Università degli Studi di Padova

SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
“GALILEO GALILEI”

LAUREA TRIENNALE IN ASTRONOMIA

Introduzione allo studio delle maree in Astronomia

Relatore: Prof. Marco Favretti

Laureanda: CHIOCCHETTA CATERINA

A.A. 2014 - 2015

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio delle maree è antichissimo. I primi documenti che le registrano sono addirittura del 2000 a.C. Le popolazioni che per prime osservarono il fenomeno furono quelle che vivevano in prossimità dell'oceano, mentre ovviamente per quelle che si trovavano sulle coste di mari chiusi, il fenomeno rivestiva un 'importanza molto inferiore, a causa della sua scarsa entità. Le popolazioni antiche conoscevano la regolarità del fenomeno ma non vi attribuivano spiegazioni e non lo collegavano alla presenza di altri corpi celesti.

Per molti secoli si sono susseguite ipotesi fantasiose per spiegare l'alternarsi dell'alta e bassa marea. Solo nel 1500 con Keplero e Galileo si comincia a provare a dare una spiegazione scientifica del fenomeno. Galileo proponeva che la marea fosse un effetto della rotazione della Terra attorno al suo asse, che induceva il moto del mare. Keplero invece aveva intuito che le maree potevano essere originate dall'attrazione di un altro corpo - in questo caso la Luna - sulle acque dell'oceano. Per avere una trattazione più completa dobbiamo però attendere Newton, che, con la sua teoria della gravitazione, fuse queste due teorie elaborandone una completa in grado di spiegare le cause del fenomeno (attrazione gravitazionale della Luna) e le sue caratteristiche (periodicità e dipendenza dalla rotazione terrestre).

In questa tesi si vuole affrontare la teoria elementare delle maree. Si procederà ricavando l'espressione della forza di marea in un sistema non rotante per poi arrivare all'espressione del potenziale di marea. Si procederà analizzando il sistema Terra - Luna e i principali effetti che le maree provocano sul sistema pianeta - satellite in cui agiscono, tra cui l'accoppiamento degli spin e il limite di Roche.

Lo studio che è effettuato è elementare poichè assume un sistema di riferimento conveniente e una serie di presupposti che semplificano la trattazione. Questa tesi potrebbe quindi servire come base per sviluppare uno studio più approfondito del problema il quale si complica mano a mano che si aggiungono effetti secondari di cui tenere conto. L'intento della tesi però non è approssimare il caso realistico dell'interazione tra primario e secondario in un sistema pianeta - satellite, bensì fornirne un modello teorico semplificato.

Capitolo 2

Deduzione del potenziale di marea

In questo paragrafo si vuole discutere qualitativamente la natura fisica delle forze che generano le maree, derivando l'espressione matematica di queste forze per un punto arbitrario sulla terra. Poi si studierà la distorsione statica delle superficie dell'oceano che è determinata da tali forze.

2.0.1 Forze di marea in un sistema non rotante

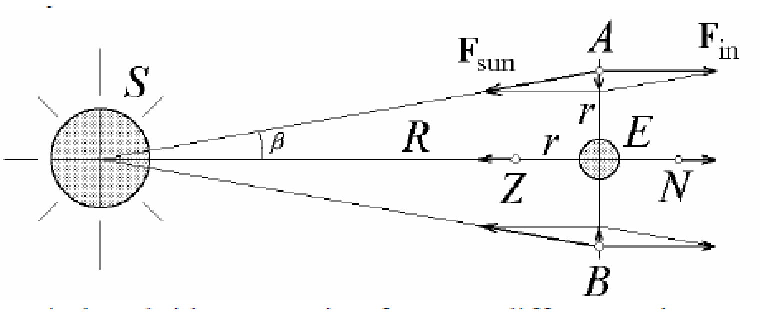
Le maree si manifestano tramite spostamenti verticali periodici della superficie del mare, accoppiati con movimenti orizzontali dell'acqua chiamati *correnti mareali*. Le maree sono causate dalla variazione delle forze gravitazionali che Luna e Sole esercitano sulla Terra e sui suoi oceani. L'origine del fenomeno mareale è collegato alla **non uniformità del campo gravitazionale** di Luna e Sole sul globo. Il problema dello studio delle maree può essere scomposto in due parti: la prima riguardo all'orgine e alle proprietà delle forze di marea, la seconda riguarda gli effetti dinamici che le forze, dipendenti dal tempo, hanno sull'oceano.
La Terra si muove nel suo insieme con un' accelerazione relativa ad un sistema di riferimento inerziale. Questa accelerazione è prodotta dall'attrazione gravitazionale tra Terra e Sole . Sebbene la Terra viaggi in orbite circolari, la sua accelerazione centripeta a_0 in questo moto orbitale è generata dalla spinta gravitazionale del Sole e quindi è un' *accelerazione di caduta libera*, indipendente dalla velocità orbitale. La terra si muove con la stessa accelerazione che avrebbe se fosse in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole. Quello che conta in questo problema non è quindi la velocità orbitale, bensì solo l'accelerazione.

Usiamo inizialmente un **sistema di riferimento geocentrico non rotante** , cioè con assi costantemente paralleli a quelli di riferimento, centrato nel centro della Terra che si muove approssimativamente in un cerchio attorno al centro di massa del sistema Terra - Sole. Il riferimento stesso non ruota perchè la direzione dei suoi assi è fissa relativamente alle stelle distanti. Quindi il moto del sistema di riferimento è una traslazione e non una rotazione. Rispetto allo spazio inerziale tutti i punti di riferimento muovono con accelerazione a_0 il cui modulo e direzione sono le stesse in tutti i punti. Ogni corpo di massa m il cui moto è riferito a questo sistema di riferimento non inerziale è soggetto a questa forza di inerzia $F_{in} = -ma_0$, che è indipendente dalla posizione del corpo relativamente alla Terra. Se un corpo fosse piazzato al centro della Terra , questa forza bilancerebbe esattamente l'attrazione gravitazionale esercitata sul corpo dal Sole.
La forza di inerzia, $F_{in} = -ma_0$, ha la stessa intensità e direzione ovunque sulla Terra. D' altro lato l'attrazione gravitazionale del Sole , F_{sun}, subita dal corpo diminuisce con la sua distanza dal Sole ed è diretta verso di esso. Quindi sia modulo sia direzione di questa forza dipendono dalla posizione del corpo sulla Terra. Siccome la Terra è un corpo esteso, le forze F_{sun} ed F_{in} sono generalmente diverse. L'azione combinata in ogni punto di queste forze da origine alla forza di marea.
In altre parole la forza di marea in una determinata posizione sulla terra è data dalla somma vettoriale tra l'attrazione gravitazionale che il Sole esercita sull'oggetto in quella posizione e l'attrazione gravitazionale che il corpo subirebbe se fosse posizionato nel centro della Terra.

Se avessimo voluto evitare di introdurre un sistema di riferimento non inerziale in cui la forza di marea è data dalla differenza tra attrazione gravitazionale e forza di inerzia avremmo potuto considerare proprio la differenza tra forza esercitata nel punto in questione e forza esercitata dal Sole nel centro della Terra. Le piccole differenze tra l'accelerazione del centro della Terra e quella dei corpi posti su di essa sono dovute alla loro distanza dal centro del pianeta e quindi le differenze sono causate dalla non uniformità del campo gravitazionale agente su un corpo esteso.

