

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Tesi di Laurea Triennale in
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

**Valutazione tramite simulatore di rete
della condivisione di risorse
in sistemi cellulari**

Relatore
Leonardo Badia
Correlatore
Francesco Guidolin

Candidato
Mattia Carpin

Anno Accademico 2012/2013

Sommario

Scopo di questo elaborato è l'analisi di alcune tecniche che consentono un miglioramento delle prestazioni in reti cellulari di nuova generazione che appartengono allo standard LTE della tecnologia UMTS. Ciò può avvenire con l'introduzione di opportune politiche per la gestione efficiente della risorsa radio, in modo da ottenere efficienze e capacità trasmissive maggiori anche tramite l'uso di antenne multiple e meccanismi di condivisione dello spettro. Attraverso il simulatore di rete ns-3, con l'utilizzo del modulo LENA, sono state condotte delle simulazioni per analizzare le prestazioni della rete al variare della politica di gestione dello spettro, con particolare interesse allo studio di un metodo ottimale per la condivisione delle risorse.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Cenni motivazionali	1
1.2	Reti Long Term Evolution	2
1.3	Struttura dell'elaborato	4
2	Gestione dell'interferenza e tecniche multi-antenna su reti LTE	5
2.1	Politiche di assegnamento delle frequenze per la minimizzazione dell'interferenza	6
2.1.1	Statical Fractional Frequency Reuse (SFFR)	6
2.1.2	Adaptative Fractional Frequency Reuse (AFFR)	7
2.1.3	Spectrum sharing	8
2.1.4	Tecniche per la cancellazione e rigenerazione dell'interferenza	9
2.2	Sistemi Multiple Input Multiple Output	11
2.2.1	Overview	11
2.2.2	Modello matematico	12
2.2.3	Tecniche Single User MIMO	14
2.2.4	Tecniche Multi User MIMO	16
2.3	Tipi di trasmissione su reti LTE	20
3	Il simulatore di rete ns-3	21
3.1	Descrizione	21
3.2	Il modulo LENA	21
3.2.1	Gestione dello spettro	22

3.2.2	Scheduler	24
3.2.3	Simulazione	24
3.2.4	Analisi dei risultati	25
3.3	Cenni sui sistemi a coda Markoviani	25
3.4	Obiettivi della simulazione	27
3.5	Indice di <i>fairness</i>	28
3.6	Implementazione dello scenario	29
4	Risultati delle simulazioni	33
4.1	Scenario e parametri della simulazione	33
4.2	Grafico temporale del <i>throughput</i>	34
4.3	Analisi della <i>fairness</i>	35
4.4	Dinamicità della rete	39
5	Conclusioni e sviluppi futuri	41

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cenni motivazionali

Sin da quando la trasmissione *wireless* iniziò ad acquisire una certa rilevanza, passando da sporadico esperimento a sistematico mezzo di trasmissione dell'informazione, si rese necessario a livello statale regolamentarne l'utilizzo. Nel tentativo di collocare temporalmente il fenomeno, si potrebbe osservare che i primi pionieri della trasmissione senza fili svilupparono alcuni prototipi agli inizi del ventesimo secolo, ma solo verso la seconda metà del novecento la tecnica raggiunse un livello sufficientemente perfezionato per consentire lo sviluppo di dispositivi di trasmissione accessibili anche in un contesto civile, rendendo così necessaria la regolamentazione da parte dello Stato dello spettro delle frequenze [8, 25].

Mentre il traffico scambiato sulle reti cellulari è in continua crescita [7] in rapporto alla limitatezza della banda radio, la sfida cruciale è quella di studiare, progettare e testare tecniche trasmissive che riescano a far crescere l'efficienza delle comunicazioni, consentendo dunque, a parità di risorse utilizzate, di ottenere prestazioni migliori. Valuteremo il rendimento del sistema adottando la metrica del *throughput*, inteso nel seguito come tasso medio dei pacchetti trasmessi con successo sulla rete.

Alcune delle tecniche che presenteremo nel seguito, almeno nella loro intuizione teorica, risalgono addirittura alla metà del novecento, dove vennero

inizialmente sperimentate in ambito militare: solo dopo l'avvento del nuovo millennio, tuttavia, il loro utilizzo ha riscosso particolare attenzione ed è entrato a far parte delle reti di massa commerciali [16].

1.2 Reti Long Term Evolution

Lo standard *Long Term Evolution* (LTE) della tecnologia cellulare *Universal Mobile Telecommunications System* (UMTS), così come è stato definito dal *3rd Generation Partnership Project* (3GPP) e il cui sviluppo ed inserimento è iniziato alla fine del 2009, è un'interfaccia radio altamente flessibile ed affidabile [2]. Nella sua prima versione (release-8) consente il raggiungimento di picchi di traffico in *downlink* di 300 Mb/s [2], un significativo incremento nell'efficienza spettrale rispetto ai precedenti sistemi cellulari, e una nuova architettura di rete progettata per semplificare le operazioni e ridurre i costi: essa rientra nelle tecnologie IMT-2000 di terza generazione. L'ultima sua versione (release-10) è denominata LTE-Advanced ed è ancora in fase di definizione e sviluppo per poter soddisfare integralmente i requisiti stabiliti dall'*International Telecommunication Union* (ITU) per reti di quarta generazione (*fourth-generation*, 4G) [2, 16, 22, 27].

Downlink

La modulazione *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM), con dati trasmessi su un gran numero di sottoportanti parallele a banda stretta, è l'ossatura portante della trasmissione radio LTE in *downlink*, ed è stata scelta per ottenere alti *data-rate*, ampia banda trasmissiva ed un'allocazione dinamica dello spettro delle frequenze [2, 5]. Essa inoltre consente di rendere la trasmissione robusta a fenomeni quali il *time-dispersion* [2], ovvero la dilatazione del segnale trasmesso a causa dell'effetto di propagazione multicammino, rendendo così superflua la progettazione di complessi ricevitori [22]. I dati da trasmettere sono codificati dapprima mediante codifica *turbo*, in seguito mediante una tra QPSK, 16-QAM, 64-QAM a seconda delle condizioni del canale, ed infine modulati mediante la tecnica OFDM [2]. La

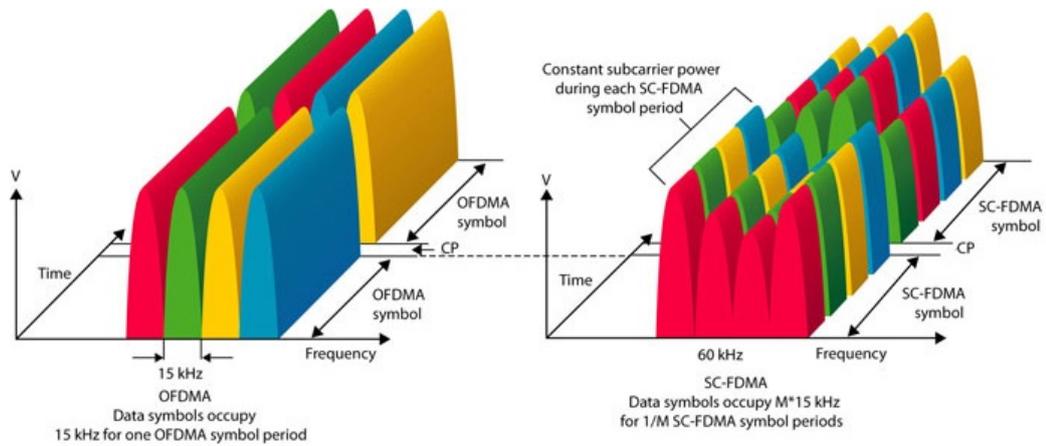


Fig. 1.1: Tecnica di accesso al mezzo OFDMA (downlink) e SC-FDMA (uplink)

spaziatura tra le portanti è di 15kHz e la durata del simbolo è di 1ms [2][27]. Alla luce di ciò viene definito in una rete LTE un *Resource Element* (RE) come la minima risorsa allocabile, associata ad una singola sottoportante e ad un singolo simbolo. Si denota invece con *Resource Block* (RB) un insieme di REs corrispondenti ad N sottoportanti adiacenti e M simboli consecutivi. La condivisione del canale da parte di più utenti che ne richiedono l'accesso è gestita dalla tecnica *Orthogonal Frequency Division Multiple Access* (OFDMA), svolta dal livello *datalink* dello stack protocollare, che si occupa anche del controllo del flusso, dell'errore e delle ritrasmissioni [21]. L'intera banda disponibile viene partizionata in N sottocanali, assegnando a ciascun utente un sottoinsieme di questi, come riportato in Figura 1.1.

Uplink

Per quanto riguarda l'*uplink*, risulta evidente che la potenza in trasmissione utilizzabile dal terminale risulta sensibilmente inferiore rispetto a quella disponibile dalla stazione base: in tal senso l'efficienza energetica è uno tra i più importanti fattori da tenere in considerazione nella progettazione della trasmissione in questa direzione [23]. Viene definito *Peak-to-Average Power*

Ratio (PAPR) di un segnale il rapporto

$$PAPR = \left(\frac{|x|_{peak}}{x_{rms}} \right)^2 = \frac{|x|_{peak}^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (1.1)$$

La modulazione OFDM richiede un amplificatore di potenza costoso ed energeticamente inefficiente che serve a compensare l'alto PAPR che esibisce il segnale modulato [27]: essa dunque non si presta per essere impiegata nella fase di *uplink*. Una trasmissione *Single Carrier-Frequency Division Multiple Access* (SC-FDMA) su singola portante presenta notevoli vantaggi in termini di mitigazione di effetti di interferenza multi-cammino [2] e, con l'aggiunta di un prefisso ciclico e di un ricevitore *turbo equalizer*, essa raggiunge prestazioni comparabili con OFDM [23]: per questo motivo essa viene impiegata nelle reti LTE in *uplink*.

1.3 Struttura dell'elaborato

La rimanente parte della tesi è organizzata come segue. Nel capitolo 2 introdurremo politiche per la gestione coordinata delle frequenze che mirano a ridurre l'interferenza; proporremo poi alcune tecniche utilizzabili in seguito all'introduzione di molteplici antenne nella comunicazione tra stazione base e terminale in una rete LTE. Nel capitolo 3 verrà descritto il simulatore di rete ns-3, con particolare attenzione alla struttura e al funzionamento del modulo LENA. Introdurremo brevemente i sistemi a coda e definiremo le metriche utilizzate per l'analisi delle prestazioni. Nel capitolo 4 verranno presentati i risultati simulativi ottenuti applicando diverse politiche di gestione dello spettro, variando le condizioni dello scenario e cercando di osservare quando ciascun metodo porti un beneficio concreto. Nel capitolo 5 trarremo le conclusioni del lavoro svolto proponendo eventuali approfondimenti e sviluppi futuri.

Capitolo 2

Gestione dell'interferenza e tecniche multi-antenna su reti LTE

La tecnica di accesso al mezzo OFDMA sta alla base della tecnologia LTE: essa, per come è strutturata, garantisce ortogonalità tra gli utenti serviti contemporaneamente da una stessa cella, sia in *uplink* che in *downlink*. Ciò significa che ad utenti diversi, appartenenti però alla stessa stazione base, vengono assegnati blocchi di risorse frequenziali distinti evitando così fenomeni interferenti. L'*efficienza spettrale*, definita da $\nu = R_b/B$, ovvero come rapporto tra *bit-rate* e *bandwidth* utilizzati, è un indicatore di quale *bit-rate* si possa ottenere utilizzando una banda assegnata [21]. Essa risulta fortemente influenzata dall'interferenza che si manifesta tra celle adiacenti, soprattutto negli utenti che si trovano in regioni dello spazio in cui le potenze trasmissive di due diverse stazioni sono tra loro comparabili, generando così un *Signal to Interference plus Noise Ratio* (SINR) particolarmente basso [10]. Lo studio di tecniche che riescano a mitigare, o meglio ancora, ad eliminare gli effetti di interferenza intercella possono comportare notevoli miglioramenti alle prestazioni di una rete LTE, specialmente per quanto riguarda la qualità del servizio offerto ai terminali che si trovano a bordo cella (*cell-edge users*).

