



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento ICEA

*Corso di laurea magistrale in
ingegneria civile geotecnica*

Tesi di Laurea

**Analisi numerica del comportamento
di paratie soggette a sisma**

**Numerical analysis of embedded retaining
walls subject to seismic loading**

Laureando
Lazzari Marco

Relatore
Prof. Cortellazzo Giampaolo

A.A 2013-2014

*A tutta la mia famiglia per avermi supportato
con i loro sacrifici
in questi anni di studio e lavoro*

Ai miei animali per darmi una serenità non esprimibile a parole

Alla mia compagna che mi sta a fianco da più di dodici anni

*Infine a me stesso per la tenacia di arrivare fino a qui,
per andare avanti.*

un ringraziamento al Prof. Giampaolo Cortellazzo per la disponibilità che mi ha dato

INDICE

1 Introduzione

- 1.1 Obiettivi**
- 1.2 Struttura della tesi**

2 Conoscenze di base

- 2.1 Fondamenti di dinamica**
 - 2.1.1 Sistemi lineari ad un grado di libertà**
 - 2.1.1.1 Modello matematico**
 - 2.1.1.2 Oscillazioni libere di un sistema non smorzato**
 - 2.1.1.3 Oscillazioni libere di un sistema smorzato**
 - 2.1.1.4 Vibrazioni forzate**
 - 2.1.2 Problema sismico**
 - 2.1.3 Metodi numerici per la soluzione del problema dinamico**
 - 2.1.3.1 Metodi per l'integrazione diretta**
 - 2.1.3.1.1 Metodo generalizzato dell'accelerazione di Newmark**
 - 2.1.3.2 Stabilità dell'errore computazionale**
 - 2.2 Onde sismiche e loro propagazione nel sottosuolo**
 - 2.2.1 Attenuazione delle onde sismiche**
 - 2.2.2 Strato omogeneo elastico su substrato rigido**
 - 2.3 Analisi di risposta sismica del suolo**
 - 2.3.1 Parametri di ampiezza**
 - 2.3.1.1 Accelerazione di picco**
 - 2.3.1.2 Velocità di picco**
 - 2.3.1.3 Altri parametri di amplificazione**
 - 2.3.2 Contenuto in frequenza**
 - 2.3.3 Spettro sismico**
 - 2.3.4 Durata del terremoto**
 - 2.4 Proprietà dinamiche del suolo**
-

-
- 2.5 Modellazione e analisi del comportamento tensione-deformazione di terreni soggetti a carichi ciclici**
 - 2.5.1 Modello lineare equivalente**
 - 2.5.2 Modelli non lineari ciclici**

 - 3 Collasso dei diaframmi a moto sismico**
 - 3.1 Risultati sperimentali di prove su modello**
 - 3.2 Confronto fra analisi di equilibrio limite, pseudo-statiche e dinamiche**

 - 4 Modellazione numerica**
 - 4.1 Modello costitutivo del terreno ipoplastico**
 - 4.1.1 Introduzione**
 - 4.1.2 Specifiche per materiali granulari**
 - 4.1.3 Deformazione intergranulare**

 - 5 Modello geometrico e mesh di analisi**
 - 5.1 Geometria**
 - 5.2 Condizioni al contorno**
 - 5.3 Mesh**
 - 5.4 Infittimento della mesh**

 - 6 Descrizione solutore e elementi utilizzati**
 - 6.1 Impostazione dell'analisi**
 - 6.2 Elementi finiti utilizzati**
 - 6.2.1 Elemento area triangolare**
 - 6.2.2 Elemento interfaccia**
 - 6.2.3 Elemento plate**
 - 6.2.4 Elemento fixed-end anchor**
 - 6.2.5 Elemento Dashpot**
-
-

7 Validazione del modello

7.1 Parametri dell'interfaccia terreno-struttura

7.2 Frequenze naturali del deposito di terreno

7.3 Determinazione dello smorzamento numerico

7.3.1 Formulazione teorica

7.4 Dimensione massima degli elementi

7.5 Determinazione del passo temporale di integrazione

8 Dati di input del moto sismico

9 Analisi e interpretazione dei risultati

9.1 Analisi del comportamento dell'interfaccia

9.1.1 Velocità di convergenza e stabilità

9.1.2 Effetti della variazione dell'interfaccia sulla paratia

9.1.3 Andamenti tensionali all'interfaccia

9.1.4 Risultati dell'analisi dinamica

9.1.5 Spostamenti in direzione verticale

9.1.6 Variazione dell'indice dei vuoti

10 Conclusioni

11 Bibliografia

1 Introduzione

I metodi tradizionali del calcolo delle paratie, sia in campo statico, con i metodi di free-earth-support e di fixed-earth-support, che in campo dinamico, con i metodi pseudo-statici, prescindono dall'interazione terreno-struttura. Questi sono buoni metodi di progettazione, ma non soddisfano la moderna richiesta di conoscenza delle prestazioni reali dell'opera, sia in termini di spostamenti che in termini di interazione terreno-struttura. Dall'interazione terreno-struttura deriva una marcata differenza in termini di sollecitazioni sulla parte strutturale dell'opera che si riflette nel suo dimensionamento. Le paratie puntellate in testa rappresentano una categoria di opere che richiede un costo elevato per cui si è spinti a ricercare metodi che portano ad una progettazione più "spinta", cioè una progettazione che riduca eccessivi margini di sicurezza. La normativa stessa richiede il rispetto dell'operatività dell'opera, che non maturi nel tempo spostamenti eccessivi, calcolabili attraverso un approccio numerico. Inoltre il collasso di queste opere in termini di spostamenti o, più gravemente, di collasso non è ammissibile e i metodi numerici possono mettere in luce comportamenti che i metodi tradizionali, basati sull'ipotesi rigido-plastica del terreno, non possono rilevare. Tutti questi aspetti richiedono che la progettazione e l'analisi di stabilità di una paratia venga svolta mediante modelli numerici. Nel tempo sono stati proposti vari leggi costitutive per modellare il terreno di sempre maggiore complessità. Queste possono meglio rappresentare i vari fenomeni che accadono nel terreno dall'evoluzione dei cedimenti fino al collasso. Mentre la progettazione e verifica con modelli numerici si è ormai affermata, grazie anche al notevole sviluppo tecnologico e al costo sempre più contenuto della tecnologia, la modellazione con legami costitutivi avanzati ha trovato maggiore difficoltà di diffusione. I modelli di terreno via via più complessi hanno trovato una certa difficoltà nell'affermarsi, principalmente per le seguenti ragioni:

- la difficoltà dei tecnici del settore di "staccarsi" dalla progettazione con il modello di Mohr-Coulomb nel quale sono richiesti pochi parametri e di chiaro significato fisico
- l'incremento di spesa nelle indagini e prove geotecniche, in quanto legami costitutivi più complessi necessitano di un maggior numero di prove per la loro corretta calibrazione
- l'inserimento di un elevato numero di parametri, di non chiaro significato fisico, rende più difficile la validazione del modello utilizzato per l'analisi

A fronte di queste difficoltà i modelli costitutivi avanzati restano l'unica strada per un calcolo più accurato delle sollecitazioni sulla paratia, della previsione degli spostamenti e dello studio dell'effettiva prestazione dell'opera.

L'analisi in campo dinamico con accelerogrammi risulta il settore di ricerca più avanzato e più complesso. La normativa permette l'analisi con accelerogrammi come metodo di verifica

dell'opera e richiede il rispetto di vari limiti in funzione dello stato limite considerato. Gli accelerogrammi da utilizzare devono essere almeno tre e scalati a seconda della massima intensità sismica attesa per il luogo in cui si realizza l'opera, inoltre devono essere registrati; non sono ammessi sismi simulati anche se spettro compatibili.

L'analisi dinamica con accelerogrammi richiede un incremento di difficoltà legato a:

- definizione delle condizioni al contorno che imitano il comportamento del terreno al di fuori del dominio rappresentato nel modello
- smorzamento del materiale e numerico, da tarare in funzione delle frequenze naturali del terreno e di quelle principali del sisma

La non linearità è il comportamento peculiare del terreno e il modello costitutivo deve rappresentarla nel modo più corretto. La non linearità porta con se tempi di calcolo maggiori e una maggiore complessità nella taratura del materiale.

1.1 Obiettivi

La tesi prende in esame la risposta dinamica non lineare del terreno soggetto a sisma. Si considera un terreno sabbioso rappresentato nel modello numerico da un modello costitutivo avanzato non lineare detto di ipoplasticità. Lo studio si riferisce ad un'opera di sostegno puntellata in testa. Nell'analisi del comportamento dell'opera in oggetto si esegue uno studio di come i vari parametri, che definiscono il comportamento dell'interfaccia struttura-terreno, influiscano sulla risposta del problema. Infine si assoggetta l'opera ad una successione di sismi e si studia il comportamento della struttura e l'andamento della tensione e delle deformazioni cumulate.

1.2 Struttura della tesi

La tesi si struttura seguendo un processo logico di studio del problema in analisi.

Nel capitolo 2 vengono trattate le conoscenze di base della dinamica: gli aspetti fondamentali di un corpo sollecitato da un'azione transitoria e lo studio del problema sismico e di come lo si affronta con un approccio di tipo numerico. Successivamente vengono studiate le onde sismiche e la loro propagazione nel sottosuolo e la non linearità del materiale sotto i vari aspetti qualitativi e quantitativi con il comportamento ricavato da prove di laboratorio.

Nel capitolo 3 si affronta il collasso di paratie secondo la bibliografia di prove su modelli e analisi numeriche.

Nel capitolo 4 si approfondisce il legame costitutivo ipoplastico per sabbie e la sua calibrazione

con le prove di laboratorio.

Nel capitolo 5 si espone il modello geometrico e la mesh utilizzata con la sua discretizzazione.

Nel capitolo 6 si descrive il solutore utilizzato e gli elementi finiti atti a rappresentare le varie parti che compongono l'opera.

Nel capitolo 7 si approfondisce la validazione del problema sotto i vari aspetti che lo compongono:

- il modello e la sua semplificazione in problema piano e simmetrico
- la mesh e la dimensione degli elementi, nel rispetto delle condizioni poste di accuratezza dei risultati in campo statico e dinamico
- il comportamento statico dell'opera post scavo e il rispetto dei vincoli come prima forma di controllo dell'input dato al software

Nel capitolo 8 si illustrano i tre input sismici scelti con cui sollecitare l'opera.

Nel capitolo 9 si illustrano i risultati delle analisi dell'opera e il suo comportamento, nelle varie condizioni, con l'ausilio dei contours per le immagini e di grafici.

Nel capitolo 10 si espongono le conclusioni derivate dal lavoro di tesi.

2 Conoscenze di base

2.1 Fondamenti di dinamica

Lo studio della risposta dinamica è il primo passo verso la comprensione del complesso comportamento delle opere soggette a sisma. Per questa complessità la scelta migliore è di suddividere l'aspetto dinamico in varie parti iniziando dalla sua trattazione matematica attraverso modelli semplici come massa, molla e smorzatore. Successivamente si amplia lo studio delle singole componenti e se ne valuta la loro influenza nel sistema globale.

2.1.1 Sistemi lineari ad un grado di libertà

I sistemi lineari ad un grado di libertà sono i sistemi più semplici, ma sufficienti a rappresentare qualitativamente e quantitativamente molti aspetti di sistemi soggetti a sisma.

2.1.1.1 Modello matematico

Nei sistemi ad un grado di libertà si considerano le forze d'inerzia concentrate in una singola massa m che può scorrere lungo una direzione generica x come in fig.2.1.1.1-1

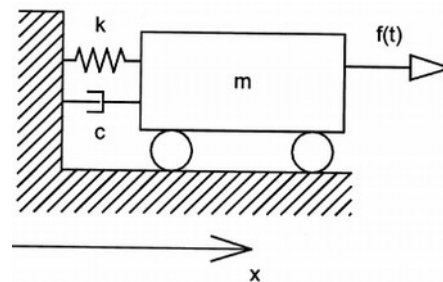


Fig.2.1.1.1-1 Modello SDOF

dove sono indicati:

$f(t)$ = forza dinamica variabile nel tempo

m = massa del sistema

$x(t)$ = spostamento relativo della massa m in un sistema di riferimento solidale alla base

k = rigidezza del sistema (forza statica richiesta per indurre uno spostamento unitario)

c = coefficiente di smorzamento viscoso equivalente del sistema (forza dinamica richiesta per indurre una velocità unitaria)

Lo smorzamento viscoso è introdotto per rappresentare la dissipazione di energia originata dalla concomitanza di varie cause durante la vibrazione del sistema.

Per tale sistema in un generico istante t la legge del moto è data dalla legge di Newton

$$F = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x}$$

Le forze che agiscono sulla massa m sono:

- la forza di richiamo elastica, proporzionale allo spostamento x tramite la rigidità k

$$F_{el} = -k \cdot x$$

- la forza di attrito, generalmente considerata proporzionale alla velocità tramite il coefficiente di dissipazione viscosa c

$$F_{attr} = -c \cdot \dot{x}$$

- una generica forzante $f(t)$ applicata al corpo.

La forza F è quindi una somma di queste tre forze applicate alla massa m

$$F = F_{el} + F_{attr} + F_{est} = -k \cdot x - c \cdot \dot{x} + f(t)$$

per cui sostituendo questa forza nella legge di Newton ricavo

$$-k \cdot x - c \cdot \dot{x} + f(t) = m \cdot \ddot{x}$$

o esplicitando la forzante

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t)$$

Questa ultima equazione è nota come equazione di equilibrio dinamico di un sistema ad un grado di libertà, nella quale si assume che le proprietà del sistema m, k, c rimangano costanti durante le vibrazioni del sistema e la forza $f(t)$ dipenda esclusivamente dal tempo. La funzione $x(t)$ rappresenta la risposta della struttura e gli altri parametri cinematici del problema si ricavano da essa tramite derivazione ricavando velocità e accelerazione. Moltiplicando lo spostamento $x(t)$ per la rigidità k si ottengono le forze elastiche e da queste le sollecitazioni a cui è sottoposto il sistema.

Nel caso in cui non si consideri la velocità di variazione delle azioni si ottiene un problema statico nel quale le azioni variano lentamente nel tempo, per cui si assume $f(t) = f$, cioè una forzante costante nel tempo, conseguentemente l'accelerazione e la velocità assumono valori piccoli divenendo trascurabili le forze di inerzia e di attrito.

L'equazione di moto si riduce a

$$-k \cdot x + f = 0$$

cioè

$$f = k \cdot x$$

equazione in una sola incognita di diretta determinazione.

2.1.1.2 Oscillazioni libere di un sistema non smorzato

Nel caso in cui si trascurino le forze di attrito e si supponga che il sistema non sia soggetto ad alcuna forzante esterna, il modello spaziale è identificato esclusivamente dalla massa m e dalla rigidità k . L'equazione del moto diviene:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

da cui si ottiene la soluzione:

$$x(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0)$$

nella quale R rappresenta l'ampiezza, ovvero il valore massimo raggiunto dallo spostamento, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ rappresenta la fase all'istante t , φ_0 la fase all'istante iniziale e ω la frequenza circolare o pulsazione del sistema.

Sostituendo la soluzione nell'equazione precedente si ottiene:

$$-m\omega^2 \cdot R \sin(\omega t + \varphi_0) + k \cdot R \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

in cui si è posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Il moto libero non smorzato è costituito quindi da oscillazioni sinusoidali, la cui frequenza è determinata dal valore della pulsazione ω che è una costante caratteristica del sistema, funzione del rapporto tra la rigidità k e la massa m . Il tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa è il periodo T , in genere espresso in secondi

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La frequenza propria di oscillazione (o frequenza naturale), espressa in Hertz, ovvero in numeri di cicli nell'unità di tempo è l'inverso del periodo.

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

L'ampiezza R e la fase iniziale φ_0 si ricavano dalle condizioni iniziali del moto, del tipo:

$$x_0 = x(0)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$$

Risolvendo questo sistema di due equazioni si ottiene:

$$R = \frac{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2}}{\omega}$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\omega \cdot x_0}{\dot{x}_0}$$

2.1.1.3 Oscillazioni libere di un sistema smorzato

La risposta del modello studiato nel caso precedente implica oscillazioni che si protraggono per un tempo infinito. Questo contrasta con l'osservazione del comportamento di sistemi reali nei quali si nota che, in assenza di forzanti esterne, l'ampiezza delle oscillazioni si smorza con il tempo. Questo smorzamento è dovuto alla dissipazione di energia che coincide con il lavoro svolto da forze di attrito. Nel caso di vibrazioni in campo elastico lo smorzamento del materiale appare macroscopicamente con le caratteristiche di smorzamento puramente viscoso, ossia nel quale la forza di smorzamento è proporzionale alla velocità.

$$F_{smorz} = c \cdot \dot{x}$$

In realtà nel caso di comportamento non elastico, l'ipotesi di smorzamento puramente viscoso non è corretta. Vi sono altre cause all'origine dello smorzamento del materiale tra cui:

- lo smorzamento indotto dalle forze di attrito (in cui la forza di attrito è costante)
- lo smorzamento interno in cui la forza è proporzionale all'ampiezza dello spostamento

Tuttavia si utilizza quasi sempre uno smorzamento viscoso equivalente a causa della sua convenienza matematica.

L'equazione differenziale del moto da risolvere è quindi:

$$m\ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

Si può dimostrare che la soluzione è del tipo:

$$x(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

con A e B costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali e con:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km}$$

La soluzione sarà composta da radici reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate a seconda del valore positivo, nullo o negativo del radicando

$$c^2 - 4km$$

Si definisce smorzamento critico, il valore dello smorzamento per il quale si ha l'annullamento del discriminante

$$c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{km}$$

Esso individua il valore al di sopra del quale non si ha oscillazione. Si definisce fattore di smorzamento, il rapporto tra lo smorzamento effettivo c del sistema e lo smorzamento critico c_{cr}

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}$$

pertanto le radici si possono scrivere come

$$S_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

e risulta quindi evidente che la risposta del sistema è determinata dal valore assunto dal fattore di smorzamento.

Moto sottocritico

Per $0 < \xi < 1$ il discriminante è negativo e le due radici sono complesse coniugate

$$S_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_d$$

con $i = \sqrt{-1}$ $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$

La soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t})$$

Utilizzando le formule di Eulero, che esprimono la relazione tra funzioni trigonometriche ed esponenziali, l'equazione precedente può essere riscritta nella forma:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)]$$

Imponendo le condizioni iniziali a $t = 0$

$$x_0 = x(0)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$$

si valutano le costanti di integrazione. Si ottiene quindi

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t) \right]$$

dove ω_d è la frequenza circolare del sistema smorzato.

Questa equazione può essere riscritta nella forma

$$x(t) = R e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

dove R e φ_0 sono costanti determinabili in funzione delle condizioni iniziali, pari a:

$$R = \frac{\sqrt{(\dot{x}_0 + \xi\omega x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}}{\omega_d} \quad \varphi_0 = \arctan \frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}$$

La soluzione del sistema evidenzia che la risposta del sistema è data da un moto armonico smorzato di pulsazione ω_d , con ampiezza $R e^{-\xi\omega t}$ decrescente nel tempo. Una rappresentazione

dello spostamento $x(t)$ in funzione del tempo è riportata in fig.2.1.1.3-1

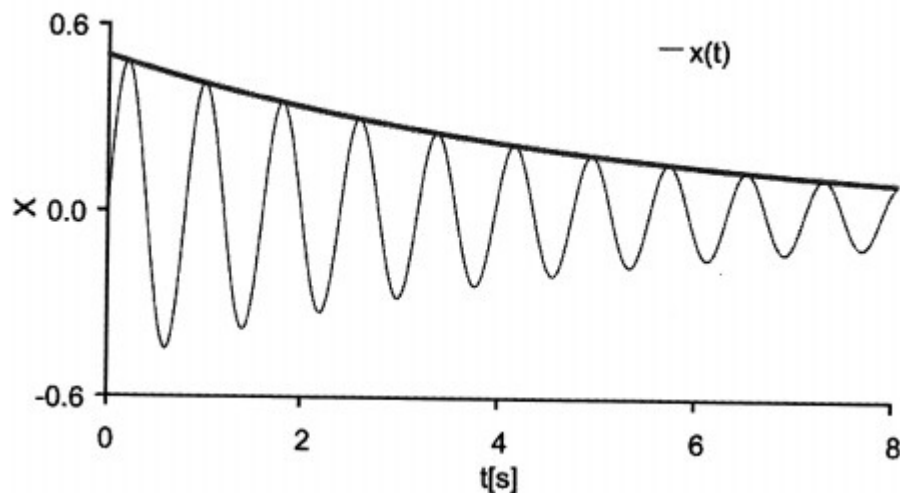


Fig.2.1.1.3-1 Moto armonico smorzato in condizioni sottocritiche

Come si può notare la pulsazione del sistema smorzato ω_d è inferiore a quella del ω corrispondente al sistema non smorzato. Tuttavia il fattore di smorzamento è generalmente così piccolo da rendere la differenza trascurabile. Per esempio per un fattore di smorzamento del 15% si ha

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - 0.15^2} = 0.99\omega \cong \omega$$

Moto critico

Per $\xi = 1$ il discriminante è nullo e le due radici sono reali e coincidenti.

La soluzione può essere scritta nella forma

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega t}$$

Dove C_1 e C_2 sono costanti che possono essere determinate una volta note le condizioni iniziali del moto, posto:

$$x_0 = x(0)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$$

la soluzione è:

$$x(t) = x_0 \left[1 + \left(\omega + \frac{\dot{x}_0}{x_0} \right) t \right] e^{-\omega t}$$

Per tale valore dello smorzamento il moto non presenta quindi carattere oscillatorio: la massa m tende asintoticamente allo stato di quiete senza oscillare rispetto alla configurazione di equilibrio.

Moto sovracritico

Per $\xi > 1$ il discriminante è positivo e le due radici sono reali e distinte.

$$S_{1,2} = \xi\omega \pm \omega_s$$

posto

$$\omega_s = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

La soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 e^{\omega_s t} + C_2 e^{-\omega_s t})$$

Anche in questo caso il moto non presenta carattere oscillatorio, essendo costituito da un graduale ritorno del sistema verso la posizione di equilibrio. In generale questa soluzione tende meno velocemente a zero di quella del caso precedente. Dallo studio dei casi possibili, in funzione del valore assunto dallo smorzamento, si può notare come lo smorzamento critico c_{cr} sia quel valore che separa il campo del moto oscillatorio dal moto non oscillatorio.

2.1.1.4 Vibrazioni forzate

Nel caso più generale, oltre alle forze elastiche dovute alla rigidità del sistema ed alle forze di smorzamento, dovrà essere considerata anche la forzante esterna $f(t)$. L'equazione del moto è pertanto:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t)$$

In campo dinamico ci possono essere vari tipi di forzanti:

- Le forze casuali o random, che hanno carattere transitorio e possono essere causate da terremoti, moto ondoso, vento ecc. In questo caso $f(t)$ è una funzione descrivibile solo in termini probabilistici.
- Le forze deterministiche la cui ampiezza, direzione, verso e posizione sono note ad ogni istante e catalogabili come:
 - Le forzanti periodiche che sono ripetitive e presentano lo stesso andamento temporale per molti cicli. Un caso particolare di questa categoria di forze sono le forzanti armoniche che possono essere indotte da macchine con parti rotanti.
 - Le forzanti non periodiche possono essere brevi (impulso) o di lunga durata ma senza periodicità. Degli esempi di forzanti impulsive sono urti, impatti, esplosioni e collassi per cedimenti improvvisi.

2.1.2 Problema sismico

Per una struttura, soggetta ad un terremoto alla base, la causa dell'eccitazione non è una forzante esterna $f(t)$ applicata direttamente alla struttura ma è una forza d'inerzia risultante dal moto impresso alla base a carattere transitorio.

Con riferimento alla fig.2.1.2-1 le forze di inerzia generate dalla massa del sistema sono proporzionali all'accelerazione totale del sistema, mentre le forze elastiche sono proporzionali allo spostamento relativo alla base e le forze di smorzamento sono proporzionali alla velocità relativa alla base. Se con x_g viene indicata la posizione della base della struttura rispetto al sistema di riferimento assoluto le forze inerziali possono essere scritte nella forma seguente:

$$m\ddot{x}_t = m(\ddot{x}_g + \ddot{x})$$

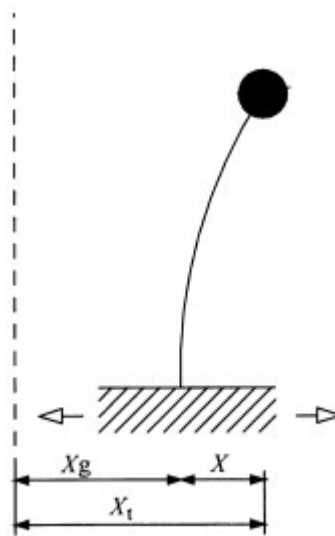


Fig. 2 .1.2-1 Problema sismico

Sostituendo l'equazione precedente nell'equazione di equilibrio dinamico e posta la condizione che $f(t) = 0$ si ottiene che:

$$m \cdot \ddot{x}_t + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

riscrivibile come:

$$m\ddot{x}_g + m\ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

ed esplicitando l'accelerazione relativa:

$$m\ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = -m\ddot{x}_g$$

risulta evidente che il moto di un sistema soggetto ad uno spostamento impresso ai vincoli, può essere ricondotto a quello di un oscillatore con base fissa e soggetto ad una forzante esterna

$$f(t) = -m\ddot{x}_g$$

proporzionale alle accelerazioni della base tramite il valore assunto per la massa strutturale m . Da queste considerazioni risulta chiaro che per poter determinare la risposta di una struttura soggetta a sisma è indispensabile conoscere l'andamento nel tempo delle accelerazioni, ovvero l'accelerogramma dello scuotimento del terreno.

Risposta ad un impulso

Al fine di sviluppare un metodo generale per risolvere l'equazione del moto soggetto ad una arbitraria forza dinamica, si considera prima la risposta di un sistema ad un impulso di breve durata come in fig. 2.1.2-2

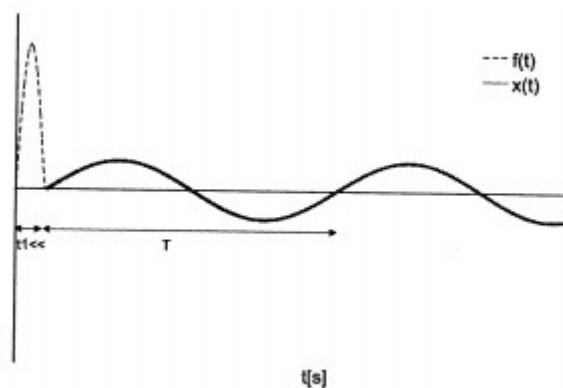


Fig.2.1.2-2 Forzante impulsiva e risposta di un oscillatore semplice

Una forza che agisce per un periodo molto breve t_1 , ma con un integrale nel tempo finito è chiamata forza impulsiva. In questo caso la durata del contatto t_1 è molto inferiore al periodo naturale del sistema T , pertanto l'impulso può essere trattato come una variazione istantanea di velocità. Si può assumere che non vi sia una significativa variazione di spostamento della massa durante il periodo di applicazione della forzante, in altre parole il sistema non ha il tempo di reagire durante l'intervallo di tempo t_1 .

A partire dalla seconda legge di Newton, se una forza $f(t)$ agisce su un corpo di massa m costante, la derivata della quantità di moto nel tempo del corpo è uguale alla forza applicata:

Integrando entrambe le parti rispetto al tempo t si ottiene:

$$\int_0^{t_1} f(\tau) d\tau = m\dot{x}(t_1) - m\dot{x}(0) = m\dot{x}(t_1)$$

L'equazione stabilisce che l'impulso della forza è uguale alla variazione della quantità di moto.

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m \frac{d}{dt}(\dot{x}) = m\ddot{x} = f(t)$$

Al termine dell'impulso il sistema si trova in una condizione di vibrazione libera soggetto alle seguenti condizioni iniziali:

$$\dot{x}(t_1) = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau$$

$$x(t_1) \cong 0$$

La risposta del sistema è quindi ottenuta sostituendo queste condizioni iniziali nell'equazione soluzione del moto sottocritico smorzato:

$$x(t-t_1) = e^{-\xi\omega(t-t_1)} \left[\frac{\frac{1}{m} \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau}{\omega_d} \sin \omega_d(t-t_1) \right] = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau e^{-\xi\omega(t-t_1)} \sin \omega_d(t-t_1)$$

Nel caso particolare di un impulso rettangolare che agisce per un intervallo Δt la risposta del sistema è data da:

$$x(t-t_1) = \frac{1}{m\omega_d} f \Delta t e^{-\xi\omega(t-t_1)} \sin \omega_d(t-t_1)$$

Risposta ad una arbitraria forzante dinamica: l'integrale di Duhamel

La risposta di un sistema ad un grado di libertà soggetto ad un impulso può essere utilizzata per dedurre la risposta dello stesso sistema soggetto ad una forza arbitraria $f(t)$. Qualsiasi forza dinamica può essere rappresentata da una successione di impulsi.

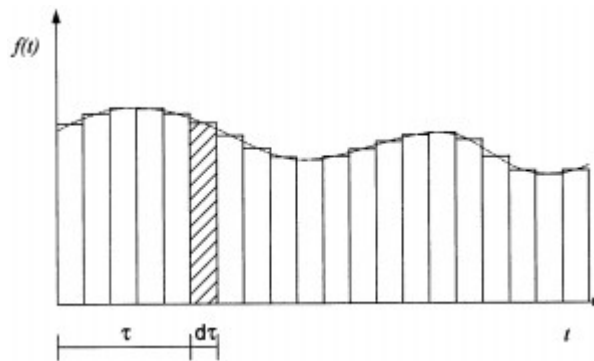


Fig.2.1.2-3 Arbitraria forza dinamica rappresentata da una successione di impulsi rettangolari

Si consideri un impulso specifico di durata infinitesima $d\tau$ ad un tempo τ dopo l'inizio dell'applicazione della forza. Questo impulso specifico produce una risposta infinitesima al tempo t data dall'equazione:

$$dx(t) = \frac{1}{m\omega_d} f(\tau) d\tau e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) \quad t \geq \tau$$

La risposta del sistema al tempo t è ottenuta per integrazione delle risposte infinitesime fino al tempo t :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

L'equazione sopra riportata è detta integrale di Duhamel ricavata ricorrendo al principio di sovrapposizione degli effetti, pertanto valida solo per sistemi lineari. Se la forza $f(t)$ fosse rappresentata da una funzione matematica, l'integrale di Duhamel potrebbe essere risolto direttamente. Nella pratica è spesso necessario ricorrere all'integrazione numerica, specialmente nel caso di scuotimento sismico.

Nel caso in cui le condizioni iniziali non siano nulle per $t = 0$, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, la risposta del sistema è ottenuta sovrapponendo alla risposta libera smorzata (integrale generale) la risposta forzata (integrale particolare):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t) \right] + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

Forzante armonica

Il caso più semplice di vibrazioni forzate è quando la forzante è armonica con variazione sinusoidale nel tempo, ad esempio:

$$f(t) = f_0 \cdot \sin(\omega_1 t)$$

$$x_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = 0$$

dove f_0 rappresenta l'intensità massima della forzante e ω_1 la sua frequenza.

Questo tipo di eccitazione è molto comune perchè corrisponde a quella prodotta da macchine con parti rotanti. La soluzione di questo caso può essere utilizzata in modo alternativo alla procedura precedente per calcolare la risposta di un sistema ad eccitazioni generiche, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti e la scomposizione in serie di Fourier della forzante. L'equazione del moto in assenza di smorzamento diventa:

$$\xi = 0 \text{ e } \omega_d = \omega \qquad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = f_0 \sin(\omega_1 t)$$

da cui risulta la soluzione al problema:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f_0 \sin \omega_1 \tau \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) = \frac{f_0}{m\omega^2} \left[\int_0^t \sin \omega_1 \tau (\sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau) d\tau \right]$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \left[\sin \omega t \int_0^t \sin \omega_1 \tau \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t \sin \omega_1 \tau \sin \omega \tau d\tau \right]$$

infine:

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1-\alpha^2} [\sin \omega_1 t - \alpha \sin \omega t]$$

risposta composta dai termini

$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega}$	Rapporto tra le frequenze circolari
$\frac{f_0}{k} = x_{st}$	Spostamento statico
$\frac{1}{1-\alpha^2}$	Fattore di amplificazione dinamica
$\sin \omega_1 t$	Risposta stazionaria
$\sin \omega t$	Risposta nel transitorio

In questo caso, sistema non smorzato, la risposta nel transitorio continua indefinitamente mentre in presenza di smorzamento essa si esaurisce rapidamente. Considerando il valore assoluto del fattore di amplificazione dinamica, si vede in fig. 2.1.2-4 come la risposta stazionaria del sistema diventi infinita quando la frequenza della forzante uguaglia la frequenza naturale del sistema per $\alpha = 1$.

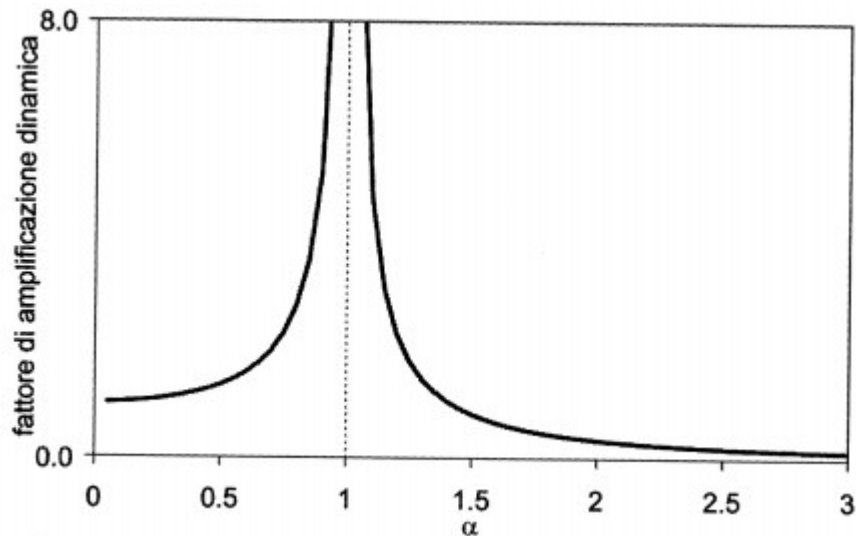


Fig.2.1.2-4 Risposta in frequenza di un sistema ad un grado di libertà non smorzato

Questo fenomeno è chiamato risonanza. Nella pratica l'ampiezza in condizioni di risonanza ha un valore finito per la presenza di smorzamento. In questa condizione di $\alpha = 1$ la soluzione

precedente non è più valida. La soluzione particolare è:

$$x(t) = \frac{f_0}{2k} \omega t \cos \omega t \quad \omega = \omega_1$$

Si tratta di un moto oscillatorio la cui ampiezza cresce linearmente con il tempo.

Non c'è quindi un limite superiore all'ampiezza delle oscillazioni.

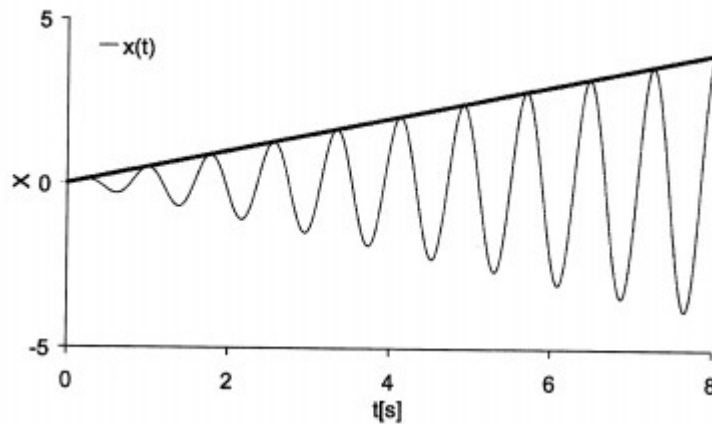


Fig.2.1.2-5 Condizioni di risonanza di un sistema non smorzato

Questo comportamento non è evidentemente rappresentativo dei sistemi reali, nei quali si riscontra che, dopo un periodo iniziale transitorio nel quale si ha una crescita dell'ampiezza massima delle oscillazioni, si arriva ad una situazione di regime caratterizzata da oscillazioni di ampiezza costante. Questa diversità di risposta è imputabile al fatto di aver trascurato lo smorzamento del sistema. Nel modello di oscillatore non smorzato la forzante esterna compie un lavoro sul sistema e, in mancanza di dissipazione, l'energia accumulata dal sistema aumenta senza limiti di tempo.

L'equazione del moto in presenza di smorzamento diventa:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f_0 \sin(\omega_1 t)$$

la soluzione del sistema diventa quindi:

$$x(t) = \frac{f_0}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_1 \tau \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{f_0}{m\omega\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_1 \tau \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

si può dimostrare che la soluzione alla precedente è

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t] + x_{st} \beta [(1-\alpha^2) \sin \omega_1 t - 2\xi\alpha \cos \omega_1 t]$$

dove C_1 e C_2 sono costanti di integrazione a partire dalle condizioni iniziali.

Inoltre si pongono i termini:

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega}$$

$$x_{st} = \frac{f_0}{k}$$

$$\beta = \frac{1}{(1-\alpha^2)^2 + (2\xi\alpha)^2}$$

Nell'equazione precedente il primo termine rappresenta la risposta nel transitorio del sistema che si esaurisce rapidamente e non contribuisce alla soluzione a regime per la presenza del fattore esponenziale con esponente negativo.

Il secondo termine rappresenta la risposta forzata (stato stazionario) che può essere scritta come:

$$x(t) = x_{st} \sqrt{\beta} \sin(\omega_1 t - \Phi)$$

dove si è posto

$$\Phi = \arctan \frac{2\xi\alpha}{1-\alpha^2} \quad 0 \leq \Phi \leq 180^\circ$$

Il moto è costituito quindi da un'oscillazione armonica di ampiezza e fase dipendenti dalla forzante, mentre la frequenza coincide con quella della forzante. Lo sfasamento rappresenta il ritardo con il quale il sistema segue l'andamento della forzante. L'ampiezza può essere amplificata o meno rispetto a quella della forzante.

Il rapporto $\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2\xi\alpha)^2}}$

è detto coefficiente di amplificazione dinamica (o di amplificazione della risposta statica) ed è particolarmente significativo perchè, se assume valori superiori all'unità, l'effetto in termini di deformazioni della forza, applicata in modo dinamico, risulta superiore al corrispondente effetto statico. Questo coefficiente è funzione del rapporto α e del fattore di smorzamento ξ .

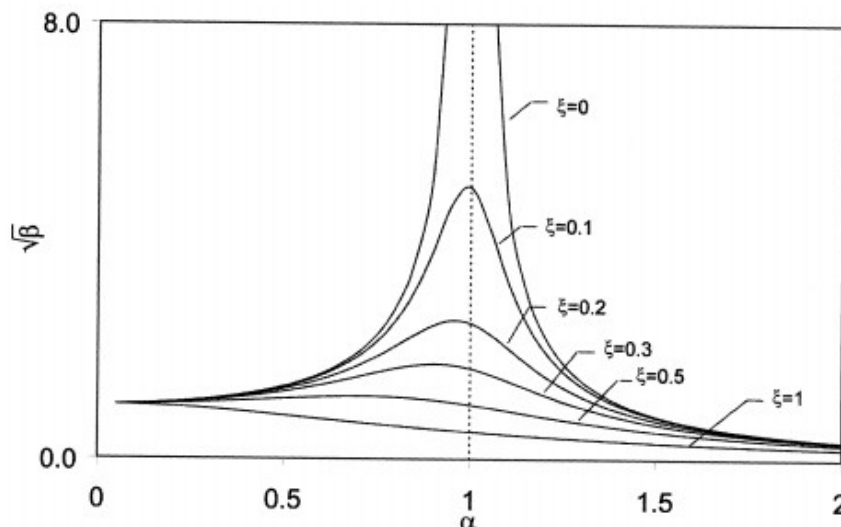


Fig.2.1.2-6 Coefficiente di amplificazione dinamica

Dall'osservazione della fig. 2.1.2-6 si possono trarre importanti informazioni sulla risposta del sistema ad eccitazioni di questo tipo. Considerando l'andamento del coefficiente di amplificazione dinamica al variare del rapporto α il diagramma può essere suddiviso in tre zone:

- Per $\alpha \ll 1$ e quindi quando l'intensità della forzante varia nel tempo con un periodo che è molto lungo rispetto al periodo proprio della struttura, il coefficiente di amplificazione dinamica assume valori vicini all'unità indicando che la risposta dinamica non si allontana dalla risposta statica. La massa segue la forzante come in un fenomeno statico.
- Quando il rapporto $\alpha \approx 1$ ovvero quando la frequenza della forzante si avvicina a quella della struttura, il coefficiente di amplificazione dinamica diventa superiore all'unità e la risposta dinamica può divenire molto più gravosa della corrispondente risposta statica. Si è nella condizione di risonanza.
- Per $\alpha \gg 1$ si ha che la frequenza della forzante è alta rispetto alla frequenza propria della struttura, la massa del sistema non è in grado di seguire le rapide fluttuazioni della forzante, quindi il sistema rimane stazionario. Si ha che per frequenze della forzante infinitamente alte rispetto a quelle della struttura, quest'ultima non subisce nemmeno l'azione di risposta statica. Questo succede per strutture molto flessibili che hanno un periodo proprio molto grande per cui, per alte frequenze dell'eccitazione, la struttura non sente l'effetto della forzante.

Considerando invece l'effetto del fattore di smorzamento sul coefficiente di amplificazione dinamica, si osserva che la sua influenza è particolarmente significativa in corrispondenza delle condizioni di risonanza, ove valori alti dello smorzamento comportano una benefica riduzione dell'ampiezza di oscillazione.

La fig.2.1.2-7 riporta l'andamento della differenza di fase tra forzante e risposta del sistema.

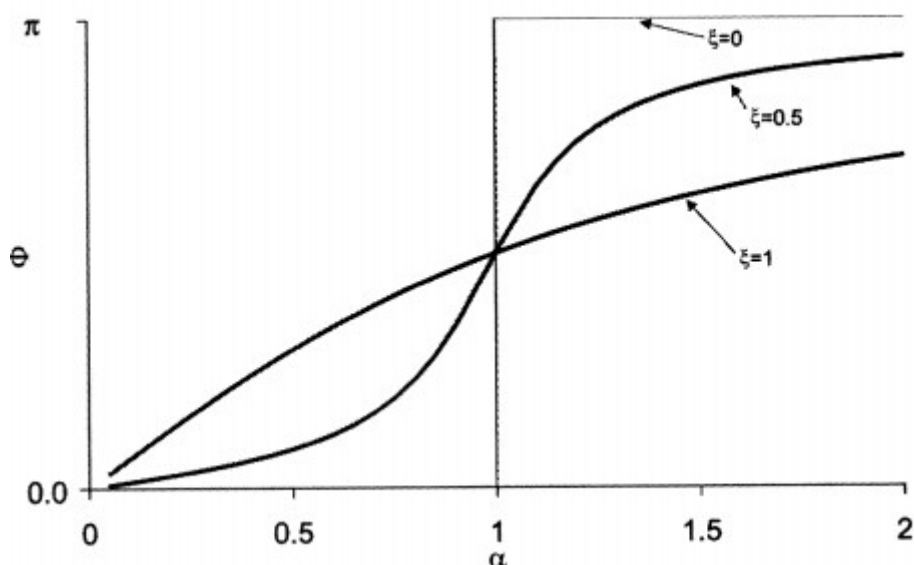


Fig. 2.1.2-7 Diagramma della differenza di fase

Si osserva che, se la frequenza della forzante è bassa rispetto alla frequenza propria della struttura, per $\alpha \ll 1$ la forzante varia con lentezza, per cui forzante e risposta del sistema sono in fase mentre per $\alpha \gg 1$ lo sfasamento tende al valore di π .

Nelle condizioni di risonanza lo sfasamento assume il valore $\pi/2$. L'effetto dello smorzamento è quello di eliminare i punti singolari del diagramma della differenza di fase. Nel caso particolare di risonanza l'equazione soluzione diventa:

$$x(t) = x_{st} \frac{1}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_d t \right) - \cos\omega_1 t \right]$$

Questo risultato è diagrammato nella figura seguente per un sistema con $\xi = 5\%$.

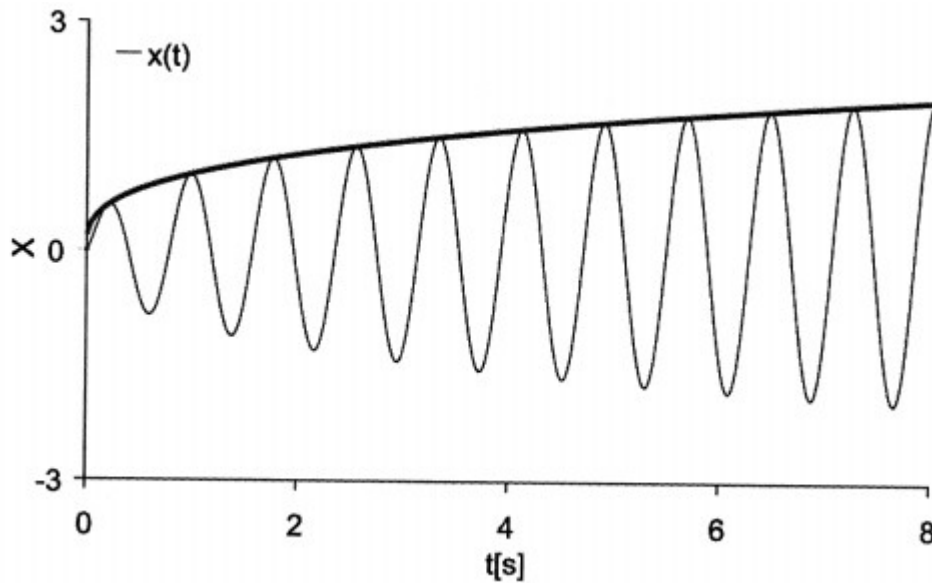


Fig. 2.1.2-8 Condizioni di risonanza di un sistema smorzato

Nella prima fase transitoria l'ampiezza delle oscillazioni aumenta ma, al crescere delle oscillazioni, aumenta anche l'energia dissipata. Gradualmente viene raggiunto l'equilibrio tra l'energia fornita dal lavoro della forzante esterna e l'energia dissipata: l'oscillatore vibra con ampiezza pressochè costante nel tempo (situazione di regime). Per sistemi poco smorzati

$$\xi \cong 0 \text{ e } \omega_1 = \omega \cong \omega_d$$

il termine sinusoidale è piccolo e si ottiene:

$$x(t) = x_{st} \underbrace{\frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1)}_{\text{funzione involuppo}} \cos\omega_1 t$$

La deformazione varia nel tempo come una funzione coseno, con una ampiezza crescente con il tempo, in accordo con l'involuppo indicato in fig.2.1.2-8

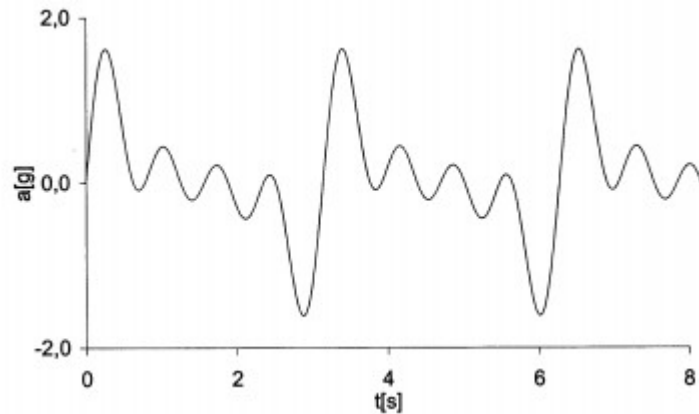
Forzante periodica

Fig.2.1.2-9 Forzante periodica

Una forzante periodica $f(t)$ è una forzante che si ripete identicamente nel tempo ad intervalli costanti (periodo). Sotto ipotesi abbastanza generali (teorema di Dirichlet) e, comunque sufficienti per i problemi pratici, ogni funzione periodica e continua può essere rappresentata con una serie infinita di funzioni armoniche con frequenze ω_n diverse tra loro e multipli interi della forzante $f(t)$. Si parla allora di sviluppo in serie di Fourier e di analisi armonica, con

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Per sistemi lineari, essendo applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti, sarà quindi possibile determinare la risposta del sistema alla forzante periodica $f(t)$, come somma delle risposte ai singoli contributi armonici di cui la forzante è composta. La scomposizione in serie di Fourier consente di ricondurre lo studio della risposta ad una forzante periodica, anche molto complessa, alla semplice analisi delle singole componenti armoniche. La rappresentazione in serie di Fourier della forzante $f(t)$ è data da

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n \cos n\omega_1 t + B_n \sin n\omega_1 t) \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

I coefficienti A_n e B_n sono i coefficienti di Fourier.