Si sottolinea quindi come le forze di marea siano causate non dall'attrazione gravitazionale in sè ma bensì dalla non uniformità di questo campo.

Con riferimento alla figura proviamo quindi ad analizzare la forza di marea che nasce nei diversi punti della superficie terrestre, considerandoli tutti appartenenti allo stesso piano, ad esempio quello equatoriale. L'accelerazione di caduta libera della terra E nel campo gravitazionale del Sole S è



$$a_0 = \frac{GM}{R^2}$$

dove M è la massa del Sole e R è la distanza Terra Sole. L'attrazione gravitazionale del Sole F_{sun} subita dal corpo al punto A circa eguaglia la forza di inerzia F_{in} in intensità perchè la distanza del Sole dal corpo e dal centro della terra sono molto simili. Ma al punto A la direzione della forza gravitazionale F_{sun} non è esattamente opposta alla forza di inerzia F_{in}. La loro risultante, che è la forza di marea al punto A, quindi è non nulla ed è diretta verso il centro della terra.

Sia β l'angolo tra il corpo ed il centro della Terra come visto dal Sole e considero

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{r}{R}$$

ove $R \gg r$. L'ampiezza della risultante delle forze è così uguale a

$$ma_0\beta = ma_0\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{GmM}{R^2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)$$

La forza di marea F_B all'opposto punto B eguaglia F_A ed è anche essa rivolta verso il centro della Terra.

La distanza del Sole dal corpo al punto Z (per il quale il Sole è allo Zenit) è più piccola di quella tra Sole e centro della Terra . Qui l'attrazione gravitazionale del Sole punta in verso direttamente opposto alla forza di inerzia ed è un pò più grande di quest'ultima. Quindi la forza mareale F_Z in questo punto è diretta verticalmente verso l'alto dalla Terra verso il Sole. La sua intensità sarà:

$$F_Z = G\frac{mM}{(R-r)^2} - ma_0 = ma_0\left[\frac{R^2}{(R-r)^2} - 1\right]$$

Ora sviluppando il termine tra parentesi quadre si ottiene:

$$\left[\frac{R^2}{(R-r)^2}-1\right]=\left[\frac{R^2-R^2-r^2+2Rr}{(R-r)^2}\right]=\frac{-r^2+2Rr}{R^2\left(1-\frac{r}{R}\right)^2}$$

A questo punto posso trascurare il termine $\frac{r}{R}$ rispetto a 1 poichè $R \gg r$ e otteniamo:

$$F_Z \approx \frac{-r^2}{R^2}+\frac{2r}{R} \approx \frac{2r}{R}$$

A questo punto, sostituendo a_0, ottengo:

$$F_Z = G\frac{mM}{R^2}\frac{2r}{R}$$

Questo valore è approssimativamente il doppio del modulo della forza di marea ai punti A e B. Al punto N, opposto a Z (per il quale il Sole è al Nadir) la forza di inerzia è più grande dell'attrazione gravitazionale e così la forza di marea al punto N, F_N, è nuovamente diretta verticalmente verso l'alto, con un vettore che punta verso l'esterno rispetto al centro della terra. In modulo F_N eguaglia F_Z, essendo infatti

$$F_N = -G\frac{mM}{R^2}\frac{2r}{R}.$$

L'unico fattore che conta, nella generazione della forza di marea, è quindi l'accelerazione della terra indotta dall'attrazione gravitazionale dell'altro corpo celeste e non la velocità orbitale dei corpi.
La forza di marea subita da un oggetto è proporzionale alla sua distanza r dal centro della Terra ed inversamente proporzionale al cubo della distanza R dal centro del corpo celeste che causa la forza, inoltre essa è proporzionale alla massa del corpo.

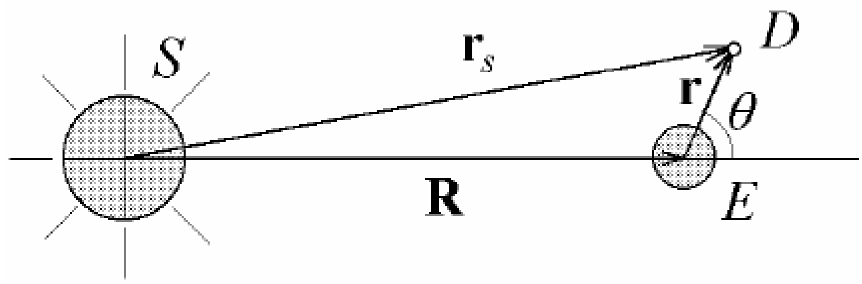


Figura 2.1: sistema primario satellite

2.0.2 Forze mareali su un punto arbitrario vicino alla Terra

Per ottenere un'espressione matematica per le forze che generano le maree in un punto arbitrario D sopra la Terra introduciamo il raggio vettore $\mathbf{r}$ di questo punto misurato dal centro della Terra, ed anche il vettore $\mathbf{r}_s = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ misurato dal centro del Sole , dove $\mathbf{R}$ è il vettore che congiunge il centro della Terra con il centro del Sole.

La forza di marea subita da un corpo di massa m al punto D nel sistema non rotante e non inerziale centrato nella Terra è il vettore somma dell'attrazione gravitazionale del Sole ,

$$F_{sun} = \frac{-GmM\mathbf{r}_s}{r_s^3}$$

e la forza di inerzia

$$F_{int} = m\mathbf{a}_0 = \frac{-GmM\mathbf{R}}{R^3}$$

quindi:

$$F_{tid} = F_{sun} + F_{in} = -GmM\left(\frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) \tag{2.1}$$

Abbiamo bisogno di calcolare r_s^3. Per fare questo esprimiamo $\mathbf{r}_s$ come il vettore somma $\mathbf{R} + \mathbf{r}$ e calcoliamo la radice di r_s .Dall'ipotesi che $r \ll R$ possiamo trascurare $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ e scriviamo quindi

$$r_s^2 = (\mathbf{r} + \mathbf{R})^2 = R^2 + r^2 + 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}) = R^2\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r\cdot R}{R^2}\right)\right) \approx R^2\left(1 + 2\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})}{R^2}\right)$$

Per trovare un'espressione approssimata per $\frac{1}{r_s^3}$ possiamo elevare alla $\left(\frac{-3}{2}\right)$ il risultato dell'espressione precedente. Ora, sostituendo il risultato ottenuto nell'equazione (2.1) si ricava:

$$\frac{1}{r_s^2} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{\left(1 + 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2}\right)}$$

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{R} \frac{1}{\left(1 + 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{r_s^3} = \frac{1}{R^3} \frac{1}{\left(1 + 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ora considero che

$$0 \leq \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}|}{R^2} \leq \frac{rR}{R^2} = \frac{r}{R} = \epsilon$$

ove ϵ è una quantità molto piccola. A questo punto posso porre $x = 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2}$ e procedere con lo sviluppo di Taylor relativo alla frazione. Per $x \approx 0$

$$f(x) \approx f(0) + f'(x)\,|_0\,(x)$$

Nel nostro caso

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi

$$f(x) \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}\right)^5} x + O\left(x^2\right) \approx 1 - \frac{3}{2} 2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2}$$

