Modelli a tempo discreto per il mercato dei futures

Daniele Fiorotto

anno accademico 2006/2007

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi anni i futures hanno acquistato un peso sempre più rilevante nel mondo della finanza. Questi derivati vengono utilizzati principalmente da tre tipi di operatori: hedgers, speculatori e arbitraggisti. Gli hedgers sono interessati a ridurre un rischio a cui sono esposti attraverso un'operazione di copertura. Gli speculatori scommettono sull'andamento del prezzo di un'attività. Gli arbitraggisti cercano di trarre vantaggio dalla diversità dei prezzi in due diversi mercati.

Scopo di questa tesi è quello di offrire uno schema teorico entro il quale questi strumenti possano essere valutati. Per fare ciò è stato necessario cominciare spiegando la valutazione di flussi di cassa e derivati un pò più semplici: i forward. Successivamente sono stati spiegati i futures e sono stati confrontati con i forward. Poi sono state descritte alcune importanti caratteristiche dei futures: la convergenza verso il prezzo spot e i depositi di garanzia. Infine viene spiegato come i futures possono essere utilizzati per cercare di ottenere guadagni generando irregolarità nei mercati e per operazioni di copertura.

Questa tesi è coordinata con quella di Ercole Tommaso; nelle due tesi saranno quindi presenti reciproci richiami per ulteriori delucidazioni ed approfondimenti.

Capitolo 2

Ipotesi e conoscenze preliminari

- B sta per bond (titolo non rischioso). Il valore di B indica come varia il valore del denaro nel tempo. B_t indica il valore del titolo al tempo t. $B_t > 0 \ \forall \ t$
- Il tasso d'interesse viene indicato con r. $r \geq 0 \ \forall \ t$

$$r = \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}}$$

  quindi $B_t = B_0(1+r)^t$

- S sta per security (titolo rischioso o prezzo spot). $S_t^{(k)}$ è il prezzo del k-esimo titolo rischioso al tempo t ($k \neq 0$). $S_t^{(k)} \geq 0 \ \forall \ t$ e $\forall \ k$

  $S_t^{(k)}(\omega)$ è una variabile aleatoria. Lo spazio di probabilità Ω è formato da M punti

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_M\}$$

$P(\omega_i)$ è la probabilità associata all'i-esimo evento. $P(\omega_i) > 0$.

$S_t^{(k)}(\omega_i)$ è il prezzo, al tempo t, del titolo k, quando si verifica l'evento ω_i.

- Portafoglio o strategia: è il possesso di una certa quantità di titoli (rischiosi e non rischiosi). $H_t^{(k)}$ = quantità del titolo k-esimo detenuto tra l'istante $t-1$ e t. $H_t^{(0)}$ = quantità del titolo non rischioso detenuto tra l'istante $t-1$ e t.

- V_t = valore del portafoglio all'istante t.

$$V_t = H_t^{(0)} B_t + H_t^{(1)} S_t^{(1)} + ... + H_t^{(N)} S_t^{(N)}$$

- SCONTO

  Prezzo del titolo k-esimo al tempo t, scontato:

$$S_t^{(k)*} = \frac{S_t^{(k)}}{B_t}$$

  Valori di portafoglio scontati:

$$V_t^* = H_t^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} H_t^{(k)} S_t^{(k)*} = \frac{V_t}{B_t}$$

- Legge del prezzo unico:

$$\text{se } \hat{H}, \tilde{H} \text{ sono tali che } \hat{V}_T(\omega) = \tilde{V}_T(\omega) \ \forall\ \omega \Rightarrow \hat{V}_0 = \tilde{V}_0$$

- Esiste opportunità di arbitraggio se esiste un portafoglio H tale che:

  $V_0 = 0$ e $V_t \geq 0$ per $\forall\ \omega$, con la disuguaglianza stretta per almeno un ω

- Una misura neutrale al rischio è una misura di probabilità Q con $Q(\omega) > 0\ \forall\ \omega$ tale che:

$$E_Q[S_T^*] = S_0^*$$

- $\exists$ almeno una misura neutrale al rischio $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ opportunità di arbitraggio
- Una martingala è un processo stocastico $(S_1, S_2, ..., S_n, ...)$ con associata una struttura informativa $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n, ...)$ tale che:

$$E(S_{t+s}|\mathcal{P}_t) = S_t \text{ per } s > 0$$

Capitolo 3

Valutazione dei flussi di cassa

Per studiare i futures è necessario, prima di tutto, riuscire a valutare i flussi di cassa futuri.
In questo capitolo spiegheremo brevemente come si può operare tale valutazione.

