z
SRT	$\tau_{r\theta}$
STZ	$\tau_{\theta z}$
SRZ	τ_{rz}
Cz	<i>Constraint factor</i> , definito come $C_z = \sigma_z / [\nu(\sigma_x + \sigma_y)]$
K1, K1_GM	SIF di modo I secondo la definizione di Gross e Mendelson
K2, K2_GM	SIF di modo II secondo la definizione di Gross e Mendelson
K3, K3_GM	SIF di modo III secondo la definizione di Gross e Mendelson
KO, KO_GM	SIF di modo O coincidente con il SIF di modo III secondo la definizione di Gross e Mendelson
K1_SED	SIF di modo I ricavato con i metodi energetici
K2_SED	SIF di modo II ricavato con i metodi energetici
K3_SED	SIF di modo III ricavato con i metodi energetici
KO_SED	SIF di modo O coincidente con il SIF di modo III ricavato con i metodi energetici
z	Distanza dalla sezione di mezzeria della piastra
P1	Tensione principale σ_1
P2	Tensione principale σ_2
P3	Tensione principale σ_3
TAU max	Tensione di taglio massima τ_{max}
Wi	Densità di energia di deformazione (SED) totale nei volumi di controllo di raggio R_i
Wdevi	Densità di energia di deformazione (SED) deviatorica nei volumi di controllo di raggio R_i
Widi	Densità di energia di deformazione (SED) idrostatica nei volumi di controllo di raggio R_i
Wi_analitico	Densità di energia di deformazione (SED) calcolata analiticamente
Wi_FEM	Densità di energia di deformazione (SED) ricavata dal FEM
D_Wi	Differenza tra il SED totale calcolato analiticamente e quello ricavato con il FEM
D_Wi,dev	Differenza tra il SED deviatorico calcolato analiticamente e quello ricavato con il FEM
W1	Contributo energetico del modo I nel SED totale
W2	Contributo energetico del modo II nel SED totale
W3a, W3,a	Contributo energetico del modo III antisimmetrico nel SED totale
W3s, W3,s	Contributo energetico del modo III simmetrico nel SED totale
Wd1	Contributo energetico del modo I nel SED deviatorico
Wd2	Contributo energetico del modo II nel SED deviatorico
Wd3a	Contributo energetico del modo III antisimmetrico nel SED deviatorico
Wd3s	Contributo energetico del modo III simmetrico nel SED deviatorico
Wtot	Somma dei contributi energetici dei vari modi, escludendo, dove indicato alcuni contributi
Wfem	SED totale (o deviatorico, dove indicato) ricavato dal FEM
W - KGM	SED totale (o deviatorico, dove indicato) ricavato analiticamente con gli N-SIFs calcolati dalle definizioni di Gross e Mendelson
A	Funzione che compare nell'integrale di modo misto, indipendente dal C_z
B	Funzione che compare nell'integrale di modo misto, dipendente dal C_z

6.3.1 Andamento delle tensioni lungo lo spessore

Si riporta l'andamento delle tensioni lungo la coordinata z , a partire dal piano di mezzeria della piastra, per una distanza $x = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio (ovvero all'estremità del volume di controllo di raggio maggiore), lungo la bisettrice dell'intaglio stesso.

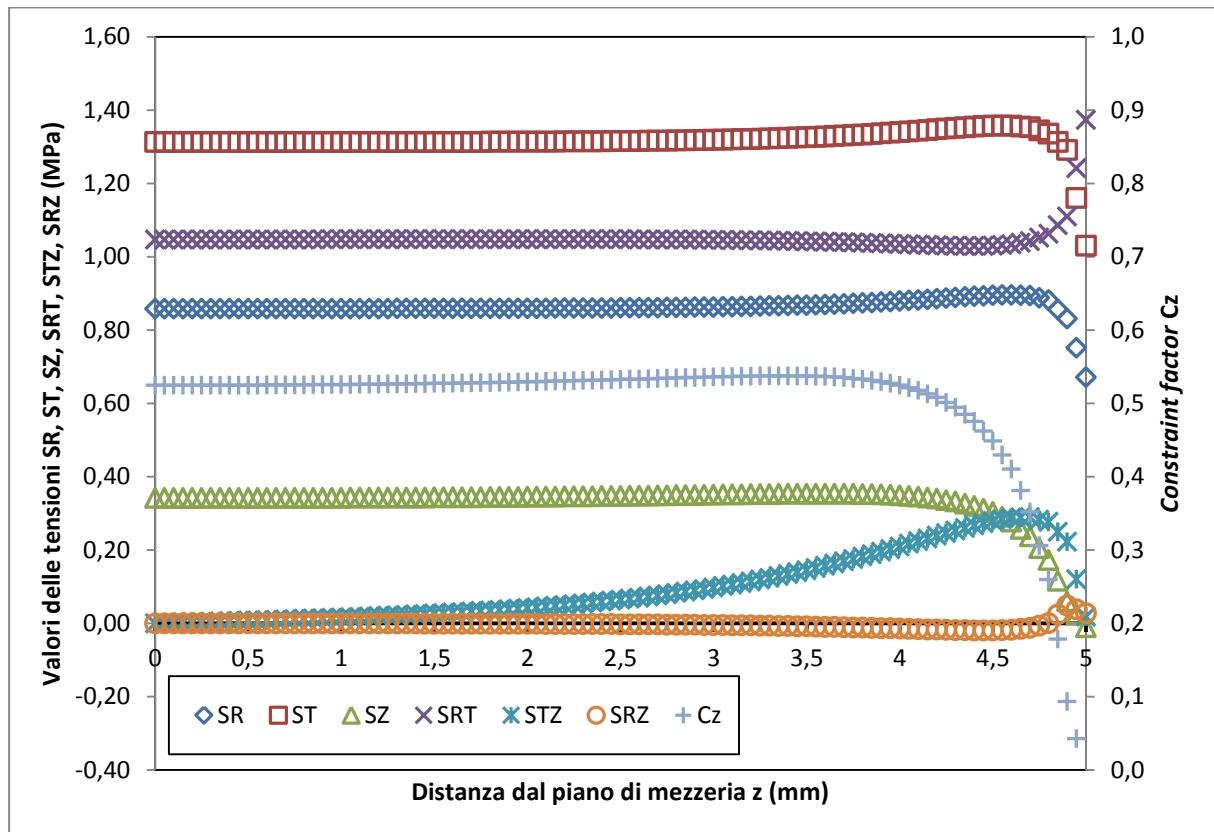


Figura 6.8 Andamento delle tensioni lungo la coordinata z ad una distanza $x = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio

Come si nota dal diagramma di Fig. 6.8, le tensioni seguono l'andamento riportato per il modello del giunto saldato a sovrapposizione: si sottolinea ancora come allontanandosi dalla sezione di mezzeria compaiano le tensioni di taglio $\tau_{\theta z}$ dovute alla comparsa del modo III indotto, denominato modo O (*out-of-plane mode*, o modo fuori piano). In questo caso, la mesh è regolare lungo tutto lo spessore, senza infittimenti verso la superficie libera: i risultati ottenuti nella regione immediatamente adiacente a tale superficie non verranno perciò considerati rappresentativi, ovvero non si ritiene di poter trarre conclusioni sul valore assunto dalle tensioni nelle immediate vicinanze della superficie libera. Anche ai fini del calcolo degli N-SIFs a partire dal valore della densità di energia di deformazione, verrà considerata la regione compresa tra $z = 0 \text{ mm}$ (piano di mezzeria) e $z = 4 \text{ mm}$ (ovvero a 1 mm di distanza dalla superficie libera).

Si vuole osservare inoltre come il valore del *constraint factor* C_z sia variabile lungo lo spessore z (anche se si nota un *plateau* per buona parte della sezione), e presenti, ad una

distanza $x = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio, un valore nettamente inferiore al valore unitario ipotizzato. Si può quindi già dedurre come tale parametro possa avere un peso non trascurabile nel calcolo degli N-SIFs.

6.3.2 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per diverse sezioni

Si riporta nelle Fig. 6.9 - 6.14 l'andamento delle tensioni per i nodi lungo la bisettrice dell'intaglio, per diverse sezioni della piastra, in diagrammi doppio logaritmici, allo scopo di verificare la validità della soluzione di Williams del primo ordine all'interno del volume di controllo considerato nella trattazione e la bontà della mesh, verificando che l'esponente delle linee di tendenza che interpolano le soluzioni nodali delle tensioni σ_θ , $\tau_{r\theta}$ e $\tau_{\theta z}$ siano approssimativamente coincidenti con i gradi di singolarità $(1 - \lambda_1)$, $(1 - \lambda_2)$ e $(1 - \lambda_3)$ previsti dalla teoria. Per le componenti di tensione τ_{rz} riportate nei diagrammi verranno fatte delle considerazioni nei successivi paragrafi, quando si introdurrà il modo O simmetrico, distinguendolo dal modo O considerato fino ad ora (modo O antisimmetrico).

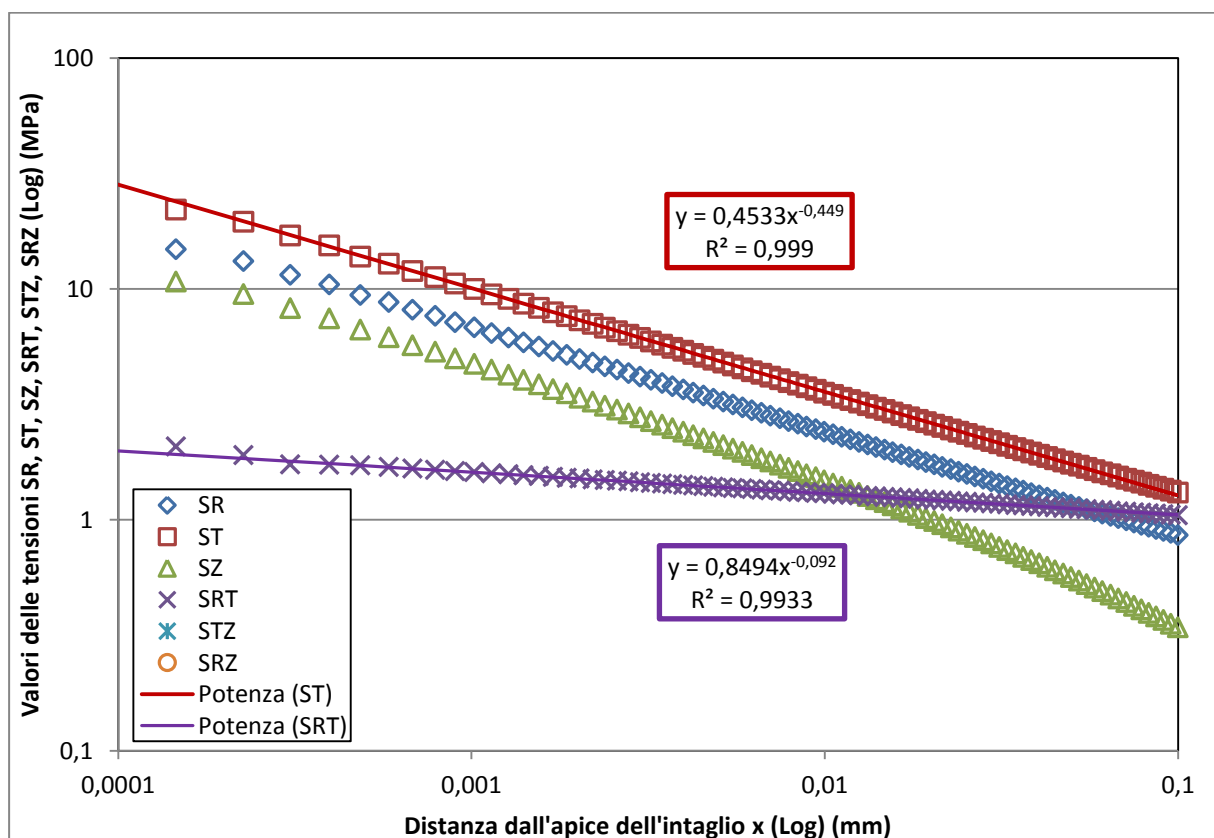


Figura 6.9 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 0 \text{ mm}$

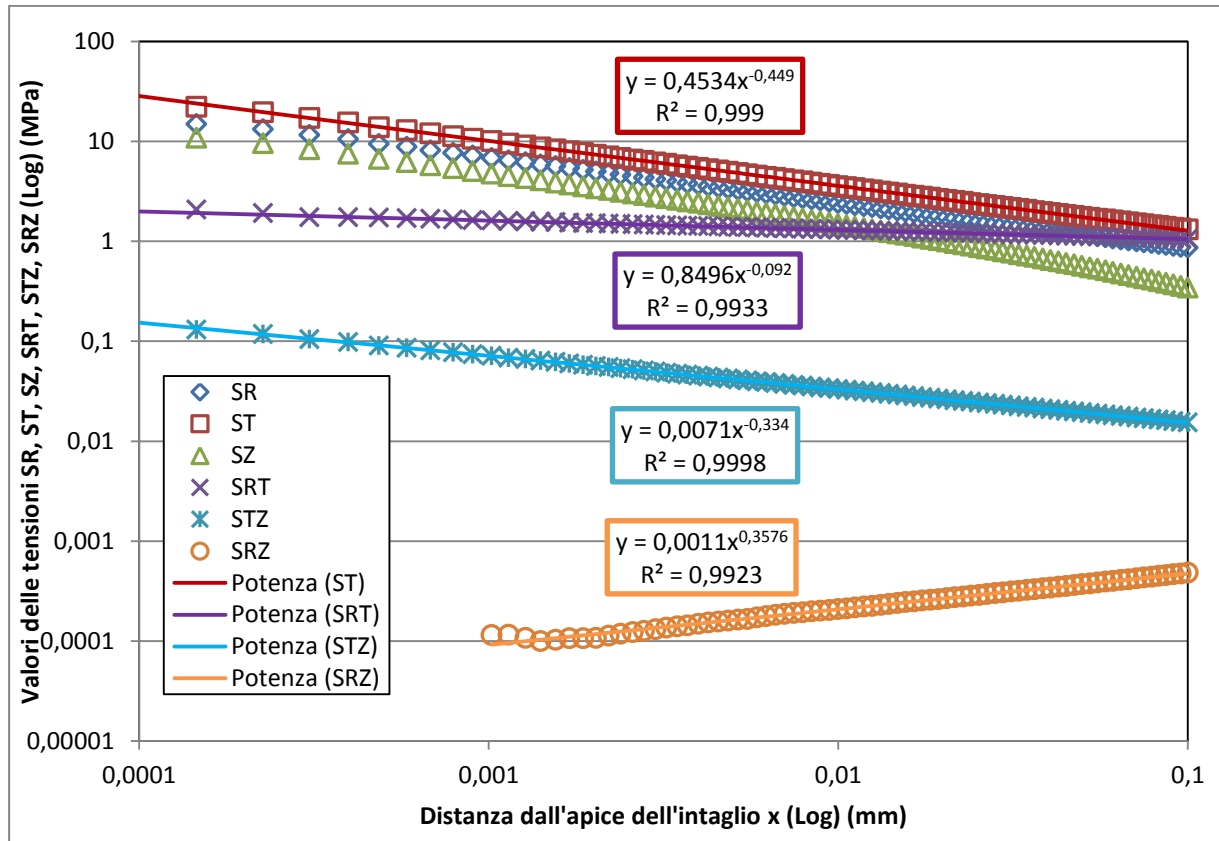


Figura 6.10 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 1$ mm

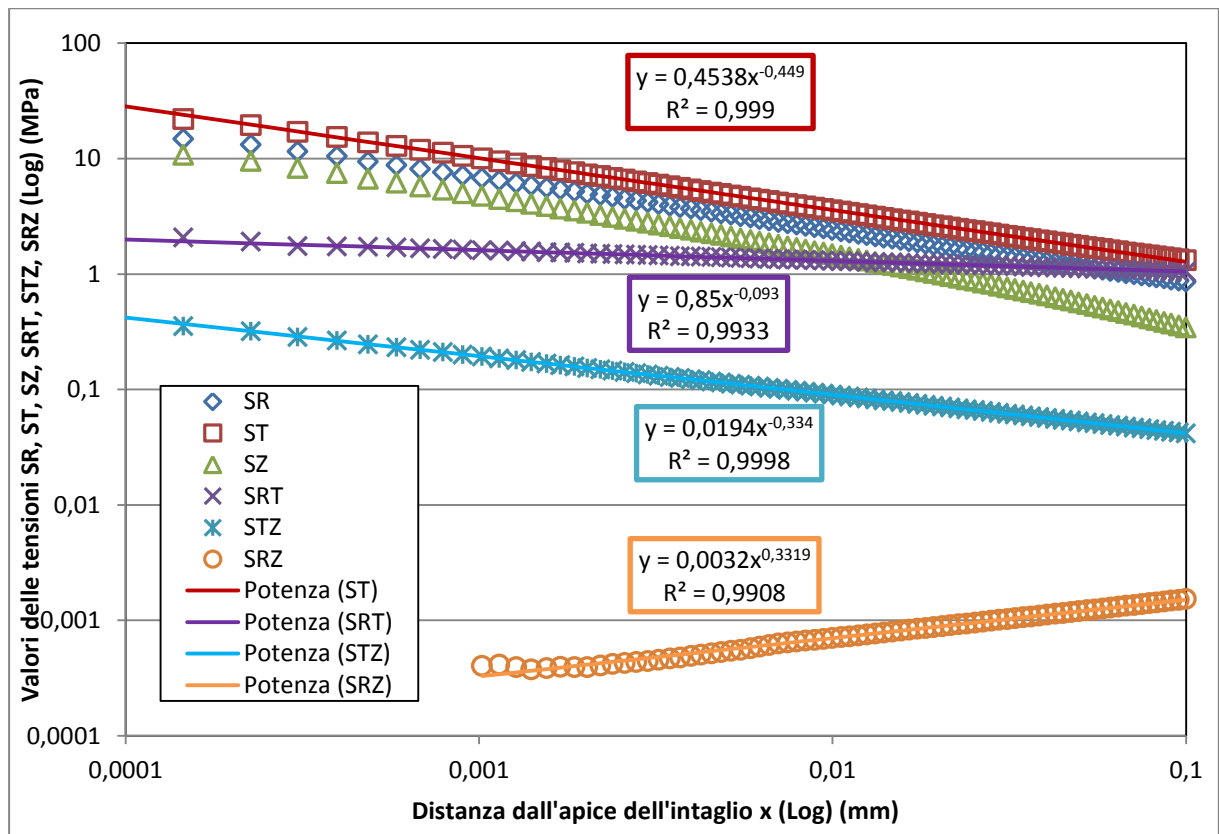


Figura 6.11 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 2$ mm

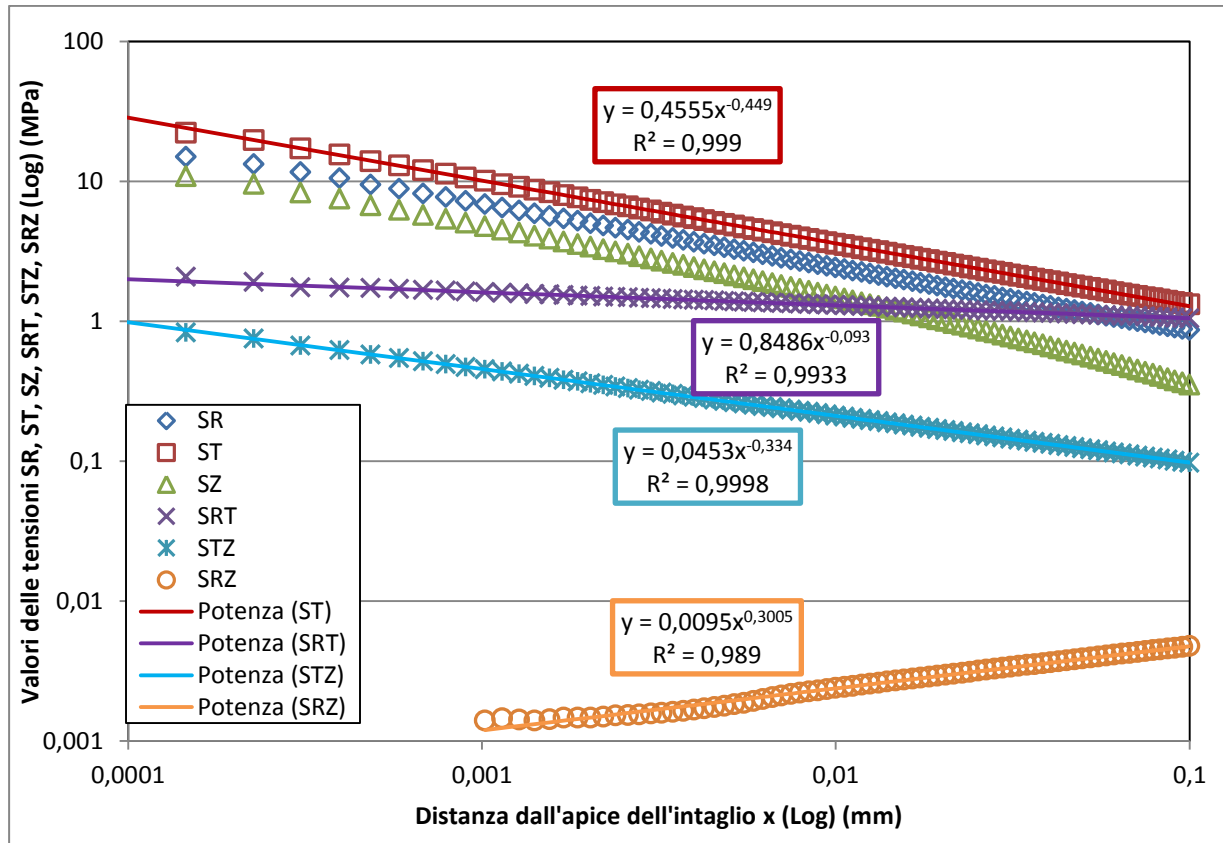


Figura 6.12 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 3$ mm

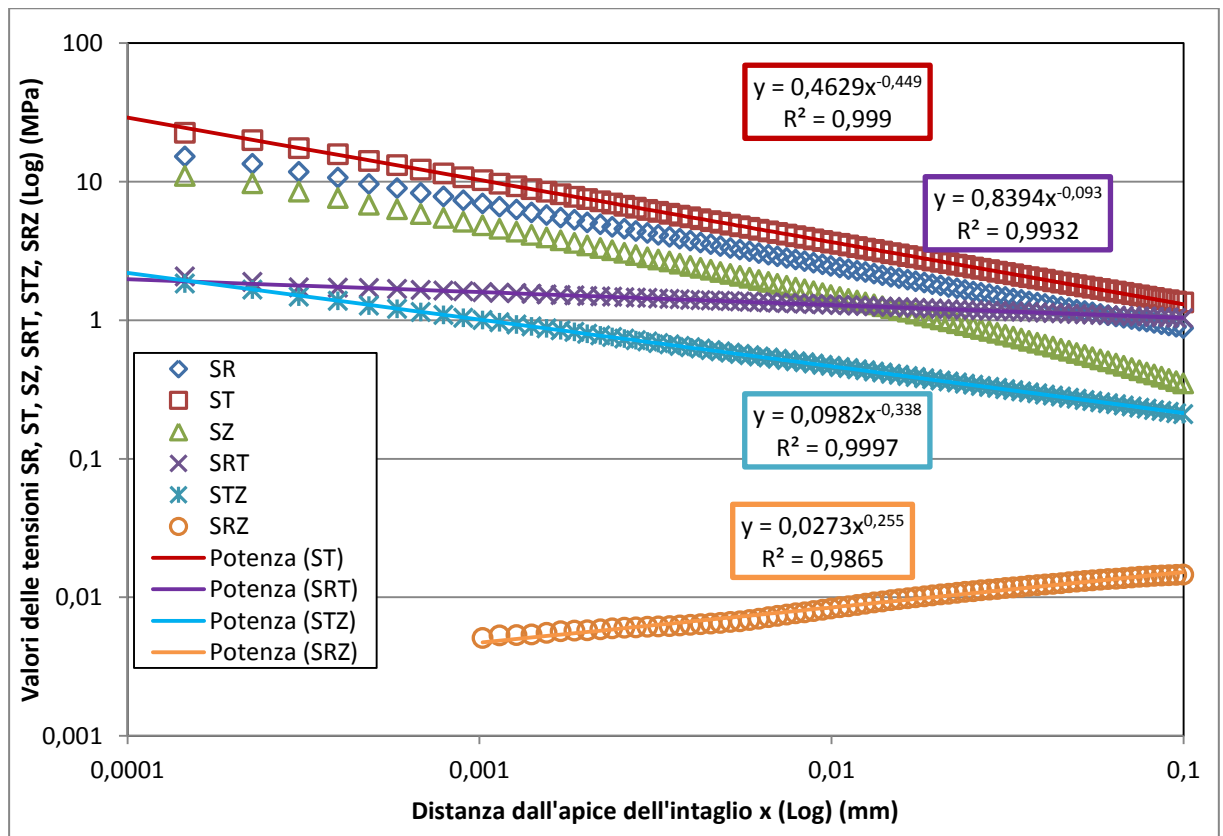


Figura 6.13 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 4$ mm

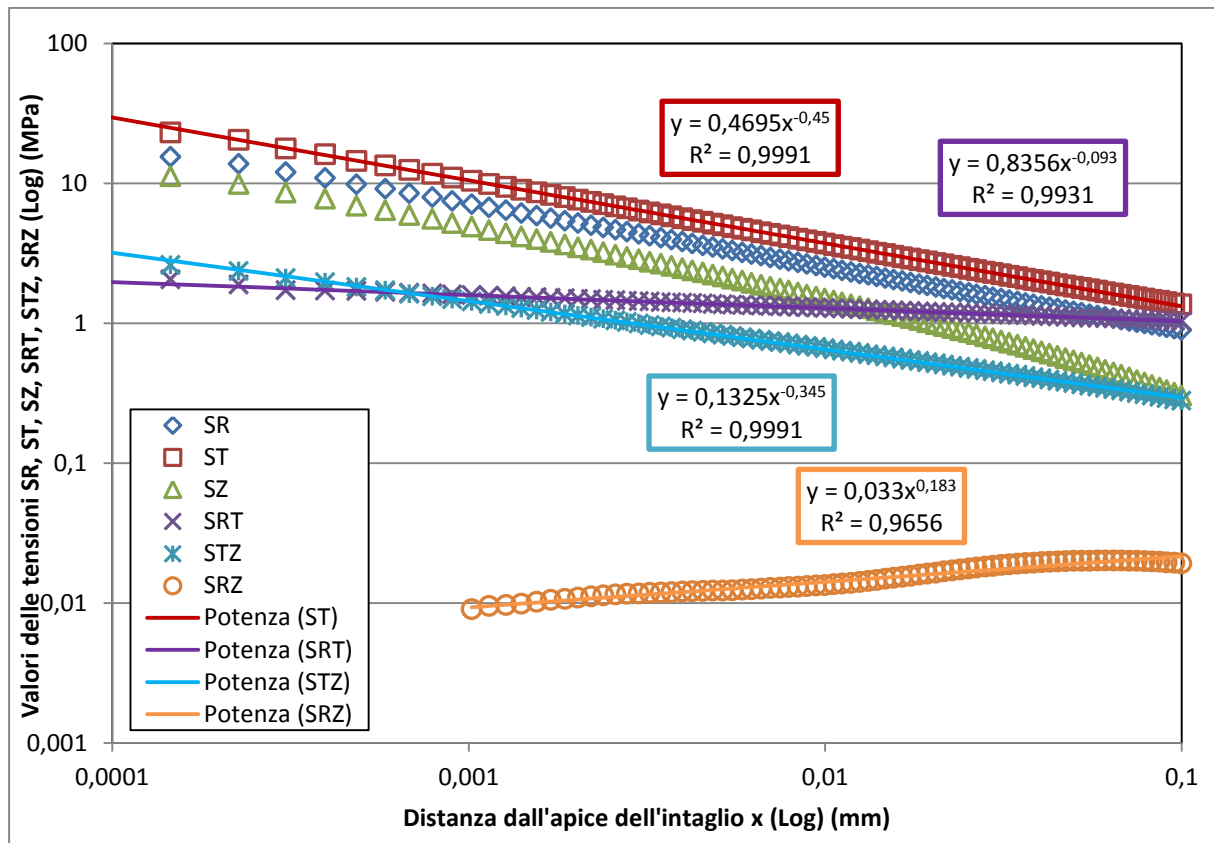


Figura 6.14 Andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 4.5$ mm

Nella Tab. 6.2 si può notare come il grado di singolarità delle tensioni nelle diverse sezioni sia molto prossimo a quello teorico, presentando errori limitati. Nella trattazione che seguirà si ritiene pertanto di poter utilizzare i gradi di singolarità previsti dalla teoria. Si ricorda inoltre come la trattazione non considererà la zona adiacente alla superficie libera (nello specifico il primo millimetro di materiale da tale superficie), non sapendo descrivere ciò che accade in tale regione.

Tabella 6.2 Confronto tra i gradi di singolarità di modo I, modo II e modo III teorici e ottenuti dal FEM

SEZIONE	Grado di singolarità	Teorico	FEM	Errore percentuale [%]
z=0 mm	(1- λ_1)	0.455	0.449	- 1.3
	(1- λ_2)	0.092	0.092	0
	(1- λ_3)	0.333	τ_{yz} nulle	*
z=1 mm	(1- λ_1)	0.455	0.449	- 1.3
	(1- λ_2)	0.092	0.092	0
	(1- λ_3)	0.333	0.334	0.3
z=2 mm	(1- λ_1)	0.455	0.449	- 1.3
	(1- λ_2)	0.092	0.093	1.1
	(1- λ_3)	0.333	0.334	0.3
z=3 mm	(1- λ_1)	0.455	0.449	- 1.3
	(1- λ_2)	0.092	0.093	1.1
	(1- λ_3)	0.333	0.334	0.3
z=4 mm	(1- λ_1)	0.455	0.449	- 1.3
	(1- λ_2)	0.092	0.093	1.1
	(1- λ_3)	0.333	0.338	1.5
z=4.5 mm	(1- λ_1)	0.455	0.450	- 1.1
	(1- λ_2)	0.092	0.093	1.1
	(1- λ_3)	0.333	0.345	3.6

6.3.3 N-SIFs calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson

La fittezza della mesh realizzata permette il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando le definizioni di Gross e Mendelson, qui richiamate:

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_1} \quad (6.2)$$

$$K_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{r\theta})_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_2} \quad (6.3)$$

$$K_0 (= K_3) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{z\theta})_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_3} \quad (6.4)$$

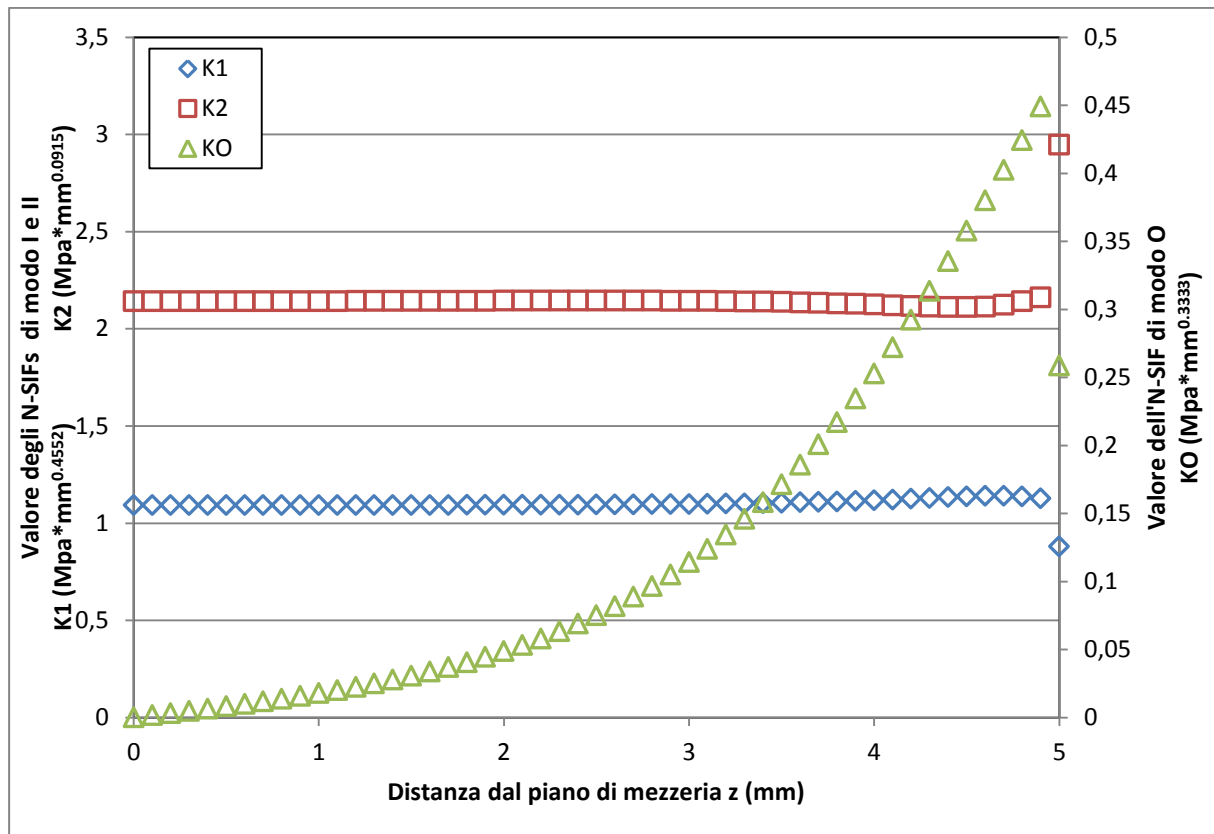


Figura 6.15 Andamento dei fattori di intensificazione delle tensioni lungo la coordinata z

Si nota come il fattore di intensificazione di modo III cresce avvicinandosi alla superficie libera, mentre gli N-SIFs di modo II e modo III sono approssimativamente costanti per quasi tutto lo spessore del provino. Si ribadisce tuttavia come non si consideri il primo millimetro di spessore adiacente alla superficie libera, non essendo presente un infittimento della mesh adeguato rispetto alle dimensioni della piastra per poter cogliere con soddisfacente precisione gli effetti che si hanno per il *corner point* e non essendo ancora chiaro ciò che accade in tale zona.

6.3.4 SED totale, deviatorico e idrostatico

Si riporta in Fig. 6.16 il valore della densità di energia di deformazione totale, deviatorica e idrostatica ricavata dal codice di calcolo agli elementi finiti per i due volumi di controllo cilindrici considerati per ciascun *layer* di elementi che costituisce la mesh della piastra. Si ricorda che l'altezza di ciascun *layer*, cioè l'altezza di ciascun cilindro che costituisce il volume di controllo, vale $h = 0.1 \text{ mm}$, mentre i raggi dei volumi di controllo valgono $R_a = 0.1 \text{ mm}$ e $R_b = 0.075 \text{ mm}$. Il valore del SED ricavato per ciascun strato di elementi è considerato rappresentativo della sezione media di tale strato (Par. §3.5.4).

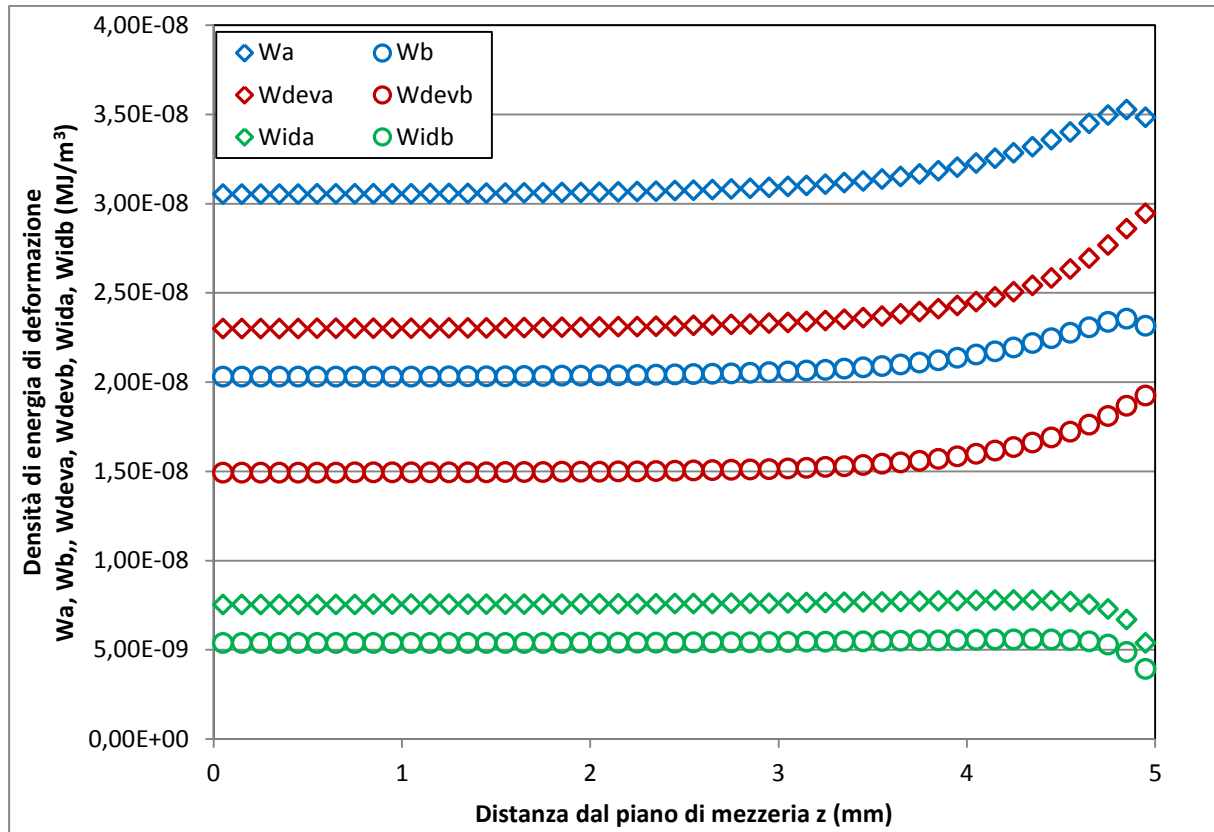


Figura 6.16 Densità di energia di deformazione totale, deviatorica e idrostatica all'interno dei volumi di controllo cilindrici di raggio R_a e R_b lungo la coordinata z

Si nota come la densità di energia di deformazione totale, deviatorica e idrostatica presenti il medesimo andamento per entrambi i volumi di controllo. La densità di energia di deformazione idrostatica, indipendente dal modo O, è circa costante per la quasi totalità dello spessore della piastra, mentre le densità di energia di deformazione totale e deviatorica, dipendendo dal valore del modo O, presentano variazioni lungo la coordinata z , pur contenute per buona parte dello spessore a partire dal piano di mezzeria, ovvero all'interno della zona nella quale il valore dell'N-SIF di modo O è veramente contenuto. Si ribadisce come non si ritiene opportuno eseguire alcuna osservazione riguardante i valori della densità di energia di deformazione totale, deviatorica ed idrostatica nelle immediate vicinanze della superficie libera.