Da cui, sostituendo nuovamente nell'equazione (2.1), si ottiene:

$$F_{tid} \approx -\frac{GmM}{R^3} \left[\mathbf{r}_s \left(1 - 3\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2}\right) - \mathbf{R}\right]$$

Sostituendo ora $\mathbf{r}_s = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ otteniamo:

$$F_{tid} \approx \frac{-GmM}{R^3} \left[(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \left(1 - 3\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2}\right) - \mathbf{R}\right]$$

$$F_{tid} \approx \frac{-GmM}{R^3} \left[\mathbf{r} + \mathbf{R} - 3\mathbf{R}\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2} - 3\mathbf{r}\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2} - \mathbf{R}\right]$$

da cui, trascurando il termine contenente $\frac{\mathbf{r}}{R^2}$ risulta

$$F_{tid} \approx \frac{-GmM}{R^3}\left[\mathbf{r} - 3\mathbf{R}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})}{R^2}\right] \tag{2.2}$$

Notiamo che i contributi di primo ordine di F_{sun} e F_{in} a F_{tide}, il cui moduli sono inversamente proporzionali a R^2, si cancellano nell'equazione. Per i punti A e B della figura precedente , $\mathbf{r}$ è perpendicolare a $\mathbf{R}$ e quindi il prodotto scalare $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})$ è nullo. Quindi in questi due punti la forza di marea è opposta a $\mathbf{r}$ e la sua ampiezza eguaglia $GmM\left(\frac{r}{R^3}\right)$. Per i punti Z e N è diretta lungo $\mathbf{r}$ (cioè diretta verso l'esterno) e la sua intensità è $2GmM\left(\frac{r}{R^3}\right)$, due volte più grande che ai punti A e B.

2.1 Le componenti della forza di marea

Le forze di marea hanno una doppia azione su di un punto sulla superficie della Terra: quella che si esercita lungo la congiungente Terra - Sole e quella che si esercita in direzione perpendicolare a tale linea. A causa della simmetria assiale rispetto alla congiungente Terra Sole tali componenti dipendono solo dall'angolo θ e dalla distanza dal centro della Terra. L'angolo θ determina la posizione del punto di massa m sulla superficie della Terra misurata dalla congiungente. Definisco quindi le componenti della forza di marea come componente orizzontale, che è quella tangenziale alla superficie, e componente verticale, che è quella in direzione radiale. Mentre le componenti verticali sono poco influenti e agiscono modificando di poco la forza gravitazionale terrestre, le componenti orizzontali - tangenziali sono quelle che causano le maree oceaniche. Per trovare la loro espressione analitica considero un punto D che ha coordinate r e θ nel sistema di coordinate geocentriche.

Calcolo della componente orizzontale

La componente orizzontale della forza come mostrata in figura (2.1) si ricava moltiplicando il vettore della forza di marea per il versore tangente alla superficie della terra $\mathbf{t}$ ottenendo quindi :

$$F_{hor} = F_{tid}\cdot\mathbf{t} = \frac{-GmM}{R^3}\left[\mathbf{r} - 3\mathbf{R}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})}{R^2}\right]\cdot\mathbf{t}$$

$$F_{hor} = \frac{-GmM}{R^3}\left[\mathbf{r}\cdot\mathbf{t} - 3\mathbf{R}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})}{R^2}\cdot\mathbf{t}\right]$$

$$F_{hor} = \frac{-GmM}{R^3}\left[-3\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{t})\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})}{R^2}\right]$$

$$F_{hor} = \frac{-GmM}{R^3}\left[-3\frac{R^2 r\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{R^2}\right]$$

$$F_{hor} = \frac{-GmM}{R^3}\left[-3r\cos\theta\sin\theta\right]$$

$$F_{hor} = 3G\frac{Mm}{R^3}r\sin\theta\cos\theta = 3F_{sun}\frac{r}{R}\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{2}F_{sun}\frac{r}{R}\sin 2\theta$$

ove

$$F_{sun} = \frac{GMm}{R^2} = ma_0$$

è l'attrazione gravitazionale del Sole sul centro della Terra. Quindi la forza di marea in direzione orizzontale è zero ai punti A e B ed in tutti i punti del piano ortogonale alla linea Sole - Terra. Inoltre è nulla nei punti N e Z che si trovano sulla congiungente Terra - Sole poichè il seno di 2θ si annulla in tale configurazione. La forza orizzontale è quindi massima nei punti in cui $\theta = 45°$ e $\theta = 135°$ ed il suo massimo valore è

$$\frac{3}{2}\frac{r}{R}F_{sun} = \frac{3}{2}\frac{r}{R}G\frac{mM}{R^2}$$

Calcolo della componente verticale

Per ottenere la componente verticale - radiale della forza, sempre rappresentata in figura (2.1), dobbiamo moltiplicare l'espressione di F_{tid} data dall'equazione (2.2) per il versore $\frac{\mathbf{r}}{r}$. Otteniamo quindi:

$$F_{vert} = F_{tid}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{-GmM}{R^3}\left[\mathbf{r} - 3\mathbf{R}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})}{R^2}\right]\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$F_{vert} = \frac{-GmM}{R^3 r}\left[\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - 3\mathbf{R}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})}{R^2}\cdot\mathbf{r}\right]$$

$$F_{vert} = \frac{-GmM}{R^3 r}\left[r^2 - 3\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})^2}{R^2}\right]$$

$$F_{vert} = \frac{-GmM}{R^3 r}\left[r^2 - 3\frac{r^2R^2\cos^2\theta}{R^2}\right]$$

$$F_{vert} = \frac{-GmM}{R^3 r}r^2\left[1 - 3\cos^2\theta\right]$$

Usando l' identità:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

ottengo in definitiva:

$$(F_{tid})_{vert} = -3G\frac{Mm}{R^3}r\left(3\cos^2\theta - 1\right) = \frac{3}{2}G\frac{mM}{R^2}\frac{r}{R}\left(\cos 2\theta + \left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

L'ultimo termine tra parentesi $\left(\frac{1}{3}\right)$ è indipendente da θ e quindi uguale in ogni punto della Terra, per un dato valore di r. Per questo motivo può essere trascurato rispetto al termine di attrazione gravitazionale $g = \frac{GM}{r^2}$.

Per concludere quindi le forze orizzontali e verticali che compongono la forza di marea assumono la forma

$$(F_{tid})_{hor} = \frac{3}{2}G\frac{mM}{R^2}\frac{r}{R}\sin 2\theta$$

e

$$(F_{tid})_{vert} = \frac{3}{2}G\frac{mM}{R^2}\frac{r}{R}\cos 2\theta$$

Questa rappresentazione permette di ottenere una forza di marea che ha modulo indipendente da θ. Essa è uguale in modulo in tutti i punti che giacciono ad una data distanza r dal centro della terra e differisce solo in direzione. A questo punto possiamo anche esprimere le componenti della forza con la forma che assumono considerando il sistema di assi incentrato nella Terra in rotazione con velocità angolare Ω. Sostituiamo quindi $\theta = \Omega t$ e otteniamo le seguenti due espressioni per le componenti della forza per un punto all'equatore sul quale il Sole è allo Zenit al tempo $t = 0$

$$F_{vert}(t) = Ar\cos 2\omega t$$
$$F_{hor}(t) = -Ar\sin 2\omega t$$

dove

$$A = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{F_{sun}}{R} = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{GmM}{R^3}$$

Ad ogni altro punto equatoriale della Terra il vettore delle forze di marea ruota nel piano equatoriale con velocità angolare 2Ω. Quindi tutti i punti ruotano con in modo sincrono con fasi differenti.