Supponiamo di voler acquistare un flusso di cassa futuro (relativo al tempo τ) offrendo in cambio il pagamento di una certa somma al tempo iniziale t; oppure di accordarci, sempre al tempo t, per acquisire al tempo τ un titolo pagandolo al tempo τ con una cifra concordata al tempo t.

In un mercato completo questi derivati possono essere valutati, sotto le ipotesi dell'arbitrage pricing theory, attraverso l'utilizzo di strategie di replicazione.

Consideriamo un flusso di cassa ΔD_s dollari incassati al tempo s, con $t < s \leq T$. Questo è un contingent claim al tempo s, e il suo valore al tempo t è $E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t]$. Nel caso in cui ΔD_s sia deterministico, oppure se è $\mathcal{F}_t$ misurabile la formula si semplifica in $\Delta D_s E_Q[B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t]$. Se poi il tasso d'interesse r è costante si arriva ad una formula ancora più semplice: $\Delta D_s \left(1 + r\right)^{t-s}$.

Passiamo ora a considerare un flusso di cassa $\Delta D_{t+1}, ..., \Delta D_\tau$ che potrebbe rappresentare i dividendi di un titolo S. Il valore attuale dei dividendi riflette la differenza tra il valore al tempo t del titolo e il valore attuale della previsione del valore al tempo τ del titolo stesso, cioè:

$$S_t - E_Q[S_\tau B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t] \tag{3.1}$$

Estendendo la formula sul valore attuale al flusso multiplo, relativo ai dividendi, otteniamo:

$$\sum_{s=t+1}^{\tau} E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t] \tag{3.2}$$

Eguagliando le due formule troviamo che

$$S_t - E_Q[S_\tau B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t] = \sum_{s=t+1}^{\tau} E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t]$$

La grande importanza di questa espressione del valore attuale è dovuta alla possibilità che fornisce di confrontare flussi differenti per tempi ed entità. Grazie a ciò due parti possono valutare la convenienza di scambiarsi i flussi di cassa. Infatti potrebbero trovare vantaggioso scambiare i flussi previa una transazione monetaria pari alla differenza dei valori attuali di tali flussi. L'operazione appena descritta prende il nome di swap.

Capitolo 4

Prezzo dei Forward

Prima di arrivare al nocciolo del discorso, cioè i futures, ci occupiamo, in questo capitolo, di un derivato un po' più semplice: i forward.
Tale contratto è il predecessore logico del future, ed è quindi utile comprenderlo, nonostante sia assai poco diffuso nel mercato moderno.

Il contratto forward è un derivato che consiste in un accordo per comprare o vendere un bene a un certo tempo futuro a un determinato prezzo. Una delle parti assume una posizione long e si accorda per comprare il bene sottostante, alla data futura concordata, al prezzo stabilito. La controparte assume una posizione short e deve vendere il bene alla stessa data e allo stesso prezzo. Il prezzo specificato nel contratto forward è detto prezzo del forward (lo indicheremo con O_t). O_t è il prezzo, concordato al tempo t, da pagare al tempo τ per acquistare il bene sottostante al futures.

Si pone quindi il problema di stabilire il corretto valore di tale O_t. Per fare questo distinguiamo tre differenti casi: il titolo sottostante non paga dividendi, il titolo sottostante paga dividendi e il titolo sottostante non è vendibile short.

4.1 Il titolo sottostante non paga dividendi

L'idea di fondo nella valutazione di O_t è l'equivalenza tra possedere contratto forward (nella posizione long) più una cifra pari a O_t euro al tempo τ, e avere una unità di titolo allo stesso tempo. La prima strategia infatti prevede di utilizzare la cifra O_t per acquistare al tempo τ, come previsto dal conratto, il bene sottostante il forward, arrivando di conseguenza a possedere solamente il bene e determinando quindi una situazione identica a quella della seconda strategia. Il costo di replicazione al tempo t di O_t è semplicemente il suo valore attuale. La seconda strategia ha un valore S_τ al tempo τ, quindi per la definizione della misura martingala Q, il suo valore riferito al tempo t non è altro che S_t. Come abbiamo appena spiegato, il valore al tempo τ delle due strategie è lo stesso, quindi per la legge del prezzo unico i due valori devono essere uguali anche al tempo t. Abbiamo quindi ottenuto questo risultato:

$$S_t = E_Q[O_t B_t B_\tau^{-1} | \mathcal{F}_t]$$

Esplicitando O_t:

$$O_t = \frac{S_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]} \tag{4.1}$$

La formula appena descritta è valida nell'assunzione che S/B sia una Q-martingala, condizione che è violata nel caso di un titolo che paga dividendi.