2.1 Politiche di assegnamento delle frequenze per la minimizzazione dell'interferenza

2.1.1 Statical Fractional Frequency Reuse (SFFR)

Il primo e più basilare approccio al problema di assegnare le frequenze consiste nel partizionare lo spettro disponibile assegnando ciascuna sottobanda ad una stazione base, coordinando la distribuzione in modo da minimizzare l'interferenza intercella [5, 10]. Tale procedura è denotata da un parametro N che caratterizza l'operazione di suddivisione. Ad esempio, con un fattore $N = 3$, ad ogni cella sarà assegnata una sottobanda corrispondente ad $1/3$ dell'intero spettro disponibile.

L'operazione di distribuzione delle risorse è coordinata in modo da evitare di assegnare le stesse frequenze a celle adiacenti, e comporta dunque anche la decisione di un pattern di assegnamento che minimizzi l'interferenza, come si può vedere dalla Figura 2.1, nella quale l'interferenza tra due celle "1" è comunque presente, ma sensibilmente ridotta in quanto esse sono più lontane. Questo si traduce in un guadagno in termini di SINR, che ne risulta positivamente migliorato, ma provoca un abbassamento del *throughput* a seguito della riduzione della banda disponibile [10]. In un sistema LTE, inoltre, la diminuzione della banda si traduce nella riduzione del massimo numero di *resource block* assegnabili dalla stazione base, con una conseguente diminuzione del *throughput* di picco raggiungibile [2, 10].

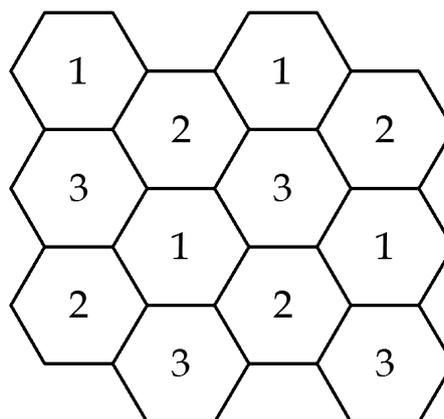


Fig. 2.1: Pattern per SFFR

Un ulteriore sviluppo di questa tecnologia segue dal considerare che gli utenti che risentono di interferenza sono in genere quelli che si trovano a bordo cella: a motivo di ciò è possibile procedere a partire dalla stazione

base per cerchi concentrici assegnando inizialmente $N = 1$ ai cerchi di raggio minore (che si traduce nella massima disponibilità di banda), mentre per gli utenti a bordo cella si opera la politica SFFR di parametro N opportuno [5]. Una soluzione che impiega questo approccio è proposta in via grafica nella Figura 2.2. Tali approcci sono comunque di natura statica: in altre parole l’allocazione della banda è pre-determinata e non può essere adattata alle variazioni del sistema intorno alla cella [6, 10, 27].

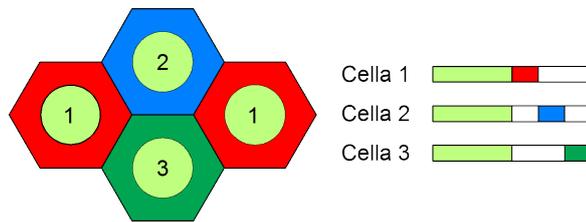


Fig. 2.2: Esempio di allocazione SFFR

Nonostante gli sforzi per ottimizzare staticamente la distribuzione delle risorse, in generale la riduzione della banda influisce maggiormente (in senso negativo) rispetto alla riduzione dell’interferenza, con il *throughput* che si assesta tra il 75-80% del corrispondente sistema con $N = 1$ [10, 22]. Inoltre va detto che l’implementazione di reti di quarta generazione richiede un fattore di riutilizzo delle frequenze N unitario [10], che si traduce nell’impiego massimo dello spettro disponibile, e che rende non implementabile una suddivisione statica delle risorse radio mediante l’algoritmo appena descritto. Per tali ragioni, pur richiedendo una maggiore complessità, è preferibile orientare lo studio verso protocolli dinamici che vengono introdotti nella prossima sezione.

2.1.2 Adaptive Fractional Frequency Reuse (AFFR)

L’adattatività o dinamicità nell’allocazione delle frequenze, pur richiedendo uno sforzo computazionale maggiore rispetto all’allocazione statica, consente di variare le risorse spettrali in funzione delle condizioni di carico della cella.

Tale approccio consente, idealmente in ogni momento, l'assegnazione ottimale delle risorse, conferendo al sistema robustezza ed alta efficienza [6].

Una strategia per realizzare un allocamento dinamico delle risorse radio può essere quella di realizzare un grafo che rappresenti le relazioni di interferenza tra i terminali della rete: un arco collega due terminali a e b se:

1. a e b sono nodi appartenenti alla stessa cella;
2. a è un utente al bordo della cella i , b è un utente al bordo della cella j , con i e j celle adiacenti.

Sulla base del grafo così costituito è possibile allocare le risorse in maniera ottimale [6]: un modo intuitivo per poter pensare a questo approccio è quello di associare un colore ad una certa banda di frequenze, colorando via via i nodi adiacenti del grafo con colori diversi, e con la possibilità di riutilizzare gli stessi colori per gli altri nodi. In tal modo, mediante un compromesso tra dinamicità della rete e dispendio computazionale per la rigenerazione della topologia mediante grafo, e la sua successiva rivalutazione, è possibile sviluppare un sistema robusto e adattativo rispetto alle variazioni di scenario che coinvolgono la cella [6].

Pur avendo superato con questa tecnica i vincoli di staticità si può compiere un ulteriore miglioramento prestazionale se le stazioni base adiacenti operassero con un approccio cooperativo, come descritto nel paragrafo che segue.

2.1.3 Spectrum sharing

L'allocazione statica esclusiva (così come descritta nel primo paragrafo) consente di conoscere con precisione gli utenti gestibili e la qualità trasmissiva, ma come svantaggio principale non sfrutta sempre in maniera efficiente lo spettro assegnato, visto che il livello di traffico a cui essa deve far fronte è una quantità in continua variazione. Consideriamo, ad esempio, lo scenario semplificato in cui due stazioni base adiacenti abbiano ciascuna a disposizione due bande di frequenze tra loro ortogonali, ovvero disgiunte. L'idea

dello *spectrum sharing* è che ciascuna delle due stazioni metta in condivisione una porzione delle sue frequenze con la cella adiacente, generando quindi una banda condivisa. A questo punto risulta prioritario stabilire in che modo esse possano accedervi: in letteratura si trovano svariate tecniche [1, 3, 18], che nella maggior parte dei casi prevedono di istituire un mercato virtuale al quale accedere per ottenere una parte delle risorse condivise. In tal modo la dinamicità della rete è garantita e si possono ottenere efficienze maggiori rispetto agli algoritmi di assegnazione statica delle frequenze, visto che nei momenti di maggior traffico si può accedere ad una banda di frequenze supplementare, mentre quando il traffico è particolarmente basso la risorsa radio può essere liberata per consentire ad altri l'accesso al mezzo [1].

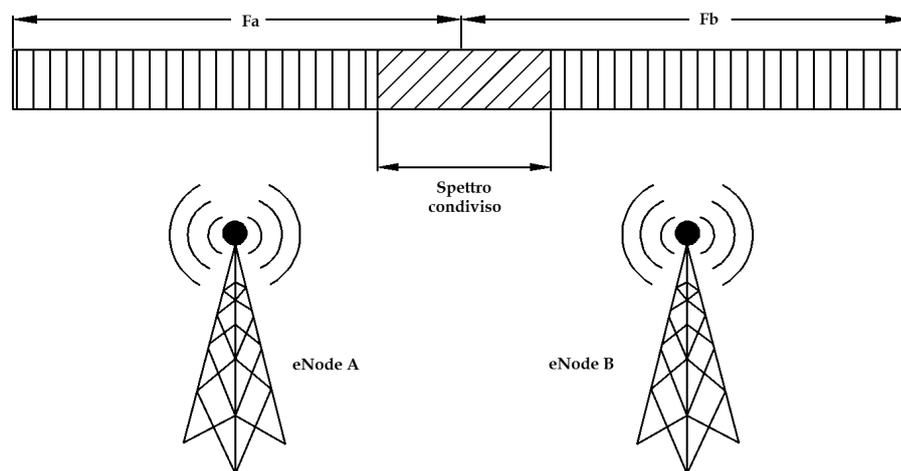


Fig. 2.3: Scenario con politica collaborativa di Spectrum Sharing

Forniamo infine un ultimo approccio alla gestione dell'interferenza inter-cella mediante la seguente tecnica.

2.1.4 Tecniche per la cancellazione e rigenerazione dell'interferenza

L'idea alla base delle tecniche di *Interference Cancellation* (IC) [10] è quella di ricostruire il segnale interferente e sottrarlo al segnale ricevuto, consentendo

così sia l'eliminazione di interferenza intercella che intracella: in tale ottica la comunicazione tra celle risulta di vitale importanza. Nelle reti LTE tale comunicazione è garantita dall'interfaccia X2, adibita proprio al collegamento punto-punto tra le diverse stazioni base. Tale tecnica, almeno dal punto di vista teorico, risulta implementabile sia in *uplink* che in *downlink*, anche se a causa della complessità computazionale e del dispendio energetico essa è svolta dalla stazione base, e riguarda dunque la fase di *uplink* [10].

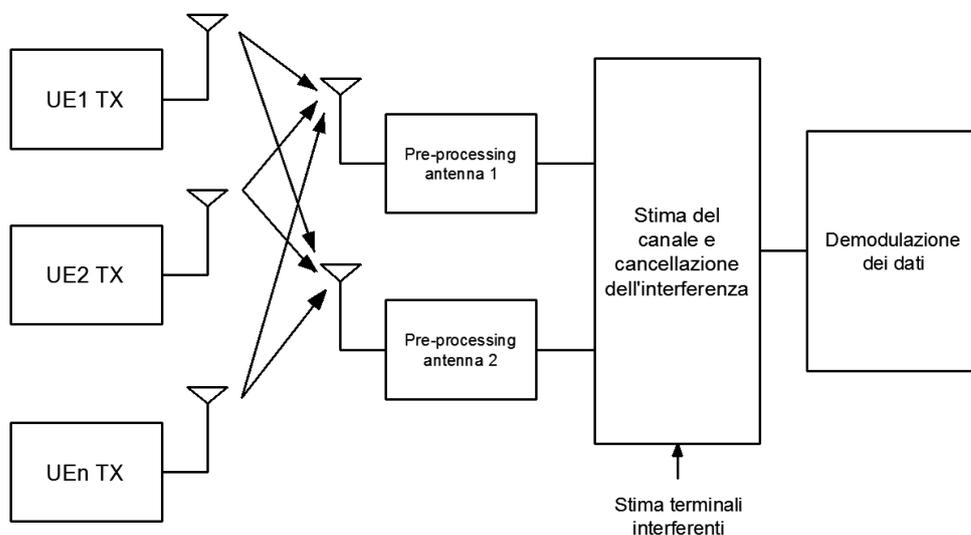


Fig. 2.4: Schema concettuale di un ricevitore per cancellazione di interferenza [10]

Nella Figura 2.4 possiamo osservare una descrizione ad alto livello del ricevitore che opera l'approccio IC. Dal punto di vista della nomenclatura, *User Equipment* (UE) è il termine che indica il dispositivo mobile nelle reti LTE. L'UE1 risulta essere l'utente desiderato, mentre gli altri sono trattati come interferenti, e possono appartenere sia alla stessa cella sia a celle adiacenti. Ciascun UE fa uso di un *reference signal* (RS) in fase di *uplink*, attraverso il quale comunica alla stazione base informazioni utili alla stima delle condizioni del canale [2, 27]. Il ricevitore, basandosi sui *reference signals* provenienti dai terminali interferenti, stima sia i parametri del canale che il ritardo temporale dei diversi segnali. Una volta svolte queste stime è

possibile sottrarre al segnale ricevuto il segnale stimato ottenendo, nel caso di una stima sufficientemente precisa, il singolo segnale trasmesso. Ovvero sia $r(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t + \tau_i)$ il segnale ricevuto dalla stazione base: viene inizialmente stimato mediante il *feedback* proveniente dagli utenti interferenti il valore dei parametri $\alpha_i, \tau_i \forall i$, ed infine $x_1(t) \simeq r(t) - \sum_{i=2}^n \tilde{\alpha}_i x_i(t + \tilde{\tau}_i)$. Quanto più accurata è la conoscenza del canale da parte della stazione base, tanto più sarà accurata la stima dei segnali interferenti, e quindi la tecnica avrà maggiore efficacia [10].