2.2 Il potenziale di marea

Introduciamo ora il potenziale di marea, $U(r,\theta)$, a partire dalla scrittura delle componenti della forza. Le componenti della forza sono date dall'opposto del gradiente del potenziale. Quindi risulta:

$$\begin{cases} F_{vert} = F \cdot \mathbf{u}_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \\ F_{hor} = F \cdot \mathbf{u}_\theta = -\frac{\partial U}{\partial (r\theta)} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial r} = Ar\cos 2\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = Ar\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial r} = Ar\cos 2\theta \\ -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -Ar^2\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = -Ar\cos 2\theta \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = Ar^2\sin 2\theta \end{cases}$$

La condizione necessaria e sufficiente in un dominio semplicemente connesso per l'integrazione è che le derivate seconde miste siano uguali, quindi:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial r}$$

$$\frac{\partial (Ar^2 \sin 2\theta)}{\partial r} = \frac{\partial (Ar\cos 2\theta)}{\partial \theta}$$

$$2Ar\sin 2\theta = 2Ar\sin 2\theta$$

Ora si può integrare :

$$F_{vert} = Ar\cos 2\theta = -\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r}$$

$$U(r,\theta) = \int -Ar\cos 2\theta dr + \psi(\theta) = -\frac{1}{2}Ar^2\cos 2\theta + \psi(\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = Ar^2 \sin 2\theta \cdot 2 + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Ar^2\sin 2\theta$$

Questo implica

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \psi = costante$$

quindi

$$U(r,\theta) = -\frac{1}{2}Ar^2\cos 2\theta + cost$$

Ora, dal momento che il potenziale è definito a meno di una costante, la posso trascurare e, sostituendo

$$A = \frac{3}{2}\frac{GmM}{R^3}$$

ottengo

$$U(r,\theta) = -\frac{3}{4}\frac{GmM}{R^3}r^2\cos 2\theta \tag{2.3}$$

2.2.1 Distorsione statica degli oceani dovuta alle forze di marea

La forza che limita la distorsione mareale della superficie dell'acqua è dovuta alla gravità terrestre. Vogliamo calcolare la distorsione statica della superficie d'acqua che copre il globo, cioè quella che si avrebbe trascurando la rotazione della Terra attorno al suo asse.

Sia $U_g(r) = \frac{GM_Tm}{r}$ la funzione di potenziale a simmetria sferica della gravità terrestre che genera la componente radiale della forza di gravitazione terrestre

$$-\frac{dU_g(r)}{dr} = -\frac{GM_Tm}{r^2}$$

La superficie libera dell'oceano si dispone lungo una superficie equipotenziale di potenziale totale

$$U_{tot}(r,\theta) = U_g(r) + U_{tides}(r,\theta) = const$$

Consideriamo quindi il potenziale totale per una massa m posta sulla superficie dell'oceano.

$$U = U_g + U_{tid} = \frac{GM_Tm}{r} - \frac{3}{4}\frac{GM_Sm}{R^3}r^2\cos 2\theta = U(r,\theta)$$

In questa descrizione la massa m è identificata dalle coordinate (r,θ) ove r è la distanza dal centro della terra e θ è l'angolo calcolato a partire dalla congiungente Terra - Sole. $U(r,\theta) = const$ è una superficie equipotenziale. Assumiamo tale costante pari al valore del potenziale in assenza di perturbazioni mareali, quindi poniamo la costante uguale al solo potenziale gravitazionale relativo al raggio medio terrestre e cioè al valore medio della quota di marea r_0 . Allora risulta:

$$\frac{GM_T m}{r} - \frac{3}{4}\frac{GM_S m}{R^3} r^2 \cos 2\theta = \frac{GM_T m}{r_0}$$

da cui

$$M_T \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{3}{4}\frac{M_S}{R^3} r^2 \cos 2\theta$$

$$M_T \left(r_0 - r \right) = \frac{3}{4}\frac{M_S}{R^3} r^3 r_0 \cos 2\theta \cong \frac{3}{4}\frac{M_S}{R^3} r_0^4 \cos 2\theta$$

Ma $(r_0 - r)_{max}$ si ha per $\cos 2\theta = 1$. Quindi

$$\delta h = (r_0 - r)_{max} \cong \frac{3}{4}\frac{M_S}{R^3 M_T} r_0^4$$

Possiamo ora fornire una stima dei valori massimi della distorsione mareale data sia dal Sole che dalla Luna:

$$\delta h_{Sole} = \frac{3}{4}\frac{2 \times 10^{30} \times (6,378 \times 10^6)^4}{5,972 \times 10^{24} \times (150 \times 10^9)^3} \cong 12\,[cm]$$

$$\delta h_{Luna} = \frac{3}{4}\frac{7,34 \times 10^{22} \times (6,378 \times 10^6)^4}{5,972 \times 10^{24} \times (3.84 \times 10^8)^3} \cong 27\,[cm]$$

che rappresenta il massimo dislivello rispetto allo zero di marea.

Capitolo 3

Passaggio ad un sistema di riferimento rotante

La trattazione precedente permette di evitare lo studio di tutte le forze apparenti che nascono considerando un sistema di riferimento rotante. La descrizione del moto relativo ad un sistema di riferimento non inerziale richiede di considerare il moto di rotazione del riferimento in aggiunta al moto di traslazione dell'origine del riferimento.

Per raggiungere questo risultato dobbiamo introdurre una trasformazione di coordinate da un sistema inerziale ad uno in moto rototraslatorio. Considereremo quindi il sistema di riferimento rotante con velocità angolare ω.

La relazione tra velocità ed accelerazione in un sistema di riferimento inerziale, $\overrightarrow{v_a}$ e $\overrightarrow{a}_a$, e la velocità e l'accelerazione in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare ω, $\overrightarrow{v}_{rel}$ e $\overrightarrow{a}_{rel}$, può essere espressa come

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v}_{rel} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

e

$$\overrightarrow{a}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt}\right)_{rel} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v}_a$$

sostituendo v_a otteniamo:

$$\overrightarrow{a}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\left(\overrightarrow{v}_{rel} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}\right)}{dt}\right)_{rel} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v}_{rel} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})$$

o equivalentemente

$$\vec{a}_a = \left(\frac{d\vec{v}_{rel}}{dt}\right)_{rel} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Quindi l'accelerazione nel sistema rotante è uguale a

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times r - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Le forze addizionali sono fittizie e prendono il nome di : *forza di Eulero* $\left(-\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times r\right)$, *forza di Coriolis* $(-2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel})$ e *forza centrifuga* $(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$

Ora vogliamo capire quale relazione esiste tra il risultato che si ottiene considerando un sistema di riferimento con gli assi centrati nella Terra sempre paralleli ad un sistema di riferimento inerziale (ad esempio le stelle fisse) e invece considerando un sistema di riferimento geocentrico ma solidale alla Terra e quindi con gli assi in rotazione.