6.4 Calcolo degli N-SIFs a partire dal SED totale e deviatorico

Dopo aver ottenuto gli N-SIFs con le definizioni di Gross e Mendelson, si è impostato il sistema riportato precedentemente per il calcolo degli N-SIFs mediante utilizzo dei valori della densità di energia di deformazione ricavati dal modello agli elementi finiti. Per una maggior chiarezza, si riporta nuovamente il sistema di equazioni utilizzato.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{W_{a,FEM}} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \overline{W_{b,FEM}} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_b^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \overline{W_{a,dev,FEM}} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Si ricorda che si utilizza in questo primo approccio l'ipotesi di deformazione piana all'interno del volume di controllo (*constraint factor* $C_z = 1$). Con tale ipotesi, il valore degli integrali I_1 , I_2 , I_3 , $I_{1,dev}$, $I_{2,dev}$, e $I_{3,dev}$, le cui espressioni sono riportate nel Cap. §2 e nell'App. §A5 assieme ai valori che assumono in alcuni casi notevoli, sono:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.750232 \\ I_2 &= 1.437930 \\ I_3 &= 1.950000 \\ I_{1,dev} &= 0.482398 \\ I_{2,dev} &= 1.474620 \\ I_{3,dev} &= 2.250000 \end{aligned}$$

Il sistema è stato risolto mediante utilizzo del software Wolfram Mathematica[®] 9.

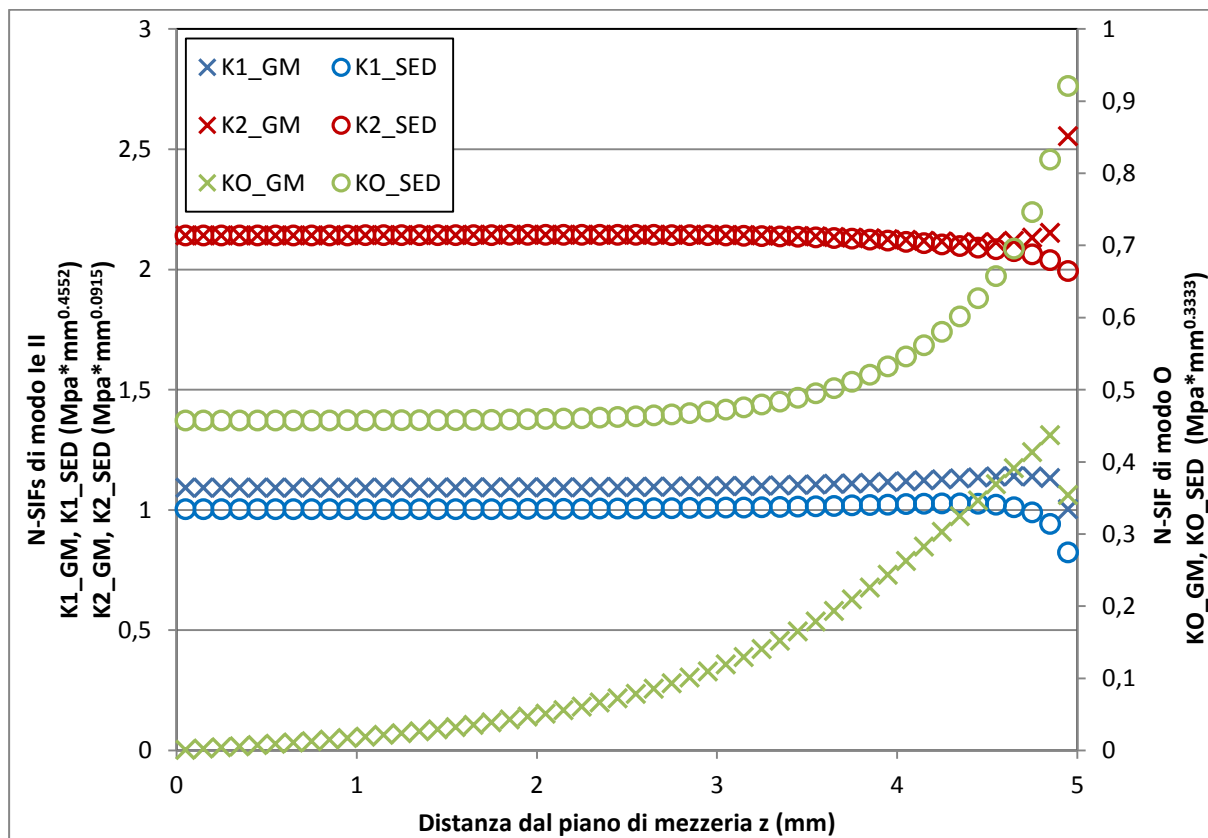


Figura 6.17 Andamento dei fattori di intensificazione delle tensioni calcolati con il metodo energetico e con le definizioni di Gross e Mendelson

Nel diagramma riportato in Fig. 6.17 si può apprezzare il confronto tra i fattori di intensificazione delle tensioni calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson (K_{i_GM}) e utilizzando il SED (K_{i_SED}).

Si nota come il valore di K_2 calcolato con le due differenti modalità è praticamente coincidente per gran parte dello spessore della piastra, ed in particolare nella zona tra $z = 0 \text{ mm}$ (piano di mezzeria) e $z = 4 \text{ mm}$ (ad 1 mm di distanza dalla superficie libera), ovvero la zona considerata per l'applicazione del metodo senza la presenza di effetti perturbanti dovuti alla superficie libera.

Per l'N-SIF di modo I, K_1 , e di modo III o modo O, K_0 , è presente invece un errore sensibile anche in tale regione. Si può notare che il metodo del SED riesce a cogliere, seppur in maniera non corretta, la crescita di K_0 con l'allontanamento dal piano di mezzeria.

Per verificare se tali errori dipendono da un'impostazione non corretta del sistema o da alcuni errori o limiti delle espressioni analitiche e delle ipotesi utilizzate, si è proceduto con il calcolo del SED totale e deviatorico all'interno dei volumi di controllo di raggio R_a e R_b utilizzando gli N-SIFs calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson, inseriti nelle espressioni analitiche del SED totale e deviatorico supponendo valida l'ipotesi di deformazione piana, e si è confrontato il valore ottenuto con il SED totale e deviatorico ricavato dal FEM (Fig. 6.18 e 6.19).

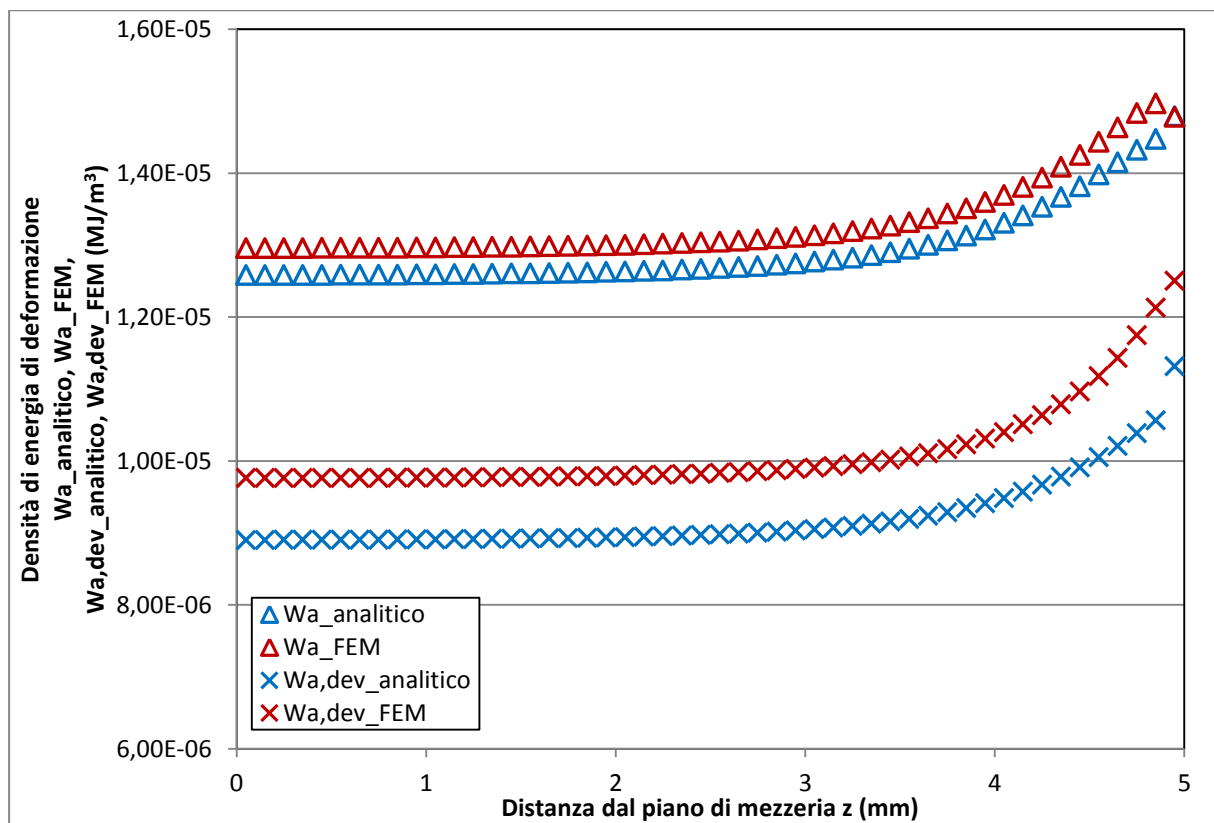


Figura 6.18 Confronto tra la densità di energia di deformazione totale e deviatorica calcolata analiticamente (utilizzando gli N-SIFs calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson) e ricavata dal FEM nei volumi di controllo di raggio R_a lungo la coordinata z

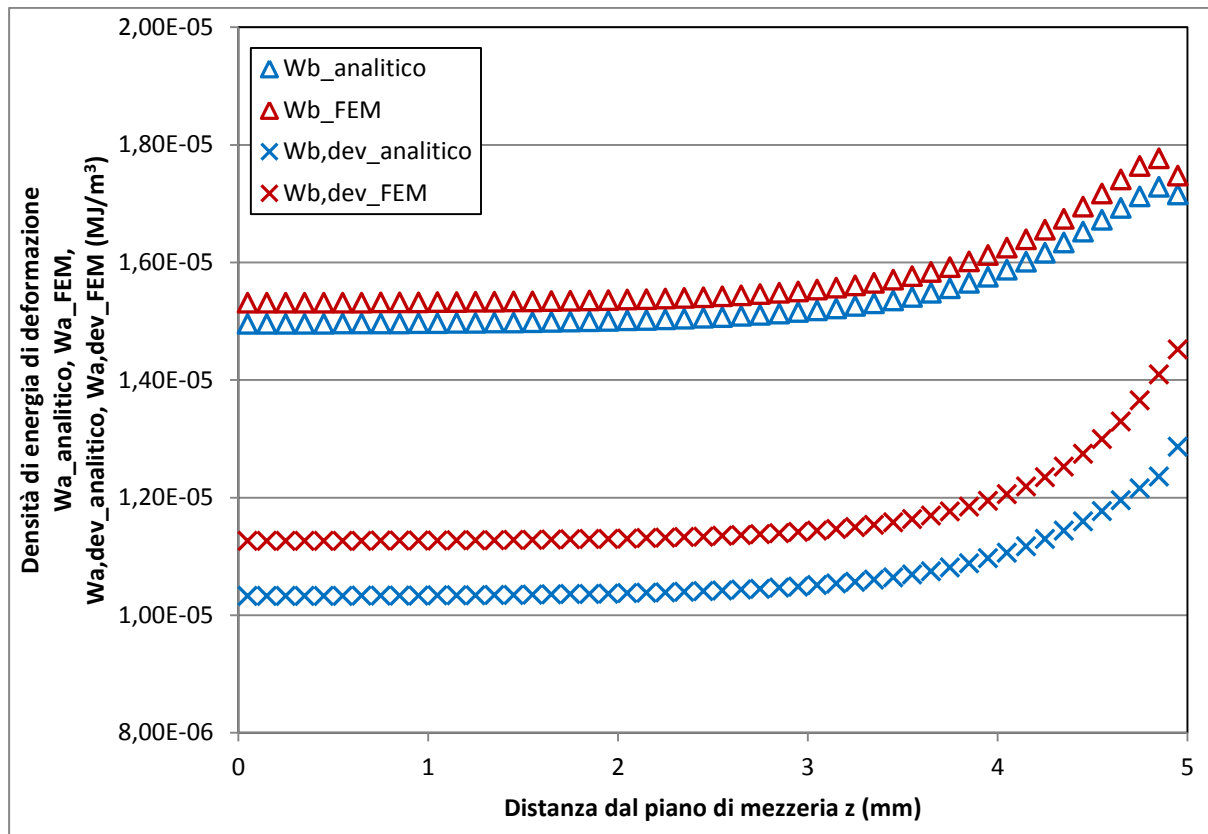


Figura 6.19 Confronto tra la densità di energia di deformazione totale e deviatorica calcolata analiticamente (utilizzando gli *N-SIFs* calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson) e ricavata dal FEM nei volumi di controllo di raggio R_b lungo la coordinata z

Si nota come sia per il SED totale che per quello deviatorico, tra le grandezze analitiche e le grandezze ricavate dal FEM si ha la presenza di un errore che sembra essere quasi costante nell'intero spessore del provino, specialmente nella regione tra $z = 0 \text{ mm}$ e $z = 4 \text{ mm}$, oggetto della trattazione. Tale errore appare essere più elevato per il SED deviatorico. Essendo state entrambe le grandezze calcolate con le espressioni analitiche della densità di energia di deformazione totale e deviatorica, utilizzando i valori di K_1 , K_2 e K_0 ricavati con le definizioni di Gross e Mendelson, si ipotizza che le sorgenti di tali errori debbano risiedere nelle espressioni analitiche stesse o nell'ipotesi considerata di deformazione piana all'interno del volume di controllo. Nelle sezioni che seguono, verrà proposto un intervento correttivo a tale metodo senza analizzare le possibili cause di errore nel calcolo del SED. Successivamente, verranno analizzate nel dettaglio le espressioni utilizzate per il calcolo della densità di energia di deformazione e per la descrizione delle tensioni, e verranno fatte alcune considerazioni sulla variabilità del *constraint factor* all'interno del volume di controllo.

6.5 Introduzione di una possibile correzione per il calcolo degli N-SIFs a partire dal SED totale e deviatorico

L'idea dell'approccio correttivo qui proposto origina dall'osservazione della quasi costanza dell'errore tra il valore del SED (totale o deviatorico) ricavato mediante il codice agli elementi finiti e quello calcolato analiticamente utilizzando i valori degli N-SIFs calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson. Si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \overline{W_{a,FEM}} &= \overline{W_a}^* + \Delta\overline{W_a} \\
 \overline{W_{b,FEM}} &= \overline{W_b}^* + \Delta\overline{W_b} \\
 \overline{W_{a,dev,FEM}} &= \overline{W_{a,dev}}^* + \Delta\overline{W_{a,dev}} \\
 \overline{W_{b,dev,FEM}} &= \overline{W_{b,dev}}^* + \Delta\overline{W_{b,dev}}
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Le grandezze $\Delta\overline{W_a}$, $\Delta\overline{W_b}$, $\Delta\overline{W_{a,dev}}$ e $\Delta\overline{W_{b,dev}}$ rappresentano la differenza tra i valori del SED ricavati dal codice di calcolo e quelli ottenuti analiticamente (rappresentano quindi l'errore del calcolo analitico).

Se queste fossero note, sarebbe possibile ottenere i valori delle grandezze $\overline{W_a}^*$, $\overline{W_b}^*$, $\overline{W_{a,dev}}^*$ e $\overline{W_{b,dev}}^*$, che coinciderebbero esattamente con i valori ottenuti mediante utilizzo della formulazione analitica. E' lecito supporre che utilizzando tre di queste quattro grandezze in un sistema simile a quello considerato per il metodo precedentemente descritto, si otterrebbero esattamente gli N-SIFs ottenuti con le definizioni di Gross e Mendelson.

Il problema che ora si pone è quello di trovare un valore plausibile degli errori da utilizzare per ricavare le grandezze $\overline{W_a}^*$, $\overline{W_b}^*$, $\overline{W_{a,dev}}^*$ e $\overline{W_{b,dev}}^*$. Sebbene gli errori appaiano circa costanti per tutto lo spessore del provino, le relazioni sopra scritte sono vere puntualmente, sezione per sezione. Si sottolinea in questo caso la quasi costanza di tali errori entro una distanza di circa 3,5 mm dal piano di mezzeria della piastra (Fig. 6.20).

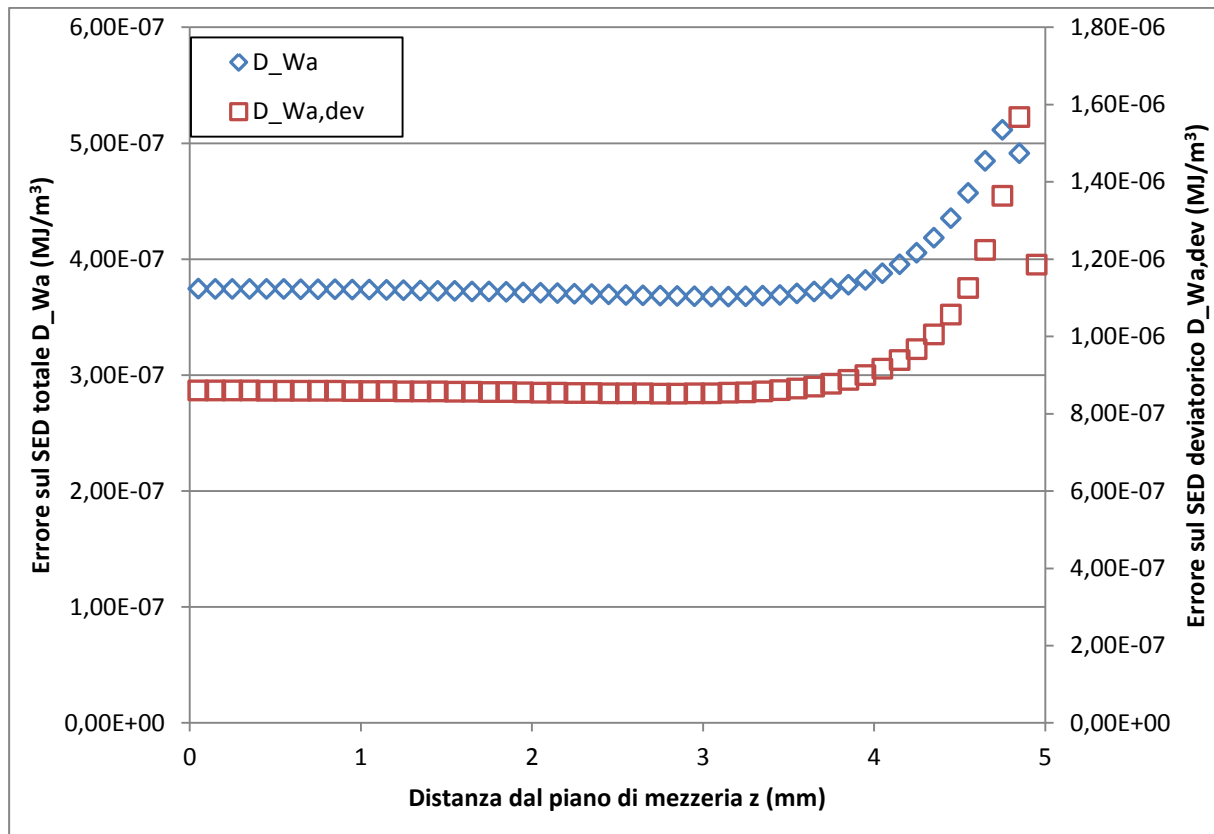


Figura 6.20 Errore commesso calcolando il SED totale o deviatorico analiticamente rispetto alle medesime grandezze ricavate dal FEM nei volumi di controllo cilindrici di raggio R_a lungo la coordinata z

Per poter applicare la correzione proposta, gli errori $\Delta\overline{W}_a$, $\Delta\overline{W}_b$, $\Delta\overline{W}_{a,dev}$ e $\Delta\overline{W}_{b,dev}$ verranno considerati costanti lungo tutto lo spessore del provino.

Per assegnare a tali grandezze un valore ritenuto plausibile, ci si baserà sulla seguente osservazione: nella sezione di mezzeria, si nota come gli N-SIFs di modo I e II siano praticamente coincidenti con il K_1 e K_2 ricavati per il caso della piastra bidimensionale con intaglio quadro, mentre il K_0 risulta nullo.

$$K_1|_{z=0\text{ mm}} = 1.092410 \text{ MPa} * \text{mm}^{0.4552}$$

$$K_2|_{z=0\text{ mm}} = 2.141161 \text{ MPa} * \text{mm}^{0.092}$$

$$K_1|_{2D} = 1.095376 \text{ MPa} * \text{mm}^{0.4552}$$

$$K_2|_{2D} = 2.142897 \text{ MPa} * \text{mm}^{0.092}$$

Si descrive pertanto in modo generale il procedimento da seguire per ricavare i fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando unicamente i valori della densità di energia di deformazione, applicando una correzione al metodo precedentemente proposto:

- si realizza un modello bidimensionale della piastra: per questo modello, si ricavano i valori di $K_1|_{2D}$ e $K_2|_{2D}$;
- si realizza il modello della piastra nelle tre dimensioni. Si pone $K_1|_{z=0\text{ mm}} = K_1|_{2D}$ e $K_2|_{z=0\text{ mm}} = K_2|_{2D}$. Si considerano tali valori costanti nel primo layer di elementi, e quindi coincidenti con la soluzione nella sezione di mezzeria del primo layer di elementi;
- si procede al calcolo analitico del SED nel primo layer di elementi (pedice 1), in particolare di \overline{W}_{a_1} , \overline{W}_{b_1} , \overline{W}_{a,dev_1} , considerando valida l'ipotesi di deformazione piana. Per tali elementi si pone:

$$\begin{aligned}\overline{W}_{a_1}^* &= \overline{W}_{a_1} \\ \overline{W}_{b_1}^* &= \overline{W}_{b_1} \\ \overline{W}_{a,dev_1}^* &= \overline{W}_{a,dev_1}\end{aligned}\tag{6.7}$$

- ottenuti i valori della densità di energia di deformazione totale e deviatorica dal codice agli elementi finiti per il primo layer di elementi (\overline{W}_{a,FEM_1} , \overline{W}_{b,FEM_1} e $\overline{W}_{a,dev,FEM_1}$), si procede con il calcolo degli errori tra le grandezze analitiche e le grandezze ottenute con gli EF mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\Delta\overline{W}_{a_1} &= \overline{W}_{a,FEM_1} - \overline{W}_{a_1}^* \\ \Delta\overline{W}_{b_1} &= \overline{W}_{b,FEM_1} - \overline{W}_{b_1}^* \\ \Delta\overline{W}_{a,dev_1} &= \overline{W}_{a,dev,FEM_1} - \overline{W}_{a,dev_1}^*\end{aligned}\tag{6.8}$$

- l'approssimazione che verrà ora introdotta è quella di considerare costanti tali valori degli errori per tutto lo spessore del provino:

$$\begin{aligned}\Delta\overline{W}_a &= \Delta\overline{W}_{a_1} \\ \Delta\overline{W}_b &= \Delta\overline{W}_{b_1} \\ \Delta\overline{W}_{a,dev} &= \Delta\overline{W}_{a,dev_1}\end{aligned}\tag{6.9}$$

- pertanto, per l' i -esimo *layer* di elementi, una volta ottenuti i valori di $\overline{W_{a,FEM_i}}$, $\overline{W_{b,FEM_i}}$ e $\overline{W_{a,dev,FEM_i}}$ dagli EF, si procederà nel modo seguente:

$$\overline{W_a^*}_i = \overline{W_{a,FEM_i}} - \Delta\overline{W_a}$$

$$\overline{W_b^*}_i = \overline{W_{b,FEM_i}} - \Delta\overline{W_b} \quad (6.10)$$

$$\overline{W_{a,dev}^*}_i = \overline{W_{a,dev,FEM_i}} - \Delta\overline{W_{a,dev}}$$

- gli N-SIFs $K_{1,i}$, $K_{2,i}$ e $K_{3,i} = K_{0,i}$ (per il layer i -esimo di elementi) verranno quindi ricavati risolvendo il sistema seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{W_a^*}_i = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_{1,i}^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_{2,i}^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_{3,i}^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \overline{W_b^*}_i = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_{1,i}^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_{2,i}^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_{3,i}^2}{R_b^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \overline{W_{a,dev}^*}_i = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_{1,i}^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_{2,i}^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_{3,i}^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \end{array} \right. \quad (6.11)$$

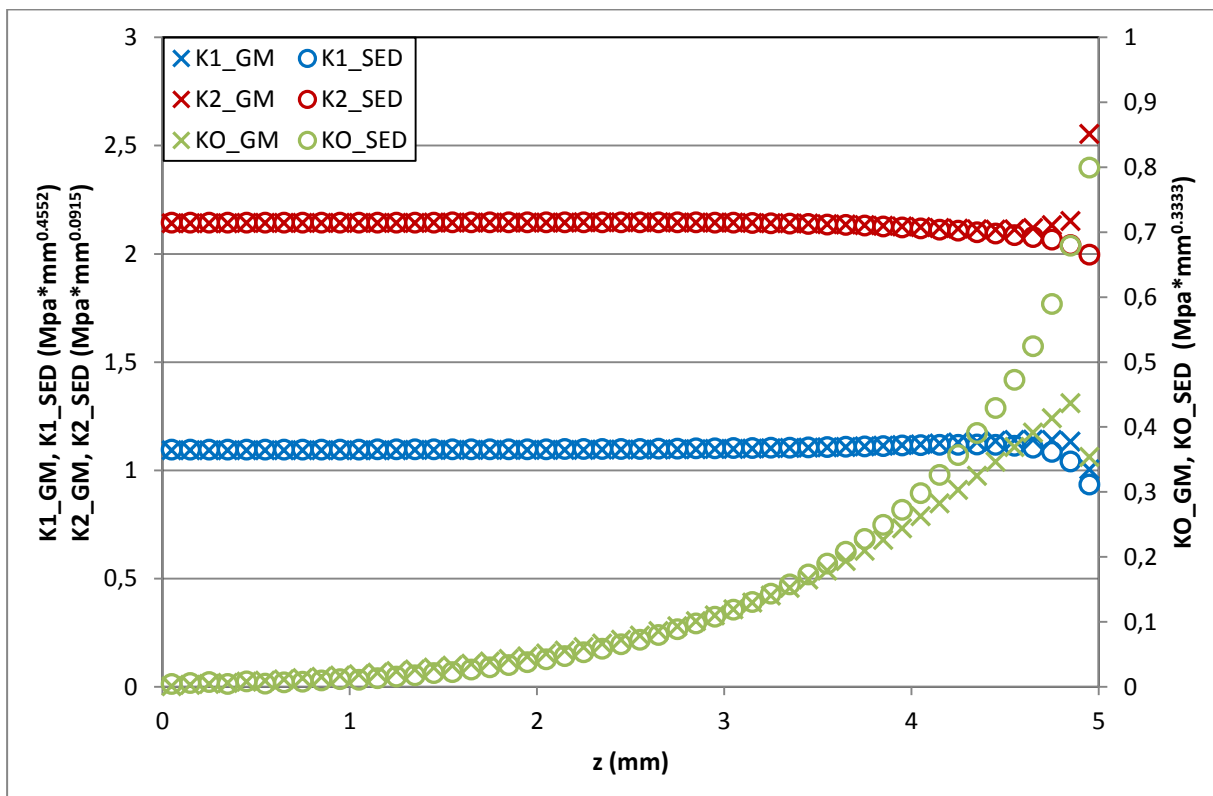


Figura 6.21 Andamento dei fattori di intensificazione delle tensioni calcolati con il metodo energetico applicando le correzioni proposte o con le definizioni di Gross e Mendelson

Come si può notare dalla Fig. 6.21 riportante i valori degli N-SIFs così ricavati e quelli calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson, tale metodo permette di ricavare con ottima approssimazione i valori di K_1 , K_2 e K_0 per più di metà dello spessore, fino ad una distanza di circa $z = 3.5 \text{ mm}$ dal piano di mezzeria. Nella regione compresa tra il piano di mezzeria e la coordinata $z = 4 \text{ mm}$, presa come riferimento per l'applicazione del metodo escludendo l'influenza della superficie libera, gli N-SIFs calcolati tramite utilizzo del SED corretto sono molto vicini a quelli calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson, presentando errori crescenti ma comunque contenuti solo nella parte terminale ($3.5 \text{ mm} < z < 4 \text{ mm}$). Per la regione adiacente alla superficie libera ($4 \text{ mm} < z < 5 \text{ mm}$), la discrepanza tra i valori degli N-SIFs calcolati nei due modi cresce, in particolare per il K_0 . Si noti come la regione in cui i fattori di intensificazione delle tensioni sono ottenuti con una buona approssimazione è quella in cui l'errore tra il SED (totale o deviatorico) calcolato con le espressioni analitiche utilizzando gli N-SIFs ricavati con le definizioni di Gross e Mendelson e quello ottenuto mediante il codice di calcolo agli elementi finiti si mantiene circa costante.

Il metodo correttivo proposto in questo paragrafo non mette in luce i fattori che portano ad una discrepanza tra la densità di energia di deformazione, totale o deviatorica, calcolata mediante la formulazione analitica e ottenuta tramite il codice di calcolo agli elementi finiti, fattori che verranno analizzati nelle prossime sezioni. L'applicazione di tale metodo correttivo richiede inoltre due condizioni:

- gli N-SIFs di modo I e II nel piano di mezzeria ($z = 0 \text{ mm}$) del componente 3D devono essere approssimativamente coincidenti con quelli ottenuti con un modello bidimensionale;
- l'errore tra i valori del SED calcolati analiticamente e quelli ottenuti con gli EF deve essere circa costante per buona parte dello spessore, e solo nella zona dove ciò si verifica la soluzione ottenuta con il criterio energetico corretto fornisce una valida approssimazione degli N-SIFs calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson.

Non si dispone tuttavia di sufficienti risultati numerici per poter affermare che la prima condizione sia sempre vera, e la seconda condizione appare presumibilmente più restrittiva e non individuabile a priori una volta assegnati la geometria del componente e i carichi che agiscono sullo stesso.

6.6 Analisi delle possibili fonti di errore per il calcolo degli N-SIFs mediante utilizzo del SED

Verranno ora analizzate le possibili cause della discrepanza tra i valori del SED calcolati analiticamente, usando i valori degli N-SIFs calcolati con Gross e Mendelson, e quelli ricavati direttamente dal codice di calcolo agli elementi finiti, per effetto della quale non è stato possibile ottenere i fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando la sola densità di energia di deformazione totale e deviatorica.

6.6.1 Introduzione del modo III simmetrico

Fino a questo punto della trattazione è stata considerata solo la componente antisimmetrica del modo III (o modo O), poiché solo questa componente risulta in un comportamento singolare, come osservato nel Par. §2.3. Tuttavia, è stato dimostrato come per alberi con spallamenti soggetti a torsione, assimilabili ad intagli con $2\alpha = 90^\circ$, al di fuori della bisettrice dell'intaglio la componente antisimmetrica della tensione $\tau_{\theta z}$ sia molto differente dalla componente totale, somma di un contributo antisimmetrico e simmetrico. [38] Si vuole ora comprendere se l'aver trascurato la componente simmetrica delle tensioni $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} possa essere la causa dell'errore nella valutazione della densità di energia di deformazione.

Tenendo conto del contributo del modo III simmetrico, la descrizione delle tensioni cambia solo per le seguenti componenti:

$$\begin{aligned}\tau_{zr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,a}}{r^{(1-\lambda_{3,a})}} \sin \lambda_{3,a} \theta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,s}}{r^{(1-\lambda_{3,s})}} \cos \lambda_{3,s} \theta \\ \tau_{z\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,a}}{r^{(1-\lambda_{3,a})}} \cos \lambda_{3,a} \theta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,s}}{r^{(1-\lambda_{3,s})}} \sin \lambda_{3,s} \theta\end{aligned}\tag{6.12}$$

Le espressioni dei termini σ_θ , σ_r , σ_z e $\tau_{r\theta}$ sono invariate rispetto al caso precedente. Ora, per il modo III il pedice a indicherà la componente antisimmetrica, mentre il pedice s indicherà la componente simmetrica.

Il nuovo termine introdotto per la scrittura delle componenti $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} provoca una variazione dell'espressione della densità di energia di deformazione fino a qui utilizzata. Utilizzando l'espressione generale del SED totale e inserendo le componenti di tensione, analogamente a quanto fatto in precedenza, si ottiene la seguente equazione:

$$\bar{W} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1(\gamma, \nu)}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2(\gamma, \nu)}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12}(\gamma, \nu)}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} + \frac{I_{3,a}(\gamma, \nu)}{2\lambda_{3,a}\gamma} \frac{K_{3,a}^2}{R^{2(1-\lambda_{3,a})}} \right. \\ \left. + \frac{I_{3,s}(\gamma, \nu)}{2\lambda_{3,s}\gamma} \frac{K_{3,s}^2}{R^{2(1-\lambda_{3,s})}} + \frac{I_{3,as}(\gamma, \nu)}{(\lambda_{3,a} + \lambda_{3,s})\gamma} \frac{K_{3,a} K_{3,s}}{R^{(2-\lambda_{3,a}-\lambda_{3,s})}} \right] \quad (6.13)$$

Gli integrali relativi al modo III valgono:

$$I_{3,a}(\gamma, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} (2(1+\nu)(\sin^2 \lambda_{3,a}\theta + \cos^2 \lambda_{3,a}\theta)) d\theta = \frac{2(1+\nu)}{\pi} \gamma$$

$$I_{3,s}(\gamma, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} (2(1+\nu)(\cos^2 \lambda_{3,s}\theta + \sin^2 \lambda_{3,s}\theta)) d\theta = \frac{2(1+\nu)}{\pi} \gamma$$

$$I_{3,as}(\gamma, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} (2(1+\nu)(\sin \lambda_{3,a}\theta \cos \lambda_{3,s}\theta - \cos \lambda_{3,a}\theta \sin \lambda_{3,s}\theta)) d\theta \\ = \frac{2(1+\nu)}{2\pi} \left[\frac{-\cos(\lambda_{3,a} - \lambda_{3,s})\theta}{\lambda_{3,a} - \lambda_{3,s}} \right]_{-\gamma}^{+\gamma} = 0 \quad (6.14)$$

Si evidenzia come $I_{3,as}(\gamma, \nu)$ risulti nullo per la simmetria del volume di controllo rispetto alla bisettrice dell'intaglio, mentre $I_{3,a}(\gamma, \nu)$ e $I_{3,s}(\gamma, \nu)$ abbiano la stessa espressione: verranno indicati quindi semplicemente come $I_3(\gamma, \nu)$.

Pertanto nell'ipotesi di deformazione piana e utilizzando un volume di controllo simmetrico rispetto alla bisettrice dell'intaglio, l'espressione si riduce a (si evita di riportare la dipendenza degli integrali da γ e ν):

$$\bar{W} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\gamma} \left(\frac{K_{3,a}^2}{\lambda_{3,a}R^{2(1-\lambda_{3,a})}} + \frac{K_{3,s}^2}{\lambda_{3,s}R^{2(1-\lambda_{3,s})}} \right) \right] \quad (6.15)$$

Analogamente, per il SED deviatorico si ottiene la seguente espressione:

$$\overline{W_{dev}} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}(\gamma, \nu)}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}(\gamma, \nu)}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,dev}(\gamma, \nu)}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right. \\ \left. + \frac{I_{3,a,dev}(\gamma, \nu)}{2\lambda_{3,a}\gamma} \frac{K_{3,a}^2}{R^{2(1-\lambda_{3,a})}} + \frac{I_{3,s,dev}(\gamma, \nu)}{2\lambda_{3,s}\gamma} \frac{K_{3,s}^2}{R^{2(1-\lambda_{3,s})}} \right. \\ \left. + \frac{I_{3,as,dev}(\gamma, \nu)}{(\lambda_{3,a} + \lambda_{3,s})\gamma} \frac{K_{3,a} K_{3,s}}{R^{(2-\lambda_{3,a}-\lambda_{3,s})}} \right] \quad (6.16)$$

Gli integrali relativi al modo III hanno ora i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
 I_{3,a,dev}(\gamma, \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} (3(\sin^2 \lambda_{3,a}\theta + \cos^2 \lambda_{3,a}\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \gamma \\
 I_{3,s,dev}(\gamma, \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} (3(\cos^2 \lambda_{3,s}\theta + \sin^2 \lambda_{3,s}\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \gamma \\
 I_{3,as,dev}(\gamma, \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} (3(\sin \lambda_{3,a}\theta \cos \lambda_{3,s}\theta - \cos \lambda_{3,a}\theta \sin \lambda_{3,s}\theta)) d\theta \\
 &= \frac{3}{2\pi} \left[\frac{-\cos(\lambda_{3,a} - \lambda_{3,s})\theta}{\lambda_{3,a} - \lambda_{3,s}} \right]_{-\gamma}^{+\gamma} = 0
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Si evidenzia anche per il SED deviatorico come $I_{3,as,dev}(\gamma, \nu)$ risulti nullo per la simmetria del volume di controllo rispetto alla bisettrice dell'intaglio, mentre $I_{3,a,dev}(\gamma, \nu)$ e $I_{3,s,dev}(\gamma, \nu)$ abbiano la stessa espressione: verranno indicati quindi come $I_{3,dev}(\gamma, \nu)$.