Esempio 1

Consideriamo un modello a due periodi con $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_4\}$ e un bene con prezzo $A_0 = 100$

(a)Se il processo del titolo non rischioso è deterministico, nel nostro caso $B_t = (1.05)^t$ per $t = 0, 1, 2$, e se il bene può essere venduto short, il prezzo forward con consegna al tempo 2 è $O_0 = 100 * (1.05)^2 = 110.25$

(b)Se il processo del titolo è variabile, nel nostro caso $B_1 = 1.05$, $B_2(\omega_1) = B_2(\omega_2) = 1.12$ e $B_2(\omega_3) = B_2(\omega_4) = 1.10$ e se il bene può essere venduto short il prezzo forward con consegna al tempo 2 è $100 * 1.05 * [(q_1 + q_2) * 1.12 + (1 - q_1 - q_2) * 1.10]$ con q_i = probabilità dell'evento i-esimo

4.2 Il titolo sottostante paga dividendi

E' possibile generalizzare la formula (4.1) anche per i titoli che pagano dividendi. Bisogna però considerare che se il broker acquistasse il titolo sottostante al tempo t per venderlo al cliente al tempo τ, al prezzo calcolato nella (4.1), otterrebbe un'opportunità di arbitraggio derivante dall'incasso dei dividendi pagati dal titolo sottostante tra il tempo t e il tempo τ. Per eliminare questa opportunità di arbitraggio si utilizza, per valutare O_t, la seguente strategia di replicazione:

- Al tempo t acquistiamo un'unità di titolo (pagandolo S_t)
- Al tempo t prendiamo a prestito una cifra pari al valore attualizzato al tempo t dei dividendi, e utilizziamo l'incasso dei dividendi per eliminare il passivo della strategia di prestito.

Questa strategia, attraverso l'indebitamento del broker, costringe quest'ultimo ad avere delle perdite dovute al pagamento degli interessi pari ai dividendi ricevuti, e quindi toglie al broker l'opportunità di arbitraggio. Il valore di tale portafoglio replicante è:

$$S_t - \sum_{s=t+1}^{\tau} E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t]$$

Il valore così trovato deve essere uguale a quello di O_t attualizzato al tempo t. Quindi è evidente che:

$$O_t = \frac{S_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1} | \mathcal{F}_t]} - \sum_{s=t+1}^{\tau} \frac{E_Q[\Delta D_s B_t B_s^{-1} | \mathcal{F}_t]}{E_Q[B_t B_\tau^{-1} | \mathcal{F}_t]}$$

4.3 Il titolo sottostante non è vendibile short

Le conclusioni sopra descritte non sono vere per beni che non è possibile vendere short. Esempi di questi beni sono la maggior parte delle merci agricole come bushel di grano e balle di cotone; infatti non c'è un mercato in cui si possono prendere a prestito tali beni dall'agricoltore. A causa di questa limitazione decadono le ipotesi fondamentali sull'arbitraggio e non è più garantito che i prezzi scontati di tali beni siano martingale sotto qualche misura di probabilità. Il concetto di arbitraggio va quindi ridefinito in modo da escludere la possibilità di avere una posizione negativa rispetto al bene. Il possesso di molti di questi beni, inoltre, comporta una spesa (carrying cost) per unità di bene (infatti sono spese di magazzino). Ai fini della nostra elaborazione questi costi sono assimilabili a dei dividendi negativi.

Indichiamo con A_t il valore monetario del bene al tempo $t = 0, 1, ..T$ e con c i carrying cost.

Modificando, alla luce di queste caratteristiche, le formule associate con i titoli ordinari, possiamo ridefinire come segue, un'opportunità di arbitraggio: esiste opportunità di arbitraggio se esistono dei t e degli $E \in \mathcal{F}$ tali che:

$$A_t(\omega)B_t(\omega)^{-1} \leq (A_{t+1}(\omega) - c)B_{t+1}(\omega)^{-1}, \text{ con } \omega \in E$$

e con la disuguaglianza stretta per almeno uno degli $\omega \in E$.