Consideriamo un sistema formato da due corpi. Il corpo S coincide con il baricentro del sistema in ragione della sua elevata massa, potrebbe essere il Sole nel nostro caso. Il secondo corpo ruota attorno al primo con velocità angolare ω uniforme. Il centro di tale corpo viene indicato con O e P è un punto sulla sua superficie. Consideriamo un sistema di riferimento centrato in O, con gli assi sempre paralleli a tale riferimento fisso. In tale sistema l'accelerazione assoluta subita da P è pari a :

$$a_P^a = a_P^r + a_O^a$$

Dalla trattazione precedente invece ricaviamo che, considerando un riferimento solidale alla rotazione del secondo corpo, l'accelerazione assoluta del punto P rispetto a S sarà data da:

$$a_P^a = a_P^r + a_O^a + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Ora consideriamo il caso Terra - Sole e verifichiamo la relazione che esiste tra le due formule: quando il tasso di rotazione non cambia, come avviene nel caso della Terra, la forza di Eulero è nulla, inoltre considerando il punto P sulla superficie fermo nel sistema rotante si può eliminare il contributo dato dalla forza di Coriolis poichè v risulta essere pari a zero. Infine resta da analizzare il contributo dato dal termine centrifugo $(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$.

Proviamo quindi a calcolarne il modulo in riferimento al sistema Terra - Sole. Consideriamo

$$a_O^a = \frac{GM}{R^2}$$

con M pari alla massa del sole. Sostituendo i valori ottengo:

$$a_O^a \approx \frac{2 \times 10^{30} \times 6,67 \times 10^{-11}}{\left(150 \times 10^9\right)^2} \approx 0.6 \times 10^{-2} \frac{[m]}{[s^2]}$$

Per quello che riguarda invece l'accelerazione centrifuga a^{cf}, il suo valore massimo è:

$$a^{cf} \approx \omega^2 r_{Terra}$$

ove

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7.2 \times 10^{-5} \frac{[rad]}{[s]}$$

che numericamente risulta circa uguale a :

$$a^{cf} \approx \left(7,2 \times 10^{-5}\right)^2 \times 6.378 \times 10^6 \approx 3.3 \times 10^{-2} \frac{[m]}{[s^2]}$$

Si vede quindi che il termine centrifugo è dello stesso ordine delle forze di marea. Se quindi ci ponessimo in un sistema rotante per ottenere l'espressione della forza di marea dovremmo tenere conto del temine centrifugo, che andrebbe a sommarsi all'attrazione esercitata dal Sole. In ogni caso per sviluppare un modello dell'azione delle forze di marea e per comprenderne gli effetti è sufficiente considerare un sistema non rotante come fatto fino ad ora.

Capitolo 4

Sistema Terra - Luna

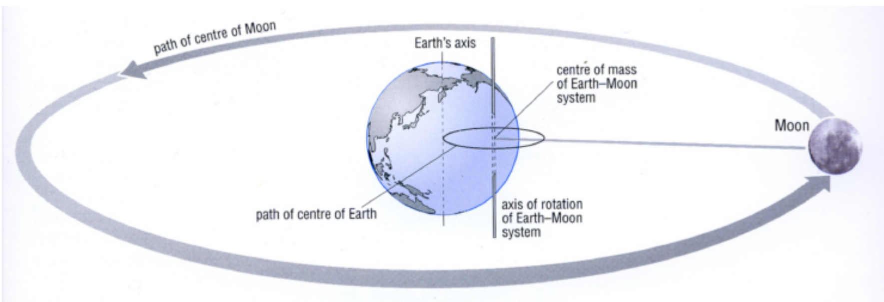
Per quello che riguarda il sistema Terra - Luna la trattazione è simile con la differenza che il baricentro non è più praticamente coincidente con il centro di uno due corpi. Esso infatti si trova all'interno della terra ma non coincide con il suo centro.

$$OC = \frac{M_{Luna} D}{M_{Terra} + M_{Luna}}$$

ove D è la distanza Terra - Luna. Risulta quindi:

$$OC \approx \frac{7.34 \times 10^{22} \times 384 \times 10^{6}}{7.34 \times 10^{22} + 5,97 \times 10^{24}} \approx 4.6 \times 10^{6}$$

Il baricentro si trova quindi circa 1800 km sotto la superficie terrestre e la Terra vi orbita attorno . Nel centro della Terra la gravitazione della Luna bilancia l'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione del sistema Terra - Luna attorno al loro centro di massa.



Quindi nel centro della Terra:

$$\frac{G M_T M_L}{R^3} \cdot \overrightarrow{R} = M_T \overrightarrow{a_0}$$

Quindi si otterrà per l'accelerazione

$$\frac{GM_L}{R^3} \cdot \overrightarrow{R} = \overrightarrow{a_0}$$

Il valore di a_0 risulta quindi essere

$$a_0^a \approx \frac{7.34 \times 10^{22} \times 6,67 \times 10^{-11}}{(384 \times 10^6)^2} \approx 3.3 \times 10^{-5} \frac{[m]}{[s^2]}$$

Il valore di a_0^a è inferiore di tre ordini di grandezza rispetto all'accelerazione centrifuga che deriva dalla rotazione della Terra. Quindi anche in questo caso se ci ponessimo in un sistema di riferimento rotante dovremmo tenere conto di un termine aggiuntivo alla forza di marea, rappresentato dall'accelerazione centrifuga.

Per descrivere le forze di marea su un sistema rotante , dovremmo considerare un sistema di riferimento geocentrico che prende parte alla giornaliera rotazione della terra. Possiamo considerare il moto fatto da due componenti. La prima è la componente che deriva dal moto traslazionale (dato dalla rivoluzione del sistema) attorno al baricentro del sistema . La seconda è appunto la componente data dalla rotazione giornaliera uniforme della Terra attorno al suo asse passante di rotazione. Entrambe questi moti sono importanti nella trattazione delle maree ma hanno ruoli profondamente diversi. L'accelerazione a_0 collegata al moto di traslazione è responsabile dell'origine della forza di inerzia $F_{in} = -ma_0$, la cui azione in un punto qualsiasi della Terra, combinata con la non uniforme attrazione gravitazionale del Sole (o della Luna) da origine alla forza di marea F_{tid}.
Invece la rotazione giornaliera terrestre rende le forze mareali **dipendenti dal tempo** poichè esse dipendono dalla posizione apparente del corpo che esercita l'attrazione, quindi o Sole o Luna nel nostro caso.
Per semplicità consideriamo il caso in cui l'oggetto sorgente della forza si trovi sul piano equatoriale della Terra. Sebbene il sistema di forze mareali ruoti rispetto al sistema geocentrico solidale alla Terra con la velocità angolare ω della rotazione terrestre che ha un periodo di

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

il reale periodo è la metà a causa della simmetria del sistema di forze mareali ed è quindi uguale a

$$T = \frac{\pi}{\omega}$$

Per le forze di marea indotte dal Sole il periodo eguaglia le 12 ore mentre le forze di marea indotte dalla Luna un periodo di 12 ore e 25 minuti. La differenza è dovuta al moto orbitale della Luna. Infatti assumendo il tempo di rivoluzione della Luna pari a 29 giorni ottengo

$$\omega_{rivLuna} = \frac{2\pi}{29 \times 60 \times 24} \approx 1.5 \times 10^{-4} \left[\frac{rad}{min}\right]$$