2.2 Sistemi Multiple Input Multiple Output

Consideriamo ora la possibilità di avere più antenne in trasmissione (ed eventualmente in ricezione) cercando di evidenziare i benefici che tale scenario può introdurre.

2.2.1 Overview

Le tecnologie *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) giocano un ruolo essenziale nel rispettare i requisiti per le reti 4G [16]: esse segnano infatti la più grande distinzione con le tecnologie della precedente generazione [16]. L'introduzione di una o più antenne dal lato della stazione base, o anche all'interno del terminale, apre un'ulteriore dimensione spaziale nella codifica e nel rilevamento dei segnali, che si traduce nella possibilità di trasmettere simultaneamente molteplici flussi da o verso i terminali [27]. L'obiettivo dei metodi che esporremo è quello di aumentare l'efficienza del collegamento in termini di tasso di errore, di *data-rate* e di efficienza spettrale. Lo sviluppo dello standard LTE, sin dalla sua prima release [2], è stato progettato per il supporto completo delle tecniche MIMO: non solo esse consentono il miglioramento delle prestazioni del collegamento punto-punto, ma si ripercuotono positivamente anche sul servizio rivolto agli utenti a bordo cella,

consentendo un incremento in termini di qualità del servizio e di mitigazione dell'interferenza [16, 31].

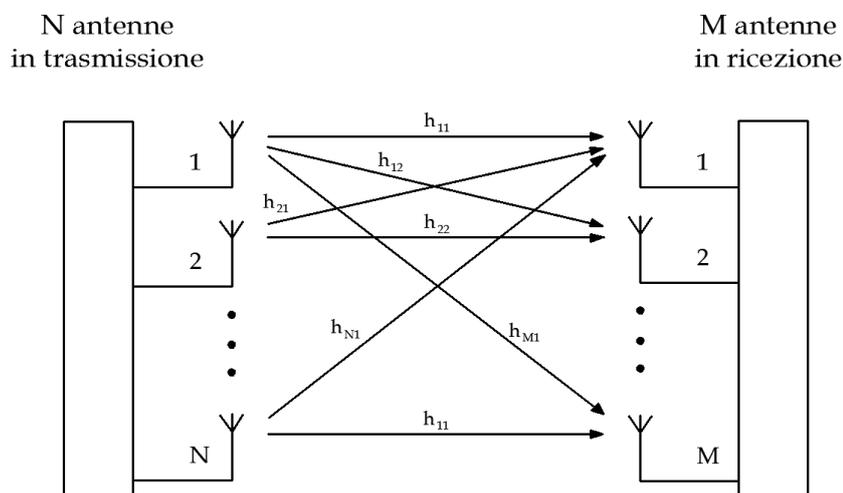


Fig. 2.5: Struttura generale di una trasmissione MIMO

Sotto opportune condizioni, se con N denotiamo il numero di antenne della stazione base, con M in numero di antenne riceventi nel terminale mobile, il guadagno in termini di capacità del canale risulta al più K volte maggiore rispetto al corrispondente sistema *Single Input Single Output* (SISO, ovvero a singola antenna), con $K = \min(M, N)$ [31].

2.2.2 Modello matematico

Dovendo modellare la trasmissione di un segnale attraverso molteplici antenne, e il suo successivo rilevamento da parte di un terminale mobile, risulta necessario far uso di un formalismo matematico (basato in sostanza su matrici) che consenta di descrivere in maniera esaustiva la codifica del segnale. Si consideri in primo approccio un sistema costituito in trasmissione da N antenne che trasmettono su una singola sottoportante. Denotiamo con $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ i segnali trasmessi dalla stazione base e con $r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t)$ i segnali ricevuti dal terminale mobile. Possiamo rappresentare il generico segnale ricevuto $r_i(t)$ come combinazione lineare degli

$y_i(t)$ mediante i coefficienti h_{ij} , che modellano la propagazione attraverso il canale dall'antenna i all'antenna j , a cui vanno sommati gli effetti di rumore [27]. In formule otteniamo

$$\begin{cases} r_1(t) = h_{11}y_1(t) + h_{21}y_2(t) + \dots + h_{n1}y_n(t) + w_1(t) = \sum_{i=1}^n h_{i1}y_i(t) + w_1(t) \\ r_2(t) = h_{12}y_1(t) + h_{22}y_2(t) + \dots + h_{n2}y_n(t) + w_2(t) = \sum_{i=1}^n h_{i2}y_i(t) + w_2(t) \\ \dots \\ r_m(t) = h_{1m}y_1(t) + h_{2m}y_2(t) + \dots + h_{nm}y_n(t) + w_m(t) = \sum_{i=1}^n h_{im}y_i(t) + w_m(t) \end{cases}$$

E' possibile esprimere le relazioni descritte dal sistema facendo uso di matrici, e in particolare come

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1m} & h_{2m} & \dots & h_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Infine, estendendo la notazione (2.1) alla trasmissione su T sottoportanti si perviene a

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{Y} + \mathbf{N}$$

dove

- \mathbf{R} è una matrice di dimensione $M \times T$ che raccoglie tutti i segnali ricevuti dalle M antenne per ciascuna delle T sottoportanti.
- \mathbf{H} è una matrice di dimensione $M \times N$, e modella gli effetti di propagazione sul canale tra ciascuna delle antenne utilizzate, nell'ipotesi semplificativa che gli effetti di propagazione non siano legati alla sottoportante scelta.
- \mathbf{Y} è una matrice di dimensione $M \times T$, e denota l'insieme dei possibili segnali trasmissibili da N antenne distinte su T sottoportanti,

- \mathbf{N} è una matrice di dimensione $M \times T$, e rappresenta il rumore additivo per ciascuna delle M antenne riceventi, riferito ad ogni sottoportante.

Denotiamo infine con $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_p)$ un gruppo di P simboli QAM da trasmettere al ricevitore attraverso T sottoportanti. A partire da \mathbf{X} , mediante una funzione, è possibile determinare il valore del segnale \mathbf{Y} da trasmettere sul canale. La scelta di questa mappa $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}(\mathbf{X})$ è determinante e stabilisce quale delle possibili tecniche MIMO vengono utilizzate [27].

2.2.3 Tecniche Single User MIMO

Quando la stazione base interagisce con un singolo utente, e almeno uno tra i due è dotato di molteplici antenne, ci troviamo in presenza di un sistema *Single User MIMO* (SU-MIMO) [27]. Consideriamo di voler trasmettere un insieme di $P = NT$ simboli attraverso il canale. Essi sono dapprima separati in N flussi composti di T simboli ciascuno, dove il flusso i -esimo sarà costituito dai simboli $[x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,T}]$. La funzione ottima [27], ovvero che massimizza la capacità trasmissiva del canale, per la trasmissione del segnale attraverso il canale prevede l'utilizzo di un *precoder*, che gioca il ruolo sia di gestire la potenza da assegnare a ciascun flusso, che di svolgere l'operazione di *beamforming*. Quest'ultima è una tecnica per il processamento del segnale che consente di controllare la direzionalità della trasmissione quando si fanno uso di molteplici antenne, beneficiando della diversità spaziale tra gli utenti per trarne dei vantaggi. Il segnale trasmesso può essere rappresentato mediante

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}P\bar{\mathbf{X}} \quad (2.2)$$

Dove

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \dots & x_{N,T} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

\mathbf{V} è una matrice di *beamforming* di dimensione $N \times N$ e \mathbf{P} è una matrice per l'allocazione della potenza di dimensione $N \times N$, in cui l' i -esimo elemento sulla diagonale vale $\sqrt{p_i}$, dove p_i rappresenta la potenza associata all' i -esimo flusso.

In particolare \mathbf{V} deve rappresentare una matrice identità ($\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$) scelta in modo tale che \mathbf{V} sia la *Singular-Value-Decomposition* della matrice di canale \mathbf{H} [27]. In tal modo l' i -esima colonna del vettore \mathbf{V} viene utilizzata come vettore di *beamforming* per l' i -esimo flusso [27]. Per quanto riguarda invece l'assegnamento delle potenze si ricorre all'algoritmo *water-filling* [14, 27, 32]. Si potrebbe pensare, nel tentativo di assegnare la potenza in maniera efficiente, che quelle parti del canale che risentono di un basso SINR richiedano maggiore potenza, per compensare gli effetti interferenti. L'idea alla base dell'algoritmo *water-filling* [32], invece, si basa sul principio contrario. Infatti tutte le parti del canale con basso SINR non possono con-

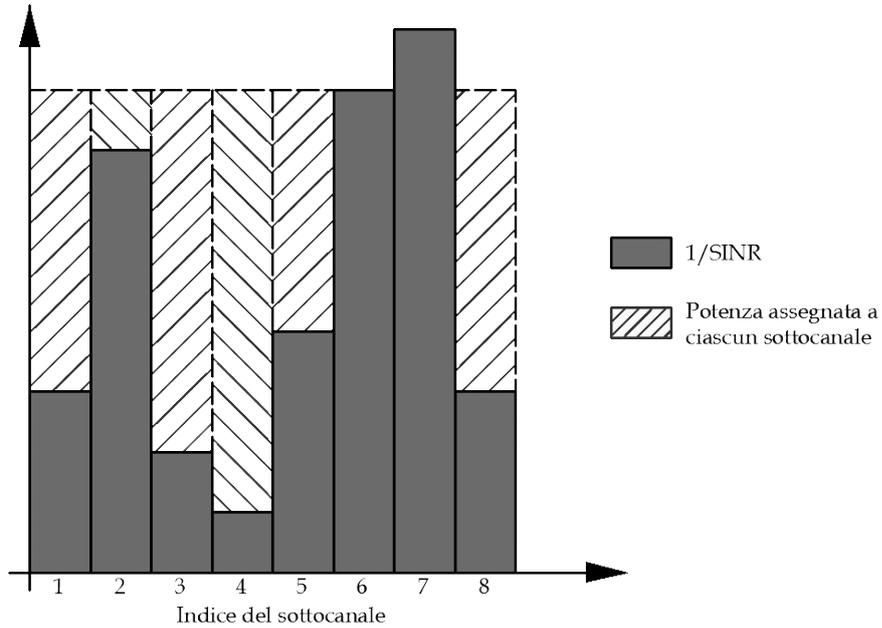


Fig. 2.6: Assegnamento della potenza mediante algoritmo Water filling

tribuire in maniera sostanziale al raggiungimento di un'alta capacità [27], e di conseguenza a tali sottocanali viene assegnata una piccola parte di potenza.

Viceversa, i sottocanali ad alto SINR ne riceveranno una maggior quantità per consentire la trasmissione ad alti *data-rate*. Un'illustrazione del principio è riportata in Figura 2.6 nella quale, ad esempio, il sottocanale di indice 7 ha un basso SINR e ad esso non viene assegnata alcuna potenza.

Transmit Diversity

Nella descrizione matematica (2.1) la matrice di trasmissione \mathbf{Y} non esibiva alcuna forma di ridondanza. Tuttavia, per rendere la trasmissione maggiormente robusta ai fenomeni di *time-dispersion*, è possibile introdurre una mappatura $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}(\mathbf{X})$ denominata *Space-Time Block Code* (STBC) che introduce in \mathbf{Y} altra informazione utile. Sebbene ne esistano diverse versioni, alcune tra queste conferiscono alla matrice \mathbf{Y} alcune proprietà, ad esempio l'ortogonalità, che consente migliori prestazioni e una più semplice progettazione del ricevitore: tali requisiti sono soddisfatti dal codice di Alamouti [2, 27]. Osserviamo infine che tale codifica non necessita di alcuna conoscenza della matrice di canale \mathbf{H} , e quindi non è necessario alcun *feedback* da parte dei terminali rispetto ai suoi parametri.

Multi-Layer transmission

Quando anche il terminale mobile è dotato di molteplici antenne è possibile utilizzare una forma di *spatial multiplexing* che consente la trasmissione di flussi paralleli, simultanei che si traducono in un significativo incremento del *data-rate* di picco [2]. Ad esempio se $N = 4$, $M = 2$ possono essere trasmessi 2 flussi paralleli, incrementando a tutti gli effetti il *data-rate* di un fattore 2.