Nell'ipotesi di deformazione piana e utilizzando un volume di controllo simmetrico rispetto alla bisettrice dell'intaglio, l'espressione si riduce a:

$$\overline{W}_{dev} = \frac{(1 + \nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\gamma} \left(\frac{K_{3,a}^2}{\lambda_{3,a}R^{2(1-\lambda_{3,a})}} + \frac{K_{3,s}^2}{\lambda_{3,s}R^{2(1-\lambda_{3,s})}} \right) \right] \tag{6.18}$$

Si riportano le definizioni del fattore di intensificazione delle tensioni del modo III (o modo O) antisimmetrico e simmetrico, estendendo le definizioni di Gross e Mendelson:

$$K_{O,a}(= K_{3,a}) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{z\theta})_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_{3,a}} \tag{6.19}$$

$$K_{O,s}(= K_{3,s}) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\tau_{zr})_{\theta=0^\circ} r^{1-\lambda_{3,s}} \tag{6.20}$$

Si è quindi proceduto al calcolo, sezione per sezione, dell'N-SIF di modo III (o modo O) simmetrico. I risultati ottenuti sono riportati in Fig. 6.22.

Si nota come la componente simmetrica del modo III cresca avvicinandosi alla superficie libera. Tuttavia, per confrontare il peso del modo III simmetrico sul computo del SED con quello degli altri modi analizzati finora, si ritiene di maggior utilità visualizzare i contributi energetici dati da ciascun modo, utilizzando la formulazione analitica esposta in questa sezione e l'ipotesi di deformazione piana (Fig. 6.23 e 6.24, relative rispettivamente al SED totale e deviatorico nei volumi di controllo cilindrici di raggio R_a). Le componenti del modo tre, sia antisimmetrico che simmetrico, sono comunque indipendenti dal *constraint factor* C_z utilizzato, mentre i contributi energetici dei modi I e II crescono al diminuire del C_z , come verrà dimostrato nel successivo Par. §6.7.3.1.

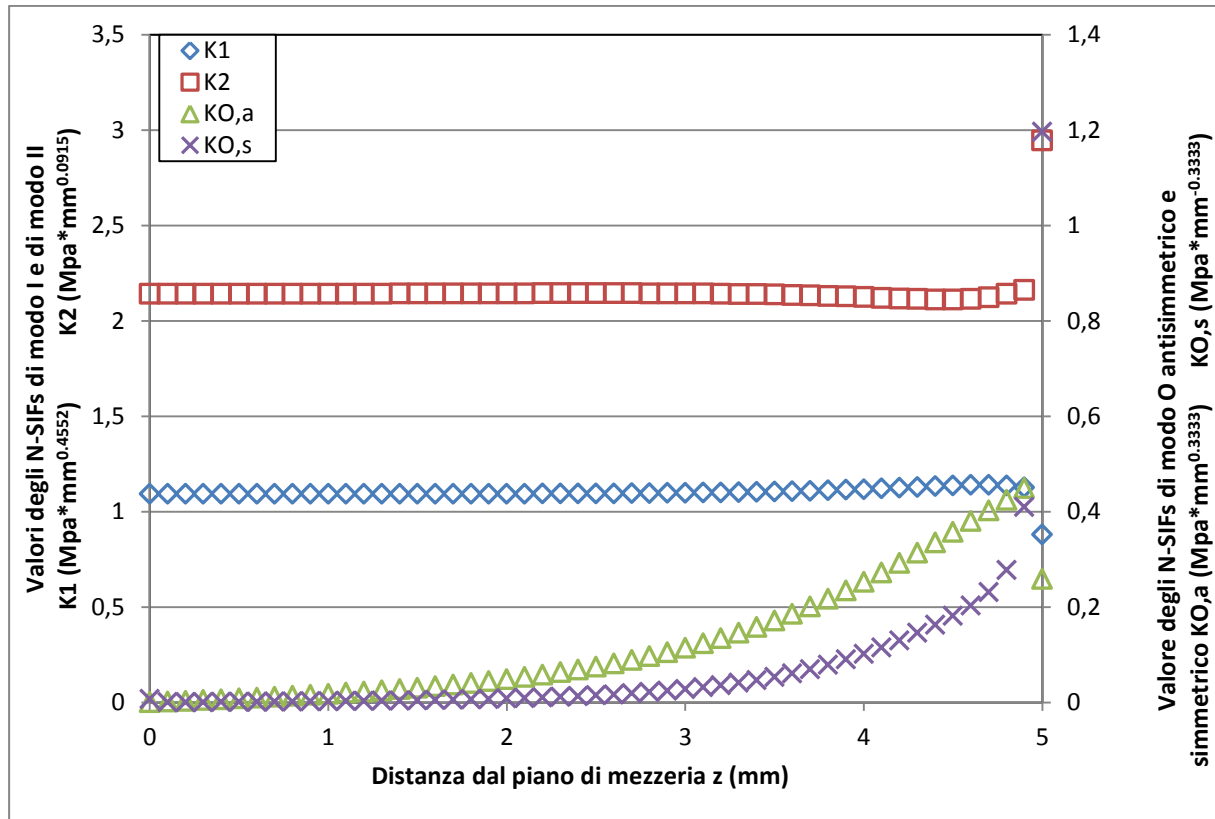


Figura 6.22 Andamento dei fattori di intensificazione delle tensioni lungo la coordinata z: introduzione del fattore di intensificazione delle tensioni di modo O simmetrico

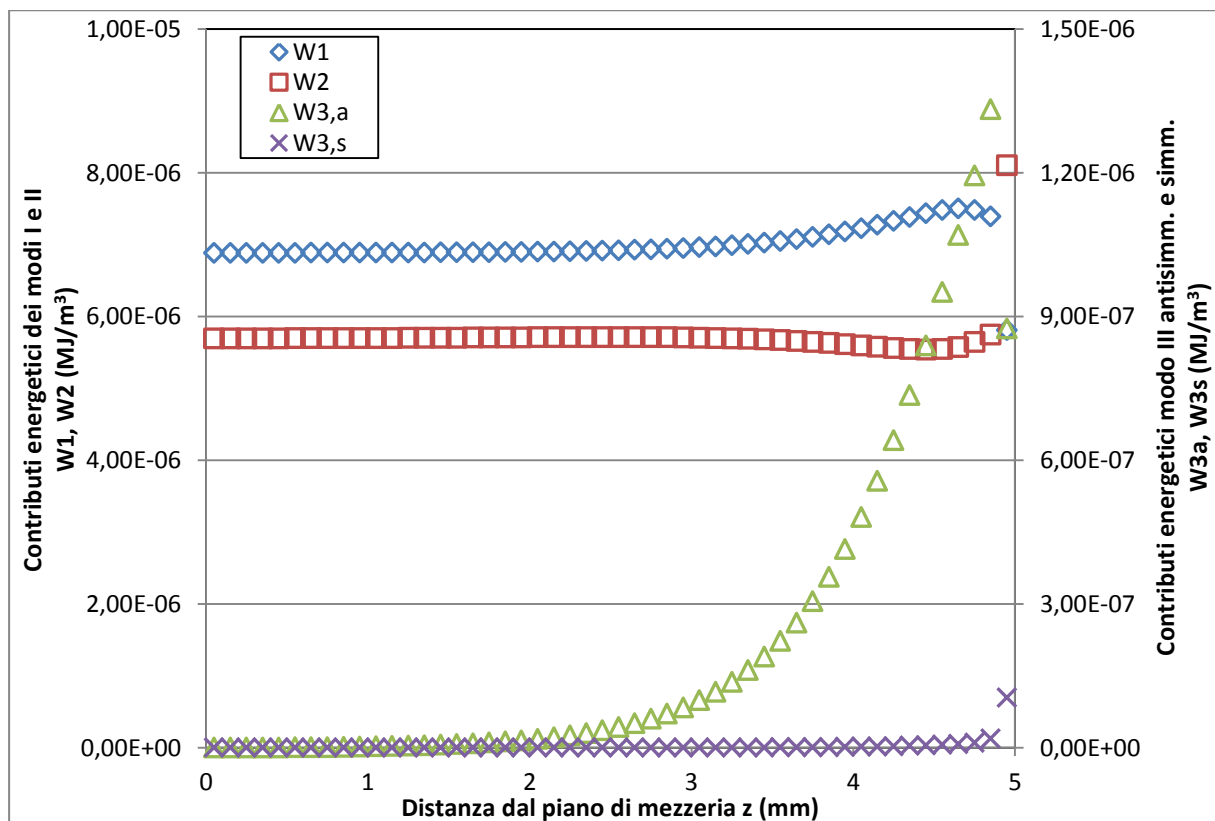


Figura 6.23 Contributi energetici dei modi I, II e III (antisimmetrico e simmetrico) nel computo del SED totale per i volumi di controllo di raggio R_a lungo la coordinata z

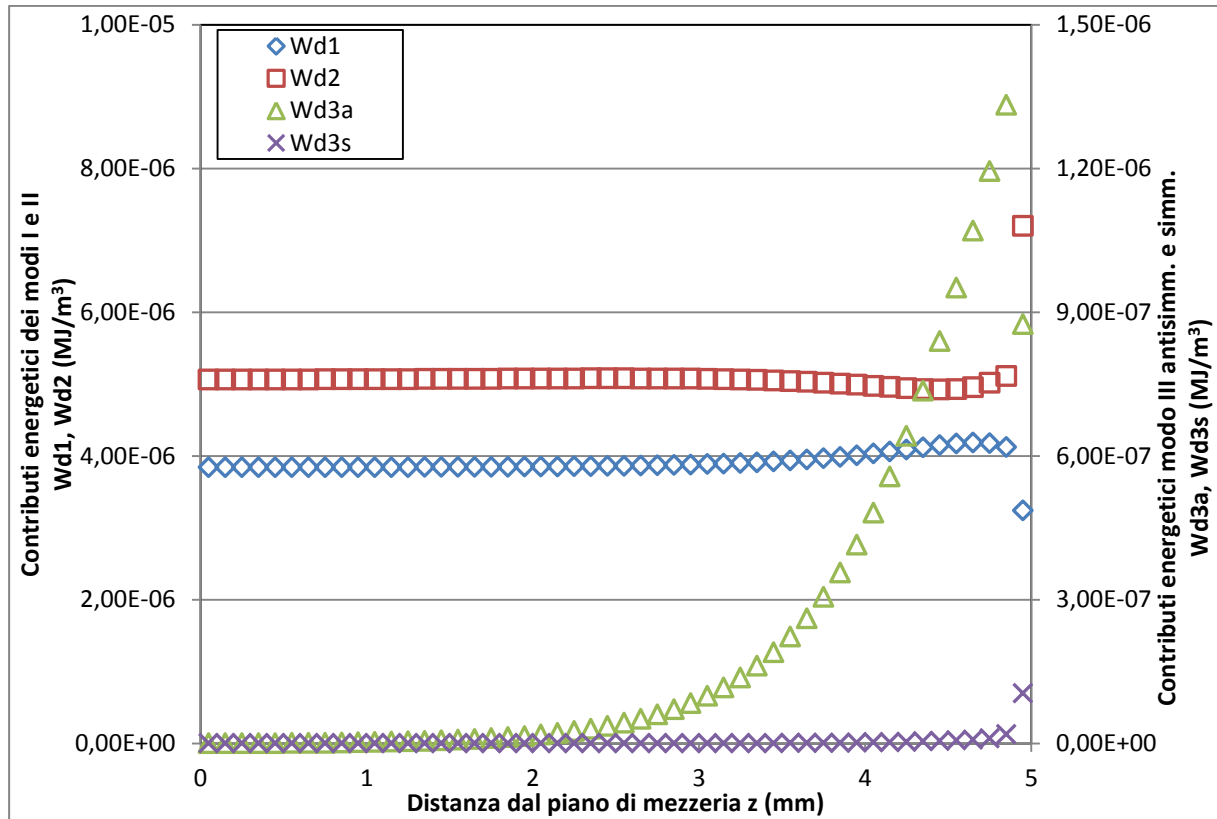


Figura 6.24 Contributi energetici dei modi I, II e III (antisimmetrico e simmetrico) nel computo del SED deviatorico per i volumi di controllo di raggio R_a lungo la coordinata z

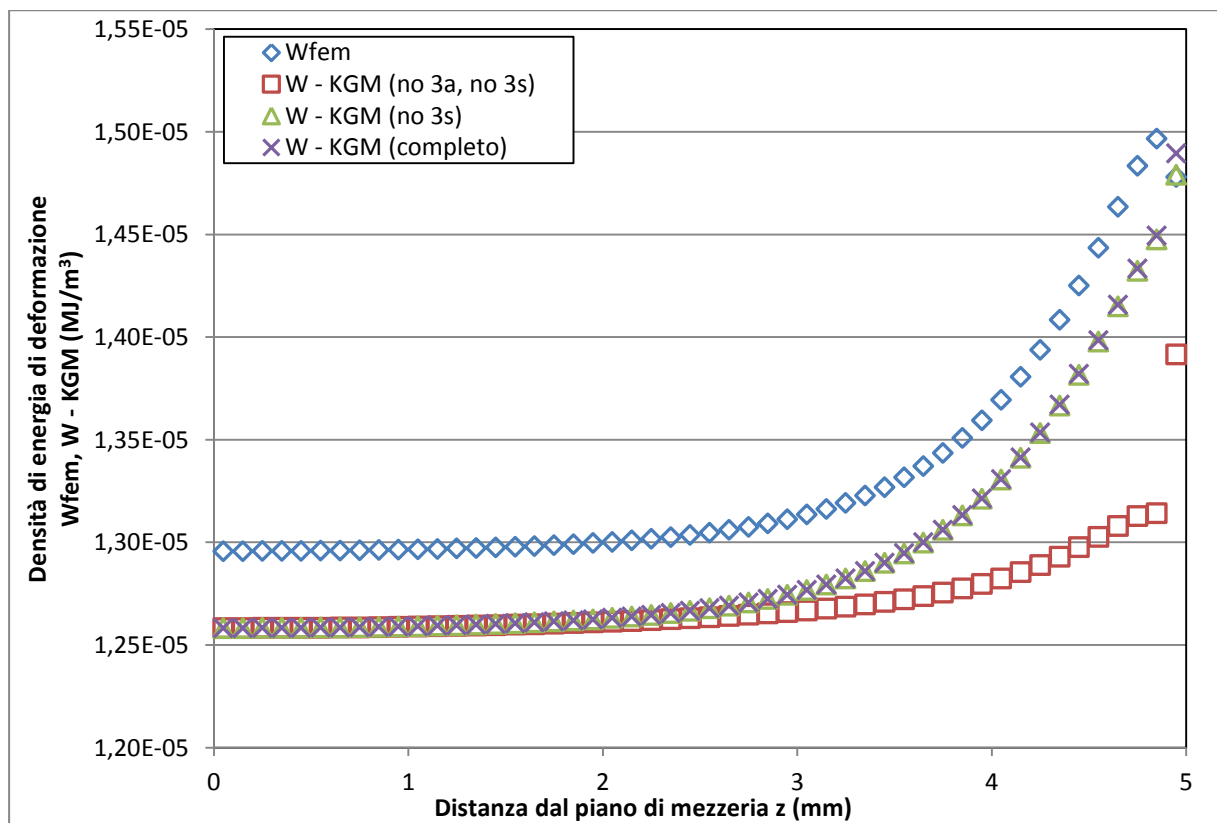


Figura 6.25 Confronto tra il valore del SED totale ricavato dal FEM e calcolato analiticamente trascurando o meno la presenza dei modi III antisimmetrico e simmetrico per i volumi di controllo di raggio R_a

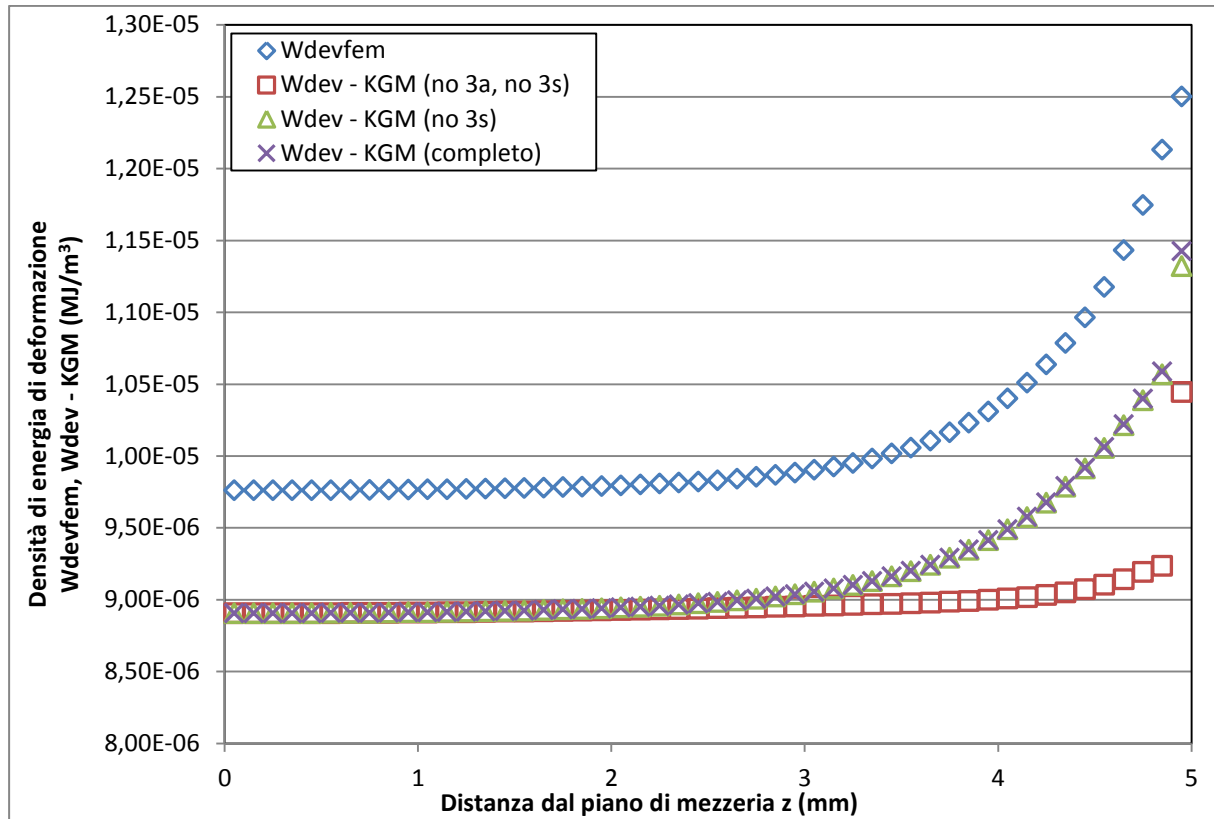


Figura 6.26 Confronto tra il valore del SED deviatorico ricavato dal FEM e calcolato analiticamente trascurando o meno la presenza dei modi III antisimmetrico e simmetrico per i volumi di controllo di raggio R_a

Nella Fig. 6.25 si riporta invece il valore del SED totale ricavato dal codice di calcolo (W_{fem}) o calcolato con gli N-SIFs ottenuti con le definizioni di Gross e Mendelson ($W - KGM$) trascurando la presenza del modo III antisimmetrico e simmetrico (*no 3a, 3s*), del solo modo III simmetrico (*no 3s*) o tenendo conto di entrambi i contributi (*completo*). La Fig. 6.26 è analoga alla precedente per il SED deviatorico.

Come si può notare osservando i contributi energetici di ciascun modo per il SED totale e deviatorico per il volume di controllo di raggio $R_a = 0.1 \text{ mm}$ (Fig. 6.23 e 6.24) e osservando poi il valore del SED ottenuto analiticamente considerando o meno i contributi di modo III (Fig. 6.25 e 6.26), risulta evidente come il contributo di modo III antisimmetrico rivesta un peso notevole nel calcolo del SED, mentre il contributo di modo III simmetrico possa essere trascurato.

Il fatto che l'introduzione del modo III simmetrico non porti ad un miglioramento del metodo per il calcolo degli N-SIFs basato sulla densità di energia di deformazione è risultato evidente provando comunque a risolvere il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{W}_a = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\gamma} \left(\frac{K_{3,a}^2}{\lambda_{3,a}R_a^{2(1-\lambda_{3,a})}} + \frac{K_{3,s}^2}{\lambda_{3,s}R_a^{2(1-\lambda_{3,s})}} \right) \right] \\ \overline{W}_b = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\gamma} \left(\frac{K_{3,a}^2}{\lambda_{3,a}R_b^{2(1-\lambda_{3,a})}} + \frac{K_{3,s}^2}{\lambda_{3,s}R_b^{2(1-\lambda_{3,s})}} \right) \right] \\ \overline{W}_{a,dev} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\gamma} \left(\frac{K_{3,a}^2}{\lambda_{3,a}R_a^{2(1-\lambda_{3,a})}} + \frac{K_{3,s}^2}{\lambda_{3,s}R_a^{2(1-\lambda_{3,s})}} \right) \right] \\ \overline{W}_{b,dev} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\gamma} \left(\frac{K_{3,a}^2}{\lambda_{3,a}R_b^{2(1-\lambda_{3,a})}} + \frac{K_{3,s}^2}{\lambda_{3,s}R_b^{2(1-\lambda_{3,s})}} \right) \right] \end{array} \right. \quad (6.21)$$

La soluzione di questo sistema non ha portato a miglioramenti delle soluzioni ottenute in precedenza, ma anzi a sottostimare in maniera importante gli N-SIFs di modo I e II e sovrastimare gli N-SIFs di modo III antisimmetrico e simmetrico.

6.6.2 Verifica delle espressioni utilizzate per descrivere le componenti di tensione

Si è quindi proceduto con il confronto tra le tensioni ricavate con le espressioni analitiche e le tensioni ottenute con il codice di calcolo.

Si è voluto procedere con tale confronto dopo aver notato come nella formulazione analitica del SED è presente l'accoppiamento tra i modi I e II e, se si tiene conto del modo III simmetrico, un accoppiamento tra i modi III antisimmetrico e simmetrico. Si era notato come tali termini risultino nulli nel caso particolare di volume di controllo simmetrico rispetto alla bisettrice dell'intaglio nell'ipotesi di costanza del *constraint factor*, poiché in questo caso si ha $I_{12} = 0$ e $I_{3,as} = 0$. Si può però ipotizzare la presenza di eventuali termini di accoppiamento tra i modi I o II e i termini del modo III, contributi che non si potrebbero porre nulli a priori. Si è osservato però che l'accoppiamento tra i modi I e II deriva dal fatto che le espressioni delle tensioni σ_θ , σ_r e $\tau_{r\theta}$ contengono un termine legato a K_1 e un termine legato a K_2 : poiché nella formulazione del SED le tensioni compaiono elevate al quadrato, il doppio prodotto tra i termini legati a K_1 e K_2 porta alla comparsa del termine misto. Analogamente, le espressioni delle tensioni $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} contengono un termine legato a $K_{3,a}$ e un termine legato a $K_{3,s}$, accoppiando così i modi III antisimmetrico e simmetrico. Pertanto la presenza di termini di accoppiamento tra i modi I o II e i modi III,s o III,a nell'espressione del SED dovrebbe essere causata dalla presenza di termini legati al modo III simmetrico o antisimmetrico nelle espressioni delle tensioni σ_θ , σ_r e $\tau_{r\theta}$ o di termini legati ai modi I o II nelle espressioni delle tensioni $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} : le espressioni fino a qui utilizzate per la descrizione delle componenti di tensione dovrebbero perciò rivelarsi inesatte.

Si richiamano ora le espressioni utilizzate per la descrizione delle tensioni e per ottenere la formulazione analitica della densità di energia di deformazione totale, deviatorica e idrostatica. Per il momento si trascurerà la componente di tensione σ_z , che sarà oggetto di discussione nel prossimo paragrafo.

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} \\
\sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \widetilde{\sigma}_r^{(2)} \\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \\
\tau_{zr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,a}}{r^{(1-\lambda_{3,a})}} \sin \lambda_{3,a} \theta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,s}}{r^{(1-\lambda_{3,s})}} \cos \lambda_{3,s} \theta \\
\tau_{z\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,a}}{r^{(1-\lambda_{3,a})}} \cos \lambda_{3,a} \theta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,s}}{r^{(1-\lambda_{3,s})}} \sin \lambda_{3,s} \theta
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Le funzioni angolari riportate valgono:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{pmatrix}^{(1)} &= \frac{1}{[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left[\begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{pmatrix} + \chi_1(1 - \lambda_1) \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{pmatrix} \right] \\
\begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{pmatrix}^{(2)} &= \frac{1}{[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]} \left[\begin{pmatrix} -(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ -(3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{pmatrix} + \chi_2(1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Avendo concluso che il modo III simmetrico è in questo caso di entità trascurabile, le espressioni delle componenti $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} considereranno la presenza del solo modo III antisimmetrico:

$$\begin{aligned}
\tau_{zr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,a}}{r^{(1-\lambda_{3,a})}} \sin \lambda_{3,a} \theta \\
\tau_{z\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{3,a}}{r^{(1-\lambda_{3,a})}} \cos \lambda_{3,a} \theta
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Il confronto tra le tensioni ottenute dal codice di calcolo agli elementi finiti e dalle espressioni riportate, utilizzando i valori degli N-SIFs ricavati con le definizioni di Gross e Mendelson, verrà eseguito per alcune sezioni all'interno della zona considerata per l'applicazione del metodo per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni a partire dal SED.

6.6.2.1 Sezione $z = 0 \text{ mm}$ (componenti $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} nulle)

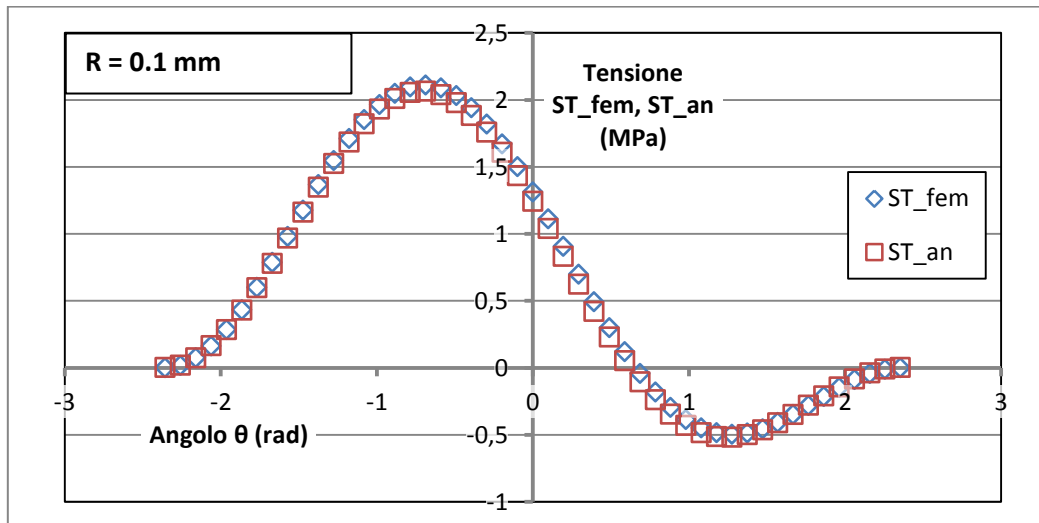


Figura 6.27 Confronto tra la tensione σ_{θ} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 0.0 \text{ mm}$)

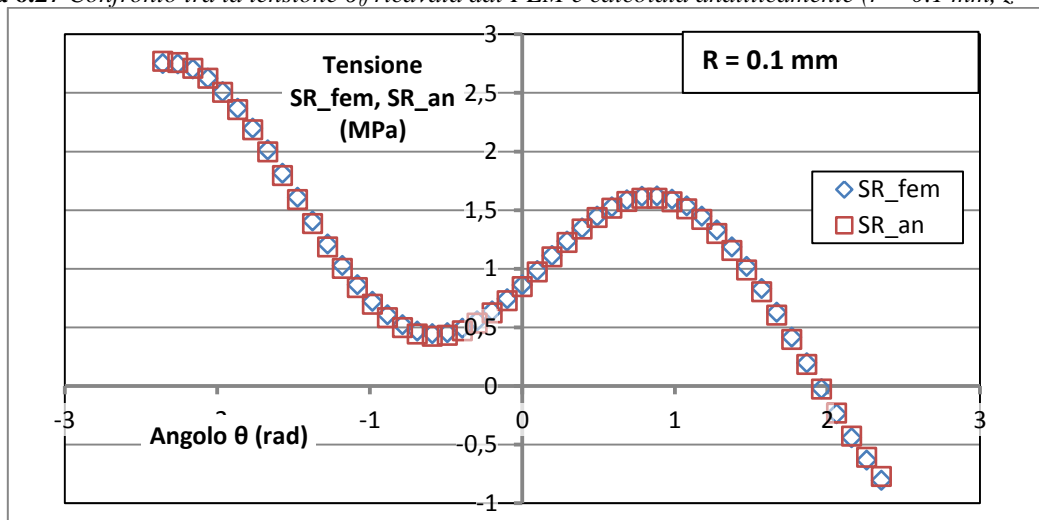


Figura 6.28 Confronto tra la tensione σ_r ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 0.0 \text{ mm}$)

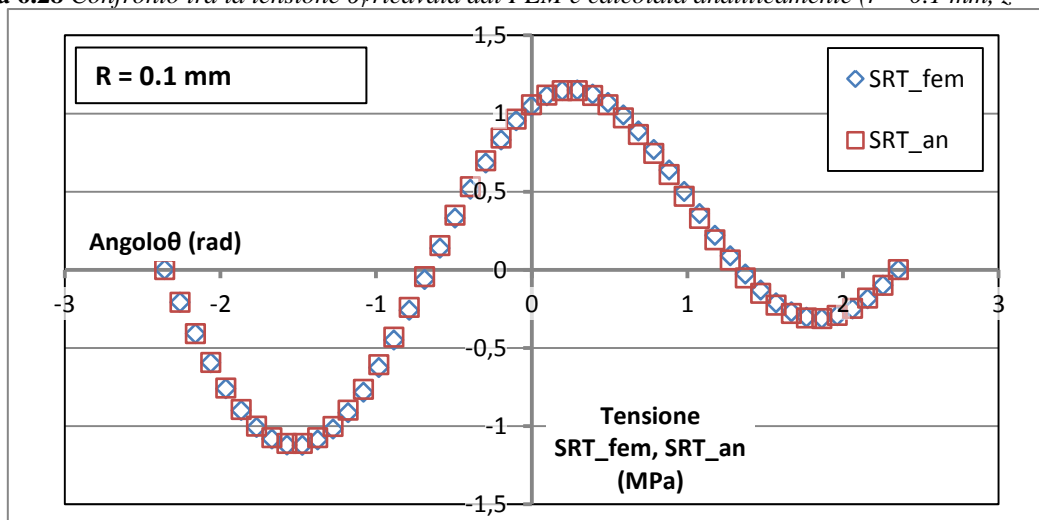


Figura 6.29 Confronto tra la tensione τ_{θ} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 0.0 \text{ mm}$)

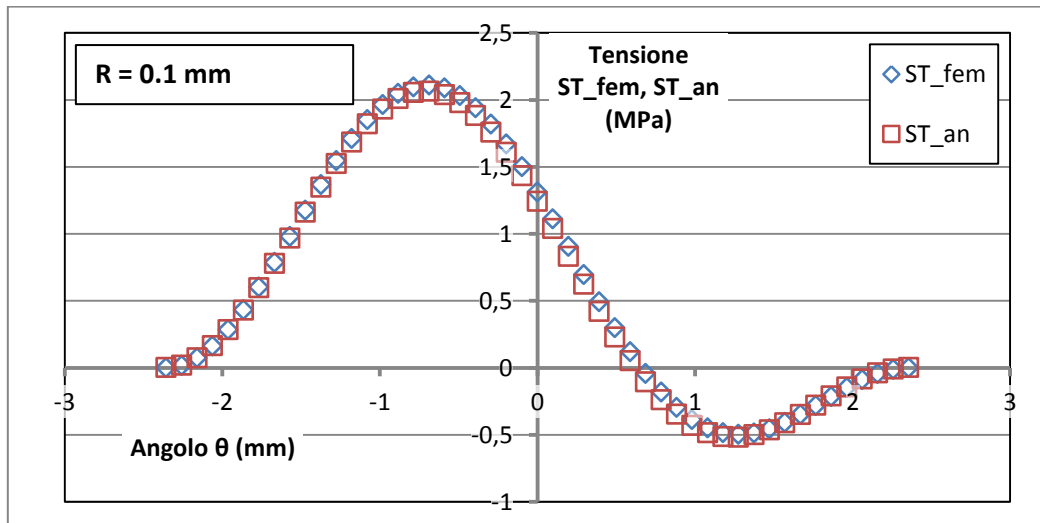
6.6.2.2 Sezione $z = 1 \text{ mm}$ 

Figura 6.30 Confronto tra la tensione σ_θ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 1.0 \text{ mm}$)

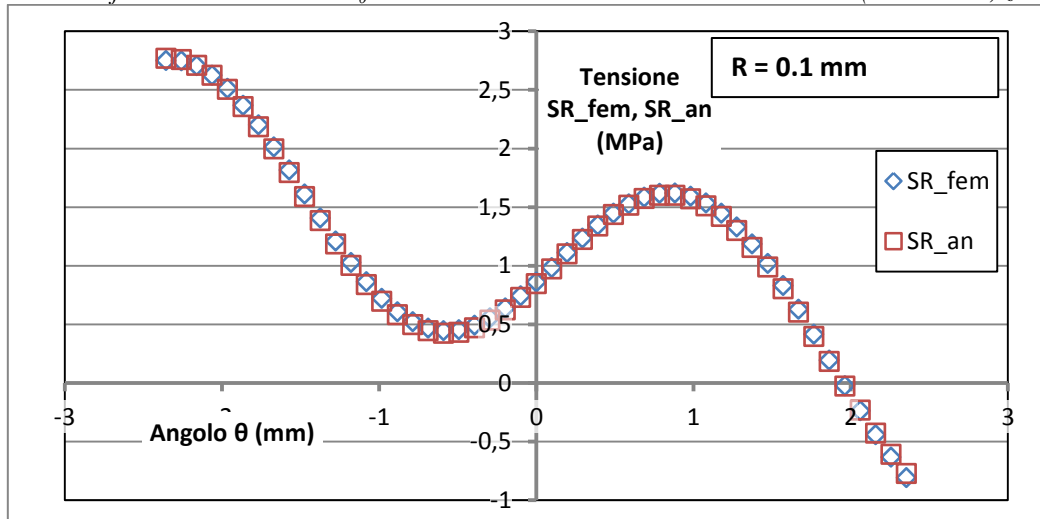


Figura 6.31 Confronto tra la tensione σ_r ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 1.0 \text{ mm}$)

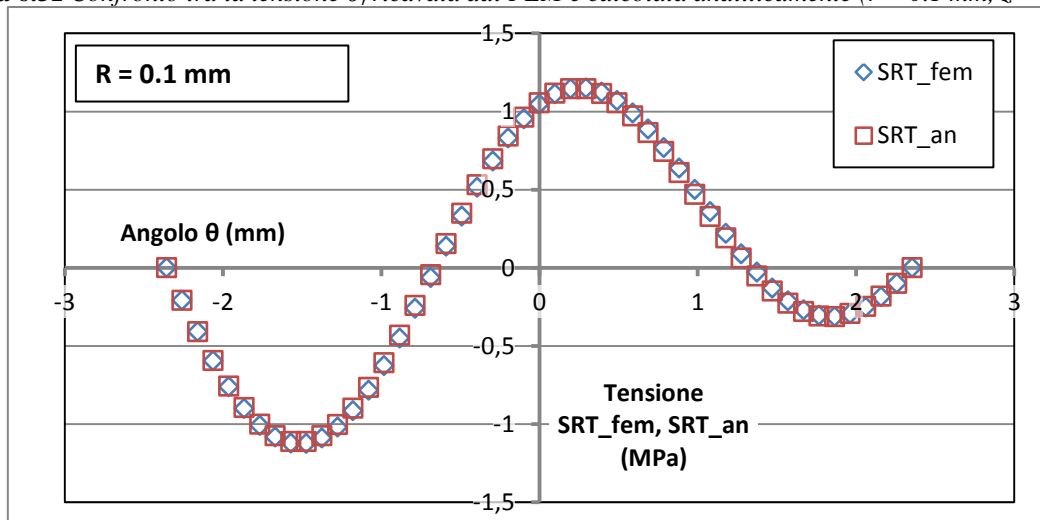


Figura 6.32 Confronto tra la tensione τ_{θ} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 1.0 \text{ mm}$)