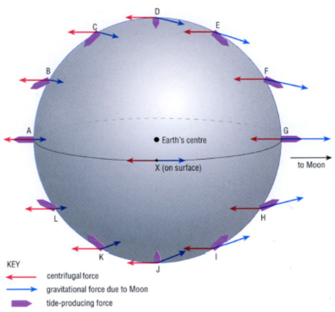
L'angolo in radianti coperto dalla Luna nel corso delle 12 ore è quindi

$$\beta = \omega_{rivLuna} \times 12 \times 60 = 0.10833 \, [rad]$$

Il tempo che la Terra impiega a percorrere questo angolo sarà quindi

$$t_{Terra} = \frac{\beta}{\omega_{Terra} \times 60} = \frac{0.10833}{7.2 \times 10^{-5} \times 60} \approx 25 \, [min]$$

Se fissiamo un punto sull'equatore della Terra il vettore della forza di marea locale esegue una rotazione uniforme nel piano verticale, facendo due rivoluzioni complete durante un giorno. A causa di questa periodica dipendenza dal tempo le forze di marea danno orgine alle maree oceaniche.



4.0.2 Confronto tra l'intensità degli effetti mareali di Luna e Sole

Le forze mareali di Luna e Sole si possono esprimere con le seguenti formule:

$$(a_{tid})_{Luna} = \frac{3}{2} \frac{GM_{Luna} r_{Terra}}{R^3_{T-L}}$$

$$(a_{tid})_{Sole} = \frac{3}{2} \frac{GM_{Sole} r_{Terra}}{R^3_{T-S}}$$

Quindi:

$$\frac{a_{Sole}}{a_{Luna}} = \frac{M_{Sole}}{R_{Sole}^3}\frac{R_{Luna}^3}{M_{Luna}} = \frac{M_{Sole}}{M_{Luna}}\left(\frac{R_{Luna}}{R_{Sole}}\right)^3$$

Ora considero

$$M_{Luna} \sim 7.3 \cdot 10^{22}[kg]$$
$$M_{Sole} \sim 2.0 \cdot 10^{30}[kg]$$
$$R_{T-L} \sim 384 \cdot 10^{6}[m]$$
$$R_{T-S} \sim 150 \cdot 10^{9}[m]$$

E ottengo

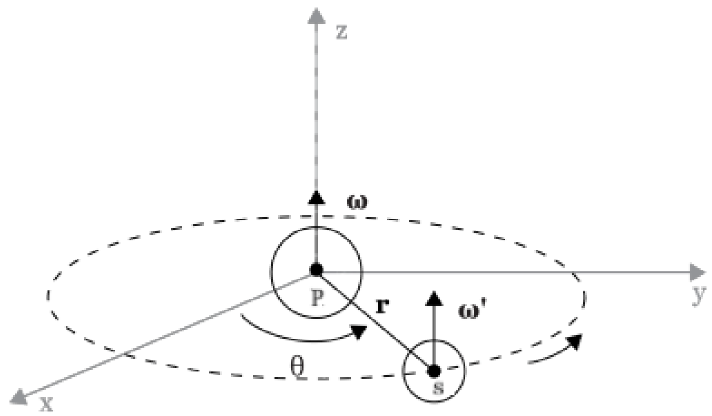
$$\frac{a_{Sole}}{a_{Luna}} \approx \frac{2.0 \cdot 10^{30}}{7.3 \cdot 10^{22}}\left(\frac{384 \cdot 10^{6}}{150 \cdot 10^{9}}\right)^3 \approx 0.46$$

Capitolo 5

Alcuni effetti mareali

5.0.3 Accoppiamento degli spin

Si considerino due corpi sferici, isolati e con distribuzione sferica della massa. Indichiamo rispettivamente con M la massa del *primario* e con m quella del *secondario* o *satellite*. Sia valida anche la condizione $M \gg m$. Consideriamo quindi il primario centrato in O ed il secondario in P: rispetto ad una terna di assi centrata in O il moto di P è una **conica**. Assumiamo la terna (O, x, y, z) in modo che (O, x, y) sia il piano dell'orbita. Supponiamo che l'orbita sia circolare e di raggio r. I due corpi M ed m hanno velocità angolari pari a ω e ω' che supponiamo parallele ed equiverse all'asse z.



Le deformazioni mareali che agiscono sui due corpi determinano una perdita di energia meccanica del sistema a causa degli attriti che viene dispersa nello spazio sottoforma di calore. Si produce così una redistribuzione di momento angolare tra i due corpi. Chiamiamo (r, θ) le coordinate polari di

P, $\dot{\theta}$ rappresenta la velocità angolare di rivoluzione di P (cioè del satellite intorno al primario). In un tempo sufficientemente lungo gli effetti mareali porteranno al risultato

$\omega = \omega' = \dot{\theta}$ e a questo punto i due corpi mostreranno l'un l'altro sempre la stessa faccia. Ricaveremo questo risultato a partire da due ipotesi:

- il fenomeno comporta una variazione di r così piccola da consentirci di considerare, istante per istante, l'orbita circolare;
- assumere $M \gg m$ significa poter trattare la terna (O, x, y, z) come inerziale.

Riprendiamo il sistema a due corpi descritto sopra e indichiamo con S il secondario (nel nostro caso la Luna) e con P il primario (nel nostro caso la Terra).

L'energia totale del sistema è $E = T + U$ quindi

$$E = T^{(S)} + T^{(P)} - \frac{mM}{r}G$$

indicati con I ed I' i momenti di inerzia dei due corpi rispetto all'asse di rotazione si ha:

$$T^{(P)} = \frac{I}{2}\omega^2$$

$$T^{(S)} = \frac{I'}{2}\omega'^2 + \frac{1}{2}mv_p^2$$

dove $T^{(S)}$ è stato ottenuto utilizzando il teorema di Konig. Ne segue quindi:

$$E = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{I'}{2}\omega'^2 + \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{mM}{r}G$$

Ricordando che per un' orbita circolare risulta : $mv_p^2 = \frac{\alpha}{r}$ con $\alpha = GmM$ ne segue che :

$$E = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{I'}{2}\omega'^2 - \frac{\alpha}{2r} \tag{5.1}$$

A causa degli attriti sopracitati E non è costante. Quello che è costante invece è il momento della quantità di moto: infatti per ipotesi il sistema è isolato ed il riferimento può considerarsi inerziale, quindi $N_S^{(ext)} = 0$. Per cui:

$$k_O = k_O^{(S)} + k_O^{(P)} = const$$

$$k_O^{(P)} = I\omega$$

e

$$k_O^{(S)} = k_p^{(S)} + SP \times mv_p = I^{'}\omega' + OP \times mv_p$$

quindi risulta:

$$k_O = I\omega + I^{'}\omega' + OP \times mv_p$$

Ma nel moto circolare $v_p = r\dot{\theta}$ quindi proiettando sull'asse z, si avrà :

$$k_O^z = I\omega + I^{'}\omega' + mr^2\dot{\theta} = const = k$$

e supponiamo k>0. Si può allora scrivere:

$$mr^2\dot{\theta} = k - I\omega - I^{'}\omega' \tag{5.2}$$

da cui, elevando quest' espressione al quadrato, prendendone il reciproco e moltiplicando per $m\alpha^2$, segue:

$$\frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^2} = \frac{m\alpha}{\left(mr^2\dot{\theta}\right)^2}$$

di conseguenza:

$$\frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^2} = \frac{\alpha^2}{mr^2\left(r^2\dot{\theta}\right)^2} = \frac{\alpha^2}{mr^2v_p^2}$$