2.1.3 *Metodi numerici per la soluzione del problema dinamico*

Le equazioni di equilibrio per un sistema in uno stato di moto si scrivono:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

dove \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} sono rispettivamente la matrice delle masse, degli smorzamenti e delle rigidezze; \mathbf{f} è il vettore delle forze esterne; $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ rappresentano, nell'ordine, il vettore degli spostamenti, delle velocità e delle accelerazioni. In seguito ci si riferirà a schematizzazioni del continuo mediante elementi finiti, le quantità presenti nelle equazioni di equilibrio richiamate si riferiscono ai gradi di libertà dei punti nodali trattando la variabile temporale con metodi alle differenze finite. Una scrittura alternativa è la seguente

$$\mathbf{F}_I(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{f}(t)$$

Dove $\mathbf{F}_I(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)$ sono le forze d'inerzia;

$\mathbf{F}_D(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)$ le forze di attrito viscoso;

$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ le forze di richiamo elastico.

I suddetti termini sono tutti dipendenti dal tempo.

La risoluzione del problema dinamico coincide così con quella del problema statico, considerato al tempo t^* , se si aggiungono alle forze di richiamo i contributi delle forze d'inerzia e delle forze di attrito viscoso.

Dal punto di vista analitico, l'equazione di equilibrio in termini matriciali rappresenta un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti. In casi particolari, la soluzione può essere ottenuta in forma chiusa. Nell'ambito del metodo degli elementi finiti, invece, risulta pressochè indispensabile il ricorso a soluzioni numeriche ove si considera l'aspetto particolare delle matrici ricorrenti. Le procedure utilizzate sono riconducibili a due:

- integrazione diretta;
- sovrapposizione modale (quest'ultima è un metodo di integrazione indiretta, procedendo da una manipolazione delle equazioni di base);

2.1.3.1 Metodi per l'integrazione diretta

Si definiscono metodi per l'integrazione diretta le procedure che non implicano trasformazioni del sistema di equazioni di equilibrio come indicato precedentemente. Viene applicata la tecnica passo passo, o tentando di soddisfare il sistema per valori discreti della variabile temporale (e riconducendo quindi il problema ad una successione di risoluzioni di tipo statico), o assumendo espressioni a-prioristiche per le variazioni di spostamento, velocità ed accelerazione entro ogni passo temporale. Ovviamente dalla scelta del metodo dipendono l'accuratezza, la stabilità e l'efficienza economica e computazionale della soluzione.

2.1.3.1.1 Metodo generalizzato dell'accelerazione di Newmark

Nel 1959 N.M. Newmark sviluppò un metodo integrativo basato sulle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1-\delta)\Delta t] \ddot{x}_i + (\delta\Delta t) \ddot{x}_{i+1}$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) (\Delta t)^2 \right] \ddot{x}_i + \left[\alpha (\Delta t)^2 \right] \ddot{x}_{i+1}$$

dove α e δ sono dei parametri che determinano la stabilità e l'accuratezza della soluzione. A questo fine tipicamente si assume $\delta = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6} \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$

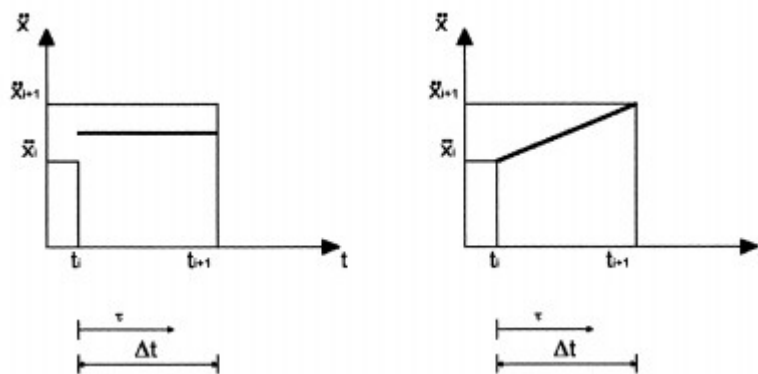


Fig.2.1.3.1.1-1 Metodo dell'accelerazione costante (sx) e dell'accelerazione lineare (dx)

Nel caso si utilizzi $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/6$ le equazioni precedenti corrispondono al metodo delle accelerazioni lineari. Infatti, assumendo che la variazione dell'accelerazione nell'intervallo di tempo sia lineare, si ha

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_i + \frac{\tau}{\Delta t} (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)$$

Integrando l'equazione, si ottiene

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t} (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)$$

ossia, per $\tau = \Delta t$

$$\dot{x}(\Delta t) = \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) = \dot{x}_i + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \right] \ddot{x}_i + \left(\frac{1}{2} \Delta t \right) \ddot{x}_{i+1}$$

Integrando l'equazione precedente, si ottiene

$$x(\tau) = x_i + \dot{x}_i \tau + \ddot{x}_i \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t} (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)$$

ossia per $\tau = \Delta t$

$$\begin{aligned} x(\Delta t) = x_{i+1} &= x_i + \dot{x}_i \Delta t + \ddot{x}_i \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{(\Delta t)^3}{6} (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) = \\ &= x_i + \dot{x}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) (\Delta t)^2 \right] \ddot{x}_i + \left[\frac{1}{6} (\Delta t)^2 \right] \ddot{x}_{i+1} \end{aligned}$$

Nel caso invece in cui $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$ si ottiene l'accelerazione costante nell'intervallo di tempo e pari al valore medio delle accelerazioni agli estremi dell'intervallo di tempo Δt . Infatti, assumendo accelerazione costante, uguale all'accelerazione media nell'intervallo di tempo Δt , si ha :

$$\ddot{x}(\tau) = \frac{1}{2} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i)$$

Integrando l'equazione, si ottiene

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \frac{\tau}{2} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i)$$

ossia, per $\tau = \Delta t$

$$\dot{x}(\Delta t) = \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i) = \dot{x}_i + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \right] \ddot{x}_i + \left(\frac{1}{2} \Delta t \right) \ddot{x}_{i+1}$$

Integrando l'equazione si ottiene

$$x(\tau) = x_i + \dot{x}_i \tau + \frac{\tau^2}{4} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i)$$

ossia, per $\tau = \Delta t$

$$\begin{aligned} x(\Delta t) = x_{i+1} &= x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i) = \\ &= x_i + \dot{x}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) (\Delta t)^2 \right] \ddot{x}_i + \left[\frac{1}{4} (\Delta t)^2 \right] \ddot{x}_{i+1} \end{aligned}$$

Le due equazioni di Newmark combinate con le equazioni del moto al tempo $t + \Delta t$

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + kx_{i+1} = f_{i+1}$$

permettono di calcolare $\ddot{x}_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, x_{i+1}$ al tempo $(i + 1)$ a partire dalla conoscenza di $\ddot{x}_i, \dot{x}_i, x_i$ al tempo i . La presenza dell'incognita \ddot{x}_{i+1} a destra delle equazioni rende necessario, generalmente, un processo iterativo. In realtà, per sistemi lineari è possibile ottenere la soluzione senza iterazione. Definendo le quantità incrementali (formulazione non necessaria in realtà per i sistemi lineari, ma conveniente per i sistemi non-lineari):

$$\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta \dot{x}_i \equiv \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i$$

$$\Delta \ddot{x}_i \equiv \ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i$$

$$\Delta f_i \equiv f_{i+1} - f_i$$

Le equazioni di Newmark possono essere scritte come

$$\Delta \dot{x}_i = (\Delta t) \ddot{x}_i + (\delta \Delta t) \Delta \ddot{x}_i$$

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{x}_i + \alpha (\Delta t)^2 \Delta \ddot{x}_i$$

La seconda può essere risolta ottenendo

$$\Delta \ddot{x}_i = \frac{1}{\alpha (\Delta t)^2} \Delta x_i - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{x}_i - \frac{1}{2\alpha} \ddot{x}_i$$

Sostituendo si ricava

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \Delta x_i - \frac{\delta}{\alpha} \dot{x}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{x}_i$$

Nei sistemi lineari, l'equazione incrementale del moto, ottenuta sottraendo l'equazione del moto all'istante i dall'equazione all'istante $i + 1$, è

$$m\Delta \ddot{x}_i + c\Delta \dot{x}_i + k\Delta x_i = \Delta f_i$$

Inserendo opportunamente le equazioni sopra descritte, si ottiene

$$\left(k + \frac{1}{\alpha (\Delta t)^2} m + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} c \right) \Delta x_i = \Delta f_i + \left(\frac{1}{\alpha \Delta t} m + \frac{\delta}{\alpha} c \right) \dot{x}_i + \left[\frac{1}{2\alpha} m + \Delta t \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) c \right] \ddot{x}_i$$

Note le caratteristiche del sistema m, k, c , i parametri α, δ e le condizioni \dot{x}_i, \ddot{x}_i all'inizio dell'intervallo temporale lo spostamento incrementale vale

$$\Delta x_i = \frac{\Delta f_i + \left(\frac{1}{\alpha \Delta t} m + \frac{\delta}{\alpha} c \right) \dot{x}_i + \left[\frac{1}{2\alpha} m + \Delta t \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) c \right] \ddot{x}_i}{k + \frac{1}{\alpha (\Delta t)^2} m + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} c} = \frac{\Delta \hat{f}_i}{\hat{k}}$$

Noto Δx_i , possono essere calcolati $\Delta \dot{x}_i, \Delta \ddot{x}_i$ e quindi $\ddot{x}_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, x_{i+1}$. L'accelerazione può anche essere ottenuta dall'equazione del moto all'istante $i + 1$

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{f_{i+1} - c\dot{x}_{i+1} - kx_{i+1}}{m}$$

Quest'ultima equazione è necessaria per ottenere \ddot{x}_0 all'inizio del processo iterativo. Nel metodo di Newmark la soluzione al tempo $i + 1$ è determinata usando la condizione di equilibrio al tempo $i + 1$. Metodi di questo tipo sono denominati metodi impliciti. Si può dimostrare che il metodo di Newmark è stabile se

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\delta - 2\alpha}}$$

Per valori di $\delta \neq 1/2$ si introduce nella soluzione uno smorzamento di tipo spurio proporzionale alla quantità $(\delta - 1/2)$ che è bene evitare: tale smorzamento è positivo se $\delta > 1/2$, negativo per $\delta < 1/2$. Per questa ragione è bene utilizzare il valore $\delta = 1/2$. Per $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$ la condizione diviene

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty$$

Questo significa che il metodo dell'accelerazione è incondizionatamente stabile.

Per $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/6$ la condizione diviene

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551$$

Questa condizione è in genere sempre rispettata nel caso di sistemi a singolo grado di libertà dal momento che l'intervallo temporale è scelto sempre di molto inferiore a $0.551 T_n$ in accordo con un'accurata rappresentazione dell'eccitazione.

2.1.3.2 Stabilità dell'errore computazionale

Stabilità

Le procedure numeriche si dicono condizionatamente stabili nel caso in cui, per ottenere una soluzione convergente, sia necessario limitare l'intervallo di tempo ad un limite di stabilità. Le procedure che convergono indipendentemente dalla lunghezza dell'intervallo di tempo si dicono incondizionatamente stabili. Ad esempio il metodo dell'accelerazione media è incondizionatamente stabile; i metodi dell'accelerazione lineare e delle differenze centrali sono stabili sotto certe condizioni, ossia, sono condizionatamente stabili. In realtà i criteri di stabilità non sono restrittivi, nel senso che non impongono la scelta dell'intervallo temporale, nel caso dei sistemi ad un solo grado di libertà: infatti gli intervalli di tempo considerati per campionare la

forzante sono generalmente inferiori al limite di stabilità. La stabilità dei metodi numerici è, tuttavia, estremamente importante nel caso si analizzino metodi a molti gradi di libertà.

Errore computazionale

L'errore computazionale è intrinseco ad ogni soluzione numerica delle equazioni del moto. Non si affronterà l'analisi dell'errore da un punto di vista matematico. Si esamineranno esclusivamente due caratteristiche importanti delle soluzioni numeriche, ossia l'errore commesso con il decadimento dell'ampiezza dell'oscillazione e l'errore commesso nell'allungamento o nell'accorciamento del periodo naturale di vibrazione. La fig.2.1.3.2-1 mostra la risposta dell'oscillatore smorzato ad un carico costante ottenuta attraverso l'utilizzo di quattro metodi diversi di integrazione numerica. I risultati sono confrontati con la soluzione teorica. Per quanto riguarda il decadimento dell'ampiezza dell'oscillazione, il metodo di Wilson introduce uno smorzamento numerico nel sistema. Gli altri tre metodi non alterano, da questo punto di vista, la risposta strutturale. Dal punto di vista dell'errore nella valutazione del periodo proprio, il metodo delle differenze centrali introduce l'errore maggiore. Nell'ambito dei parametri prescelti, il metodo dell'accelerazione lineare conduce ai risultati più aderenti alla soluzione teorica. Esso si configura, pertanto, come il metodo più affidabile per i sistemi ad un solo grado di libertà. Bisogna, tuttavia, notare che nei sistemi a molti gradi di libertà si può giungere a differenti conclusioni. Un'ultima considerazione viene svolta con riferimento all'intervallo di tempo prescelto. Qualsiasi descrizione numerica di forzanti esterne fortemente irregolari non può prescindere da un campionamento molto accurato. Tipicamente si assume un intervallo temporale dell'ordine di 0.02 sec. L'intervallo temporale, quindi, scelto per il calcolo della risposta strutturale non dovrebbe essere più lungo. Una tecnica non sofisticata, ma utile per scegliere l'intervallo temporale consiste nel risolvere il problema con un intervallo temporale che sembri ragionevole, quindi ripetere la soluzione con un intervallo temporale più piccolo e confrontare i risultati. Il processo verrà interrotto quando due soluzioni successive sono sufficientemente vicine. Questa breve discussione sulla stabilità e l'accuratezza dei metodi riguarda esclusivamente i sistemi lineari.

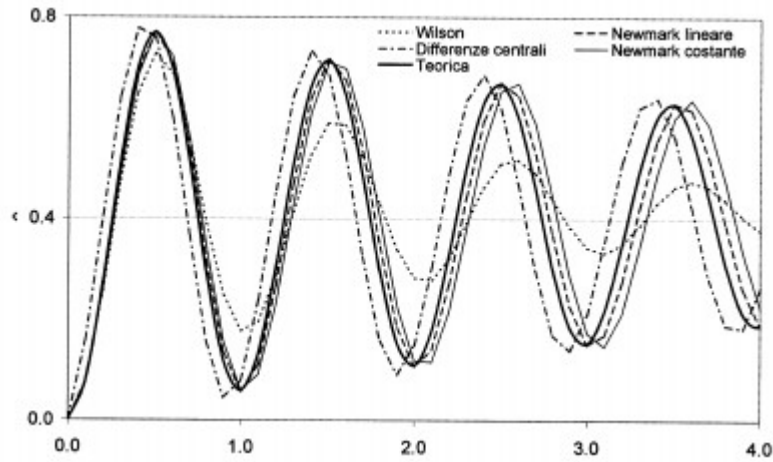


Fig.2.1.3.2-1 Risposta dell'oscillatore smorzato ad un carico costante: soluzione teorica e soluzioni ottenute con quattro metodi numerici per $\Delta t = 0.1$: Wilson ($\theta = 1.42$); differenze centrali; Newmark costante ($\alpha = 1/4$, $\delta = 1/2$); Newmark lineare ($\alpha = 1/6$, $\delta = 1/2$)

2.2 Onde sismiche e loro propagazione nel sottosuolo

Durante l'evento sismico diversi tipi di onde sismiche vengono prodotte: onde di volume e onde di superficie. Le onde di volume viaggiano all'interno della terra e sono le onde P e le onde S. Le prime sono conosciute come onde primarie di compressione che agiscono longitudinalmente alla direzione di propagazione dell'onda, queste generano successioni di compressioni e rarefazioni del mezzo che investono.

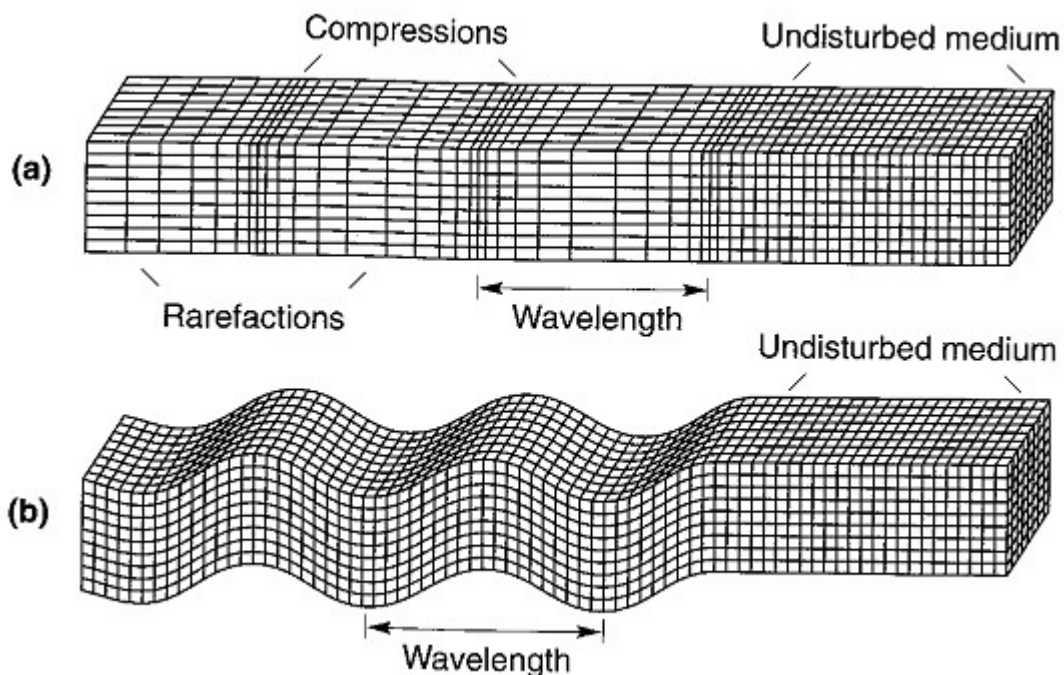


Fig. 2.2-1 Deformazioni prodotte da onde sismiche di volume: a) onde P ; b) onde S

Le onde P sono analoghe alle onde sonore in cui il moto di una particella individuale si sposta lungo la direzione di propagazione dell'onda e attraversano sia i solidi che i liquidi. Le onde S sono conosciute come secondarie, di taglio o trasversali, causano deformazioni taglianti nel materiale che attraversano. Per queste onde il moto di una singola particella avviene trasversalmente alla direzione di propagazione dell'onda. La direzione di movimento della particella si divide in due componenti, SV e SH rispettivamente verticale e orizzontale al piano perpendicolare alla direzione di propagazione. La velocità con cui le onde viaggiano all'interno del mezzo varia a seconda del tipo di onda e dalla rigidità del mezzo, le onde S non attraversano i fluidi in quanto privi di rigidità a taglio.

Le onde di superficie risultano dall'interazione tra le onde di volume e le superfici delle stratificazioni più superficiali della terra. Queste onde viaggiano lungo la superficie della terra con un'ampiezza che decresce esponenzialmente con la profondità.

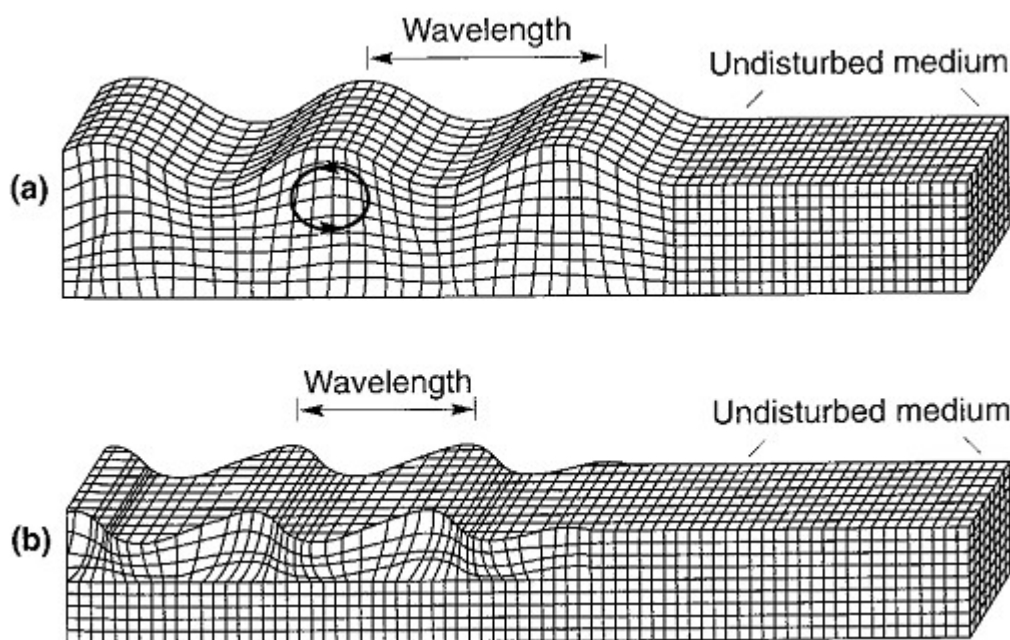


Fig. 2.2-2 Deformazioni prodotte da onde sismiche di superficie: a) onde R ; b) onde L

Nella fig. 2.2-2 si rappresentano le due onde superficiali più importanti a scopo ingegneristico, le onde R di Rayleigh e le onde L di Love.

Le prime sono prodotte dall'interazione fra le onde P e SV con la superficie terrestre e comportano un moto della singola particella sia orizzontale che verticale, ne risultano quindi delle vibrazioni che sono la risultante polarizzata su un piano verticale, in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione, e di una vibrazione orizzontale polarizzata lungo la direzione di propagazione. Il moto risultante è ellittico retrogrado e la deformazione indotta è sia di taglio che di compressione.

Le onde di Love producono vibrazioni orizzontali polarizzate nella direzione perpendicolare alla

direzione di propagazione e deformazioni a taglio. Queste onde non hanno componente verticale e risultano dall'interazione fra le onde SH e uno strato superficiale soffice in cui le onde SH rimangono intrappolate e generano una riflessione multipla.

Velocità delle onde sismiche

In un mezzo omogeneo elastico la velocità di propagazione delle onde sismiche è indipendente dalla frequenza (onde non dispersive). In tal caso valgono le seguenti relazioni tra le velocità di propagazione delle onde P, V_p , onde S, V_s , e onde R, V_r in condizioni di far field:

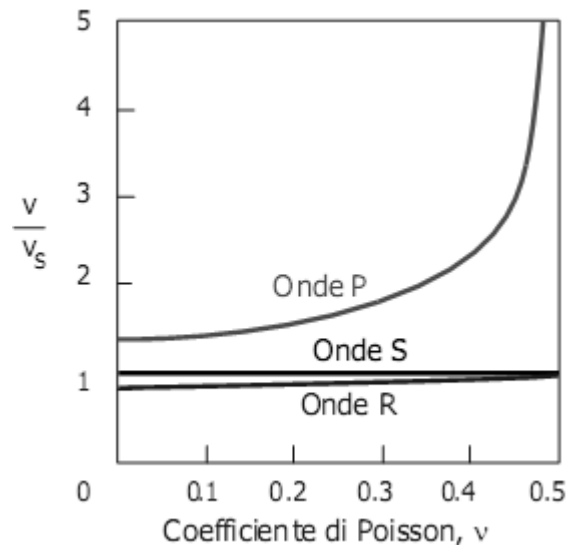
$$V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}}$$

$$V_p = V_s \cdot \sqrt{\frac{1-\nu}{0.5-\nu}}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$V_r \cong \frac{0.874 + 1.117\nu}{1+\nu} \cdot V_s$$

Nel terreno, la velocità (V_p) delle onde di compressione è sempre maggiore di quella delle onde di taglio (V_s). Assumendo che il mezzo abbia un comportamento elastico lineare, si ha che il rapporto V_p / V_s dipende esclusivamente dal coefficiente di Poisson (ν) e varia tra $\sqrt{2}$ e ∞ per ν variabile tra 0 e 0.5. In secondo luogo, si ricorda che la presenza di acqua di porosità condiziona fortemente la velocità delle onde P. Le V_p misurate sperimentalmente in terreni con grado di saturazione S_r minore del 99% sono di alcune centinaia di metri al secondo e sono generalmente considerate caratteristiche di vibrazioni trasmesse dallo scheletro solido. Per $S_r > 99\%$, la V_p può essere rappresentativa delle proprietà elastiche dello scheletro solido ovvero del fluido di porosità, in dipendenza del modo di combinarsi di svariati fattori (grado di saturazione, indice di porosità, compressibilità volumetrica dello scheletro solido, rigidità a taglio e coefficiente di Poisson).



Infine, nei terreni perfettamente saturi ($S_r = 100\%$) la V_p dipende essenzialmente dalla compressibilità del fluido di porosità ed è solo scarsamente influenzata dalle proprietà dello scheletro solido. Nel caso delle onde di taglio e di quelle di superficie, in conseguenza dell'incapacità del fluido interstiziale di assorbire sforzi di taglio, le velocità risultano invece scarsamente influenzate dal grado di saturazione. Da quanto sopra, discende immediatamente che per i terreni saturi, cioè disposti al di sotto del pelo libero della falda, le onde in grado di fornire informazioni sulla rigidità dello scheletro solido sono quelle di taglio e di Rayleigh (la V_p riflette infatti le proprietà elastiche del fluido di porosità). La velocità delle onde S permette di risalire al modulo di deformazione a taglio dei terreni attraversati mediante la ben nota relazione:

$$G = \rho V_s^2$$

con G modulo di deformazione a taglio e ρ , densità del mezzo bifase, data dal rapporto tra il peso dell'unità di volume del terreno (γ_{sat} nel caso $S_r = 100\%$) e l'accelerazione di gravità (g). Nell'ipotesi che anche la velocità delle onde di compressione nello scheletro solido possa essere correttamente misurata, modellando il mezzo come un continuo elastico, possono essere dedotti altri parametri:

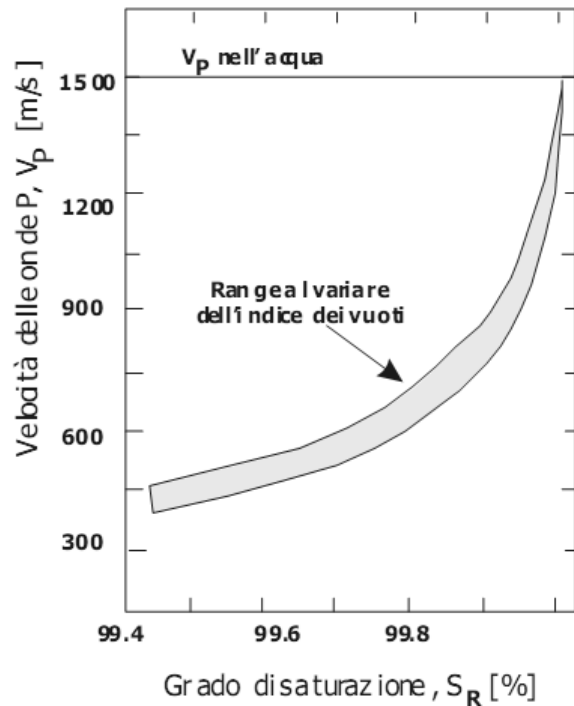
$$E_b = \rho \left(V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 \right)$$

$$E_{\text{ed}} = \rho V_p^2$$

$$\nu = \left[0.5 \left(\frac{V_p}{V_s} \right)^2 - 1 \right] / \left[\left(\frac{V_p}{V_s} \right)^2 - 1 \right]$$

$$E = 2\rho V_s^2 (1 + \nu)$$

con: E_b , E_{ed} ed E rispettivamente modulo di compressibilità volumetrica, edometrica e di Young e con ν coefficiente di Poisson. Oltre alla determinazione dei parametri elastici di cui si è detto, le misure sismiche basate sulle onde di volume si prestano ad altri tipi di interpretazione. Ad esempio, è possibile stimare i livelli di deformazione prodotti in un punto dalle vibrazioni. Allo scopo, occorre misurare la velocità di spostamento (\dot{u}) degli elementi di volume interessati dalle oscillazioni e quella (V) di propagazione delle onde. Nell'ipotesi di onde piane, il rapporto



tra queste due quantità fornisce il livello di deformazione (Γ) prodotto:

$$\Gamma = \frac{\dot{u}}{V}$$

Ulteriori indicazioni che possono essere ricavate, riguardano le caratteristiche dissipative intrinseche del mezzo di propagazione. Infatti, al progredire della distanza dalla sorgente, l'ampiezza delle vibrazioni decade sia per effetto dell'espansione del fronte d'onda (attenuazione geometrica) sia a causa delle proprietà dissipative del materiale attraversato. Nell'ipotesi di fronte d'onda di forma sferica, l'attenuazione geometrica può essere espressa con buona approssimazione mediante la relazione:

$$A = A_1 \frac{r}{r_1}$$

con A ed A_1 rispettivamente le ampiezze del segnale in due punti a distanza r ed r_1 dalla sorgente. Considerando l'ulteriore attenuazione dovuta alle proprietà dissipative del materiale, la precedente equazione si trasforma in:

$$A = A_1 \frac{r}{r_1} e^{-\zeta(r-r_1)}$$

con ζ parametro che modella appunto le proprietà smorzanti intrinseche del continuo nel quale vengono trasmesse le onde. Da quanto sopra, appare possibile quantificare l'assorbimento di energia dovuto al materiale mediante la misura dell'ampiezza dei segnali sismici in due punti a distanza nota dalla sorgente. È opportuno ricordare che in ingegneria geotecnica le caratteristiche dissipative dei terreni vengono spesso definite mediante il decremento logaritmico:

$$\delta = \frac{\zeta}{V/f} = \frac{\zeta}{\lambda}$$

con V , f e λ rispettivamente velocità, frequenza e lunghezza dell'onda in considerazione.

Il fattore di smorzamento D , la cui definizione è già nota, è legato al decremento logaritmico dalla relazione:

$$D = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Altre relazioni tra i parametri sopra indicati ed il fattore di qualità (Q), spesso utilizzato in sismologia, sono

$$Q = \frac{\pi f}{\zeta V}; \quad Q = \frac{\pi}{\delta}; \quad Q = \sqrt{\frac{1 + D^2}{2D}}$$

Campo delle onde di volume

Le deformazioni tangenziali eccitate dalle onde sismiche sono spesso minori di 10^{-3} %, ossia al di sotto della soglia di linearità, è dunque lecito assumere che il comportamento tensione-deformazione del mezzo di propagazione sia elastico lineare.

In geotecnica la velocità delle onde di volume viene misurata sperimentalmente con tecniche in foro: le vibrazioni indotte da una sollecitazione transitoria $S(t)$ artificiale vengono registrate da ricevitori disposti nel corpo del terreno. Può accadere che al punto di ricezione giungano, oltre alle onde direttamente trasmesse dalla sorgente, anche quelle riflesse lungo superfici di discontinuità. Ciò nonostante, nelle applicazioni di geotecnica viene assunto che l'effetto delle onde dirette sia predominante ed in misura tale da potere trascurare quello delle onde riflesse. Questa ipotesi è suffragata dalla modesta ampiezza da cui esse sono caratterizzate nelle condizioni sperimentali in parola. Tutto quanto sopra induce a ritenere che la trasmissione delle onde di volume obbedisca alle regole di un mezzo elastico omogeneo e non confinato, nel quale i fenomeni di riflessione sono assenti. Inoltre, stante l'ipotesi di elasticità, la soluzione del campo di moto indotto dalla $S(t)$ può essere ottenuta sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, ossia sommando azioni elementari in grado di riprodurre l'effetto di $S(t)$.

Nel caso ideale, rappresentato in Fig.2.2-3, l'equazione del moto in forma chiusa è:

$$u(r, \omega) = S(\omega) \cdot \frac{e^{-i \cdot \omega \cdot r / V_P}}{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_P^2} \cdot \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\lambda_P}{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r} \right) + \left(\frac{\lambda_P}{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r} \right)^2 \right] +$$

$$-S(\omega) \cdot \frac{e^{-i \cdot \omega \cdot r / V_S}}{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_S^2} \cdot \frac{1}{r} \left[-1 + \left(\frac{\lambda_S}{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r} \right) + \left(\frac{\lambda_S}{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r} \right)^2 \right]$$

con: $i = \sqrt{-1}$ (unità immaginaria), $\omega = 2\pi f$ frequenza angolare, $S(\omega)$ componente di frequenza ω della $S(t)$, λ_P e λ_S rispettivamente lunghezza delle onde di compressione e taglio ($\lambda_P = V_P/f$ e $\lambda_S = V_S/f$).

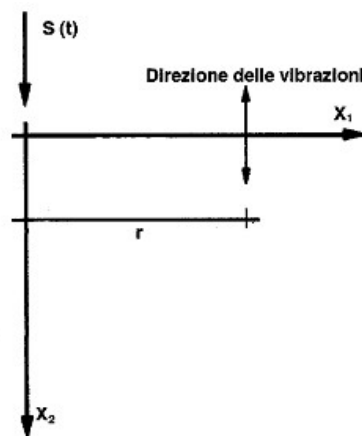


Fig. 2.2-3 configurazione ideale nelle misure cross-hole

In tale equazione, risulta evidente il contributo alle vibrazioni di termini (far field) attenuati in ragione di $1/r$ e di termini (near field) soggetti ad ulteriori fattori di riduzione geometrica proporzionali a (λ/r) e $(\lambda/r)^2$. Nonostante che nelle condizioni analizzate si sarebbe potuta supporre l'assenza di vibrazioni dirette lungo r (onde di compressione), esistono componenti near field caratterizzate da moto trasversale e longitudinale. Le onde di taglio sono invece presenti solo nei termini far field. Nella modellazione del comportamento del continuo sopra riportata il moto, una volta eccitato, continua indefinitamente: esso si attenua per effetto dell'espansione del fronte d'onda, ma l'energia totale trasportata rimane invariata. In contrasto con questo comportamento idealizzato, l'energia delle onde nei mezzi reali tende ad estinguersi del tutto, anche nel campo di deformazioni inferiori alla soglia lineare γ_1 . Nel modello introdotto, è possibile simulare tale effetto con un artificio matematico attribuendo valori complessi alla velocità delle onde P ed S. L'ulteriore complicazione teorica di indagare la trasmissione delle onde in un mezzo poroso saturo di acqua è stato affrontato da Biot. In particolare, si rileva la presenza di due onde di compressione: la prima, più veloce, si propaga nel fluido di porosità e l'altra, più lenta e quindi oscurata dall'arrivo dell'onda precedente, è trasmessa dallo scheletro solido. L'unica onda di taglio è trasmessa attraverso lo scheletro solido.

Campo delle onde di superficie

Una sollecitazione dinamica verticale applicata al piano limite di un semispazio elastico produce un campo di vibrazioni piuttosto complesso. Alle onde longitudinali (P) e trasversali (S), irradiate all'interno del mezzo e lungo la sua superficie, si aggiungono le onde di Rayleigh.. Per descrivere il campo di vibrazioni conviene fare riferimento alla fig.2.2-4, dove sono illustrati gli effetti di una sollecitazione armonica applicata sulla superficie di un semispazio elastico, omogeneo ed isotropo. In fig.2.2-4, le onde sono rappresentate nella posizione che raggiungono in un medesimo istante di tempo, quindi a una distanza (r) dalla sorgente proporzionale alla propria velocità. L'energia erogata è trasmessa per il 67% da onde di Rayleigh (R) e solo per il 7% ed il 26% da onde P ed S. Le onde di volume, diffuse lungo fronti emisferici, subiscono un'attenuazione geometrica proporzionale a $1/r$ nel corpo del mezzo ed a $1/r^2$ al piano limite. Le onde di Rayleigh, invece, sono trasmesse lungo fronti cilindrici e si attenuano in ragione di $1/\sqrt{r}$ al progredire della distanza dalla sorgente, ossia meno rapidamente di quelle di volume.

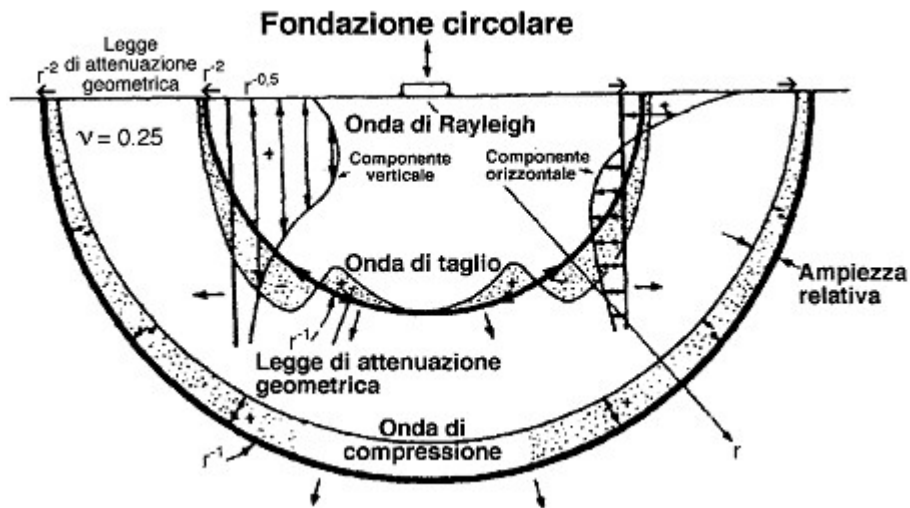


Fig. 2.2-4 Campo delle onde di superficie in un semispazio elastico, omogeneo e isotropo

In definitiva, anche in questo caso è possibile distinguere una zona near field, in cui l'effetto delle onde di compressione e taglio trasmesse lungo la superficie è significativo, ed una far field, in cui il moto è principalmente condizionato dalle onde di Rayleigh.

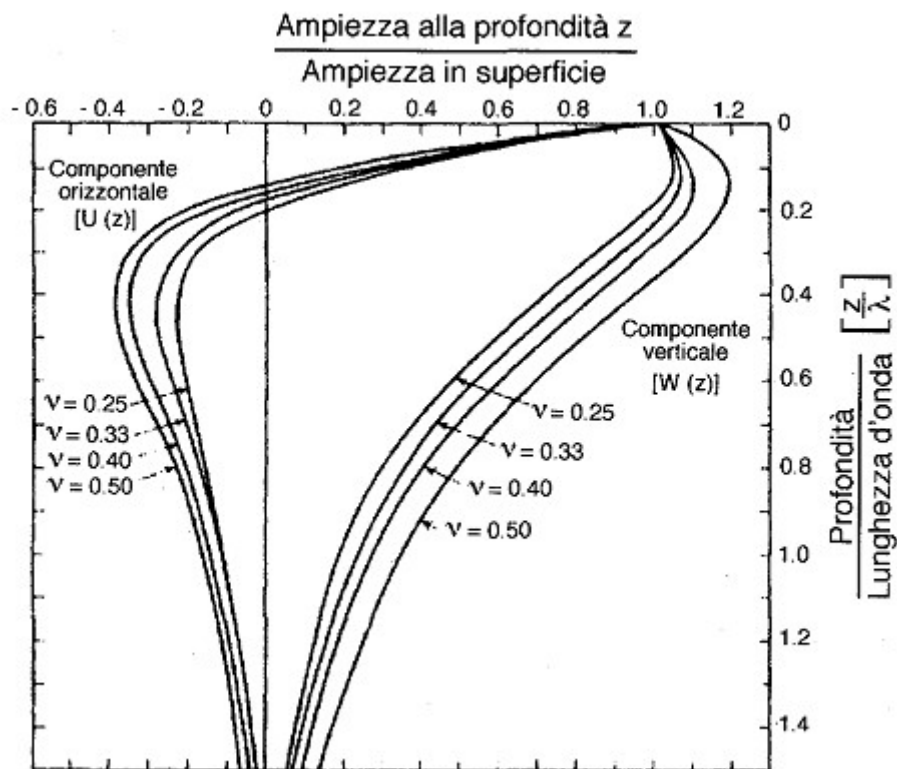


Fig. 2.2-5 Campo delle onde di Rayleigh in un semispazio elastico, omogeneo e isotropo

Per illustrare le caratteristiche di quest'ultima zona, conviene fare ancora riferimento ad un semispazio elastico, omogeneo ed isotropo, ma solo all'effetto delle onde R. Il moto interessa uno spessore proporzionale alla lunghezza dell'onda irradiata. Le componenti verticali ed orizzontali

delle vibrazioni si attenuano rapidamente con la profondità; quella più significativa (verticale) si estingue ad una quota (z) di poco maggiore della lunghezza dell'onda irradiata. Si rileva, inoltre, che le onde di Rayleigh danno luogo sia a deformazioni longitudinali che trasversali. Ciò nonostante, la loro velocità (V_r) risulta molto prossima a quella (V_s) delle onde di taglio e riflette quindi la rigidità del semispazio, quindi G è proporzionale alla V_s^2

2.2.1 Attenuazione delle onde sismiche

Dal punto sorgente da cui è generata la perturbazione elastica l'energia si propaga in tutte le direzioni, producendo un treno d'onde di cui il luogo dei punti affetti al tempo t dalla stessa discontinuità cinematica individua una superficie detta fronte d'onda. Nel caso teorico di mezzo elastico e isotropo il fronte d'onda ha superficie sferica. Il fronte d'onda propagandosi nel mezzo espande la propria superficie e quindi si ha una diminuzione dell'energia specifica ad un'unità di superficie che riduce l'ampiezza dell'onda e dà luogo alla attenuazione detta geometrica. Una seconda attenuazione detta intrinseca avviene per il comportamento anelastico del mezzo attraversato dal fronte d'onda, per la conversione dell'energia potenziale in energia cinetica, cioè velocità della particella, e per deformazioni plastiche permanenti indotte nel materiale attraversato che determinano attriti e movimenti che convertono l'energia in calore, in un processo detto di frizione interna. Ulteriore attenuazione avviene per scattering che è prodotto da interazione tra il campo d'onda e le eterogeneità dei materiali, ciò provoca a piccola scala la ripartizione del campo d'onda ad alte frequenze in una sequenza di arrivi chiamati onde di coda, comportando la diminuzione delle ampiezze delle onde sismiche spostando l'energia degli arrivi diretti alle onde di coda. Infine si hanno fenomeni di attenuazione per riflessione (detta anche attenuazione per radiazione), rifrazione e conversione dell'onda con generazione di onde secondarie per l'attraversamento dell'interfaccia tra due substrati comportando i seguenti fenomeni:

- la generazione di onde superficiali. In particolare, quando il mezzo di destinazione non può trasmettere onde elastiche, cioè rappresenta una superficie libera, la combinazione di componenti P e SV (componente verticale delle onde S) delle onde di volume genera onde superficiali di Rayleigh V_R . Queste onde hanno velocità di poco inferiore alla velocità delle onde di taglio V_s e producono vibrazioni in piani verticali caratterizzate da componenti parallele e perpendicolari alla direzione dell'onda.
- la generazione di onde riflesse (nel mezzo di provenienza) e rifratte (trasmesse nel mezzo di destinazione), anche di tipo diverso di quelle incidenti. Nella fig.2.2.1-1 è riportato il caso dell'onda SV incidente secondo una direzione obliqua al piano di

separazione dei mezzi. Le onde SV e P riflesse e rifratte assumono direzioni diverse da quella originaria in ragione della legge di Snell

$$\frac{\text{sen } i}{V_{S_1}} = \frac{\text{sen } r}{V_{S_1}} = \frac{\text{sen } s}{V_{P_1}} = \frac{\text{sen } t}{V_{S_2}} = \frac{\text{sen } u}{V_{P_2}}$$

dove i = angolo di incidenza, r ed s = angoli di riflessione, t ed u = angoli di rifrazione. La legge di Snell implica un avvicinamento alla normale all'interfaccia in proporzione alla diminuzione di velocità del mezzo di destinazione rispetto al mezzo di provenienza.

- una modifica di ampiezza di spostamenti in misura inversamente proporzionale all'impedenza sismica Z (prodotto della densità per la velocità) dei mezzi a contatto; nel caso di onde incidenti lungo la normale dell'interfaccia, dette u_i , u_r , u_t rispettivamente le ampiezze di onde incidenti, riflesse e trasmesse, si ha:

$$u_r = \frac{1-\mu}{1+\mu} u_i \quad u_t = \frac{2}{1+\mu} u_i \quad \mu = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}$$

dove si è definito con μ il rapporto fra le impedenze del mezzo di destinazione 2 rispetto quello di provenienza 1.

Quale che sia la successione delle formazioni attraversate dalle onde di volume, in genere

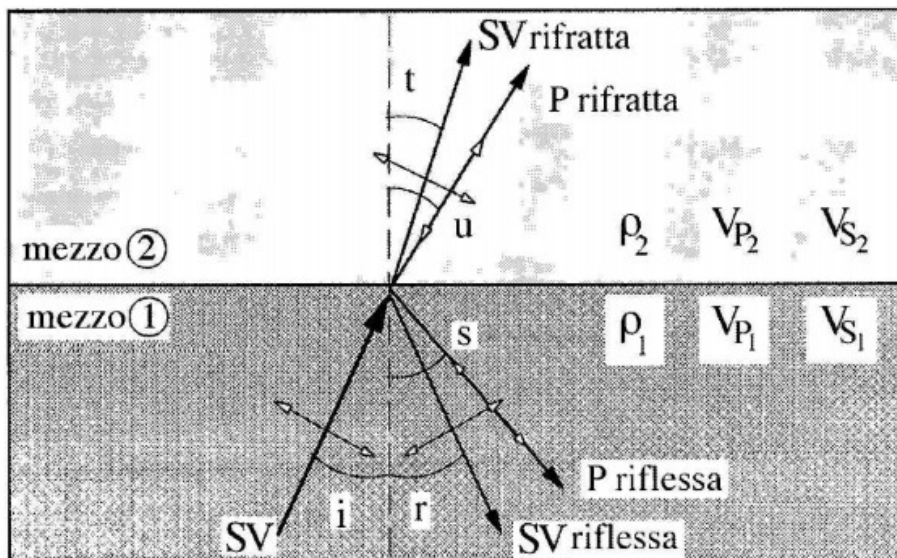


Fig.2.2.1-1

la velocità, la densità e l'inclinazione degli strati diminuiscono lungo il percorso. Ne deriva quindi che, avvicinandosi alla superficie, l'onda segue un percorso curvilineo che va progressivamente accostandosi alla verticale, mentre gli spostamenti crescono di intensità. Questo comporta brusche deviazioni del tragitto in corrispondenza della trasmissione di onde dalla roccia al terreno. Per sottosuoli con stratificazione pressoché orizzontale, il fenomeno sismico può pertanto essere assimilato a treni d'onde di volume

che si propagano verso l'alto a partire dal substrato roccioso di riferimento (bedrock). Tenuto conto che i sottosuoli naturali sono in gran parte sotto falda e che, per l'elevata rapidità delle azioni, ci si trova in condizioni di drenaggio impedito, il fenomeno sismico produce deformazioni volumetriche (indotte dalle onde P) trascurabili rispetto a quelle distorsionali (indotte dalle onde S). Appare quindi giustificato ricondurre la modellazione meccanica di un fenomeno sismico all'analisi degli effetti prodotti da un insieme di onde S propagantisi verso l'alto, con un campo di spostamenti del terreno praticamente orizzontale. Per i valori da normativa sono rivolti alla designazione di questo parametro, in quanto più significativo ai fini della verifica sismica dei manufatti.