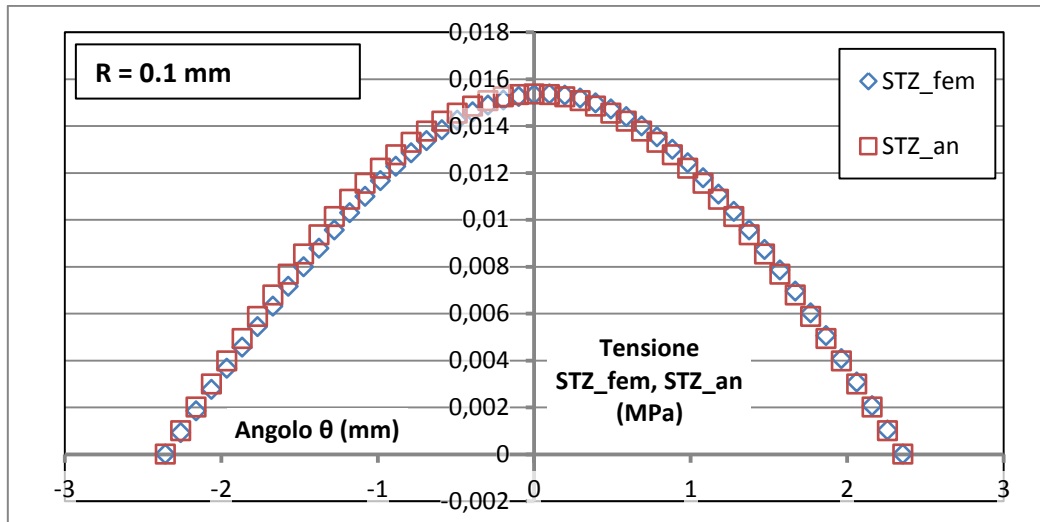


Figura 6.33 Confronto tra la tensione $\tau_{\theta z}$ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1$ mm, $z = 1.0$ mm)

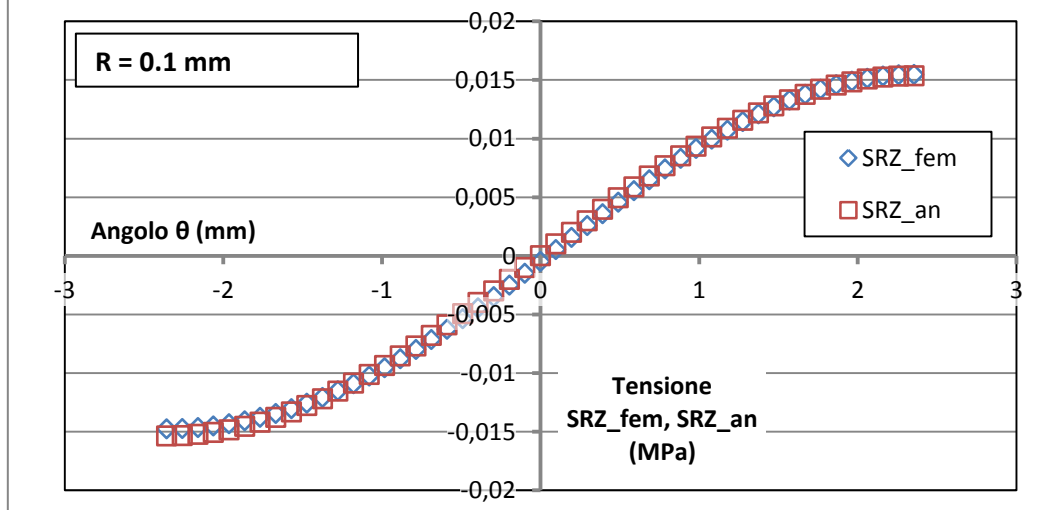


Figura 6.34 Confronto tra la tensione τ_{rz} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1$ mm, $z = 1.0$ mm)

6.6.2.3 Sezione $z = 2 \text{ mm}$

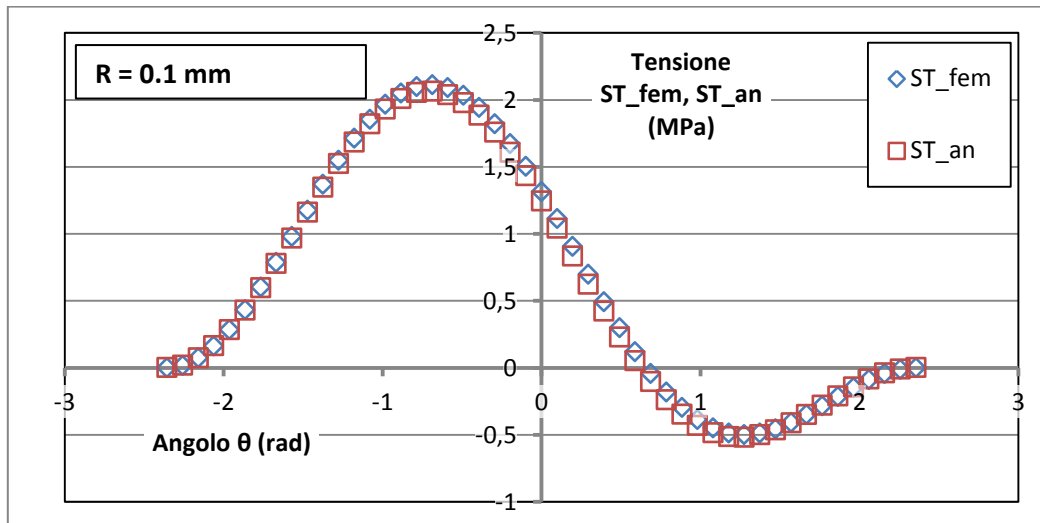


Figura 6.35 Confronto tra la tensione σ_θ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 2.0 \text{ mm}$)

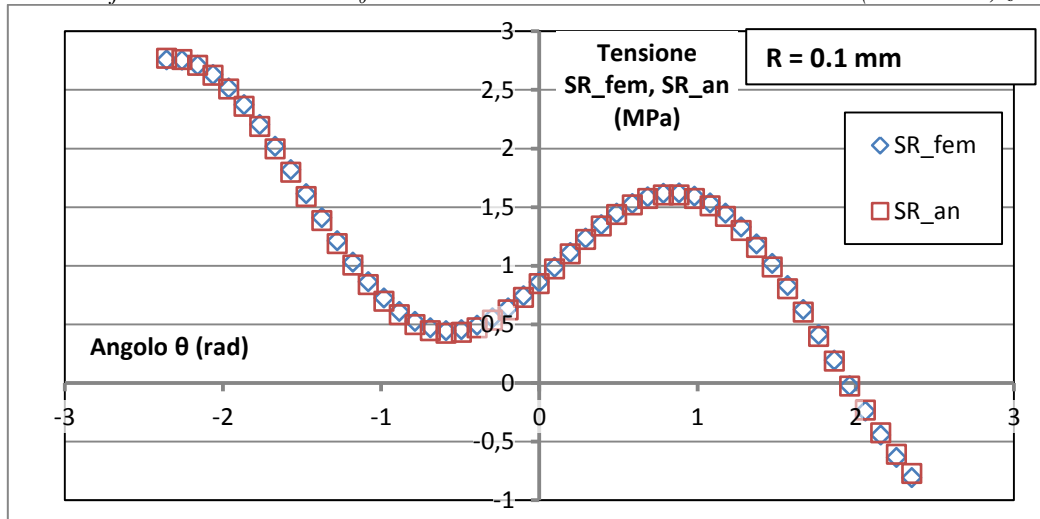


Figura 6.36 Confronto tra la tensione σ_r ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 2.0 \text{ mm}$)

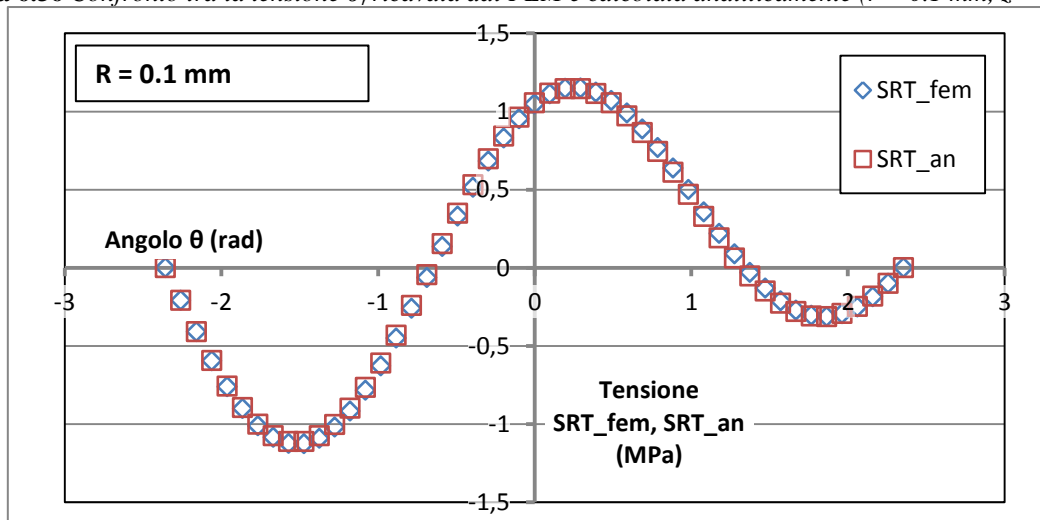


Figura 6.37 Confronto tra la tensione $\tau_{r,\theta}$ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 2.0 \text{ mm}$)

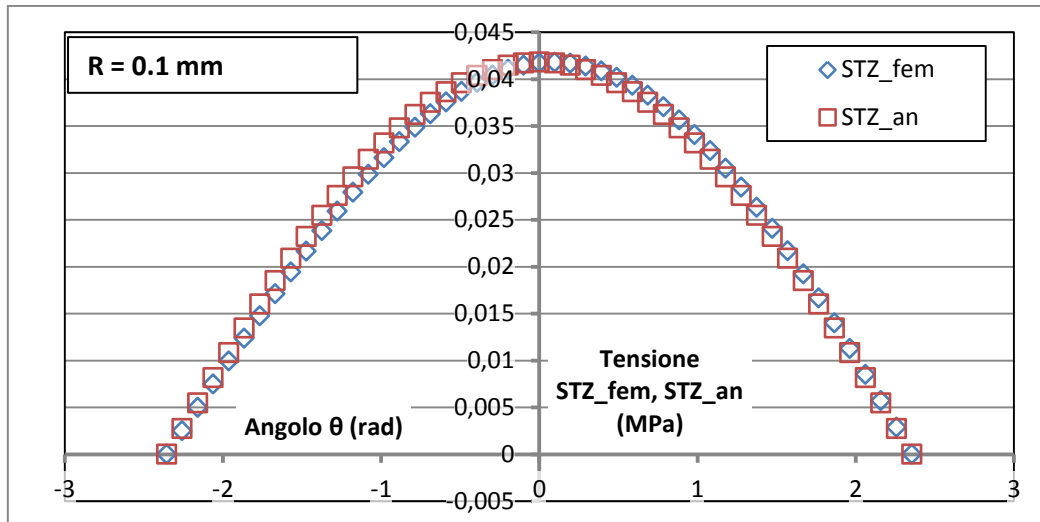


Figura 6.38 Confronto tra la tensione $\tau_{\theta z}$ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 2.0 \text{ mm}$)

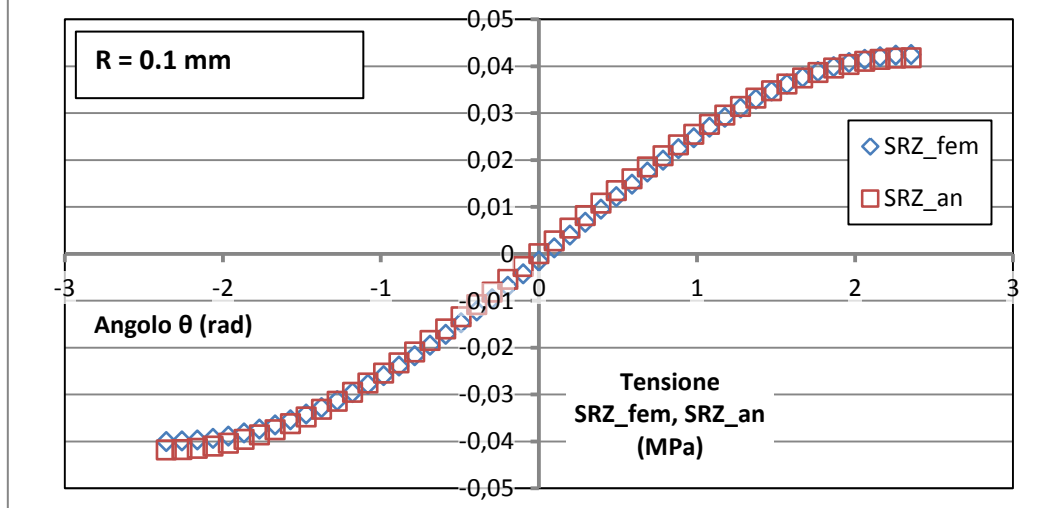


Figura 6.39 Confronto tra la tensione τ_{rz} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 2.0 \text{ mm}$)

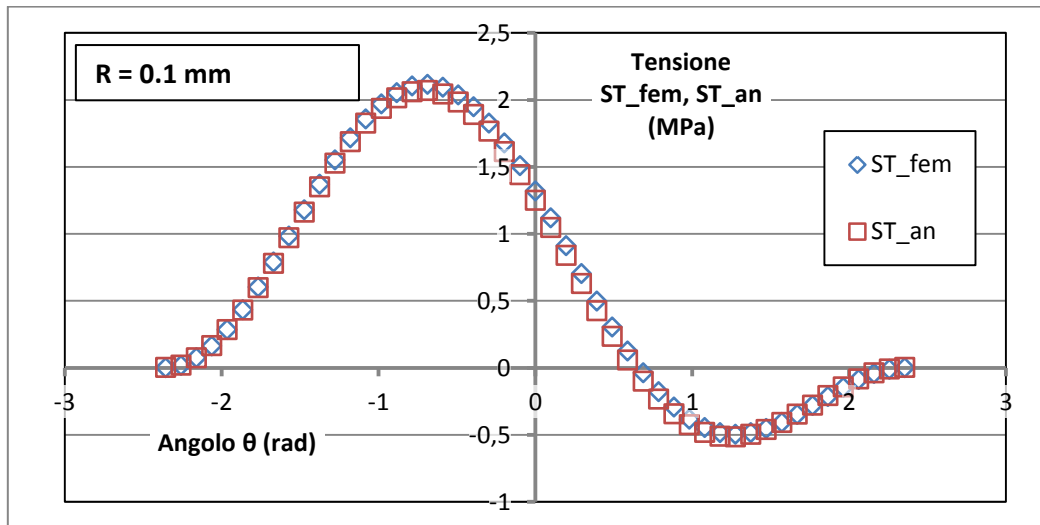
6.6.2.4 Sezione $z = 3 \text{ mm}$ 

Figura 6.40 Confronto tra la tensione σ_θ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 3.0 \text{ mm}$)

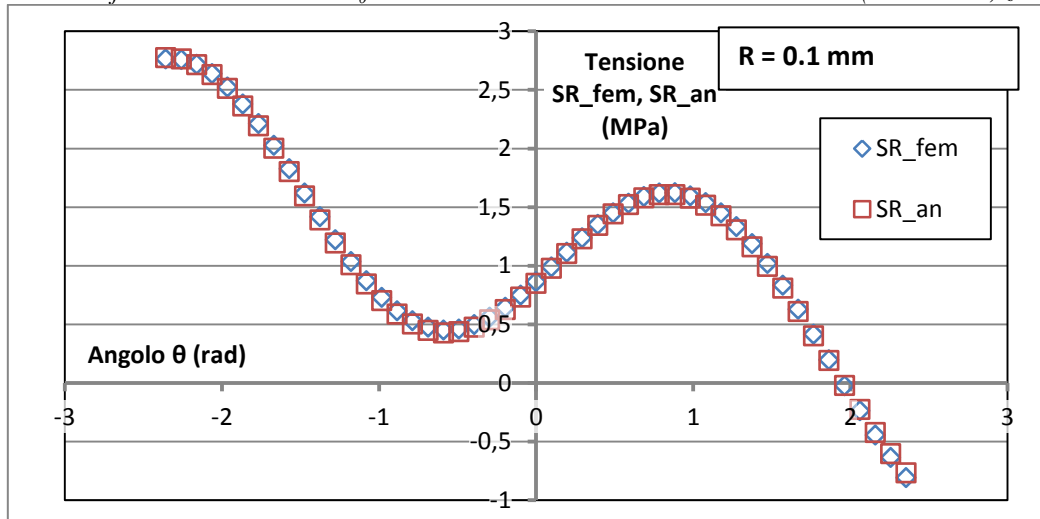


Figura 6.41 Confronto tra la tensione σ_r ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 3.0 \text{ mm}$)

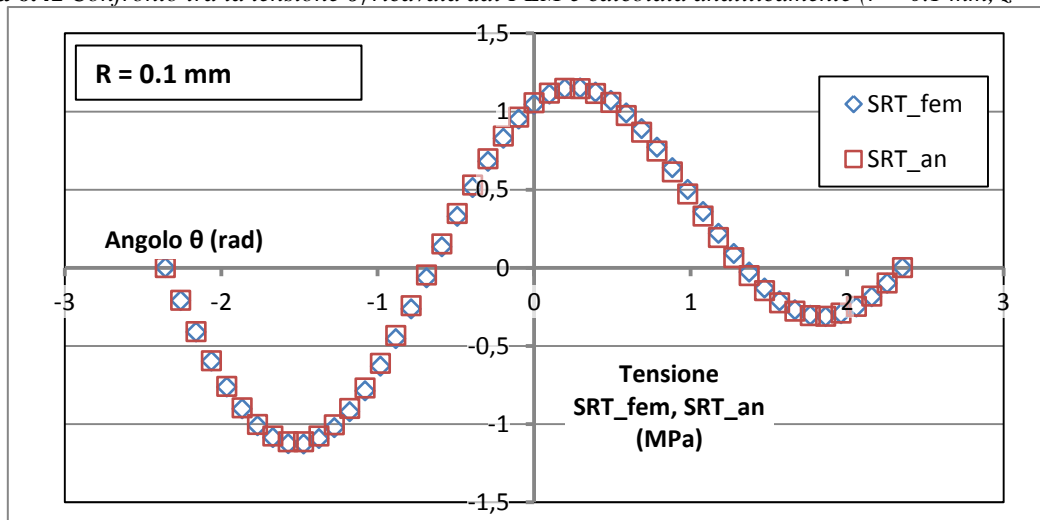


Figura 6.42 Confronto tra la tensione $\tau_{r,\theta}$ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 3.0 \text{ mm}$)

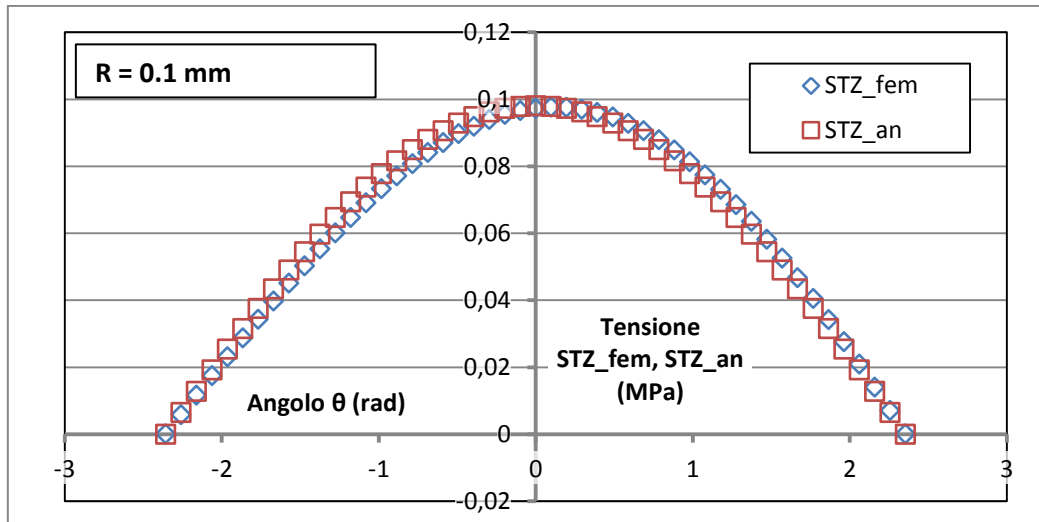


Figura 6.43 Confronto tra la tensione $\tau_{\theta z}$ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1$ mm, $z = 3.0$ mm)

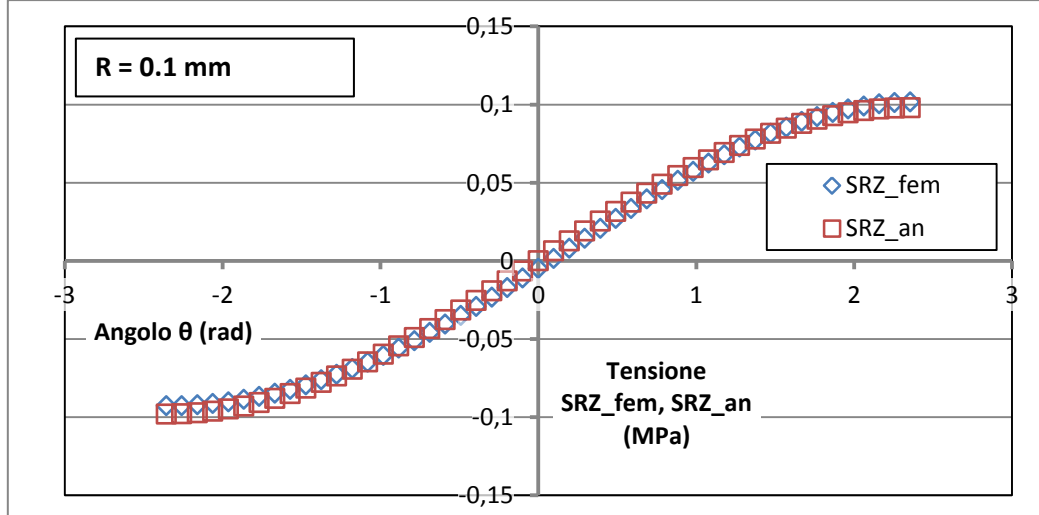


Figura 6.44 Confronto tra la tensione τ_{rz} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1$ mm, $z = 3.0$ mm)

6.6.2.5 Sezione $z = 4 \text{ mm}$

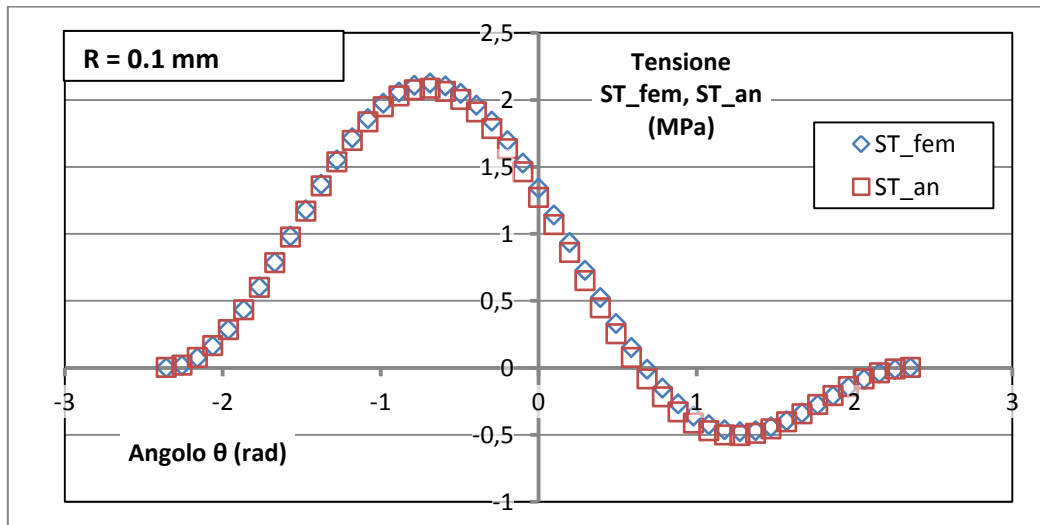


Figura 6.45 Confronto tra la tensione σ_θ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 4.0 \text{ mm}$)

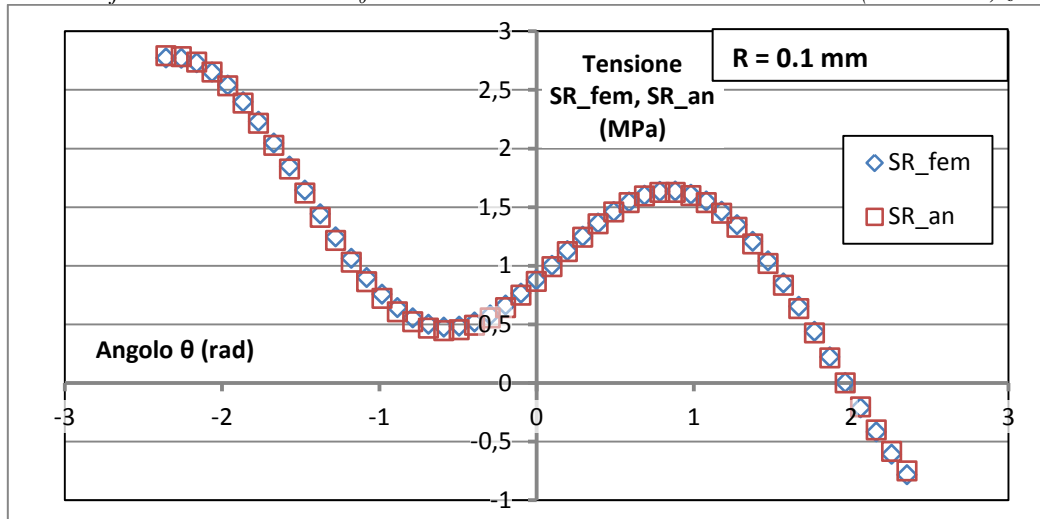


Figura 6.46 Confronto tra la tensione σ_r ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 4.0 \text{ mm}$)

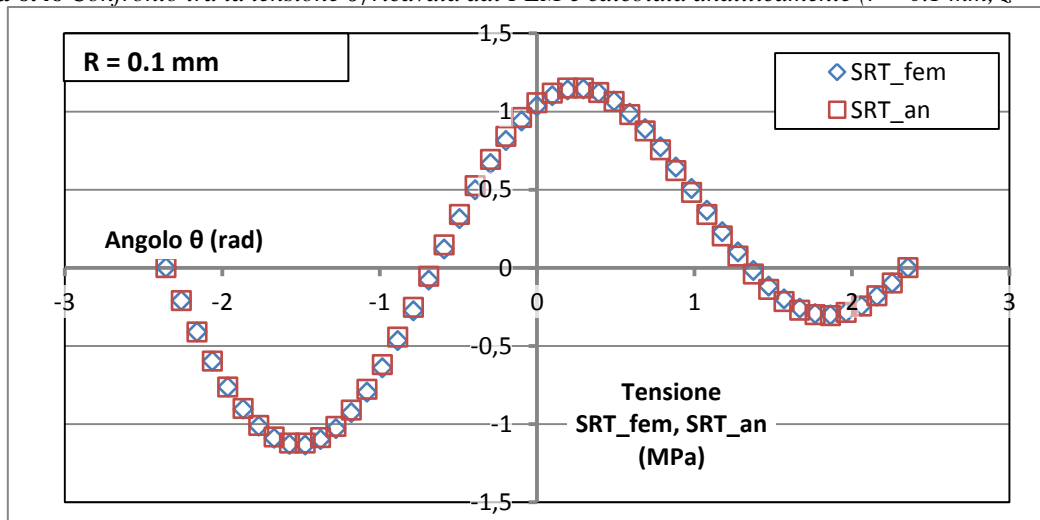


Figura 6.47 Confronto tra la tensione τ_{θ} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 4.0 \text{ mm}$)

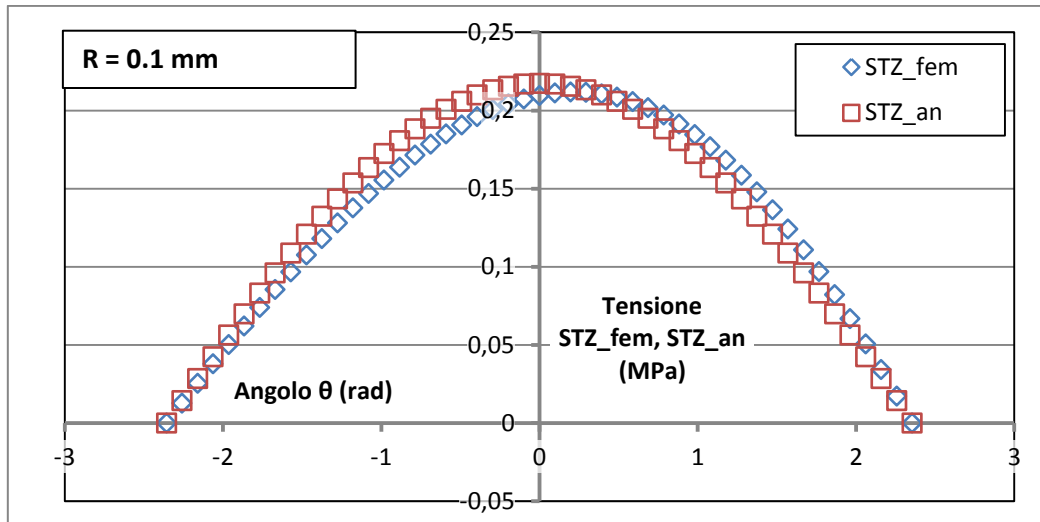


Figura 6.48 Confronto tra la tensione $\tau_{\theta z}$ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1$ mm, $z = 4.0$ mm)

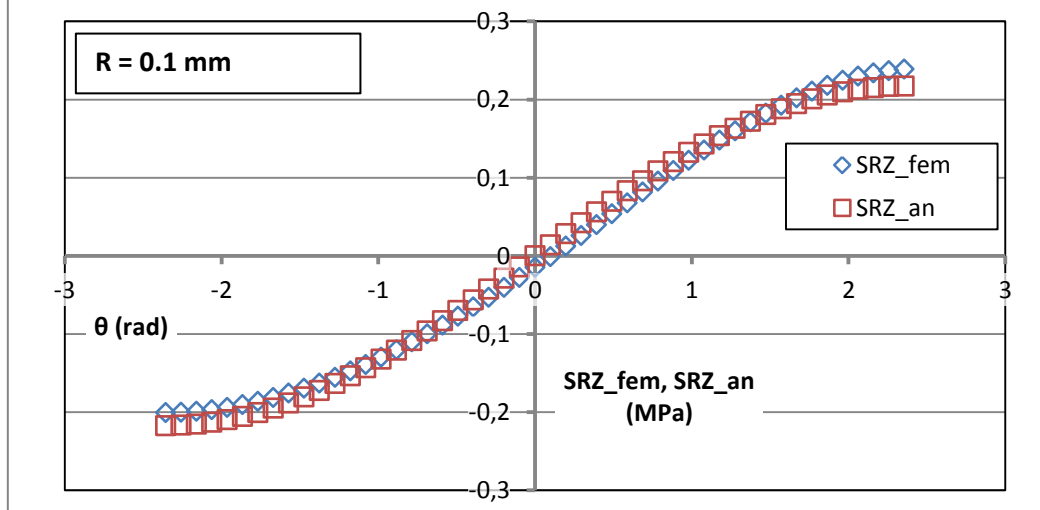


Figura 6.49 Confronto tra la tensione τ_{rz} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente ($r = 0.1$ mm, $z = 4.0$ mm)

Come si può notare dai diagrammi delle Fig. 6.27 - 6.49, le tensioni appaiono ben descritte dalle espressioni utilizzate fino ad ora, espressioni che costituiscono la base della formulazione della densità di energia di deformazione totale, deviatorica ed idrostatica. Appaiono alcune piccole differenze nell'intensità delle tensioni, dovute con ogni probabilità alla distanza dall'apice dell'intaglio alla quale si stanno verificando le componenti di tensione: la distanza considerata è infatti $R_a = 0.1 \text{ mm}$, ovvero l'estremità del volume di controllo, dove con ogni probabilità una descrizione in termini del primo ordine della soluzione di Williams fornisce un'approssimazione molto buona delle componenti di tensione, sebbene cominci ad avvertirsi la presenza di termini di ordine superiore. Solo per la sezione individuata dalla coordinata $z = 4 \text{ mm}$ si nota come i valori delle componenti di tensione $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} ottenuti con le espressioni analitiche (Fig. 6.48 e 6.49) si discostino sensibilmente dai valori delle tensioni ricavati con il codice di calcolo agli elementi finiti. Tale discrepanza è dovuta probabilmente alla presenza del modo III simmetrico. Vengono riportati in Fig. 6.50 e 6.51 i diagrammi delle tensioni $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} per la sezione $z = 4 \text{ mm}$ ottenuti senza trascurare il modo III simmetrico.

I valori delle componenti di tensione $\tau_{\theta z}$ e τ_{rz} calcolati con le espressioni analitiche tenendo conto della presenza del modo III simmetrico (Fig. 6.50 e 6.51) seguono ora più fedelmente l'andamento dei valori ottenuti con il calcolatore: risulta quindi evidente che per ottenere una descrizione accurata delle componenti di tensione non è bene trascurare la presenza del modo III simmetrico, mentre in termini energetici il contributo di tale modo è trascurabile, come si è potuto concludere nel paragrafo precedente.

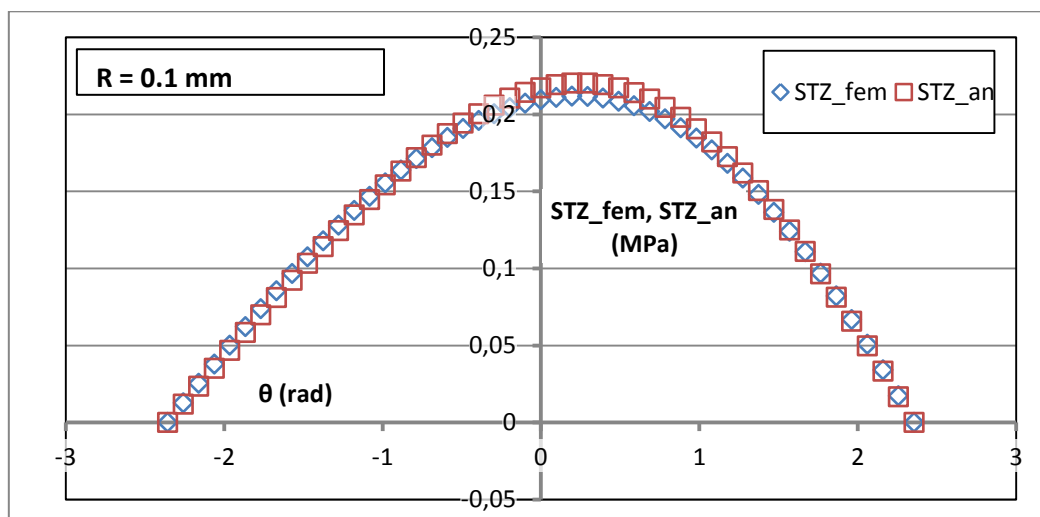


Figura 6.50 Confronto tra la tensione $\tau_{\theta z}$ ricavata dal FEM e calcolata analiticamente tenendo conto del contributo del modo III simmetrico ($r = 0.1 \text{ mm}$, $z = 4.0 \text{ mm}$)

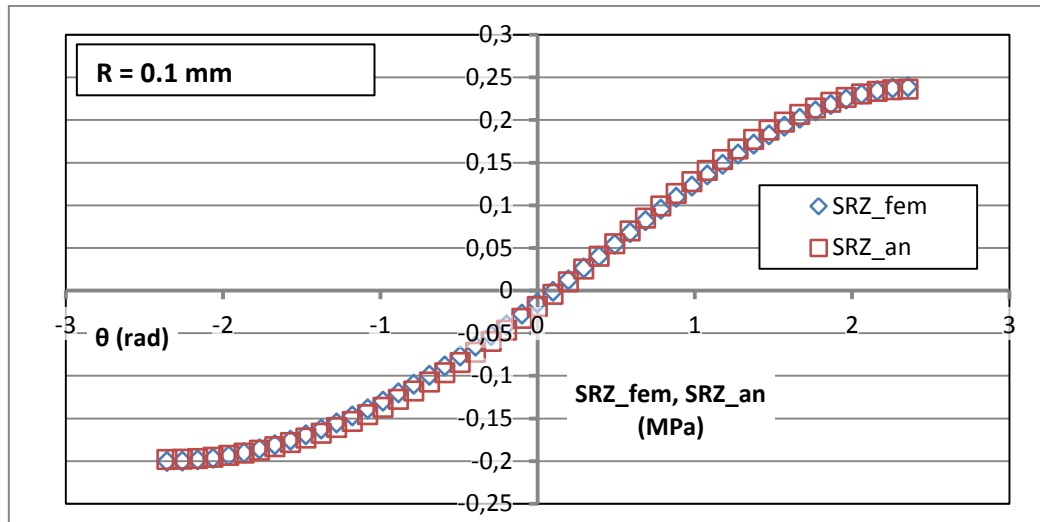


Figura 6.51 Confronto tra la tensione τ_{rz} ricavata dal FEM e calcolata analiticamente tenendo conto del contributo del modo III simmetrico ($r = 0.1$ mm, $z = 4.0$ mm)

Dal confronto tra i valori delle componenti di tensione ricavati con le espressioni analitiche e i valori ricavati con il metodo degli elementi finiti, si ritiene di poter escludere, nella zona considerata, effetti di accoppiamento tra i modi I e II e i modi III antisimmetrico e simmetrico.