Se sostituisco l'ultimo termine $mv_p^2 = \frac{\alpha}{r}$ risulta :

$$\frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega')^2} = \frac{\alpha}{r}$$

Da quest'ultima segue:

$$r = \frac{\left(k - I\omega - I^{'}\omega'\right)^2}{m\alpha}$$

Considero allora la formula (5.1) e sostituisco il valore calcolato per $\frac{\alpha}{r}$. Si ottiene :

$$E = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{I'}{2}\omega'^2 - \frac{m\alpha^2}{2\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^2}$$

Si esprime così l'energia in funzione delle sole ω ed ω' , il che permette uno studio dei punti di stazionarietà e di minimo dell'energia, che sarebbe risultato molto complicato se non si fosse eliminata la variabile r. In un sistema primario - satellite di questo tipo l'energia non è costante dato che le velocità angolari diminuiscono a causa di forze d'attrito. I momenti angolari si redistribuiscono e il sistema tende verso una configurazione di equilibrio stabile corrispondente ad un minimo dell'energia totale. Calcoliamo le velocità angolari ω e ω' corrispondenti ad un minimo energetico.

Per trovare le condizioni necessarie alla presenza di un punto di stazionarietà considero $\omega\left(t\right)$, $\omega'\left(t\right)$ rispettivamente le velocità angolari del primario e del satellite. Da questo ricavo che l'energia sarà uguale a:

$$E\left(t\right) = E\left(\omega\left(t\right), \omega'\left(t\right)\right)$$

Le condizioni di stazionarietà dell'energia si ottengono dall'equazione:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial E}{\partial \omega'}\dot{\omega}' = 0$$

da cui si ricava il sistema di condizioni sufficienti:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \omega} = I\omega - \frac{m\alpha^2 I}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^3} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \omega'} = I'\omega' - \frac{m\alpha^2 I'}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^3} = 0 \end{cases}$$

che permette di dedurre:

$$\omega = \omega' = \frac{m\alpha^2}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^3}$$

Calcolo ora la velocità angolare di **rivoluzione** del secondario: sostituendo il valore di r nell'equazione (5.2) risulta

$$m\left(\frac{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^2}{m\alpha^2}\right)^2 \dot{\theta} = k - I\omega - I'\omega'$$

$$\frac{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^3}{m\alpha^2}\dot{\theta} = 1$$

Quindi:

$$\dot{\theta} = \frac{m\alpha^2}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^3}$$

Otteniamo dunque il risultato:

$$\omega = \omega^{'} = \dot{\theta}$$

L'energia è stazionaria quando le velocità angolari dei due corpi sono uguali l'una all'altra e alla velocità angolare $\dot{\theta}$ di rivoluzione. A questo punto primario e satellite mostreranno l'un l'altro vicendevolmente la stessa faccia con la conseguente fine di ogni effetto periodico della forza di marea.

Ora vogliamo verificare le condizioni sotto cui esistono dei punti di stazionarietà per E e sotto quali condizioni essi siano dei punti di minimo dell'energia.

5.0.4 Esistenza dei punti di minimo dell'energia

stazionarietà

La stazionarietà dell'energia sussiste se e solo se l'equazione

$$\omega = \frac{m\alpha^2}{\left(k - I\omega - I'\omega\right)^3} \tag{5.3}$$

ha radici positive, dal momento che abbiamo considerato $\dot{\theta} > 0$. Questo implica che

$$\omega = \frac{m\alpha^2}{\left(k - I\omega - I'\omega\right)^3} > 0$$

che genera la condizione

$$\omega < \frac{k}{I + I'}$$

Ora portiamo tutto a primo membro ricavando l'espressione:

$$f\left(\omega\right) = \left[k - \left(I + I^{'}\right)\omega\right]^3 \omega - m\alpha^2 = 0$$

ed effettuiamo uno studio di funzione di $f\left(\omega\right)$. Poniamo $\Delta = I + I^{'}$ ed otteniamo l'equazione

$$\left[k - \Delta\omega\right]^3 \omega - m\alpha^2 = 0$$

Calcoliamo la derivata prima di $f(\omega)$ rispetto ad ω:

$$f'(\omega) = 3\left[k - \Delta\omega\right]^2 (-\Delta)\,\omega + \left[k - \Delta\omega\right]^3$$

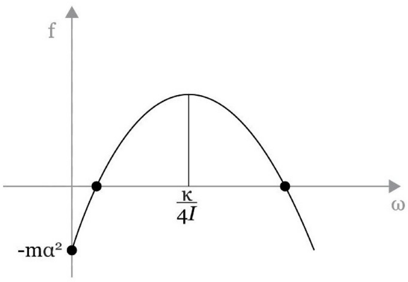
$$f'(\omega) = \left[k - \Delta\omega\right]^2 (-3\Delta\omega + k - \Delta\omega) = \left[k - \Delta\omega\right]^2 (-4\Delta\omega + k)$$

Il segno della derivata dipende da $k - 4\omega\Delta$ come mostrato di seguito:

$$\begin{cases} f'(\omega) > 0 & \text{se } \omega < \frac{k}{4\Delta} \\ f'(\omega) = 0 & \text{se } \omega = \frac{k}{4\Delta} \\ f'(\omega) < 0 & \text{se } \omega > \frac{k}{4\Delta} \end{cases}$$

Ne deduciamo quindi che la funzione $f(\omega)$ ha un massimo e tale massimo è posto in :

$$\omega^* = \frac{k}{4\Delta}$$



Ora, sostituendo questo valore di ω nell'equazione (5.3) posso ottenere i valori di k per cui tale radice è positiva.

$$\left(k - \Delta\frac{3k}{4\Delta}\right)^3 \frac{k}{4\Delta} - m\alpha^2 > 0$$

$$\frac{3^3k^4}{4^4\Delta} - m\alpha^2 > 0$$

$$k > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3\Delta m\alpha^2} \tag{5.4}$$

Considerato che la funzione $f(\omega)$ ha un dominio limitato, in quanto $\omega \in [0, \frac{k}{\Delta}]$, la valuto negli estremi e verifico che in questi punti la funzione assume il valore negativo

$$f(0) = -m\alpha^2$$

e questo, unito al fatto che il massimo ha ascissa positiva se vale la condizione calcolata su k, implica che entrambe le radici sono maggiori di zero e sono quindi punti di stazionarietà per la funzione dell'energia E.