2.2.2 Strato omogeneo elastico su substrato rigido

Si assume l'ipotesi di terreno a legame costitutivo elastico lineare e substrato rigido; con ρ_s e V_s sono rispettivamente indicate la densità e la velocità delle onde di taglio del terreno. Il moto di vibrazione orizzontale è descritto analiticamente dall'equazione differenziale di equilibrio dinamico che governa il fenomeno della propagazione monodimensionale delle onde all'interno dello strato elastico:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

dove $u(z,t)$ è la componente orizzontale dello spostamento. Per sollecitazione armonica di frequenza circolare $\omega=2\pi f$, la soluzione può ricercarsi per separazione di variabili nella forma:

$$u(z,t) = p(z)e^{j\omega t}$$

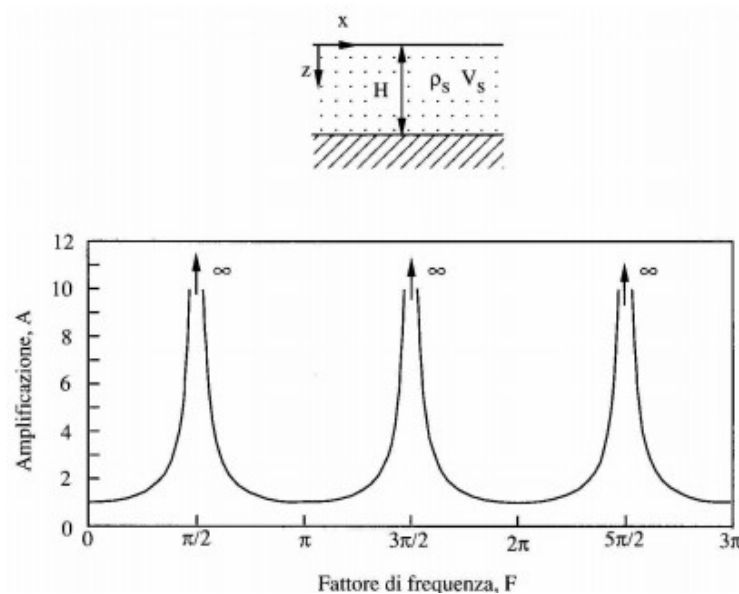


Fig.2.2.2-1

dove $p(z)$ è la cosiddetta funzione di forma: questa descrive la distribuzione con la profondità delle ampiezze di spostamento, in ogni punto variabili con frequenza pari a quella di sollecitazione.

La variazione armonica nel tempo è espressa in notazione euleriana con j unità immaginaria. Sostituendo la soluzione di u nell'equazione differenziale di equilibrio dinamico delle onde si ottiene:

$$G \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \rho \omega^2 p = 0$$

la cui soluzione è data da:

$$p(z) = Ae^{jkz} + Be^{-jkz}$$

esprimendo con

$$k = \omega/V_s = 2\pi/\lambda$$

il cosiddetto numero d'onda. Lo spostamento orizzontale ha quindi l'espressione:

$$u(z,t) = Ae^{j(kz+\omega t)} + Be^{-j(kz-\omega t)}$$

in cui A e B sono le ampiezze di due onde che si propagano all'interno dello strato, rispettivamente verso l'alto e verso il basso. Imponendo come condizione al contorno l'assenza di sforzo di taglio in corrispondenza della superficie limite ($z = 0$), risulta:

$$\tau(0,t) = G \gamma(0,t) = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{0,t} = 0$$

derivando l'espressione dello spostamento orizzontale ed introducendola nella condizione al contorno si ottiene:

$$Gjk(A - B)e^{j\omega t} = 0$$

che è identicamente soddisfatta quando $A=B$. In definitiva, lo spostamento orizzontale può essere scritto nella forma:

$$u(z,t) = 2A \frac{e^{jkz} + e^{-jkz}}{2} e^{j\omega t} = 2A \cos(kz) e^{j\omega t}$$

Che rappresenta un'onda stazionaria di ampiezza $2A \cos(kz)$. Quest'ultima relazione può essere utilizzata per valutare la funzione di trasferimento in termini di rapporto tra le componenti orizzontali dello spostamento (o dell'accelerazione) di due punti qualsiasi dello strato. La funzione di trasferimento $H_r(\omega)$ tra la superficie $z = 0$ e la base $z = H$ dello strato ha, in questo caso, espressione reale (Roesset 1970) :

$$H_r(\omega) = \frac{u_{\max}(0,t)}{u_{\max}(H,t)} = \frac{2Ae^{j\omega t}}{2A \cos(kH)e^{j\omega t}} = \frac{1}{\cos(kH)} = \frac{1}{\cos F}$$

dove il parametro adimensionale $F=kH= \omega H/V_s$ è detto fattore di frequenza. Il modulo della funzione trasferimento è la funzione di amplificazione:

$$A_r(\omega) = |H_r(\omega)| = \sqrt{\{R[H_r(\omega)]\}^2 + \{I[H_r(\omega)]\}^2} = \frac{1}{|\cos F|}$$

dove $R[H_r(\omega)]$ ed $I[H_r(\omega)]$ sono rispettivamente la parte reale e quella immaginaria (nulla in questo caso) della funzione di trasferimento. L'andamento della funzione di amplificazione, riportato nella figura precedente mostra che essa è periodica ed assume sempre valori maggiori o uguali all'unità, cioè l'ampiezza dello spostamento alla superficie dello strato è sempre almeno pari a quella in corrispondenza della formazione rocciosa. Inoltre la funzione di amplificazione diviene infinita per $F_n = (2n-1)\pi/2$, cioè in corrispondenza dei seguenti valori delle frequenze:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{V_s}{H} F_n = \frac{V_s}{H} (2n-1) \frac{\pi}{2} \\ f_n &= \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{V_s}{4H} (2n-1) \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

e dei periodi T_n :

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{4H}{V_s(2n-1)} \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

Le frequenze (ω_n e f_n) corrispondenti ai massimi della funzione di amplificazione si chiamano frequenze naturali di vibrazione dello strato, sono in numero infinito come i gradi di libertà del sistema. I periodi T_n si chiamano periodi naturali di vibrazione dello strato; questi, essendo direttamente proporzionali allo spessore dello strato e inversamente proporzionali alla velocità delle onde di taglio del terreno, aumentano con la deformabilità trasversale dello strato. Il caso illustrato, nonostante la notevole semplicità delle ipotesi, mette in evidenza che la risposta di un deposito di terreno ad un'eccitazione armonica è fortemente influenzata dalla frequenza dell'eccitazione: le frequenze in corrispondenza delle quali si verificano elevate amplificazioni dipendono dalla geometria e dalle caratteristiche fisico-meccaniche del deposito di terreno. La situazione più pericolosa in termini di amplificazione si verifica quando la frequenza dell'eccitazione armonica (ω) è pari ad una delle frequenze fondamentali dello strato (ω_n). Quando si verifica tale condizione ($\omega = \omega_n$) si ha la risonanza dello strato, ed il fattore di amplificazione è teoricamente infinito.

2.3 *Analisi di risposta sismica del suolo*

La terra è lontana dallo stato di quiete, essa vibra continuamente con periodi che vanno dai millisecondi ai giorni e ampiezze d'onda che vanno dai nanometri ai metri. La maggior parte di queste vibrazioni sono così deboli da poter essere percepite solo con speciali strumenti di misurazione, ma questa parte di vibrazioni chiamata attività microsismica è di fondamentale importanza principalmente per i sismologi. L'ingegneria sismica si interessa primariamente del Strong Ground Motion (moto sufficientemente forte da avere effetti sulle persone e sulle strutture). La valutazione degli effetti del terremoto in un sito particolare richiede metodi oggettivi e quantitativi per descrivere lo SGM. Il moto del terreno produce terremoti complessi da descrivere. Preso un punto possono descriversi completamente tre componenti di traslazione e tre componenti di rotazione, ma nella pratica le componenti di rotazione vengono trascurate e il moto del punto descritto e misurato con le tre componenti ortogonali di spostamento. Tipicamente le registrazioni dei sismi sono descritte serie di accelerazioni nel tempo (acceleration time histories) che contengono una notevole quantità di dati. L'espressione di queste informazioni descritte come misure di accelerazioni nelle tre direzioni per incremento di tempo produce molti dati per una precisa descrizioni del moto sismico.

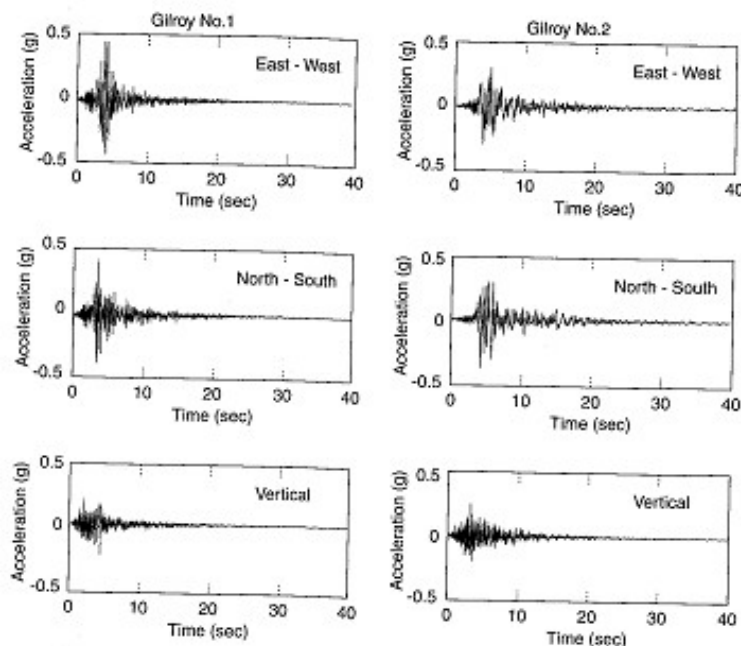


Fig.2.3-1 Esempi di accelerazioni registrate

Fortunatamente non è necessario riprodurre ogni time history esattamente per descrivere un sisma in modo adeguato per gli scopi ingegneristici. Si rende quindi necessario condensare le informazioni in un ridotto numero di parametri significativi che riflettono e riproducono le

caratteristiche del terremoto. Per gli scopi dell'ingegneria sono tre le caratteristiche di primaria importanza nella descrizione di un sisma: ampiezza, contenuto in frequenza, durata del terremoto.

Diversi parametri sono stati proposti per descrivere i terremoti ma in ogni caso si rendono necessari almeno due parametri primari per una adeguata caratterizzazione del terremoto.

2.3.1 Parametri di ampiezza

I parametri del moto sono accelerazione, velocità e spostamento e in genere solo uno di questi viene effettivamente misurato e gli altri ricavati da esso per integrazione o differenziazione nel tempo. E' importante notare le frequenze dominanti nei vari parametri che descrivono lo stesso sisma come in fig.2.3.1-1 La time history dell'accelerazione mostra una significativa porzione del sisma alle alte frequenze. L'integrazione successiva produce un smussamento (smoothing) o effetto filtro delle alte frequenze, quindi la time history della velocità che si ricava mostra una porzione sostanzialmente inferiore di alte frequenze rispetto a quella della accelerazione.

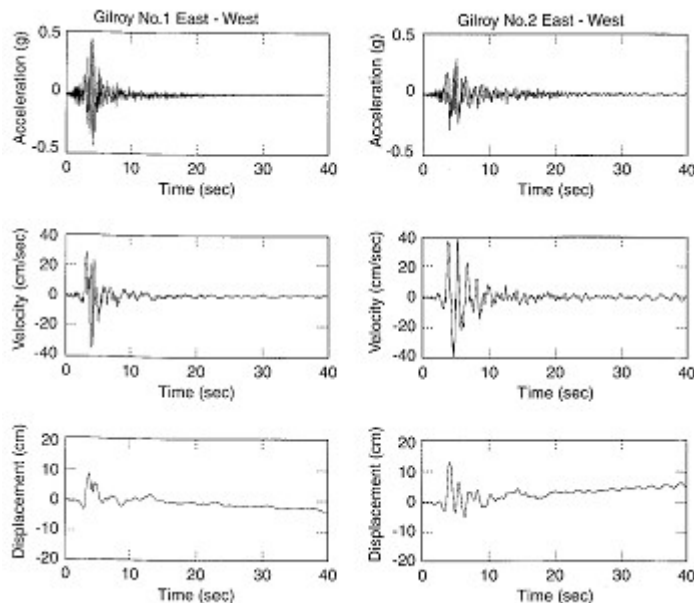


Fig.2.3.1-1 Esempio dell'effetto filtro dovuto all'integrazione dell'accelerazione per ricavare spostamenti e velocità

Analogamente accade nel processo di integrazione dalla time history della velocità a time history degli spostamenti che risulta dominata da un moto a basse frequenze.

2.3.1.1 Accelerazione di picco

Una misura molto comune di ampiezza del moto sismico è l'accelerazione orizzontale di picco

(peak horizontal acceleration PHA), è la misura del valore assoluto massimo dell'accelerazione ottenuto dalla somma vettoriale delle componenti misurate. L'accelerazione di picco è comunemente usata per descrivere il moto del terreno in quanto è un parametro direttamente legato alle forze di inerzia indotte dalle forze dinamiche alle strutture, in particolare a strutture di elevata rigidità. Il PHA è anche correlato anche all'intensità sismica ma questa correlazione non è precisa. L'uso di relazione intensità-attenuazione permettono la stima della variazione spaziale dell'accelerazione di picco. L'accelerazione verticale ha ricevuto nel tempo minore attenzione rispetto alla componente orizzontale, primariamente perchè il margine di sicurezza ai carichi verticali delle strutture è usualmente sufficiente per resistere all'incremento della forza gravitazionale imposto dal picco di accelerazione verticale (peak vertical acceleration PVA) durante l'evento sismico. In genere a scopi ingegneristici si viene assunta il PVA come proporzionale al PHA per un valore che varia da $PVA = 1/2 \div 2/3$ PHA in genere si è osservato che la distanza dalla sorgente sismica è il fattore principale che influenza il valore di questo rapporto, con i valori maggiori in prossimità della sorgente e i valori inferiori a maggiore distanza da questa. Pochi terremoti hanno evidenziato valori dell'accelerazione di picco verticale maggiori di quella orizzontale. L'accelerazione di picco è un parametro significativo ma non sufficiente in quanto diversi terremoti con picchi di accelerazioni superiori a 0,5g non hanno causato danni significativi. L'accelerazione di picco non fornisce di per sé informazioni sul contenuto in frequenza e sulla durata del terremoto.

2.3.1.2 Velocità di picco

L'accelerazione di picco orizzontale (peak horizontal velocity PHV) è un altro parametro per la caratterizzazione dell'ampiezza del movimento sismico. La velocità è meno sensibile alle componenti ad alta frequenza e caratterizza meglio a frequenze intermedie del moto sismico rispetto al PHA. La PHV è un parametro significativo per quelle strutture sensibili alle medie frequenze (ponti, edifici alti o flessibili) e analogamente alle accelerazioni è possibile correlarlo all'intensità sismica.

2.3.1.3 Altri parametri di amplificazione

- Accelerazione effettiva, concetto introdotto da Newmark e Hall (1982), intesa come accelerazione legata alla risposta strutturale e al danno potenziale del terremoto. È una funzione della dimensione dell'area caricata e del contenuto in frequenza del terremoto, e

per la parte strutturale entrano in gioco altezza, smorzamento, inerzia, rigidità della struttura e della sua fondazione.

- Massima accelerazione e velocità sostenibile, concetto introdotto da Nuttli (1979), utilizzando i picchi inferiori dell'accelerogramma per caratterizzare lo SGM e indicando come massima accelerazione sostenibile la terza o quinta massima accelerazione in valore assoluto sostenuta per tre o cinque cicli. E' utilizzata come indicatore di danno potenziale.

2.3.2 Contenuto in frequenza

La risposta dinamica di edifici, pendii, scavi ecc.. è molto sensibile alla frequenza con cui vengono sollecitati questi sistemi. Il terremoto produce un processo di carico molto complesso con componenti del moto che spaziano in un campo di frequenze molto diverse. Il contenuto in frequenza descrive come l'ampiezza del moto viene distribuita a diverse frequenze. Il contenuto in frequenza di un moto sismico è fortemente influenzato dagli effetti del moto stesso e la caratterizzazione di un moto sismico non può essere completa senza considerare il contenuto in frequenza.

2.3.3 Spettro sismico

Ogni funzione periodica può essere espressa utilizzando l'analisi di Fourier con una somma di serie di semplici funzioni armoniche di diversa frequenza, ampiezza e fase. Usando le serie di Fourier posta la funzione periodica $x(t)$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

In questa forma c_n e ϕ_n sono l'ampiezza e l'angolo di fase rispettivamente per la n-esima funzione armonica. La serie di Fourier provvede ad una completa descrizione del moto sismico da cui si possono ricavare le componenti attraverso l'inversa della trasformata di Fourier.

- Spettro di Fourier: Un grafico della funzione di Fourier dell'ampiezza rispetto alla frequenza è conosciuto come spettro di ampiezza di Fourier, e il grafico della fase rispetto alla frequenza è detto spettro della fase di Fourier. Lo spettro in ampiezza del moto sismico mostra come l'ampiezza del moto sia distribuita rispetto alla frequenza, uno spettro stretto implica che il moto ha una frequenza dominante che produce una uniforme time history. Un largo spettro in ampiezza di Fourier implica che il moto

sismico contiene diverse frequenze che producono un irregolare time history. L'ampiezza dell'accelerazione di Fourier tende ad ingrandire un range di frequenze intermedie ai cui estremi si trovano basse frequenze (corner frequency) e alte frequenze (cutoff frequency). Le basse frequenze si possono analizzare teoricamente con una relazione diversamente proporzionale alla radice cubica del momento sismico e questo risultato indica che i terremoti su larga scala producono principalmente moti a bassa frequenza rispetto ai terremoti su ridotta scala. Le alte frequenze non sono ben descritte e la loro caratterizzazione cambia principalmente per effetti di sito ed effetti di sorgente per cui, in genere, vengono assunte costanti. Lo spettro di fase di Fourier influenza la variazione del moto sismico nel tempo, in contrasto con lo spettro in ampiezza, e non presenta significative caratteristiche di forma ricavabili dal suo grafico.

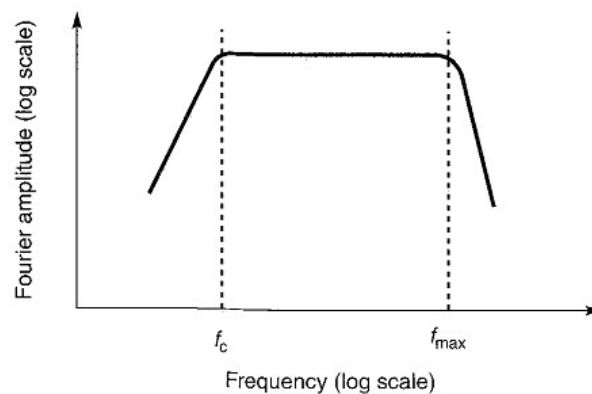


Fig.2.3.3-1 Forma idealizzata di uno spettro in ampiezza uniforme di Fourier, che illustra le frequenze inferiori f_c e superiori f_{max}

- Spettro in forza : Il contenuto in frequenza del moto sismico può essere descritto dallo spettro in forza o da una funzione di densità dello spettro. In genere viene utilizzato per stime statistiche delle proprietà del moto utilizzando tecniche di vibrazioni casuali e analisi stocastiche.
- Spettro di risposta : Descrive la massima risposta di un sistema ad un singolo grado di libertà (singol degree of freedom SDOF) sottoposto a un input sismico come funzione della propria frequenza naturale e soggetto ad un proprio smorzamento. La forma di un tipico spettro di risposta indica il picco spettrale in accelerazione, velocità e spostamento associandoli a differenti frequenze. A basse frequenze buona parte dello spettro di spostamento è circa costante, alle alte frequenze buona parte dello spettro in accelerazione è circa costante. Nelle frequenze comprese fra le precedenti è lo spettro in velocità ad essere circa costante. A causa di questo comportamento lo spettro in risposta è usualmente diviso in controllo di accelerazione, controllo in velocità, controllo in spostamento.

2.3.4 Durata del terremoto

La durata del moto sismico può avere una forte influenza nei danni che esso causa. Molti processi fisici come la degradazione della rigidità e della resistenza per sovrappressioni interstiziali per sabbie sciolte e sature o in argille sovraconsolidate sono sensibili al numero di cicli che occorrono durante il terremoto. Un moto sismico di breve durata produce un'inversione del carico se l'ampiezza del moto è elevata, in altri casi moti sismici di moderata ampiezza ma di lunga durata possono produrre inversione di carico e produrre sostanziali danni. La durata del moto sismico in relazione al tempo richiede un rilascio di energia di deformazione accumulata fino alla rottura lungo la faglia.

2.4 Proprietà dinamiche del suolo

Comportamento non lineare e dissipativo dei terreni

La fenomenologia dell'evento sismico richiede l'analisi del comportamento meccanico del terreno in condizioni di taglio semplice. Si sottopone un elemento di sottosuolo, a partire dalle condizioni geostatiche, ad una tensione tangenziale variabile nel tempo con legge irregolare $\tau(t)$. Per effetto di questa storia di sollecitazione, il legame tensione-deformazione tangenziale si manifesta non lineare, non reversibile (quindi con dissipazione di energia meccanica) e fortemente dipendente dalla storia delle sollecitazioni applicate.

Per un singolo processo di carico-scarico-ricarico, in termini di tensioni tangenziali, il terreno mostra un comportamento efficacemente rappresentabile mediante una coppia di parametri:

- modulo di rigidità a taglio G
- fattore di smorzamento D (damping ratio)

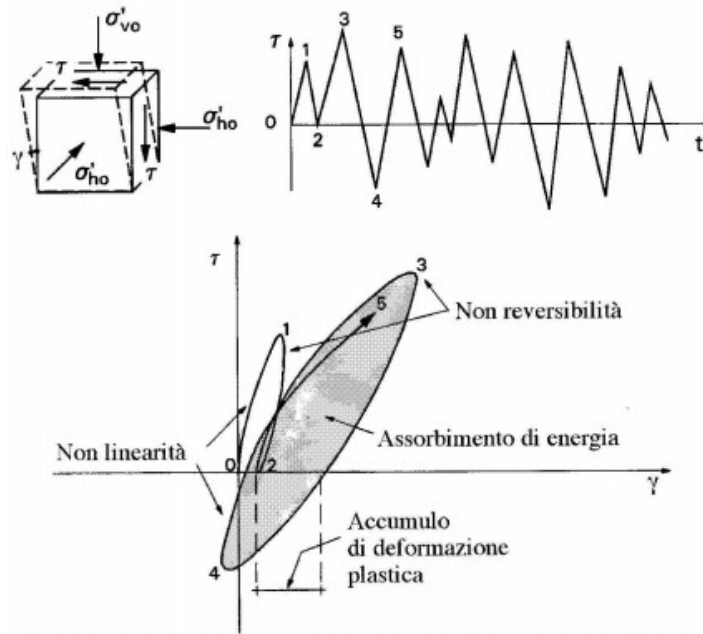


Fig.2.4-1 Comportamento di un elemento di terreno sottoposto ad una sollecitazione di taglio semplice variabile nel tempo con legge irregolare

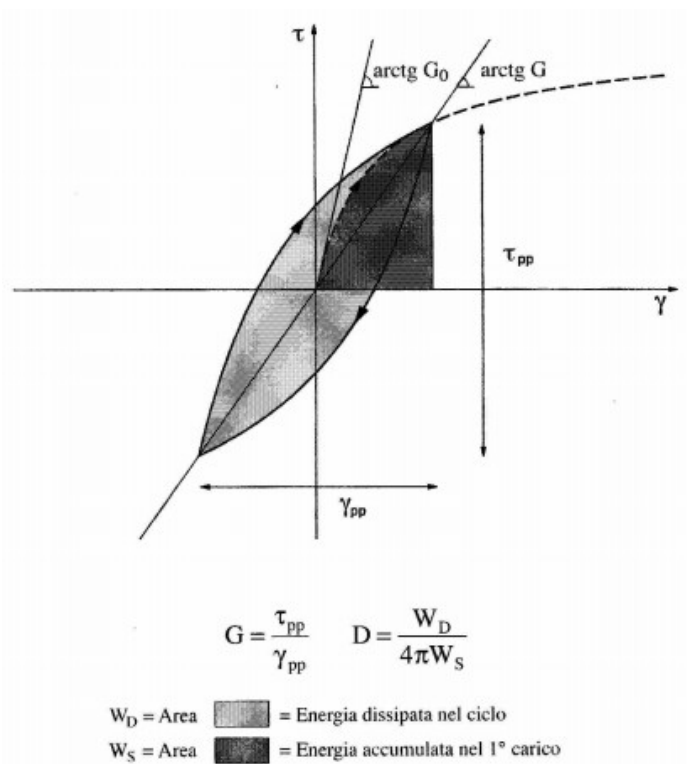


Fig.2.4-2 Definizione dei parametri di rigidezza a taglio G , fattore di smorzamento D , in un ciclo tensione-deformazione tangenziale

Questi parametri variano con il livello di deformazione tangenziale γ impresso all'elemento di volume. A seconda della fenomenologia osservabile sono individuabili tre campi di comportamento, distinti ma contigui:

- piccole deformazioni
- medie deformazioni
- grandi deformazioni (fino a rottura)

Comportamento a piccole deformazioni

Il modulo G assume un valore iniziale massimo G_0 , che si mantiene pressochè costante per livelli deformativi inferiori a una soglia di linearità γ_l . Questa assume un valori variabili tra lo 0.0001% e 0.01% in relazione alle caratteristiche granulometriche e microstrutturali del terreno. Per $\gamma < \gamma_l$ la risposta durante un ciclo completo è caratterizzata da energia dissipata percentualmente molto ridotta rispetto a quella impressa (quindi $D \approx 0$) (fig.2.4-3a). Il legame τ - γ è quindi rappresentabile con un modello lineare, elastico o al più visco-elastico.

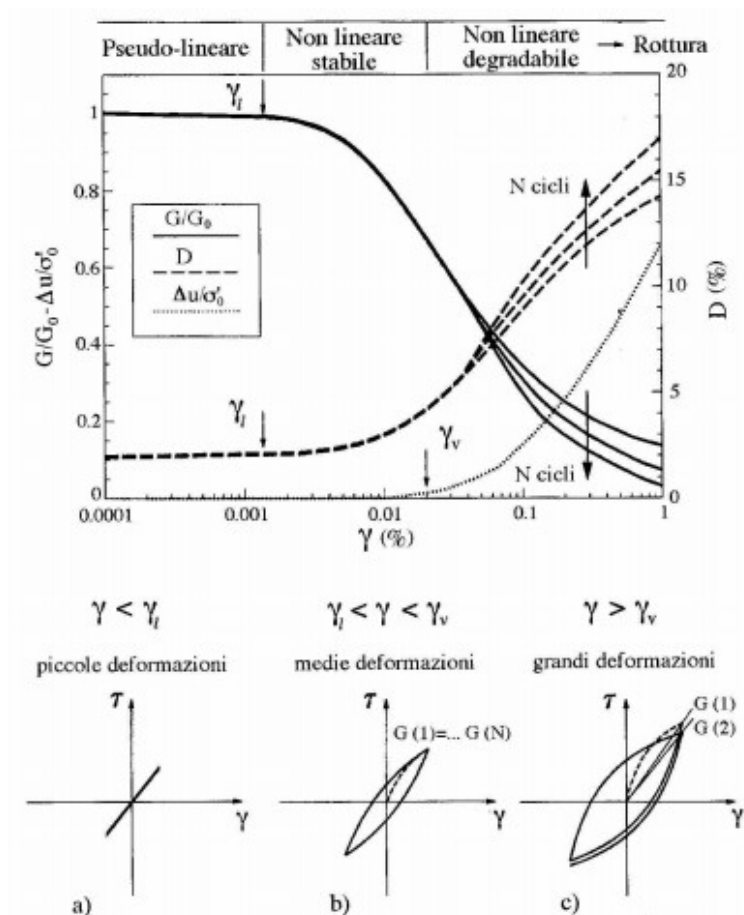


Fig.2.4-3 Livelli deformativi ed aspetti del comportamento meccanico del terreno in condizioni di taglio semplice ciclico

Comportamento a medie deformazioni

Per deformazioni superiori alla soglia γ_1 il terreno mostra un comportamento marcatamente non lineare e dissipativo, evidenziato da una sensibile riduzione di \mathbf{G} e da un corrispondente aumento di \mathbf{D} con γ . L'aspetto dei cicli τ - γ si modifica al crescere dell'ampiezza della sollecitazione, ma il materiale conserva tuttavia un comportamento stabile ed indipendente dalla storia di carico. Infatti sotto una sollecitazione ciclica di ampiezza costante, il terreno ripercorre lo stesso ciclo tensione-deformazione (fig. 2.4-3b). In altre parole, definendo per ogni valore di γ una coppia di parametri equivalenti \mathbf{G} e \mathbf{D} , nelle analisi numeriche il legame costitutivo del terreno può essere attendibilmente simulato con un modello lineare equivalente.

Comportamento a grandi deformazioni

All'aumentare dell'ampiezza delle sollecitazioni cicliche, si individua un ulteriore livello di deformazione la soglia volumetrica γ_v , superiore a γ_1 per uno o due ordini di grandezza, oltre questa soglia il terreno risente dell'accoppiamento tra deformazioni distorsionali e volumetriche. Per effetto di ogni singolo ciclo τ - γ conseguono non trascurabili valori residui delle deformazioni volumetriche ϵ_v (in condizioni drenate) o delle sovrappressioni neutre Δu (in condizioni non drenate). In altri termini il comportamento meccanico del terreno (espresso mediante \mathbf{G} e \mathbf{D}) evolve, in genere degradando, con il numero di cicli di carico N (fig.2.4-3c). Come estrema conseguenza del fenomeno di degradazione ciclica in condizioni non drenate, si assiste alla rottura del terreno per improvvisa perdita di resistenza al taglio a seguito di annullamento delle pressioni effettive, nota come liquefazione ciclica. A questi livelli di deformazione, il legame costitutivo non può che essere descritto da un modello non lineare di tipo elasto-plastico.

Tecniche di caratterizzazione sperimentale

In genere i volumi di terreno coinvolti nell'interazione con le opere di ingegneria sono in massima parte interessati da uno stato di deformazione contenuto, con ampiezze γ entro l'ordine del 1%, anche per terremoti di elevata magnitudo. Per gli studi di risposta sismica locale finalizzati alla previsione delle azioni sismiche di progetto sui manufatti è in genere sufficiente caratterizzare il comportamento meccanico del terreno mediante la determinazione sperimentale delle curve \mathbf{G} - γ e \mathbf{D} - γ . Per l'analisi del comportamento sismico dei terreni si fa ricorso a tecniche sperimentali come:

- prove geofisiche in sito, per la definizione del profilo del sottosuolo in termini di rigidità iniziale G_0 , ottenuta mediante la misura della velocità V_s dei terreni nella loro sede naturale e l'uso della relazione:

$$G = \rho V_s^2$$

- prove cicliche o dinamiche di laboratorio, per l'analisi dettagliata del comportamento non lineare e non reversibile dei terreni, in condizioni di sollecitazione controllabili dallo sperimentatore e in un campo che spazia dalle piccole alle grandi deformazioni.

Le due famiglie di tecniche, in sito e in laboratorio, non vanno ritenute una alternativa all'altra poiché entrambe presentano vantaggi e controindicazioni che ne circoscrivono il campo di applicazione. Le prove in sito offrono il vantaggio di descrivere con continuità le caratteristiche del terreno in sede. Esse sono interpretabili in base alla teoria della trasmissione di onde nel mezzo elastico ideale, avvalorata dai livelli deformativi indotti dalle vibrazioni utilizzate limitate al campo lineare. Questa stessa condizione preclude la possibilità di estendere tali indagini al comportamento dei terreni in campo non lineare. Le prove in laboratorio consentono l'analisi di un campo di sollecitazioni e deformazioni molto più ampio, ma presentano problemi come il disturbo prodotto dal campionamento e preparazione dei provini, dalla difficoltà nel riprodurre lo stato tensionale in sito e dalla dimensione ridotta dei provini rispetto ai volumi significativamente coinvolti dall'interazione con le opere di ingegneria.

Nella tabella seguente si specifica potenzialità e campi di misura delle tecniche adottate in genere.

Tipo di prova		Stato tensionale	Deformazione tangenziale $\gamma(\%)$	Frequenza $f(\text{Hz})$	Rigidità	Smorzamento		
In sito	Convenzionali	SPT	Litostatico	$<10^{-3}$	10-100	-		
		CPT						
	Geofisiche	Down-Hole					$V_s \rightarrow G_0$	
		Cross-Hole					$V_s \rightarrow G_0$	
		SASW					$V_R \rightarrow V_s \rightarrow G_0$	
Laboratorio	Cicliche	Triassiale	Simmetria radiale	$>10^{-2}$	0.01-1	$\sigma - \epsilon \rightarrow E \rightarrow G$	$W_D / W_S \rightarrow D$	
		Taglio semplice	Simmetria radiale	$>10^{-2}$	0.01-1	$\tau - \gamma \rightarrow G$		
		Taglio torsionale	Simmetria radiale o triassiale vero	10^{-4} -1	0.01-1	$\tau - \gamma \rightarrow G_0, G$		
	Dinamiche	Trasduttori piezoceramici	Simmetria radiale	$<10^{-3}$	>100	$V_s \rightarrow G_0$		Possibile
		Colonna risonante	Simmetria radiale o triassiale vero	10^{-5} -1	>10	$f_r \rightarrow G_0, G$		H.p., R.f. $\rightarrow D$

q_c, N_{SPT} = resistenze penetrometriche da prove statiche e dinamiche
 f_r = frequenza di risonanza; H.p. = metodo della semibanda di potenza; R.f. = metodo del fattore di risonanza

Rigidezza a piccole deformazioni

La dipendenza del modulo G_0 dalle variabili di stato (tensione effettiva media p' , indice dei vuoti e , grado di sovraconsolidazione OCR) può essere espressa con relazioni semiempiriche nella forma:

$$\frac{G_0}{p_a} = S \left(\frac{p'}{p_a} \right)^n f(e) OCR^m$$

semiempiriche nella forma:

dove $f(e)$ è una funzione decrescente dell'indice dei vuoti, p_a la pressione atmosferica.

I numerosi sperimentali forniscono espressioni di $f(e)$ come quella suggerita da Hardin e Black:

$$f(e) = \frac{(2.973 - e)^2}{1 + e}$$

Vinale riporta le variazioni di S , n , m con l'indice di plasticità I_p come in fig.2.4-4

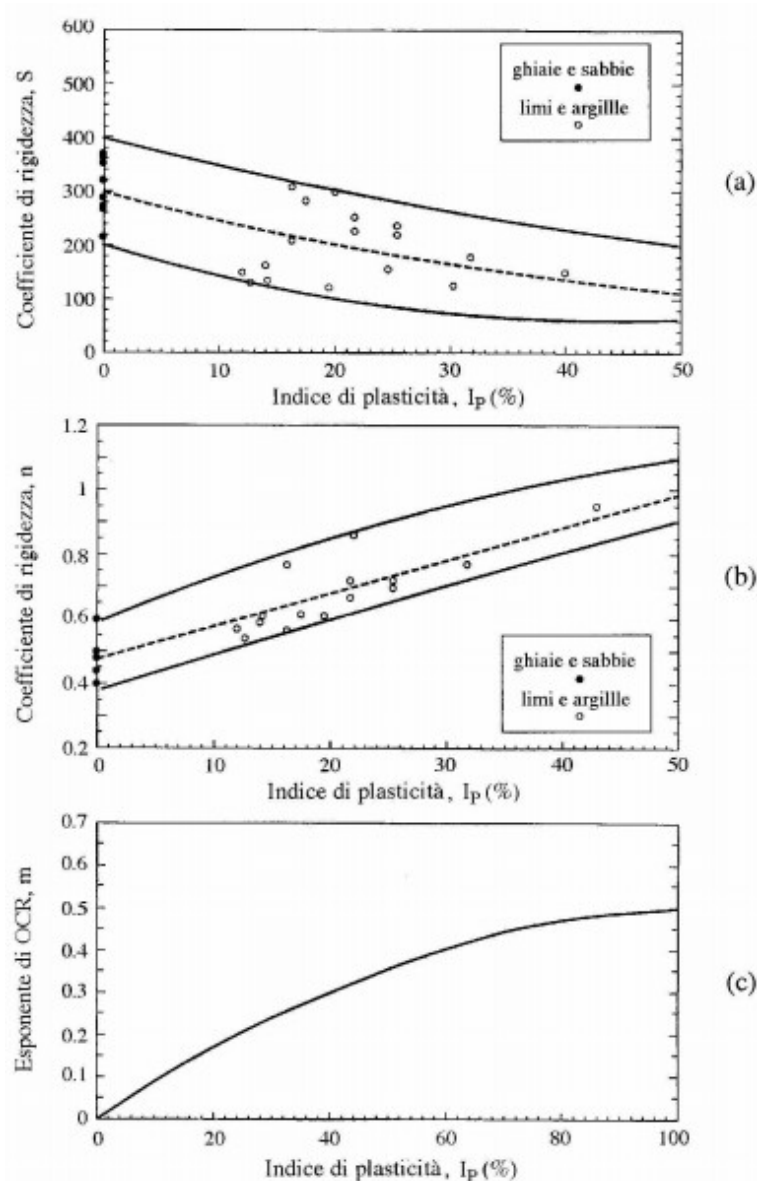


Fig.2.4-4 Variazione dei parametri di rigidità S , n , m con l'indice di plasticità I_p

L'esperienza ha mostrato che, nell'ambito di profondità non particolarmente elevate, alle diverse classi di terreno sono associabili gli intervalli tipici di valori V_s insieme ai corrispondenti campi di variazione di densità.

Materiali	ρ (t/m ³)	V_s (m/s)
terreni organici, torbe	1.0 - 1.3	< 100
argille molto molli	1.4 - 1.7	
terreni piroclastici sciolti	1.0 - 1.7	100 - 200
argille tenere, sabbie sciolte	1.6 - 1.9	
terreni piroclastici densi/cementati	1.2 - 1.9	200 - 400
argille consistenti, sabbie dense	1.8 - 2.1	
roccia tenera	1.5 - 2.2	400 - 800
roccia lapidea	2.5 - 3.0	> 800

Fig.2.4-5 Valori indicativi di ρ e V_s per terreni naturali

Smorzamento a piccole deformazioni

L'influenza di fattori costitutivi e variabili di stato sullo smorzamento a basse deformazioni D_0 è, sia quantitativamente che qualitativamente, meno documentata in letteratura rispetto a quanto accade per la rigidezza. Questo accade in quanto la misura di D_0 è affetta da maggiori incertezze sperimentali rispetto a G_0 e V_s . Per un dato terreno lo smorzamento diminuisce con l'aumento dello stato tensionale effettivo, ma gli andamenti ed i valori tipici di D_0 variano da materiale a materiale, non sempre consentendo una chiara valutazione degli effetti dei fattori costitutivi. Le fasce di variazione puramente indicative sono:

- per terreni granulari (sabbie, ghiaie), il campo di variazione di D_0 con lo stato e la storia tensionale è ristretto, e i valori prossimi a zero.
- per terreni a grana fine i valori tipici e il gradiente di diminuzione di D_0 con la tensione effettiva aumentano passando da argille consistenti a tenere e, a parità di stato e storia tensionale, i valori caratteristici di D_0 aumentano con l'indice di plasticità.
- i valori di D_0 per terreni costipati a grana medio-fine spesso risultano di quelli tipici di argille naturali. Questo a causa della mancanza del processo di diagenesi nella storia della formazione del terreno da costruzione e della conseguente minore stabilità e continuità della microstruttura.

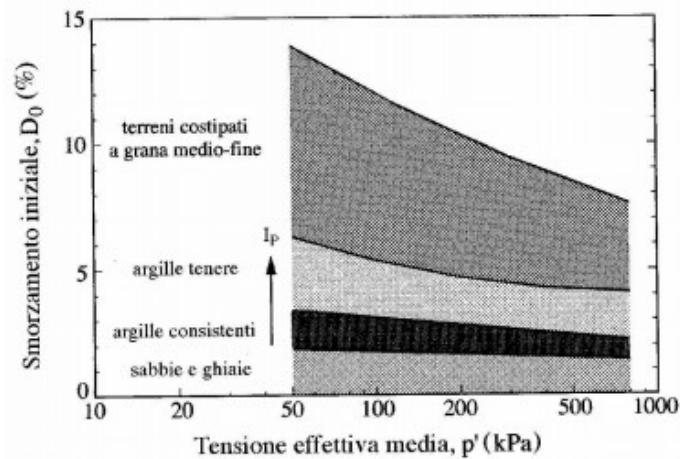


Fig.2.4-6 Dipendenza del fattore di smorzamento iniziale D_0 dal tipo di terreno e dalla tensione effettiva

Rigidità e smorzamento in campo non lineare

Per descrivere la dipendenza dal comportamento non lineare dai fattori costitutivi sono state create numerose correlazioni empiriche sui dati sperimentali, nella maggioranza dei casi la posizione e la forma delle curve G e D sono associate a valori variabili di I_p . Nella fig.2.4-7 si vede che l'estensione del campo pseudo-lineare si amplia con l'aumentare di I_p .

Per terreni più fini e mineralogicamente più attivi si assiste ad un aumento della soglia di linearità γ_l e di quella di accoppiamento volumetrico-distorsionale γ_v in proporzione a I_p .

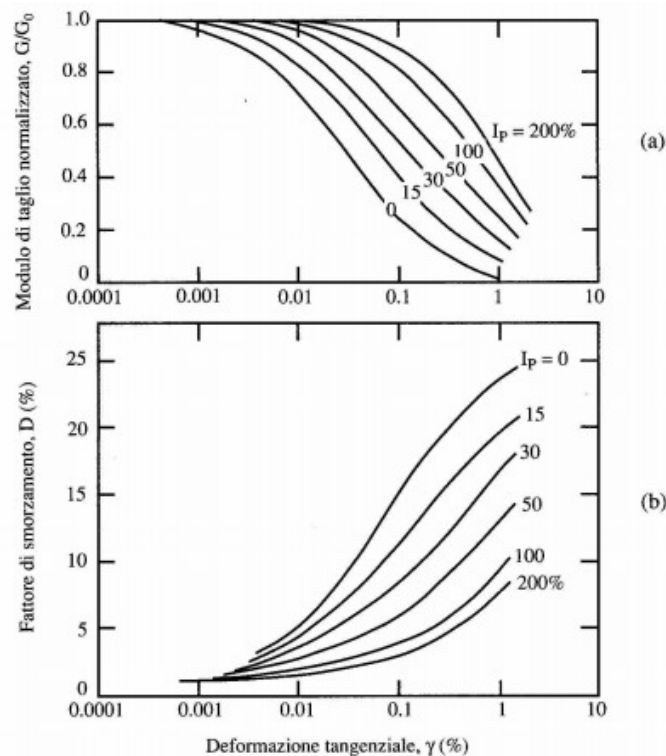


Fig.2.4-7 Dipendenza del comportamento non lineare dall'indice di plasticità in termini di
a) rigidità normalizzata b) fattore di smorzamento

2.5 Modellazione e analisi del comportamento tensione-deformazione di terreni soggetti a carichi ciclici

2.5.1 Modello lineare equivalente

Un elemento di terreno soggetto a cicli di carico simmetrici, posto al di sotto della superficie e lontano da strutture, esibisce dei cicli di isteresi analoghi a quelli della fig.2.5.1-1. I cicli di isteresi possono essere descritti in due modi:

- dal percorso stesso del ciclo
- da parametri che ne descrivono la forma generale

In generale due importanti caratteristiche della forma del ciclo di isteresi sono l'inclinazione e la sua larghezza. L'inclinazione del ciclo dipende dalla rigidezza del terreno, la quale può essere descritta con il modulo di taglio tangenziale G_{tan} , di alcuni punti durante il processo di carico. Ovviamente G_{tan} varia durante il ciclo di carico ma il suo valore medio durante il ciclo si può approssimare con il modulo di taglio secante

$$G_{sec} = \frac{\tau_c}{\gamma_c}$$

dove τ_c e γ_c sono rispettivamente la tensione tangenziale e l'ampiezza di deformazione tagliante, questo modulo descrive l'inclinazione generale del ciclo di isteresi. La larghezza è legata all'area del ciclo come misura della dissipazione di energia, convenientemente descritta dall'indice di smorzamento

$$\xi = \frac{W_D}{4\pi W_S} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_{loop}}{G_{sec} \gamma_c^2}$$

dove W_D è l'energia dissipata, W_S la massima energia di deformazione e A_{loop} l'area del ciclo di isteresi, analogamente a quanto descritto nell'introduzione teorica al problema.

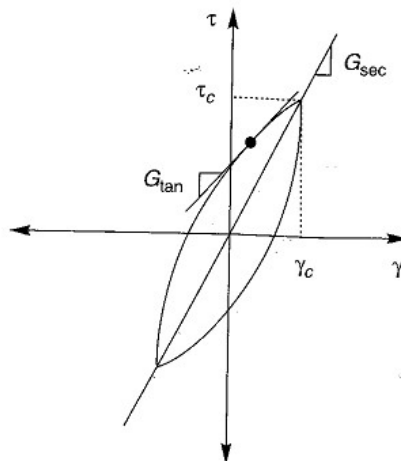


Fig. 2.5.1-1 Individuazione dei moduli di taglio nel ciclo di isteresi

I parametri G_{sec} e ξ sono i parametri di riferimento per il modello di materiale lineare equivalente. Il modello lineare equivalente è solo una approssimazione del reale comportamento non lineare del terreno, l'assunzione di linearità è spesso utilizzata per analisi di risposta sismica, come la propagazione delle onde, ma non può essere utilizzata direttamente per problemi che considerano l'accumulo di spostamenti o collassi. Alla fine del processo nel modello lineare equivalente la deformazione torna a zero e il materiale non ha limiti di resistenza e non può quindi giungere a collasso. Questo metodo rimane valido per lo studio della propagazione dell'onda sismica nel terreno.