Da notare che la discrepanza tra il valore del SED ottenuto con la formulazione analitica e il valore ottenuto dal codice di calcolo non avrebbe potuto comunque essere spiegata, per la sezione di mezzeria, con l'accoppiamento tra il modo III e altri modi o con la presenza di modo III simmetrico, dato che per questa sezione i fattori di intensificazione delle tensioni di modo III simmetrico e antisimmetrico risultano nulli. Tuttavia si può ora concludere che tali fattori siano da escludere nell'intera zona compresa tra $0 \text{ mm} < z < 4 \text{ mm}$, ovvero la zona considerata per provare a ricavare gli N-SIFs dal valore della densità di energia di deformazione. Mentre il contributo energetico dato dal modo III simmetrico risulta trascurabile anche nella rimanente parte dello spessore della piastra ($4 \text{ mm} < z < 5 \text{ mm}$), non si esclude a priori che possano essere presenti effetti di accoppiamento tra i diversi modi, specialmente nelle immediate vicinanze della superficie libera. La soluzione analitica ottenuta a partire dallo stato di deformazione piana generalizzato, ovvero dalle ipotesi di Kane e Mindlin sugli spostamenti, porta infatti a disaccoppiare il problema tridimensionale in un problema nel piano (modi I e II) e un problema fuori dal piano (modo III). Tale soluzione non si dimostra però valida nelle vicinanze della superficie libera. [30]

6.6.3 Variabilità radiale e circonferenziale del constraint factor e influenza sul calcolo analitico del SED

Avendo introdotto le ipotesi di Kane e Mindlin (deformazione piana generalizzata) per risolvere il problema tridimensionale, si è assunto che per coordinate x ed y costanti, la componente di deformazione lungo lo spessore, ε_{zz} , sia costante lungo la coordinata z stessa:

$$\begin{aligned} u_z &= b * z * w(x, y) \\ \varepsilon_{zz} &= b * w(x, y) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Questa assunzione ha permesso di considerare indipendenti dalla coordinata z le componenti normali delle deformazioni ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} e la componente γ_{xy} e, di conseguenza, le componenti di tensione σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} e τ_{xy} . Per effetto di queste considerazioni, scrivendo le equazioni di equilibrio nelle direzioni x , y e z , era stato possibile scomporre il problema tridimensionale in due problemi: il primo di questi, governato dall'equazione biarmonica $\nabla^4 \phi = 0$, avente come soluzione i campi di tensione del problema nel piano; il secondo, descritto dall'equazione $\nabla^2 w = 0$, avente come soluzione i campi di tensione del problema fuori piano. Le due equazioni devono essere soddisfatte simultaneamente:

$$\begin{cases} \nabla^4 \phi = 0 \\ \nabla^2 w = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

La soluzione della prima equazione del sistema fornisce come risultato le espressioni delle componenti di tensione σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} , mentre la seconda equazione fornisce le espressioni delle componenti di tensione τ_{yz} e τ_{xz} . Tuttavia, nessuna descrizione è disponibile per la componente di tensione σ_{zz} : pertanto si ricorre all'utilizzo del *constraint factor* C_z , nella nota espressione $\sigma_{zz} = C_z \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

In letteratura è stata evidenziata la presenza di un legame tra i modi II e III antisimmetrico, [25, 26, 27, 28, 29] traendone la conclusione che questi due modi non possono essere presenti singolarmente: un carico tipico del modo II induce la presenza di un modo III (antisimmetrico), denominato modo O, e un carico di modo III (antisimmetrico) induce la presenza di tensioni di modo II. Tuttavia non è ancora stata fornita una formulazione analitica riguardante il legame tra i modi. Le due equazioni componenti il sistema sono perciò attualmente analiticamente disaccoppiate tra loro: l'accoppiamento deriva dal fatto che i valori degli N-SIFs inseriti nelle espressioni delle componenti di tensione (ricavate risolvendo le due equazioni del sistema) vengono ottenuti sezione per sezione da un modello tridimensionale risolto con il metodo degli elementi finiti.

Nell'applicazione del metodo per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni a partire dalla densità di energia di deformazione proposto nei paragrafi precedenti, si erano utilizzate le espressioni del SED totale e deviatorico supponendo presente uno stato di deformazione piana all'interno del volume di controllo.

Nei seguenti sottoparagrafi verrà esaminato invece l'andamento del *constraint factor* all'interno del volume di controllo, evidenziando come non sia possibile utilizzare l'ipotesi di deformazione piana.

6.6.3.1 Variabilità del *constraint factor* lungo la bisettrice dell'intaglio

Nel modello della piastra presa in esame, si è notata una variazione accentuata del *constraint factor* lungo la bisettrice dell'intaglio, come si può vedere nelle Fig. 6.52 - 6.55 facenti riferimento a diverse sezioni della piastra individuate dalla coordinata z .

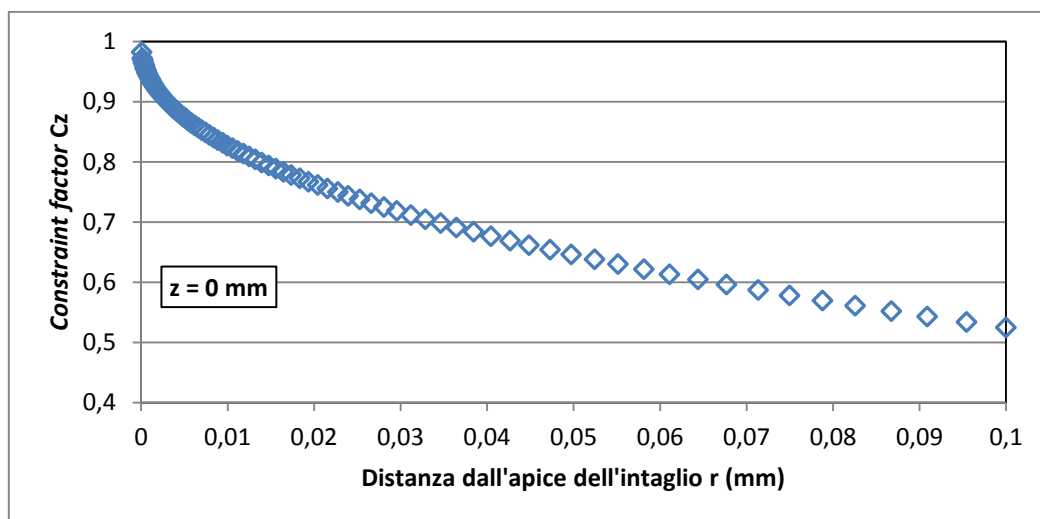


Figura 6.52 Andamento del *constraint factor* lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 0.0 \text{ mm}$

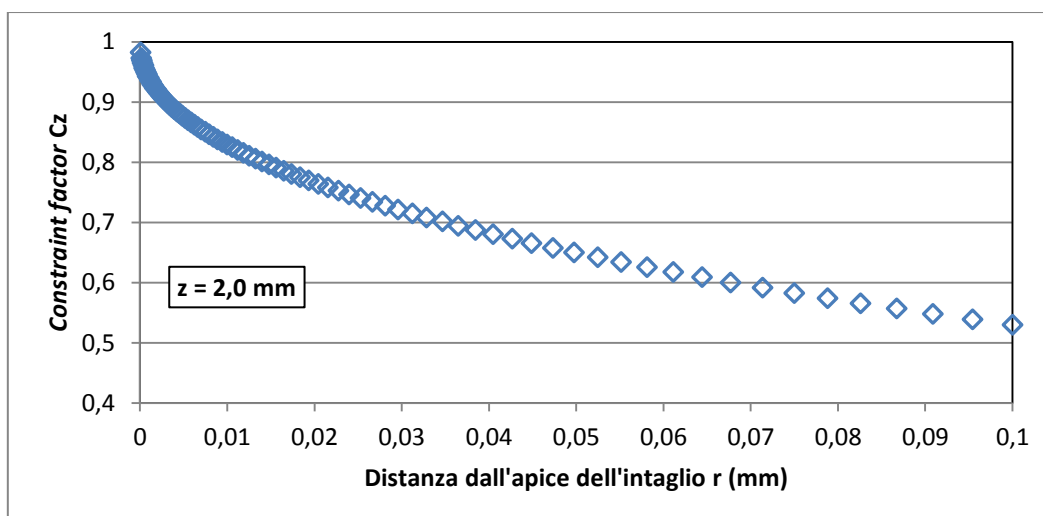


Figura 6.53 Andamento del *constraint factor* lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 2.0 \text{ mm}$

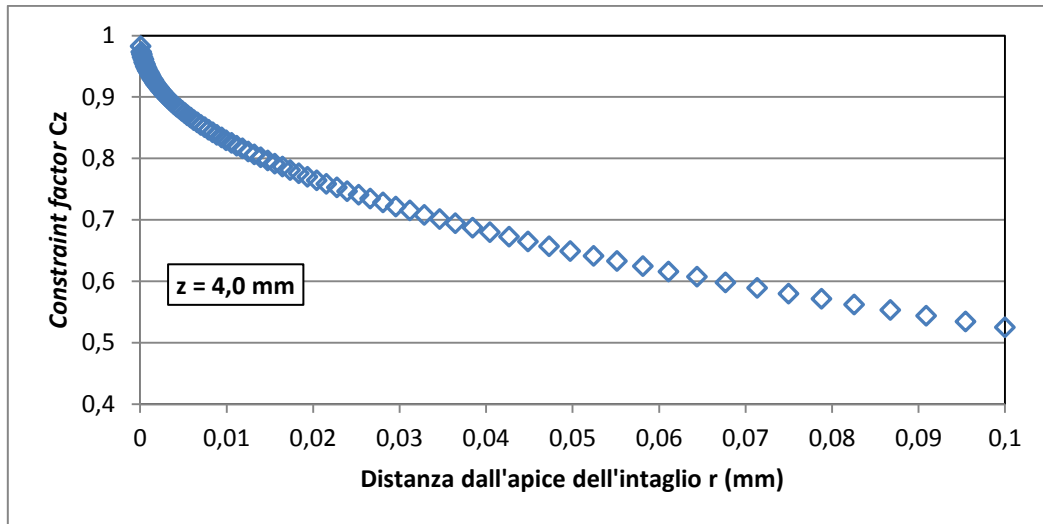


Figura 6.54 Andamento del constraint factor lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 4.0$ mm

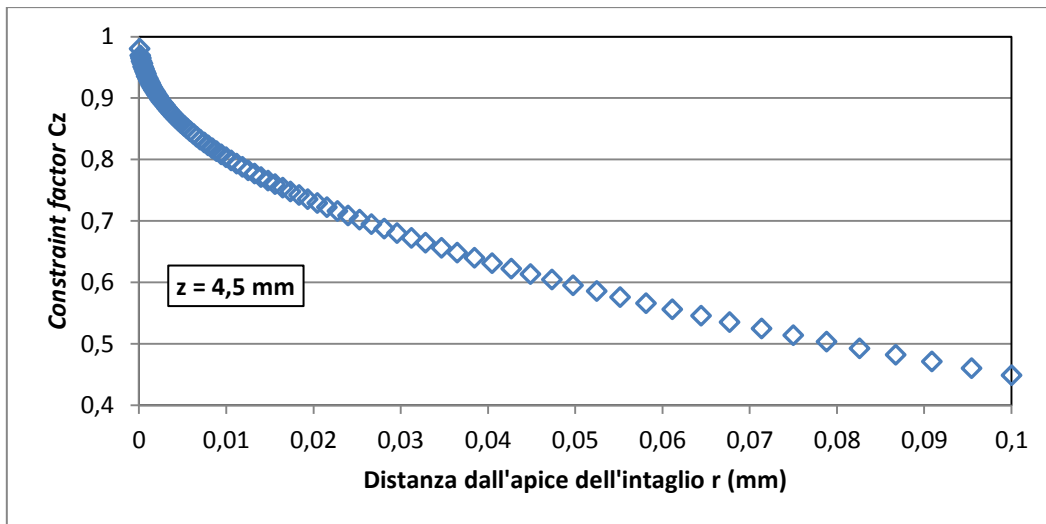


Figura 6.55 Andamento del constraint factor lungo la bisettrice dell'intaglio per la sezione $z = 4.5$ mm

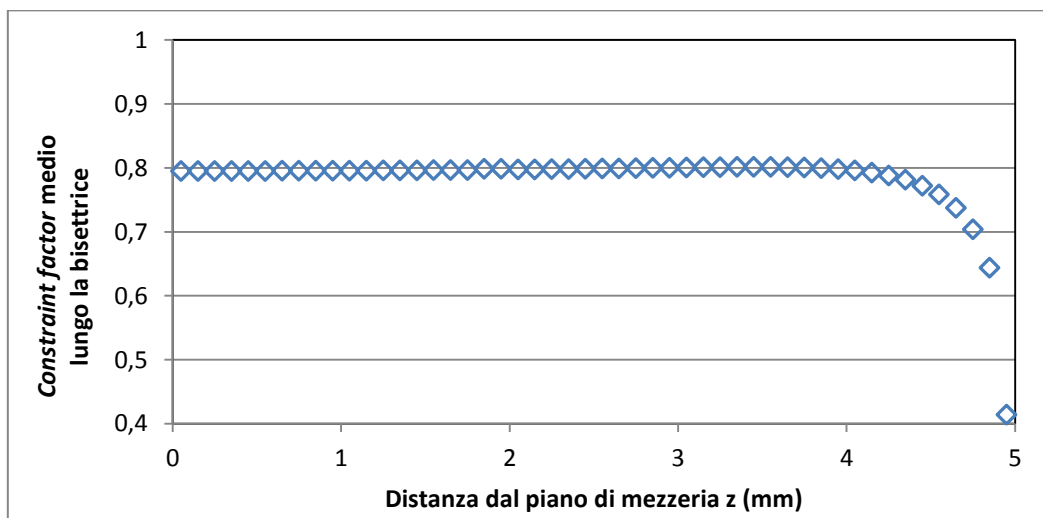


Figura 6.56 Valore medio del constraint factor lungo la bisettrice dell'intaglio al variare della coordinata z

In Fig. 6.56 è stato riportato invece il valore medio del *constraint factor*, calcolato all'interno del volume di controllo, lungo la bisettrice dell'intaglio, al variare della coordinata z ,

Appare evidente come non sia possibile considerare valida l'ipotesi di deformazione piana all'interno del volume di controllo: il *constraint factor* è unitario solo in corrispondenza dell'apice della cricca, per poi decrescere inizialmente in maniera molto rapida, e via via più dolcemente.

Non sono disponibili in letteratura espressioni che approssimano l'andamento di C_z lungo la bisettrice di intagli con raggio di fondo intaglio nullo. Le espressioni trovate riguardano infatti il *constraint factor* in piastre con sezioni di dimensioni infinite nel piano xy e spessore finito con un foro circolare o con un intaglio con raggio di fondo intaglio non nullo (intagli a V o ad U arrotondati, per i quali l'espressione fornisce con buona approssimazione il valore di C_z). [49] Tali espressioni inoltre forniscono approssimazioni dell'andamento di C_z la cui precisione decresce all'aumentare dell'angolo di apertura dell'intaglio. [50]

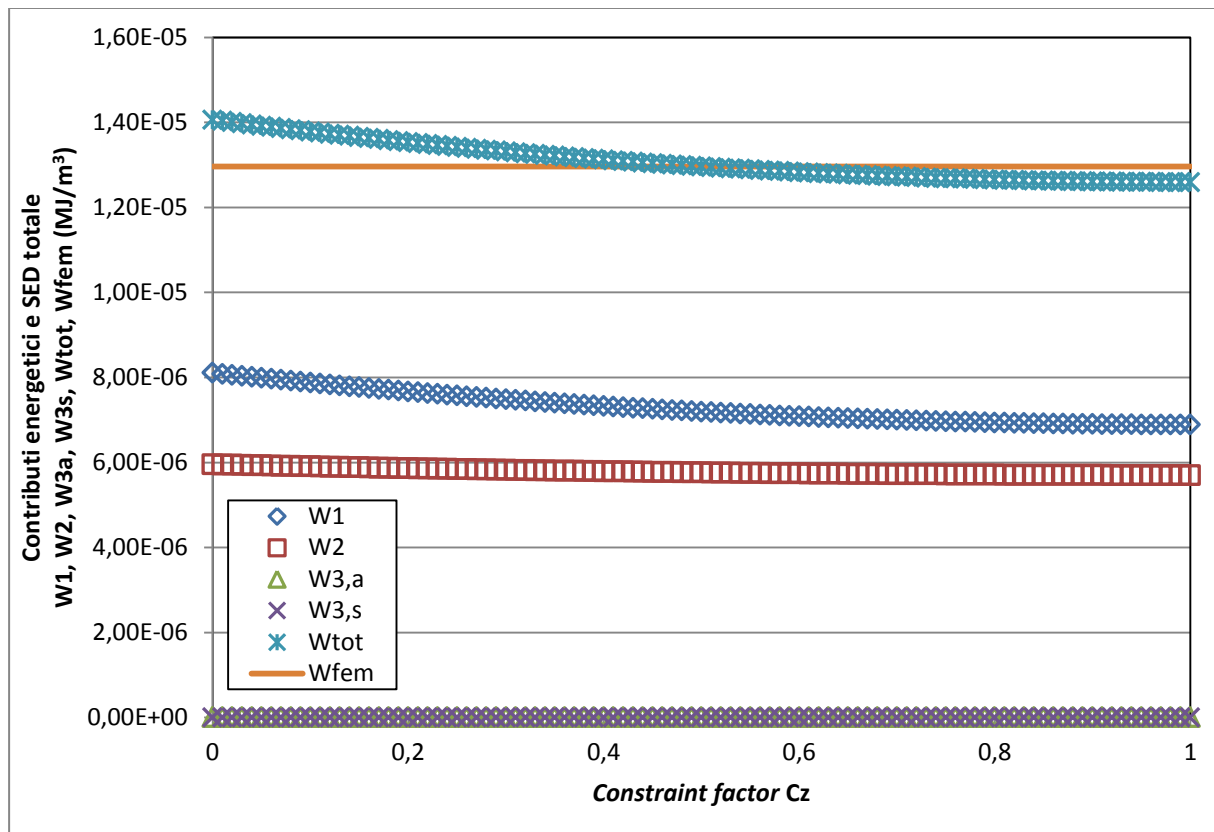


Figura 6.57 Valori dei contributi al SED totale dei modi I, II e III (antisimmetrico e simmetrico) nel volume di controllo di raggio $R = 0.1$ mm in funzione del coefficiente C_z utilizzato nelle espressioni, ipotizzato costante nel volume di controllo, per il primo layer di elementi

Nel Cap. §2 si era ottenuta un'espressione analitica degli integrali che compaiono nei contributi energetici di modo I, II e III che teneva conto di un C_z di valore arbitrario e costante all'interno del volume di controllo. Utilizzando tali espressioni è possibile osservare come variano i contributi energetici e il valore del SED totale al variare del valore del *constraint factor* inserito nelle espressioni (Fig. 6.57). Si è preso come riferimento il *layer* di elementi compresi tra le sezioni $z = 1.0 \text{ mm}$ e $z = 1.1 \text{ mm}$. Si sottolinea come non si ha variabilità dei contributi di modo III, dato che l'integrale associato a tale modo, I_3 , dipende solamente dall'angolo di apertura dell'intaglio e dal modulo di Poisson, ed è quindi indipendente dal *constraint factor*. Inoltre per il *layer* di elementi considerato i contributi energetici di modo III antisimmetrico e simmetrico sono trascurabili rispetto ai contributi dei modi I e II.

In Fig. 6.57 si può notare come il contributo energetico legato al modo I ($W1$) sia il contributo più sensibile alle variazioni di C_z , mentre il contributo energetico di modo II ($W2$) vari in misura minore in funzione di tale parametro. Si può notare infine come vi sia un punto di intersezione tra la retta rappresentante il valore della densità di energia di deformazione ricavata con il codice di calcolo agli elementi finiti (W_{fem}) e la curva rappresentante il valore del SED totale ottenuto mediante l'espressione analitica utilizzando i valori di K_1 e K_2 ricavati con le definizioni di Gross e Mendelson al variare del *constraint factor* (W_{tot}): considerando tale parametro costante all'interno del volume di controllo, esiste quindi un valore di C_z per il quale il valore ottenuto dalla formulazione analitica del SED uguaglia il valore ottenuto con il metodo degli elementi finiti al calcolatore.

Le osservazioni appena effettuate per la densità di energia di deformazione totale all'interno del volume di controllo di raggio R_a possono essere estese alla densità di energia di deformazione deviatorica all'interno del medesimo volume di controllo, come si evince dal diagramma di Fig. 6.58.

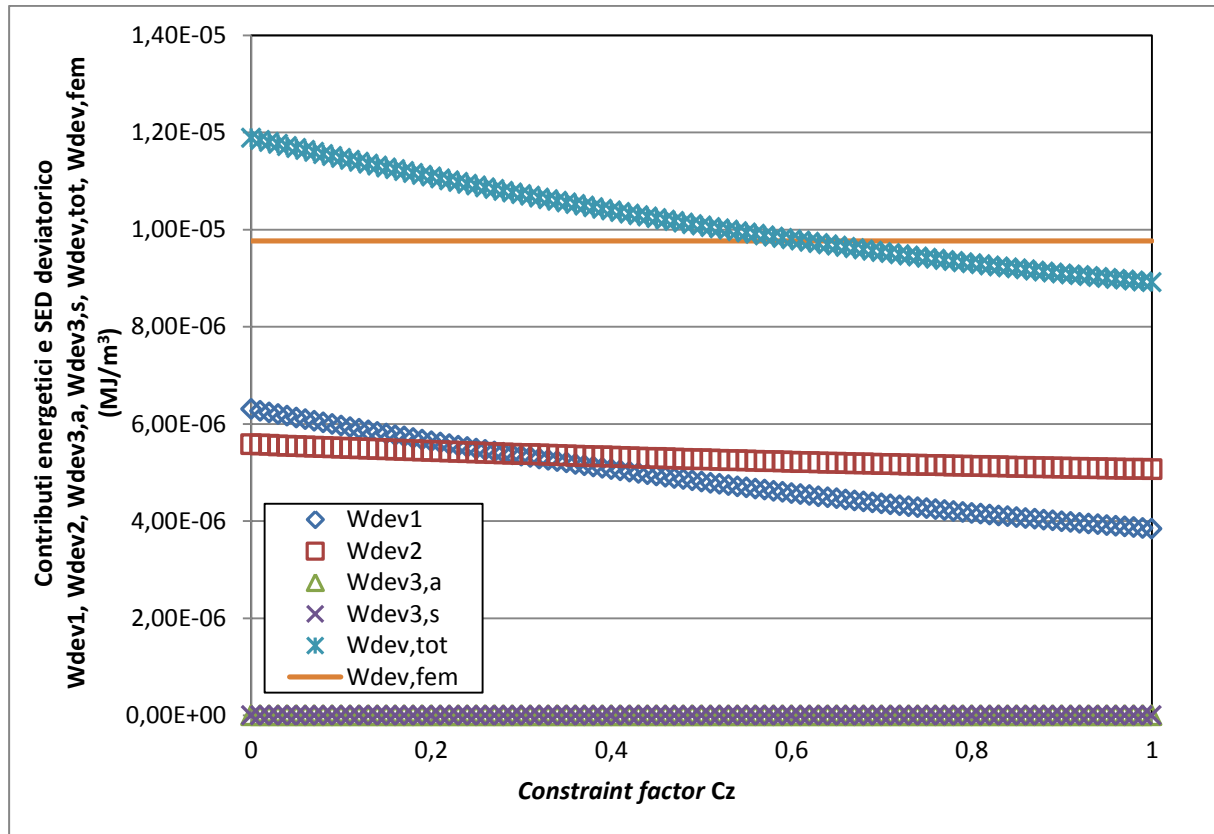


Figura 6.58 Valori dei contributi al SED deviatorico dei modi I, II e III (antisimmetrico e simmetrico) nel volume di controllo di raggio $R = 0.1$ mm in funzione del coefficiente C_z utilizzato nelle espressioni, ipotizzato costante nel volume di controllo, per il primo layer di elementi

Ipotizzando che il *constraint factor* sia costante nell'intero volume di controllo, e che il suo valore sia approssimativamente lo stesso per i due volumi di controllo di raggio R_a e R_b , si potrebbe impostare il seguente sistema nelle incognite K_1 , K_2 , K_3 e C_z , trascurando il contributo del modo III simmetrico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{W_{afem}} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1(C_z)}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2(C_z)}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \overline{W_{bfem}} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_1(C_z)}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2(C_z)}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_3}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_b^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \overline{W_{a,devfem}} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}(C_z)}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_a^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}(C_z)}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_a^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_a^{2(1-\lambda_3)}} \right] \\ \overline{W_{b,devfem}} = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[\frac{I_{1,dev}(C_z)}{2\lambda_1\gamma} \frac{K_1^2}{R_b^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev}(C_z)}{2\lambda_2\gamma} \frac{K_2^2}{R_b^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{3,dev}}{2\lambda_3\gamma} \frac{K_3^2}{R_b^{2(1-\lambda_3)}} \right] \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Nelle espressioni riportate nel sistema, si è evidenziata la sola dipendenza degli integrali I_1 , I_2 , $I_{1,dev}$ e $I_{2,dev}$ dal *constraint factor* C_z , tralasciando la loro dipendenza dall'angolo di apertura dell'intaglio e dal modulo di Poisson.

Si è risolto tale sistema con il software Wolfram Mathematica[®] 9 per il primo *layer* di elementi della piastra, adiacente al piano di mezzeria, non ottenendo valide soluzioni per gli N-SIFs e per il *constraint factor*. Viceversa, si è provato ad inserire i corretti valori degli N-SIFs, calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson, e ottenere per ciascuna equazione il valore di C_z che fa coincidere il valore della densità di energia di deformazione (totale o deviatorica) ricavato con il calcolatore con il valore ottenuto analiticamente, ottenendo le seguenti coppie di risultati (ciascuna equazione fornisce due valori del *constraint factor*, dato che questo compare elevato al quadrato nelle espressioni che costituiscono il sistema):

$$C_{z a}' = 0.495246 \quad C_{z a}'' = 1.50475$$

$$C_{z b}' = 0.559923 \quad C_{z b}'' = 1.44008$$

$$C_{z a,dev}' = 0.610164 \quad C_{z a,dev}'' = 2.72317$$

$$C_{z b,dev}' = 0.653628 \quad C_{z b,dev}'' = 2.67971$$

Osservando i grafici riportati precedentemente sull'andamento del SED calcolato con l'espressione analitica al variare del C_z (Fig. 6.57 e 6.58), si deduce che i valori del *constraint factor* da considerare sono i primi riportati per ogni coppia (apice $'$). Senza considerare i valori numerici, è interessante il fatto che il valore di C_z da utilizzare in ciascuna equazione perché il SED analitico uguagli quello ricavato dagli EF non è univoco: in altre parole, non è possibile considerare un valore unico del *constraint factor* costante all'interno del volume di controllo che permetta di ricavare gli N-SIFs dal sistema sopra riportato. In particolare, se si considera C_z costante all'interno del volume di controllo, il valore di tale parametro da utilizzare per avere aderenza tra i valori del SED ricavati analiticamente e numericamente sembra dipendere in maniera sensibile dal tipo di densità di energia di deformazione considerato (totale o deviatorica) e dal raggio del volume di controllo.

6.6.3.2 Variabilità del *constraint factor* in direzione circonferenziale

Si nota come il valore del *constraint factor* lungo la bisettrice dell'intaglio nella sezione di mezzeria passi dal valore unitario (apice dell'intaglio) a un valore poco superiore a 0.5 (limite del volume di controllo), mentre il valore di $C_{z a}'$ ottenuto dall'equazione del SED sia inferiore a 0.5. Si è ipotizzata quindi una variabilità del *constraint factor* al variare dell'angolo θ , verificata diagrammando l'andamento della tensione σ_z e di C_z in funzione

dell'angolo θ ad una distanza pari a $R_a = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio, per diverse sezioni della piastra. Nei diagrammi è riportato anche l'andamento della σ_z ricavato nell'ipotesi di deformazione piana (Fig. 6.59 – 6.63).

Come si può notare dai grafici, alla distanza pari a $R_a = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio non è assolutamente valida l'ipotesi di deformazione piana.

Il *constraint factor* presenta una notevole variabilità in funzione dell'angolo θ . Si ricorda la definizione di tale parametro:

$$C_z = \frac{\sigma_z}{\nu(\sigma_r + \sigma_\theta)} \quad (6.28)$$

L'andamento del *constraint factor* lungo il percorso circolare può essere suddiviso nelle seguenti zone:

- la prima porzione di circonferenza, nella quale C_z è approssimativamente costante;
- la seconda parte di circonferenza, nella quale il *constraint factor* decresce sempre più rapidamente, cambiando segno quando il valore di σ_z diventa negativo;
- l'ultima parte in cui C_z cambia nuovamente segno e torna positivo, in quanto la somma $(\sigma_r + \sigma_\theta)$ assume valore negativo.

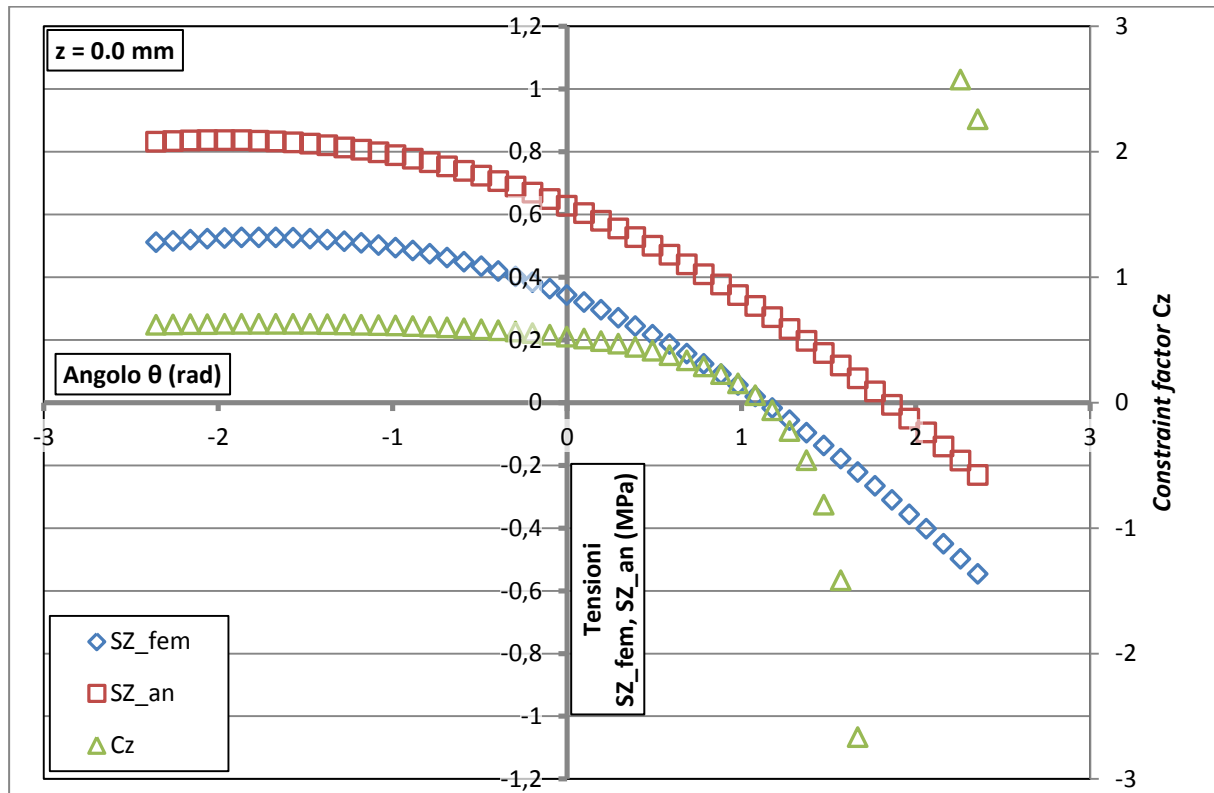


Figura 6.59 Andamento della tensione σ_z ricavata dal FEM e calcolata analiticamente nell'ipotesi di deformazione piana e del *constraint factor* C_z al variare dell'angolo θ ad una distanza pari a $r = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio per la sezione di coordinata $z = 0.0 \text{ mm}$

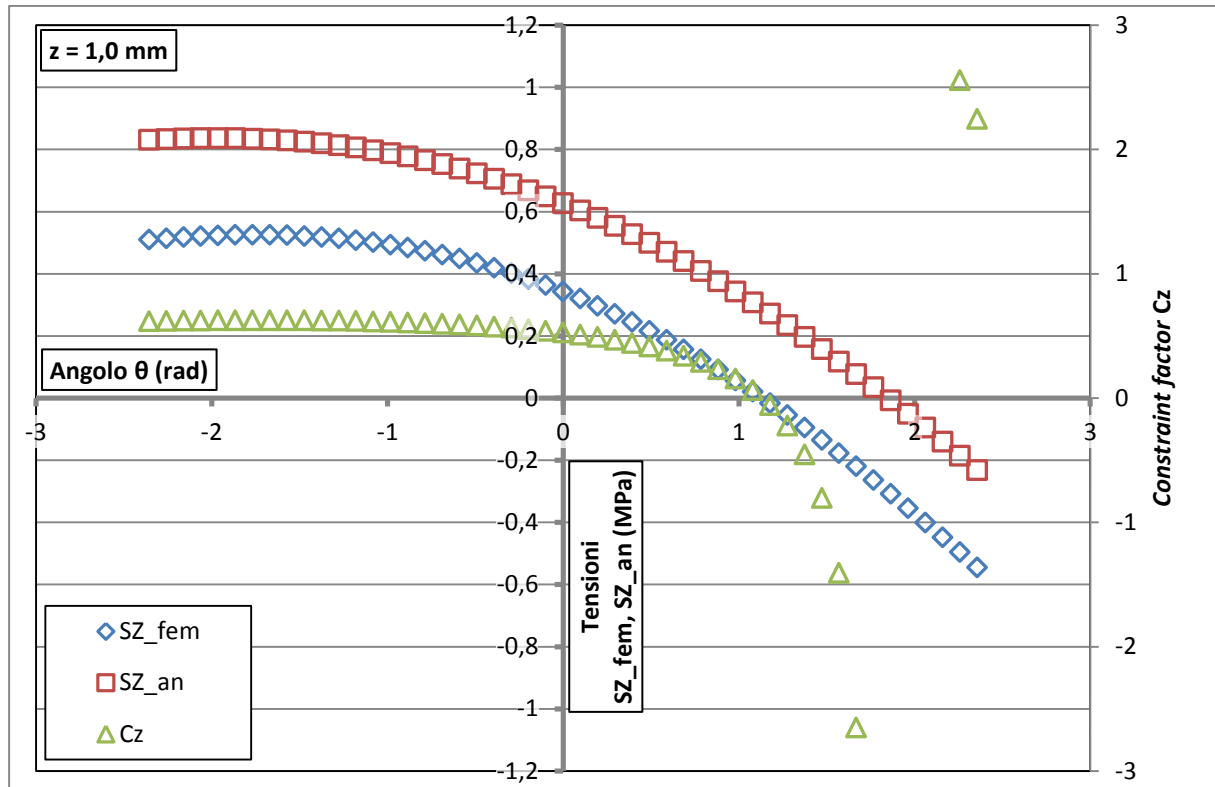


Figura 6.60 Andamento della tensione σ_z ricavata dal FEM e calcolata analiticamente nell'ipotesi di deformazione piana e del constraint factor C_z al variare dell'angolo θ ad una distanza pari a $r = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio per la sezione di coordinata $z = 1.0 \text{ mm}$

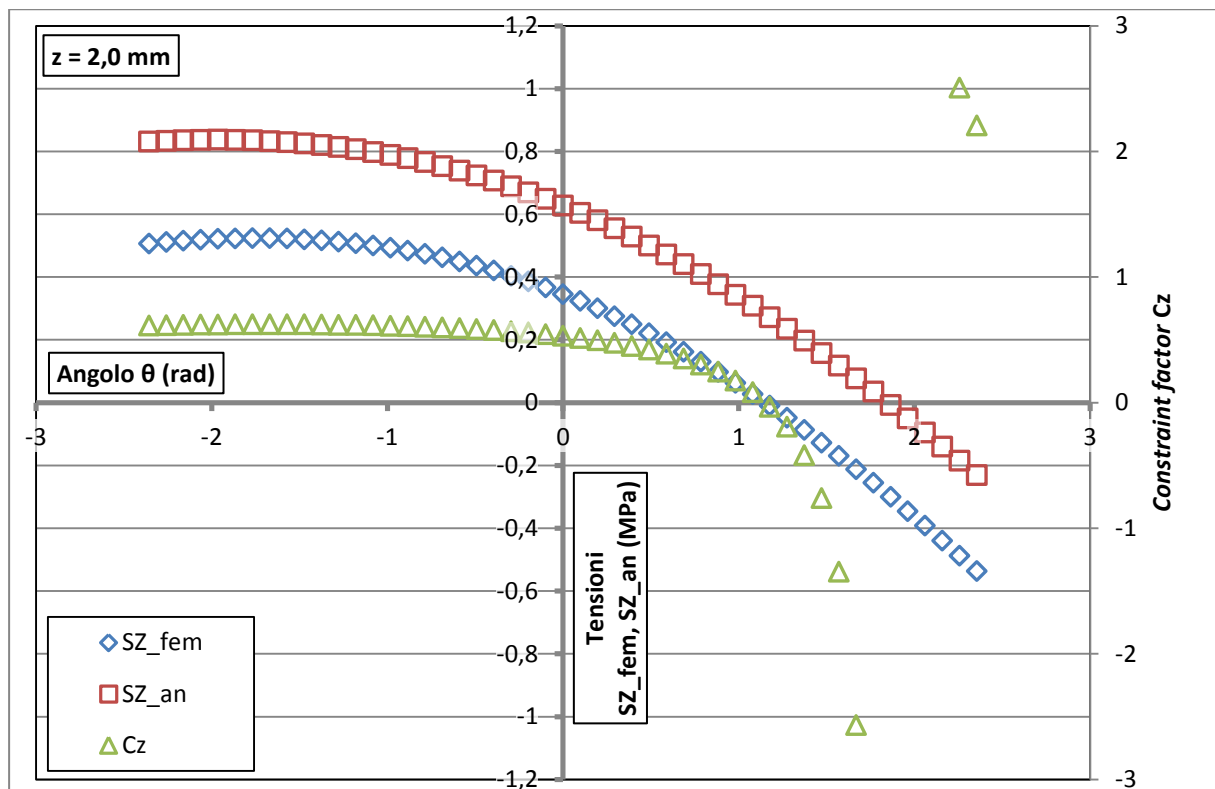


Figura 6.61 Andamento della tensione σ_z ricavata dal FEM e calcolata analiticamente nell'ipotesi di deformazione piana e del constraint factor C_z al variare dell'angolo θ ad una distanza pari a $r = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio per la sezione di coordinata $z = 2.0 \text{ mm}$