Ne segue che, in assenza di opportunità di arbitraggio, esiste una probabilità Q strettamente positiva tale che:

$$A_t B_t^{-1} \geq E_Q[(A_{t+1} - c)B_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t] \text{ , con t=0,1,...,T-1}$$

Questa condizione a prima vista comporta delle opportunità di arbitraggio; in realtà tale opportunità non è sfruttabile data l'impossibilità di vendere allo scoperto. Quindi in un mercato che include un bene non vendibile short e che ha carrying cost per unità e periodo, non esistono opportunità di arbitraggio se e solo se esiste una probabilità strettamente positiva tale che: tutti i valori dei titoli scontati siano martingale e che l'equazione scritta sopra sia soddisfatta.

Considerando c come dividendo negativo sappiamo che, se il bene fosse un titolo, come spiegato nella (1) sarebbe vero che:

$$O_t = \frac{A_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]} + c\sum_{s=t+1}^{\tau} \frac{E_Q[B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}$$

Se però non si può assumere una posizione short rispetto al bene la legge del prezzo unico non è più valida e di coseguenza non lo è nemmeno l'equazione sopra.

Se O_t è strettamente minore della parte destra dell'equazione sarebbe conveniente comprare il bene sottostante con consegna al tempo τ al prezzo O_t e seguire contemporaneamente l'opposto della strategia che replica A_τ. Come abbiamo spiegato però questa strategia non è perseguibile quindi non è escluso che O_t sia realmente inferiore alla parte destra dell'equazione.

Se il prezzo del forward invece è strettamente più grande della parte destra dell'equazione è conveniente vendere il bene con consegna al tempo τ e prezzo O_t e contemporaneamente perseguire la strategia che replica A_τ. Questa strategia può essere seguita e rappresenta un'opportunità di arbitraggio. Possiamo quindi concludere che:

$$O_t \leq \frac{A_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]} + c\sum_{s=t+1}^{\tau} \frac{E_Q[B_t B_s^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}$$

Esempio 1

(c)con gli stessi valori nell' evoluzione titolo non rischioso dell'esercizio 1(b), ma con il bene sottostante non vendibile short, il valore più grande che O_t può assumere è $O_0 = 100 * 1.05 * 1.12 = 117.6$

(d)la stessa richiesta dell'esempio 1(c) quando il bene ha un carrying cost di 5 \$ per periodo. $O_0 \leq 100*1.05*1.12+5*(1.12*(q_1 + q_2) + 1.10 * (q_3 + q_4) + 1)$

Capitolo 5

Introduzione ai futures

Il contratto futures è un accordo tra due parti per comprare o vendere un bene, a un certo tempo futuro, ad un dato prezzo. Diversamente dai contratti forward quelli futures sono scambiati sul mercato regolamentato. Ai fini di rendere possibile questi scambi il mercato stabilisce alcune caratteristiche standard per il contratto. Questo meccanismo implica che le parti non si debbano necessariamente conoscere e che il mercato garantisca alle parti che il contratto venga onorato. Diversamente dai forward la posizione in un contratto futures può essere chiusa prima della scadenza del contratto acquisendo una posizione inversa nel mercato. Questo implica la possibilità di ottenere un profitto dato dalla differenza del prezzo del futures nei due tempi. Il mercato per garantire il rispetto degli impegni contrattuali impone al venditore o al compratore un margine di garanzia, tale da impedire che questi si ritirino da una posizione perdente. L'ammontare di tale margine cambia continuamente a seguito delle fluttuazioni del prezzo del titolo sottostante, fino alla chiusura del contratto.

Gli operatori dei futures non possono utilizzare denaro preso a prestito per depositarlo nei conti di garanzia. Il mercato inoltre ha diritto a richiedere ulteriori fondi e a chiudere le posizioni degli operatori nel caso che i loro fondi siano esauriti. Pertanto gli operatori, per trattare i futures, devono avere una ricchezza positiva. Gli operatori però possono impegnare titoli all'interno del conto di garanzia. Questo dà la possibilità a chi ha un portafoglio azionario di impegnarlo in parte per evitare fondi specifici dedicati al conto di garanzia. L'operatore inoltre ha diritto a riscuotere gli interessi del suo fondo di garanzia.