2.5.2 Modelli non lineari ciclici

Il comportamento tensione-deformazione non lineare del terreno può essere accuratamente rappresentato da un modello non lineare ciclico, che segue il percorso tensione-deformazione durante il carico ciclico. Molti modelli sono stati sviluppati per rappresentare questo comportamento, tutti caratterizzati da una curva backbone e da una serie di regole che governano il comportamento di scarico e carico: la degradazione della rigidità e altri effetti che si aggiungono al precedente rendono la trattazione via via più complessa con gli effetti di un carico irregolare, densificazione, aumento pressione neutra.

La forma della curva backbone utilizza due parametri: la rigidità iniziale a piccole deformazioni e la resistenza a taglio del terreno. Una possibile funzione per descrivere la funzione backbone è l'iperbole

$$F_{bb}(\gamma) = \frac{G_{max}\gamma}{1 + (G_{max}/\tau_{max})|\gamma|}$$

Le quantità G_{max} e τ_{max} possono essere misurate direttamente o ottenuta da correlazioni empiriche

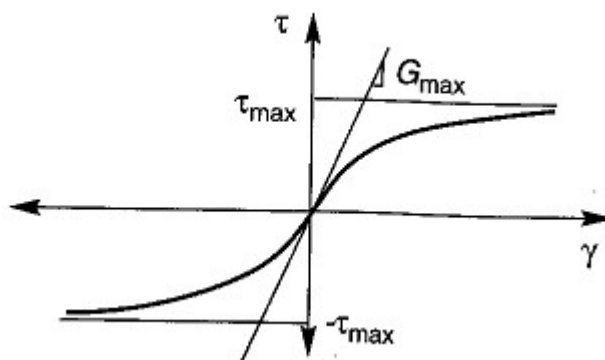


Fig.2.5.2-1 Curva backbone iperbolica

3 Collasso dei diaframmi a moto sismico

3.1 Risultati sperimentali di prove su modello

Sul comportamento di opere di sostegno flessibili, sotto condizioni sismiche, R.Conti, G.S.P. Madabhushi e G.M.B. Viggiani hanno descritto i risultati di una indagine sperimentale su modelli in sabbia asciutta.

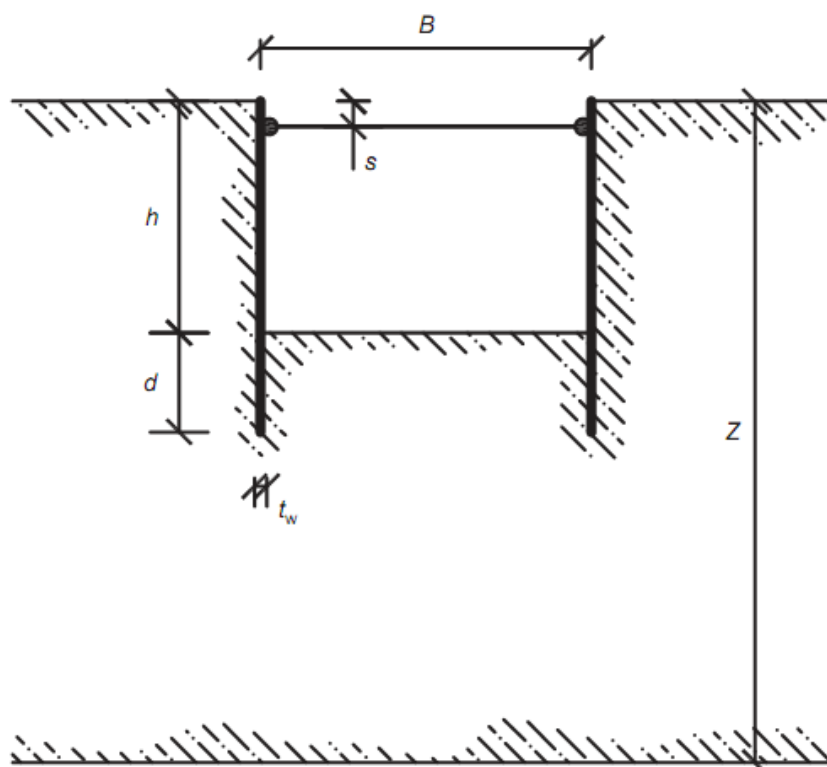


Fig.3.1-1 Modello geometrico

I modelli sono preparati in centrifuga, la quale permette di ricreare artificialmente un effetto simile alla compattazione gravitazionale. Il modello è così composto da due paratie accoppiate con puntoni ad un livello, e da sabbia silicea fina e asciutta ricostituita in laboratorio con un angolo di attrito critico di $\varphi_{cv} = 32^\circ$, densità $D_r = 42\%$ e indice dei vuoti $e = 0.84$. I risultati degli esperimenti indicano che per accelerazioni massime inferiori al valore limite di equilibrio critico, le paratie sviluppano spostamenti permanenti incrementando la risposta strutturale mentre, per grandi accelerazioni, la paratia matura spostamenti in condizione di risposta strutturale costante.

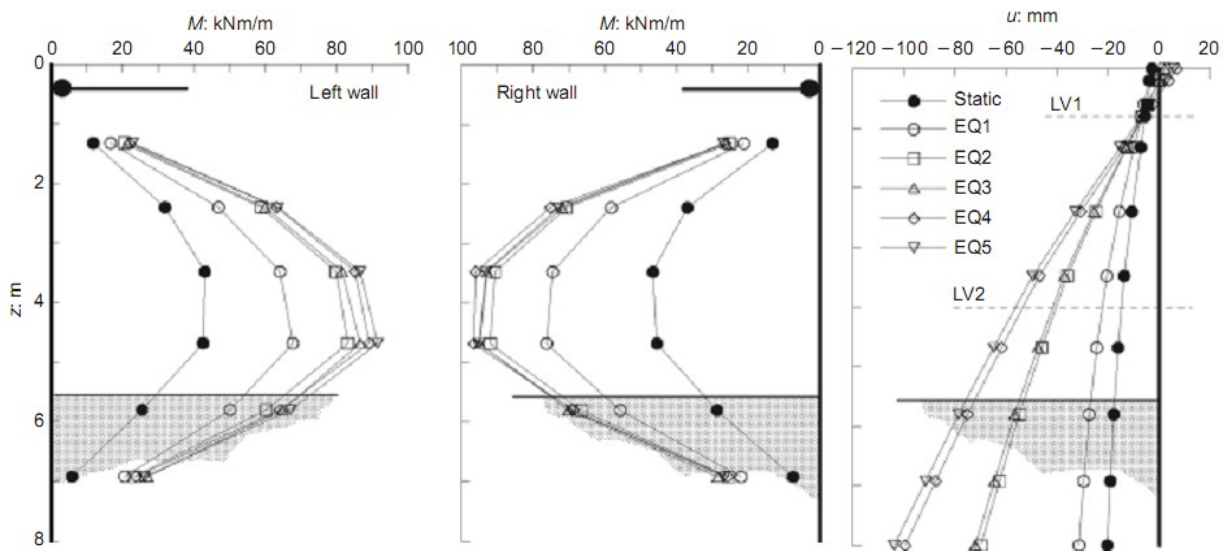


Fig. 3.1-2 Andamento di sollecitazioni e spostamenti

Le paratie non maturano grandi cedimenti se il sisma che le colpisce è più debole dell'evento sismico subito in precedenza. Si definisce accelerazione critica l'accelerazione minima tale da segnare l'inizio del campo di spostamenti a risposta strutturale costante. Dopo un forte evento sismico si ha un incremento del valore di accelerazione critica, in quanto si ha una redistribuzione della pressione a tergo della paratia e la progressiva mobilitazione della resistenza passiva di fronte alla stessa. Si rileva inoltre che gli spostamenti cumulati dalla paratia dipendono dall'intero evento sismico e non dall'intensità del terremoto.

3.2 Confronto fra analisi di equilibrio limite, pseudo-statiche e dinamiche

Si riportano i risultati di una analisi eseguita da Callisto e riportata nell'articolo "Capacity design of embedded retaining structures 2014". L'articolo tratta il confronto fra i risultati ottenuti con i metodi pseudo-statici e i risultati di un'analisi numerica dinamica alle differenze finite. L'opera in questione è una paratia puntellata in testa e soggetta a sisma come da fig.3.2-1

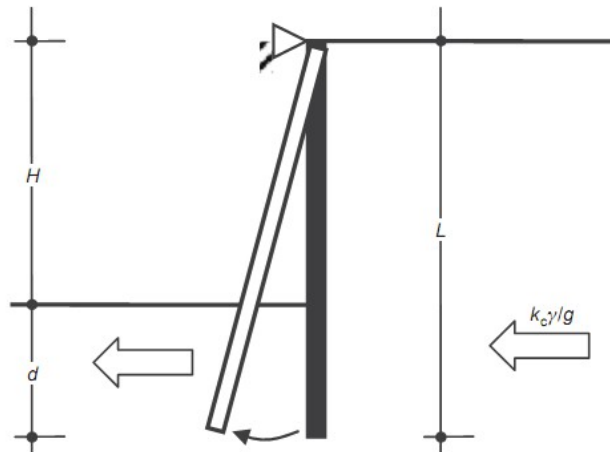


Fig.3.2-1 Paratia puntellata in testa

Si assume che la paratia sia immersa in un deposito sabbioso uniforme e asciutto con peso specifico $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, angolo di attrito costante e pari a $\phi' = 35^\circ$, angolo di dilatanza $\psi = 0^\circ$ e angolo di attrito terreno-struttura $\delta = 20^\circ$. Non viene considerata la dipendenza dell'angolo di attrito ϕ' dallo stato tensionale efficace. Come primo passo si confrontano gli approcci semplificati dei metodi ad equilibrio limite e le analisi pseudo-statiche con il codice alle differenze finite Flac. Nelle analisi pseudo-statiche si pone una forza di volume uniforme k_h espressa come frazione della forza di gravità. Questo valore viene incrementato progressivamente finché il sistema riesce a convergere alla soluzione. Il valore k_h che porta alla perdita della convergenza e sviluppa nel modello un chiaro meccanismo di collasso associato allo scorrimento plastico, è definito coefficiente critico k_c . Successivamente si è svolta un'analisi dinamica completa per il confronto dei risultati, il modello numerico è mostrato in fig.3.2-2. Il modello di terreno utilizzato è un modello a smorzamento isteretico. Questo modello è un'estensione allo spazio bi-dimensionale del modello non lineare che descrive i cicli di carico e scarico e deformazione secondo le regole di Masing. La curva backbone è calibrata per riprodurre il decadimento del modulo di taglio secondo Seed e Idriss. La rigidità alle piccole deformazioni è espressa come una funzione della tensione media effettiva p'

$$\frac{G_0}{p_{\text{ref}}} = K_G \left(\frac{p'}{p_{\text{ref}}} \right)^{0.5}$$

dove si pone $p_{\text{ref}} = 100\text{kPa}$ e $K_G = 1000$

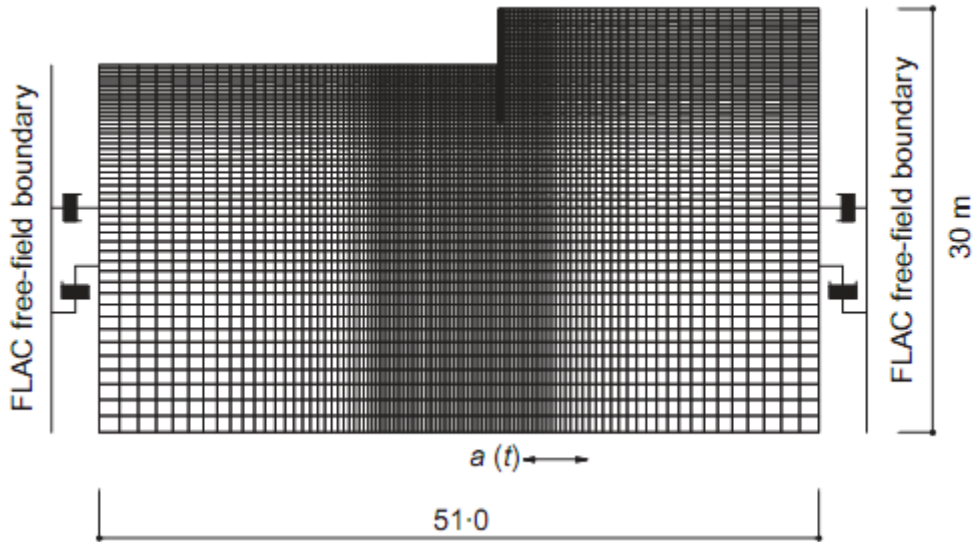


Fig.3.2-2 Modello numerico per l'analisi dinamica

Al modello numerico di fig.3.2-2 si applica l'accelerogramma di due eventi sismici fig.3.2-3 e se ne studiano le sollecitazioni derivate. La procedura di integrazione temporale viene tarata in funzione del terreno e dell'accelerogramma che lo sollecita, per questo si utilizza lo spettro di Fourier che evidenzia il contenuto in frequenza dell'evento sismico.

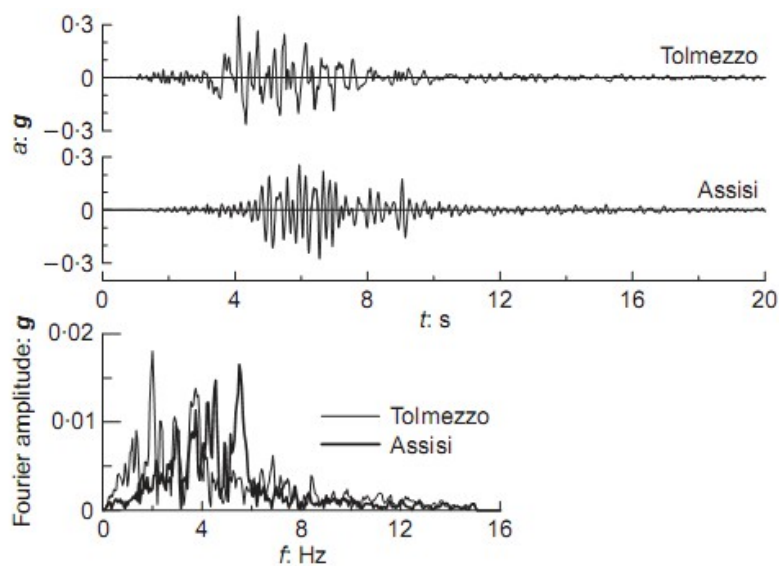


Fig.3.2-3 Time histories e spettro di Fourier di due eventi sismici utilizzati nell'analisi

Si eseguono i calcoli per l'analisi di equilibrio limite e pseudo-statica tenendo in conto il puntello come un vincolo alla traslazione, mentre l'analisi dinamica viene eseguita in due casi, il primo considera il puntello come un vincolo traslazionale non permettendone lo spostamento e il secondo tenendo in conto la deformazione del puntello così come avviene nella realtà con la traslazione dell'appoggio in funzione della spinta della paratia. Si ottengono i seguenti risultati:

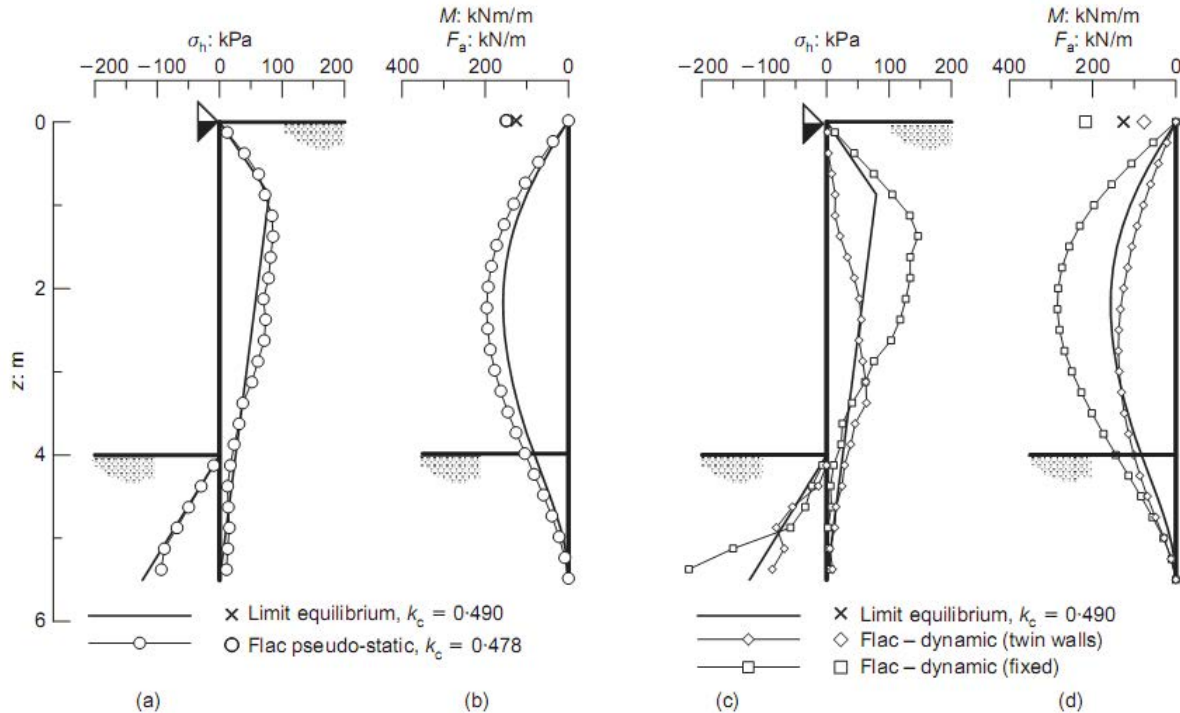


Fig.3.2-4 Andamento delle sollecitazioni nella paratia

nella fig.3.2-4 nel caso a) l'andamento dell'analisi con il metodo dell'equilibrio limite viene ricalcato dai risultati del metodo pseudo-statico, che indica per la spinta attiva valori leggermente superiori e valori inferiori per la spinta passiva. Il caso b) si delinea come la determinazione della spinta attiva maggiore per l'analisi pseudo-statica porta a sollecitazioni maggiori nella paratia. Il caso c) mette a confronto le spinte calcolate con il metodo dell'equilibrio limite, che evidenzia un andamento qualitativamente diverso rispetto all'analisi dinamica con puntello deformabile ma di intensità confrontabile, mentre l'analisi dinamica con vincolo alla traslazione in testa evidenzia un andamento delle sollecitazioni analogo ai risultati del metodo dell'equilibrio limite ma con intensità notevolmente diversa, quasi raddoppiata. Nel caso d) le sollecitazioni nella paratia si traducono come molto simili per il metodo dell'equilibrio limite e l'analisi dinamica con puntello deformabile mentre rimane molto superiore la sollecitazione dinamica con vincolo rigido.

Conclusioni

Per le paratie puntellate in testa il momento massimo valutato dalle analisi dinamiche è leggermente superiore alle analisi pseudo-statiche. Il ruolo della deformabilità del puntello in testa è fondamentale nel calcolo delle sollecitazioni. Il meccanismo plastico evidenziato dalle analisi pseudo-statiche è attivato nelle analisi dinamiche solo nel caso estremo di paratia con vincolo fisso in testa, per il quale le forze che agiscono sono quasi il doppio rispetto alle condizioni pseudo-statiche. Quindi si ricava che le forze in gioco fra due paratie mutualmente connesse in testa, sono simili a quelle ottenute con il metodo pseudo-statico, ma il corrispondente meccanismo plastico mostra una discrepanza dall'attivazione stessa delle condizioni pseudo-statiche. Perciò le forze interne valutate nelle analisi pseudo-statiche si devono considerare come valori di riferimento, valori generalmente adeguati in fase di progetto ma che possono essere superati nel caso in cui i movimenti della paratia siano impediti durante l'evento sismico. Un vincolo rigido in testa alla paratia comporta che essa tende a vibrare con basse frequenze naturali. Come risultato generale le analisi dinamiche confermano che per importanti eventi sismici le forze interne della paratia non dipendono dalle proprietà del terremoto ma dalla resistenza del terreno.

4 Modellazione numerica

4.1 Modello costitutivo del terreno ipoplastico

4.1.1 Introduzione

L'ipoplasticità è una particolare classe di modelli costitutivi con non linearità incrementale, sviluppati per predire il comportamento del terreno. La base della struttura del modello ipoplastico è stata sviluppata durante gli anni '90 all'università di Karlsruhe. Nella ipoplasticità, al contrario della elasto plasticità, la componente deformativa non è scomposta nella parte elastica e plastica, e il modello non ha una formulazione esplicita delle superfici di snervamento e del potenziale di collasso plastico. Il modello ha la capacità di predire importanti comportamenti del terreno come gli stati critici, la dipendenza dal picco di tensione per la densità del terreno, la non linearità a piccole e grandi deformazioni, dipendenza della rigidità del terreno dalla direzione di carico. Questi punti sono contenuti nell'equazione ipoplastica nel tensore di deformazione non lineare \mathbf{D} . L'equazione base dell'ipoplasticità è

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{L} : \mathbf{D} + \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

dove \mathbf{T} è la valutazione della velocità tensionale (secondo Jaumann), \mathbf{D} Tensore delle deformazioni (secondo Eulero), \mathbf{L} e \mathbf{N} tensori del legame costitutivo rispettivamente del quarto e del secondo ordine. I primi modelli ipoplastici furono sviluppati per tentativi ed errori, principalmente nella scelta delle possibili funzioni, dalla più generale forma delle funzioni isotropiche, nei due tensori precedenti per valutare \mathbf{T} . Un passo importante nella ricerca e sviluppo del modello ipoplastico fu la proposta di Gudehus, per l'implementazione del concetto di stato critico, il quale propose la modifica dell'equazione precedente includendo l'influenza del livello medio di stress (barotropia) e della influenza della densità (picnotropia). L'equazione modificata si scrive come:

$$\dot{\mathbf{T}} = f_s \mathcal{L} : \mathbf{D} + f_s f_d \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

dove f_s e f_d sono scalari che esprimono l'influenza della barotropia e della picnotropia. Il modello di Gudehus è stato successivamente rifinito da von Wolffersdoff per incorporare la condizione di stato critico secondo Matsuoka – Nakai. Questo modello è al giorno d'oggi considerato uno standard per l'ipoplasticità in materiali granulari. Ulteriori successivi sviluppi si concentrano sui materiali a granulometria fine. Herle e Kolymbas modificano il modello di von Wolffersdoff per permettere l'utilizzo con materiali a basso angolo di attrito e una diversa calibrazione dei parametri rigidità normale e a taglio. Basato su questo modello e un principio di generalizzazione dell'ipoplasticità proposto da Niemunis, Masin sviluppa un modello per le argille con relativa procedura di calibrazione. Nel modello per le argille entra una corretta

predizione del comportamento a piccole deformazioni e il concetto di deformazione intergranulare. A questo punto si ha che l'ipoplasticità per i materiali granulari predice molto bene il comportamento a grandi e medie deformazioni mentre a piccole deformazioni e a carichi ciclici le previsioni non sono più corrette soprattutto per materiali con alta rigidità quasi-elastica. Per superare questo problema Niemunis e Herle hanno proposta anche per i materiali granulari il concetto di deformazione intergranulare determinato dalla direzione del carico precedente. La formulazione di questo modello si pone come:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{M} : \mathbf{D}$$

dove \mathbf{M} è il tensore materiale di quarto ordine che rappresenta la rigidità tangente. La deformazione totale può essere pensata come somma delle componenti relative alle deformazioni delle interfacce di contatto intergranulare, quantificata dal tensore di deformazione intergranulare δ e dalle componenti relative al riarrangiamento dello scheletro del terreno. Per le condizioni di carico inverso e condizioni di sovrappressioni neutrale si osserva una deformazione generalizzata alla sola interfaccia intergranulare e il comportamento del terreno è ipoelastico, mentre in condizioni di carico continuo si osserva una risposta generale che è anche affetta dal riarrangiamento dei grani nell'intero scheletro del terreno rendendo così il comportamento del terreno ipoplastico.

4.1.2 Specifiche per materiali granulari

Il modello ipoplastico per materiali granulari ha otto parametri del materiale: Φ_c , \mathbf{h}_s , \mathbf{n} , \mathbf{e}_{d0} , \mathbf{e}_{c0} , \mathbf{e}_{i0} , α , β . La loro procedura di calibrazione è descritta in dettaglio da Herle e Gudehus e una semplificazione di questa è descritta nel seguito.

Determinazione dell'angolo di attrito critico

Lo stato critico è ricercato con prove di taglio monotoniche, in cui sia l'incremento di tensione che l'incremento di deformazione volumetrica vanno a zero. In ogni caso si instaurano dei problemi durante la prova di taglio come la localizzazione della deformazione in bande di taglio. Una possibile soluzione è di determinare l'angolo di stato critico Φ_c direttamente da misure dell'angolo di riposo Φ_{rep} . Non è possibile con questa procedura ricavare l'angolo di stato critico per materiali con granulometria inferiore a 0.1mm, in quanto l'angolo di attrito a riposo cresce con l'assorbimento capillare dell'acqua contenuta nell'umidità presente in aria.

Nella seguente tabella si riportano misure di materiali in cui sono stati ricavati entrambi i valori.

Material	Angle of repose (deg)	φ_c (deg) (shear test)	Test type
Hochstetten gravel	35.7	36.5 [†]	ds ³¹
Hochstetten sand	34.0	34.0	txd, ds ²⁰
Hostun RF sand	32.0	32.0	txd ³²
Karlsruhe sand	29.1	30.0	txd ¹⁸
Lausitz sand	33.0	32.2	txd ²³
Toyoura sand	30.4	30.9	txu ³³
Zbraslav sand	30.8	29.7	ds ³⁴

L'angolo di riposo si misura con una procedura che ricrea una semplice deformazione a taglio sotto bassa pressione di confinamento. Si utilizza un cono riempito del materiale granulare e lo si solleva lentamente creando sottili strati superficiali sul cumulo di sabbia che viene a crearsi. Il cono è in contatto con il cumulo durante il sollevamento.

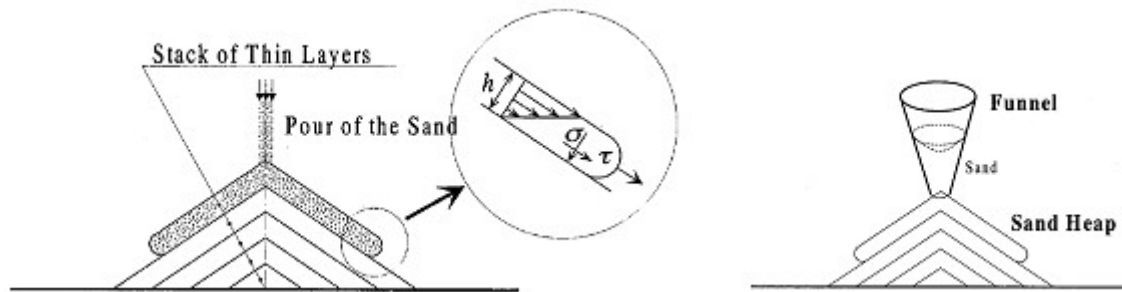
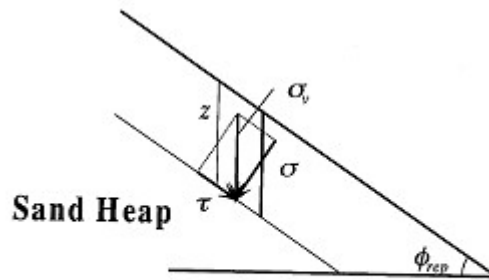


Fig. 4.1.2-1

In questi sottili strati superficiali il materiale si pone in condizione di slittare, analizzabili con la classica teoria della stabilità per pendio indefinito.



$$\sigma = \rho g z \cos^2 \phi_{rep}$$

$$\tau = \rho g z \sin \phi_{rep} \cos \phi_{rep}$$

$$\tan \phi = \tau / \sigma = \tan \phi_{rep}$$

Fig.4.1.2-2

La sabbia è necessariamente in stato sciolto, perchè la dilatanza causa deformazione a taglio all'interno del sottile strato. Il mucchio di sabbia è sciolto e ϕ_{rep} è una buona approssimazione dell'angolo mobilizzato a taglio in quanto è una buona approssimazione dell'angolo di stato critico.

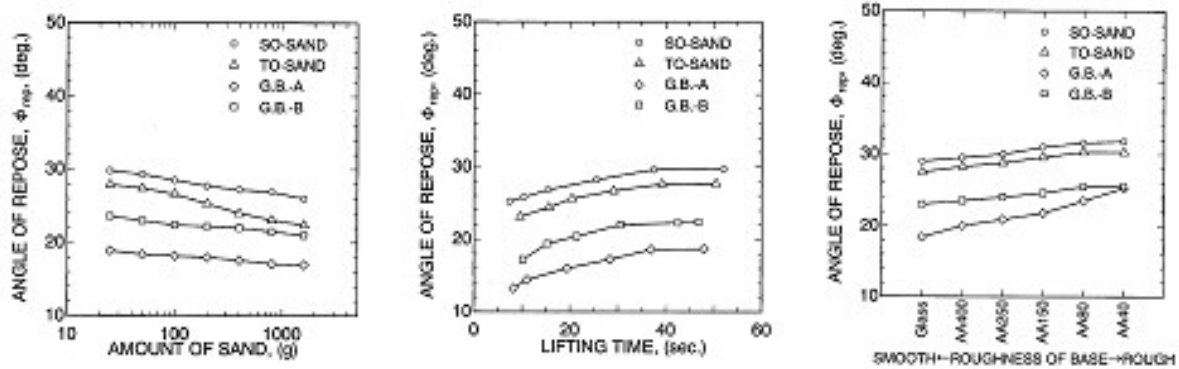


Fig.4.1.2-3

Miura osserva che le misure dell'angolo di riposo dipendono da alcuni fattori come il contenuto in sabbia, rugosità del piano di base e l'incremento del sollevamento del cono.

La base deve essere scabra per prevenire lo scivolamento lungo la base causata dalla non planarità del piano di taglio all'interno del cono. Il sollevamento deve essere lento per assicurare una condizione quasi statica. La quantità di sabbia da usare è approssimativamente 50g.

Nel caso in cui l'ammontare della parte fina sia basso, inferiore al 20%, non si ha una sostanziale influenza su Φ_c . In questi casi è possibile setacciare il terreno e misurare l'angolo di attrito a riposo della parte grossolana del terreno.

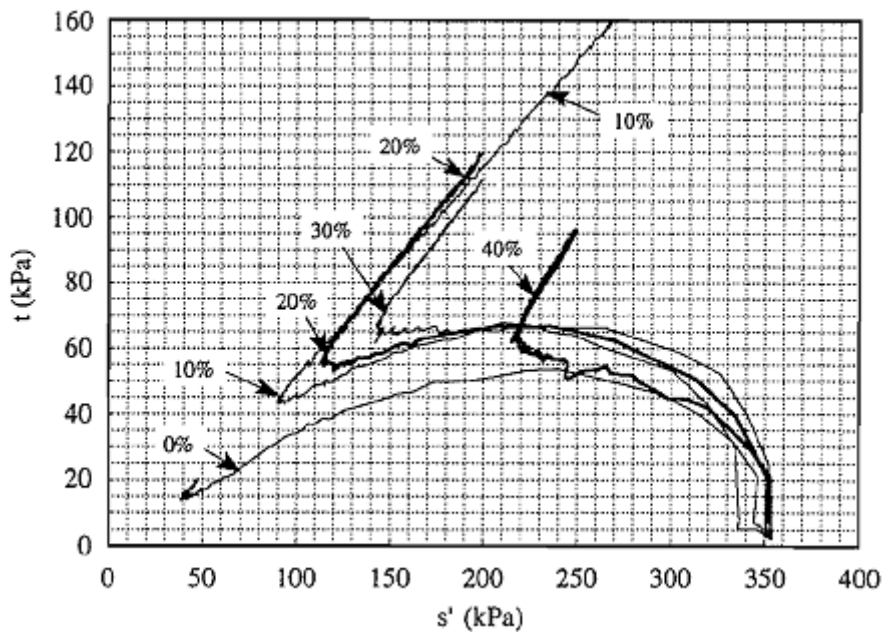


Fig.4.1.2-4 Differenti percentuali di caolino nella sabbia

In caso di terreni limosi l'angolo di attrito di picco non può essere misurato dall'angolo di riposo per l'effetto della capillarità. Per questi terreni comunque bisogna adeguare il modello di von Wolffersdorff. Nel caso di terreni limosi sono necessarie prove di taglio, in queste prove si deve

minimizzare l'effetto della localizzazione della deformazione in bande di taglio.

Se avviene la formazione della banda di taglio, le misure generali di tensione e deformazione non corrispondono allo stato critico che si instaura solo all'interno della banda di taglio

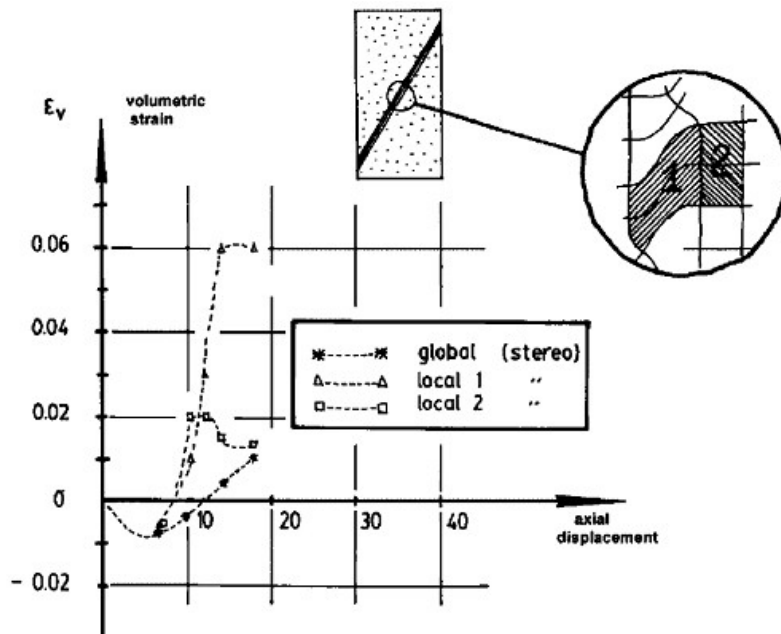


Fig.4.1.2-5 Rappresentazione della banda di taglio

La formazione di bande di taglio è affetta dalla relazione fra tensioni e deformazioni

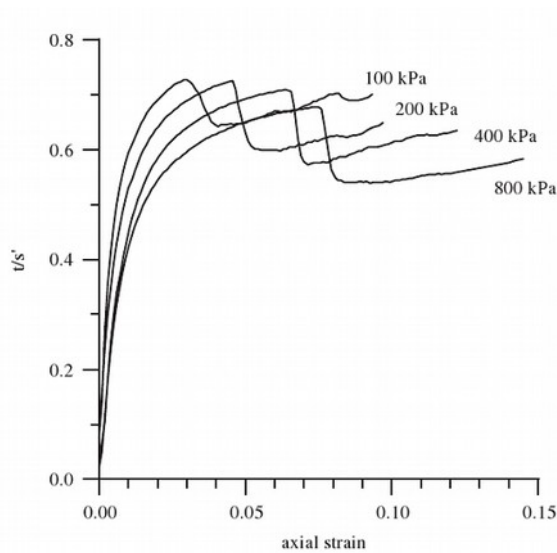


Fig.4.1.2-6 Deformazione assiale a varie tensioni di confinamento

Per limitare l'influenza della localizzazione delle deformazioni nel test triassiale è necessario che:

- Il provino deve essere nello stato più sciolto possibile in quanto la formazione della banda di taglio è legata al comportamento di softening post picco, il quale dipende dalla densità relativa.
- Le basi su cui poggia il provino siano lisce

La scatola di taglio può essere usata per stimare l'angolo di attrito ma non dà informazioni rispetto la misura dell'indice di vuoti dello stato critico.

I successivi due parametri h_s e n si possono ricavare dalla curva di carico edometrico. Il parametro n controlla la curvatura della curva edometrica e h_s ne controlla l'inclinazione generale.

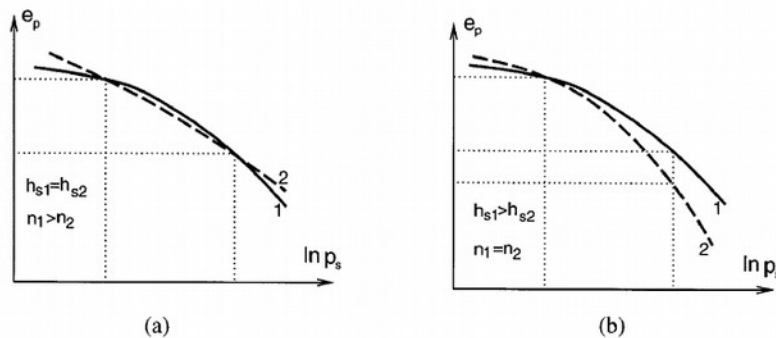


Fig.4.1.2-7 Influenza di n (a) e h_s (b) nella curva edometrica (Herle e Gudehus)

Avendo i due stati della curva edometrica come in Fig.4.1.2-7 si ricava il parametro n come:

$$n = \frac{\ln(e_{p1} C_{c2} / e_{p2} C_{c1})}{\ln(p_{s2} / p_{s1})}$$

dove i valori di tensione p_{s1} e p_{s2} possono essere calcolati dal valore di tensione assiale usando la formula di Jaky

$$K_0 = 1 - \sin \phi_c$$

e e_{p1} e e_{p2} sono l'indice dei vuoti corrispondente agli stati tensionali p_{s1} e p_{s2} . L'indice di compressione tangenziale corrisponde ai valori limite dell'intervallo tra p_{s1} e p_{s2} (C_{c1} e C_{c2}) che possono essere approssimati dal modulo secante tra i due passi di carico che precede e che segue i valori di p_{s1} e p_{s2} .

Posta l'inclinazione della curva edometrica descritta dall'indice di compressibilità

$$C_c = \frac{\Delta e}{\Delta \ln \sigma_a}$$

Durante il carico proporzionale lungo la linea di compressione normale (NCL) k_0 è costante

$$\ln \sigma_a = \ln \left(\frac{3}{1 + 2K_0} p \right) = \ln \left(\frac{3}{1 + 2K_0} \right) + \ln p$$

pertanto si ha

$$C_c = \frac{\Delta e}{\Delta \ln p}$$

La differenziazione nel tempo secondo la formula del cedimento di Bauer

$$\dot{e} = -\frac{ne}{p} \left(\frac{3p}{h_s} \right)^n \dot{p}$$

Comparando con la precedente formula dell'indice di compressibilità si ricava il parametro h_s

$$h_s = 3p \left(\frac{ne}{C_c} \right)^{1/n}$$

dove C_c è l'indice di compressione secante calcolato dai limiti dei valori di calibrazione p_{s1} e p_{s2} ; p_s e e_p sono mediati tra i valori limiti di p ed e per questo intervallo.

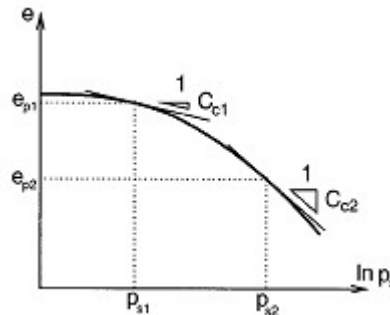


Fig.4.1.2-8 Andamento curva di compressione edometrica

I successivi tre parametri del modello fanno riferimento all'indice di vuoti e_{d0} , e_{c0} e e_{i0} , che corrispondono agli stato denso, critico e sciolto del terreno ad una tensione nulla. I valori di riferimento per l'indice di vuoti e_d , e_c e e_i corrispondono ad una dipendenza dallo stato tensionale non nullo e alla tensione media secondo la formula di Bauer:

$$e_p = e_{p0} \exp \left[- \left(\frac{3p}{h_s} \right)^n \right]$$

In ogni compressione proporzionale (in direzione concorde con l'incremento della deformazione), la linea di compressione normale NCL è seguita da uno stato di consolidazione normale. Quindi e_{p0} controlla la posizione data una linea NCL. Ogni test di compressione proporzionale può pertanto essere usato per determinare h_s e n . La prova edometrica è la più facile per ottenere questo risultato. Il test edometrico si realizza su sabbia sciolta asciutta o completamente satura. Non è raccomandabile calibrare h_s e n direttamente da una regressione della curva, ma piuttosto adottare il significato fisico dei parametri.

e_d = indice di vuoti minimo nello stato di massima densità

e_c = indice di vuoti nello stato critico CSL (Critical State Line)

e_i = indice dei vuoti massimo (compressione normale isotropa)

Il parametro e_{c0} definisce la posizione della linea di stato critico nello spazio tra $\ln p$ - e

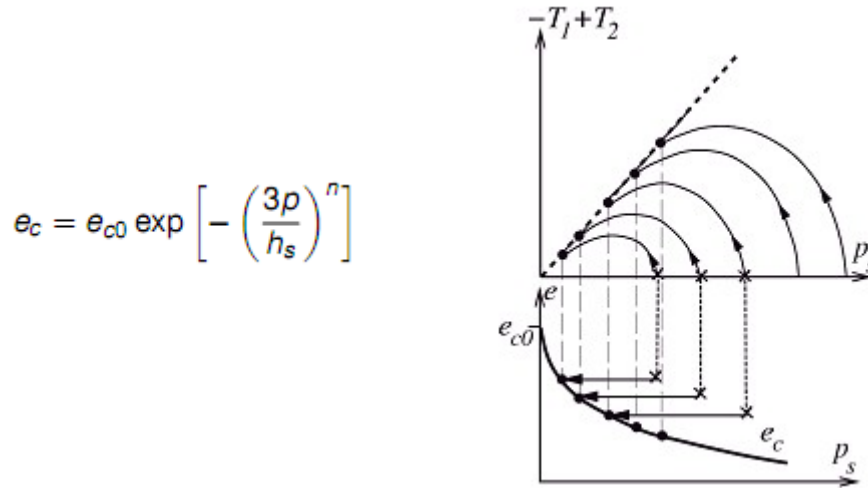


Fig.4.1.2-9

La strada più appropriata per la determinazione è attraverso la prova di taglio triassiale non drenata, o altrimenti si utilizzano i parametri h_s e n ricavati come descritto precedentemente. Pertanto solo e_{c0} può variare mentre si fissano i dati per la CSL. Come nel caso dell'angolo di attrito critico la calibrazione di e_{c0} dai risultati dalle prove di taglio è problematica a causa della formazione della banda di taglio. Le condizioni di prova sono le stesse per ricavare Φ_c .

La strada più semplice per la determinazione di e_{c0} si basa sulla seguente idea: il cumulo di sabbia durante la valutazione dell'angolo di attrito a riposo è vicino allo stato critico. Il terreno è così vicino allo stato sciolto che le tensioni devono essere ridotte sul cumulo.

L'indice dei vuoti iniziale nella prova edometrica con terreno sciolto può essere considerata una appropriata stima di e_{c0} , e quindi non sono necessari prove aggiuntive per la determinazione di questo parametro.

Il parametro e_{i0} controlla la posizione della linea di compressione isotropa. In termini tensionali e rappresenta teoricamente il più sciolto stato possibile.

Le difficoltà per la misura sperimentale sono: e_{max} si ricerca mentre la preparazione del provino con sabbia sciolta corrisponde a e_{c0} . Durante la compressione isotropa, le linee di compressione convergono verso la NCL veramente lentamente. e_i di fatto rappresenta teoricamente e_{max} in condizioni di assenza di gravità.

Il parametro e_{d0} controlla la posizione della linea dell'indice di vuoti minimo. La migliore densificazione si può ottenere mediante cicli di taglio di piccola ampiezza a pressione costante. E' possibile ottenere e_{d0} per estrapolazione da h_s e n valutati dalle prove edometriche.

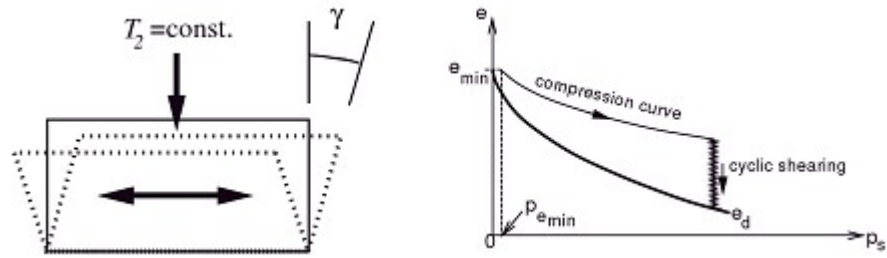


Fig.4.1.2-10 Rappresentazione dell'addensamento per sollecitazione di tagli ciclico

La dipendenza dall'indice di vuoti di riferimento e la tensione media è dimostrata dalla figura seguente

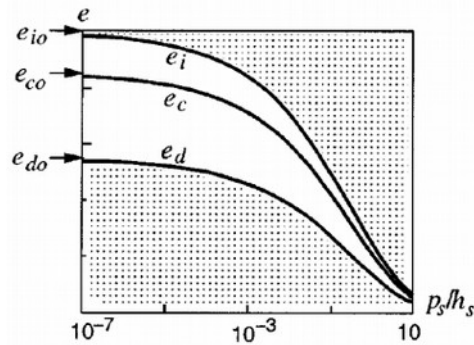


Fig.4.1.2-11 Dipendenza dall'indice dei vuoti di riferimento e_{d0} , e_{c0} e e_{i0} dalla tensione media (Herle e Gudehus)

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[- \left(\frac{-\text{tr} \sigma}{h_s} \right)^n \right]$$

Herle e Gudehus indicano che l'indice di vuoti iniziale e_{max} del materiale sciolto nella prova edometrica può essere posto uguale all'indice di vuoti dello stato critico per pressione nulla e_{c0} . L'indice di vuoti e_{d0} e e_{i0} , successivi due parametri, possono essere approssimati con delle relazioni empiriche. Il significato fisico di e_{d0} è l'indice di vuoti alla massima densità, mentre e_{i0} rappresenta l'intercetta della linea di compressione normale isotropa con l'asse $p = 0$. L'indice di vuoti e_{i0} può essere ottenuto moltiplicando e_{c0} per un fattore di 1.2 . Il rapporto $e_{i0}/e_{c0} \approx 1.2$ e deriva dalle considerazioni di Herle e Gudehus che consiste nell'idealizzazione dei particelle di forma sferica.

L'indice di vuoto minimo e_{d0} si ottiene dalla densificazione di materiale granulare soggetto a carichi ciclici di taglio di piccola ampiezza e sotto carico costante. Se il test precedente non è disponibile si può approssimare usando una relazione empirica con $e_{d0}/e_{c0} \approx 0.5$, da uno studio su sette terreni granulari differenti Herle e Gudehus hanno ricavato valori nel range $e_{d0}/e_{c0} = 0.52 \div 0.64$.

Gli ultimi due parametri α e β possono essere calibrati mediante una simulazione a singolo elemento di un test triassiale drenato. I due parametri controllano in modo indipendente differenti aspetti del comportamento del terreno.