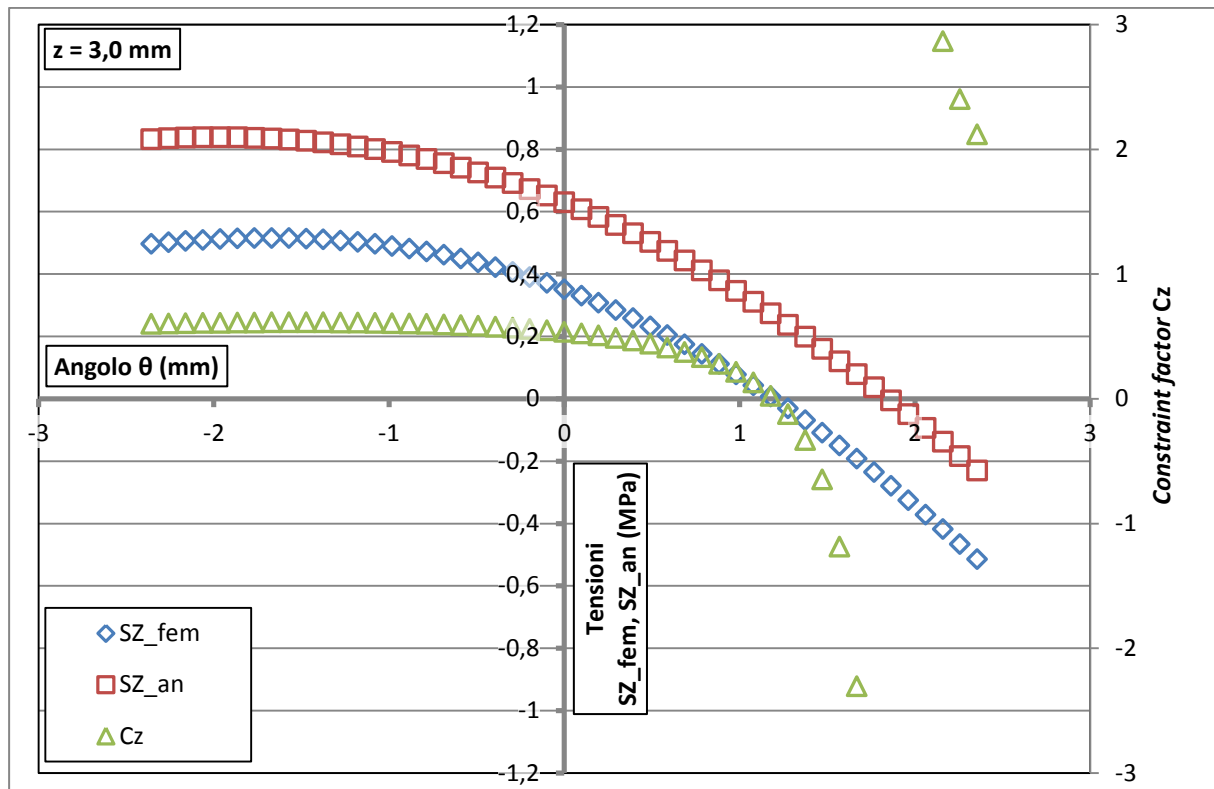


Figura 6.62 Andamento della tensione σ_z ricavata dal FEM e calcolata analiticamente nell'ipotesi di deformazione piana e del constraint factor C_z al variare dell'angolo θ ad una distanza pari a $r = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio per la sezione di coordinata $z = 3.0 \text{ mm}$

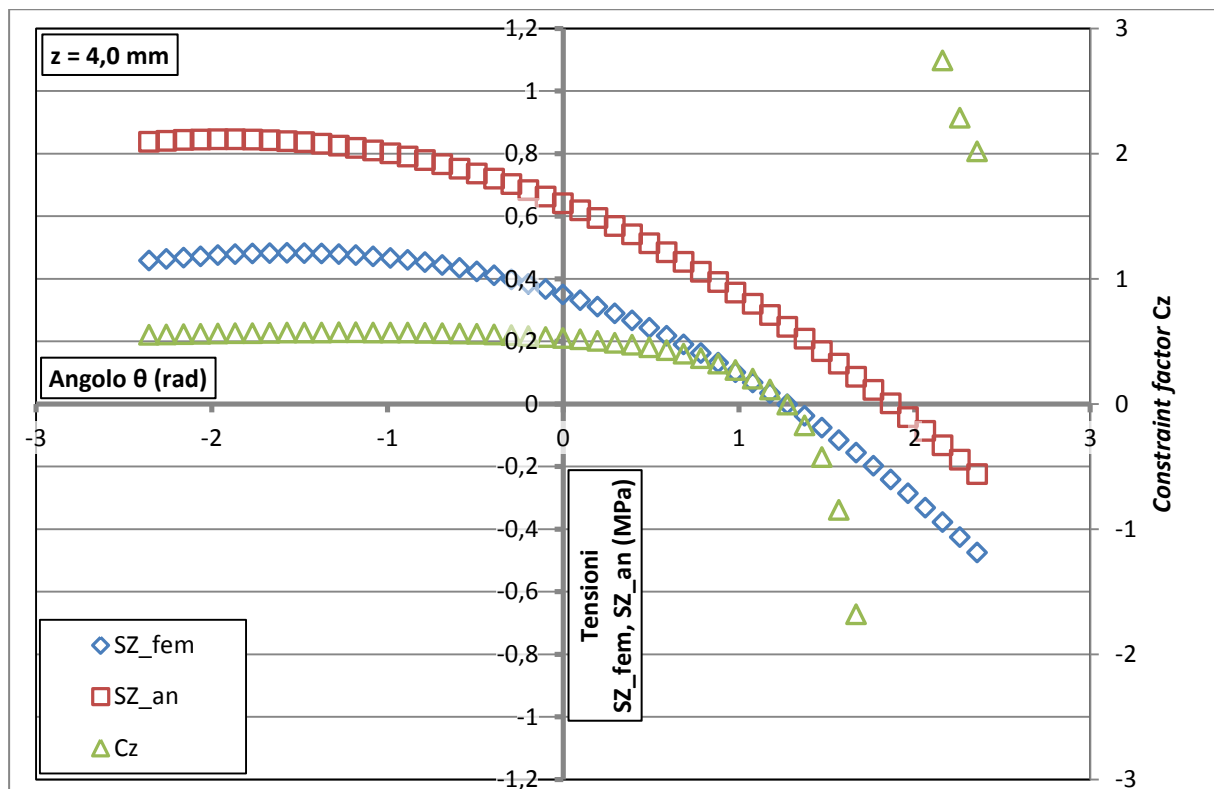


Figura 6.63 Andamento della tensione σ_z ricavata dal FEM e calcolata analiticamente nell'ipotesi di deformazione piana e del constraint factor C_z al variare dell'angolo θ ad una distanza pari a $r = 0.1 \text{ mm}$ dall'apice dell'intaglio per la sezione di coordinata $z = 4.0 \text{ mm}$

Da notare la presenza di un valore di θ in cui la somma delle tensioni ($\sigma_r + \sigma_\theta$) si annulla: per tale coordinata $\theta = \theta^*$ (approssimativamente, per tutte le sezioni riportate, $1.8 < \theta^* < 1.9$) si ha la presenza di un asintoto verticale per il *constraint factor*:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta^{*-}} C_z &= -\infty \\ \lim_{\theta \rightarrow \theta^{*+}} C_z &= +\infty \end{aligned} \quad (6.29)$$

La variabilità del *constraint factor* in direzione radiale e circonferenziale è stata documentata in letteratura per il caso di intagli a V con raggio di fondo intaglio non nullo soggetti a carichi esterni di modo I. [50]

Per effetto dell'asimmetria nell'andamento di C_z in funzione dell'angolo θ , il contributo energetico di modo misto legato ai modi I e II non è più nullo. Per volumi di controllo simmetrici rispetto alla bisettrice dell'intaglio, l'equazione dell'integrale I_{12} che compare nell'espressione del SED era infatti la seguente:

$$\begin{aligned} I_{12}(\gamma, \nu, C_z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} (2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2C_z^2\widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} \\ &\quad + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + C_z\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z\widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) \\ &\quad + 4(1 + \nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)}) d\theta \end{aligned} \quad (6.30)$$

Dove $\widetilde{\sigma}_z^{(1)} = \nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)})$ e $\widetilde{\sigma}_z^{(2)} = \nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)})$.

Definiamo ora le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{2\pi} [2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) \\ &\quad + 4(1 + \nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)}] \\ B(\theta, C_z) &= \frac{1}{2\pi} [2C_z^2\widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} - 2\nu(C_z\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + C_z\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + C_z\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} \\ &\quad + C_z\widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)})] \end{aligned} \quad (6.31)$$

L'integrale sopra riportato può essere quindi riscritto come:

$$I_{12}(\gamma, \nu, C_z) = \int_{-\gamma}^{+\gamma} (A(\theta) + B(\theta, C_z)) d\theta \quad (6.32)$$

La funzione $A(\theta)$ contiene i termini dell'integrale legati alle sole tensioni σ_θ e σ_r , ed è quindi indipendente dal *constraint factor*, mentre la funzione $B(\theta, C_z)$ contiene i termini dell'integrale in cui compare la componente di tensione σ_z , ed è perciò dipendente dal valore di C_z .

In Fig. 6.64 sono stati riportati i valori della funzione $A(\theta)$ al variare dell'angolo θ , e i valori della funzione $B(\theta, C_z)$ considerando un valore di C_z costante (B' , con *constraint factor* unitario) e il valore di C_z calcolato mediante le tensioni ricavate dagli elementi finiti (B'').

Si può notare come la funzione $A(\theta)$ sia dispari, mentre la funzione $B(\theta, C_z)$ sia dispari nel caso di *constraint factor* costante (B'), ma perda tale proprietà nel caso di C_z variabile (B'').

Tale osservazione risulta ancora più immediata dal diagramma di Fig. 6.65, che riporta i valori assoluti delle grandezze precedentemente definite, per un confronto più agevole. Si nota inoltre come in prossimità dell'asintoto verticale per il *constraint factor* C_z , ovvero il punto in cui la somma $(\sigma_r + \sigma_\theta)$ diventa nulla, la quantità B'' non presenti un andamento ben definito.

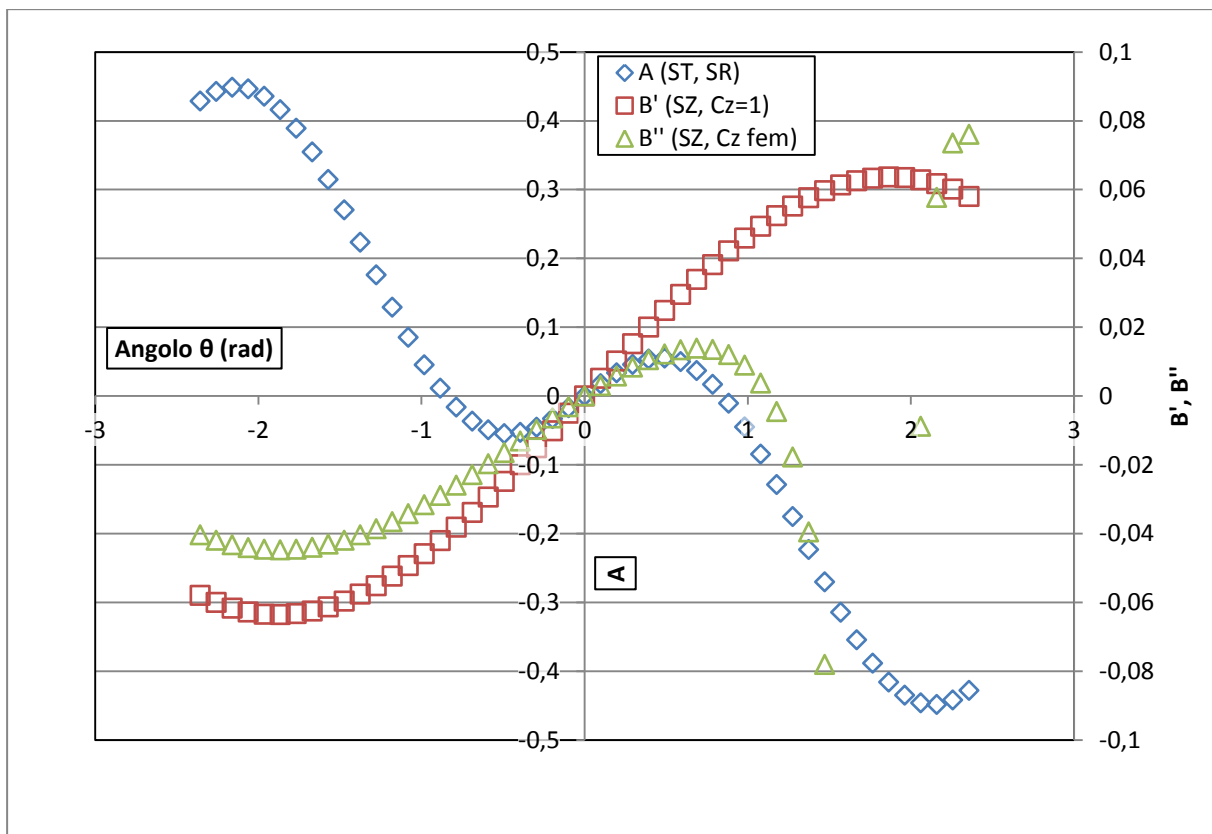


Figura 6.64 Andamento delle funzioni $A(\theta)$ e $B(\theta, C_z)$ nel caso di *constraint factor* costante e unitario (B') e utilizzando il *constraint factor* ricavato dal FEM (B'') al variare dell'angolo θ

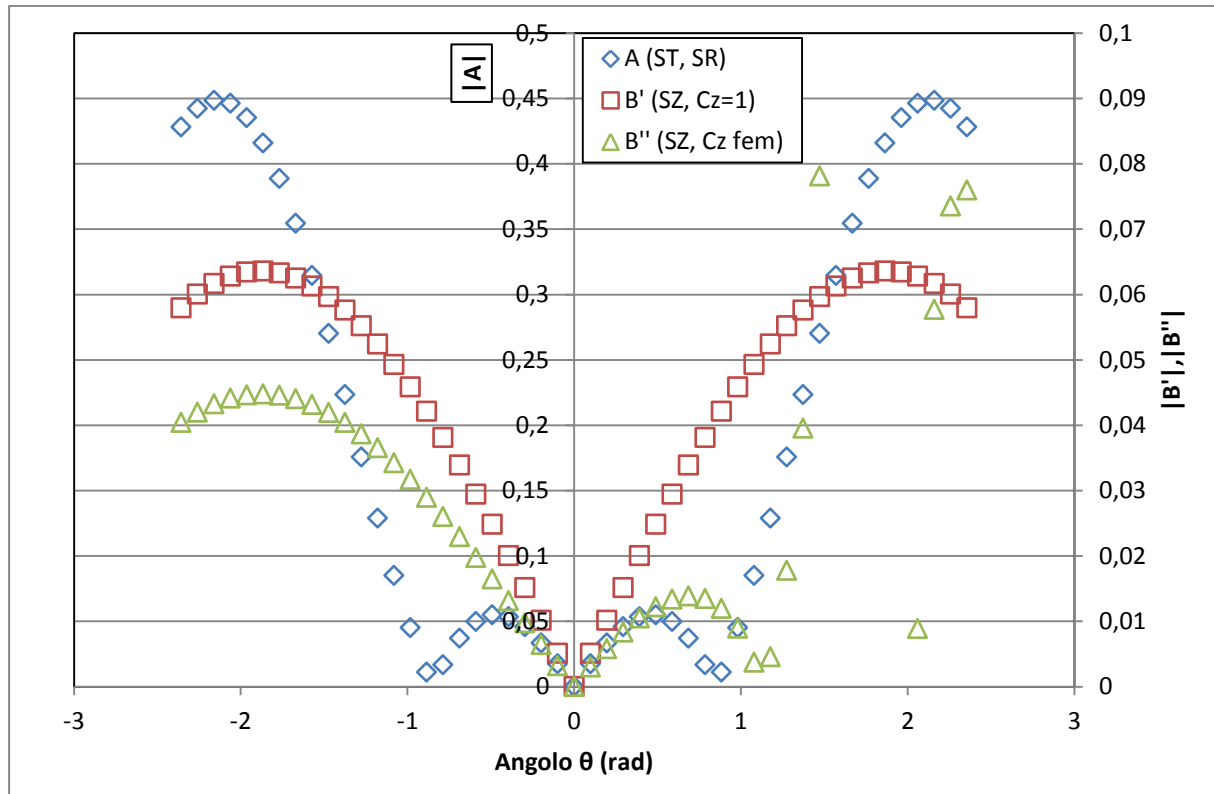


Figura 6.65 Andamento del valore assoluto delle funzioni $A(\theta)$ e $B(\theta, C_z)$ nel caso di constraint factor costante e unitario (B') e utilizzando il constraint factor ricavato dal FEM (B'') al variare dell'angolo θ

Rappresentando l'integrale l'area sotto la curva della funzione integranda, si può concludere come nel caso di *constraint factor* variabile lungo la coordinata θ il valore dell'integrale $I_{12}(\gamma, \nu, C_z)$ non sia nullo anche nel caso di volume di controllo simmetrico rispetto alla bisettrice dell'intaglio. Pertanto, nel caso della piastra in esame, comparirà un contributo di modo misto W_{12} nell'espressione della densità di energia di deformazione totale, deviatorica o idrostatica, pur utilizzando volumi di controllo simmetrici rispetto alla bisettrice dell'intaglio. Si ricorda la definizione del contributo di modo misto per il SED totale, deviatorico e idrostatico, mettendo in evidenza la dipendenza dell'integrale dalla distribuzione del *constraint factor*:

$$W_{12} = \frac{1}{2E} \left[\frac{I_{12}(C_z(r, \theta))}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right]$$

$$W_{12,dev} = \frac{(1 + \nu)}{3E} \left[\frac{I_{12,dev}(C_z(r, \theta))}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right] \quad (6.33)$$

$$W_{12,id} = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} \left[\frac{I_{12,id}(C_z(r, \theta))}{(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right]$$

Non si dispone tuttavia di alcuna espressione analitica per gli integrali $I_{12}(C_z(r, \theta))$, $I_{12,dev}(C_z(r, \theta))$ e $I_{12,id}(C_z(r, \theta))$, non essendo nota l'espressione del *constraint factor* in funzione dell'angolo θ e del raggio r .

6.6.3.3 Variabilità del *constraint factor* in direzione radiale

Dopo aver osservato l'andamento di C_z lungo la bisettrice dell'intaglio e al variare della coordinata angolare θ , si ritiene utile diagrammare l'andamento radiale del *constraint factor* per diversi valori dell'angolo θ . In Fig. 6.66, relativa al piano di mezzeria ($z = 0 \text{ mm}$), è stato riportato il valore di C_z , calcolato secondo la consueta definizione utilizzando le tensioni ricavate dal codice di calcolo agli elementi finiti, per valori del raggio compresi tra 0 mm e $R_a = 0.1 \text{ mm}$ e per diversi valori dell'angolo θ .

Per apprezzare al meglio le variazioni dell'andamento del *constraint factor*, sono stati eseguiti due ingrandimenti degli assi della Fig. 6.66, evidenziando l'andamento del *constraint factor* in prossimità dell'apice dell'intaglio (Fig. 6.67 – 6.68).

Si nota come la variabilità radiale del *constraint factor* sia fortemente influenzata dall'angolo assunto rispetto alla bisettrice dell'intaglio. Si può notare come solo in corrispondenza dell'apice dell'intaglio il *constraint factor* abbia valore unitario, per poi decrescere rapidamente, in particolare per valori dell'angolo θ elevati, ovvero nella zona in cui il modo II induce uno stato di compressione.

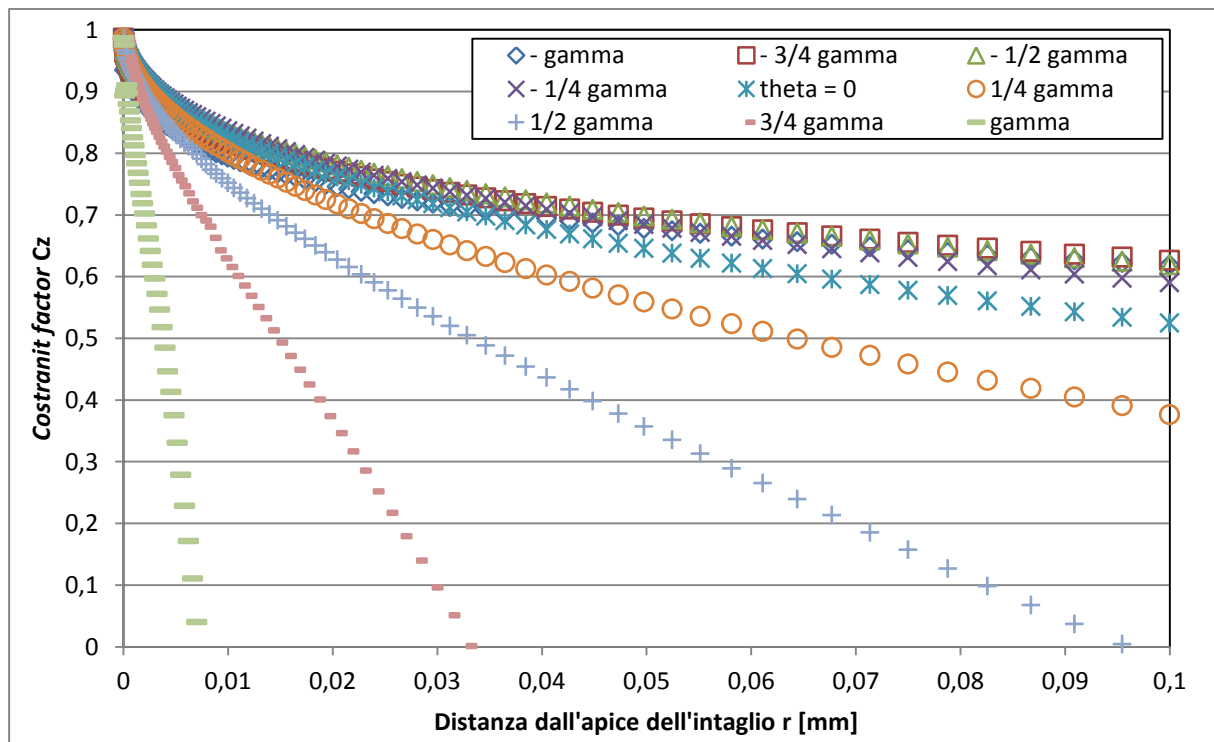


Figura 6.66 Andamento radiale del *constraint factor* all'interno del volume di controllo per diversi valori della coordinata angolare θ

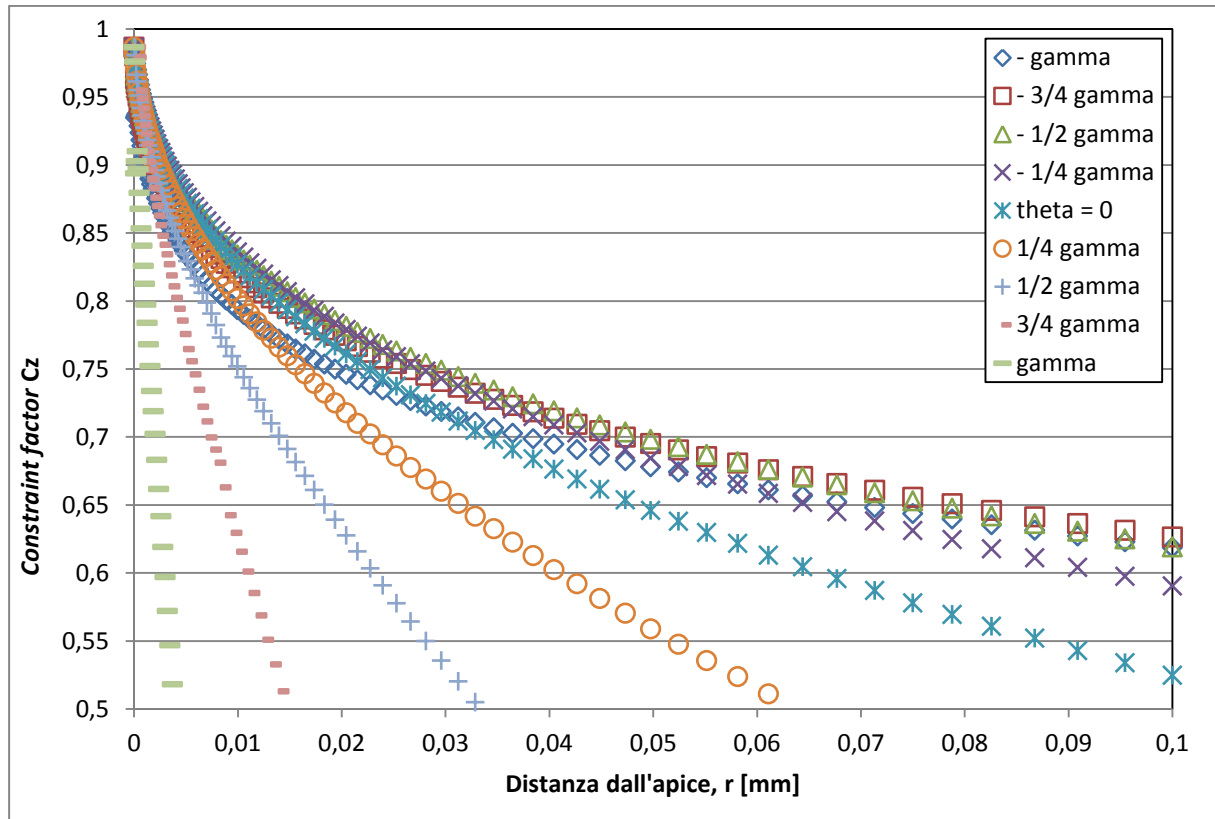


Figura 6.67 Andamento radiale del constraint factor all'interno del volume di controllo per diversi valori della coordinata angolare θ : ingrandimento della scala delle ordinate

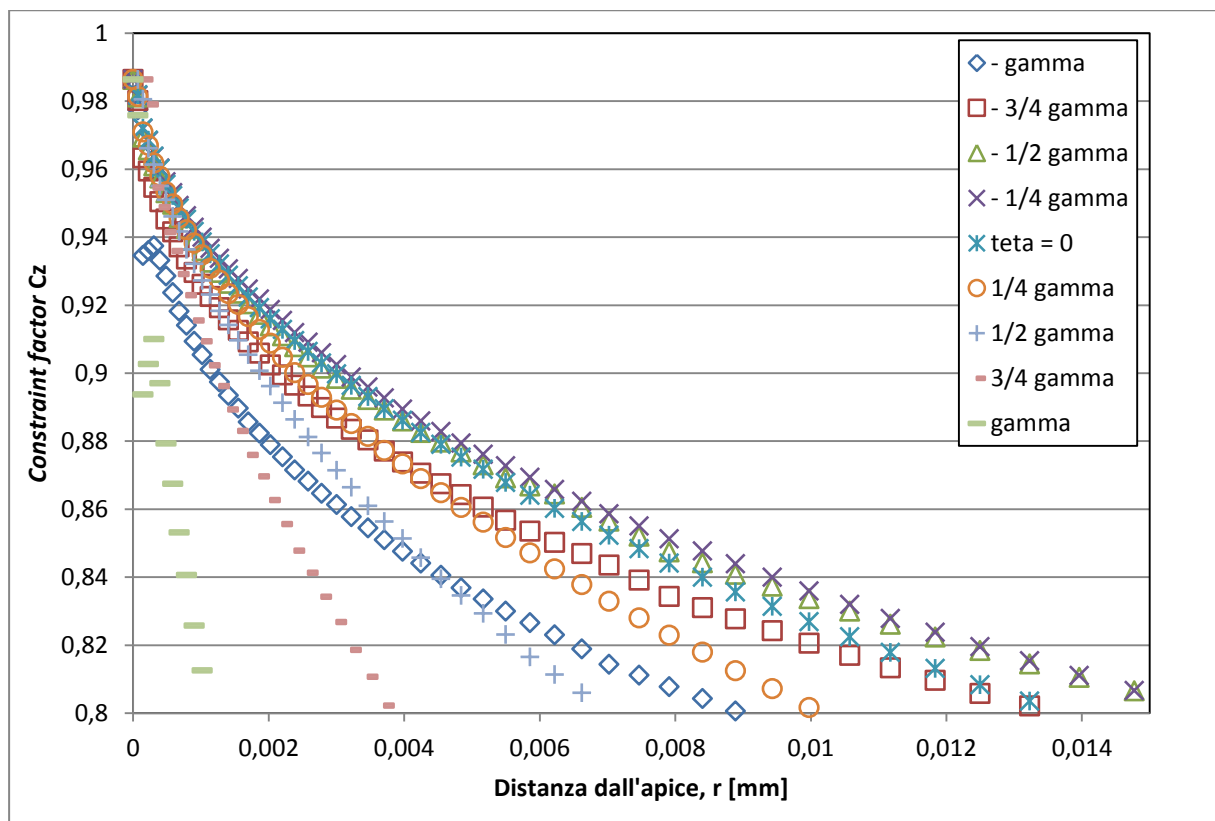


Figura 6.68 Andamento radiale del constraint factor all'interno del volume di controllo per diversi valori della coordinata angolare θ : ingrandimento della scala delle ascisse e delle ordinate

6.7 Utilizzo del SED totale, deviatorico e idrostatico in volumi di controllo costituiti da settori cilindrici

Si suddivide ora il volume di controllo cilindrico di raggio $R_a = 0.1 \text{ mm}$ in settori cilindrici (di altezza $h = 0.1 \text{ mm}$), come evidenziato nella Fig. 6.69 (che ne riporta la sezione).

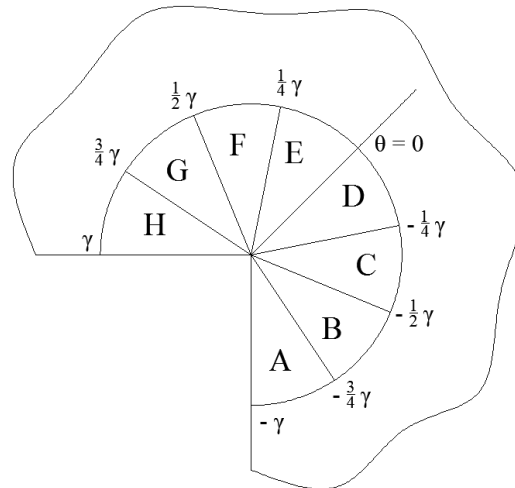


Figura 6.69 Volumi di controllo costituiti da settori cilindrici (visti in sezione)

Per poter ricavare con semplicità il valore del SED in ciascun settore cilindrico, è stato realizzato un nuovo modello bidimensionale della piastra, con una mesh simile al modello precedente ma con una diversa suddivisione dei volumi (Fig. 6.70 e 6.71). La mesh di tale modello è stata poi estrusa, ottenendo strati di elementi di profondità $h = 0.1 \text{ mm}$, pari cioè all'altezza dei settori cilindrici che costituiscono il volume di controllo.

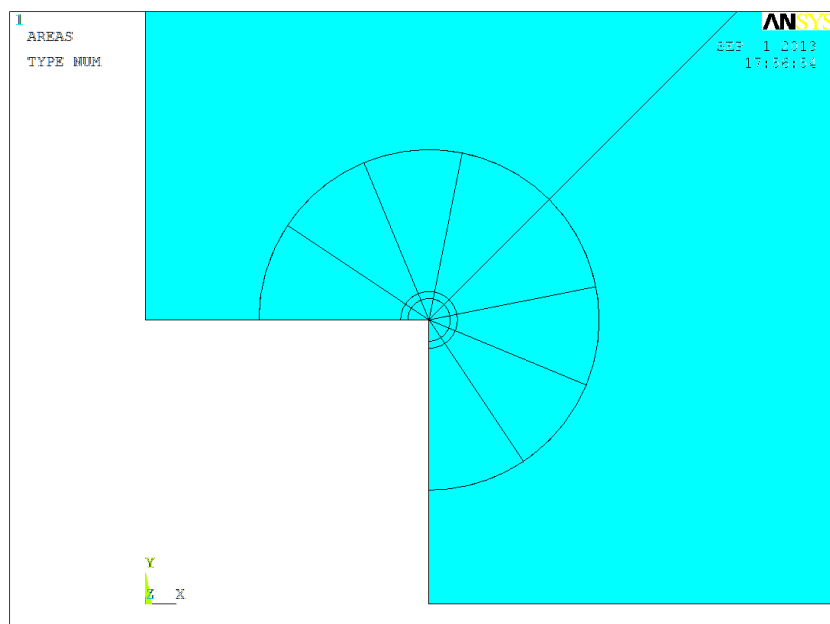


Figura 6.70 Suddivisione in volumi costituiti da settori circolari nel modello bidimensionale

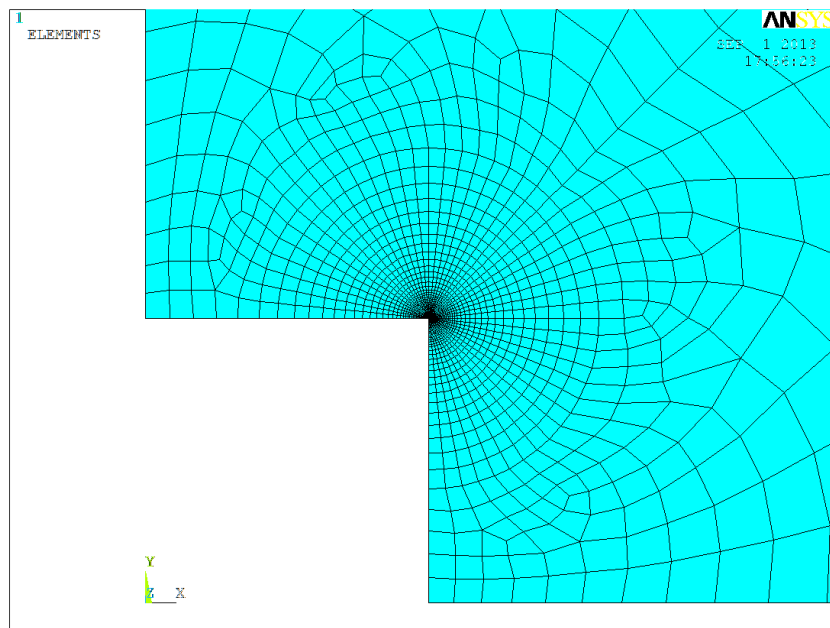


Figura 6.71 Mesh del modello bidimensionale che è stata estrusa per ottenere il modello tridimensionale

Si assumerà ora che il *constraint factor* sia costante all'interno di ciascun settore cilindrico, ma non necessariamente uguale per diversi settori: si commetterà certamente un errore limitato rispetto all'ipotesi della costanza di C_z all'interno dell'intero volume cilindrico. Inoltre, scrivendo le equazioni della densità dell'energia di deformazione per ciascun settore circolare, non si commette l'errore di trascurare il contributo di modo misto, poiché gli integrali $I_{12}(C_z)$, $I_{12,dev}(C_z)$ e $I_{12,id}(C_z)$ ora non si annullano per la non simmetria del volume di controllo rispetto alla bisettrice dell'intaglio. La suddivisione del volume di controllo originario in volumi di controllo costituiti da settori cilindrici appare essere così un modo semplice ed efficace per tenere conto del contributo di modo misto dovuto alla variabilità di C_z lungo la coordinata θ . Per la scrittura delle espressioni del SED totale, deviatorico ed idrostatico nei nuovi volumi di controllo, si veda l'Appendice §A6.

Dal confronto tra i diagrammi delle Fig. 6.59 – 6.63 e la suddivisione del volume di controllo in settori cilindrici (Fig. 6.69) si può osservare che:

- ad una distanza pari a R_a dall'apice dell'intaglio, C_z appare essere approssimativamente costante all'interno dei settori cilindrici A, B, C e D , per poi cominciare a decrescere lentamente nel settore E ;
- l'andamento radiale di C_z è simile per valori dell'angolo θ compresi tra $-3/4 \gamma$ e 0 , specialmente per piccole distanze dall'apice dell'intaglio, zona in cui le tensioni sono più elevate e daranno pertanto un maggior contributo al calcolo dell'energia di deformazione.

Alla luce di tali osservazioni, si ipotizza che il valore medio di C_z nei settori circolari B, C e D sia approssimativamente lo stesso, presentando piccole variazioni per i volumi di controllo a questi limitrofi (A ed E). Per verificare la veridicità di tale ipotesi, si è provato a ricavare il valore di C_z dalle equazioni del SED totale, deviatorico e idrostatico di ciascun settore circolare per alcuni *layers* di elementi, inserendo i valori dei fattori di intensificazione delle tensioni ricavati con le definizioni di Gross e Mendelson (Tab. 6.3, 6.4 e 6.5).