2.2.4 Tecniche Multi User MIMO

Le tecniche che consentono la comunicazione verso antenne appartenenti a diversi dispositivi vengono definite con il nome di *Multi User MIMO* (MU-MIMO), e rappresentano lo sviluppo più recente di questa tecnologia. Secondo questo principio, a molteplici utenti possono essere assegnate le stesse risorse in frequenza, beneficiando della loro separazione spaziale per evitare effetti di interferenza [16, 27]. Occorre innanzi tutto sottolineare alcune

sostanziali differenze che intercorrono fra questo scenario e quello descritto nella precedente sezione. Infatti, quando trattiamo strategie MU-MIMO, se K terminali sono attivi nella cella, la comunicazione avverrà simultaneamente (ovvero sullo stesso *slot* frequenziale) con $U < K$ dispositivi. Assumiamo ora che ciascun terminale sia equipaggiato con J antenne: tutti i terminali attivi nella stazione base costituiranno un insieme di $M = KJ$ antenne attive al lato ricevitore. Il numero di flussi che possono essere trasmessi sul canale risulta limitato da $\min(N, M)$, nel nostro scenario tipicamente $\min(N, M) = N$, ovvero esso è limitato dal numero di antenne presente nella stazione base. Per meglio comprendere tale vantaggio consideriamo il caso limite in cui $J = 1$, e nel quale N flussi distinti possono essere trasmessi massimizzando il *multiplexing gain*, ovvero allocando ciascun flusso ad un terminale. Ciò si trova in contrasto con le tecniche SU-MIMO, nelle quali la trasmissione di N flussi richiedeva, per trovare vantaggi, almeno N antenne al lato ricevente [16]. Il grande vantaggio delle strategie MU-MIMO è che esse preservano la loro efficacia ed efficienza anche nel caso di terminali a basso costo dotati di un ridotto numero di antenne [27].

Dirty Paper Coding

Abbiamo affermato che quando si trattano approcci MU-MIMO molteplici utenti vengono serviti contemporaneamente dalla stazione base: tali sistemi consentono di usare uno schema di codifica denominato *Dirty Paper Coding* (DPC), che è una strategia di codifica multi-utente basata su una pre-sottrazione dell'interferenza. In particolare, quando il numero di utenti K supera in numero di antenne N (indipendentemente da M , e cioè a prescindere dalla complessità del terminale mobile), un incremento lineare della capacità può essere utilizzato usando la tecnica DPC [31]. Sebbene essa risulti la strategia ottimale per il raggiungimento della massima capacità in sistemi MIMO [13, 29, 31], la sua applicazione in sistemi pratici risulta marginale, a causa della grande complessità computazionale che richiede la codifica e la decodifica dei dati, specialmente quando K risulta particolarmente elevato. Sebbene l'approccio DPC non possa quindi essere implementato ad

oggi sulle reti LTE, è possibile adottarne un altro che, basato su un processo più semplice, consente di ottenere prestazioni comparabili e asintoticamente convergenti alla codifica ottima.

Zero-Forcing beamforming

La tecnica del *beamforming* utilizza molteplici antenne per controllare la direzione di un fronte d'onda pesando opportunamente l'ampiezza e la fase di ciascun segnale inviato da ogni antenna. Una scelta accurata del vettore dei pesi può eliminare l'interferenza reciproca tra flussi diversi, beneficiando della separazione spaziale tra i diversi utenti per supportarne molteplici contemporaneamente [27]. Nonostante la codifica ottimale risulti la DPC, si dimostra

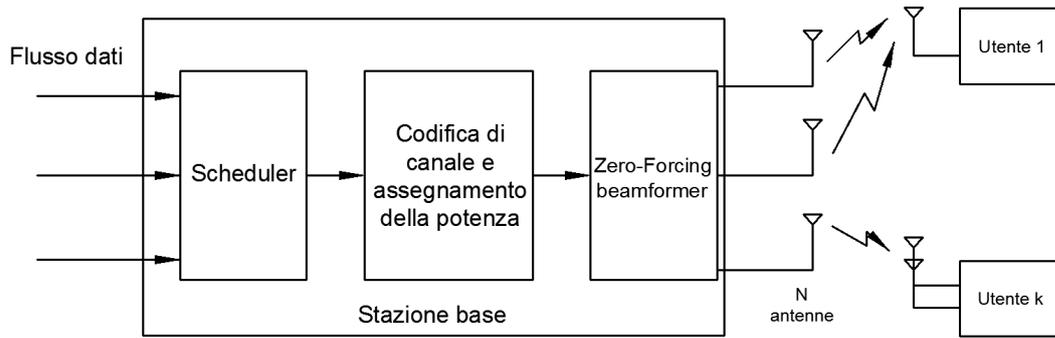


Fig. 2.7: Sistema MIMO con N antenne in trasmissione e K utenti. Il diagramma si riferisce alla strategia Zero Forcing

che, sebbene la complessità dell'approccio mediante *beamforming* sia piuttosto ridotta, tale tecnica consente il raggiungimento (soprattutto quando il numero di utenti K della rete aumenta [31]) di una capacità di canale comparabile con la codifica ottimale [26, 30, 31]. La scelta del vettore dei pesi risulta chiave nel problema di ottimizzazione: nella strategia *zero-forcing* esso è scelto per evitare interferenza tra i flussi. Ricorrendo alla notazione usuale si ha che per soddisfare la condizione di interferenza nulla ($h_k w_j = 0$ per ogni $i \neq j$) la matrice W risulta semplicemente dalla pseudo-inversione della matrice di canale [31], in formule

$$W(S) = H(S)^\dagger = H(S)^T (H(S)H(S)^T)^{-1}$$

mentre per quanto riguarda l'allocazione della potenza si ricorre all'algoritmo *water-filling*.

Ciò che si dimostra [31] è che con il crescere del numero di utenti la strategia *Zero-Forcing beamforming* (ZFBF) raggiunge una *sum-rate* uguale a quella della strategia DPC. Essa risulta asintoticamente ottimale sia per quanto riguarda lo *spatial multiplexing gain*, ovvero la possibilità di trasmettere molteplici flussi in parallelo e separarli al ricevitore, sia rispetto al *multiuser diversity gain* [26, 30, 31].

Vantaggi del beamforming per utenti a bordo cella

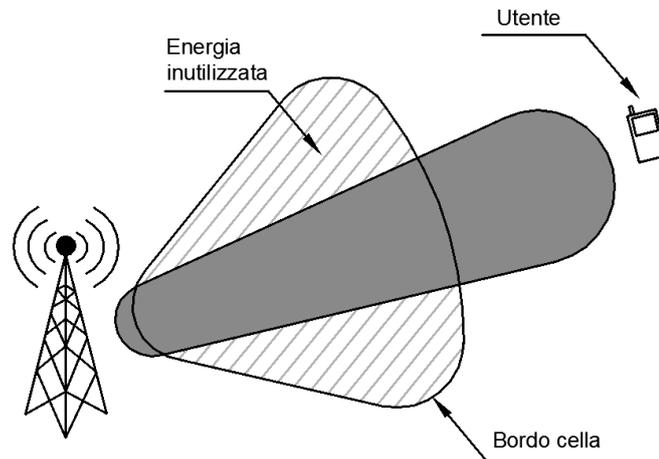


Fig. 2.8: Beamforming per compensare gli effetti interferenti a bordo cella

È importante inoltre osservare come la tecnica del *beamforming* possa portare notevoli vantaggi anche rispetto alle problematiche riferite all'interferenza per gli utenti a bordo cella. Quando le potenze delle due diverse stazioni base sono tra loro comparabili, si osserva un SINR piuttosto basso, che si traduce in un basso *data-rate* in trasmissione.

Mediante il processo di *beamforming*, variando opportunamente il vettore che regola la potenza associata a ciascun flusso, si ha la possibilità di concentrare la potenza verso un singolo terminale, come illustrato nella Figura 2.9, aumentando il rapporto tra potenza del segnale utile e di quella interferente.

2.3 Tipi di trasmissione su reti LTE

Dalla release-9 delle reti LTE sono stati standardizzati i modi trasmissivi [24] che possono essere utilizzati che, alla luce della descrizione teorica che abbiamo fornito nella precedente sezione, vengono ora brevemente esposti e riassunti [24].

1. **Modo 1: Trasmissione mediante singola antenna.**
2. **Modo 2: Transmit diversity**, nel quale le stesse informazioni sono inviate attraverso diverse antenne utilizzando diverse frequenze e codifiche per rendere la trasmissione maggiormente robusta.
3. **Modo 3: Open loop spatial multiplexing**, in cui ha luogo la moltiplicazione spaziale da 2 fino a 4 flussi, preceduta da un'operazione di precodifica e ritardo che consente artificialmente di creare una diversificazione frequenziale. Tale modo viene impiegato quando la situazione del canale evolve rapidamente (terminali che si muovono ad alta velocità) o quando i feedback risultano solo parziali e la conoscenza del canale incompleta.
4. **Modo 4, Closed loop spatial multiplexing**, nel quale vengono moltiplicati fino a quattro flussi per ottenere *data-rate* maggiori. Per consentire la stima delle condizioni del canale viene impiegato un segnale di riferimento (*reference signal*) incluso all'interno di diversi REs.
5. **Modo 5, MU-MIMO**, simile al modo 4 con la differenza che ciascun flusso è assegnato ad un diverso terminale.
6. **Modo 6, Closed loop spatial multiplexing a singolo layer**
7. **Modo 7, Beamforming**, in cui la potenza viene concentrata verso uno specifico terminale
8. **Modo 8, Dual layer beamforming**

Capitolo 3

Il simulatore di rete ns-3

3.1 Descrizione

ns-3 è un simulatore di rete ad eventi discreti, progettato e sviluppato da una comunità internazionale principalmente per scopi universitari e di ricerca, ed interamente orientato all'approccio *open-source* [11]. L'impiego del calcolatore si rende necessario quando la complessità della rete cresce, rendendo l'analisi prestazionale per via teorica difficilmente praticabile. Una tra le caratteristiche di ns-3 è la sua modularità, che consente l'integrazione, l'aggiunta e la modifica di componenti che implementano gli scenari più diversi. In particolare un ambiente LTE può essere simulato mediante l'impiego di un modulo sviluppato dal *Centre Tecnològic de Telecomunicacions de Catalunya* (CTTC), denominato *LTE-EPC Network Simulator* (LENA) e mantenuto da una comunità internazionale che ne cura lo sviluppo e l'aggiornamento [15]. Tutte le simulazioni che descriveremo nel seguito sono state condotte usando la versione 16 del simulatore ns-3, e la versione M5 del modulo LENA (rilasciata il 12/04/2013 [15]).

3.2 Il modulo LENA

Una panoramica della topologia del modulo LENA è presentata in Figura 3.1, nella quale si osservano due componenti principali: la prima (*LTE*

Model, tratteggiata) include lo stack protocollare e tutti i metodi necessari alla comunicazione tra terminale e stazione base; la seconda (*EPC Model*, tracciata con linea continua) racchiude l'interfaccia di rete che consente la comunicazione e il coordinamento intercella [19].

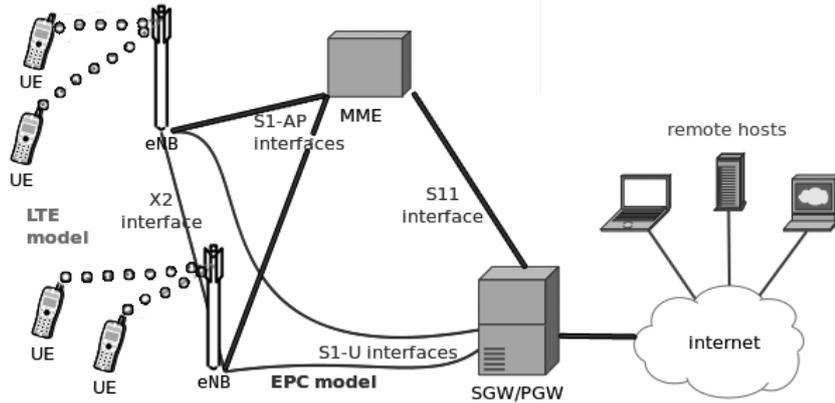


Fig. 3.1: Panoramica della topologia del modulo LENA

3.2.1 Gestione dello spettro

Frequenza portante

La frequenza portante in *downlink* è denotata nel simulatore con f_c e rappresenta l'*EUTRA Absolute Radio Frequency Channel Number* (EARFCN), un numero intero nell'intervallo $[0, 2^{16} - 1]$ [19, 28]. Esiste una corrispondenza biunivoca tra EARFCN e frequenza della portante espressa in MHz, espressa dalla seguente coppia di relazioni:

$$\begin{aligned} F_{DL} &= F_{DL-low} + 0.1(N_{DL} - N_{OFFS-DL}) \\ N_{DL} &= 0.1(F_{DL} - F_{DL-low}) + N_{OFFS-DL} \end{aligned}$$

dove F_{DL} rappresenta la frequenza della portante espressa in MHz, N_{DL} rappresenta l'EARFCN ed infine F_{DL-low} e $N_{OFFS-DL}$ sono valori tabulati. Secondo quanto riportato in [28] i valori corrispondenti risultano $F_{DL-low} = 2110$ e $N_{OFFS-DL} = 0$ da cui si ricava

$$F_{DL} = 2110 + 0.1 \cdot N_{DL}$$

$$N_{DL} = 10 \cdot (F_{DL} - 2110)$$

Le formule fin qui esposte valgono per il *downlink*: una volta determinato l'EARFCN in *downlink*, quello in *uplink* può essere ricavato facendo riferimento a [28] mediante una semplice operazione di traslazione, in particolare $N_{UL} = N_{DL} + 18000$.