Il parametro α controlla l'angolo di attrito di picco per l'indice di vuoti relativo

$$r_e = \frac{e - e_d}{e_c - e_d}$$

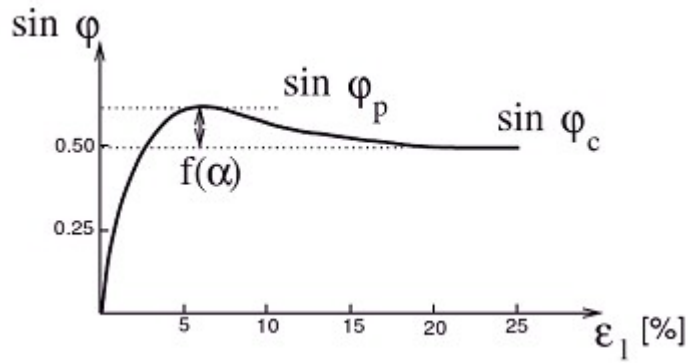


Fig. 4.1.2-12

La calibrazione di α mediante simulazioni a singolo elemento di una prova di taglio triassiale in terreno con $r_e < 1$

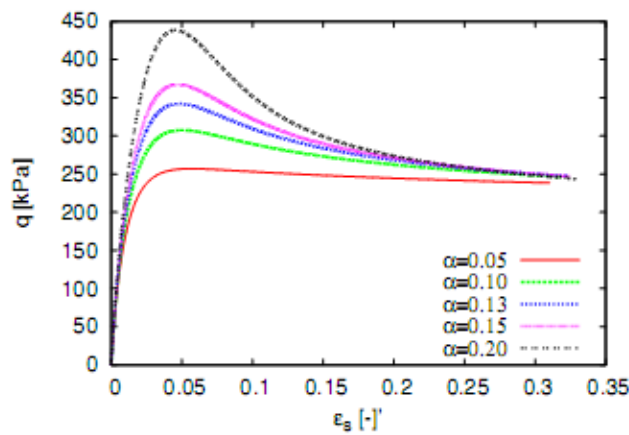


Fig.4.1.2-13

Il parametro β entra nella espressione di f_s e quindi influenza la dimensione della risposta d'involuppo tra la rigidità normale e tagliante. Il modo migliore per calibrare questo parametro è mediante una appropriata rigidità a taglio nella prova di taglio trassiale simulata con singolo elemento.

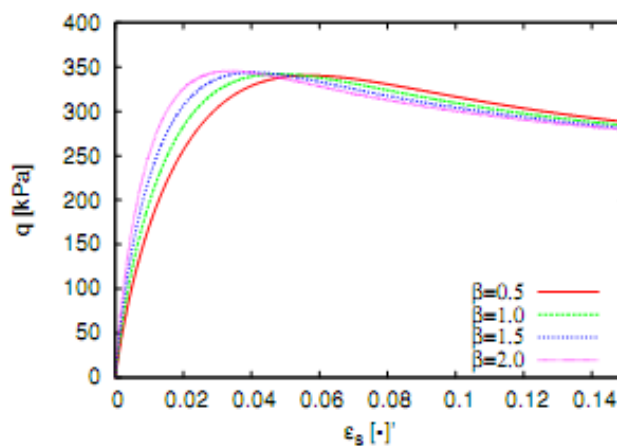


Fig.4.1.2-14

4.1.3 Deformazione intergranulare

Il modello ipoplastico mostra un ottimo comportamento nel calcolo delle deformazioni dovute al riarrangiamento dei grani dello scheletro. Il modello iniziale presentava difetti rispetto alle applicazioni con cicli di sollecitazione o deformazione di piccola ampiezza. L'applicazione mostra un eccessivo accumulo della deformazione predetta per piccoli cicli tensionali, questo fenomeno è detto ratcheting. Per cicli di taglio in condizioni non drenate l'approccio con il legame ipoplastico predice un grande incremento di sovrappressione neutra. Niemunis e Herle sviluppano il concetto di deformazione intergranulare per ovviare a questo difetto, migliorando le performance a piccole deformazioni che derivano da cambi di direzione del percorso tensionale o deformativo.

Il materiale viene assunto come asciutto o completamente saturo e non vengono prese in considerazione interazioni con temperatura, chimica ed effetti elettrici. Non viene presa in considerazione la viscosità del materiale.

Il comportamento del terreno granulare è incrementale non lineare fino a basse deformazioni eccetto per un piccolo tratto elastico. In questo range la rigidità è elevata e approssimativamente indipendente dalla deformazione. I valori si possono ottenere con precise misure degli spostamenti con trasduttori o alternativamente attraverso le velocità delle onde P e S misurabili in laboratorio con il metodo della colonna risonante. La dimensione di questo tratto elastico nello spazio deformativo è piuttosto indipendente dalla tensione e dall'indice dei vuoti. La rigidità elastica in questo tratto è dipendente da tensione e densità del materiale analogamente alla rigidità incrementale durante una deformazione monotonica. Dipendendo dalla storia deformativa la rigidità, ad una data tensione, densità e per una certa direzione del percorso deformativo, può avere diversi valori. In particolare ogni cambio di forma in una certa direzione del percorso deformativo porta ad un incremento della rigidità osservata, il valore massimo appare con una inversione completa dell'incremento deformativo (cambio direzione di 180°). Se la deformazione continua approssimativamente nella stessa direzione (dopo l'inversione) la rigidità decrementa gradualmente, per un certo tratto del percorso deformativo, fino ad una lunghezza detta ϵ_{som} (misurato dall'inversione del percorso deformativo), la rigidità recupera il suo valore più basso tipico dei percorsi deformativi monotonicici (som è una abbreviazione che indica swept-out memory). Considerazioni micro-meccaniche indicano che le forze intergranulari sono trasferite attraverso una sottile zona amorfa della interfaccia granulare. Si propone quindi il concetto di un range elastico che è qualitativamente in relazione con le proprietà di questa zona. Questa estensione richiede l'aggiunta di cinque costanti. Tre di queste hanno chiaro significato fisico, una di misura del tratto elastico e due di rapporti di caratteristiche

di rigidezza. Due esponenti sono relazionati con la transizione tra diversi modi deformativi (deformazione intergranulare e riarrangiamento dei grani). Nel seguito si considerano negative le tensioni e deformazioni compressive.

Modello di riferimento

Il comportamento meccanico del terreno privo di coesione è modellato dalla equazione costitutiva dell'ipoplasticità, essa descrive i cambiamenti di tensione di un semplice scheletro solido di grani e il suo riarrangiamento al variare della tensione. Lo scheletro solido è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

1. Lo stato del terreno è definito dal tensore delle tensioni effettive tra i grani e la densità e .
2. I grani sono permanenti, mantengono la loro forma e fra di loro non avviene abrasione o fratturazione.
3. La deformazione dello scheletro solido è dovuta al riarrangiamento dei grani, come spostamenti relativi con evoluzione o decadimento del contatto fra grani.
4. Cementazioni e forze di attrazione e repulsione delle forze di contatto sono trascurate (capillarità, osmosi).
5. La deformazione sotto condizioni al contorno omogenee è omogenea, senza localizzazione del taglio.
6. Esiste un limite superiore (e_i) e inferiore (e_d) dell'indice dei vuoti, i macropori non sono permessi, e dipendono dalla tensione media effettiva $p' = -\text{tr}\sigma'/3$. In analogo modo si ottiene l'indice di vuoti critico e_c , che si ricerca dopo una prova di taglio monotonica a grandi spostamenti.
7. Indipendentemente dallo stato iniziale il percorso deformativo guida il percorso delle tensioni.
8. Il comportamento meccanico dello scheletro del terreno è incremento indipendente ed è permesso il principio delle tensioni principali.
9. Il cambio del limite dell'indice dei vuoti è legato alla variazione di pressione media, questo rapporto è chiamato rigidità granulare h_s , questa rappresenta il riferimento per la rigidezza a pressione indipendente ed è una costante dimensionale dell'equazione ipoplastica.

Si richiama la legge costitutiva ipoplastica come precedentemente definita

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{L} : \mathbf{D} + \mathbf{N} \|\mathbf{D}\|$$

si considera i tensori costitutivi come funzioni di tensione e indice dei vuoti espressi secondo von

Wolffersdorff. Per soddisfare l'indipendenza dalla velocità l'equazione precedente è positiva, omogenea di primo grado in D . Comunque il secondo termine è non lineare in D per cui il sistema non è invertibile.

$$-\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{D}) \neq \dot{\mathbf{T}}(-\mathbf{D})$$

Il comportamento anelastico è tenuto in conto senza una decomposizione dell'incremento deformativo in componente elastica e plastica, la decomposizione è usuale con leggi costitutive elasto-plastiche. Non risulta necessaria una formulazione esplicita della superficie di snervamento o una legge di flusso, nonostante sia possibile derivarle dall'equazione principale.

Il modello ipoplastico si estende con il concetto di deformazione intergranulare; si considera un elemento di terreno granulare sotto generali condizioni al contorno tale che la sua deformazione possa essere descritta dallo sviluppo della velocità deformativa D . La deformazione è il risultato della deformazione dell'interfaccia granulare e del riarrangiamento dei nodi. La deformazione intergranulare δ è considerata una nuova variabile di stato. Per permettere di assumere due direzioni opposte di deformazione nello spazio, corrispondenti a livello micro-meccanico di due opposte deformazioni dell'interfaccia le si rappresenta come uno scivolamento di un contatto.

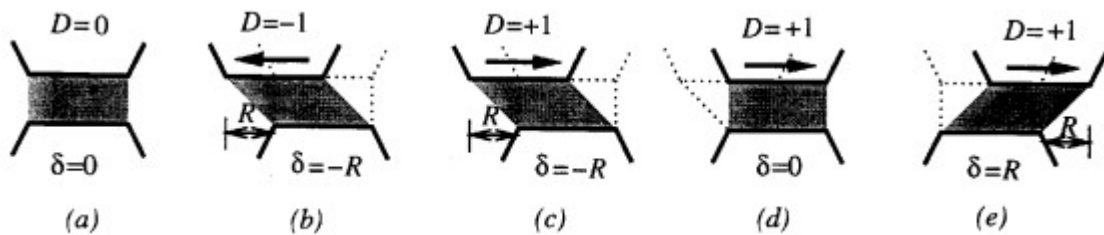


Fig.4.1.3-1 interpretazione mono-dimensionale della deformazione intergranulare

L'interfaccia è rappresentata in fig.4.1.3-1 dall'area ombreggiata. A priori la deformazione è posta uguale a zero. Il tensore di deformazione intergranulare δ serve per mantenere traccia della recente storia deformativa e provvede ad incrementare la rigidità $E = dT/d\epsilon$ nel caso del cambio della direzione di deformazione D .

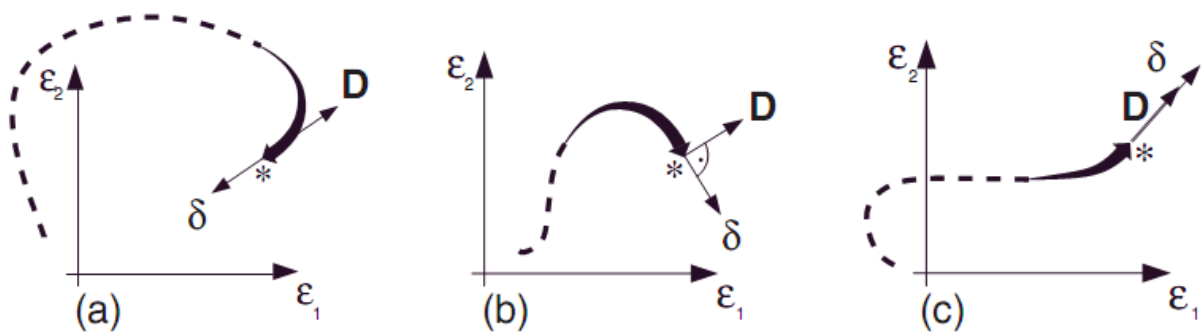


Fig. 4.1.3-2 Direzione di δ e D dopo un cambio di direzione di a) 180° , b) 90° e c) dopo una grande deformazione monotonica

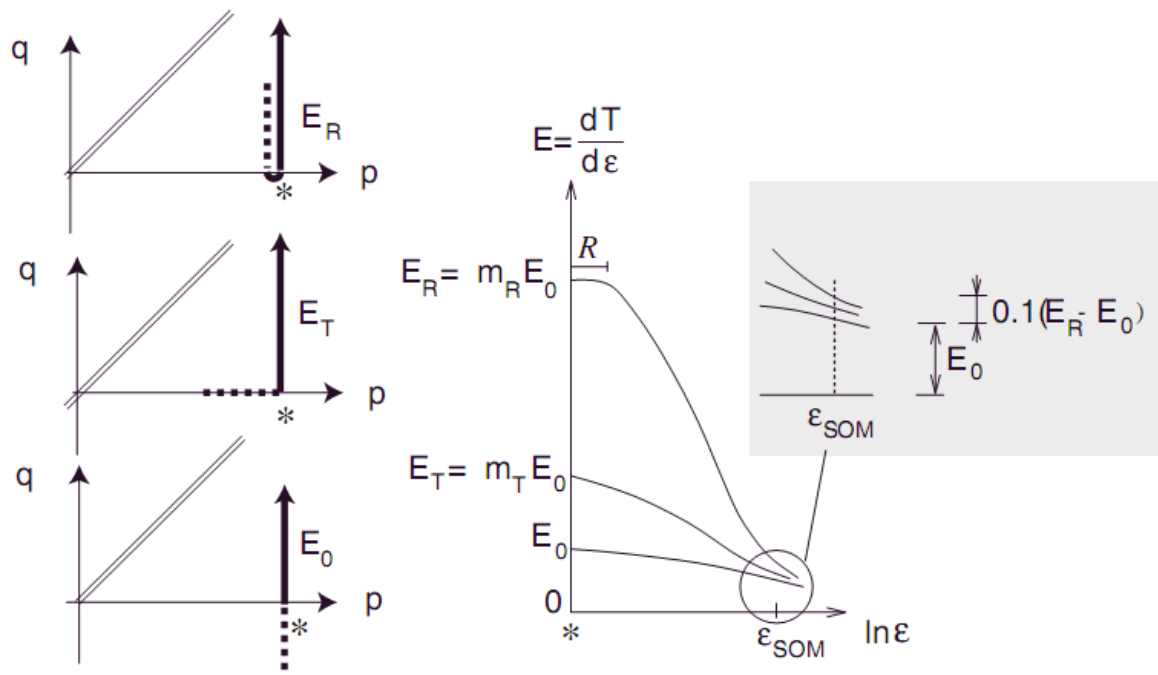


Fig 4.1.3-3 Incremento della rigidità incrementale dovuto al cambio di direzione della deformazione

Si suppone la densità e la tensione sono nello stesso punto nonostante differenti percorsi di deformazione. Un cambio di direzione di 180° comporta $E_R = m_R \cdot E_0$, dove il fattore m_R è assunto come una costante del materiale e E_0 è la rigidità dopo prolungato taglio monotonicamente a tensione costante. Un cambio di direzione di 90° comporta $E_T = m_T \cdot E_0$. Con lo sviluppo del taglio dopo il cambio di direzione il tensore di deformazione intergranulare prende gradualmente la direzione di D. Quando l'angolo fra δ e D svanisce, dopo una sufficiente deformazione proporzionale ϵ_{SOM} , gli effetti del cambio di direzione sono messi fuori dalla memoria (swept out of memory). In tutto si aggiungono cinque parametri del materiale, dove m_R e m_T sono quantità. Il parametro R è legato, ma non è identico, al range di deformazione elastica e i valori degli esponenti β_χ e χ sono usati per correggere la legge di decadimento di $E_{R/T}$ durante l'incremento del taglio per il cambio di direzione. Senza questa estensione il modello produce un eccessivo effetto di ratcheting nel caso di carico ciclico, come mostrato in fig 4.1.3-4 per la prova di compressione edometrica e il taglio triassiale. L'estensione del modello con il concetto di deformazione intergranulare rimuove questo difetto.

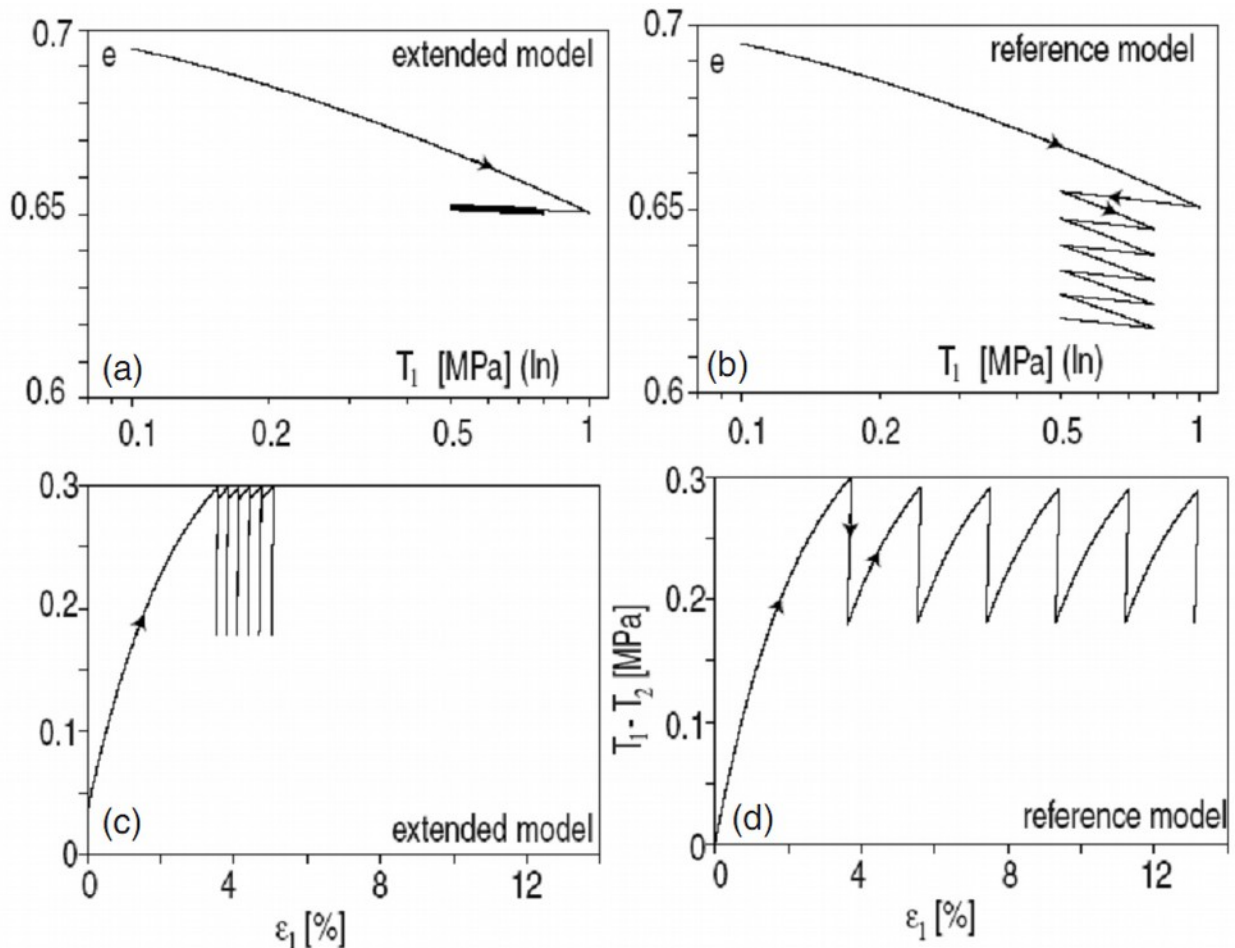


Fig 4.1.3-4 Comparazione fra i modelli con e senza il concetto di deformazione intergranulare
a) e b) prova edometrica, c) e d) taglio triassiale

Nel caso in esame si utilizzano i parametri della sabbia di Hochstetten con indice dei vuoti sciolto $e = 1$ e mediamente denso $e = 0,7$.

Parametri del materiale

φ_c	h_s (kPa)	n	e_{d0}	e_{c0}	e_{i0}	α	β
33°	$1,5 \cdot 10^6$	0,28	0,55	0,95	1,05	0,25	1,5

E parametri della deformazione intergranulare

R	m_R	m_T	β_r	χ
$1 \cdot 10^{-4}$	5	2	0,5	6

5 Modello geometrico e mesh di analisi

Di seguito si fa riferimento al caso in analisi di scavo in sabbia previa infissione di paratia flessibile (palancola) e puntellazione della stessa alla quota -0.5m dal piano campagna. Il modello rappresenta la zona soggetta a disturbo tensionale tale da generare motivazione di analisi.

5.1 Geometria

La geometria riguarda una zona soggetta a scavo di 20x10m. Lo scavo avviene in un deposito sabbioso con spessore di 60m, al di sotto del quale si considera un bedrock infinitamente rigido.

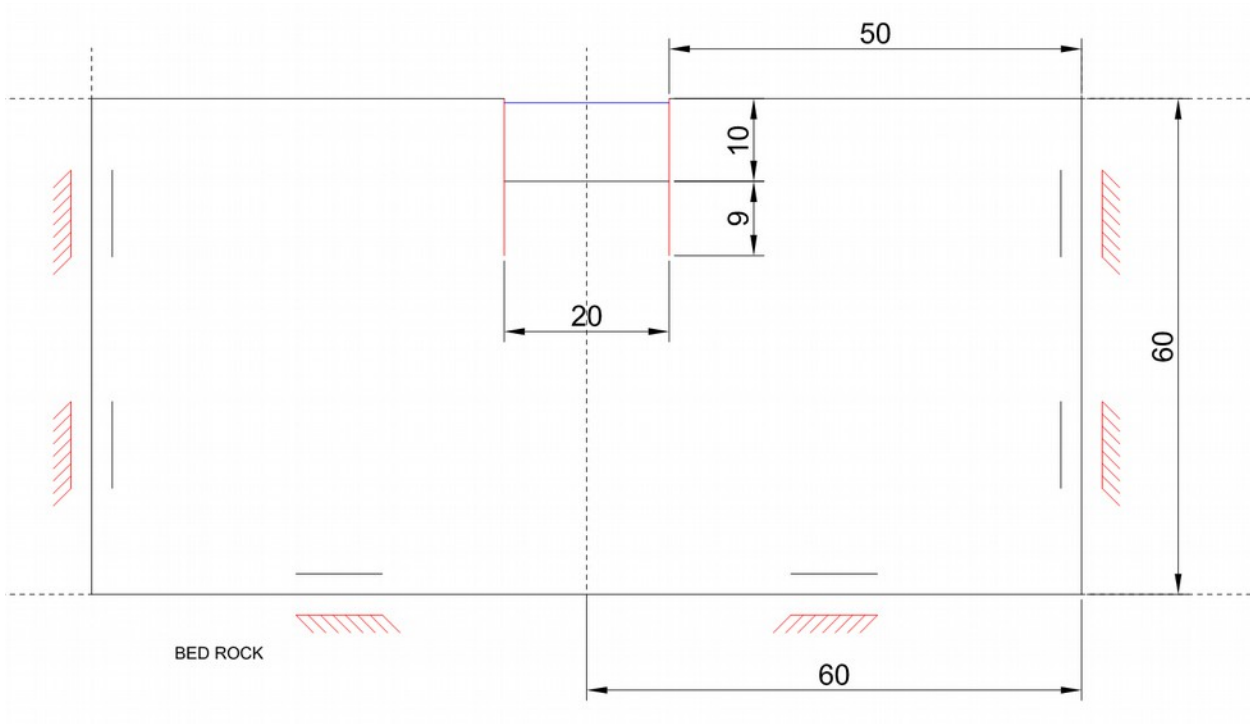


Fig.5.1-1 Modello Geometrico

Nella vista particolare della zona soggetta ad escavazione si evidenzia il puntello

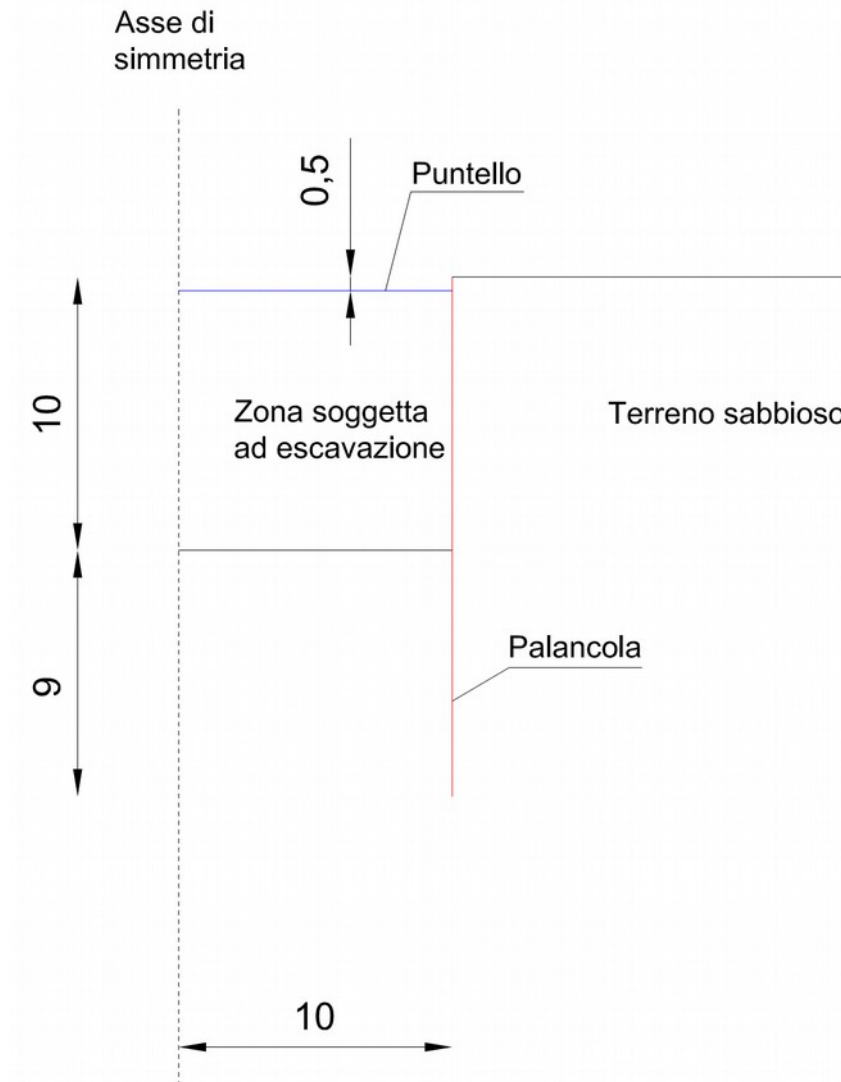


Fig.5.1-2 particolare del modello geometrico

5.2 **Condizioni al contorno**

Le condizioni al contorno svolgono un ruolo essenziale nell'analisi. Esse rappresentano gli effetti della realtà fisica, intesa come spazio indefinito attorno al dominio. Queste condizioni mutano dal campo statico a quello dinamico per includere la capacità di assorbire le onde riflesse dal dominio.

- Condizioni statiche: al di sotto del dominio, il bedrock si considera infinitamente rigido schematizzato ed implementato come vincolo alla traslazione verticale. Ai due fianchi si pongono dei vincoli alla traslazione orizzontale: al lato sinistro per rispetto del vincolo di simmetria posto dal problema in analisi, al lato destro per riprodurre il comportamento del terreno esistente ma non preso in conto nel modello. La schematizzazione non è teoricamente corretta ma ai fini dell'analisi l'approssimazione è più che sufficiente. Nella zona sommitale della palancola, a -0.5m dal piano campagna, è posto un elemento molla che agisce in direzione orizzontale e che rappresenta l'installazione di un puntello internamente alla zona di scavo.
- Condizioni dinamiche: nel momento in cui si applica una sollecitazione variabile nel tempo i vincoli che erano adatti alla condizione statica incontrano diversi problemi. Il problema più importante è la concentrazione dell'energia sismica, in quanto i vincoli rigidi generano una riflessione dell'energia sismica che continua a sommarsi all'interno del dominio invece di trasmettersi all'esterno, al contrario di come avviene nella realtà. Per ovviare a questo problema si ricorre a degli elementi dissipativi viscosi (detti anche condizioni al contorno viscosi non riflettive o assorbenti), definiti nel modello come elementi 0D a dimensione nulla e chiamati elementi dashpot o damper. Questi elementi sono definiti anche condizioni al contorno infinite in quanto simulano la presenza del terreno oltre i limiti del modello, ruolo che prima era destinato agli elementi infiniti. L'obiettivo di questi elementi è di assorbire la maggior parte dell'energia incidente. Il tipo e la localizzazione dell'input sismico nel modello sono fattori decisivi per la taratura di questi elementi. La loro impostazione teorica è data da Lysmer e Kuhlemeyer (1969).

5.3 Mesh

La mesh realizzata ha struttura triangolare eseguita in automatico dal pre-processore del software Plaxis. Si è utilizzata una discretizzazione "very fine", successivamente si è provveduto ad un ulteriore infittimento nell'intorno della palancola. Gli elementi utilizzati nella mesh sono triangolari a interpolazione cubica a 15 nodi.

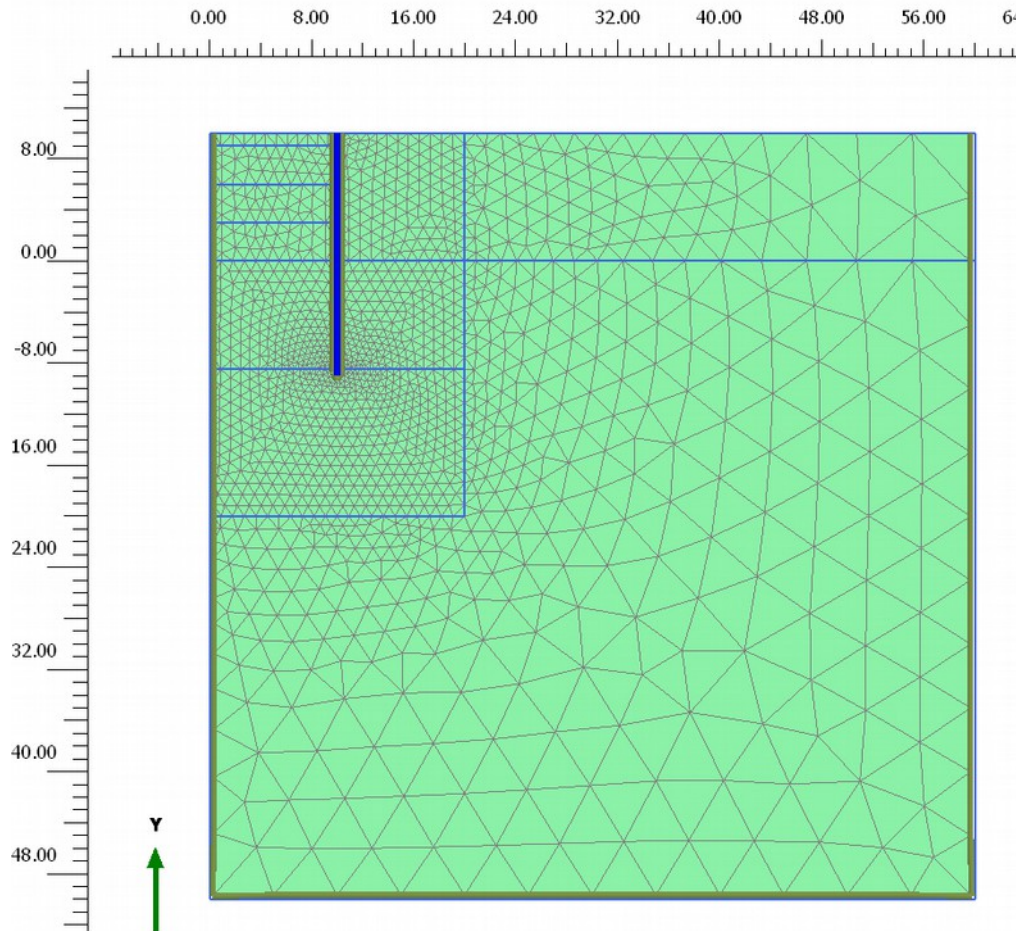


Fig 5.3-1 Mesh del problema in analisi

La dimensione degli elementi più grossolani al contorno è di circa 5m sul lato maggiore mentre gli elementi più fini in prossimità della palancola hanno mediamente una dimensione di 0.4m.

5.4 *Infittimento della mesh*

Nella zona di terminazione della palancola la mesh viene infittita per poter meglio gestire l'elevato gradiente di tensione che ivi si genera. Nell'immagine viene evidenziata la palancola nel punto di congiunzione con il puntello.

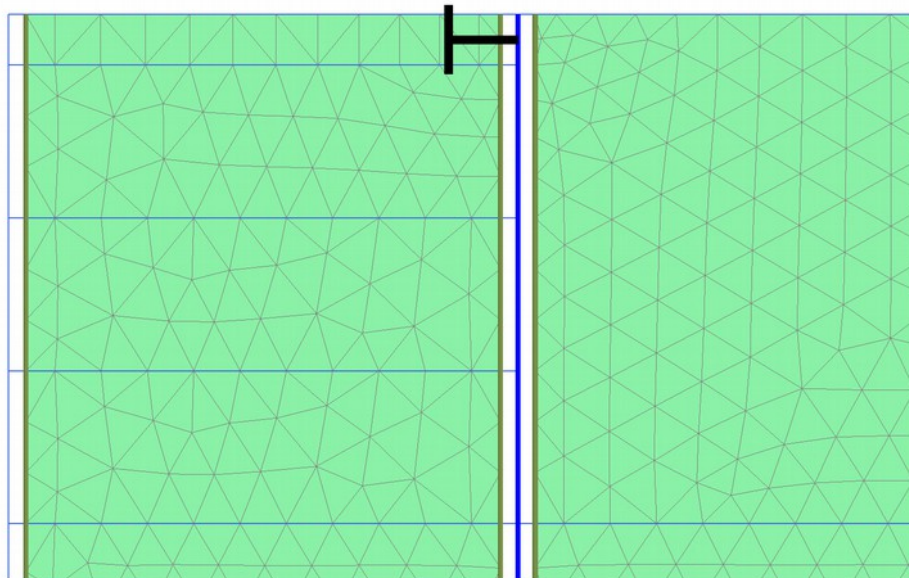


Fig 5.4-1 Ingrandimento mesh nella zona di congiunzione con il puntello

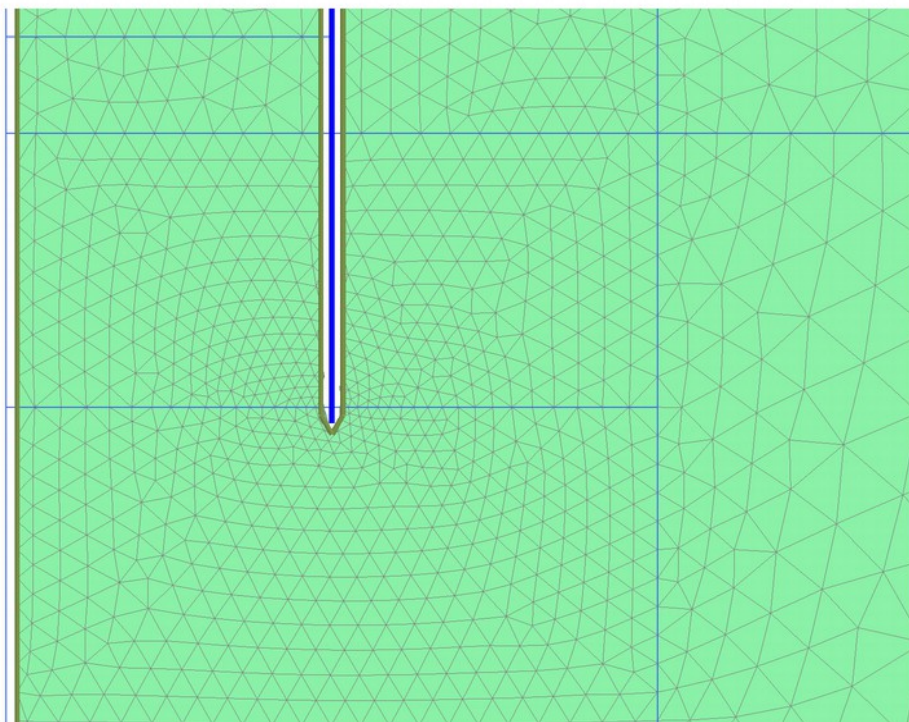


Fig 5.4-2 Ingrandimento mesh nella zona di terminazione della palancola

6 Descrizione solutore e elementi utilizzati

Plaxis 2D è un software che utilizza elementi finiti per l'analisi di deformazioni, stabilità e problemi di flusso nel campo dell'ingegneria geotecnica. Lo sviluppo del programma Plaxis inizia nel 1987 all' Università della Tecnologia di Delft su iniziativa del ministero olandese dei lavori pubblici e della gestione dell'acqua. L'obiettivo iniziale del software è stata la simulazione bi-dimensionale degli argini fluviali, successivamente è stato esteso ai vari campi di impiego della geotecnica. L'input del programma si svolge gradualmente secondo i seguenti step:

- individuazione della schematizzazione bi-dimensionale del problema in analisi; nel caso in esame si tratta lo stato piano di deformazione
- creazione della stratigrafia di riferimento attraverso la procedura di assegnazione Borehole
- assegnazione del livello di falda
- creazione del dominio che si intende analizzare
- disegno delle linee che delimitano le zone di scavo, le strutture e le zone in cui si vuole infittire la mesh generale
- creazione e assegnazione del materiale per il terreno; nel caso in esame si tratta del terreno sabbioso di Hostum definito dal legame costitutivo ipoplastico
- definizione delle azioni o spostamenti impressi
- definizione delle strutture; nel caso in esame si disegnano con elementi plate la palanca e con il fixed-end ancor il puntello
- creazione e assegnazione del materiale per le strutture
- disegno degli elementi di interfaccia attorno agli elementi plate; nel caso in esame all'interfaccia è applicato un comportamento derivato dal terreno adiacente
- generazione della mesh con l'indicazione very fine che porta alla discretizzazione più fitta della mesh, che meglio si adatta ai problemi di dinamica, e si infittisce nuovamente la mesh in prossimità della struttura e dove si pensa si localizzi un più alto gradiente tensionale
- definizione dell'accelerogramma come input alla base
- attivazione delle condizioni al contorno viscoso e definizione dei coefficienti di assorbimento
- definizione dei coefficienti di Rayleigh per lo smorzamento numerico in funzione delle frequenze naturali del deposito e della frequenza fondamentale dell'accelerogramma imposto

- definizione degli stadi consequenziali di analisi, e del tipo di analisi che si effettua in ogni stadio di avanzamento
- studio dell'output del programma

6.1 Impostazione dell'analisi

Si eseguono otto fasi, in ciascuna viene individuato un dato step del problema:

1. Initial state: è la procedura che genera le tensioni iniziali del terreno allo stato di riposo e reimposta, alla sua conclusione, gli spostamenti nulli della mesh
2. Installazione palancola nel terreno (analisi di tipo plastico)
3. Prima fase di escavazione del terreno fino alla quota di -1m dal piano campagna (analisi di tipo plastico)
4. Installazione del puntello (analisi di tipo plastico)
5. Seconda fase di scavo fino alla quota di - 4m dal piano campagna (analisi di tipo plastico)
6. Terza fase di scavo fino alla quota di - 7m dal piano campagna (analisi di tipo plastico)
7. Quarta fase di scavo fino alla quota di - 10m dal piano campagna (analisi di tipo plastico)
8. Analisi dinamica con applicazione dell'accelerogramma

6.2 Elementi finiti utilizzati

6.2.1 Elemento area triangolare

Gli elementi area a forma triangolare in Plaxis 2D sono formati da 6 o 15 nodi. L'elemento a 6 nodi implementa una interpolazione sugli spostamenti di secondo ordine

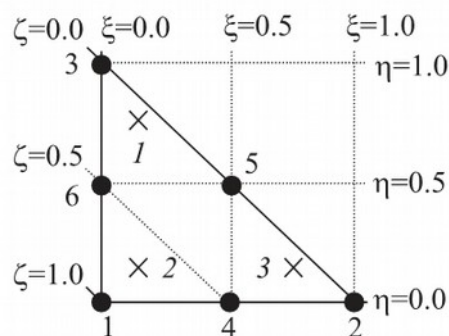


Fig. 6.2.1-1 Numerazione locale e posizionamento dei nodi e dei punti di Gauss per l'elemento a 6 nodi

L'elemento a 15 nodi utilizzato nella tesi si configura come da fig.6.2.1-2

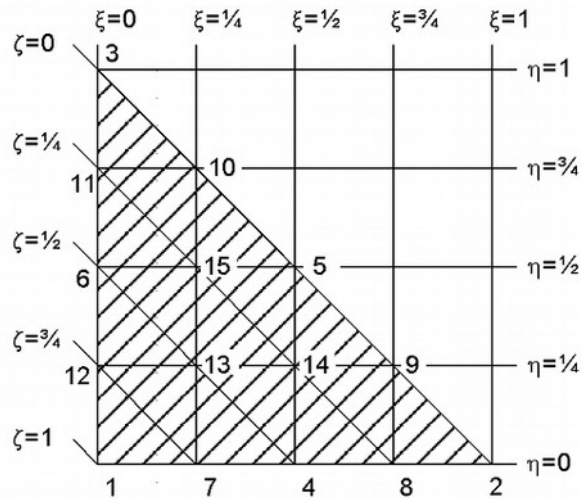


Fig. 6.2.1-2 Numerazione locale e posizionamento dei nodi e dei punti di Gauss per l'elemento a 15 nodi

6.2.2 Elemento interfaccia

L'interfaccia è un elemento di giunzione aggiunto ai plate per modellare l'interazione fra terreno e struttura. L'interfaccia viene usata per simulare la sottile zona soggetta a taglio fra l'elemento plate e il terreno circostante. La creazione di questo elemento in Plaxis è simile al disegno di una linea che deve racchiudere la paratia immersa nel terreno.

Nella fig.6.2.2-1 si nota la distribuzione dei nodi e dei punti di Gauss per l'interfaccia e per l'elemento terreno adiacente, viene inoltre rappresentato uno spessore dell'interfaccia per facilitarne la comprensione, ma l'elemento è formulato per avere i nodi coincidenti a coppie. I due nodi coincidenti forniscono la sconnessione fra l'elemento plate e l'elemento triangolare.

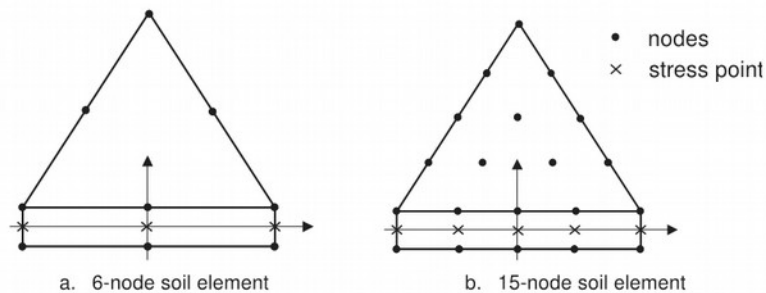



Fig. 6.2.2-1 Rappresentazione degli elementi di interfaccia

6.2.3 Elemento plate

Plate rappresenta l'elemento strutturale usato per modellare, all'interno del terreno, strutture snelle con rigidezza assiale e flessionale. Si utilizza per modellare la paratia e gli si assegnano i valori di rigidezza flessionale EI e di rigidezza EA , parametri da cui si ricava lo spessore equivalente della paratia

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{12 \cdot EI}{EA}}$$

Property	Unit	Value
Material set		
Identification		Tutorial 02 - Diaphragm wall
Comments		
Colour		 RGB 0, 0, 255
Material type		Elastic
Properties		
Isotropic		<input checked="" type="checkbox"/>
End bearing		<input type="checkbox"/>
EA_1	kN/m	6.766E6
EA_2	kN/m	6.766E6
EI	kN m ² /m	254.2E3
d	m	0.6715
w	kN/m/m	2.500
ν (nu)		0.000
Rayleigh α		0.2500
Rayleigh β		0.5000

I parametri inseriti corrispondono alla palanca AZ50 in catalogo alla ditta ArcelorMittal.

Nel modello bi-dimensionale agli elementi finiti, il plate è un elemento lineare con tre gradi di libertà per nodo: due traslazionali (u_x , u_y) e uno rotazionale su z . Si utilizza l'elemento a 3 nodi per il contatto con l'elemento triangolare a 6 nodi e l'elemento a 5 nodi per il contatto con l'elemento triangolare a 15 nodi. La formulazione del plate è basata sulla teoria di Mindlin che permette di considerare la deformazione flessionale e tagliante. Viene considerata anche la deformazione assiale per gli elementi sollecitati assialmente.

Il momento flessionale e lo sforzo assiale sono valutati dalle tensioni sui punti di Gauss e i valori sui nodi si ottengono per estrapolazione. I comportamenti modellabili sono elastico ed elasto plastico. La distribuzione dei punti di Gauss negli elementi avviene come indicato in fig.6.2.3-1

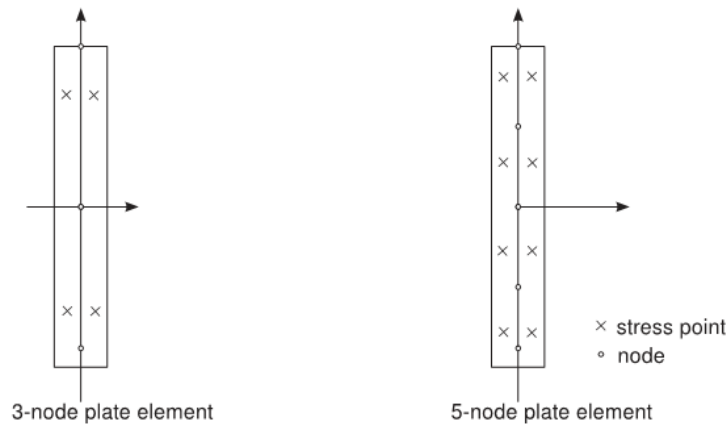


Fig.6.2.3-1 distribuzione dei punti di Gauss negli elementi plate

E' importante notare che se si cambia il rapporto EI/EA anche lo spessore equivalente d_{eq} cambia modificando con esso la distanza che separa i punti di Gauss. Se durante una analisi per stadi si modificano le impostazioni del materiale del plate il software non modifica la distanza fra i punti di Gauss per non creare distribuzioni di forze e momenti non equilibrati.

6.2.4 *Elemento fixed-end anchor*

Fixed-end ancor è l'elemento puntuale collegato da un lato alla struttura e dall'altro fissato in un punto determinato dalle proprietà che gli si assegnano. Questo elemento simula in modo semplice l'effetto del puntello installato all'interno della zona di scavo, l'unico effetto che produce è quello di una forza di reazione che agisce in una direzione senza alcun momento. Questo elemento è anche usato per rappresentare l'effetto di portanza di pali senza tenere in considerazione l'interazione palo-terreno. La dimensione con cui appare nelle immagini è solo indicativa e non ha significato fisico. Si definisce il parametro di lunghezza equivalente come la distanza fra il punto di contatto della struttura e un punto fittizio in direzione longitudinale all'applicazione del puntello, dove si pone uno spostamento nullo. Nel caso in esame questo punto è rappresentato dall'asse di simmetria dello scavo.

I parametri del materiale elastico del puntello vengono definiti come segue:

- $EA = 2 \cdot 10^6 \text{ kN}$
- $L_{\text{spacing}} = 5 \text{ m}$ spaziatura in profondità alla rappresentazione 2D

6.2.5 Elemento Dashpot

La loro formulazione deriva dall'osservazione che le tensioni associate con il passaggio di un'onda piana, attraverso un punto, è proporzionale alla velocità dell'onda incidente. Questi elementi operano nel dominio del tempo. Si associano elementi indipendenti per azioni in direzione normale e tangenziale al contorno su cui sono applicati. In genere questi elementi sono attivi per assorbire la propagazione di onde in arrivo con angolo di incidenza maggiore di 30° .