Tabella 6.3 Valori del constraint factor ricavati per ciascun volume di controllo (settore cilindrico) dalle espressioni del SED totale, deviatorico ed idrostatico per il layer di elementi individuato dalle coordinate $0.0 \text{ mm} < z < 0.1 \text{ mm}$

SED totale: $\overline{W}_N = \overline{W}_{N,FEM}$	SED deviatorico: $\overline{W}_{N,dev} = \overline{W}_{N,dev,FEM}$	SED idrostatico: $\overline{W}_{N,id} = \overline{W}_{N,FEM,id}$
$C_{z,A} = 0.728474$	$C_{z,A,dev} = 0.700240$	$C_{z,A,id} = 0.681537$
$C_{z,B} = 0.568293$	$C_{z,B,dev} = 0.660954$	$C_{z,B,id} = 0.724998$
$C_{z,C} = 0.522352$	$C_{z,C,dev} = 0.647784$	$C_{z,C,id} = 0.742987$
$C_{z,D} = 0.517845$	$C_{z,D,dev} = 0.643872$	$C_{z,D,id} = 0.739888$
$C_{z,E} = 0.484131$	$C_{z,E,dev} = 0.603898$	$C_{z,E,id} = 0.702003$
$C_{z,F} = 0.313919$	$C_{z,F,dev} = 0.448476$	$C_{z,F,id} = 0.603049$
$C_{z,G} = -0.0749441$	$C_{z,G,dev} = 0.091351$	$C_{z,G,id} = 0.427364$
$C_{z,H} = -1.10066$	$C_{z,H,dev} = -0.41555$	$C_{z,H,id} = 1.81523$

Tabella 6.4 Valori del constraint factor ricavati per ciascun volume di controllo (settore cilindrico) dalle espressioni del SED totale, deviatorico ed idrostatico per il layer di elementi individuato dalle coordinate $2.0 \text{ mm} < z < 2.1 \text{ mm}$

SED totale: $\overline{W}_N = \overline{W}_{N,FEM}$	SED deviatorico: $\overline{W}_{N,dev} = \overline{W}_{N,dev,FEM}$	SED idrostatico: $\overline{W}_{N,id} = \overline{W}_{N,FEM,id}$
$C_{z,A} = 0.710429$	$C_{z,A,dev} = 0.690571$	$C_{z,A,id} = 0.681086$
$C_{z,B} = 0.560794$	$C_{z,B,dev} = 0.655000$	$C_{z,B,id} = 0.725403$
$C_{z,C} = 0.520590$	$C_{z,C,dev} = 0.646148$	$C_{z,C,id} = 0.744629$
$C_{z,D} = 0.522007$	$C_{z,D,dev} = 0.646151$	$C_{z,D,id} = 0.743218$
$C_{z,E} = 0.495419$	$C_{z,E,dev} = 0.609890$	$C_{z,E,id} = 0.707685$
$C_{z,F} = 0.332387$	$C_{z,F,dev} = 0.459847$	$C_{z,F,id} = 0.612421$
$C_{z,G} = -0.0435577$	$C_{z,G,dev} = 0.115856$	$C_{z,G,id} = 0.441984$
$C_{z,H} = -1.04468$	$C_{z,H,dev} = -0.364483$	$C_{z,H,id} = 1.78884$

Tabella 6.5 Valori del constraint factor ricavati per ciascun volume di controllo (settore cilindrico) dalle espressioni del SED totale, deviatorico ed idrostatico per il layer di elementi individuato dalle coordinate $4.0 \text{ mm} < z < 4.1 \text{ mm}$

SED totale: $\overline{W}_N = \overline{W}_{N,FEM}$	SED deviatorico: $\overline{W}_{N,dev} = \overline{W}_{N,dev,FEM}$	SED idrostatico: $\overline{W}_{N,id} = \overline{W}_{N,FEM,id}$
$C_{z,A} = 0.567276$	$C_{z,A,dev} = 0.639909$	$C_{z,A,id} = 0.650182$
$C_{z,B} = 0.495190$	$C_{z,B,dev} = 0.620969$	$C_{z,B,id} = 0.698416$
$C_{z,C} = 0.490622$	$C_{z,C,dev} = 0.629193$	$C_{z,C,id} = 0.723740$
$C_{z,D} = 0.505664$	$C_{z,D,dev} = 0.647320$	$C_{z,D,id} = 0.731247$
$C_{z,E} = 0.489027$	$C_{z,E,dev} = 0.634810$	$C_{z,E,id} = 0.708500$
$C_{z,F} = 0.360340$	$C_{z,F,dev} = 0.518007$	$C_{z,F,id} = 0.632688$
$C_{z,G} = 0.0530245$	$C_{z,G,dev} = 0.217312$	$C_{z,G,id} = 0.484202$
$C_{z,H} = -1.06411$	$C_{z,H,dev} = -0.476446$	$C_{z,H,id} = 1.50283$

Come si può notare dai risultati riportati nelle Tab. 6.3, 6.4 e 6.5, le ipotesi precedentemente avanzate sono in parte verificate. Nel dettaglio, i volumi di controllo costituiti dai settori cilindrici B, C, D e in misura minore E presentano valori simili del *constraint factor*, mentre per i rimanenti volumi di controllo il valore di C_z è in genere sensibilmente differente. Si nota inoltre come il valore del *constraint factor* ottenuto dall'espressione del SED all'interno dello stesso volume di controllo sia differente a seconda del tipo di densità di energia di deformazione utilizzata (totale, deviatorica o idrostatica).

Si è quindi provato a risolvere i seguenti sistemi, costituiti dalle espressioni della densità di energia di deformazione totale, o deviatorica, o idrostatica all'interno dei settori cilindrici B, C, D ed E . Le incognite per ciascun sistema sono gli N-SIFs di modo I, II e III e C_z , per i sistemi che utilizzano la densità di energia totale o deviatorica, mentre per il sistema che utilizza la densità di energia di deformazione idrostatica le incognite si riducono a tre, non comparando il termine legato al modo III.

$$\begin{cases} \overline{W}_B = \overline{W}_{B,FEM} \\ \overline{W}_C = \overline{W}_{C,FEM} \\ \overline{W}_D = \overline{W}_{D,FEM} \\ \overline{W}_E = \overline{W}_{E,FEM} \end{cases} \quad (6.34)$$

$$\begin{cases} \overline{W}_{B,dev} = \overline{W}_{B,dev,FEM} \\ \overline{W}_{C,dev} = \overline{W}_{C,dev,FEM} \\ \overline{W}_{D,dev} = \overline{W}_{D,dev,FEM} \\ \overline{W}_{E,dev} = \overline{W}_{E,dev,FEM} \end{cases} \quad (6.35)$$

$$\begin{cases} \bar{W}_{B,id} = \bar{W}_{B,FEM.id} \\ \bar{W}_{C,id} = \bar{W}_{C,FEM.id} \\ \bar{W}_{D,id} = \bar{W}_{D,FEM.id} \end{cases} \quad (6.36)$$

Mentre il sistema (6.36), impostato con la densità di energia di deformazione idrostatica, non ha fornito risultati validi per i fattori di intensificazione delle tensioni, i sistemi (6.34) e (6.35), impostati con la densità di energia di deformazione totale e deviatorica, hanno permesso di ottenere dei risultati che si rivelano solo parzialmente migliori rispetto a quelli ottenuti con il sistema (6.5), come si può notare nelle Fig. 6.72, 6.73 e 6.74 relativi alle sezioni individuate dalla coordinata media $z = 0.05 \text{ mm}$, $z = 2.05 \text{ mm}$ e $z = 4.05 \text{ mm}$.

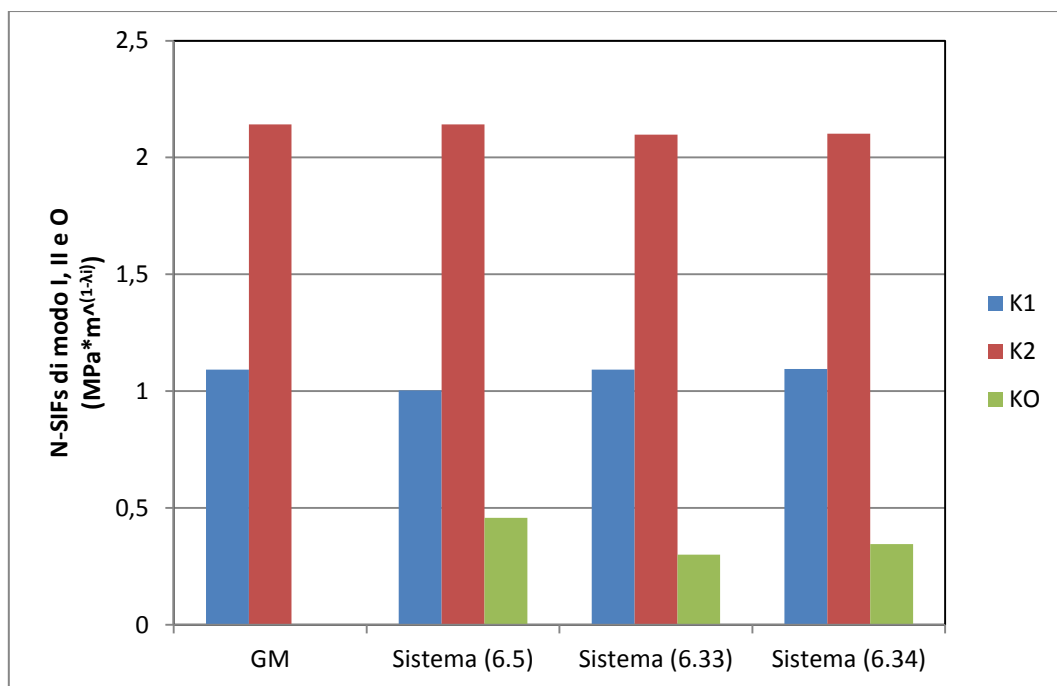


Figura 6.72 Fattori di intensificazione delle tensioni ottenuti con le definizioni di Gross e Mendelson e con i sistemi (6.5), (6.33) e (6.34) per il layer di elementi individuato dalla coordinata $0.0 \text{ mm} < z < 0.1 \text{ mm}$

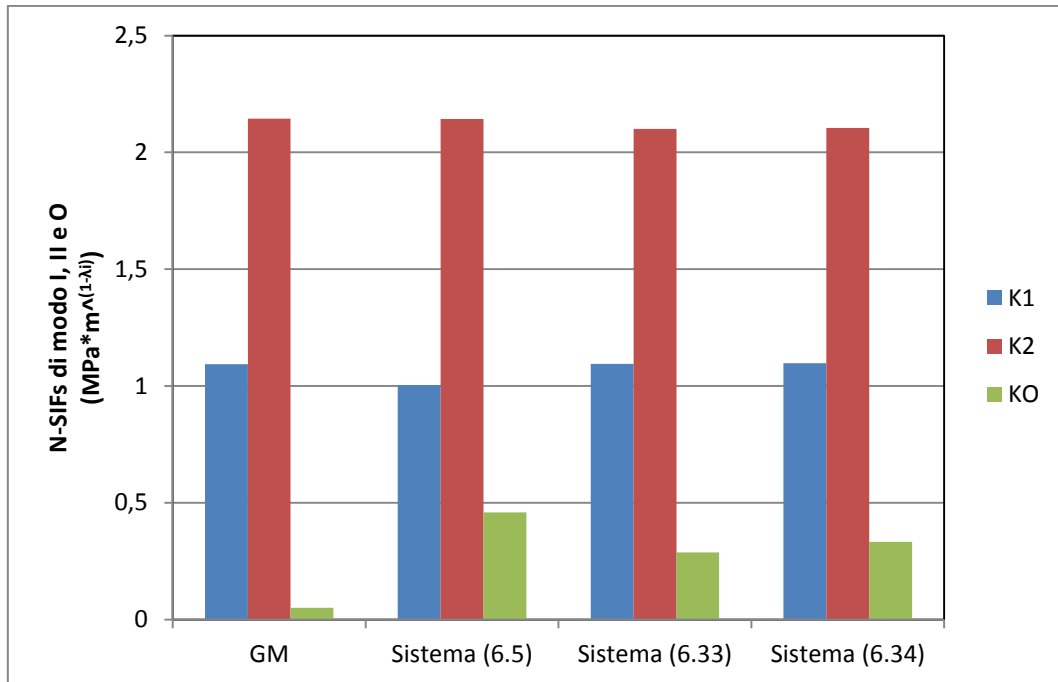


Figura 6.73 Fattori di intensificazione delle tensioni ottenuti con le definizioni di Gross e Mendelson e con i sistemi (6.5), (6.33) e (6.34) per il layer di elementi individuato dalla coordinata $2.0 \text{ mm} < z < 2.1 \text{ mm}$

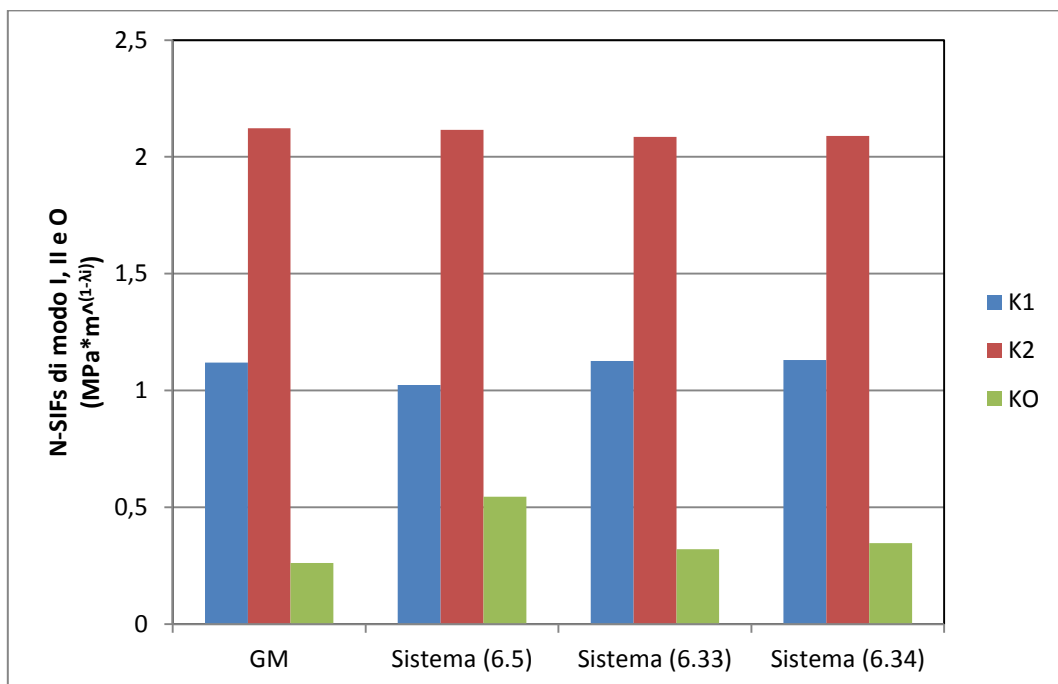


Figura 6.74 Fattori di intensificazione delle tensioni ottenuti con le definizioni di Gross e Mendelson e con i sistemi (6.5), (6.33) e (6.34) per il layer di elementi individuato dalla coordinata $4.0 \text{ mm} < z < 4.1 \text{ mm}$

6.8 Osservazioni conclusive

In questo capitolo si è provato a ricavare un metodo per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni utilizzando la densità di energia di deformazione totale e deviatorica in problemi tridimensionali, in maniera analoga a quanto visto nel Cap. §5 nel caso di problemi bidimensionali. Il caso in esame è quello della piastra con intaglio quadro ed estensione tridimensionale finita e non trascurabile.

Ipotizzando inizialmente uno stato di deformazione piana all'interno del volume di controllo e utilizzando le espressioni del SED totale e deviatorico riportate nel Cap. §2, in volumi di controllo cilindrici con raggio differente, si sono ricavati valori degli N-SIFs che per il modo I e ancor più per il modo III distano in maniera considerevole dai valori ricavati con le definizioni di Gross e Mendelson. Applicando un metodo correttivo basato su osservazioni che possono essere eseguite solo successivamente all'analisi effettuata e che si ritengono valide per il modello analizzato, ma che possono non essere valide per altri modelli, si è riusciti ad ottenere con buona approssimazione i valori degli N-SIFs per gran parte dello spessore della piastra analizzata.

Come possibili cause di errore per l'applicazione del metodo proposto, sono stati analizzati tre fattori:

- è stata introdotta la componente simmetrica del modo III, il cui contributo energetico si è rivelato trascurabile e non è stato perciò considerato successivamente;
- si è analizzato il grado di bontà con cui le componenti di tensione vengono descritte dalle equazioni utilizzate nella formulazione analitica del problema (Cap. §2), escludendo così contributi misti dei modi I e II con i modi III,a e III,s nella formulazione del SED;
- si è analizzata la variabilità del *constraint factor* all'interno del volume di controllo.

Soffermandosi su questo ultimo punto, il *constraint factor* si è rivelato estremamente variabile in direzione radiale e circonferenziale all'interno del volume di controllo considerato: molto probabilmente questa variabilità è la causa che porta alla discrepanza tra i valori degli N-SIFs calcolati con il metodo energetico e quelli calcolati con le definizioni di Gross e Mendelson.

Come ultimo tentativo, si è provato ad utilizzare un sistema costituito dalle equazioni del SED totale o deviatorico all'interno di volumi di controllo costituiti da settori circolari, all'interno dei quali il *constraint factor* è ipotizzato costante: tuttavia si sono ottenuti solo parziali miglioramenti rispetto alla soluzione fornita dal sistema inizialmente proposto.

Appendice A4

Valori degli integrali riportati nella formulazione analitica del SED nel caso di cricche

Utilizzando le espressioni analitiche presentate nel Capitolo §2, si possono tabellare i valori degli integrali in funzione del modulo di Poisson ν e del constraint factor C_z per un certo valore dell'angolo di apertura dell'intaglio 2α o, equivalentemente, dell'angolo $\gamma = \pi - \alpha$.

Verranno ora riportati i valori di tali integrali nel caso di una cricca, ovvero angolo di apertura $2\alpha = 0$ ($\gamma = \pi$), al variare degli altri due parametri.

In ogni tabella, si potrà leggere nella prima colonna il valore del constraint factor C_z e nella prima riga il valore del modulo di Poisson. Uniche eccezioni i valori di I_3 e $I_{3,dev}$, essendo entrambi indipendenti da C_z (nel caso di $I_{3,dev}$, si ha in aggiunta l'indipendenza dal modulo di Poisson, quindi, per un dato valore dell'angolo di apertura dell'intaglio, si avrà un unico valore dell'integrale).

Si ricorda come nella formulazione degli integrali si è assunto il constraint factor C_z costante all'interno del volume di controllo.

Nella letteratura, le soluzioni degli integrali per il calcolo del SED erano prima disponibili solo nei casi di tensione e deformazione piana, inclusi nella trattazione eseguita come casi dal particolare valore di $C_z = 1$ (deformazione piana) e $C_z = 0$ (tensione piana). Si nota come i risultati degli integrali riportati nelle tabelle per questi due casi coincidono con i risultati presenti in letteratura per i casi di deformazione piana e tensione piana. [43, 51]

Si noti inoltre che $I_{1,id} = I_{2,id}$ per tutti i valori di C_z e di ν .

A4.1 SED totale

- integrale I_1

	C_z / v	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
(plane strain)	1.00	1.25000	1.20750	1.15500	1.09250	1.02000	0.93750	0.84500	0.74250	0.63000	0.50750	0.37500
	0.95	1.25000	1.20751	1.15505	1.09261	1.02020	0.93781	0.84545	0.74311	0.63080	0.50851	0.37625
	0.90	1.25000	1.20755	1.15520	1.09295	1.02080	0.93875	0.84680	0.74495	0.63320	0.51155	0.38000
	0.85	1.25000	1.20761	1.15545	1.09351	1.02180	0.94031	0.84905	0.74801	0.63720	0.51661	0.38625
	0.80	1.25000	1.20770	1.15580	1.09430	1.02320	0.94250	0.85220	0.75230	0.64280	0.52370	0.39500
	0.75	1.25000	1.20781	1.15625	1.09531	1.02500	0.94531	0.85625	0.75781	0.65000	0.53281	0.40625
	0.70	1.25000	1.20795	1.15680	1.09655	1.02720	0.94875	0.86120	0.76455	0.65880	0.54395	0.42000
	0.65	1.25000	1.20811	1.15745	1.09801	1.02980	0.95281	0.86705	0.77251	0.66920	0.55711	0.43625
	0.60	1.25000	1.20830	1.15820	1.09970	1.03280	0.95750	0.87380	0.78170	0.68120	0.57230	0.45500
	0.55	1.25000	1.20851	1.15905	1.10161	1.03620	0.96281	0.88145	0.79211	0.69480	0.58951	0.47625
	0.50	1.25000	1.20875	1.16000	1.10375	1.04000	0.96875	0.89000	0.80375	0.71000	0.60875	0.50000
	0.45	1.25000	1.20901	1.16105	1.10611	1.04420	0.97531	0.89945	0.81661	0.72680	0.63001	0.52625
	0.40	1.25000	1.20930	1.16220	1.10870	1.04880	0.98250	0.90980	0.83070	0.74520	0.65330	0.55500
	0.35	1.25000	1.20961	1.16345	1.11151	1.05380	0.99031	0.92105	0.84601	0.76520	0.67861	0.58625
	0.30	1.25000	1.20995	1.16480	1.11455	1.05920	0.99875	0.93320	0.86255	0.78680	0.70595	0.62000
0.25	1.25000	1.21031	1.16625	1.11781	1.06500	1.00781	0.94625	0.88031	0.81000	0.73531	0.65625	
0.20	1.25000	1.21070	1.16780	1.12130	1.07120	1.01750	0.96020	0.89930	0.83480	0.76670	0.69500	
0.15	1.25000	1.21111	1.16945	1.12501	1.07780	1.02781	0.97505	0.91951	0.86120	0.80011	0.73625	
0.10	1.25000	1.21155	1.17120	1.12895	1.08480	1.03875	0.99080	0.94095	0.88920	0.83555	0.78000	
0.05	1.25000	1.21201	1.17305	1.13311	1.09220	1.05031	1.00745	0.96361	0.91880	0.87301	0.82625	
(plane stress)	0.00	1.25000	1.21250	1.17500	1.13750	1.10000	1.06250	1.02500	0.98750	0.95000	0.91250	0.87500

- integrale I_2

	C_z / ν	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
(plane strain)	1.00	2.25000	2.25750	2.25500	2.24250	2.22000	2.18750	2.14500	2.09250	2.03000	1.95750	1.87500
	0.95	2.25000	2.25751	2.25505	2.24261	2.22020	2.18781	2.14545	2.09311	2.03080	1.95851	1.87625
	0.90	2.25000	2.25755	2.25520	2.24295	2.22080	2.18875	2.14680	2.09495	2.03320	1.96155	1.88000
	0.85	2.25000	2.25761	2.25545	2.24351	2.22180	2.19031	2.14905	2.09801	2.03720	1.96661	1.88625
	0.80	2.25000	2.25770	2.25580	2.24430	2.22320	2.19250	2.15220	2.10230	2.04280	1.97370	1.89500
	0.75	2.25000	2.25781	2.25625	2.24531	2.22500	2.19531	2.15625	2.10781	2.05000	1.98281	1.90625
	0.70	2.25000	2.25795	2.25680	2.24655	2.22720	2.19875	2.16120	2.11455	2.05880	1.99395	1.92000
	0.65	2.25000	2.25811	2.25745	2.24801	2.22980	2.20281	2.16705	2.12251	2.06920	2.00711	1.93625
	0.60	2.25000	2.25830	2.25820	2.24970	2.23280	2.20750	2.17380	2.13170	2.08120	2.02230	1.95500
	0.55	2.25000	2.25851	2.25905	2.25161	2.23620	2.21281	2.18145	2.14211	2.09480	2.03951	1.97625
	0.50	2.25000	2.25875	2.26000	2.25375	2.24000	2.21875	2.19000	2.15375	2.11000	2.05875	2.00000
	0.45	2.25000	2.25901	2.26105	2.25611	2.24420	2.22531	2.19945	2.16661	2.12680	2.08001	2.02625
	0.40	2.25000	2.25930	2.26220	2.25870	2.24880	2.23250	2.20980	2.18070	2.14520	2.10330	2.05500
	0.35	2.25000	2.25961	2.26345	2.26151	2.25380	2.24031	2.22105	2.19601	2.16520	2.12861	2.08625
	0.30	2.25000	2.25995	2.26480	2.26455	2.25920	2.24875	2.23320	2.21255	2.18680	2.15595	2.12000
0.25	2.25000	2.26031	2.26625	2.26781	2.26500	2.25781	2.24625	2.23031	2.21000	2.18531	2.15625	
0.20	2.25000	2.26070	2.26780	2.27130	2.27120	2.26750	2.26020	2.24930	2.23480	2.21670	2.19500	
0.15	2.25000	2.26111	2.26945	2.27501	2.27780	2.27781	2.27505	2.26951	2.26120	2.25011	2.23625	
0.10	2.25000	2.26155	2.27120	2.27895	2.28480	2.28875	2.29080	2.29095	2.28920	2.28555	2.28000	
0.05	2.25000	2.26201	2.27305	2.28311	2.29220	2.30031	2.30745	2.31361	2.31880	2.32301	2.32625	
(plane stress)	0.00	2.25000	2.26250	2.27500	2.28750	2.30000	2.31250	2.32500	2.33750	2.35000	2.36250	2.37500

- integrale I_3

ν	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
	2,00000	2,10000	2,20000	2,30000	2,40000	2,50000	2,60000	2,70000	2,80000	2,90000	3,00000

- integrale $I_{2,dev}$

	C_z / v	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
(plane strain)	1.00	2.37500	2.28000	2.19500	2.12000	2.05500	2.00000	1.95500	1.92000	1.89500	1.88000	1.87500
	0.95	2.37500	2.28451	2.20305	2.13061	2.06720	2.01281	1.96745	1.93111	1.90380	1.88551	1.87625
	0.90	2.37500	2.28905	2.21120	2.14145	2.07980	2.02625	1.98080	1.94345	1.91420	1.89305	1.88000
	0.85	2.37500	2.29361	2.12945	2.15251	2.09280	2.04031	1.99505	1.95701	1.92620	1.90261	1.88625
	0.80	2.37500	2.29820	2.22780	2.16380	2.10620	2.05500	2.01020	1.97180	1.93980	1.91420	1.89500
	0.75	2.37500	2.30281	2.23625	2.17531	2.12000	2.07031	2.02625	1.98781	1.95500	1.92781	1.90625
	0.70	2.37500	2.30745	2.24480	2.18705	2.13420	2.08625	2.04320	2.00505	1.97180	1.94345	1.92000
	0.65	2.37500	2.31211	2.25345	2.19901	2.14880	2.10281	2.06105	2.02351	1.99020	1.96111	1.93625
	0.60	2.37500	2.31680	2.26220	2.21120	2.16380	2.12000	2.07980	2.04320	2.01020	1.98080	1.95500
	0.55	2.37500	2.32151	2.27105	2.22361	2.17920	2.13781	2.09945	2.06411	2.03180	2.00251	1.97625
	0.50	2.37500	2.32625	2.28000	2.23625	2.19500	2.15625	2.12000	2.08625	2.05500	2.02625	2.00000
	0.45	2.37500	2.33101	2.28905	2.24911	2.21120	2.17531	2.14145	2.10961	2.07980	2.05201	2.02625
	0.40	2.37500	2.33580	2.29820	2.26220	2.22780	2.19500	2.16380	2.13420	2.10620	2.07980	2.05500
	0.35	2.37500	2.34061	2.30745	2.27551	2.24480	2.21531	2.18705	2.16001	2.13420	2.10961	2.08625
	0.30	2.37500	2.34545	2.31680	2.28905	2.26220	2.23625	2.21120	2.18705	2.16380	2.14145	2.12000
0.25	2.37500	2.35031	2.32625	2.30281	2.28000	2.25781	2.23625	2.21531	2.19500	2.17531	2.15625	
0.20	2.37500	2.35520	2.33580	2.31680	2.29820	2.28000	2.26220	2.24480	2.22780	2.21120	2.19500	
0.15	2.37500	2.36011	2.34545	2.33101	2.31680	2.30281	2.28905	2.27551	2.26220	2.24911	2.23625	
0.10	2.37500	2.36505	2.35520	2.34545	2.33580	2.32625	2.31680	2.30745	2.29820	2.28905	2.28000	
0.05	2.37500	2.37001	2.36505	2.36011	2.35520	2.35031	2.34545	2.34061	2.33580	2.33101	2.32625	
(plane stress)	0.00	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500	2.37500

- integrale $I_{3,dev}$

$$I_{3,dev} = 3$$

Appendice A5

Espressioni e valori notevoli degli integrali da utilizzare nei metodi Lazzarin, Treifi e del SED totale e deviatorico

Il sistema di riferimento, centrato all'apice dell'intaglio, utilizzato per il calcolo degli integrali che compaiono nelle formulazioni del SED riportate nel capitolo è il seguente:

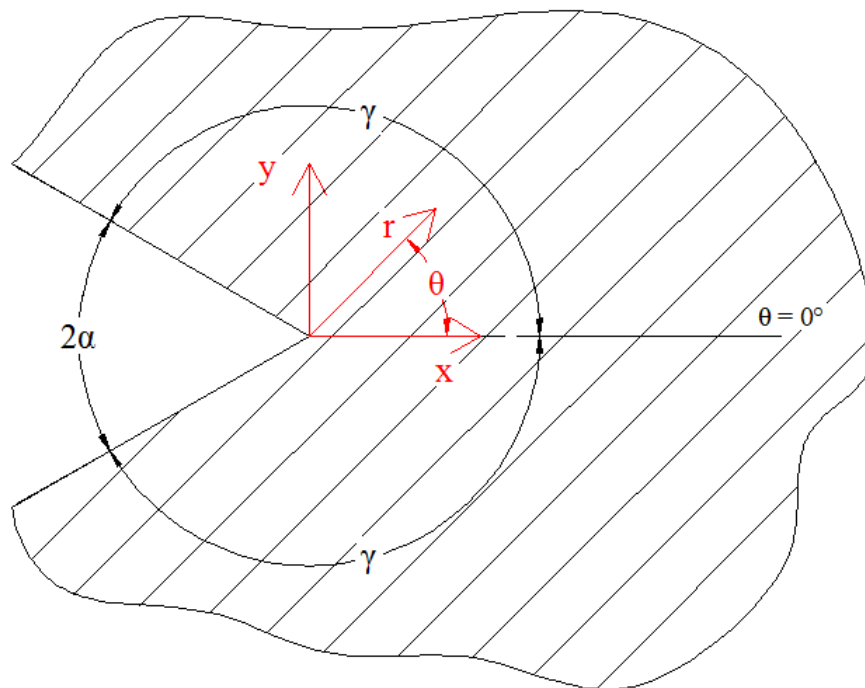


Figura A5.1 Sistema di riferimento per gli integrali dei metodi Lazzarin, Treifi e del SED totale/deviatorico

A5.1. Deformazione piana, espressioni degli integrali

- Volume di controllo circolare, SED totale:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

- Volume di controllo circolare, SED deviatorico:

$$I_{1,dev} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_{2,dev} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

- Volume di controllo semicircolare, SED totale:

$$I_{1,s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^0 \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_{2,s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^0 \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

$$I_{12,s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^0 \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + 4(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) d\theta$$

A5.2. Tensione piana, espressioni degli integrali

- Volume di controllo circolare, SED totale:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

- Volume di controllo circolare, SED deviatorico:

$$I_{1,dev} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_{2,dev} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)}) + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

- Volume di controllo semicircolare, SED totale:

$$I_{1,s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^0 \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_{2,s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^0 \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)}) + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

$$I_{12,s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^0 \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) + 4(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) d\theta$$

A5.3. Funzioni di forma utilizzate negli integrali

Le funzioni angolari utilizzate all'interno degli integrali riportati sono le seguenti:

- Modo I:

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(1)} = \frac{1}{[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left[\begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\theta \end{pmatrix} + \chi_1(1 - \lambda_1) \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1)\theta \\ -\cos(1 + \lambda_1)\theta \\ \sin(1 + \lambda_1)\theta \end{pmatrix} \right]$$

- Modo II:

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(2)} = \frac{1}{[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]} \left[\begin{pmatrix} -(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\theta \\ -(3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\theta \end{pmatrix} + \chi_2(1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} -\sin(1 + \lambda_2)\theta \\ \sin(1 + \lambda_2)\theta \\ \cos(1 + \lambda_2)\theta \end{pmatrix} \right]$$

In cui λ_1 e λ_2 sono le soluzioni delle equazioni agli autovalori di Williams di modo I e modo II, dipendenti dalla geometria dell'intaglio, mentre χ_1 e χ_2 si possono ottenere con le seguenti espressioni:

$$\chi_1 = -\frac{\sin(1 - \lambda_1)\gamma}{\sin(1 + \lambda_1)\gamma}$$

$$\chi_2 = -\frac{\sin(1 - \lambda_2)\gamma}{\sin(1 + \lambda_2)\gamma}$$

Nel caso di deformazione piana sono inoltre presenti le componenti delle funzioni angolari $\widetilde{\sigma}_z^{(1)}$ e $\widetilde{\sigma}_z^{(2)}$, definite come:

$$\widetilde{\sigma}_z^{(1)} = \nu (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)})$$

$$\widetilde{\sigma}_z^{(2)} = \nu (\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)})$$

Si ricorda per completezza come le funzioni angolari siano ottenute per la soluzione di Williams arrestata ai termini di primo ordine, per la quale le componenti di tensione di fronte all'apice dell'intaglio sono definite come:

- Contributo di modo I:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1}{r^{(1-\lambda_1)}} \begin{Bmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(1)}$$

- Contributo di modo II:

$$\begin{pmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_2}{r^{(1-\lambda_2)}} \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{pmatrix}^{(2)}$$

Si può notare come gli integrali dipendano dalla geometria dell'intaglio (attraverso l'angolo γ e gli autovalori λ_1 e λ_2) e dal modulo di Poisson ν . Si è proceduto quindi col calcolo di tali integrali per alcuni valori di angoli di apertura dell'intaglio e del modulo di Poisson ν , utilizzando il software Wolfram Mathematica[®] 9. Tali risultati verranno ora riportati in funzione di ν e dell'angolo di apertura dell'intaglio 2α (a cui γ è legato mediante $\gamma = \pi - 2\alpha/2$). Per ciascun angolo di apertura dell'intaglio verranno riportati inoltre i due valori degli autovalori di modo I e II, λ_1 e λ_2 .