Riprendiamo il nostro modello per il mercato dei titoli ed inseriamo i processi relativi ai prezzi dei futures. Indichiamo con U_t il prezzo del futures di un titolo o bene scambiato al tempo τ e con $\hat{H}_t$ la posizione del contratto futures U mantenuta dal tempo $t-1$ al tempo t. La strategia complessiva è un processo predicibile di questa forma:

$$(H, \hat{H}) = (H_0, H_1, ..., H_N, \hat{H}_1, ..., \hat{H}_J)$$

Dopo ogni transazione il valore della strategia è la stessa del modello senza futures:

$$H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t)$$

La formula del valore del portafoglio al tempo t (V_t) appena prima di ogni transazione sarà diversa perchè è necessario considerare il profitto netto dovuto allo scambio di futures nell'ultimo periodo.

Proviamo ora a descrivere la relazione che intercorre tra il prezzo del futures e il prezzo del titolo sottostante. Per fare ciò sfruttiamo l'imposizione di assenza di arbitraggio. Dato che però per poter scambiare futures bisogna avere una ricchezza positiva dobbiamo ridefinire l'arbitraggio in quanto non è più ammissibile una strategia che parta da un valore iniziale nullo. Il concetto è comunque lo stesso in quanto basta spostare il punto di partenza verso un livello iniziale di ricchezza positivo.

Definiamo quindi un'opportunità di arbitraggio per un portafoglio autofinanziante nel modello di mercato con i futures come segue:

$$V_T(\omega) \geq V_0 B_T(\omega), \text{ per ogni } \omega \text{ e } V_T(\omega) > V_0 B_T(\omega), \text{ per qualche } \omega$$

Intuitivamente si può dire che un'opportunità di arbitraggio non sia sicuramente peggiore rispetto ad investire i soldi in un titolo non rischioso ed è possibile che sia strettamente migliore.

$$V_1 \geq V_0(B_1 B_0^{-1}) \iff$$

$$H_0(1)B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)$$

$$\geq [H_0(1)B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)](B_1 B_0^{-1}) \iff$$

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1) \geq B_1 \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)B_0^{-1} \iff$$

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1} \geq \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(0) \iff$$

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)\Delta S_n^*(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1} \geq 0$$

Abbiamo trovato che esiste un'opportunità di arbitraggio se e solo se l'ultima disequazione è vera per ogni ω ed è stretta per almeno uno di questi.

Quindi, analogamente a quanto avviene nel modello per il mercato privo di futures, non ci sono opportunità di arbitraggio, nel modello uniperiodale se e solo se esiste una misura di probabilità strettamente positiva Q, tale che:

$$\sum_{n=1}^{N} E_Q[H_n(1)\Delta S_n^*(1)] + \sum_{j=1}^{J} E_Q[\hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0 \,\forall\, (H_n,\ \hat{H}_j)$$

che è equivalente a:

$$E_Q[H_n(1)\Delta S_n^*(1)] + E_Q[\hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0 \ \forall \text{ n e } \forall \text{ j} \quad (5.1)$$

Sappiamo che (vedi 'conoscenze preliminari'), per un mercato uniperiodale composto da un titolo non rischioso ed un solo titolo rischioso, la condizione di assenza di arbitraggio è: $S_n^*(0) = E_Q[S_n^*(1)]$, con $n = 1, ..., N$ (vedi conoscenze preliminari). Tale condizione è equivalente a: $E_Q \Delta S_n^* = 0$.

Sfruttando quest'ultimo risultato nella (5.1) troviamo che $E_Q[H_n(1)\Delta S_n^*(1)] = 0$, quindi la (5.1) diventa:

$$E_Q[\hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0$$

ma essendo $\hat{H}_j$ uno scalare si può eliminare dall' equazione:

$$E_Q[\Delta U_j(1)B_1^{-1}] = 0$$

$$E_Q[(U_j(1) - U_j(0))B_1^{-1}] = 0$$

dato che, al tempo 0, $U_j(0)$ è noto, allora

$$U_j(0)E_Q[B_1^{-1}] = E_Q[U_j(1)B_1^{-1}]$$

e quindi

$$U_j(0) = \frac{E_Q[U_j(1)B_1^{-1}]}{E_Q[B_1^{-1}]}, \text{ con } j = 1, ..., J.$$

Se poi il tasso di interesse è costante l'equazione si semplifica in $U_j(0) = E_Q U_j(1)$.

Estendiamo ora questi risultati al modello multiperiodale.