La formulazione di questi elementi assorbenti è:

$$t_n = -\rho C_p v_n$$

$$t_s = -\rho C_s v_s$$

dove sono indicate le seguenti componenti:

t_n = tensione normale al contorno del modello

t_s = tensione tangenziale al contorno del modello

ρ = densità

C_p = velocità onde P

C_s = velocità onde S

v_n = velocità normale al contorno del modello

v_s = velocità tangenziale al contorno del modello

Il valore della velocità delle onde P e S si determina con le seguenti equazioni

$$C_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho}}$$

$$C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

posto K = modulo di rigidità normale, G = modulo di rigidità a taglio.

Questi elementi crescono di importanza al ridursi del dominio considerato nel modello numerico. Avendo un dominio di calcolo di misura finita si richiede che gli elementi al contorno siano capaci di limitare le onde spurie dovute alla riflessione sul contorno del modello.

L'equazione dell'onda di taglio verticale mono-dimensionale si scrive come:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

dove u rappresenta lo spostamento della particella di terreno, spostamento perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda di taglio.

Si definisce la velocità delle onde di taglio

$$v_s = \sqrt{G/\rho}$$

e si ricava la soluzione dell'equazione d'onda in termini di spostamento

$$u(x, t) = u_r\left(t - \frac{x}{v_s}\right) + u_i\left(t + \frac{x}{v_s}\right)$$

dove il termine $u_r(t - x/v_s)$ rappresenta l'onda che viaggia a velocità v_s nella direzione positiva x , e il termine $u_i(t + x/v_s)$ rappresenta un termine analogo al precedente in direzione $-x$. Pertanto u_i è l'onda incidente nel punto verso l'alto nel dominio computazionale e u_r è l'onda riflessa. Si prendono le derivate parziali rispetto al tempo e si moltiplica l'equazione per ρv_s

$$\rho v_s \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \rho v_s u_r'(t - x/v_s) + \rho v_s u_i'(t + x/v_s)$$

Con la linearità elastica uni-assiale come relazione fra tensione tagliante e deformazione tagliante si ricava:

$$\tau(x, t) = G \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{G}{v_s} u_r'(t - x/v_s) + \frac{G}{v_s} u_i'(t + x/v_s)$$

dove $\tau(x, t)$ è la tensione tangenziale.

Combinando le due equazioni precedenti si ricava:

$$\tau(x, t) = -\rho v_s \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 2\rho v_s u_i'(t + x/v_s)$$

la derivata parziale di u rappresenta la velocità del moto totale della particella di terreno, mentre

$$u_i'(t + x/v_s) = \partial u_i(t + x/v_s) / \partial t$$

rappresenta la velocità del moto incidente. Quindi il primo termine a destra dell'equazione della tensione rappresenta una forza per unità di area generata dal dashpot per il coefficiente ρv_s , mentre il secondo termine rappresenta una forza per unità di area generata dal dashpot proporzionalmente alla velocità dell'onda incidente. Come risultato il terreno al di sotto del dominio interessato può essere sostituito con un dashpot e una forza equivalente, la quale è definita dall'input sismico. Nel modello bi-dimensionale agli elementi finiti utilizzato si assume che la risposta del dominio in analisi sia causata principalmente dalla propagazione in direzione verticale delle onde di taglio. A livello computazionale per l'analisi dinamica si pone il terreno inferiore come lineare elastico, non smorzato e come spazio omogeneo semi-infinito. Ci si aspetta che tutte le non linearità al di sotto del dominio di analisi rimangano trascurabili e che questo terreno sia significativamente più rigido rispetto al terreno in analisi. Ad ogni nodo, alla base e sui lati del contorno, si aggiungono due dashpot, rispettivamente agenti in direzione normale e tangenziale al contorno. Il dashpot che agisce in direzione normale è predisposto per assorbire la riflessione delle onde di compressione, mentre l'elemento tangenziale è predisposto

per assorbire la riflessione delle onde tangenziali. Ad ogni nodo della base si applica una forza equivalente, proporzionale alla velocità dell'onda incidente e alla superficie tributaria di ogni singolo nodo, in direzione orizzontale a rappresentare l'effetto dell'onda di taglio incidente di direzione verticale.

Le condizioni al contorno assorbenti hanno le loro criticità, ma sono al momento la soluzione che coniuga meglio praticità di modellazione e risultati. Come indicato precedentemente il solutore Plaxis si basa sulla teoria di Lysmer e Kuhlmeyer (1969). Queste condizioni al contorno consentono di assorbire le tensioni che derivano dalle onde senza rifletterle all'interno del dominio. Plaxis è formulato come di seguito:

le tensioni normali e tangenziali assorbite dai dashpot (vincoli puntuali viscosi) in direzione x sono $\sigma_n = -C_1 \rho V_p \dot{u}_x$ $\tau = -C_2 \rho V_s \dot{u}_y$

dove C_1 e C_2 sono i coefficienti di rilassamento che modificano l'assorbimento delle onde. Se i coefficienti di rilassamento sono posti uguali all'unità generano una condizione ridondante per le onde incidenti perpendicolari. Vari studi hanno indicato che i valori migliori sono $C_1 = 1$ e $C_2 = 0.25$ questi valori non permettono comunque il totale assorbimento delle onde incidenti.

Il passaggio fra la rimozione delle condizioni al contorno di tipo statico (vincolo fisso) alle condizioni al contorno di tipo dinamico (assorbenti) avviene togliendo le condizioni tensionali sui vincoli. Questo comporterebbe una modifica nel modello delle condizioni iniziali imposte, per cui la rimozione delle condizioni statiche avviene sostituendole con un valore virtuale iniziale di velocità. Successivamente nel calcolo delle tensioni si effettua una sottrazione, dalla velocità totale, della velocità inizialmente assegnata per ottenere i valori reali come segue:

$$\sigma_n = -C_1 \rho V_p \dot{u}_n + \sigma_{n,0} = -C_1 \rho V_p (\dot{u}_n + u_{n,0}^\circ)$$

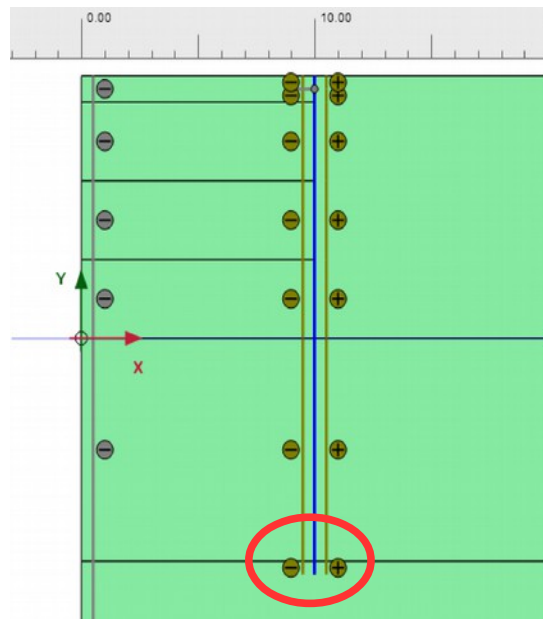
7 Validazione del modello

7.1 Parametri dell'interfaccia terreno-struttura

La procedura standard del software Plaxis, per la definizione dell'interfaccia di contatto terreno-struttura, prevede che essa sia definita come il materiale terreno adiacente, a cui viene applicato un coefficiente riduttivo delle proprietà elastiche e di resistenza. Nel caso in esame il legame costitutivo ipoplastico rientra nei legami costitutivi definiti dall'utente, pertanto il software Plaxis non implementa la procedura standard, ma chiede di definire direttamente dei parametri elastici e di resistenza.

In genere qualsiasi sia la procedura per definire il comportamento dell'interfaccia terreno-struttura si deve imporre un comportamento dell'interfaccia più debole del terreno, per evitare picchi di tensione ai bordi della struttura. Il valore di 2/3 della rigidità e della resistenza del terreno è il valore in genere consigliato per il buon comportamento dell'interfaccia. Nel caso in cui si deve modellare l'intefaccia attorno alla punta della palancola, come nel caso analizzato, è preferibile definire i parametri dell'interfaccia pari a quelli del terreno adiacente per evitare anomalie nei risultati.

Nell'immagine a fianco si evidenzia in rosso il tratto terminale di interfaccia di 0.5m per la corretta modellazione attorno alla punta della palancola.



Nell'inserimento manuale dei parametri dell'interfaccia è richiesto il modulo elastico edometrico

$$E_{oed,i} = 2 G_i \frac{1 - \nu_i}{1 - 2\nu_i}$$

$$G_i = R_{inter}^2 G_{soil} \leq G_{soil}$$

$$\nu_i = 0.45$$

che va a definire i seguenti valori di spostamento elastico all'interfaccia

$$\text{Elastic gap displacement} = \frac{\sigma}{K_N} = \frac{\sigma t_i}{E_{oed,i}}$$

$$\text{Elastic slip displacement} = \frac{\tau}{K_S} = \frac{\tau t_i}{G_i}$$

si definiscono con il valore K_N e K_S la rigidità normale e a taglio dell'interfaccia.

Il software richiede quindi l'input del modulo edometrico dell'interfaccia E_{oed} e dei parametri di resistenza all'interfaccia c_{inter} , ϕ_{inter} e ψ_{inter} scelti in funzione del terreno a contatto con essa.

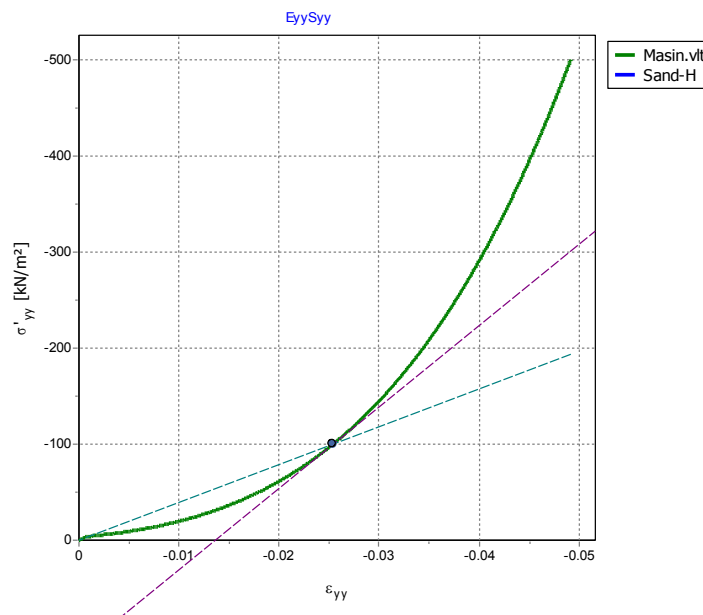


Fig.7.1-1 Test edometrico di tipo numerico. Il grafico evidenzia il modulo secante e tangenziale

Nel caso in esame si ricercano gli effetti dell'interfaccia sulla soluzione del problema, per cui si sono definiti una serie di casi variando alcuni valori e mantenendo costanti altri.

Il modulo edometrico di compressione primaria viene scelto come modulo secante alla tensione di riferimento di 100KPa, come richiesto dalla formulazione dell'elemento, ottenendo un valore di $E_{oed} = 4000$ KPa. Partendo dal modulo di riferimento si analizzano quattro casi:

$$E_{oed} = 4000 ; 2000 ; 1000 ; 500 \text{ KPa}$$

La coesione efficace rimane minima e costante in tutti i casi, in modo da non riscontrare problemi numerici e non introdurre una coesione non realistica per il materiale sabbioso analizzato.

L'angolo di attrito viene fatto variare nei valori di $\phi^\circ = 20 ; 26 ; 30$ ridotto in varia misura, per tenere in considerazione il contatto palancola-terreno e il comportamento dell'elemento finito di interfaccia che deve avere parametri di resistenza inferiori al terreno adiacente.

L'angolo di dilatanza viene posto uguale a zero visto il ridotto angolo di attrito assegnato al materiale.

La tabella seguente illustra la serie di test effettuati per valutare quali siano i valori più corretti da applicare per il caso in esame:

Caso	E_{OED}^{REF}	c_{REF}	φ°	ψ°
1	4000	1	20	0
2	2000	1	20	0
3	1000	1	20	0
4	500	1	20	0
5	4000	1	26	0
6	2000	1	26	0
7	1000	1	26	0
8	500	1	26	0
9	4000	1	30	0
10	2000	1	30	0
11	1000	1	30	0
12	500	1	30	0

7.2 Frequenze naturali del deposito di terreno

Risulta fondamentale la conoscenza dell'andamento della funzione di amplificazione del deposito, in quanto lo smorzamento numerico viene tarato in funzione delle frequenze naturali del terreno e della frequenza portante del terremoto.

La formulazione che meglio approssima le frequenze naturali per il terreno uniforme elastico su base rigida è:

$$f_n = \frac{V_s}{4H} \cdot (1 + 2n) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3 \dots, \text{ posti i dati}$$

H (m) =	60.00
D =	0.05
Vs (m/s) =	400.00

e si ricavano i seguenti risultati di frequenza circolare, frequenza e periodo

n	ωn	f_n	T
0.00	10.47	1.67	0,6
1.00	31.42	5.00	0,2
2.00	52.36	8.33	0,12
3.00	73.30	11.67	0,09
4.00	94.25	15.00	0,07
5.00	115.19	18.33	0,05

Nel grafico seguente si nota l'andamento della funzione di amplificazione al variare della frequenza

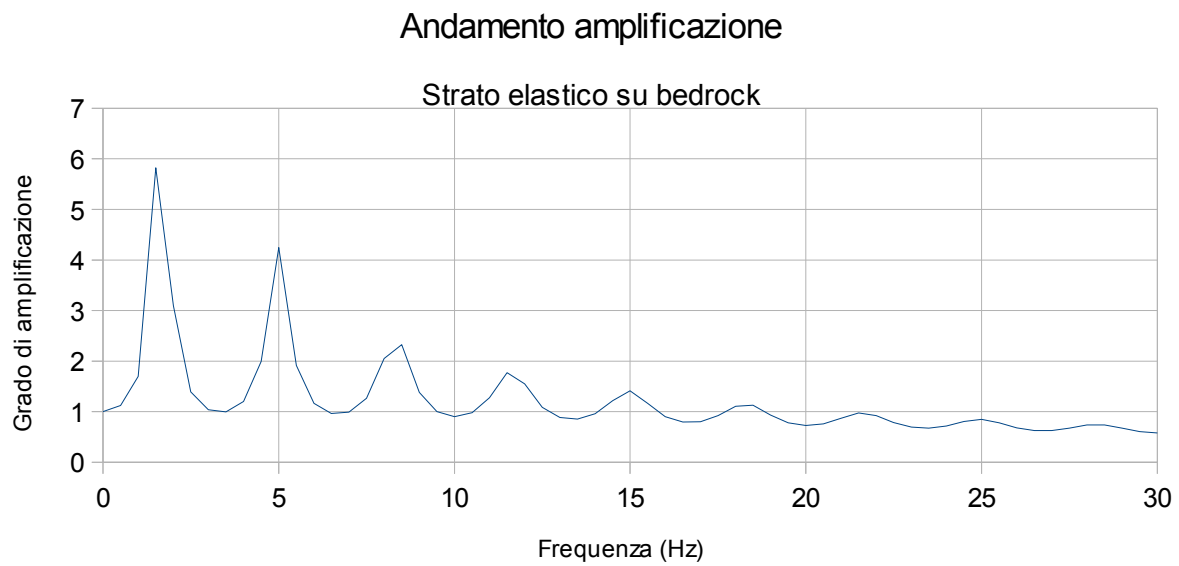


Fig.7.2-1 Andamento funzione di amplificazione

La funzione di amplificazione viene approssimata con la seguente formula:

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\left(2\pi \frac{H}{V_s} f\right) + \left(2\pi \frac{HD}{V_s} f\right)^2}}$$

7.3 Determinazione dello smorzamento numerico

La valutazione della risposta sismica di un dato sito è comunemente eseguita mediante analisi dinamiche, in cui la risoluzione delle equazioni del moto è effettuata nel dominio della frequenza o in quello del tempo. Nei metodi operanti nel dominio della frequenza viene fatta l'ipotesi di terreno a comportamento viscoelastico, caratterizzato da un modulo di taglio complesso che consente di modellare uno smorzamento indipendente dalla frequenza, come si osserva dalle prove di laboratorio e durante gli eventi sismici. Il comportamento non lineare del terreno è tenuto in conto mediante un procedimento lineare equivalente secondo il quale il rapporto di smorzamento, unitamente alla rigidità, è aggiornato in funzione del livello di deformazione tangenziale. Tra i metodi operanti nel dominio del tempo alcuni eseguono analisi lineari equivalenti, altri analisi propriamente non lineari. Nelle analisi lineari equivalenti lo smorzamento è modellato attraverso la matrice di dissipazione viscosa; quest'ultima è aggiornata in funzione del livello di deformazione tangenziale con una procedura analoga ai metodi nel dominio della frequenza. Nelle analisi non lineari, come il caso analizzato in tesi, l'adozione di un modello costitutivo non lineare consente di modellare il reale comportamento isteretico del terreno tramite l'aggiornamento passo passo della matrice di rigidità. Tuttavia, in quest'ultimo caso, nelle equazioni del moto viene introdotta una matrice di dissipazione viscosa, sia per modellare il comportamento del terreno a basse deformazioni, dove i modelli costitutivi non lineari forniscono uno smorzamento praticamente nullo, sia per ridurre i problemi numerici nella risoluzione delle equazioni del moto.

La matrice di dissipazione viscosa è generalmente costruita attraverso la formulazione di Rayleigh completa, cioè come combinazione lineare della matrice delle masse e di quella delle rigidità. Questa formulazione porta, al contrario di quanto accade nelle analisi nel dominio della frequenza, ad uno smorzamento dipendente dalla frequenza che può incidere in maniera più o meno marcata sui risultati delle analisi numeriche. In genere si assiste ad un effetto di sovra smorzamento per le alte frequenze. I coefficienti di Newmark sono tarati per ottenere un range di frequenze, più importanti al fine degli effetti sul terreno, smorzate con un assegnato ξ .

7.3.1 Formulazione teorica

Nella presente tesi si utilizza l'analisi FEM non lineare e pertanto si approfondisce l'aspetto della scelta dei coefficienti di Newmark per l'integrazione nel dominio del tempo. Le analisi nel dominio del tempo offrono il vantaggio di poter rappresentare il comportamento del terreno durante l'intero evento sismico seguendo il variare del modulo di taglio G e dello smorzamento ξ , cosa difficilmente rappresentabile attraverso una rigidità equivalente come nei modelli lineari equivalenti.

Nelle analisi nel dominio del tempo di un deposito di terreno poggiante su un basamento, il sistema di equazioni che esprime l'equilibrio dinamico dell'intero deposito è il seguente:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{I\}\ddot{u}_g(t)$$

dove $[M]$ $[C]$ e $[K]$ sono rispettivamente le matrici delle masse, di dissipazione e di rigidità globali, $\{\ddot{u}\}$ $\{\dot{u}\}$, e $\{u\}$ i vettori delle accelerazioni, della velocità e degli spostamenti relativi, $\ddot{u}_g(t)$ la storia temporale dell'accelerazione applicata al basamento e $\{I\}$ il vettore identità. Le matrici $[M]$ $[C]$ e $[K]$ sono assemblate attraverso la risposta incrementale del terreno. Il sistema viene risolto mediante diversi schemi di integrazione passo passo tra i quali, quelli più utilizzati nelle analisi dinamiche, il metodo β di Newmark, implementato nel codice di calcolo utilizzato in questa tesi, e quello θ di Wilson. L'integrazione delle equazioni del moto richiede la conoscenza della matrice di dissipazione $[C]$. Quest'ultima viene comunemente espressa secondo la formulazione di Rayleigh, cioè come combinazione lineare delle matrici delle masse e delle rigidità:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

dove α e β sono i coefficienti di Rayleigh. È possibile dimostrare che il rapporto di smorzamento ξ_j associato al j -esimo modo di vibrazione del deposito è espresso dalla:

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_j} + \beta \omega_j \right)$$

dove ω_j è la frequenza circolare relativa al modo j .

I coefficienti di Rayleigh vengono comunemente determinati attraverso due procedure, a seconda che si fissi il valore del rapporto di smorzamento modale ξ_j in corrispondenza di una o due frequenze naturali opportunamente selezionate. Secondo la prima procedura, imponendo che ξ_j assuma il valore ξ^* in corrispondenza della frequenza di controllo ω^* , i coefficienti di Rayleigh assumono le seguenti espressioni:

$$\alpha = \xi^* \omega^* \quad , \quad \beta = \frac{\xi^*}{\omega^*}$$

e il rapporto di smorzamento del generico modo j è espresso dalla relazione:

$$\xi_j = \frac{\xi^*}{2} \left(\frac{\omega^*}{\omega_j} + \frac{\omega_j}{\omega^*} \right)$$

La variazione di ξ_j con ω_j è riportata in fig.7.3.1-1. Si nota che ξ_j assume un minimo, pari al valore imposto ξ^* , in corrispondenza della frequenza di controllo ω^* mentre è sovrastimato per ω diverso da ω^* . Nello stesso grafico sono inoltre diagrammati, a tratto sottile, i due contributi corrispondenti ai termini proporzionali alla matrice delle masse e a quella delle rigidezze, che sono rispettivamente inversamente e direttamente proporzionali a ω_j . La seconda procedura consiste invece nel fissare lo smorzamento modale in corrispondenza di due frequenze naturali di controllo ω_m e ω_n . Questa procedura è implementata in Plaxis come sistema per il calcolo dello smorzamento numerico. Alla procedura si assegnano i valori di smorzamento relativi a determinate frequenze e si ricavano i coefficienti α e β :

$$\alpha = 2\omega_m\omega_n \frac{(\omega_m\xi_n + \omega_n\xi_m)}{\omega_m^2 - \omega_n^2} \quad \beta = 2 \frac{(\omega_m\xi_m + \omega_n\xi_n)}{\omega_m^2 - \omega_n^2}$$

Assegnando lo stesso valore del rapporto di smorzamento ξ^* in corrispondenza dei modi m e n , si ottiene per α e β :

$$\alpha = \xi^* \frac{2\omega_m\omega_n}{\omega_m + \omega_n} \quad , \quad \beta = \xi^* \frac{2}{\omega_m + \omega_n}$$

Il rapporto di smorzamento ξ_j associato al j -esimo modo di vibrazione risulta:

$$\xi_j = \frac{2\xi^*}{\omega_m + \omega_n} \left(\frac{\omega_m\omega_n}{2\omega_j} + \frac{\omega_j}{2} \right)$$

e la sua variazione con la frequenza circolare naturale ω_j è riportata in fig.7.3.1-1b. Dalla figura si nota che la scelta di due frequenze di controllo consente, rispetto alla procedura descritta in precedenza, di ridurre la variazione del rapporto di smorzamento modale in un più ampio campo di frequenze. In particolare ξ_j è inferiore al valore imposto ξ^* nel campo di frequenza compreso tra ω_m e ω_n , mentre al di fuori di questo intervallo viene sovrastimato.

L'esame dei diagrammi di fig.7.3.1-1 mostra che la formulazione di Rayleigh completa a doppia frequenza di controllo, consente di modellare adeguatamente uno smorzamento viscoso poco variabile con la frequenza nel campo di frequenze di interesse (fig.7.3.1-1a); viceversa, la formulazione di Rayleigh completa a singola frequenza di controllo (fig.7.3.1-1b), fornisce un rapporto di smorzamento crescente marcatamente con la frequenza.

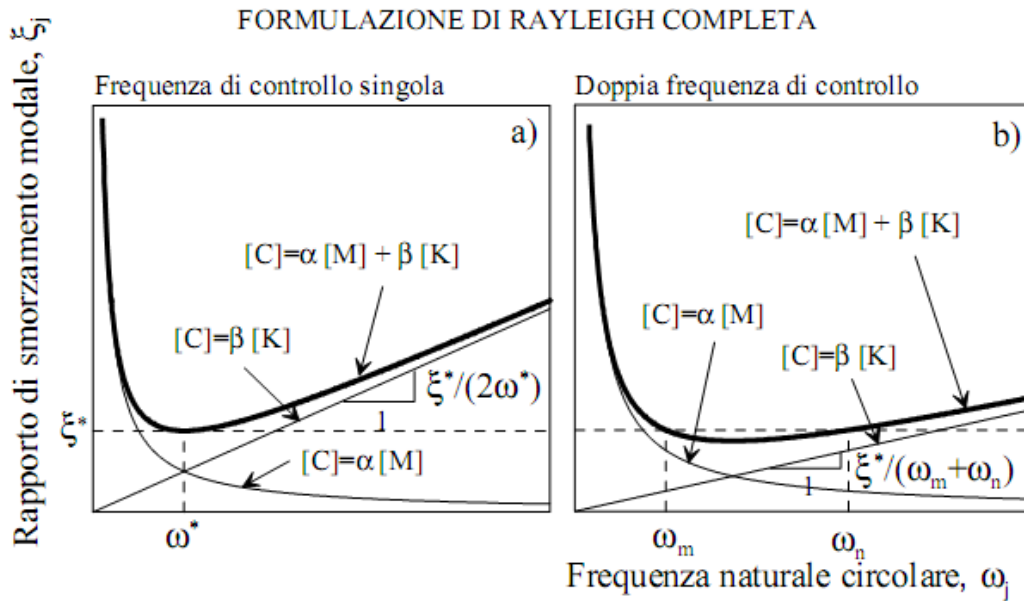


Fig.7.3.1-1 Variazione del rapporto di smorzamento modale con la frequenza naturale circolare per formulazione di Rayleigh completa a singola e doppia frequenza di controllo

Calcolo dei coefficienti per il caso in esame

La formulazione della matrice di smorzamento è implementata in Plaxis come matrice proporzionale alle masse e alle rigidità per cui, attraverso la formulazione di Newmark, si interviene sui coefficienti producendo i seguenti comportamenti:

- Se le componenti della matrice delle masse diventano predominanti, con il coefficiente $\alpha_R \gg \beta_R$ di almeno un ordine di grandezza, le frequenze più basse vengono sovra-smorzate dal sistema
- Se le componenti della matrice delle rigidità diventano predominanti, con il coefficiente $\alpha_R \ll \beta_R$ di almeno un ordine di grandezza, le frequenze più alte vengono sovra-smorzate dal sistema

Se si pone $\alpha_R = \beta_R = 0$ il sistema non viene numericamente smorzato e si utilizza per analisi con modelli di terreno che includono lo smorzamento viscoso nella loro formulazione. Infine si rileva che il solutore Plaxis implementa la matrice delle masse come matrice lumped (a masse concentrate). Questa implementazione tende a sottostimare le frequenze naturali del terreno superiori alla prima, al contrario della formulazione con matrice delle masse consistent (a massa distribuita) che tende a sovrastimare le frequenze naturali superiori alla prima.

Nella seguente tabella sono evidenziati i dati principali che caratterizzano il sisma.

E' necessario considerare la frequenza fondamentale del terremoto usata per individuare le frequenze naturali a cui attribuire lo smorzamento.

Stazione	Evento	T (s)	ω_{N1} (rad/s)
Tolmezzo	Friuli 1976	0,5	12,7
Sturno	Irpinia 1980	2,31	2,72
Norcia	Umbria 1997	0,25	25,13

Tabella eventi sismici

In genere si utilizzano il primo e il più alto modo naturale del terreno che include il periodo predominante dell'input sismico assegnato. Un'altra possibile procedura determina le due frequenze naturali del deposito a cui assegnare lo smorzamento in modo diverso. La prima coincide con la prima frequenza naturale, la seconda si determina come la frequenza naturale associata all'intero n dispari più grande del rapporto fra la frequenza fondamentale del sisma in analisi e la prima frequenza fondamentale del terreno.

Prima procedura

ω_m (rad/s)	Evento	ω_{N1} (rad/s)	ω_n
10,47	Friuli 1976	12,7	31,42
10,47	Irpinia 1980	2,72	31,42
10,47	Umbria 1997	25,13	31,42

Seconda procedura

ω_m (rad/s)	Evento	ω_{N1} (rad/s)	ω_{N1}/ω_{N1}	n	ω_n
10,47	Friuli 1976	12,7	1,2	3	73,3
10,47	Irpinia 1980	2,72	0,3	1	31,42
10,47	Umbria 1997	25,13	2,4	3	73,3

Parametri scelti

Terremoto del Friuli

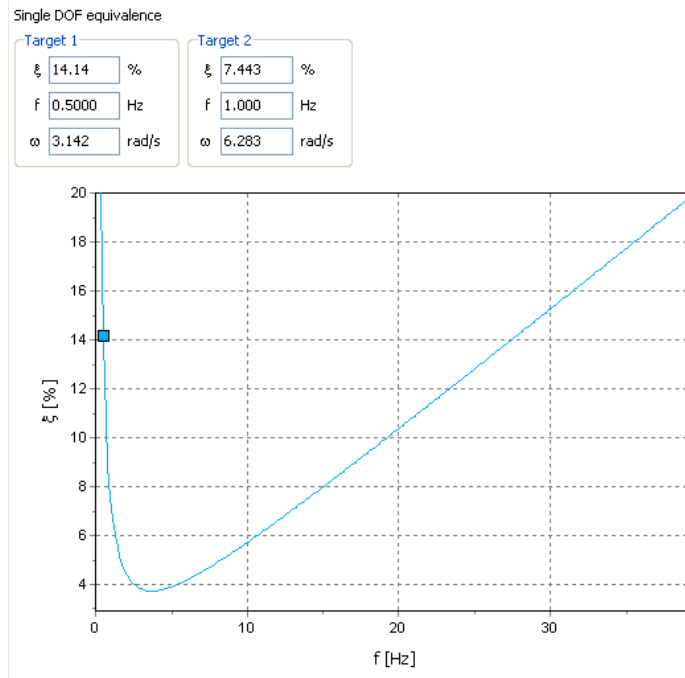


Fig. 7.3.1-2

da cui si ricavano i parametri

α	0,8275
β	$1,592 \cdot 10^{-3}$

Terremoto Irpinia

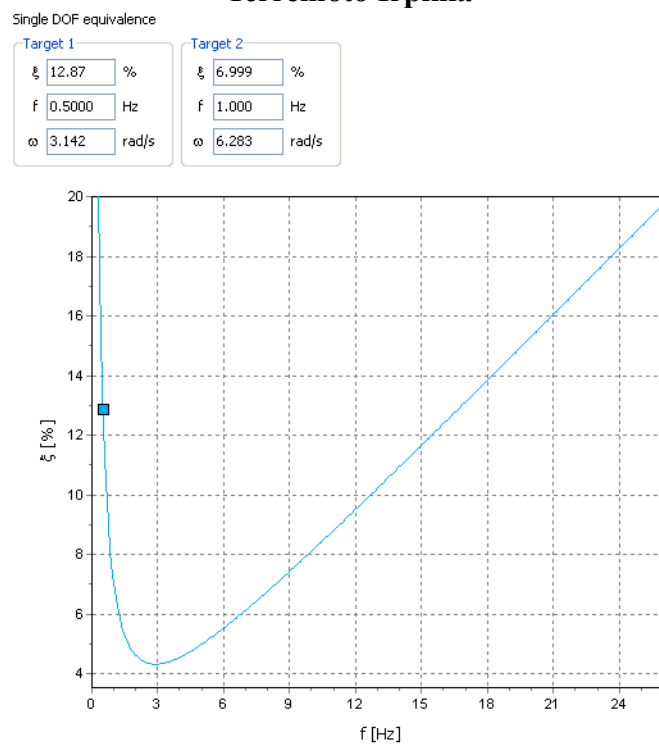


Fig. 7.3.1-3

da cui si ricavano i parametri

α	0,7853
β	$2,387 \cdot 10^{-3}$

Terremoto Umbro-Marchigiano

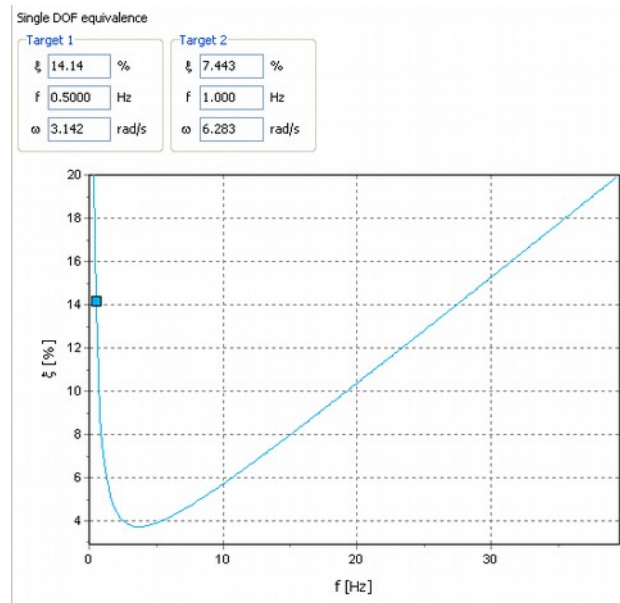


Fig. 7.3.1-4

da cui si ricavano i parametri

α	0,8275
β	$1,592 \cdot 10^{-3}$

7.4 Dimensione massima degli elementi

Si seguono le indicazioni di Kuhlmeyer e Lysmer (1973) che suggeriscono di limitare la dimensione massima degli elementi finiti che costituiscono il terreno. La dimensione degli elementi deve essere al massimo di $1/6 \div 1/8$ della lunghezza della più piccola onda sismica considerata nell'analisi. L'approccio di Rayleigh tende a sovra-smorzare le frequenze più alte, per ridurre questo effetto si devono tarare i coefficienti di smorzamento numerico. Inoltre è necessario che gli elementi siano sufficientemente piccoli da non introdurre un ulteriore sovra-smorzamento dovuto alla mesh dipendenza.

Si pone la massima frequenza di interesse f_{max} , posto λ lunghezza d'onda associata alla f_{max} , V_s velocità delle onde di taglio nel terreno, L_{max} massima dimensione dell'elemento.

$$L_{max} = \frac{\lambda}{8} = \frac{V_s}{8 \cdot f_{max}} \quad \text{Nelle zone di infittimento}$$

$$L_{max} = \frac{\lambda}{6} = \frac{V_s}{6 \cdot f_{max}} \quad \text{Nelle zone lontane più esterne in cui la mesh è più grossolana}$$

La seguente tabella illustra la dimensione massima degli elementi in funzione della frequenza:

n	ωn	fn	T	Lmax fine (m)	Lmax gros (m)
0.00	10.47	1.67	0,6	30.00	40.00
1.00	31.42	5.00	0,2	10.00	13.33
2.00	52.36	8.33	0,12	6.00	8.00
3.00	73.30	11.67	0,09	4.29	5.71
4.00	94.25	15.00	0,07	3.33	4.44
5.00	115.19	18.33	0,05	2.73	3.64

i valori ottenuti si confrontano con le dimensioni degli elementi della mesh nella zona di infittimento $L_{max} \approx 0.4$ m e nella zona più grossolana $L_{max} \approx 4$ m.

7.5 Determinazione del passo temporale di integrazione

Il solutore Plaxis utilizza uno schema di integrazione temporale implicito per cui è necessario imporre dei limiti al passo temporale di integrazione per non incorrere in sostanziali deviazioni della soluzione. Il passo temporale critico massimo, accettabile dal sistema, dipende dalla frequenza massima che si vuole considerare (naturale del sistema o del sisma applicato) e dalla dimensione dell'elemento finito. La formulazione fa riferimento al singolo elemento

$$\Delta t_{CRITICO} = \frac{l_e}{\alpha \cdot \sqrt{\frac{E \cdot (1-\nu)}{\rho \cdot (1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \left(1 + \frac{B^4}{4S^4} - \frac{B^2}{2S} \cdot \left(1 + \frac{1-2\nu}{4} \cdot \left(\frac{2S}{B^2}\right)\right)\right)}}$$

in cui si è indicato

- B la dimensione maggiore dell'elemento finito
- S la superficie dell'elemento
- $l_e = \frac{n_c}{12} \cdot \sqrt{(x_{max} - x_{min}) \cdot (y_{max} - y_{min})}$

I valori di x e y richiesti sono i limiti del modello e il parametro n_c rappresenta la distribuzione degli elementi che, nel caso in esame, assume il valore di $n_c = 0.5$

Il primo termine al denominatore rappresenta la velocità delle onde di compressione e il fattore α dipende dalla tipologia dell'elemento.

Per l'elemento triangolare a 15 nodi Zienkiewicz e Taylor consigliano $\alpha = \frac{1}{(19 \cdot \sqrt{c_{15}})}$ con

$$c_{15} \approx 4.9479 \cdot 10^{-3}$$

Per cui si ricava

l_e	α	E	ν	ρ	B	S	$\Delta t_{CRITICO}$
2,5	0,75	1000	0,2	17	0,4	0,08	0,52
2,5	0,75	1000	0,2	17	2	2	0,52

Nel caso in esame l'intervallo di tempo critico viene determinato automaticamente dal solutore Plaxis che ne determina anche gli step intermedi per adattare l'integrazione al tipo di accelerogramma fornito. Un corretto time step è fondamentale per non introdurre effetti filtro.

8 Dati di input del moto sismico

Si sono ricercati tre accelerogrammi da imporre al livello del bedrock alla base, questi hanno intensità e frequenze differenti proprio per rilevare il comportamento a forzanti sollecitanti diverse. L'aspetto essenziale del comportamento del legame costitutivo applicato in geotecnica in campo dinamico è il corretto calcolo di cedimenti e tensioni dopo carichi ciclici.

Si sono i seguenti tre accelerogrammi:

Accelerogramma Friuli 55

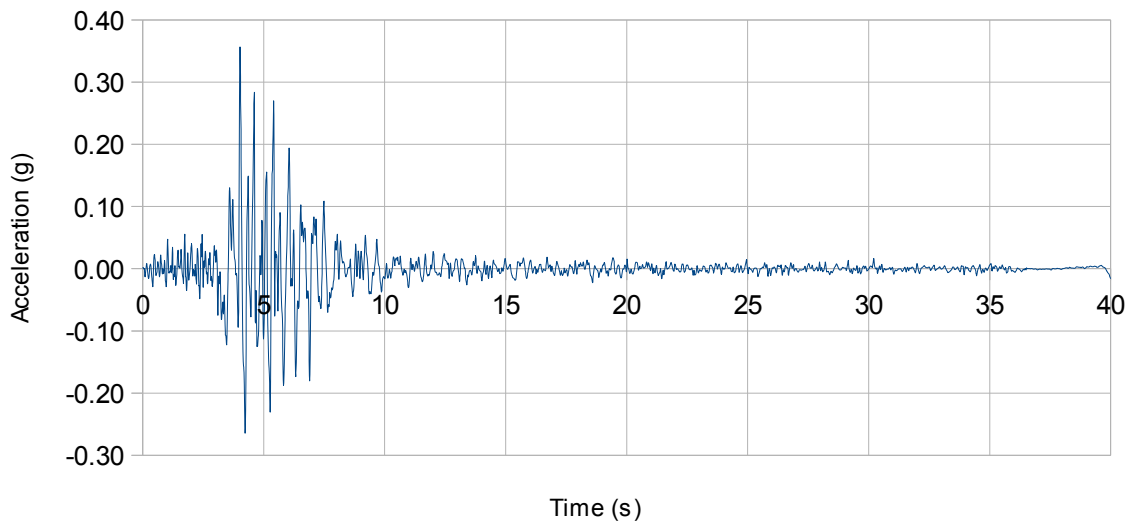


Fig.8-1

Accelerogramma Irpinia 287

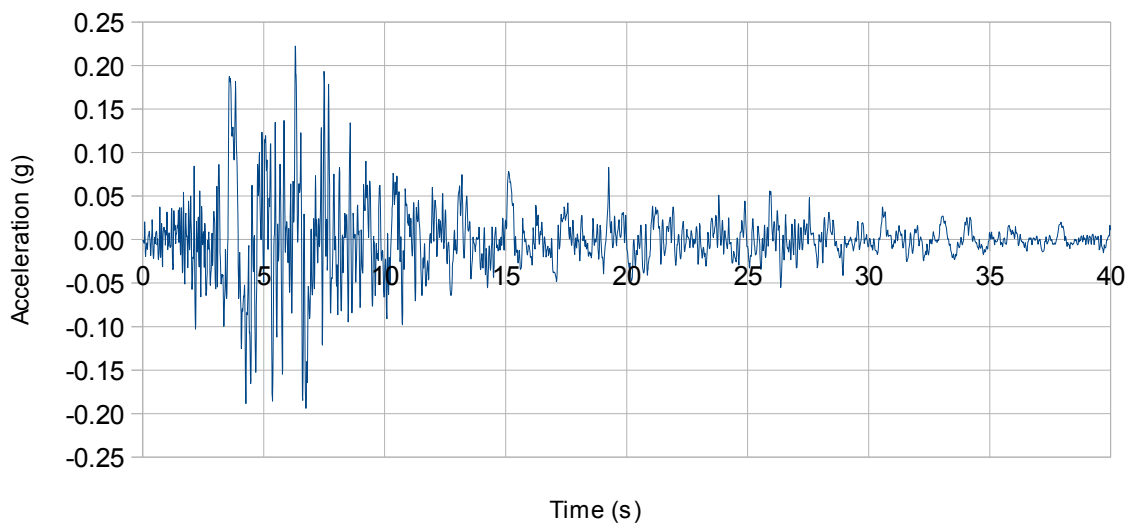


Fig.8-2

Accelerogramma Umbro marchigiano 594

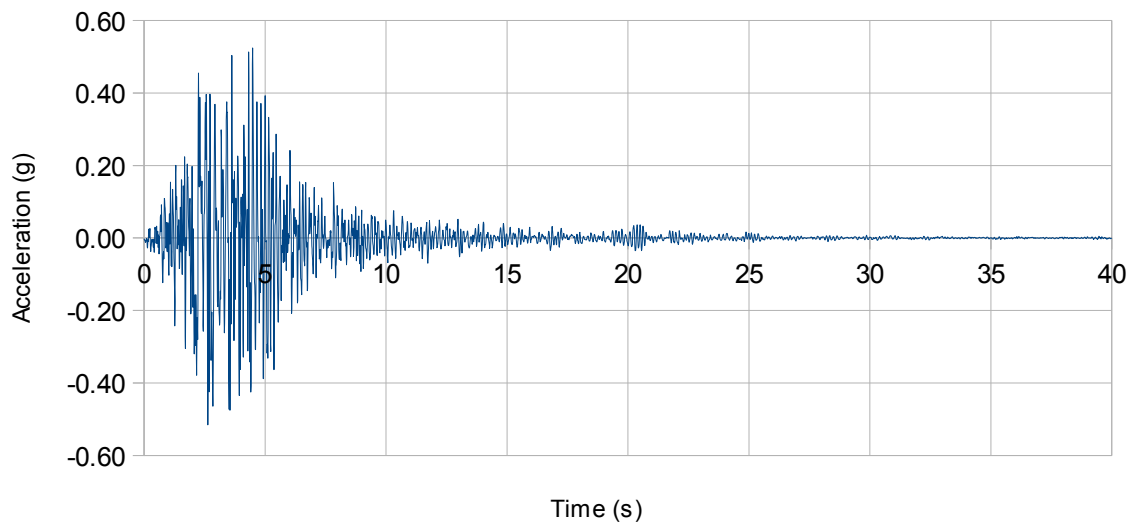


Fig.8-3

9 Analisi e interpretazione dei risultati

9.1 Analisi del comportamento dell'interfaccia

Si eseguono una serie di analisi statiche del processo di escavazione del terreno e di installazione della struttura. In questa serie di analisi lo stesso processo viene affrontato attribuendo valori diversi alle proprietà elastiche e di resistenza dell'interfaccia, come da tabella in fig.7.1-1. Come prima analisi si confrontano la velocità di convergenza numerica e la stabilità numerica al variare della rigidità e dell'angolo di taglio. Successivamente una serie di grafici illustreranno gli effetti della variazione dell'interfaccia sulla componente di spostamento e di sollecitazione della paratia. Infine si proporranno dei grafici per lo studio della variazione delle componenti tensionali dell'interfaccia stessa.

9.1.1 Velocità di convergenza e stabilità

Nel software Plaxis il numero di step necessari per giungere al risultato è correlato al tempo per ottenerli. Nella tabella seguente si riportano i risultati ottenuti in termini di step di calcolo:

Analisi	N. step	Analisi	N. step	Analisi	N. step
E4 f 30	40	E4 f 26	50	E4 f 20	56
E2 f 30	182	E2 f 26	67	E2 f 20	46
E1 f 30	n	E1 f 26	80	E1 f 20	91
E0,5 f 30	n	E0,5 f 26	n	E0,5 f 20	176

Fig.9.1.1-1 Numero di step necessari alla soluzione del problema

La tabella evidenzia l'esistenza di una correlazione fra i valori del modulo edometrico e la velocità di convergenza. Al crescere e al diminuire della rigidità rispetto a un valore, detto "critico", il numero di step necessari alla soluzione aumenta. Si nota inoltre l'effetto della variazione dell'angolo di attrito sulla velocità di convergenza. Valori superiori di quest'ultimo rendono più rapida la variazione del numero di step necessari. Valori inferiori dello stesso portano a considerare come più efficienti valori della rigidità inferiori. Un angolo di attrito ridotto porta ad un campo ammissibile di valori di rigidità più ampio. Questo non modifica la velocità di convergenza della rigidità critica, ma permette che l'analisi giunga a soluzione anche per valori della rigidità che si allontanano maggiormente dal valore critico.

Visti i risultati ottenuti in termini di convergenza ho ritenuto opportuno scegliere il termine E4 f26 come riferimento per le analisi successive. Per questo i risultati di quest'ultimo sono riportati in tutti i grafici per il confronto.

9.1.2 Effetti della variazione dell'interfaccia sulla paratia

Si riportano di seguito i risultati ottenuti in termini di spostamento orizzontale della paratia.

Spostamenti paratia

Variatione del modulo edometrico a parità di angolo di attrito

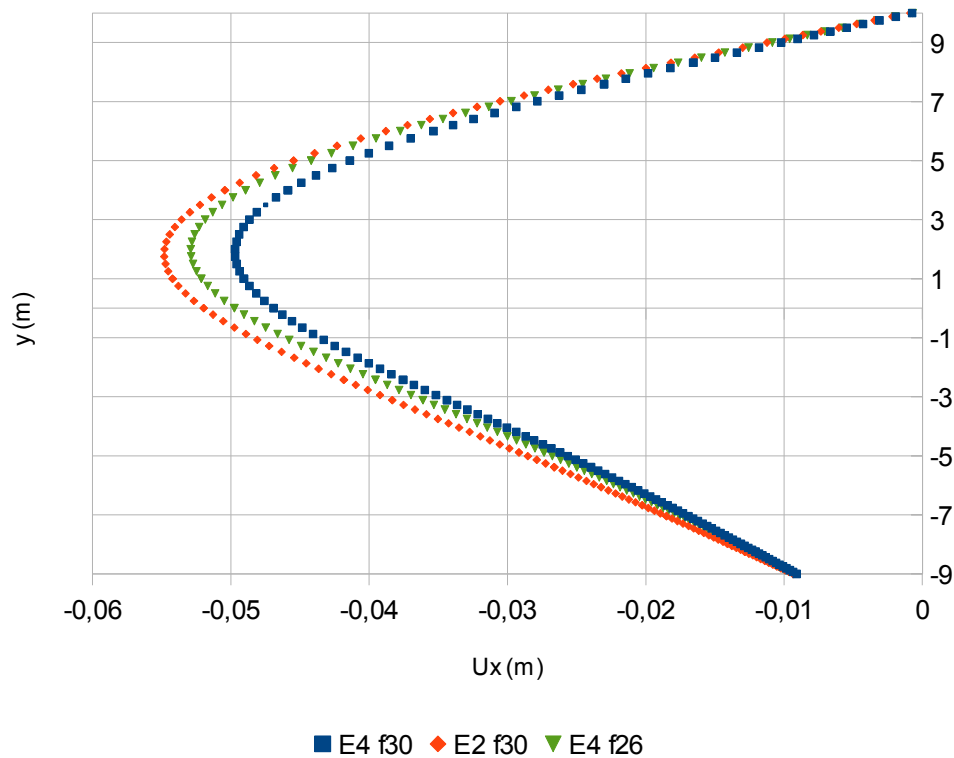


Fig.9.1.2-1

Nella fig.9.1.2-1 la variazione del modulo edometrico comporta che, con la sua riduzione, aumentano gli spostamenti orizzontali. A parità di modulo edometrico un angolo di attrito minore comporta maggiori spostamenti della paratia. La variazione ottenuta per i vari casi è comunque contenuta.