A5.4. Deformazione piana, valori degli integrali

$$\nu = 0.20$$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	1.020000	2.22000	0.555000	2.05500	0.510000	1.110000	0.458366
$\pi/6$	0.5014	0.5982	1.004440	1.90713	0.559067	1.87134	0.502218	0.953569	0.436642
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.984085	1.76928	0.561609	1.78047	0.492042	0.884638	0.425605
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.954720	1.64189	0.562932	1.69010	0.477360	0.820945	0.415863
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.916244	1.52344	0.561861	1.60003	0.458122	0.761719	0.407379
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.869159	1.41248	0.556537	1.51011	0.434580	0.706241	0.399369
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.813872	1.30772	0.548505	1.42013	0.406936	0.653862	0.390954
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.752448	1.20803	0.534999	1.32992	0.376224	0.604013	0.380701
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.686714	1.11238	0.515435	1.23926	0.343357	0.556192	0.367504
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.618559	1.01988	0.489951	1.14788	0.309279	0.509942	0.350708

$$\nu = 0.25$$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	0.937500	2.18750	0.500000	2.00000	0.468750	1.093750	0.397887
$\pi/6$	0.5014	0.5982	0.925371	1.89760	0.505864	1.83218	0.462685	0.948801	0.385593
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.909030	1.76815	0.510543	1.74754	0.454515	0.884074	0.379355
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.885044	1.64741	0.514771	1.66243	0.442522	0.823705	0.374428
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.853129	1.53409	0.517292	1.57679	0.426564	0.767045	0.370764
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.813376	1.42698	0.516058	1.49059	0.406688	0.713489	0.367513
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.766389	1.32497	0.512692	1.40374	0.383194	0.662485	0.363949
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.713390	1.22709	0.504019	1.31616	0.356695	0.613546	0.358394
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.655786	1.13248	0.489237	1.22771	0.327893	0.566240	0.349637
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.595157	1.04033	0.468315	1.13818	0.297579	0.520167	0.336920

$$\nu = 0.30$$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	0.845000	2.14500	0.455000	1.95500	0.422500	1.072500	0.331042
$\pi/6$	0.5014	0.5982	0.836633	1.88096	0.462334	1.80015	0.418316	0.940480	0.329004
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.824690	1.76103	0.468762	1.72059	0.412345	0.880516	0.327986
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.806611	1.64790	0.475367	1.63978	0.403306	0.823948	0.328291
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.781910	1.54052	0.480827	1.55778	0.390955	0.770259	0.329861
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.750232	1.43793	0.482938	1.47462	0.375116	0.718963	0.331776
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.712393	1.33923	0.483389	1.39033	0.356197	0.669617	0.333480
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.668700	1.24365	0.478672	1.30490	0.334350	0.621827	0.333033
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.620094	1.15048	0.467802	1.21826	0.310047	0.575238	0.329115
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.567822	1.05902	0.450612	1.13024	0.283911	0.529510	0.320860

$\nu = 0.35$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	0.742500	2.09250	0.420000	1.92000	0.371250	1.046250	0.257831
$\pi/6$	0.5014	0.5982	0.738221	1.85720	0.428477	1.77523	0.369111	0.928599	0.266876
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.731066	1.74793	0.436266	1.69963	0.365533	0.873964	0.271498
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.719422	1.64335	0.444719	1.62217	0.359711	0.821676	0.277453
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.702587	1.54272	0.452465	1.54299	0.351294	0.771360	0.284672
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.679729	1.44533	0.457179	1.46220	0.339864	0.722663	0.292161
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.651887	1.35052	0.460599	1.37991	0.325943	0.675260	0.299547
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.618376	1.25772	0.458957	1.29615	0.309188	0.628858	0.304619
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.579639	1.16637	0.451130	1.21091	0.289820	0.583185	0.305939
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.536552	1.07594	0.436843	1.12407	0.268276	0.537972	0.302528

 $\nu = 0.40$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	0.630000	2.03000	0.395000	1.89500	0.031500	1.015000	0.178254
$\pi/6$	0.5014	0.5982	0.630137	1.82632	0.404294	1.75744	0.315068	0.913158	0.199209
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.628157	1.72884	0.413054	1.68466	0.314078	0.864418	0.209891
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.623476	1.63378	0.422828	1.60959	0.311738	0.816889	0.221915
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.615162	1.54070	0.432207	1.53242	0.307581	0.770348	0.235195
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.601866	1.44918	0.438779	1.45333	0.300933	0.724589	0.248665
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.584868	1.35883	0.444320	1.37246	0.292434	0.679413	0.262150
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.562420	1.26927	0.444875	1.28989	0.281210	0.634637	0.273152
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.534421	1.18017	0.439222	1.20566	0.267211	0.590083	0.280109
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.501349	1.09110	0.427008	1.11966	0.250674	0.545552	0.281925

A5.5. Tensione piana, valori degli integrali

$\nu = 0.20$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	1.100000	2.300000	0.875000	2.375000	0.550000	1.150000	0.509296
$\pi/6$	0.5014	0.5982	1.081820	1.96408	0.868612	2.09915	0.540911	0.982039	0.480957
$\pi/4$	0.5050	0.6597	1.058360	1.81718	0.858719	1.97208	0.529181	0.908589	0.466555
$\pi/3$	0.5122	0.7309	1.024770	1.68214	0.843140	1.85110	0.512386	0.841071	0.453471
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.981071	1.55724	0.821170	1.73526	0.490536	0.778622	0.441676
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.928038	1.44087	0.792054	1.62366	0.464019	0.720435	0.430407
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.865965	1.33156	0.756876	1.51547	0.432982	0.665780	0.418663
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.797510	1.22804	0.715249	1.40997	0.398755	0.614020	0.405129
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.724820	1.12919	0.667860	1.30647	0.36241	0.564593	0.388739
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.650031	1.03399	0.615839	1.20431	0.325015	0.516996	0.368884

$\nu = 0.25$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	1.062500	2.31250	0.875000	2.37500	0.531250	1.156250	0.477465
$\pi/6$	0.5014	0.5982	1.046290	1.98659	0.868612	2.09915	0.523143	0.993295	0.454835
$\pi/4$	0.5050	0.6597	1.025090	1.84300	0.858719	1.97208	0.512544	0.921498	0.443339
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.994500	1.71030	0.843140	1.85110	0.497250	0.855151	0.433191
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.954421	1.58691	0.821170	1.73526	0.477210	0.493457	0.424353
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.905374	1.47133	0.792054	1.62366	0.452687	0.735667	0.416009
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.847783	1.36221	0.756876	1.51547	0.423892	0.681107	0.407244
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.783800	1.25836	0.715249	1.40997	0.391900	0.629181	0.396563
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.715327	1.15873	0.667860	1.30647	0.357663	0.579366	0.382816
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.644332	1.06238	0.615839	1.20431	0.322166	0.531180	0.365321

$\nu = 0.30$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	1.025000	2.32500	0.875000	2.37500	0.512500	1.162500	0.445634
$\pi/6$	0.5014	0.5982	1.010750	2.00910	0.868612	2.09915	0.505376	1.004550	0.428713
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.991815	1.86881	0.858719	1.97208	0.495907	0.934406	0.420122
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.964228	1.73846	0.843140	1.85110	0.482114	0.869232	0.412910
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.927771	1.61658	0.821170	1.73526	0.463885	0.808292	0.407030
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.882710	1.50180	0.792054	1.62366	0.441355	0.750900	0.401612
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.829602	1.39287	0.756876	1.51547	0.414801	0.696433	0.395825
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.770090	1.28868	0.715249	1.40997	0.385045	0.644341	0.387997
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.705834	1.18828	0.667860	1.30647	0.352917	0.594140	0.376894
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.638634	1.09077	0.615839	1.20431	0.319317	0.545383	0.361757

$\nu = 0.35$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	0.987500	2.33750	0.875000	2.37500	0.493750	1.168750	0.413803
$\pi/6$	0.5014	0.5982	0.975217	2.03161	0.868612	2.09915	0.487609	1.015810	0.402592
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.958541	1.89463	0.858719	1.97208	0.479270	0.947315	0.396906
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.933956	1.76662	0.843140	1.85110	0.466978	0.883312	0.392629
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.901120	1.64625	0.821170	1.73526	0.450560	0.823127	0.389707
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.860046	1.53227	0.792054	1.62366	0.430023	0.766133	0.387214
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.811421	1.42352	0.756876	1.51547	0.405710	0.711759	0.384405
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.756380	1.31900	0.715249	1.40997	0.378190	0.659502	0.379431
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.693400	1.21783	0.66786	1.30647	0.348170	0.608914	0.370972
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.632935	1.11915	0.615839	1.20431	0.316467	0.559576	0.358194

 $\nu = 0.40$

2α [rad]	λ_1	λ_2	I_1	I_2	$I_{1,dev}$	$I_{2,dev}$	$I_{1,s}$	$I_{2,s}$	$I_{12,s}$
0	0.5000	0.5000	0.950000	2.35000	0.875000	2.37500	0.475000	1.175000	0.381972
$\pi/6$	0.5014	0.5982	0.939682	2.05412	0.868612	2.09915	0.469841	1.027060	0.376470
$\pi/4$	0.5050	0.6597	0.925267	1.92045	0.858719	1.97208	0.462633	0.960223	0.373690
$\pi/3$	0.5122	0.7309	0.903684	1.79478	0.843140	1.85110	0.451842	0.897392	0.372348
$5\pi/12$	0.5247	0.8132	0.874470	1.67592	0.821170	1.73526	0.437235	0.837961	0.372384
$\pi/2$	0.5448	0.9085	0.837382	1.56273	0.792054	1.62366	0.418691	0.781365	0.372817
$7\pi/12$	0.5739	1.0193	0.793239	1.45417	0.756876	1.51547	0.396620	0.727085	0.372986
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.742669	1.34933	0.715249	1.40997	0.371335	0.674663	0.370866
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.686847	1.24737	0.667860	1.30647	0.343423	0.623687	0.365049
$5\pi/6$	0.7520	1.4858	0.627236	1.14754	0.615839	1.20431	0.313618	0.573769	0.354630

Appendice A6

Espressioni del SED totale, deviatorico ed idrostatico per volumi di controllo costituiti da settori cilindrici

Verranno riepilogate le espressioni inserite nel software Wolfram Mathematica[®] 9 per ottenere la densità di energia di deformazione totale, deviatorica e idrostatica all'interno di volumi di controllo costituiti da settori cilindrici. L'unica ipotesi è la costanza del *constraint factor* C_z all'interno di ciascun settore cilindrico.

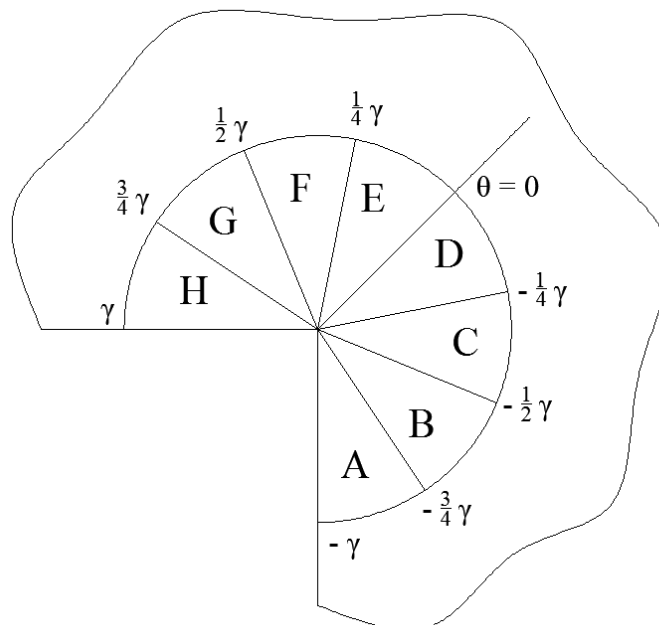


Figura A6.1 Settori cilindrici che costituiscono i volumi di controllo

Ad ogni settore cilindrico N vengono associati un angolo di inizio settore θ_i e un angolo di fine settore θ_f , con $\theta_i < \theta_f$. Ad esempio, per il settore cilindrico A: $\theta_i = -\gamma$, $\theta_f = -\frac{3}{4}\gamma$

- **Dati da fornire in ingresso (con i valori relativi al caso in esame):**

- Angolo di apertura dell'intaglio: 2α ($= \pi/2$);
- Autovalori di modo I, II e III: λ_1 ($= 0.5448$), λ_2 ($= 0.9085$) e λ_3 ($= 0.6667$);
- Modulo di Poisson: ν ($= 0.3$);
- Modulo di Young: E ($= 206000$ MPa);
- Raggio dei settori circolari: R ($= 0.1$ mm).

- **Calcoli preliminari:**

- $\gamma = \pi - 2\alpha/2$
- $\chi_1 = -\frac{\sin(1-\lambda_1)\gamma}{\sin(1+\lambda_1)\gamma}$
- $\chi_2 = -\frac{\sin(1-\lambda_2)\gamma}{\sin(1+\lambda_2)\gamma}$

- **Funzioni angolari per le tensioni:**

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(1)} = \frac{1}{[1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left[\begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\theta \end{pmatrix} + \chi_1(1 - \lambda_1) \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1)\theta \\ -\cos(1 + \lambda_1)\theta \\ \sin(1 + \lambda_1)\theta \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{\sigma}_\theta \\ \widetilde{\sigma}_r \\ \widetilde{\tau}_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(2)} = \frac{1}{[1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2)]} \left[\begin{pmatrix} -(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\theta \\ -(3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\theta \end{pmatrix} + \chi_2(1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} -\sin(1 + \lambda_2)\theta \\ \sin(1 + \lambda_2)\theta \\ \cos(1 + \lambda_2)\theta \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{\tau}_{zr} \\ \widetilde{\tau}_{z\theta} \end{Bmatrix}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \sin \lambda_3 \theta \\ \cos \lambda_3 \theta \end{Bmatrix}$$

$$\widetilde{\sigma}_z^{(1)} = C_z \nu (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)})$$

$$\widetilde{\sigma}_z^{(2)} = C_z \nu (\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)})$$

A differenza dei casi precedenti, per comodità di scrittura il *constraint factor* è stato inserito direttamente nelle espressioni delle funzioni angolari $\widetilde{\sigma}_z^{(1)}$ e $\widetilde{\sigma}_z^{(2)}$.

- **Integrali che compaiono nell'espressione del SED totale:**

$$I_{1,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) \right. \\ \left. + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_{2,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) \right. \\ \left. + 2(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

$$I_{12,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} - 2\nu(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) \right. \\ \left. + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} \right. \\ \left. + 4(1+\nu)\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) d\theta$$

$$I_{3,N}(\gamma, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(2(1+\nu)(\widetilde{\tau}_{zr}^{(3)2} + \widetilde{\tau}_{z\theta}^{(3)2}) \right) d\theta$$

- **Integrali che compaiono nell'espressione del SED deviatorico:**

$$I_{1,dev,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) \right. \\ \left. + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right) d\theta$$

$$I_{2,dev,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) \right. \\ \left. + 3\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right) d\theta$$

$$I_{12,dev,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} - (\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)}) \right. \\ \left. + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + 6\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right) d\theta$$

$$I_{3,dev,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(3(\widetilde{\tau}_{zr}^{(3)2} + \widetilde{\tau}_{z\theta}^{(3)2}) \right) d\theta$$

- **Integrali che compaiono nell'espressione del SED idrostatico:**

$$I_{1,id,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(1)2} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) \right) d\theta$$

$$I_{2,id,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)2} + \widetilde{\sigma}_z^{(2)2} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)}) \right) d\theta$$

$$I_{12,id,N} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(2\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + 2\widetilde{\sigma}_z^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + 2(\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_r^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_r^{(1)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)} + \widetilde{\sigma}_r^{(1)}\widetilde{\sigma}_z^{(2)} + \widetilde{\sigma}_r^{(2)}\widetilde{\sigma}_z^{(1)}) \right) d\theta$$

- **Espressioni del SED totale, idrostatico e deviatorico nel settore cilindrico N:**

$$\overline{W}_N = \frac{E}{\gamma R^2} = \frac{1}{2E \frac{\Delta\gamma}{2}} \left[\frac{I_{1,N}}{2\lambda_1} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,N}}{2\lambda_2} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,N}}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} + \frac{I_{3,N}}{2\lambda_3} \frac{K_3^2}{R^{2(1-\lambda_3)}} \right]$$

$$\overline{W}_{dev,N} = \frac{(1+\nu)}{3E \frac{\Delta\gamma}{2}} \left[\frac{I_{1,dev,N}}{2\lambda_1} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,dev,N}}{2\lambda_2} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,dev,N}}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} + \frac{I_{3,dev,N}}{2\lambda_3} \frac{K_3^2}{R^{2(1-\lambda_3)}} \right]$$

$$\overline{W}_{id,N} = \frac{(1-2\nu)}{6E \frac{\Delta\gamma}{2}} \left[\frac{I_{1,id,N}}{2\lambda_1} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{2,id,N}}{2\lambda_2} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{I_{12,id,N}}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{K_1 K_2}{R^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \right]$$

Con $\Delta\gamma = \theta_f - \theta_i$.

Conclusioni

Nella prima parte dell'elaborato sono state raccolte informazioni riguardanti il titanio e le sue leghe: sono state analizzate le caratteristiche microstrutturali, i trattamenti termici che possono essere eseguiti e le proprietà che caratterizzano tali materiali, prestando particolare attenzione al comportamento a fatica. Si è realizzato poi un elenco delle leghe di titanio conosciute e delle applicazioni in cui queste vengono utilizzate con successo. Infine sono stati sintetizzati alcuni articoli presentati negli ultimi anni riguardanti la vita a fatica della lega Ti-6Al-4V, ovvero la lega commercialmente più disponibile e storicamente più utilizzata, specialmente in ambito aerospaziale. Le informazioni raccolte saranno utilizzate per l'avviamento di prove sperimentali sul comportamento a fatica di leghe di titanio in presenza di intagli che verranno realizzate presso il Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali dell'Università di Padova.

Nella seconda parte si sono trattati il problema di intagli vivi ($\rho = 0$) e cricche in componenti di estensione tridimensionale finita e non trascurabile e l'analisi e la proposta di alcuni metodi per ricavare i fattori di intensificazione delle tensioni a partire dalla densità di energia di deformazione in problemi bidimensionali e tridimensionali. Tutte le analisi FEM sono state realizzate con il software Ansys[®] 13.0, mentre i calcoli sono stati effettuati con fogli di calcolo in Microsoft[®] Excel[®] 2010 e Wolfram Mathematica[®] 9.

Dopo aver presentato una soluzione analitica per i problemi tridimensionali che utilizza le ipotesi di Kane e Mindlin, e che permette di disaccoppiare il problema nel piano dal problema fuori piano, è stata ricavata una formulazione per la densità di energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica, nell'ipotesi di costanza del *constraint factor* all'interno del volume di controllo.

E' stato poi analizzato il modello di un giunto saldato a sovrapposizione con estensione tridimensionale finita e non trascurabile, mettendo in luce la comparsa di componenti di tensione di modo III indotto (chiamato modo O, *out of plane*) in presenza di sollecitazioni di modo II, effetto già riportato nella letteratura. Si è prestata particolare attenzione alla variabilità del *constraint factor* all'interno del volume di controllo.

Si è poi verificata la quasi indipendenza del valore del SED totale ricavato in analisi numeriche dalla fittezza della mesh, come già dimostrato in letteratura. E' stata verificata anche la dipendenza del valore del SED deviatorico dalla mesh utilizzata: tale dipendenza è risultata tuttavia blanda, e già con mesh grossolane si riesce a ricavare il valore del SED deviatorico con una buona approssimazione rispetto al valore ricavato da mesh estremamente

fitte, pur non potendo utilizzare un numero estremamente esiguo di elementi come nel caso del SED totale.

Sono stati quindi presentati alcuni metodi presenti in letteratura per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni basati sulla densità di energia di deformazione totale in volumi di controllo costituiti da cerchi completi o da semicerchi, ed introdotti nuovi metodi basati sull'utilizzo del SED totale e deviatorico un unico volume di controllo costituito da un cerchio o da una corona circolare. Tali metodi permettono di ricavare gli N-SIFs e i SIFs con ottima approssimazione utilizzando mesh più grossolane rispetto a quelle estremamente fitte utilizzate per il calcolo di questi parametri con le definizioni di Gross e Mendelson.

Si è poi provato a ricavare un metodo analogo per il calcolo degli N-SIFs in un problema tridimensionale, in particolare una piastra con un intaglio quadro ed estensione tridimensionale finita e non trascurabile. Il metodo proposto utilizza la scrittura del SED totale e deviatorico in volumi di controllo costituiti da cilindri con raggio differente, nell'ipotesi di deformazione piana all'interno del volume di controllo. I valori degli N-SIFs così ottenuti sono stati confrontati con i valori ricavati con le definizioni di Gross e Mendelson, rivelando forti differenze per quanto riguarda gli N-SIFs di modo I e, specialmente, modo III. Apportando alcune correzioni al metodo, sulla base di osservazioni dei risultati FEM e non necessariamente valide per altri modelli, si sono ottenuti con buona approssimazione i valori degli N-SIFs per buona parte dello spessore della piastra.

Si è proceduto poi con l'analisi delle possibili fonti di errore nel metodo proposto. Come prima cosa è stata introdotta la componente simmetrica del modo III, il cui contributo energetico si è però rivelato trascurabile. Verificando la bontà con cui le componenti di tensione vengono descritte dalle espressioni utilizzate come base nella formulazione analitica del SED, si sono esclusi termini di accoppiamento dei modi I e II con il modo III (antisimmetrico o simmetrico).

Ci si è infine soffermati sulla variabilità del *constraint factor* all'interno del volume di controllo, in senso radiale e circonferenziale: questa risulta elevata, e rende complicata la descrizione della tensione normale σ_z , basata proprio sull'utilizzo del *constraint factor*, non potendo ritenere costante tale parametro e non avendo espressioni analitiche che esprimano il suo andamento all'interno del volume di controllo. Si è provato quindi a ricavare gli N-SIFs utilizzando un sistema di espressioni del SED (totale o deviatorico) in volumi di controllo costituiti da settori cilindrici, ottenendo solo un parziale miglioramento dei risultati.

Mentre i metodi energetici per il calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni in problemi bidimensionali hanno permesso il calcolo degli N-SIFs generalmente con ottime approssimazioni, nel problema tridimensionale analizzato ciò non è stato possibile. Si ritiene che i risultati ottenuti e i fattori analizzati per i problemi tridimensionali possano costituire le basi per un ulteriore sviluppo di tali metodi.

Simbologia

Si riportano ora i simboli utilizzati all'interno dell'elaborato. Si tralascia di riportare nuovamente i simboli utilizzati per illustrare i risultati numerici dei capitoli 3 e 6, elencati nei paragrafi §3.5 e §6.3, e i simboli relativi all'applicazione del metodo *step loading*, riportati nel paragrafo §A3.1.1.

$A, El\%$	Allungamento a rottura
A, B	Funzioni che compaiono all'interno dell'integrale legato al contributo di modo misto nel calcolo del SED
a, b, B, h	Grandezze geometriche
$[B]$	Matrice che lega deformazioni e spostamenti
C_z	Constraint factor
C, D, M, N, Q, S, T	Grandezze ausiliare
D	Coefficiente di diffusione
d	Distanza
da/dN	Velocità di propagazione della cricca
$\{d\}$	Vettore degli spostamenti nodali
E	Modulo di Young
$E\%, \Delta\%$	Errore relativo percentuale
E, E_{id}, E_{dev}	Energia di deformazione totale, idrostatica e deviatorica
$[E]$	Matrice di elasticità
f	Frequenza
FIN	Parametro di Findley
$\{f\}$	Vettore delle forze nodali
G_r	Distribuzione del parametro di Findley
G_F	Fattore del gradiente di Findley
I_i	Integrali che compaiono nella formulazione del SED (indicato se totale, deviatorica o idrostatica) legati al modo i . Eventuali altri pedici sono riferiti al volume di controllo in cui sono calcolati
N	Numero di cicli
N_F	Numero di cicli a rottura
$[N]$	Matrice di interpolazione
k	Parametro di <i>fitting</i> dei dati

$K_I, K_{II}, K_{III}, K_O$	SIFs di modo I, II, III (antisimmetrico) e di modo O
K_1, K_2, K_3, K_O	N-SIFs di modo I, II, III (antisimmetrico) e di modo O
$K_{3,\alpha}, K_{3,s}$	N-SIFs di modo III antisimmetrico o simmetrico
K_{IC}	Tenacità a frattura
K_t	Fattore teorico di concentrazione delle tensioni
K_f	Coefficiente di riduzione della resistenza a fatica
$[K]$	Matrice di rigidezza
q	Indice di sensibilità all'intaglio
Q_F	Parametro di sensibilità all'intaglio di Findley
r, θ, z	Coordinate cilindriche
R	Raggio
R	Rapporto di ciclo delle tensioni
R_ε	Rapporto di ciclo delle deformazioni
RA	Riduzione dell'area a rottura
S_{sa}	Ampiezza di tensione per un provino liscio
S_{ta}	Ampiezza di tensione alla sezione netta per un provino intagliato
T_β	Temperatura di β -transus
TS	Tensione di rottura
u_x, u_y, u_z	Componenti di spostamento in coordinate cartesiane
$\{u\}$	Spostamento di un generico punto nel FEM
V	Volume
x, y, z	Coordinate cartesiane
W_P	Energia di deformazione puntuale (indicato se totale, deviatorica o idrostatica), eventuali pedici contengono altre indicazioni
\bar{W}	Densità di energia di deformazione (indicato se totale, deviatorica o idrostatica), eventuali pedici contengono altre indicazioni
YS	Tensione di snervamento
$2\alpha, 2\alpha'$	Angolo di apertura dell'intaglio
γ	Angolo $\gamma = \pi - 2\alpha/2$
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Scorrimenti in coordinate cartesiane
ΔK_{th}	Variazione del campo di tensione di soglia
ΔK	Variazione del campo di tensione
$\Delta K_i \%$	Errore relativo sul calcolo del K_i
ΔU	Variazione della densità di energia di deformazione
$\Delta \sigma$	Range di tensione
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Deformazioni in coordinate cartesiane
$\{\varepsilon\}$	Deformazione di un generico punto nel FEM
θ	Angolo

θ_{FIN}	Orientazione del piano critico che massimizza il parametro di Findley
λ_i	Autovalore di Williams di modo i
$(1 - \lambda_i)$	Grado di singolarità del modo i
ν	Modulo di Poisson
ρ	Raggio di fondo intaglio
σ_a	Ampiezza della tensione alternata
$\sigma_{a,lim}, \sigma_{alt,lim}$	Ampiezza della tensione alternata limite per la vita a fatica indicata
σ_{mean}, σ_m	Tensione media di ciclo
$\sigma_{max}, \sigma_{min}$	Tensioni massima e minima del ciclo
σ_{ys}	Tensione di snervamento
$\sigma_{vM}, \sigma_{eff}$	Tensione equivalente di von Mises
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Tensioni normali in coordinate cartesiane
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensioni normali in coordinate cilindriche
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	Tensioni normali in coordinate cilindriche
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensioni principali
$\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$	Funzioni angolari
τ_a	Ampiezza della tensione tangenziale
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Tensioni tangenziali in coordinate cartesiane
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$	Tensioni tangenziali in coordinate cilindriche
τ_{max}	Tensione di taglio massima
χ_1, χ_2	Parametri che compaiono nella soluzione di Williams
∇^2	Operatore di Laplace

Riferimenti bibliografici

- [1] Leyens C., Peters M. Titanium and Titanium Alloys: Fundamentals and Applications. Wiley-VCH 2003.
- [2] Cariola M. Il titanio. Un metallo per molteplici applicazioni. Analisi tecnologica e valutazioni economiche. Franco Angeli, 1996.
- [3] Donachie M. J. Jr. Titanium: a technical guide. ASM International Metals Park, 1988
- [4] Titanium Alloy Guide. RMI Titanium Company, 2000.
- [5] Materials Properties Handbook: Titanium Alloys. ASM International Materials Park, 1994.
- [6] Morri A. Trattamenti termici delle leghe di titanio $\alpha + \beta$, correlazioni fra microstruttura e comportamento meccanico. La metallurgia italiana, 2008; novembre-dicembre.
- [7] Gianotti E. Titanio e sue leghe. Trattamenti termici Ti 6Al 4V. Lezione per il 12° Corso di Aggiornamento sui Trattamenti Termici dei Metalli. Aim Milano, 2007; Ottobre.
- [8] Properties and processing of TIMETAL 6-4. Timet, Titanium Metals Corporation, 1998
- [9] Peters M., Gysler A., Lütjering G. Influence of texture on fatigue properties of Ti-6Al-4V. Metallurgical and Materials Transactions, 1984; 15:1597-1605.
- [10] Hosseini S., Limooei M. B. Investigation of fatigue behaviour and notch sensitivity of Ti-6Al-4V. Applied Mechanics and Materials, 2011; 80-81:7-12.
- [11] Nicholas T. Step loading for very high cycle fatigue. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 2002; 25:861-869.
- [12] Kallmeyer A. R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V. Journal of Engineering Materials and Technologies, 2002; 124:229-237.
- [13] Nicholas T. High Cycle Fatigue. A mechanics of materials perspective. Elsevier 2006.
- [14] Baragetti S., Cavalleri S., Tordini F. Fatigue behaviour of notched Ti-6Al-4V in air and corrosive environment. Procedia Engineering 2011; 10:2435-2440.
- [15] Baragetti S., Cavalleri S., Tordini F. Fatigue behaviour of notched Ti-6Al-4V in inert environment. Key Engineering Materials 2012; Vol. 488-489:502-505.
- [16] Morrissey R. J., McDowell D. L., Nicholas T. Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V. International Journal of Fatigue 1999; 21:679-685.

-
- [17] Haritos G. K., Nicholas T., Lanning D. B. Notch size effects in HCF behaviour of Ti-6Al-4V. *International Journal of Fatigue* 1999; 21:643-652.
- [18] Lanning D. B., Haritos G. K., Nicholas T. Influence of stress state on high cycle fatigue of notched Ti-6Al-4V specimens. *International Journal of Fatigue* 1999; 21:S87-S95.
- [19] Lanning D., Haritos G. K., Nicholas T., Maxwell C. Low-cycle fatigue/high-cycle fatigue interactions in notched Ti-6Al-4V. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2001; 24:565-577.
- [20] Lanning D. B., Nicholas T., Haritos G. K. On the use of critical distance theories for the prediction of the high cycle fatigue limit stress in notched Ti-6Al-4V. *International Journal of Fatigue* 2005; 27:45-57.
- [21] Lanning D. B., Nicholas T., Palazotto A. The effect of notch geometry on critical distance high cycle fatigue predictions. *International Journal of Fatigue* 2005; 27:1623-1627.
- [22] Naik R. A., Lanning D. B., Nicholas T., Kallmeyer A. R. A critical plane gradient approach for the prediction of notched HCF life. *International Journal of Fatigue* 2005; 27:481-492.
- [23] Morrissey R. J., Nicholas T. Fatigue strength of Ti-6Al-4V at very long lives. *International Journal of Fatigue* 2005; 27:1608-1612.
- [24] Benedetti M., Bertini L., Fontanari V. Behaviour of fatigue cracks emanating from circular notches under bending. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2004; 27:111-125.
- [25] Zappalorto M., Lazzarin P. Three-dimensional elastic stress fields ahead of notches in thick plates under various loading conditions. *Engineering Fracture Mechanics* 2013; 108:75-78.
- [26] Pook L. P. A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2013; 36:699-723.
- [27] Kotousov A. Fracture in plates of finite thickness. *International Journal of Solids and Structures* 2007; 44:8259-8273.
- [28] Kotousov A. Effect of plate thickness on stress state at sharp notches and the strength paradox of thick plates. *International Journal of Solids and Structures* 2010; 47:1916-1923
- [29] Berto F., Lazzarin P., Kotousov A. On the presence of the out-of-plane singular mode induced by plane loading with $K_{II} = K_I = 0$. *International Journal of Fracture* 2011; 167:119-126

-
- [30] Lazzarin P., Zappalorto M. A three-dimensional stress field solution for pointed and sharply radiused V-notches in plates of finite thickness. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2012; 35:1105-1119.
- [31] Kane T. R., Mindlin R. D. High frequency extensional vibrations of plates. *Journal of Applied Mechanics* 1956; 23:277-283.
- [32] Williams, M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics* 1952; 19:526-528.
- [33] England, A. On stress singularities in linear elasticity. *International Journal of Engineering Science* 1971; 9:571-585.
- [34] Lazzarin P., Tovo R. A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and notches. *International Journal of Fracture* 1996; 78:3-19.
- [35] Filippi S., Lazzarin P., Tovo R. Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates. *International Journal of Solids and Structures* 2002; 39:4543-4565.
- [36] Gross R., Mendelson A. Plane elastostatic analysis of V-notched plates. *International Journal of Fracture Mechanics* 1972; 8:267-276.
- [37] Zappalorto M., Lazzarin P., Yates J. R. Elastic stress distributions for hyperbolic and parabolic notches in round shafts under torsion and uniform antiplane shear loading. *International Journal of Solids and Structures* 2008; 45:4879-4901.
- [38] Zappalorto M., Lazzarin P. Stress fields due to inclined notches and shoulder fillets in shafts under torsion. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 2011; 46:187-199.
- [39] Atzori B. *Metodi e procedimenti di calcolo nella progettazione meccanica*. Ed. Laterza 1979.
- [40] Gdoutos E. E. *Fracture mechanics criteria and applications*. Kluwer Academic Publishers 1990.
- [41] Berto F., Lazzarin P., Kotousov A., Harding S. Out-of plane singular stress fields in V-notched plates and welded lap joints induced by in-plane shear load conditions. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2010; 34:291-304.
- [42] Pook L. P. Crack profiles and corner point singularities. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2000; 23:141-150.
- [43] Lazzarin P., Zambardi R. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches. *International Journal of Fracture* 2001; 112:275-298.

-
- [44] Berto F., Lazzarin P., Kotousov A., Pook L. P. Induced out-of-plane mode at the tip of blunt lateral notches and holes under in-plane shear loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2012; 35:538-555.
- [45] Lazzarin P., Berto F., Zappalorto M. Rapid calculations of notch stress intensity factors based on averaged strain energy density from coarse meshes: Theoretical bases and applications. *International Journal of Fatigue* 2010; 32:1559-1567.
- [46] Gambolati G. *Metodi numerici per ingegneria e scienze applicate*. Libreria Internazionale Cortina 2003.
- [47] Treifi M., Oyadiji S. O. Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bi-material V-notches. *International Journal of Solid and Structures* 2013; 50:2196-2212.
- [48] Erdogan F., Sih G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering* 1963; 85:519-527.
- [49] Kotousov A., Wang C. H. Three-dimensional stress constraint in an elastic plate with a notch. *International Journal of Solids and Structures* 2002; 39:4311-4326.
- [50] Berto F., Lazzarin P., Wang C. H. Three-dimensional linear elastic distributions of stress and strain energy density ahead of V-shaped notches in plates of arbitrary thickness. *International Journal of Fracture* 2004; 127:265-282.
- [51] Berto F., Lazzarin P. Relationship between J-integral and the strain energy density evaluated in a finite volume surrounding the tip of sharp and blunt V-notches. *International Journal of Solids and Structures* 2007; 44:4621-4645.

Ringraziamenti

Giunto al termine di questo lavoro desidero ringraziare il Professor Paolo Lazzarin, relatore della tesi, che si è sempre dimostrato disponibile ed estremamente cortese nei miei confronti, dispensandomi consigli e indicazioni anche al di fuori degli argomenti trattati e incoraggiandomi durante tutto lo svolgimento della tesi. Lo ringrazio vivamente anche per la passione e la grandissima conoscenza della materia con le quali ha tenuto il corso di Danneggiamento e Meccanica della Frattura, rafforzando e facendo crescere in me un grande interesse per le tematiche affrontate.

Ringrazio l'Ingegnere Filippo Berti per l'aiuto che mi ha dato durante l'esecuzione della tesi, nell'impostazione dei modelli numerici e nella gestione del carico di lavoro, per l'estrema cortesia dimostratami e per i consigli utili riguardanti anche il futuro post universitario.

Ringrazio i dottorandi Alberto Campagnolo e Christian Marangon per gli aiuti e le dritte sull'utilizzo del software per le analisi numeriche e per aver condiviso la loro esperienza come dottorandi.

Ringrazio il dottorando Reza Afshar per l'interesse dimostrato per le tematiche affrontate e per i consigli utili riguardanti le fasi di impostazione del lavoro, i modelli numerici e le modalità di presentazione dei risultati.

Voglio ringraziare anche alcuni docenti incontrati in questi anni di università: il Professor Giovanni Meneghetti, il Professor Bruno Atzori e il Professor Nicola Petrone.

Un ringraziamento particolare al Professor Guido Ardizzone per l'incoraggiamento, anche silenzioso, in questi anni di studio, per i preziosi consigli e per l'estrema passione profusa nell'insegnamento, passione che riesce con facilità a trasmettere agli studenti.

Oltre ad essere grandi esempi nell'ambito professionale, queste persone sono state grandi esempi di umiltà e di cortesia nei rapporti interpersonali.

Al termine di questo percorso desidero ringraziare le persone che più mi hanno incoraggiato, con la dolcezza e la fermezza necessarie, a proseguire gli studi anche nei momenti di difficoltà più grande: i miei genitori Lucio e Marina, che ogni giorno mi insegnano che la vera qualità della vita è l'amore, non scritto sui manifesti ma presente in piccoli gesti quotidiani. Ringrazio mio fratello Andrea, perché più di chiunque altro mi ha fatto sentire accolto ed amato per ciò che sono, senza chiedere nulla in cambio. Ringrazio mia sorella Sara, perché con la sua determinazione e i suoi gesti di affetto nei confronti di noi fratelli più piccoli si sta rivelando un grande esempio di altruismo. Ringrazio Ferdinando, di una generosità incredibile

e con un'energia fisica invidiabile, e Angelo, per aver portato una nota di gioia immensa nella nostra casa e per avermi allietato nelle ultime mattinate di scrittura della tesi.

Un grandissimo grazie va a mia nonna Antonia, grande testimone di una capacità di amare che va oltre la mia immaginazione: le nostre preziose chiacchierate, le cene con gli amici a casa, le lodi al mattino, le raccomandazioni ripetute all'estremo e i suoi dolci consigli, conditi da una sana dose di ironia, sono impressi nel mio cuore e ne fanno una maestra di vita straordinaria.

Un ringraziamento va anche ai nonni Maria ed Antonio, che oggi mi guardano da lassù ma che continuo a conoscere attraverso i racconti e gli occhi di papà e degli zii, e Fernando, conosciuto indirettamente attraverso il canto di mamma: mi hanno donato una splendida famiglia, formata da zii e cugini fantastici, grandi artisti, grandi lavoratori e ancor più grandi persone. Un grande grazie a tutti loro.

Ringrazio di cuore tutti gli amici che mi sono stati vicini in questi anni di vita, supportandomi, sopportandomi, condividendo momenti belli e momenti meno belli, nei confronti dei quali nutro un affetto che difficilmente immaginano (e quanto ringrazio Dio di averli incontrati e di aver condiviso e di condividere il mio cammino con loro!): il mio cantautore spagnolo preferito Toni e la ballerina Hanna, il compagno di lunghe chiacchierate e serate Emi, l'allenatore/assessore/giocatore sempre in palla Thomas, la mia sorellina e anima a metà Martina, il ciclista e filosofo Pippo e la dolce veneziana Giulia, il cestista e intenditore di buone cose Davide, l'amico crocerossino Turri e la piccola e grande Marta, la silenziosa viaggiatrice Chiara, la direttrice tecnica cavarzerana Martina e la cantante martellacense Debora, il saggio Carlo Alberto, la dolcissima Valentina Fiorito, Simon Brown per le parole sempre giuste al momento giusto, tutti gli amici del Gruppo Incanto vecchi e nuovi con cui ho condiviso serate musicali [Davide, Giulia e Diego, Francesco e Claudia (...manca poco!), Miriam e Andrea, Matteo e Sara, Gigi e la Ludo, Elena, Edoardo, il bassista G, la Enrica, Zanta, Matteo il Griggio, Albio], i neosposini Simo e Benny per la loro grande testimonianza, Paolo per il paio di birre con annessa chiacchierata in compagnia, il guitar hero Andrea e tutti gli amici conosciuti in questi anni, che è sempre una gioia rivedere (Erica, Mary, Ylenia, Enrico, Sara, Ilenia, Stefano, Iaia e anche chi non nomino in queste poche righe).

E poi gli ex compagni di studi Giulio, Marco e Beppe, con i quali il gruppo era sempre ben bilanciato e che hanno superato la prova di fatica culinaria della cena dalla Antonia, il rugbista Matteo, fra Giorgio, fra Massimo e fra Giuseppe della fraternità francescana di Roncayette, don Pio e padre Luca, gli ex compagni delle superiori Ago (e Chiara), Poz, Bibu, Umbi e don Bozzo, i compagni del corso di salsa e gli amici della stazione del venerdì sera, i calcettai occasionali del lunedì sera, Francesco, Fabrizio, Walter e tutti gli amici di Catania, che spero di incontrare presto.

Un grande grazie a chi mi dona la Vita, senza chiedermi niente in cambio. Anche se qualche volta troverei molto più semplice poter andare a berci una birra insieme.