Consideriamo il modello uniperiodale associato al tempo t e all'evento A in $\mathcal{P}_t$. Nel modello uniperiodale esistono opportunità di arbitraggio se e solo se esiste una strategia al tempo t tale che $V_{t+1}1_A \geq 1_A V_t B_{t+1} B_t^{-1}$. Un mercato multiperiodale è privo di opportunità di arbitraggio se e solo se tutti i modelli uniperiodali sono a loro volta privi di opportunità di arbitraggio. Di conseguenza esiste opportunità di arbitraggio se e solo se :

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)\Delta S_n^*(t+1)+\sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(t+1)\Delta U_j(t+1)B_{t+1}^{-1} \geq 0 \text{ per ogni } \omega \in A$$

e con disuguaglianza stretta per ogni $\omega \in A$

In analogia al modello uniperiodale possiamo concludere che un modello di mercato multiperiodale per i futures non ha opportunità di arbitraggio se e solo se esiste una probabilità strettamente positiva Q che rende il processo dei prezzi dei titoli scontati una martingala e che soddisfa:

$$U_j(t) = \frac{E_Q[U_j(t+1)B_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t]}, \text{ con } j = 1, ..., J$$

Altrimenti esprimibile come:

$$E_Q[\Delta U_j(t+1)B_{t+1}^{-1}|\mathcal{F}_t] = 0 \text{ per ogni } t \geq 0 \text{ e } j = 1, ..., J$$

Se assumiamo che il processo B sia predicibile, cioè che B_1 sia costante all'interno del singolo periodo l'equazione diventa più semplice ed utilizzabile perdendo relativamente poco in termini di affidabilità. La condizione per assenza di arbitraggio diventa semplicemente che i processi dei prezzi dei titoli scontati e dei prezzi dei futures non scontati siano martingale sotto Q.

Per quanto riguarda i futures ciò vuol dire che:

$$U_t = E_Q[U_\tau|\mathcal{F}_t]$$

Ma sapendo che $U_\tau = S_\tau$ troviamo che:

$$U_t = E_Q[S_\tau|\mathcal{F}_t] \tag{5.2}$$

Esempio

Consideriamo l'evoluzione di un titolo con $T = 2$ e $M = 4$ come segue: $S_0(\omega_1) = S_0(\omega_2) = S_0(\omega_3) = S_0(\omega_4) = 5, S_1(\omega_1) = S_1(\omega_2) = 8, S_1(\omega_3) = S_1(\omega_4) = 4, S_2(\omega_1) = 9, S_2(\omega_2) = S_2(\omega_3) = 6, S_2(\omega_4) = 3$.

Supponiamo inoltre $B_1 = 1, B_2(\omega_1) = B_2(\omega_2) = 17/16, B_2(\omega_3) = B_2(\omega_4) = 9/8$.

L'unica misura di probabilità che rende S^* una martingala é: $Q(\omega_1) = 5/24, Q(\omega_2) = 1/24, Q(\omega_3) = Q(\omega_4) = 3/8$.

Quindi, per la (4.2) si ha $U_0 = E_Q[S_2] = 5/24 * 9 + 1/24 * 6 + 3/8 * 6 + 3/8 * 3 = 5/2$. Per la (3.1) si ha $O_0 = \frac{S_0}{E_Q[B_2^{-1}]} = 5/((16/17 * 5/24) + (16/17 * 1/24) + (8/9 * 3/8 * 2)) = 255/46$.

Abbiamo mostrato come il prezzo di un forward e il prezzo di un futures, con la stessa attività sottostante e uguale data di consegna, possano essere diversi. Nel prossimo capitolo chiariremo il perchè.

Capitolo 6

Prezzi forward e prezzi futures

Finora abbiamo mostrato come, nel caso in cui il tasso d'interesse privo di rischio sia costante, il prezzo del forward e del futures siano uguali per contratti con la stessa data di scadenza. Nel caso in cui, invece, i tassi d'interesse varino in modo imprevedibile come nel mondo reale, i prezzi forward e futures sono diversi. Prendiamo infatti il caso di un forward su un titolo che non paga dividendi:

$$O_t = \frac{S_t}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]} = \frac{E_Q[S_\tau B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_t B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]} = \frac{E_Q[S_\tau B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}{E_Q[B_\tau^{-1}|\mathcal{F}_t]}$$

Facendo il confronto con $U_t = E_Q[S_\tau|\mathcal{F}_t]$ si capisce come i due valori siano uguali se il processo B è deterministico, e diversi altrimenti.

Un esempio di diversità tra i due prezzi è quello di un titolo sottostante che è correlato positivamente col tasso d'interesse. Se il prezzo dell'attività sottostante cresce, l'investitore con una posizione lunga nel futures ottiene un guadagno. Tale guadagno è immediato a causa della procedura di liquidazione giornaliera e può essere investito ad un tasso d'interesse più alto della media poichè l'aumento del prezzo del titolo sottostante è legato ad un aumento di tasso.