Bandwidth

In riferimento al requisito di granularità, secondo il quale la minima risorsa gestibile all'interno del simulatore è un RB [19], la banda viene espressa in RBs ed essa può assumere, in conformità allo standard, solamente i valori 6,12,25,50,75,100 RBs [19, 28]. Tuttavia, per consentire le simulazioni che descriveremo nel seguito con politiche di *spectrum sharing*, è stata apportata una modifica alla libreria che consente di attribuire la banda senza rispettare questi vincoli. In tal modo è possibile assegnare a ciascuna stazione base tutti i valori interi compresi tra 1 e 100 RBs.

Ciascuna coppia (f_c, B) definisce in maniera completa un modello di spettro assegnabile ad una stazione base [19]. Nel caso dunque di gestione ortogonale, le celle non generano interferenza reciproca: il calcolo dell'SINR su ciascun RB sarà legato alla potenza utile, e come potenza interferente solamente quella del rumore presente sul canale. Nel caso invece si opti per una distribuzione non ortogonale, una parte della banda sarà sovrapposta. Il calcolo dell'SINR dal modulo LENA viene svolto su ciascun RB: ciò significa che i RBs disgiunti godranno di un alto SINR, mentre quelli sovrapposti risentiranno dell'interferenza intercella generando così un SINR più basso.

È importante sottolineare che è possibile definire un modello di mobilità per i terminali, che consente loro di spostarsi simulando, ad esempio, il comportamento di un pedone o di una trasmissione proveniente da un autoveicolo. Tuttavia, nella versione attuale, il modulo LENA non consente dopo l'inizio della simulazione di aggiungere ulteriori terminali o di disconnetterne

di attivi. In altre parole, una volta che la simulazione ha inizio, lo scenario deve essere definito e non può variare.

3.2.2 Scheduler

Lo scheduler è un algoritmo che si occupa di ripartire le risorse disponibili tra gli utenti presenti nel sistema secondo un certo criterio. In particolare, se la banda di frequenza disponibile è costituita da K RBs, e sono attivi all'interno della cella N utenti, lo scheduler si occupa di distribuire i K RBs tra gli N utenti. Nelle simulazioni è stato utilizzato uno scheduler *Round Robin* (RR), nel quale le risorse sono ripartite ugualmente tra gli utenti la cui coda di trasmissione sia non vuota [19]. Se il numero di utenti è inferiore al numero di RBs, tutti potranno trasmettere all'interno dello stesso slot temporale, beneficiando eventualmente di più RBs ciascuno. In caso contrario gli utenti eccedenti saranno accodati per una trasmissione nello slot successivo. Oltre a questo modello di *scheduler* ve ne sono altri, più complessi, implementati all'interno del modulo LENA quali il *Proportional Fair Scheduler* (PF) [19, 27], che agisce assegnando maggiori risorse ad un utente quando la qualità del suo collegamento è alta relativamente alla sua media, così da ottenere un *throughput* equamente distribuito [19].

3.2.3 Simulazione

La simulazione di una rete LTE attraverso il modulo LENA avviene in genere attraverso i seguenti passi:

- **Definizione dello scenario:** è il primo passo, e richiede di stabilire dove posizionare le stazioni base e i terminali. Si provvede inoltre a scegliere a quale cella deve essere connesso ciascun terminale.
- **Definizione dei parametri,** in particolare le bande di frequenza da assegnare alle stazioni base, la potenza trasmittiva utilizzabile, il modello utilizzato per la gestione dell'interferenza e il modello di traffico da generare nei terminali.

- **Scrittura del programma di simulazione**, in linguaggio C++ che implementa lo scenario desiderato con i parametri richiesti
- **Simulazione e analisi dei risultati**

3.2.4 Analisi dei risultati

Al termine della simulazione, ns-3 genera dei file di log attraverso i quali è possibile analizzare l'evoluzione della rete. In particolare, per ciascun terminale, dall'analisi del file *DlRlcStats.txt* è possibile valutare i bytes trasmessi con successo nell'intervallo di tempo ΔT , il ritardo, ed il numero degli eventuali dati ritrasmessi. Dall'analisi del file *DlMacStats.txt* è invece possibile analizzare altri parametri, quali ad esempio il *Modulation Coding Scheme* (MCS) di ciascun blocco, che indica l'ordine della modulazione e fornisce un'indicazione sull'efficienza spettrale e sulla qualità del canale. In particolare, dal primo file, è possibile ricavare il *throughput* per ciascun utente, come rapporto

$$\eta = \frac{8 \cdot TxBytes}{\Delta T \cdot 10^6} \quad [\text{Mbit/s}] \quad (3.1)$$

3.3 Cenni sui sistemi a coda Markoviani

Un generico sistema a coda è rappresentato in Figura 3.2, nella quale una popolazione di clienti richiede un certo servizio erogato da un certo numero di entità, dette servitori [21].

Il processo degli arrivi

I clienti (provenienti da una popolazione infinita) che arrivano nel sistema soddisfano in genere ad un certo processo casuale [21]. L'assunzione di popolazione infinita ci consente di affermare che gli arrivi sono tra di loro indipendenti, ovvero che l'arrivo di un utente all'istante t_0 non influenza la distribuzione degli arrivi in istanti $t > t_0$ [21]. Se i tempi interarrivo $\{\tau_n\}$ sono indipendenti ed identicamente distribuiti (iid) con media finita $m_\tau = E[\tau]$ il processo è omogeneo [21] e definiamo con $\lambda = 1/m_\tau$ il tasso di arrivo nel

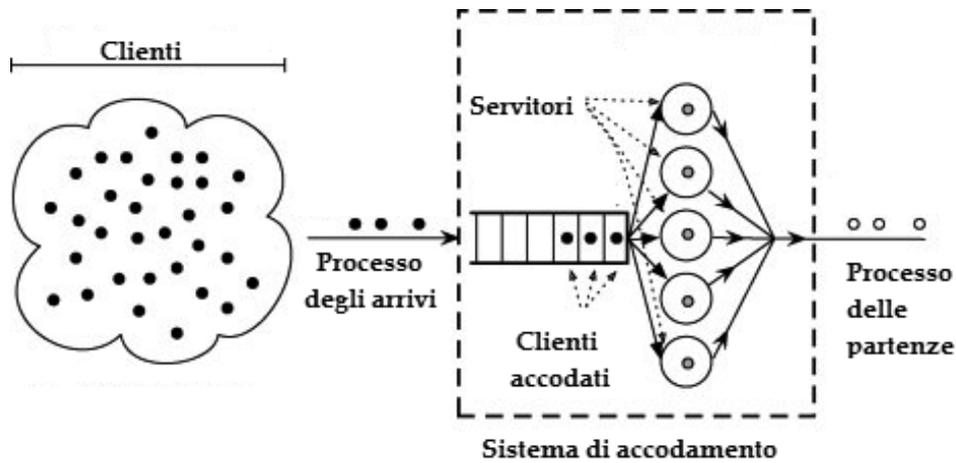


Fig. 3.2: Modello concettuale di un sistema a coda tratto da [21]

sistema. Limitiamo ora la nostra attenzione al caso del processo omogeneo di Poisson, dove i tempi interarrivo sono variabili esponenziali iid di parametro λ [21]. In questo caso il processo è detto Markoviano e la funzione di densità di probabilità per i tempi interarrivo assumerà la formulazione

$$p_{\tau}(a) = \lambda e^{-\lambda a}, a \geq 0$$

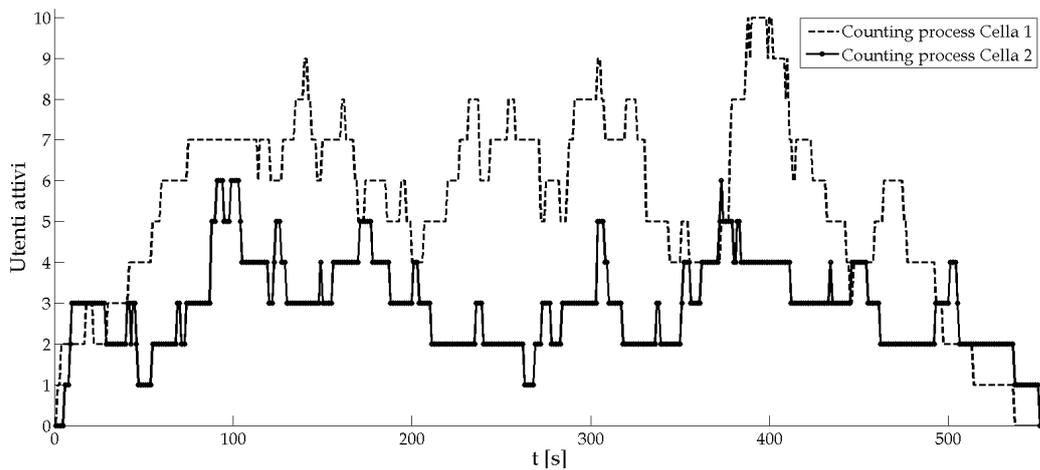


Fig. 3.3: Esempio di counting process per due sistemi a coda di parametri differenti.

Il processo di servizio

Il processo di servizio consiste in uno o più servitori che lavorano in parallelo, ciascuno indipendentemente dall'altro. Se m_y rappresenta il tempo medio speso in servizio, definiamo $\mu = 1/m_y$ tasso di servizio. Nell'ipotesi che il tempo di servizio sia distribuito mediante variabili esponenziali iid, la funzione di densità di probabilità assumerà la formulazione

$$p_y(a) = \mu e^{-\mu a}, a \geq 0$$

e si parla di processo di servizio Markoviano [21].

Definiamo infine il concetto di stabilità per un sistema a coda con m servitori che consente di garantire che il numero di utenti nella zona di accodamento non cresca indefinitamente. Il comportamento del sistema può essere stabile solamente se gli utenti arrivano nel sistema con un tasso minore di quello con cui essi possono essere serviti, ovvero se e solo se [21]

$$\lambda < m\mu \tag{3.2}$$

3.4 Obiettivi della simulazione

Lo scopo delle simulazioni è quello di ricreare un sistema in cui due celle cooperano condividendo le risorse, al fine di migliorare le prestazioni della rete. In particolare, le due stazioni base dispongono di una banda complessiva (100 RBs) e possono scegliere di utilizzarla in uno dei seguenti modi:

- **Modo 0** (Statico e non cooperativo): La banda disponibile è equiripartita in maniera ortogonale tra le due stazioni base.
- **Modo 1** (Statico): La banda disponibile è distribuita in maniera ortogonale tra le due celle in proporzione al numero medio di utenti in servizio. Ciò significa che se la cella 1 ha mediamente m_{x1} utenti in servizio, e la cella 2 ha mediamente m_{x2} utenti in servizio, la ripartizione della banda avverrà mediante

$$BW_1 = \left[BW_{tot} \cdot \frac{m_{x1}}{m_{x1} + m_{x2}} \right]$$

$$BW_2 = BW_{tot} - BW_1$$

- **Modo 2** (Dinamico): In ciascun istante temporale la banda è ripartita ortogonalmente tra le celle in base al numero effettivo di utenti in servizio.

$$BW_1 = \left\lfloor BW_{tot} \cdot \frac{n_1}{n_1 + n_2} \right\rfloor$$

$$BW_2 = BW_{tot} - BW_1$$

- **Modo 3** (Pseudo-dinamico): La banda viene redistribuita ad istanti multipli di T secondi. Il sistema all'istante iniziale equiripartisce la banda ortogonalmente, ed essa rimane la stessa per $T - 1$ secondi. All'istante T il sistema valuta il numero di utenti in servizio, e ripartisce nuovamente la banda come nel Modo 2, ripetendo l'operazione di aggiornamento ogni T secondi.