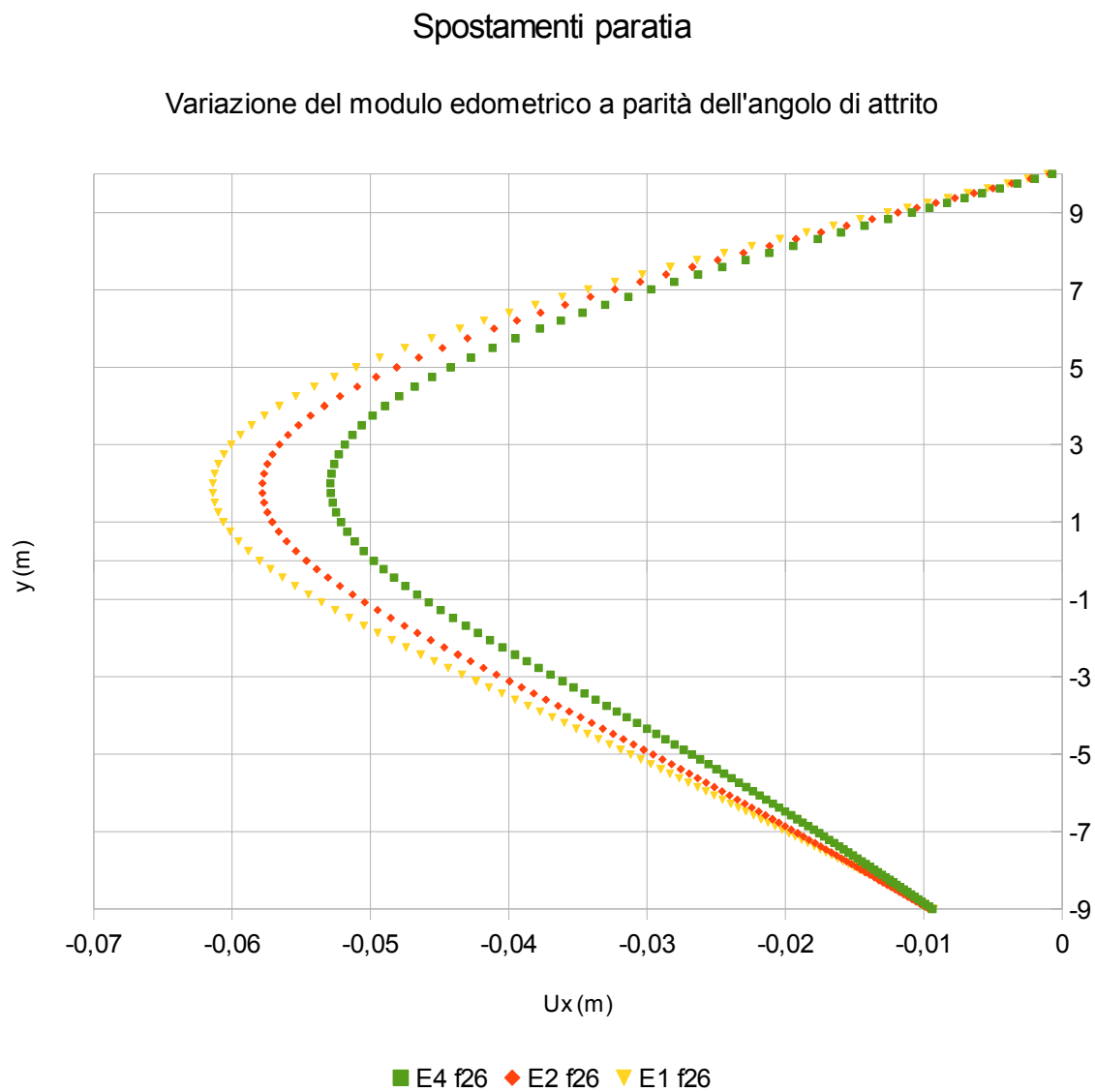


Fig.9.1.2-2

Le variazioni di spostamento sono analoghe ai casi precedenti. Le curve che si differenziano per moduli edometrici, uno il doppio dell'altro, si distanziano per quantità paragonabili.

Spostamenti paratia

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

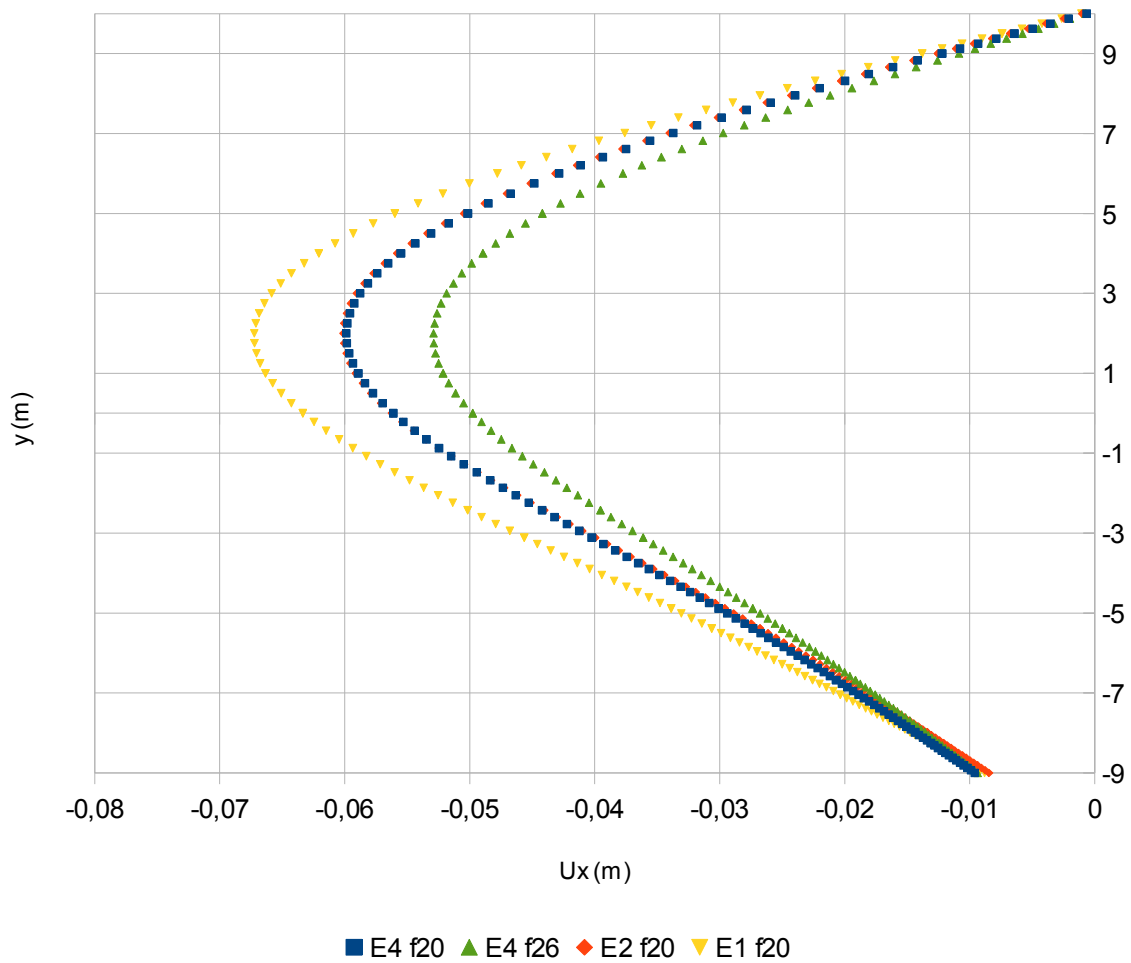


Fig.9.1.2-3

In fig.9.1.2-3 gli spostamenti determinati nei casi E4 f20 e E2 f20 sono paragonabili, al contrario del comportamento che si rileva negli altri casi.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti in termini di sollecitazione tagliante della paratia.

Sollecitazione di taglio

Variazione del modulo edometrico a parità di angolo di attrito

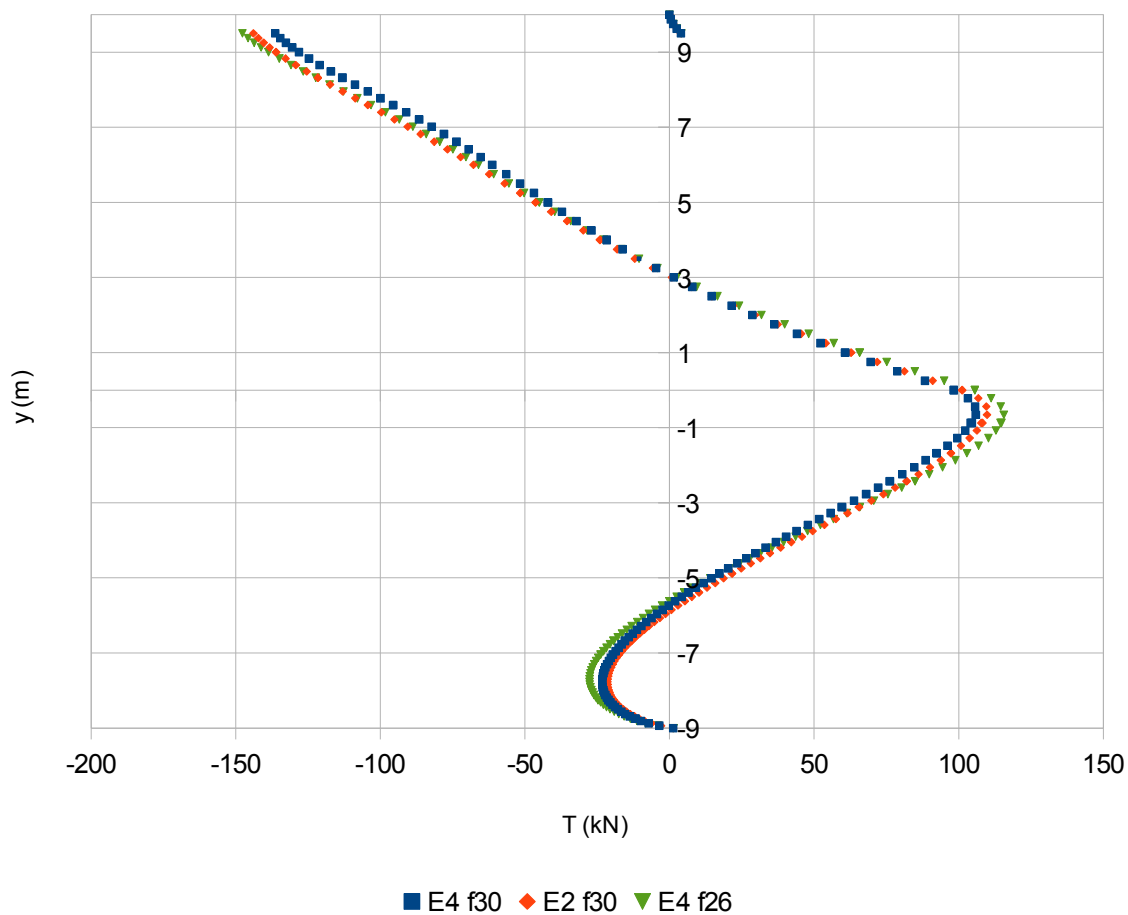


Fig. 9.1.2-4

Nella fig.9.1.2-4 le curve con lo stesso angolo di attrito sono praticamente coincidenti, mentre il caso con angolo di attrito inferiore riporta picchi di sollecitazione maggiori.

Sollecitazione di taglio

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

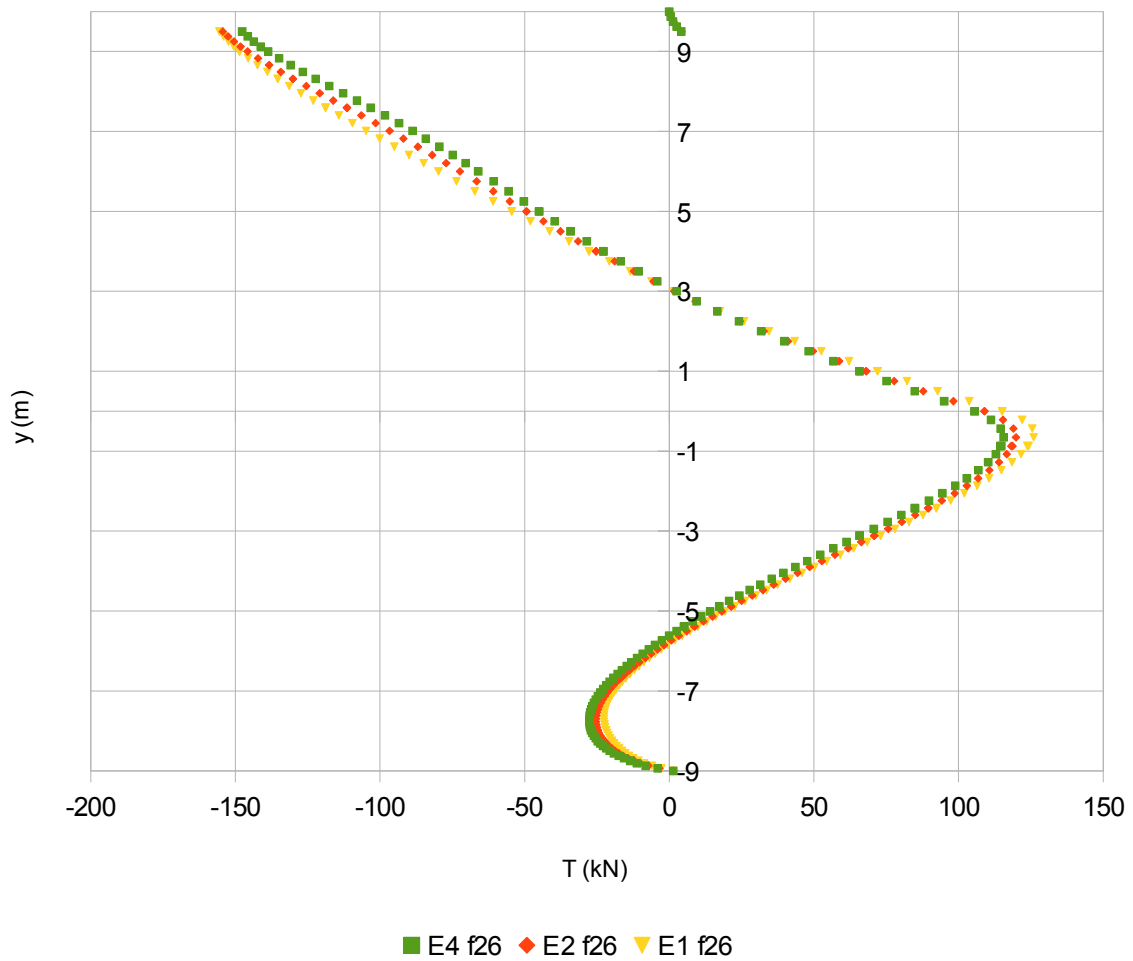


Fig. 9.1.2-5

Si rileva nella fig.9.1.2-5 un comportamento che varia gradualmente al variare del modulo edometrico. Il modulo edometrico maggiore comporta una sollecitazione maggiore nella parte di paratia infissa nel terreno. I valori inferiori del modulo edometrico comportano sollecitazioni taglienti superiori verso la base dello scavo e la testa della paratia.

Sollecitazione di taglio

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

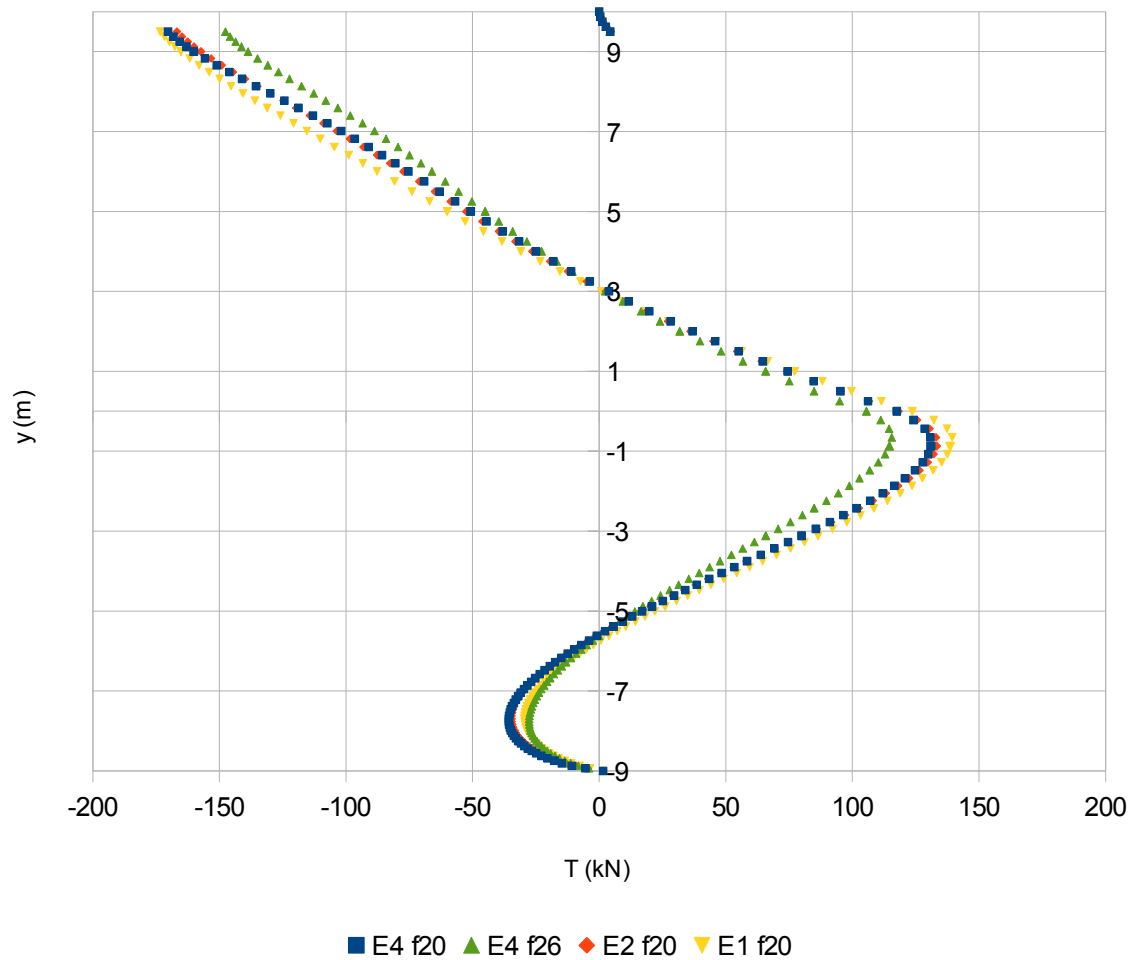


Fig. 9.1.2-6

Nella fig.9.1.2-6 si rileva un comportamento analogo alla fig.9.1.2-5, mentre la curva con angolo di attrito superiore si scosta marcatamente dalle altre ottenendo valori inferiori sull'intera lunghezza della paratia.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti in termini di sollecitazione flessionale della paratia.

Sollecitazione a momento

Variazione del modulo edometrico a parità di angolo di attrito

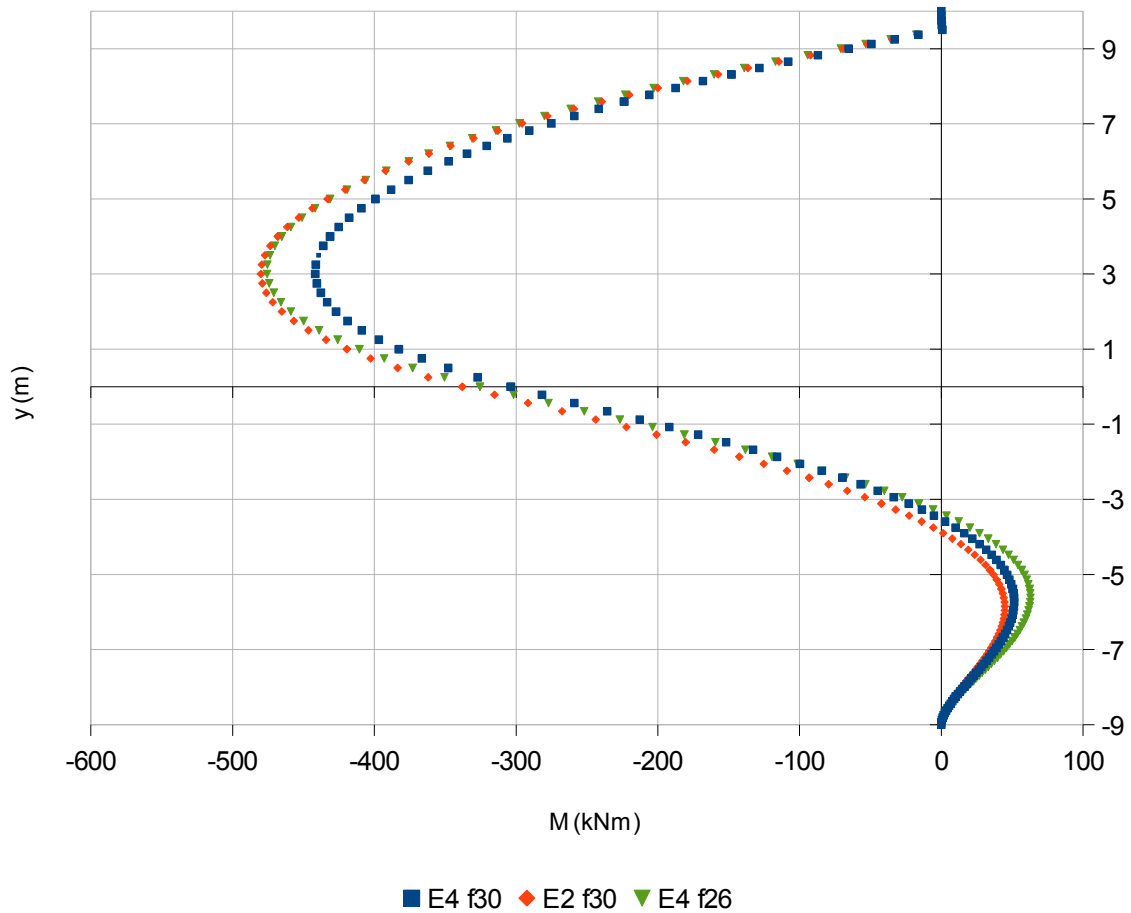


Fig. 9.1.2-7

Nella fig.9.1.2-7 si nota che la variazione della parte di paratia infissa non è molto marcata e i valori maggiori si ottengono per la curva con angolo di attrito inferiore. Nella parte di paratia superiore la curva con modulo edometrico inferiore mostra valori del momento inferiori, mentre i valori delle altre due curve sono paragonabili.

Sollecitazione a momento

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

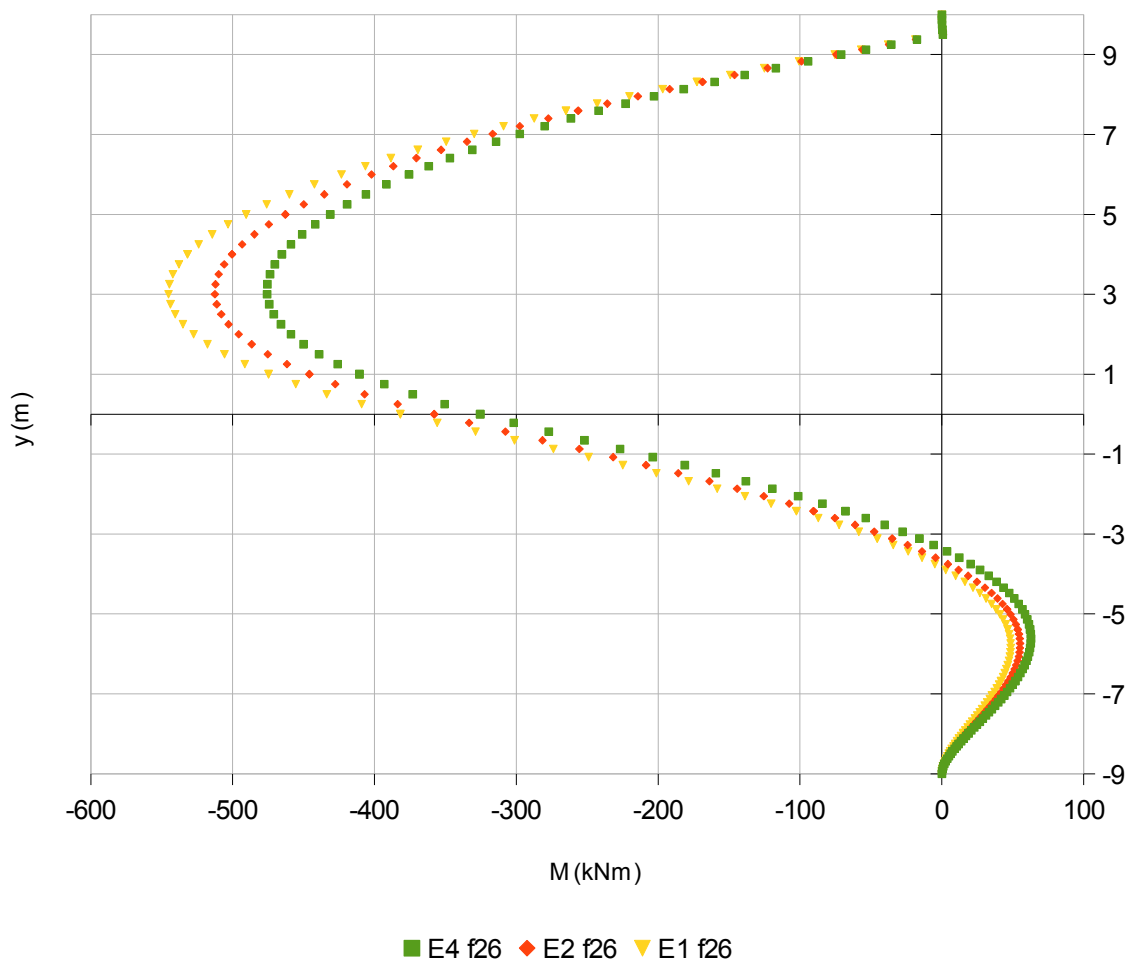


Fig. 9.1.2-8

Nella fig.9.1.2-8 a parità di angolo di attrito si nota come la riduzione del modulo edometrico comporti valori crescenti della sollecitazione nella struttura fuori terra, ottenendo valori marcatamente diversi. Nella parte di paratia interrata le curve si accomunano con valori leggermente superiori per il caso con modulo edometrico maggiore.

Sollecitazione a momento

Variatione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

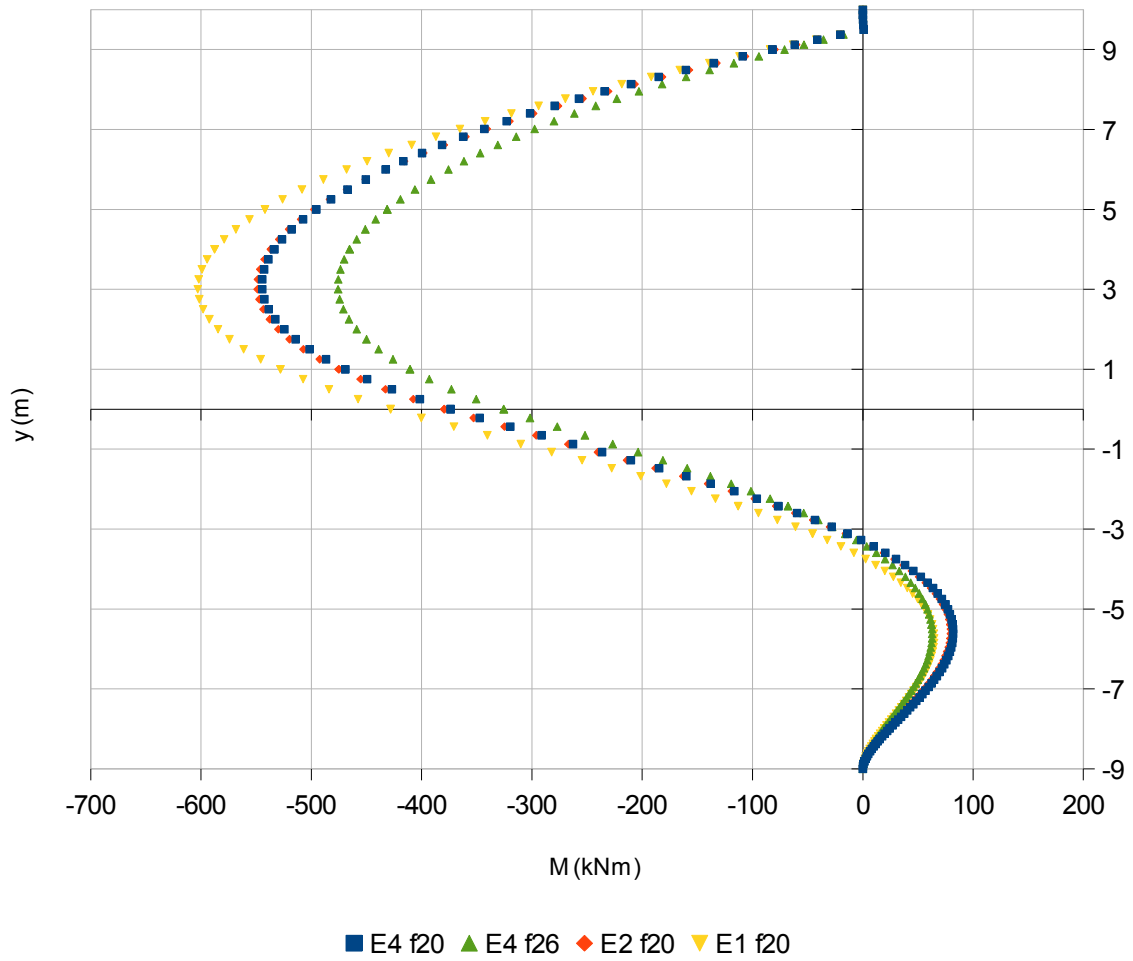


Fig. 9.1.2-9

Nella fig.9.1.2-9 il comportamento generalmente rilevato resta lo stesso tranne per le curve E4 f20 e E2 f20 che si mantengono prossime tra loro.

Confronti

Al ridursi del modulo edometrico crescono le componenti di sollecitazione e spostamento per la parte di struttura fuori terra, mentre si riducono nella parte infissa della paratia. La riduzione dell'angolo di attrito porta ad un marcato incremento delle sollecitazioni.

Una forte anomalia nel comportamento dell'interfaccia si riscontra con il confronto dei grafici degli spostamenti con i grafici delle sollecitazioni. In quantità ridotta il taglio e maggiormente il momento si rileva che le sollecitazioni maggiori sono associate a spostamenti maggiori, cosa che in genere non si è portati a pensare a parità della rigidità della struttura. Questo fatto è legato alla non mobilitazione della resistenza massima all'interfaccia per gli spostamenti maggiori, derivati da interfacce con minore modulo edometrico, conseguentemente maggiore sollecitazione viene trasmessa alla paratia. L'evidenza della mobilitazione minore della resistenza tagliante massima all'interfaccia viene riportata nei grafici seguenti che trattano l'andamento delle tensioni normali e tangenziali all'interfaccia.

9.1.3 Andamenti tensionali all'interfaccia

Si riportano di seguito i risultati ottenuti in termini di tensione normale all'interfaccia.

Tensione efficace normale all'interfaccia

Variazione del modulo edometrico a parità di angolo di attrito

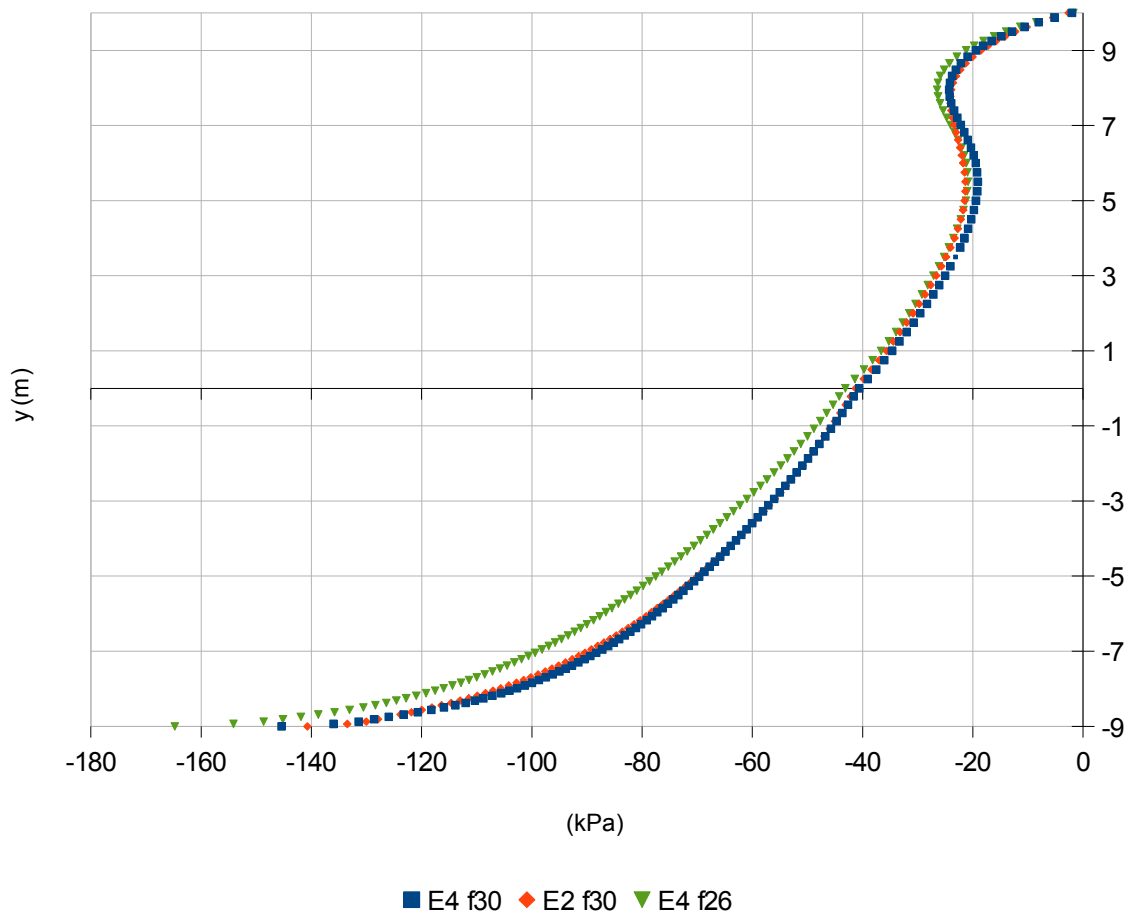


Fig.9.1.3-1

Nella fig.9.1.3-1 si evidenzia come al variare del modulo edometrico le curve rimangono comparabili, mentre la variazione dell'angolo di attrito incide notevolmente nella parte interrata della paratia.

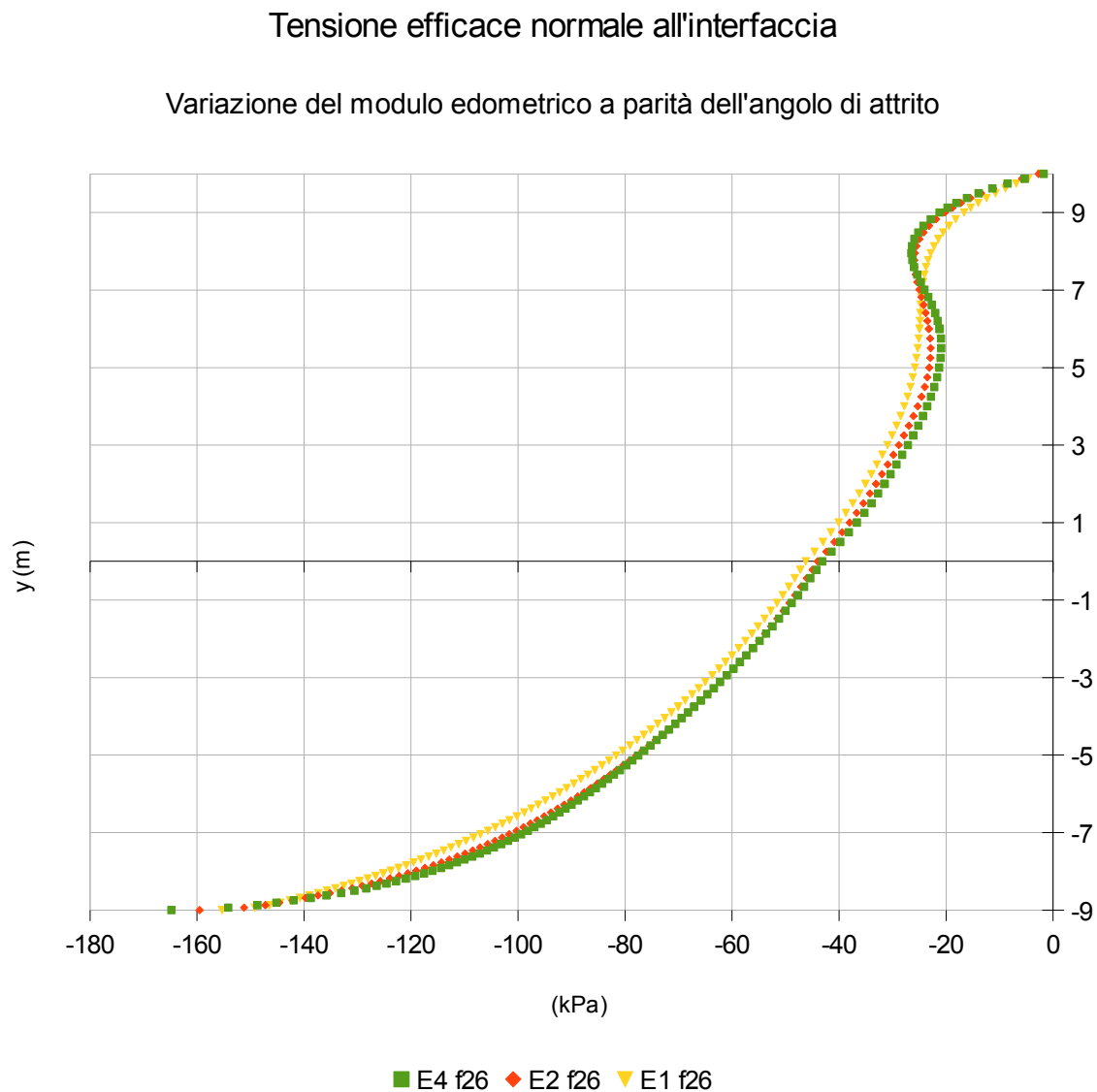


Fig.9.1.3-2

Nella fig.9.1.3-2, analogamente al caso precedente, a parità di angolo di attrito il modulo edometrico non comporta grandi variazioni.

Tensione efficace normale all'interfaccia

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

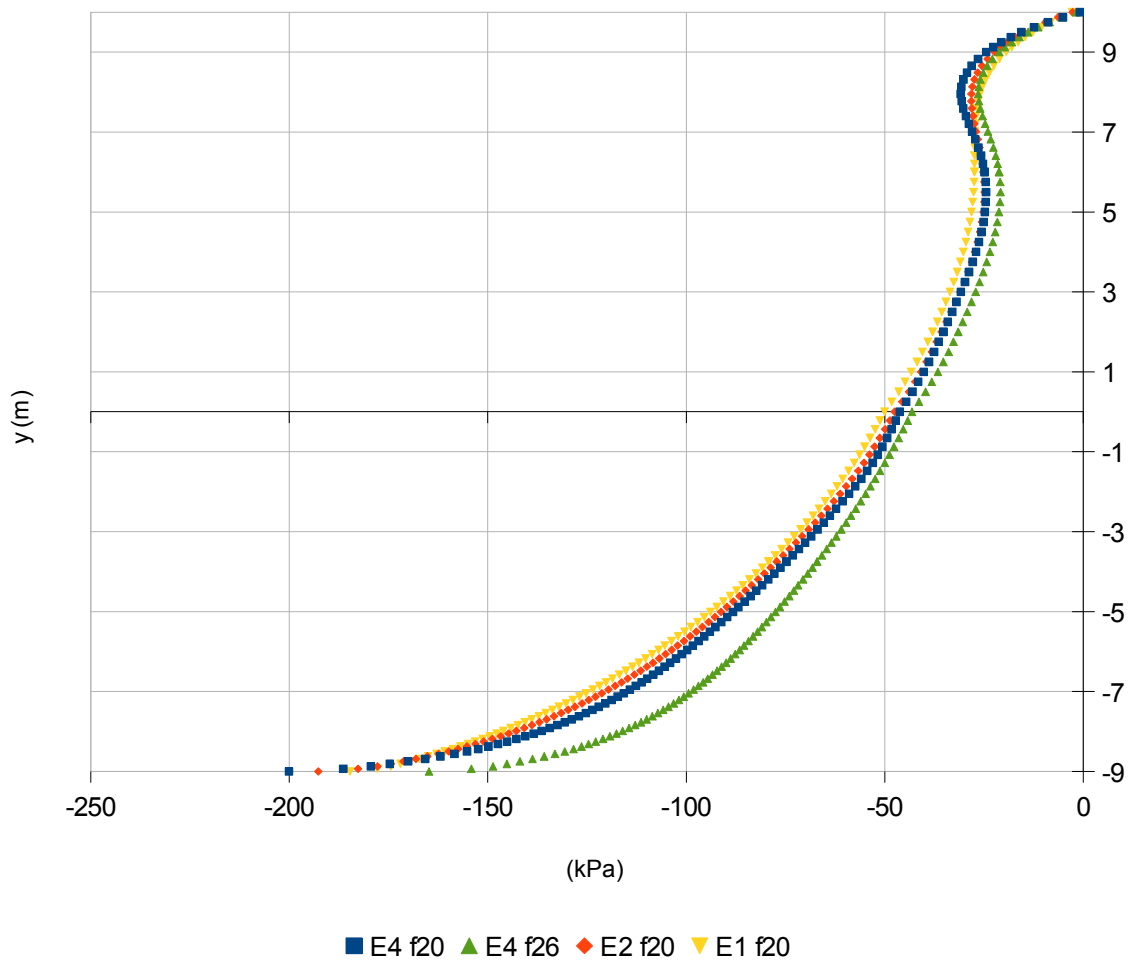


Fig.9.1.3-3

Nella fig.9.1.3-3 si evidenzia come al variare del modulo edometrico le curve rimangono comparabili, mentre l'aumento dell'angolo di attrito incide notevolmente nella parte interrata della paratia, riducendo le tensioni determinate.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti in termini di tensione tangenziale all'interfaccia.

Tensione efficace tangenziale all'interfaccia

Variatione del modulo edometrico a parità di angolo di attrito

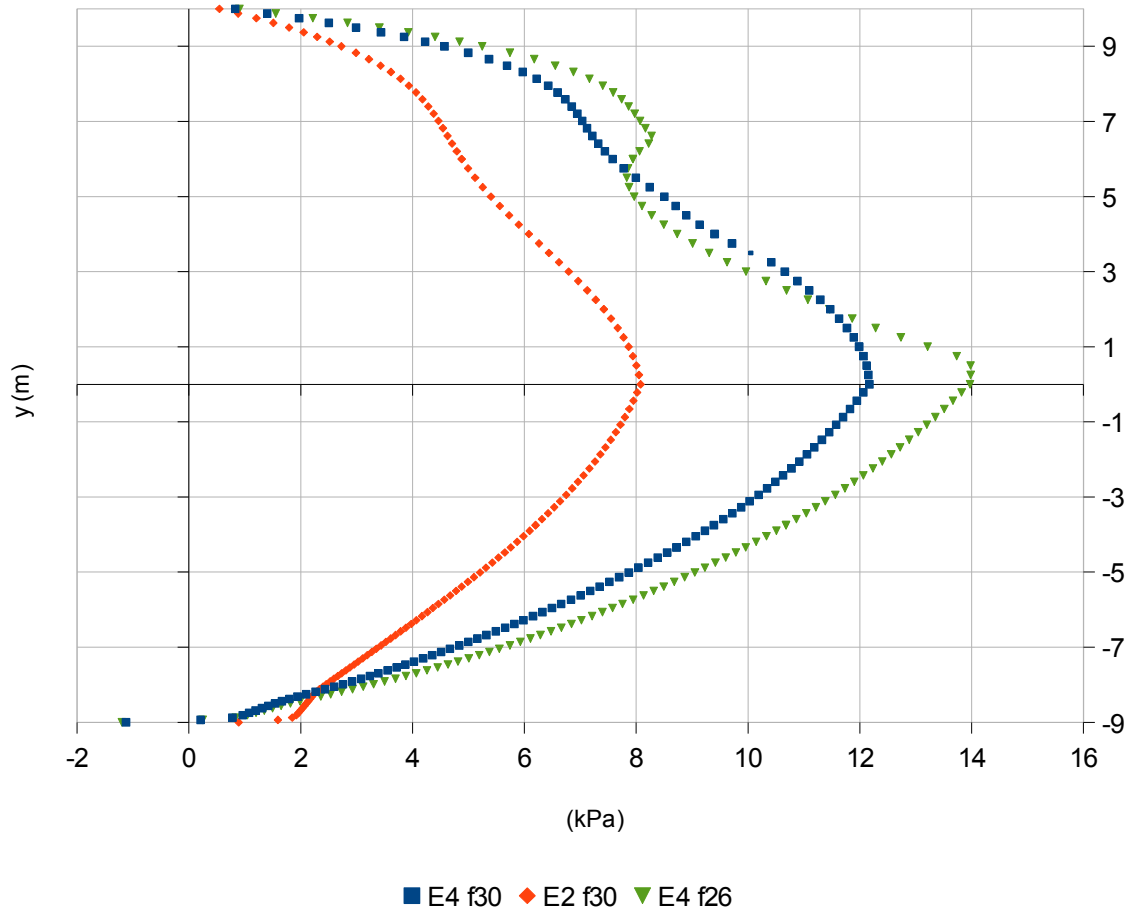


Fig.9.1.3-4

Nella fig.9.1.3-4 si nota una marcata variazione di intensità per variazione di modulo edometrico, mentre la curva E4 f26 ha intensità maggiore e una diversa forma della curva.