Viceversa se il prezzo dell'attività sottostante diminuisce l'investitore subisce una perdita immediata, finanziata ad un tasso d'interesse più basso della media.

Un'investitore che ha stipulato un contratto forward su questa attività, invece, non subisce in tal modo l'influenza dei tassi d'interesse perchè, non essendoci nel contratto forward la procedura di liquidazione giornaliera, non ha la possibilità di investire ad un tasso più elevato della media gli eventuali guadagni né di finanziare ad un tasso più basso della media le eventuali perdite. In questo caso è quindi preferibile una posizione long sul futures rispetto a quella long sul forward.

Proponiamo ora un piccolo esempio chiarificatore.

Supponiamo di avere la possibilità di stipulare un contratto forward o futures con lo stesso prezzo (10 \$) su un bene il cui prezzo è correlato positivamente con i tassi d'interesse. Supponiamo inoltre che il tasso d'interesse tra il tempo 0 e il tempo 1 sia $r = 0.05$ e che il prezzo del bene sottostante rimanga pari a 10 \$ nel medesimo periodo. Tra il tempo 1 e il tempo 2, con probabilità 1/2, il prezzo del bene sottostante diventerà 11 \$ e $r = 0.06$ e, sempre con probabilità 1/2, il prezzo del bene sottostante diventerà 9 ed $r = 0.04$. Se stipuliamo il contratto forward il nostro guadagno atteso sarà nullo; infatti con probabilità 1/2 guadagneremo 11 \$ -10 \$ $=1$ \$ e con probabilità $1/2$ perderemo 10 \$ -9 \$ $=1$ \$. Supponiamo che un'istante dopo il tempo 1, si conosca già se il prezzo del titolo evolverà verso 11 o 9, e che quindi la liquidazione avvenga istantaneamente. Se stipuliamo il contratto futures, il dollaro guadagnato o perso sarà disponibile già al tempo 1 e quindi sarà rispettivamente investito ad un $r=0.06$ o finanziato ad un $r=0.04$ per un tempo pari a 1. Il guadagno atteso sarà pari a $1/2*1.06-1/2*1.04=0.01$ che è maggiore di quello atteso per il contratto forward. Quindi, in questo esempio, è preferibile il contratto futures.

Dalle considerazioni precedenti segue che il prezzo di un contratto per la posizione lunga sul futures con sottostante un titolo correlato positivamente con i tassi è più alto dell'equivalente forward. Analogamente se l'attività è correlata negativamente sarà più alto il prezzo forward. Solitamente le differenze tra prezzo forward e futures teorici sono trascurabili; le differenze possono diventare più significative e quindi più difficilmente trascurabili all'aumentare delle scadenze.

Capitolo 7

Futures

Dopo aver esposto cosa sono i futures e come si stabilisce il loro prezzo, spiegheremo come tale prezzo converge, con l'avvicinarsi della scadenza, al prezzo spot.
Questo capitolo, inoltre, tratterà la procedura di liquidazione dei futures attraverso i depositi di garanzia e di come i futures possano essere indebitamente sfruttati per ottenere enormi guadagni.

7.1 Convergenza del prezzo futures verso il prezzo spot

Il prezzo futures, all'avvicinarsi del mese di consegna, converge verso il prezzo spot dell'attività sottostante e al tempo di consegna diventa uguale.

Supponiamo, inizialmente, che il prezzo futures sia superiore del prezzo spot durante il periodo di consegna. Questa situazione genera opportunità di arbitraggio in quanto gli operatori potrebbero:

- vendere un contratto futures
- comprare l'attività sottostante
- effettuare la consegna

La procedura appena esposta garantisce un guadagno sicuro pari alla differenza tra il prezzo futures e quello spot. Gli operatori quindi sfruttano questa opportunità e aumentando l'offerta di futures ne fanno scendere il prezzo.

Se invece supponiamo che sia il prezzo spot ad essere maggiore di quello futures le società che vogliono acquistare l'attività sottostante preferiscono comprare il futures e aspettare la consegna. Questo determina la crescita del prezzo futures.

7.2 Esempio di funzionamento dei depositi di garanzia

Consideriamo un'investitore che in data 3 Giugno 1996 ordini al suo broker di comprare alla New York commodity Exchange due contratti futures sull'oro, da 100 once ciascuno, per consegna a Dicembre 1996. Il prezzo futures è di 400 dollari per oncia.