Ci poniamo l'obiettivo di evidenziare, attraverso diverse simulazioni, eventuali vantaggi che possono emergere dalle diverse politiche di gestione dello spettro sopra descritte, in particolar modo rispetto ai parametri statistici di ciascuna delle due celle.

3.5 Indice di *fairness*

Un indice di *fairness* consente la valutazione quantitativa dell'equità di cui beneficiano gli utenti, e ci consente di valutare in maniera oggettiva se, variando la politica di gestione della banda, si osservano miglioramenti nel servizio rivolto agli utenti.

Min-Max Fairness index

Un primo semplice indice di *fairness*, che chiameremo $\sigma \in (0, 1]$, può essere ottenuto valutando dapprima il *throughput* di ciascun utente presente nel sistema, e calcolato come rapporto tra il minimo e il massimo valore. Esso è un indicatore di quanto equamente il sistema stia distribuendo le risorse.

In tal senso più σ è prossimo ad 1, più le risorse sono distribuite in maniera equa all'interno della rete. Al contrario, un valore di σ particolarmente basso (prossimo a zero) indica una disomogenea ripartizione delle risorse, con alcuni utenti che beneficeranno di un alto *throughput* ed altri che ne avranno uno molto basso.

Jain's Fairness index

Un secondo indice di *fairness* indicato con J e tratto da [12] è ottenuto dal rapporto

$$J = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right)^2}{n \sum_{i=1}^n \eta_i^2} \quad (3.3)$$

in cui η_i rappresenta il *throughput* dell' i -esimo utente ed n il numero complessivo degli utenti nel sistema. Si osserva che $J \in [\frac{1}{n}, 1]$ dove $\frac{1}{n}$ risulta il caso peggiore, con le risorse assegnate disomogeneamente, mentre 1 rappresenta il caso migliore [12].

3.6 Implementazione dello scenario

Si è deciso di simulare in ciascuna delle due celle un processo Markoviano di parametri variabili. Non è possibile, per le limitazioni che il modulo LENA pone nella sua attuale versione, svolgere questa operazione programmando gli eventi in maniera opportuna all'interno del simulatore, ed è stato dunque necessario procedere diversamente. L'idea adottata è la seguente: se si vuol simulare uno scenario dinamico della durata di T secondi, lo si segmenta in k intervalli della durata di T/k secondi ciascuno. In ciascuno di questi k intervalli (purchè essi siano di durata sufficientemente piccola) si assume che lo scenario sia statico, ovvero che non ci siano arrivi o partenze nel sistema. Si eseguono k simulazioni variando gli istanti temporali di inizio e fine, e con essi anche il numero di utenti attivi nel sistema secondo il processo di arrivo e di servizio, riassumendo infine tutti i risultati in un'unica macro-simulazione

che, a meno della granularità introdotta naturalmente dalla suddivisione, rispecchia fedelmente lo scenario dinamico originale.

Generazione dello scenario Markoviano

Attraverso un programma scritto in C++ è stato simulato un sistema Markoviano, con tempi interarrivo e tempi di servizio distribuiti esponenzialmente, di media rispettivamente m_τ ed m_y . Una volta generato lo scenario, in un file di testo denominato *process.txt*, sono stati riportati tutti gli eventi, ovvero gli istanti temporali di arrivo e di partenza di ciascun utente. Inoltre, nel momento di arrivo di un terminale nel sistema, viene generata da una distribuzione uniforme in un intervallo opportuno la coppia (x, y) che rappresenta la posizione del terminale nello scenario. In ciascun istante, dall'analisi di questo file, il simulatore è in grado di dedurre il numero di utenti attivi in ciascuna cella, e il loro posizionamento.

Simulazione della rete

Questo programma, scritto in linguaggio C++ per il simulatore ns-3, costituisce il cuore della simulazione. Esso riceve i parametri dalla linea di comando, in particolare:

- Il modo (0,1,2,3) per la gestione della banda.
- t_{start} e t_{end} che rappresentano l'istante iniziale e quello finale a cui si riferisce la simulazione in oggetto. Nel nostro caso la granularità scelta è di 1 secondo, di conseguenza vale sempre $t_{end} = t_{start} + 1$.
- $m_{\tau 1}, m_{y 1}, m_{\tau 2}, m_{y 2}$ che rappresentano i parametri statistici dei processi nelle due stazioni base.

Il programma, dopo aver acquisito i parametri, legge il file *process.txt* e valuta quali utenti si trovano in servizio nell'intervallo $[t_{start}, t_{end}]$. Li dispone nelle rispettive posizioni e li collega alla stazione base. Poi configura le due celle assegnando a ciascuna la banda in funzione del modo scelto. Per concludere, prima di avviare la simulazione vera e propria, installa in ciascun terminale

un modello di traffico saturante, secondo il quale ciascun terminale richiede sempre traffico alla stazione base.

Parsing del file

Una volta completata la simulazione, si analizza il file *DIMacStats.txt* per valutare le prestazioni della rete. Tale compito è svolto da un ultimo programma che effettua la scansione del file e calcola i seguenti valori:

1. Il *throughput* della cella, η_1 ed η_2 , ottenuto in conformità con (3.1).
2. Il *throughput* medio per utente, ottenuto dividendo η_i per il numero di utenti in servizio.
3. σ e J , indici di *fairness*.

Tutte le operazioni descritte in questa sezione vengono svolte all'interno di un ciclo iterativo, che varia di volta in volta i valori t_{start} e t_{end} per generare, alla sua conclusione, i dati della simulazione complessiva.

Osserviamo, in quanto utile per l'analisi dei risultati, che il sistema da noi simulato in ciascuna cella risulta Markoviano, e può essere visto come un sistema a coda $M/M/m$, dove m è il numero di RBs a disposizione della cella. In effetti un terminale (utilizzando lo scheduler RR) entra in servizio immediatamente (senza sostare nella zona di accodamento) solamente se il numero di utenti in servizio è inferiore al numero di RBs. In caso contrario l'utente spende un certo tempo (necessario per attendere lo slot temporale successivo) e poi entra in servizio. Dunque, considerando che nella simulazione vengono mediamente generati al massimo 20 utenti (un numero superiore richiede un dispendio computazionale davvero alto) e che il numero di RBs complessivi è 100, è plausibile assumere che un utente entri in servizio senza mai dover attendere nella zona di accodamento. Questa assunzione, che garantisce che l'utente non spenda mai del tempo nella zona di accodamento, ci consente di paragonare il sistema ad un $M/M/\infty$ nel quale, essendoci infiniti servitori, non si viene mai accodati. Usando tale approssimazione il numero

medio di utenti che si trovano nel sistema, coincidente con quelli in servizio, risulta semplicemente dal rapporto [21]

$$m_x = \frac{\lambda}{\mu} \quad (3.4)$$

Capitolo 4

Risultati delle simulazioni

4.1 Scenario e parametri della simulazione

Nella tabella che riportiamo di seguito sono riassunti i principali parametri utilizzati nella simulazione.

Principali parametri della simulazione	
Distanza tra le stazioni base	2000 m
Massima distanza del terminale	1500 m
Spaziatura tra le sottoportanti	15 kHz
Sottoportanti per ciascun RB	12
Banda di un RB	180 kHz
Banda totale disponibile	100 RBs
Potenza trasmissiva eNode	30 dBm
Figura di rumore	2.5
Durata della simulazione	600 s
Granularità	1 s

Lo scenario simulato è costituito da due stazioni base poste a distanza di 2 km. In ciascuna di esse gli utenti sono posizionati entro un raggio massimo di 1.5 km: in Figura 4.1 è rappresentata una possibile dislocazione degli utenti che sono disposti staticamente e fino a che rimangono in servizio mantengono la loro posizione.

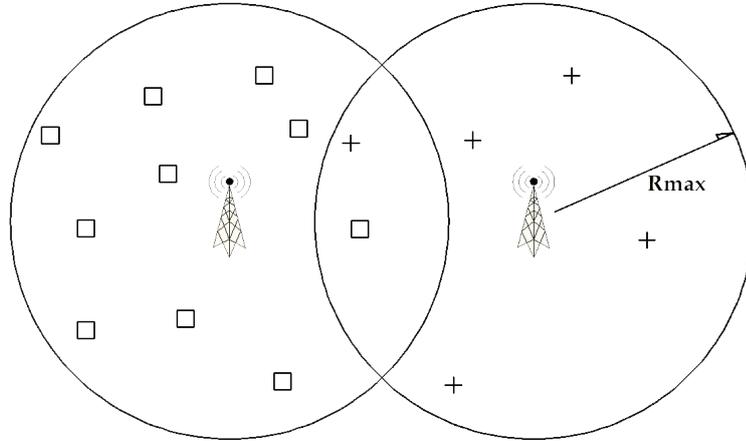


Fig. 4.1: Scenario implementato nel simulatore

4.2 Grafico temporale del *throughput*

La prima coppia di grafici che presentiamo riporta il *throughput* totale di ciascuna cella durante una simulazione, analizzato nei tre modi proposti per la gestione dello spettro.

Dall'osservazione del grafico temporale è piuttosto difficile trarre delle conclusioni: infatti il *throughput* complessivo della cella è influenzato non solamente dalla banda disponibile, ma anche dalla collocazione spaziale dei terminali.

Infatti, con l'aumentare della distanza tra stazione base e UE, l'SINR diminuisce sensibilmente, e con esso anche l'ordine della modulazione e quindi la quantità di dati trasmissibili. Questi grafici, riportati in Figura 4.2 e Figura 4.3, provengono da una simulazione con i seguenti parametri: $m_{\tau 1} = 10$, $m_{y1} = 80$, $m_{\tau 2} = 15$, $m_{y2} = 40$, che porta ad avere $m_{x1} = 8$ e $m_{x2} = 2.7$ secondo (3.2). Il sistema risulta dunque sbilanciato, con la prima cella che, in media, deve gestire un numero maggiore di utenti in servizio.

Per questo motivo, rispetto alla curva rossa che rappresenta il modo 0 (ortogonale equiripartito), la curva verde assume in entrambi i casi la stessa forma, ma risulta scalata per il fatto che la ripartizione avviene in base al numero medio di utenti in servizio. La prima cella otterrà il 75% della banda,

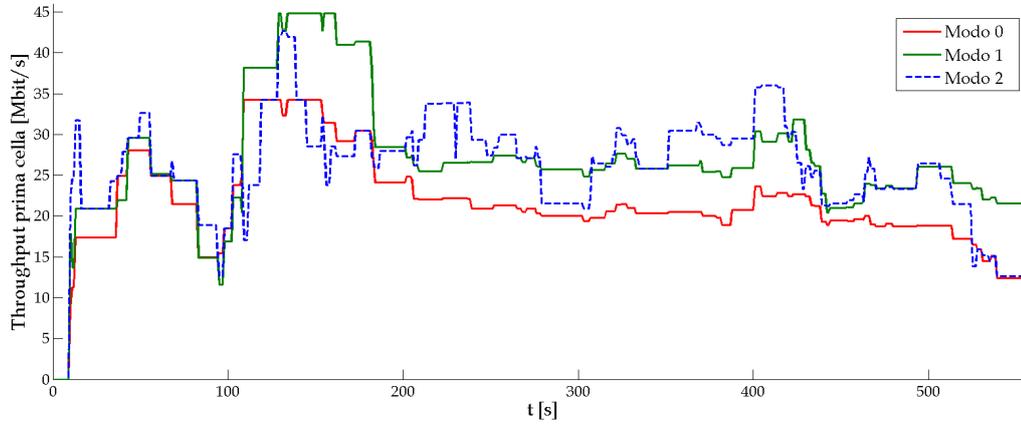


Fig. 4.2: Andamento temporale del *throughput* della prima cella

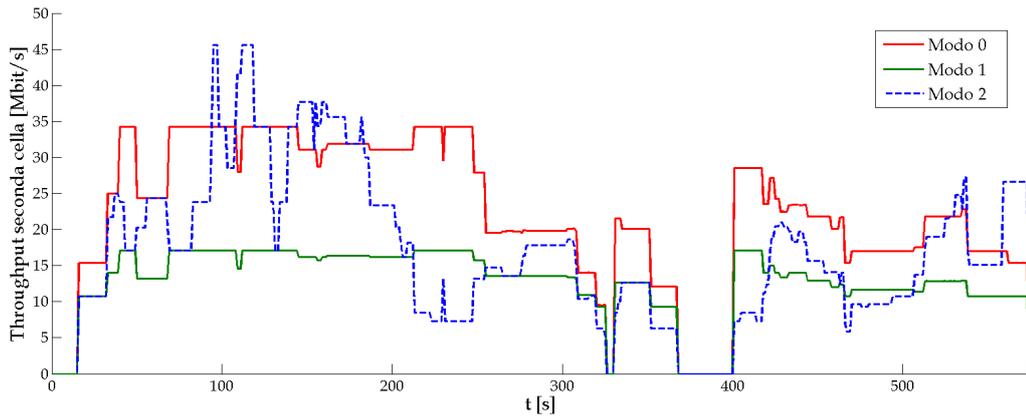


Fig. 4.3: Andamento temporale del *throughput* della seconda cella

generando quindi un *throughput* maggiore, mentre la rimanente parte verrà assegnata alla seconda stazione base che supporterà meno traffico.