L'equazione

$$\omega = \frac{m\alpha^2}{(k - I\omega - I'\omega)^3}$$

fornisce dunque due radici positive

$$0 < \omega_1 < \frac{k}{4\Delta} < \omega_2 < \frac{k}{\Delta}$$

che definiscono due punti di stazionarietà di E purchè valga la condizione (5.4)

Minimo

Per verificare che un determinato valore ω sia un punto di minimo devo verificare che in quel punto la matrice Hessiana dell'energia sia definita positiva. La matrice hessiana è dunque:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial^2 \omega} & \frac{\partial^2 E}{\partial \omega \partial \omega'} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \omega' \partial \omega} & \frac{\partial^2 E}{\partial^2 \omega'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I\left(1 - \frac{3m\alpha^2 I}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^4}\right) & -\frac{3m\alpha^2 II'}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^4} \\ -\frac{3m\alpha^2 II'}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^4} & I'\left(1 - \frac{3m\alpha^2 I'}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^4}\right) \end{bmatrix}$$

Il determinante di tale matrice risulta:

$$detH_E = II'\left(1 - \frac{3m\alpha^2 I}{(k - I\omega - I'\omega')^4}\right)\left(1 - \frac{3m\alpha^2 I'}{(k - I\omega - I'\omega')^4}\right) - \frac{9m^2\alpha^4\left(II'\right)^2}{(k - I\omega - I'\omega')^8}$$

$$detH_E = II'\left(1 - \frac{3m\alpha^2 I}{(k - I\omega - I'\omega')^4} - \frac{3m\alpha^2 I'}{(k - I\omega - I'\omega')^4} + \frac{9m^2\alpha^4 II'}{(k - I\omega - I'\omega')^8}\right) - \frac{9m^2\alpha^4\left(II'\right)^2}{(k - I\omega - I'\omega')^8}$$

ed infine:

$$detH_E = II^{'}\left(1 - \frac{3m\alpha^2\left(I + I^{'}\right)}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^4}\right)$$

calcolato in (ω, ω) ottengo :

$$detH_E = II^{'}\left(1 - \frac{3m\alpha^2\left(I + I^{'}\right)}{\left(k - \left(I + I'\right)\omega\right)^4}\right)$$

la matrice è definita positiva se

- il determinante è positivo e quindi

$$k - \left(I + I^{'}\right)\omega > \sqrt[4]{3m\alpha^2\left(I + I'\right)} \tag{5.5}$$

- la prima entrata della matrice Hessiana è positiva

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 \omega} = I\left(1 - \frac{3m\alpha^2 I}{\left(k - I\omega - I'\omega'\right)^4}\right) > 0 \tag{5.6}$$

Se una delle soluzioni dell'equazione (5.2) soddisfa la prima condizione è verificata automaticamente anche la seconda e quindi ci troviamo in un punto di minimo. Controlliamo la condizione per la soluzione minore. Avevamo stabilito

$$\omega_1 < \frac{k}{4\Delta}$$

e cioè

$$\Delta\omega_1 < \frac{k}{4}$$

Quindi :

$$k - \Delta\omega_1 > k - \frac{k}{4} = \frac{3k}{4}$$

ma la condizione 5.4 posta per avere massimo positivo di $f(\omega)$ in ω^* implica che

$$\frac{3k}{4} > \sqrt[4]{3m\alpha^2\left(I + I'\right)}$$

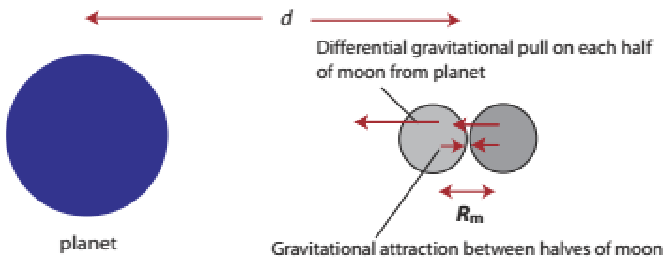
per cui (5.5) e (5.6) sono soddisfatte. Quindi ω_1 è un punto stazionario che rappresenta un minimo dell'energia, se è valida la condizione su k.

Capitolo 6

Limite di Roche

Il limite di Roche è la distanza tra primario e satellite tale per cui la forza di marea esercitata dal primario eguaglia la forza di gravità sulla superficie del secondario. Di conseguenza essa è la distanza alla quale un corpo, posto sulla superficie del satellite, tende a staccarsi dalla superficie stessa.

Per calcolare tale distanza introduciamo ora un modello teorico semplificato. Consideriamo quindi un corpo di massa M_S, che possiamo considerare il primario. Altri due corpi, di massa notevolmente inferiore m, si trovano separati tra loro da una distanza pari a $2r$. Il baricentro del sistema di questi due corpi, che si trova esattamente a metà tra i due a causa dell'uguaglianza delle masse, si trova a distanza d dal primario M_S.



Calcoliamo la forza di attrazione tra le due masse m

$$F_{att} = \frac{Gm^2}{(2r)^2} = \frac{Gm^2}{4r^2}$$

Se le due masse sono in caduta libera verso il pianeta S, significa che nel baricentro la forza di gravità del primario eguaglia la forza di inerzia del sistema, mentre la differenza tra la forza gravitazionale esercitata da S sulle due masse m rappresenta la forza di marea.

$$F_{tid} = \frac{GmM_S}{(d-r)^2} - \frac{GmM_S}{(d+r)^2} = GM_S m \frac{d^2 + r^2 + 2dr - d^2 - r^2 + 2dr}{(d+r)^2 (d-r)^2}$$

dunque:

$$F_{tid} = GM_S m \frac{4dr}{(d+r)^2 (d-r)^2}$$

Il limite di Roche è quindi la distanza minima per cui F_{tid} è inferiore a F_{att}

$$\frac{Gm^2}{4r^2} = GM_S m \frac{4dr}{(d+r)^2 (d-r)^2}$$

Suppongo $d - r \cong d + r \cong d$ e ottengo:

$$\frac{m}{M_S} = 16 \left(\frac{r}{d}\right)^3$$

da cui

$$d = r\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{\frac{M_S}{m}}$$

Ora posso sostituire le masse con le relative densità ed eliminare r nell'espressione del Limite di Roche

$$M_S = \frac{4\pi\rho_S R_S^3}{3}$$

$$m = \frac{4\pi\rho_m r^3}{3}$$

da cui

$$d = R_S\sqrt[3]{16}\left(\frac{\rho_S}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Bibliografia

[1] Eugene I. Butikov, Department of Physics, St. Petersburg State University, St. Petersburg 198904, Russia *A dinamical pictures of the oceanic tides* Am. J. Phys. 70 (10), October 2002 ;
[2] Renato Troilo, Dario Tiveron *Lezioni di meccanica analitica per Astronomia* www.astronomyproject.com settembre 2011;
[3] Marco Favretti Lecture notes *Note per il corso di meccanica analitica* 26 settembre 2015 *http : //www.math.unipd.it/ favretti/docs/MAnuovo%20copia.pdf*
[4] Corinna Schrum Lecture notes *Tides and Tidal Flow* (2006)
http : //folk.uib.no/ngfhd/Teaching/Div/Tides%20and%20tidal%20flows$_A$*.pdf*;
[5] Michael C.LoPresto *A semplified teoretical threatment and simulated experimental calculation of the Roche Limit* The physic teacher Vol. 44, September 2006.