Il broker richiede all'investitore di trasferire del denaro in un conto di deposito (margin account). L'entità del deposito da versare alla stipula del contratto, chiamato 'initial margin', viene stabilita dal broker. Ipotizziamo che nel nostro caso sia di 2000$ per contratto. Il conto di deposito viene aggiustato alla fine di ogni giorno lavorativo tenendo conto di guadagni o perdite dell'investitore, per realizzare l'aggancio al mercato (marking to market) del conto. Supponiamo che a fine giornata del 3 giugno il prezzo futures sia sceso a 397 dollari. Pertanto il saldo del conto di deposito viene ridotto di (400-397)$\times$200 = 600 dollari e risulta pari a 3400 dollari. Allo stesso modo se il prezzo del futures sale a 403 dollari il conto di deposito sale a 4600. Il broker, nel primo caso provvede a versare i 600 $ alla borsa, nel secondo a prelevarli. Il marking to market viene effettuato già dalla fine del giorno della stipula e viene ripetuto ogni giorno fino alla consegna. Questo meccanismo fa in modo che dopo l'aggiustamento giornaliero, il valore del contratto sia zero.

Per garantire che il saldo del conto di deposito non diventi negativo viene stabilito un margine di mantenimento (maintenance margin) che è comunque inferiore al margine iniziale (solitamente intorno al 75%). Quando il saldo scende sotto questo margine, viene inviata una richiesta di integrazione (margin call) all'investitore, che deve in breve tempo effettuarla. La cifra richiesta è tale da riportare il saldo al livello del margine iniziale e viene detta margine di variazione (variation margin). Nel caso in cui l'investitore non versi il margine di variazione il broker provvede a chiudere la sua posizione attraverso la vendita del contratto. Nel nostro esempio il broker venderebbe 200 once d'oro per consegna a dicembre.

I livelli minimi dei margini iniziali e di mantenimento sono fissati dalla borsa ma i broker possono richiederne agli investitori di superiori. La borsa stabilisce i margini in base alla variabilità del prezzo dell'attività sottostante; più questo è grande più i margini sono elevati.

L'investitore, in molti casi, percepisce gli interessi del conto di deposito. Quindi il costo-opportunità del conto, se il tasso d'interesse è concorrenziale rispetto a quello che potrebbe ottenere altrove, è nullo.

Il margine iniziale, diversamente dalle successive integrazioni, può essere costituito da titoli. I buoni del tesoro, ad esempio, sono valutati circa il 90 % del loro valore nominale. A volte sono accettate anche azioni, valutate però al 50% del valore nominale.

7.3 Irregolarità negli scambi

I mercati futures sono sfruttati, in alcuni casi, per ottenere irregolarmente grandi guadagni a scapito dell'efficienza e del pubblico interesse. Uno dei modi per fare ciò è quello di mettere alle corde il mercato (corner the market). Gli investitori assumono enormi posizioni long e cercano di controllare l'offerta del bene sottostante. Questi poi non chiudono la propia posizione determinando una situazione in cui i contratti in essere superano la merce disponibile. Coloro che hanno una posizione corta saranno allarmati dalla difficoltà di effettuare la consegna e saranno disposti a pagare prezzi elevati per chiudere la loro posizione. Ciò provoca forti aumenti nei prezzi spot e futures facendo guadagnare cifre enormi a chi possiede la posizione long.

L'organo di vigilanza cerca di evitare questi abusi aumentando i depositi di garanzia, imponendo limiti più stretti alle posizioni, proibendo agli speculatori di aumentare le loro posizioni o costringendoli a chiuderle.

7.4 Copertura mediante futures

I futures nascono dall'esigenza di società con interessi commerciali, di assicurarsi contro le perdite dovute all'oscillazione di prezzi di beni che sanno che dovranno acquistare o vendere in futuro. Per stabilire l'entità di un'operazione di copertura si possono utilizzare due metodi; il primo sfrutta le deviazioni standard delle variazioni dei prezzi del bene e del futures e la correlazione tra di esse e il secondo è quello basato sulla duration. Per spiegazioni e approfondimenti si faccia riferimento alla tesi 'Modelli a tempo discreto per la copertura mediante futures' capitolo 6 di Tommaso Ercole.

Bibliografia

[1] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives.* Prentice Hall, Inc., 1997.

[2] Stanley R. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance.* Blackwell Publishers, Inc., 2001.