4.3 Analisi della *fairness*

L'analisi delle prestazioni della rete in termini di *fairness*, ovvero di equità fra gli utenti, richiede un grafico diverso rispetto a quello temporale. La nostra aspettativa è che, utilizzando una politica dinamica, la *fairness* migliori nella

rete. Infatti la ripartizione dinamica consente in ogni momento di assegnare a ciascuna stazione base la banda in base alle effettive condizioni di carico. Tuttavia è importante osservare che, anche nel caso dinamico, l'indice di Jain così come definito in (3.3) non deve per forza assumere il massimo valore possibile. Per dimostrarlo basta pensare al caso in cui ciascuna stazione abbia un solo utente: ipotizziamo che nella prima cella il terminale si trovi a 100 m di distanza mentre nella seconda a 1.5km. La banda, assegnata dinamicamente in base al numero di utenti, è uguale per entrambe le celle ma il *throughput* della prima è maggiore di quello della seconda, generando quindi un valore di J certamente non unitario.

Scenario sbilanciato

È stato inizialmente considerato lo scenario definito dai seguenti parametri: $m_{\tau 1} = 10, m_{y1} = 80, m_{\tau 2} = 15, m_{y2} = 40$, che porta ad avere $m_{x1} = 8$ e $m_{x2} = 2.7$.

Premettiamo che il caso in esame è volutamente sbilanciato, con la prima cella che, in media, deve servire un numero maggiore di utenti.

Sono state eseguite 10 simulazioni, tutte con i medesimi parametri, ciascuna della durata di 600 secondi. Sono stati raccolti tutti i valori di J per essere analizzati con l'ausilio del software MATLAB.

Per valutare in maniera dettagliata il comportamento di J al variare della politica di gestione dello spettro abbiamo ritenuto opportuno graficare la funzione di distribuzione cumulata (*Cumulative distribution function* o CDF), che fornisce maggiori informazioni rispetto al semplice valor medio. Il grafico ottenuto è riportato in Figura 4.4.

In un caso di questo tipo si osserva che il modo 1 consente di ottenere valori di J più alti con maggiore probabilità rispetto al modo 0 statico equiripartito, ed è quindi preferibile perchè equivale a dire che il sistema è più equo. Dal grafico si osserva anche che la politica dinamica domina notevolmente gli altri due scenari statici. In particolare, nel caso in esame, il valore di J non scende mai al di sotto del valore 0.7, ed inoltre con alta probabilità ($p \simeq 0.9$) assume valori maggiori di 0.85.

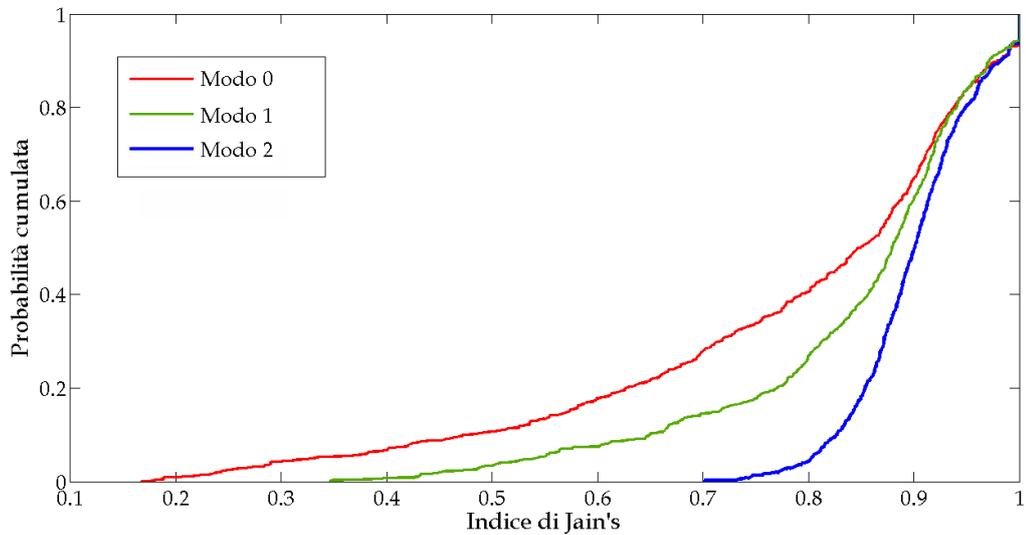


Fig. 4.4: Funzione di distribuzione cumulata per l'indice di fairness J nel caso di scenario sbilanciato

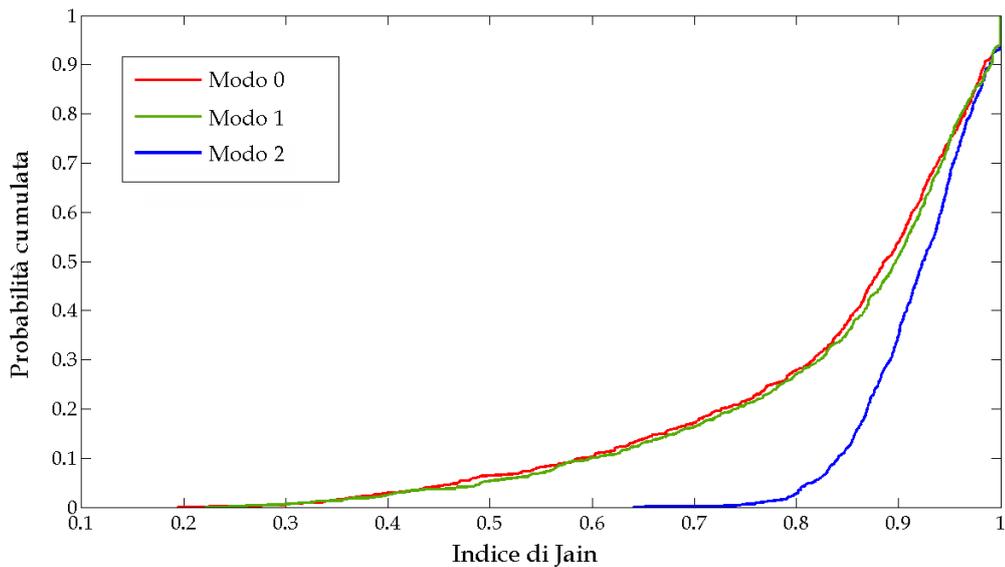


Fig. 4.5: Funzione di distribuzione cumulata per l'indice di fairness J nel caso di scenario bilanciato

Scenario bilanciato

Il secondo scenario simulato per valutare il comportamento dell'indice J è caratterizzato dai seguenti parametri: $m_{\tau_1} = 10, m_{y_1} = 40, m_{\tau_2} = 15, m_{y_2} =$

40, che porta ad avere $m_{x1} = 4$ e $m_{x2} = 2.7$. Anche in questo caso sono state eseguite 10 simulazioni della durata di 600 secondi ciascuna e i dati sono stati analizzati realizzandone la CDF che è riportata in Figura 4.5.

Dal grafico si osserva che, essendo le due medie piuttosto simili, il modo 0 e il modo 1 porgono circa la stessa distribuzione mentre il modo dinamico, anche con sistema equilibrato, consente di raggiungere una distribuzione di J migliore.

Valutazione dei casi intermedi

Dalle due *CDFs* presentate si può intuire il comportamento della rete anche nei casi di sbilanciamento intermedio, intuizioni che sono state poi confermate da altre simulazioni. Dopo aver definito formalmente lo sbilanciamento del sistema come rapporto

$$\gamma = \frac{\max(m_{x1}, m_{x2})}{\min(m_{x1}, m_{x2})} \quad (4.1)$$

sono stati simulati diversi scenari ciascuno con un valore di γ diverso, nel tentativo di evidenziare il comportamento di J in funzione dello sbilanciamento.

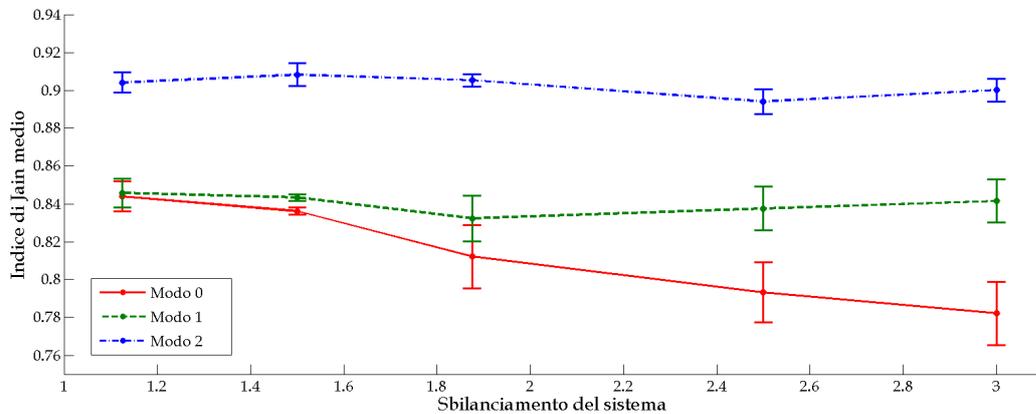


Fig. 4.6: Valor medio di J in funzione dello sbilanciamento

I risultati sono presentati in Figura 4.6, nella quale in ascissa compare lo sbilanciamento del sistema mentre in ordinata è riportato il valor medio di J . Il grafico consente di confermare che come l'approccio dinamico ottenga

valori di J maggiori. Inoltre evidenzia come le politiche 1 e 2 risultino, a meno delle oscillazioni statistiche, poco influenzate dalle variazioni dello sbilanciamento. Osserviamo infine che, quando γ cresce, il modo 0 peggiora in maniera consistente le prestazioni in termine di *fairness*.

4.4 Dinamicità della rete

Se l'approccio dinamico, sia con scenario sbilanciato che bilanciato, risulta dai dati fin qui esposti sempre migliore rispetto a quello statico, va osservato che la dinamicità della rete comporta un dispendio computazionale per sincronizzare le due stazioni base ricostruendo la topologia della rete e redistribuendo le risorse. L'operazione di *refresh* della banda, dunque, va eseguita ad intervalli sufficientemente distanziati per evitare che un'eccessiva frequenza di aggiornamento renda il dispendio computazionale maggiore del guadagno ottenuto. L'ultima parte delle simulazioni si è dunque concentrata sulla valutazione della frequenza di aggiornamento ottimale, in rapporto ai parametri statistici delle due stazioni base. Premettiamo che per tutte le simulazioni che seguiranno varrà $m_\tau > m_y \Rightarrow m_x > 1$.

Sono stati creati tre scenari differenti, brevemente descritti nel seguito.

- **Scenario 1:** Rete estremamente dinamica, caratterizzata da tempi interarrivo bassi, in particolare $m_{\tau 1} = 2, m_{y1} = 6, m_{\tau 2} = 2, m_{y2} = 4$
- **Scenario 2:** Rete mediamente dinamica, caratterizzata da tempi interarrivo di durata media, in particolare $m_{\tau 1} = 10, m_{y1} = 80, m_{\tau 2} = 15, m_{y2} = 40$
- **Scenario 3:** Rete "quasi statica", caratterizzata da tempi interarrivo lunghi, in particolare $m_{\tau 1} = 20, m_{y1} = 80, m_{\tau 2} = 20, m_{y2} = 60$

Su ciascuno degli scenari descritti sono state condotte 5 simulazioni, ciascuna della durata di 600 secondi, con la politica di gestione per la banda pseudo dinamica sincronizzando le due stazioni base ad intervalli di 1,2,5,10,20,50,100 secondi. I risultati ottenuti dalle simulazioni sono graficati in Figura 4.7, nel

quale in ascissa è stata riportata la frequenza di aggiornamento e in ordinata il valor medio dell'indice di Jain normalizzato.

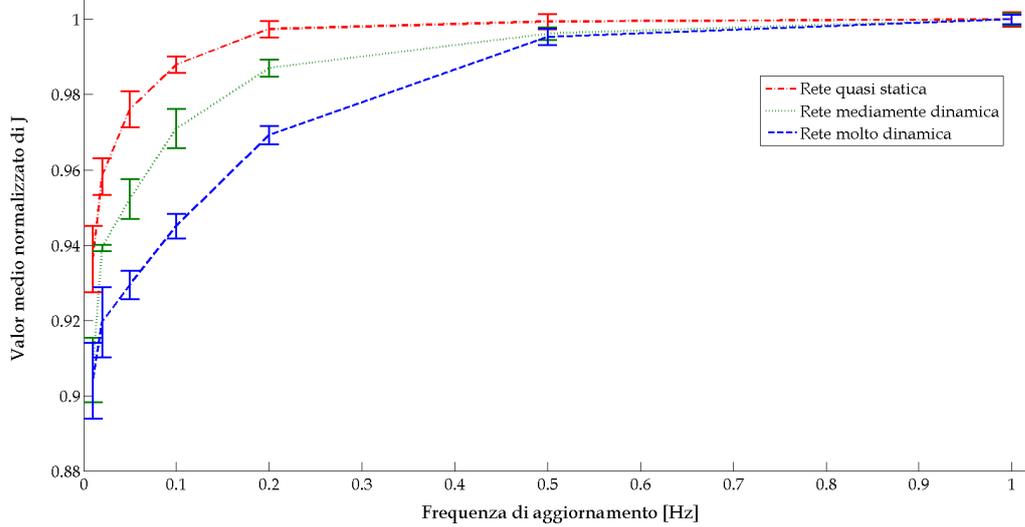


Fig. 4.7: Valor medio di J a seconda della frequenza di aggiornamento

Dall'analisi delle tre curve si osservano alcuni tratti comuni: in particolare, quando la frequenza di aggiornamento rimane compresa tra 1Hz e 0.5Hz, in tutti e tre gli scenari non si osservano degradazioni sostanziali nel valore di J . La curva blu, riferita allo scenario 1, scende con rapidità al decrescere della frequenza di *refresh*, poichè la rete risulta essere estremamente variabile e la distribuzione delle risorse va svolta con alta frequenza. Nel caso invece di rete quasi statica si osserva che, anche con il decrescere della frequenza, la curva rimane quasi stabile, per poi scendere ripidamente per $f < 0.05$. La curva verde, riferita allo scenario 2, come è facile aspettarsi assume un comportamento intermedio tra le due. In particolare concludiamo osservando che i parametri statistici che caratterizzano le due celle possono essere di estrema utilità nella valutazione della frequenza ottimale. In particolare scegliendo $f = \frac{1}{\min(m_{\tau_1}, m_{\tau_2})}$ si può ottenere, mediamente, un valore di J pari circa al 98% di quello ottimale, avendo così un ottimo compromesso tra degradazione delle prestazioni e dispendio computazionale.

Capitolo 5

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo elaborato sono stati presentati alcuni schemi per la gestione efficiente delle risorse spettrali in sistemi cellulari basati sulla tecnica di accesso al mezzo OFDMA. Sono stati inoltre esposti i benefici che si possono ottenere quando, nella comunicazione tra terminale e stazione base, si utilizzano più antenne. In particolare, con approcci MU-MIMO e indipendentemente dalla complessità del dispositivo mobile, si può ottenere una maggior efficienza assegnando le stesse frequenze a diversi terminali, beneficiando della loro separazione spaziale per evitare effetti interferenti.

Sono state poi proposte quattro politiche per la gestione ortogonale dello spettro implementabili quando tra due stazioni base si opera una politica collaborativa: due statiche, una dinamica ed una pseudo dinamica. Attraverso un simulatore di rete è stato possibile valutare come l'approccio dinamico incrementi la *fairness* tra gli utenti rendendo il traffico distribuito più equamente tra i terminali. Inoltre, se le distribuzioni statistiche dei processi di arrivo e servizio nella rete sono note, è possibile stimare una frequenza di aggiornamento della banda che non degradi la *fairness* e che si traduca in un dispendio computazionale sostenibile.

Sviluppi futuri

È stato trattato in questa tesi un primo approccio ortogonale alle politiche di condivisione dello spettro, con l'impiego di uno *scheduler round robin*. Risulta sicuramente interessante indagare sul comportamento della rete operando politiche di *scheduling* differenti, che consentano una gestione della banda ancora più accorta, in funzione non solo del numero di utenti, ma anche rispetto alle caratteristiche del collegamento. In tal senso, dopo che la banda è stata ripartita, una politica *round robin* non tiene conto delle differenze che si manifestano tra gli utenti appartenenti alla stessa cella, generando una *fairness* spesso non ottimale. In secondo luogo si potrebbe sperimentare un approccio non ortogonale, con le bande di frequenza parzialmente sovrapposte operando, allo stesso tempo, una politica di *scheduling* che assegni i RBs sovrapposti a terminali che beneficiano di un altro SINR.

Bibliografia

- [1] L. Anchora, M. Mezzavilla, L. Badia, and M.Zorzi. Simulation models for the performance evaluation of spectrum sharing techniques in ofdma networks. In *Proceedings of 14th ACM International Conference on Modeling, Analysis and Simulation of Wireless and Mobile Systems (MSWiM)*, 2011.
- [2] David Astély, Erik Dahlman, Anders Furuskär, Ylva Jading, Magnus Lindström, and Ericsson Research Stefan Parkvall. LTE: The Evolution of Mobile Broadband. *IEEE Communications Magazine*, pages 44–50, April 2009.
- [3] M. Bennis and J. Lilleberg. Inter Base Station Resource Sharing and Improving the Overall Efficiency of B3G Systems. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, December 2007.
- [4] Green Packet Berhad. 4g lte modem | wimax mimo | wimax beamforming. http://www.greenpacket.com/technology_Devices_Antenna_Technology.html, May 2012.
- [5] G. Boudreau, J. Panicker, and N.Guo. Interference Coordination and Cancellation for 4G Networks. *IEEE Communications Magazine*, pages 74–80, April 2009.
- [6] Ronald Chang, Zhifeng Tao, Jinyun Zhang, and C.-C. Jay Kuo. A Graph Approach to Dynamic Fractional Frequency Reuse (FFR) in Multi-Cell OFDMA Networks. *IEEE Communications Magazine*, July 2009.

- [7] Cisco. Cisco visual networking index: Global mobile data traffic forecast update, 2012–2017. Technical report, 2013.
- [8] Ministero delle comunicazioni. Testo unico delle disposizioni legislative in materia postale, di bancoposta e di telecomunicazioni, approvato con d.p.r. 29 marzo 1973, n. 156.
- [9] Hannes Ekström, Anders Furuskär, Jonas Karlsson, Michael Meyer, Stefan Parkvall, Johan Torsner, and Mattias Wahlqvist. Technical Solutions for the 3G Long-Term Evolution. *IEEE Transactions on Information Theory*, March 2006.
- [10] S-E. Elayoubi, O. Ben Haddada, and B. Fouresti'e. Performance Evaluation of Frequency Planning Schemes in OFDMA-based Networks. *IEEE TRANSACTIONS ON WIRELESS COMMUNICATIONS*, pages 1623–1633, May 2008.
- [11] What is ns 3. <http://www.nsnam.org/overview/what-is-ns-3>, June 2013.
- [12] Rajendre K. Jain, Dah-Ming Chiu, and Willian Hawe. A quantitative measure of fairness and Discrimination for resource allocation in shared computer system. *ACM Transaction on Computer Systems*, 1984.
- [13] Nihar Jindal and Andrea Goldsmith. Dirty-Paper Coding Versus TDMA for MIMO Broadcast Channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, pages 1783–1794, May 2005.
- [14] Mari Kobayashi and Giuseppe Caire. An Iterative Water-Filling Algorithm for Maximum Weighted Sum-Rate of Gaussian MIMO-BC. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, August 2006.
- [15] LTE-EPC Network Simulator (LENA). [http://iptechwiki.cttc.es/LTE-EPC_Network_Simulator_\(LENA\)](http://iptechwiki.cttc.es/LTE-EPC_Network_Simulator_(LENA)), May 2013.

- [16] Qinghua Li, Intel Wookbong Lee Guangjie Li, LG Electronics David Mazzaresse Moon-il Lee, and Nokia Bruno Clerckx, Samsung Ze-xian Li. MIMO Techniques in WiMAX and LTE: A Feature Overview. *IEEE Communications Magazine*, pages 86–92, May 2010.
- [17] Xuehong Mao, Amine Maaref, and Koon Hoo Teo. Adaptive Soft Frequency Reuse for Inter-cell Interference Coordination in SC-FDMA based 3GPP LTE Uplinks. *IEEE Communications Magazine*, 2008.
- [18] G. Middleton, K. Hooli, A. Tolli, and J. Lilleberg. Inter-Operator Spectrum Sharing in a Broadband Cellular Network, Spread Spectrum Techniques and Applications. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 2006.
- [19] Design Documentation LTE Module. <http://www.nsnam.org/docs/models/html/lte-design.html>, June 2013.
- [20] User Documentation LTE Module. <http://www.nsnam.org/docs/models/html/lte-user.html>, June 2013.
- [21] Michele Zorzi (editors) Nevio Benvenuto. *Principles of Communications Networks and Systems*. Wiley, 1 edition, 2011.
- [22] Ramona Pinto. LTE: Long Term Evolution. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, December 2012.
- [23] Basuki E. Priyanto, Humbert Codina, Sergi Rene, Troels B. Sørensen, and Preben Mogensen. Initial Performance Evaluation of DFT-Spread OFDM Based SC-FDMA for UTRA LTE Uplink. *IEEE Transactions on Information Theory*, October 2007.
- [24] Bernard Shulz. LTE Transmission Modes and Beamforming. *White Paper*, October 2011.
- [25] Singer, Holmyard, Hall, and Williams. *La rivoluzione industriale (Volume quarto, tomo secondo)*. Bollati Boringhieri, 1994.

- [26] Quentin H. Spencer, A. Lee Swindlehurst, and Martin Haardt. Zero-Forcing Methods for Downlink Spatial Multiplexing in Multi-User MIMO Channels. May 2003.
- [27] Matthew Baker Stefania Sesia, Issam Toufik. *LTE – The UMTS Long Term Evolution: From Theory to Practice, 2nd Edition*. Wiley, 2nd edition edition, 2011.
- [28] Third generation partnership project. *3GPP TS 36.101, Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA), User Equipment (UE) radio transmission and reception*, 8.21.0 edition, March 2013.
- [29] H. Weingarten and Y. Steinberg and S. Shamai. The capacity region of the gaussian mimo broadcast channel. In *IEEE Int. Symposium on Information Theory*, Chicago, IL, 2004.
- [30] Taesang Yoo and Andrea Goldsmith. Optimality of Zero-Forcing Beamforming with Multiuser Diversity. *IEEE Communications Magazine*, pages 542–546, 2005.
- [31] Taesang Yoo and Andrea Goldsmith. On the Optimality of Multiantenna Broadcast Scheduling Using Zero-Forcing Beamforming. *IEEE Communications Magazine*, pages 528–540, March 2006.
- [32] Wei Yu and John M. Cioffi. On Constant Power Water Filling. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 2001.