Tensione efficace tangenziale all'interfaccia

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

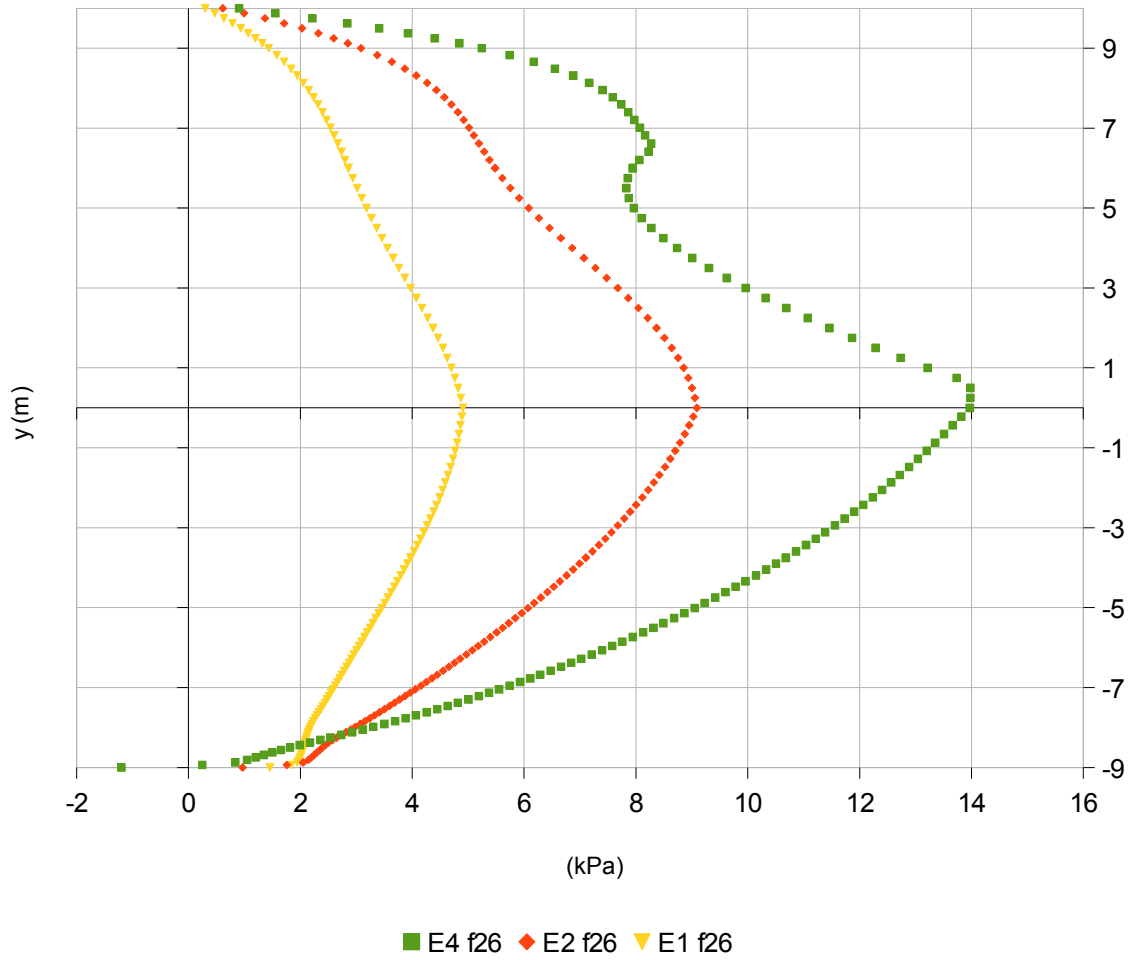


Fig.9.1.3-5

Nella fig.9.1.3-5, analogamente al caso precedente, si nota una marcata variazione di intensità per variazione di modulo edometrico, mentre la curva E4 f26 ha intensità maggiore e una diversa forma della curva.

Tensione efficace tangenziale all'interfaccia

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

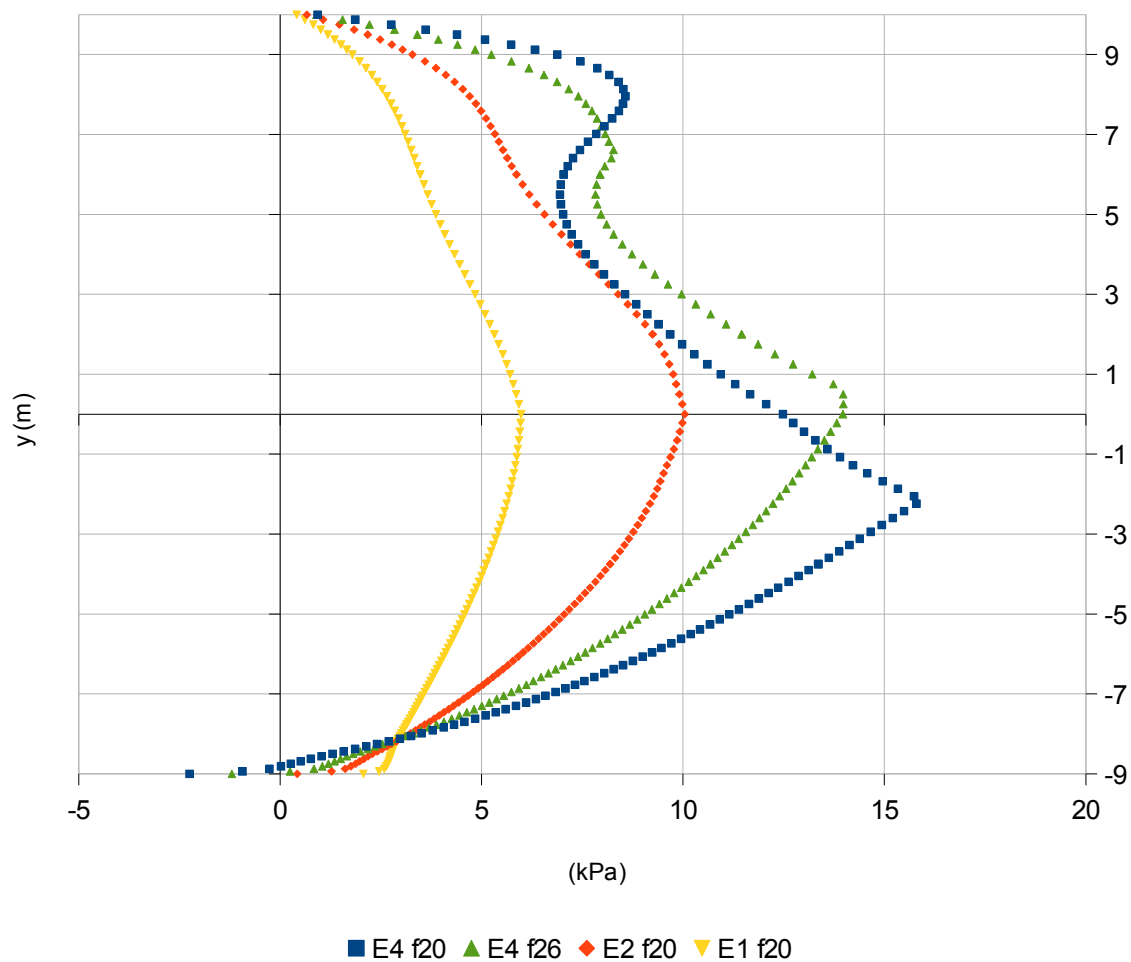


Fig.9.1.3-6

Nella fig.9.1.3-6 si ritrovano i comportamenti delle figure precedenti, mentre la curva E4 f20 ha un andamento qualitativamente simile alla curva E4 f26.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti in termini di tensione tangenziale relativa all'interfaccia.

La tensione tangenziale relativa si definisce come $\tau_{rel} = \frac{\tau}{\tau_{max}}$

Tensione efficace tangenziale relativa all'interfaccia

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

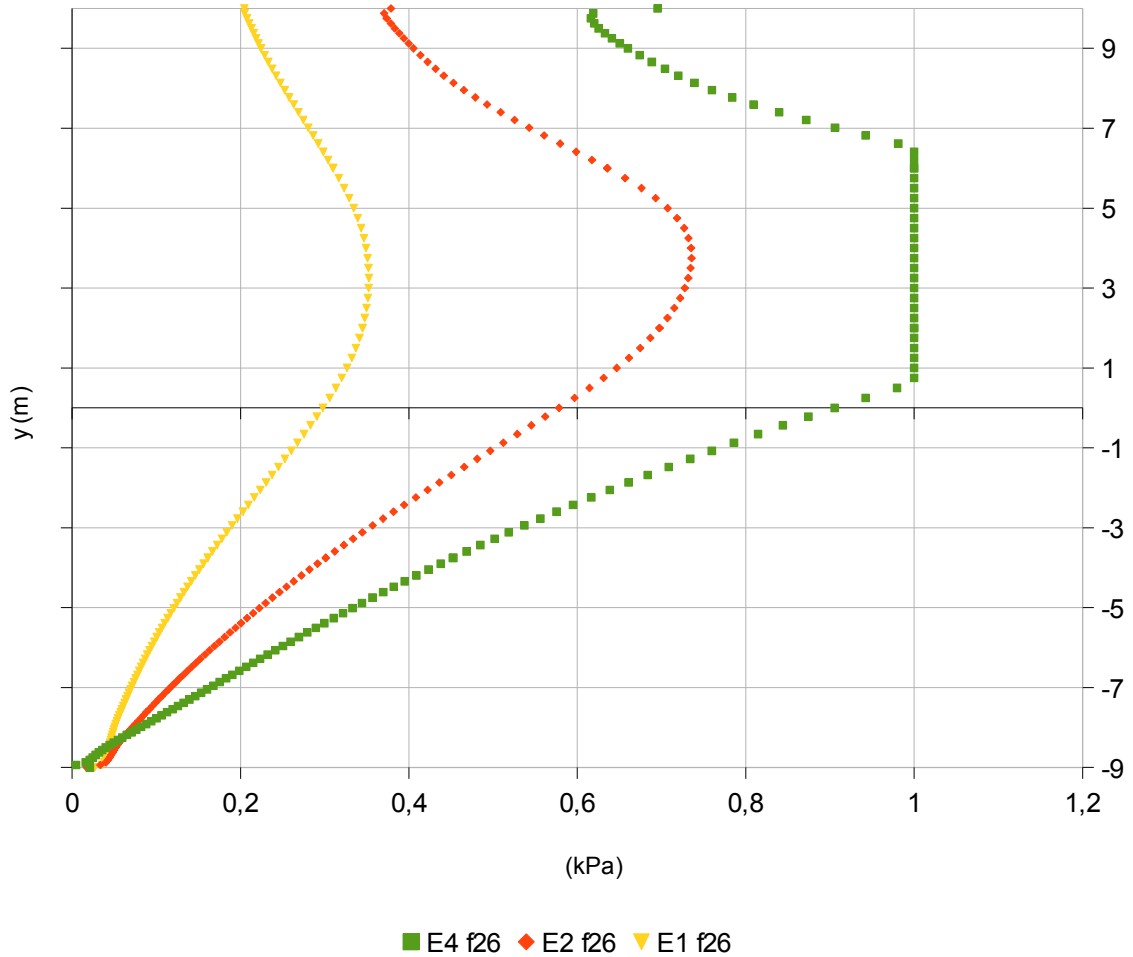


Fig.9.1.3-7

Nella fig.9.1.3-7 si evidenzia come l'andamento anomalo dell'analisi E4 f26 è dovuto all'instaurazione della condizione limite di tensione tangenziale massima all'interfaccia.

Tensione efficace tangenziale relativa all'interfaccia

Variazione del modulo edometrico a parità dell'angolo di attrito

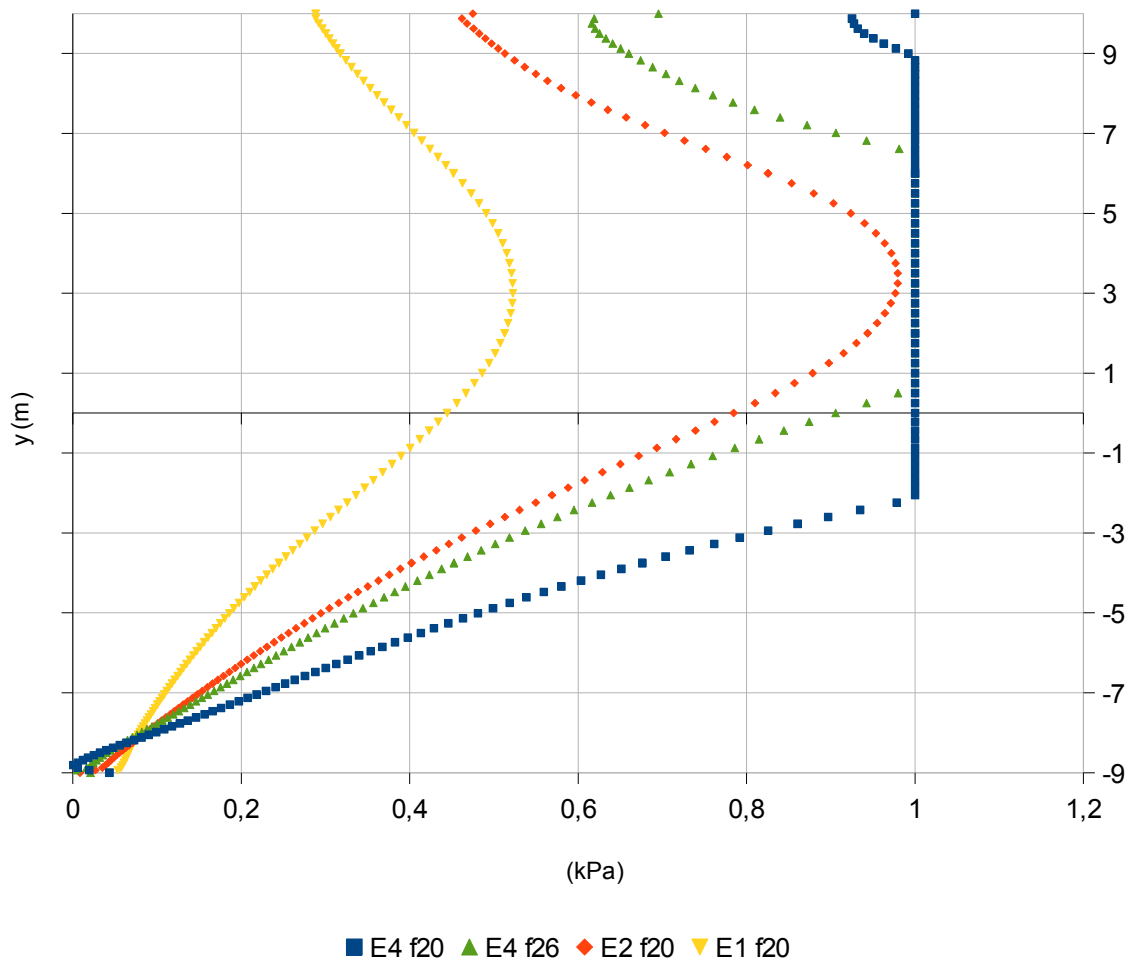


Fig.9.1.3-8

Nella fig .9.1.3-8 si evidenzia come anche l'andamento del caso E4 f20 è legato al raggiungimento della tensione massima resistente all'interfaccia.

Confronti

I grafici utilizzati confermano il fatto che sollecitazioni e spostamenti maggiori sono legati alla minore mobilitazione della resistenza tangenziale all'interfaccia. Al ridursi del modulo edometrico si ha una notevole riduzione della tensione tangenziale all'interfaccia. Al ridursi dell'angolo di attrito aumenta la componente della tensione tangenziale e in modo più marcato la curva si avvicina alla tensione tangenziale limite dell'interfaccia.

9.1.4 Risultati dell'analisi dinamica

Di seguito si confrontano i risultati ottenuti dall'analisi dinamica non lineare con quelli dell'analisi statica non lineare a fine scavo, per lo stesso terreno considerato in due stadi di addensamento diverso. Il terreno si considera dapprima con un indice dei vuoti iniziale pari a $e = 1$, stato sciolto, e successivamente con il valore di $e = 0,7$, stato mediamente denso. Si propongono i risultati ottenuti da tre differenti time-history e se ne analizza il comportamento. Infine si discute l'andamento dell'indice dei vuoti e della capacità del modello ipoplastico di rappresentare questa variabile di stato.

Terreno con $e = 1$

Sisma del Friuli

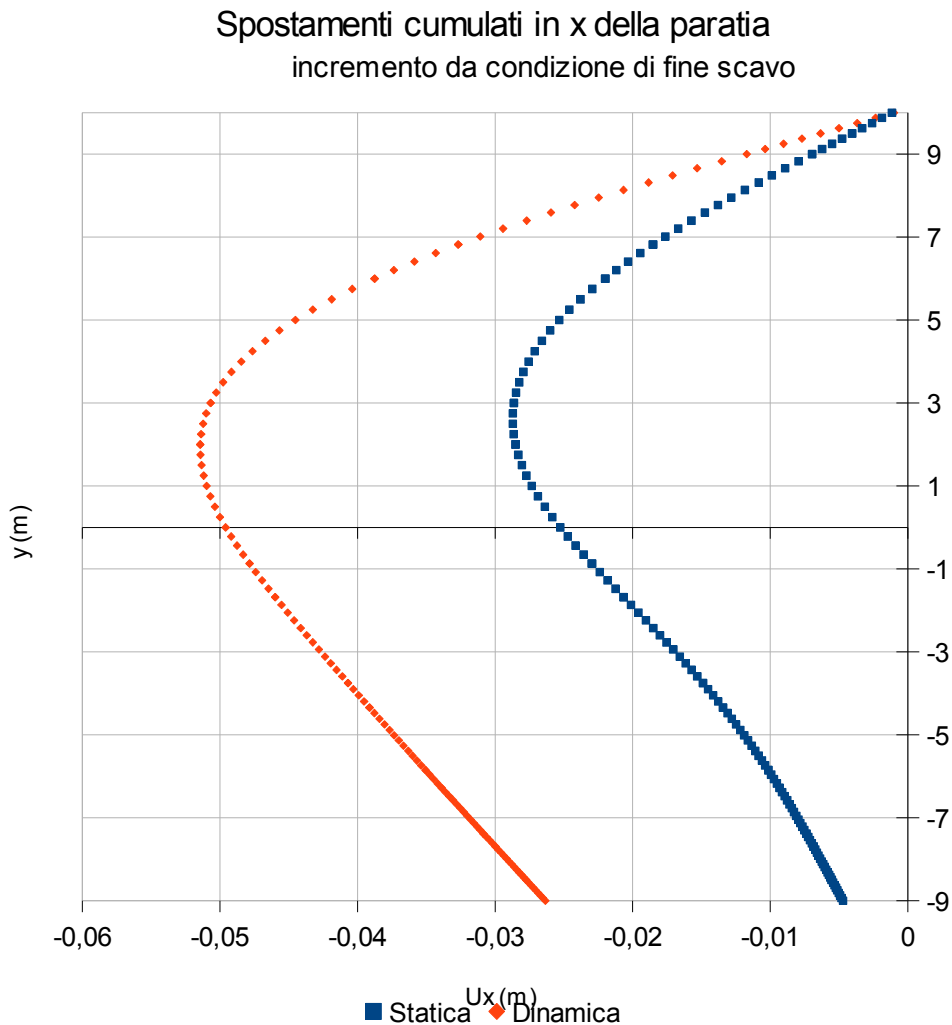


Fig.9.1.4-1

In fig.9.1.4-1 si nota l'incremento dello spostamento a fine dell'evento sismico. La curva che si ottiene appare corretta nell'andamento rispetto al comportamento di paratie reali.

Andamento sollecitazione tagliante sulla paratia
 incremento da condizione di fine scavo

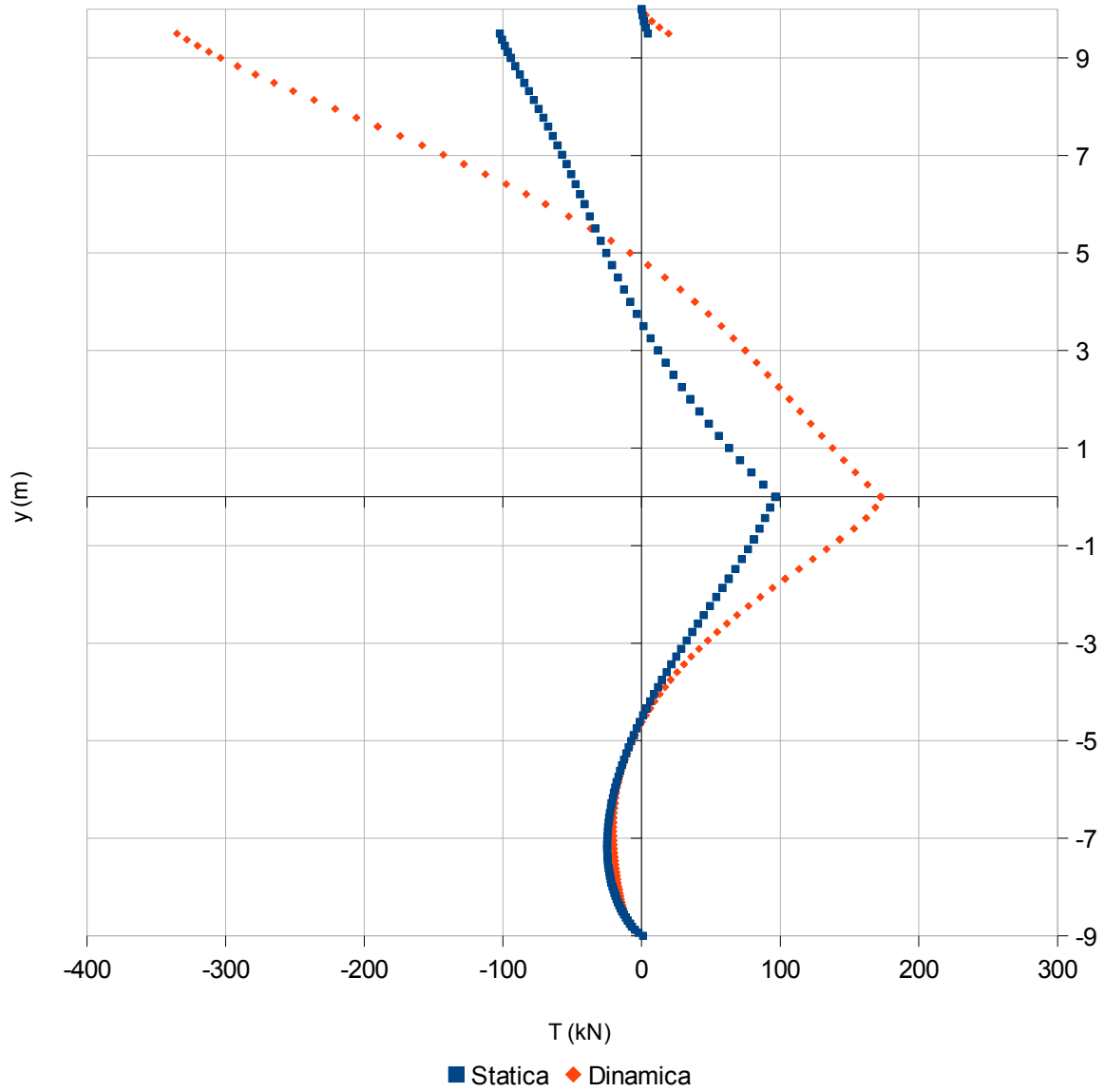


Fig.9.1.4-2

La fig.9.1.4-2 delinea l'andamento del taglio che rimane pressochè invariato alla testa della palancola, mentre aumenta considerevolmente al fondo dello scavo e al puntello in testa alla paratia.

Andamento sollecitazione flessionale sulla paratia
incremento da condizione di fine scavo

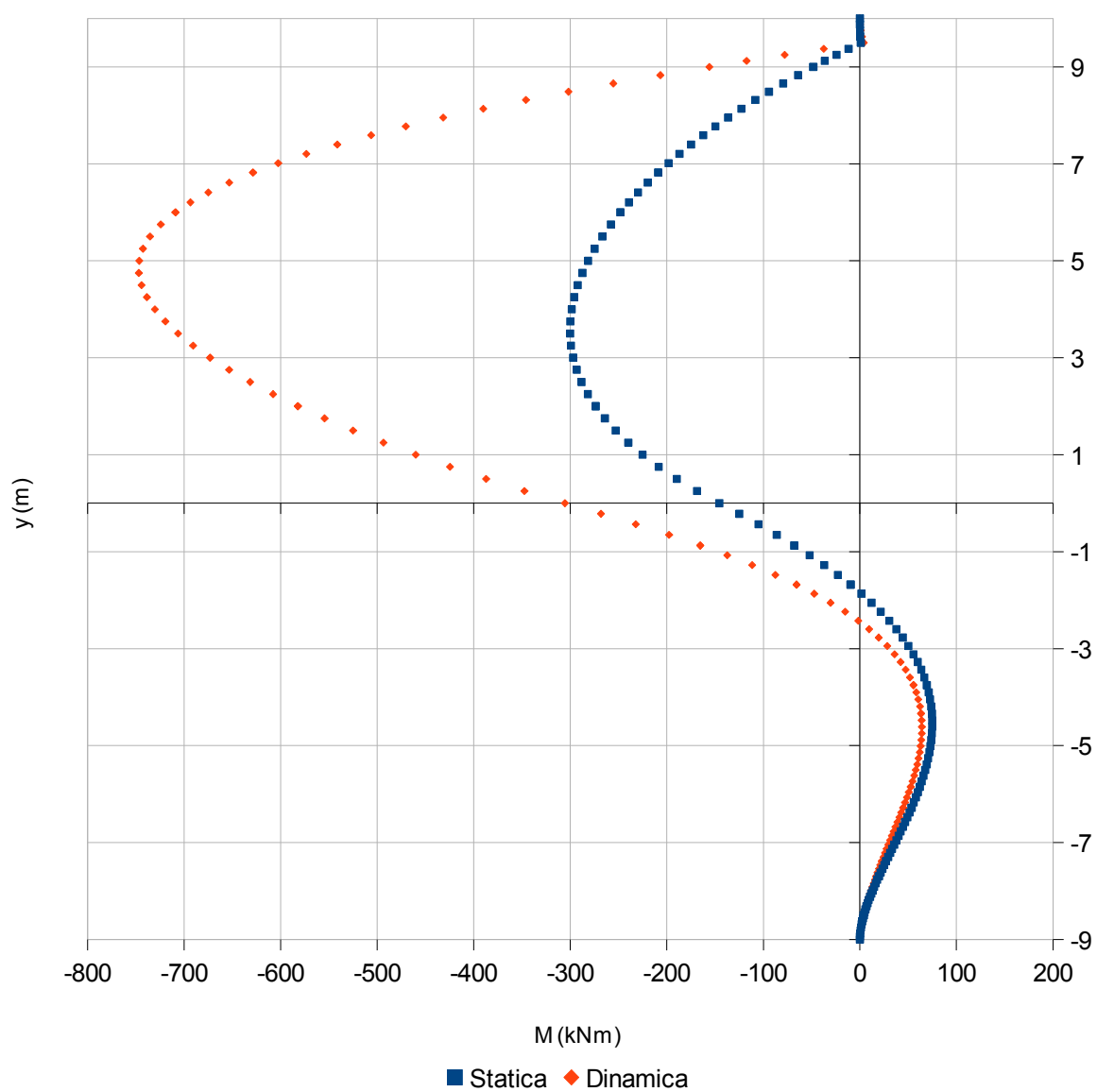


Fig.9.1.4-3

In fig. 9.1.4-3, analogamente al grafico del taglio, le sollecitazioni verso la punta della palancola restano invariate, mentre nella zona fuori terra aumentano in modo marcato.

Sisma dell'Irpinia

Spostamenti cumulati in x della paratia
 incremento da condizione di fine scavo

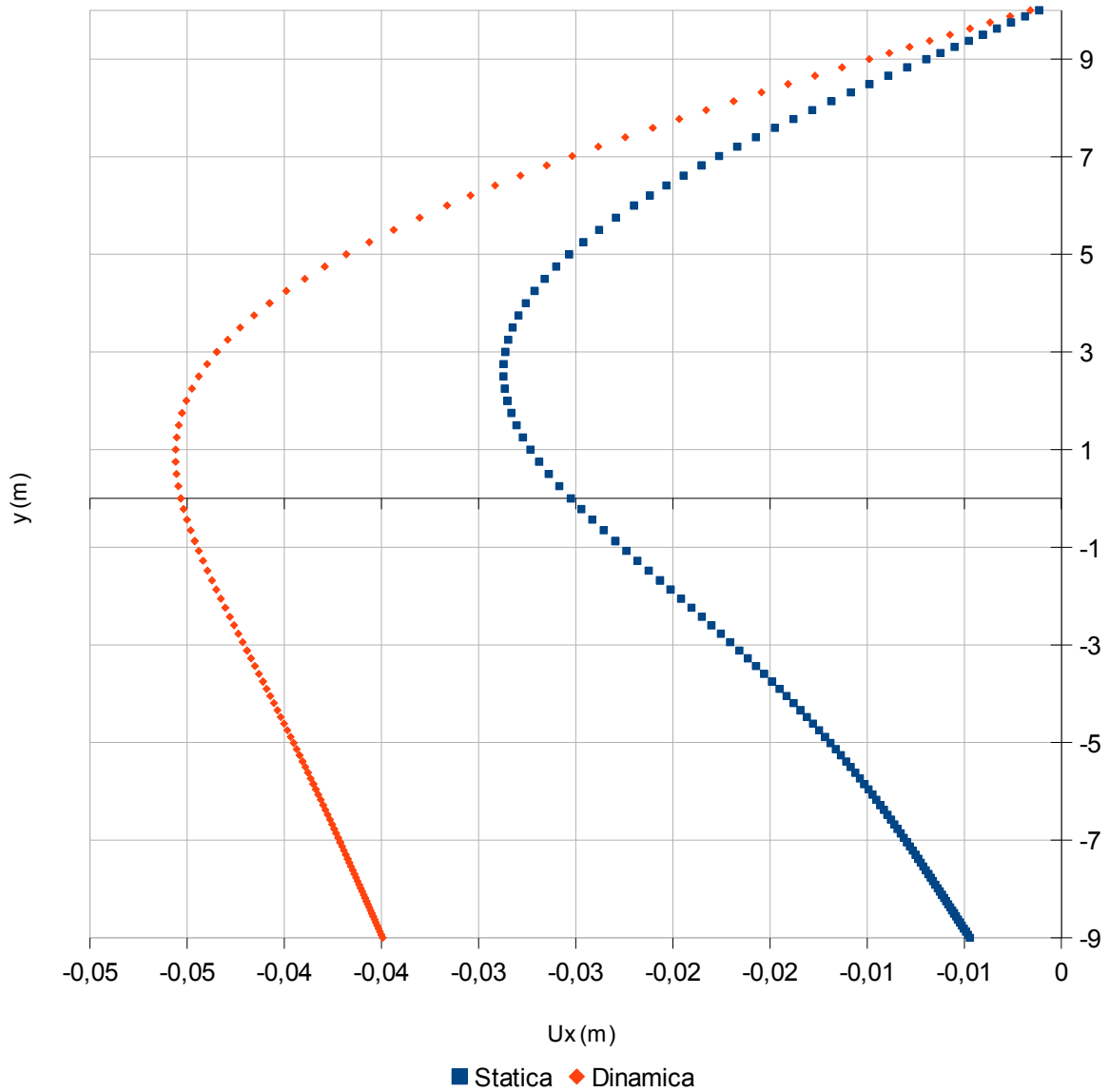


Fig.9.1.4-4

In fig. 9.1.4-4 si nota l'incremento dello spostamento a fine dell'evento sismico. La curva che si ottiene appare corretta nell'andamento rispetto al comportamento di paratie reali.

Andamento sollecitazione tagliante sulla paratia
incremento da condizione di fine scavo

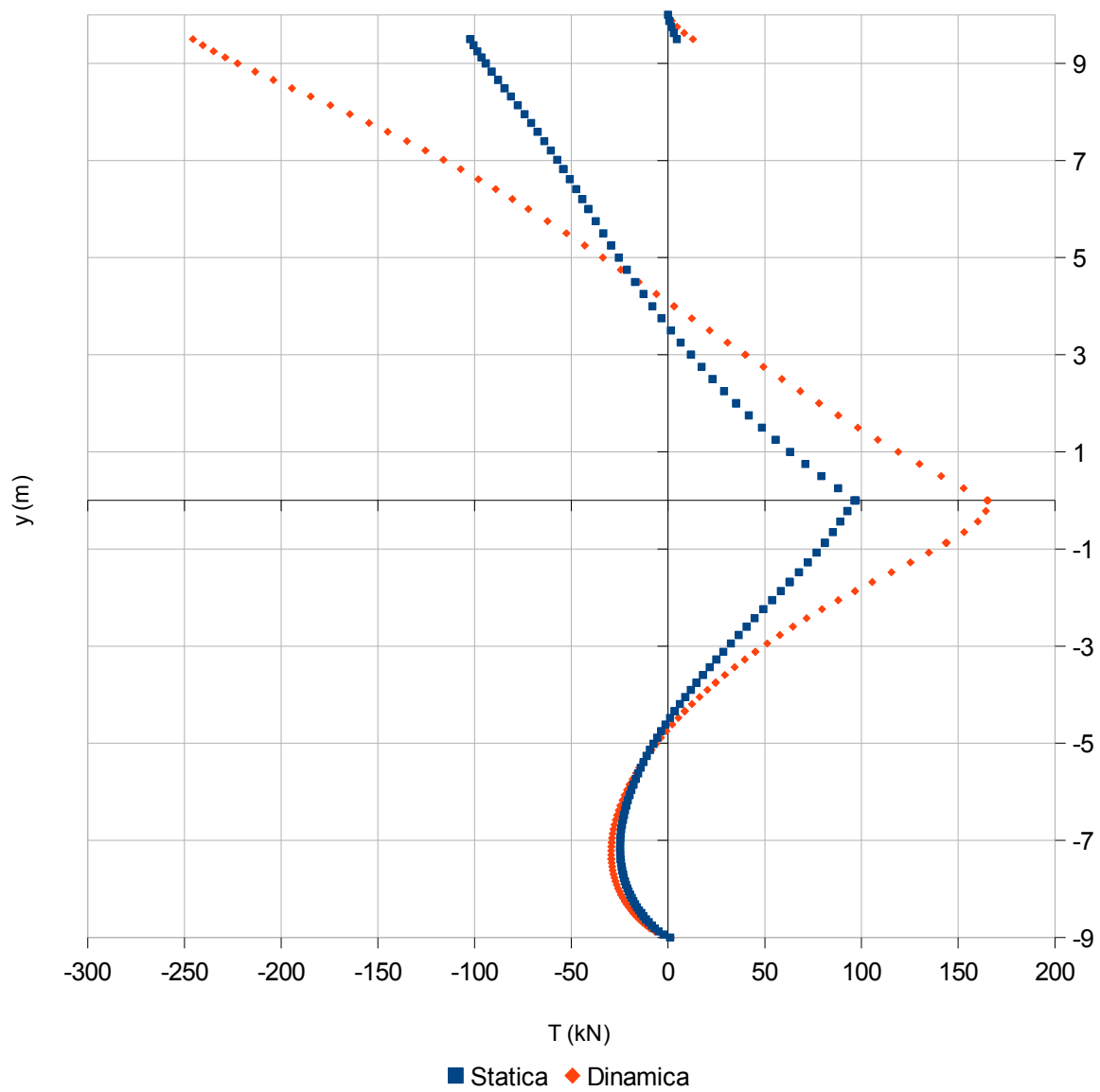


Fig.9.1.4-5

In fig. 9.1.4-5 si nota come la curva di involucro del taglio massimo durante il sisma si discosti dal caso statico anche nel tratto di intestatura della palanca.

Andamento sollecitazione flessionale sulla paratia
 incremento da condizione di fine scavo

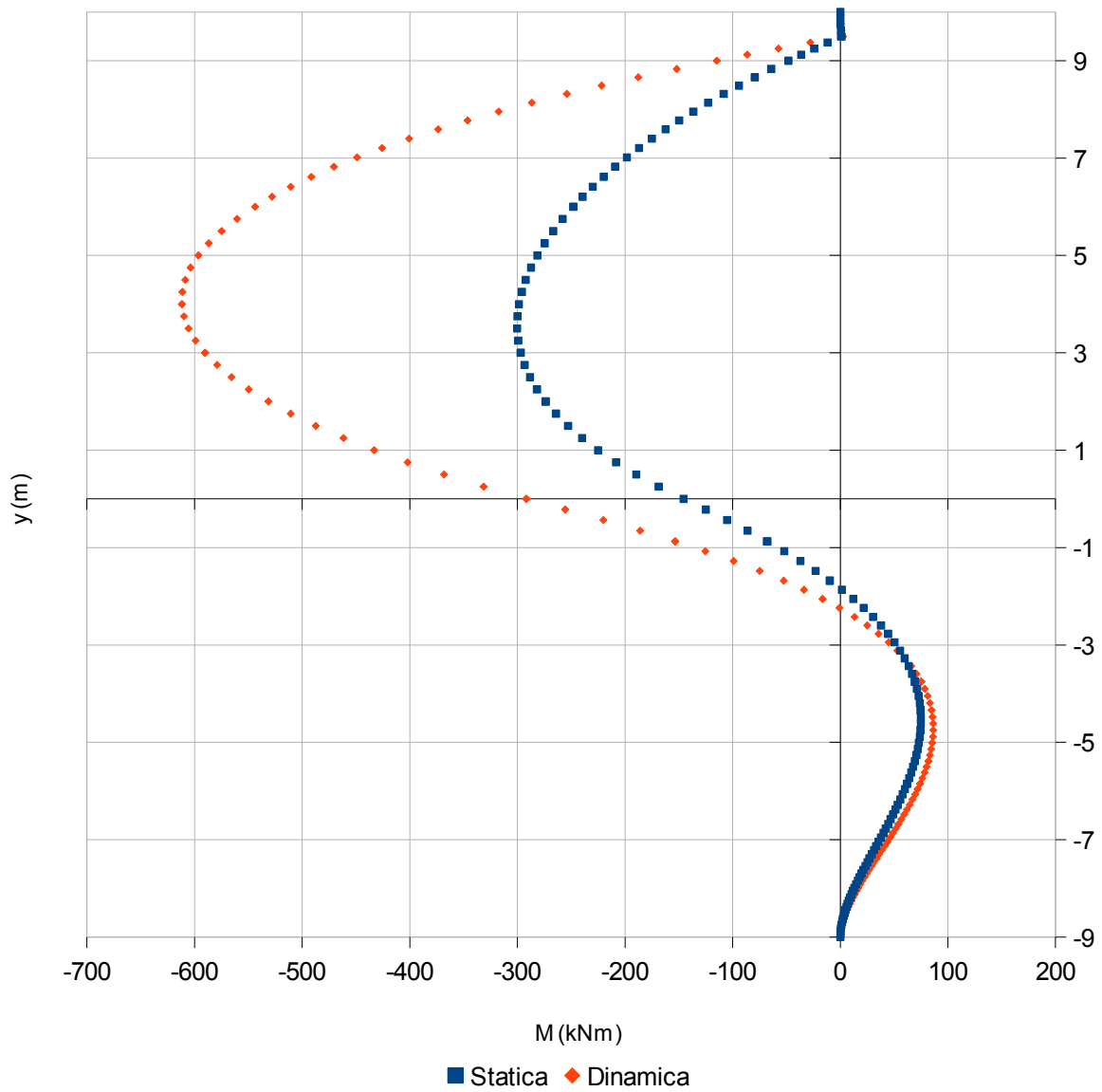


Fig.9.1.4-6

In fig.9.1.4-6 la curva del momento è tale da non avere più componenti a momento positivo. Questo fenomeno è dovuto al cedimento maturato per cui la paratia modifica il suo comportamento nel tratto interrato. Il terreno non funge più da incastro ma da appoggio.

Sisma Umbro-Marchigiano

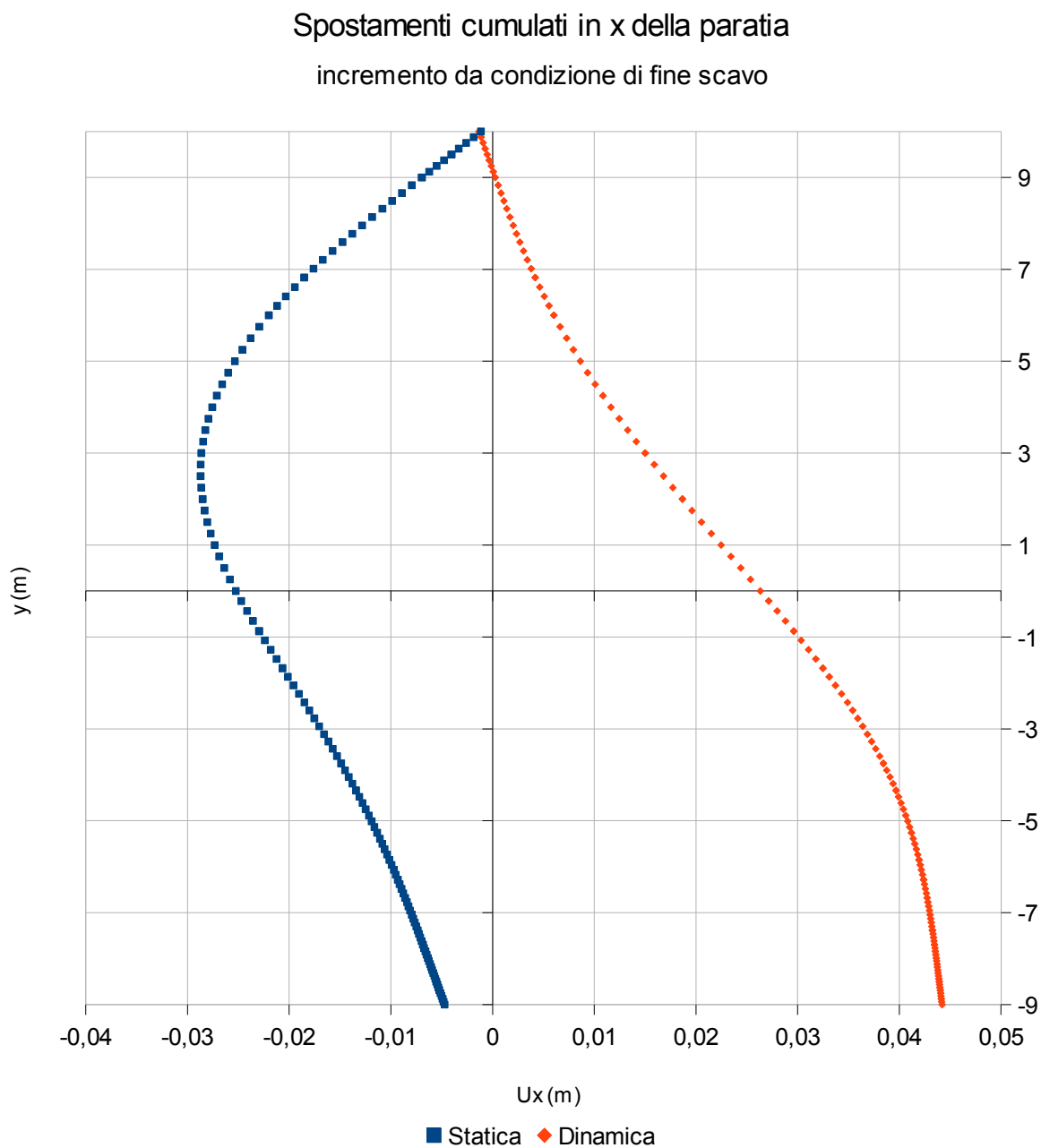


Fig.9.1.4-7

In fig.9.1.4-7 il comportamento del modello che si registra per questo evento sismico è anomalo. La paratia tende a spostarsi verso destra, questo comportamento viene interpretato non come azione della paratia sul terreno, ma come spostamento indotto da una riduzione dell'indice dei vuoti particolarmente marcata a monte della paratia.

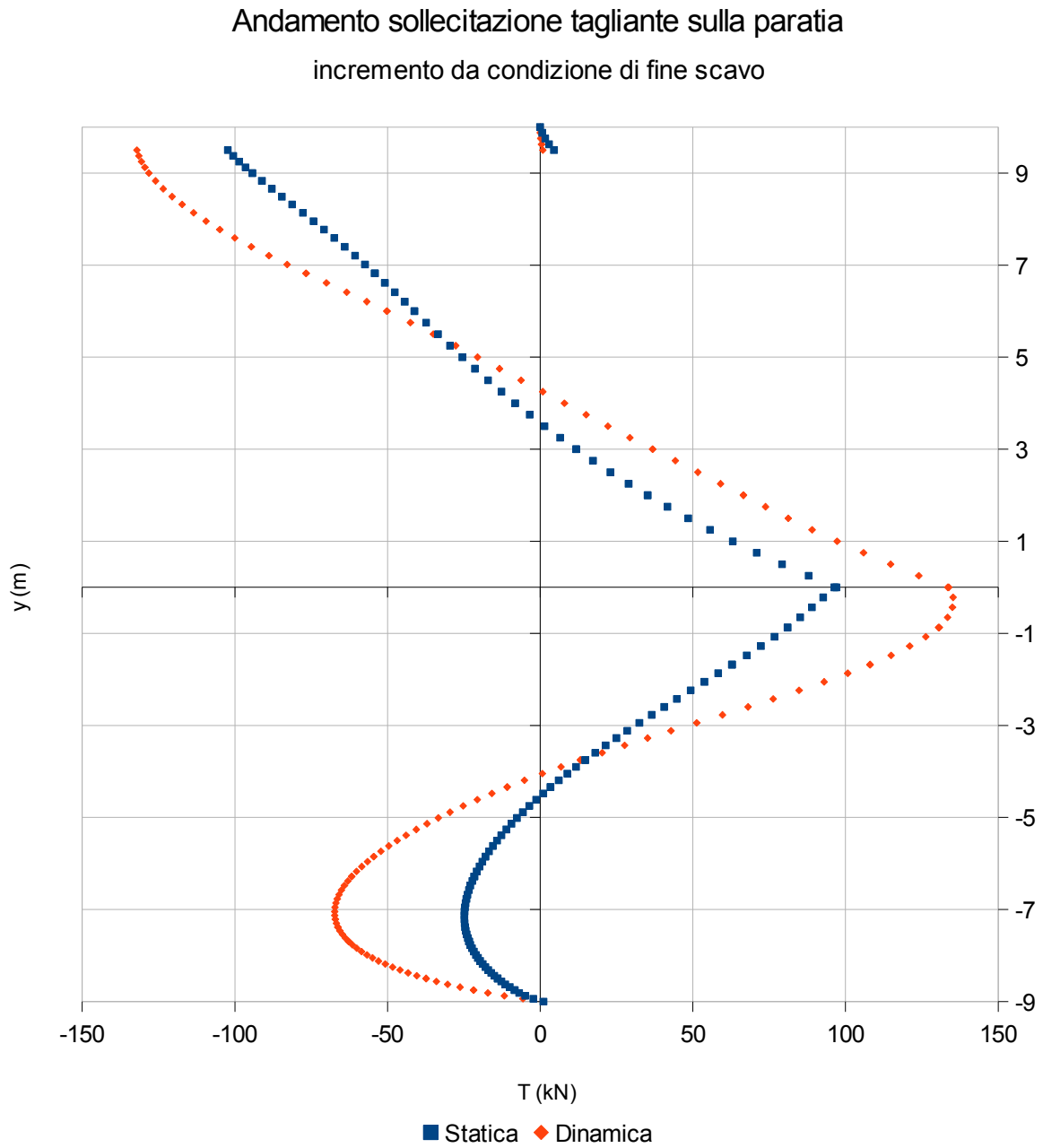


Fig.9.1.4-8

In fig.9.1.4-8 l'intensità del taglio sulla paratia risulta incrementato dall'effetto dell'azione sismica e l'andamento rimane simile.

Andamento sollecitazione flessionale sulla paratia
incremento da condizione di fine scavo

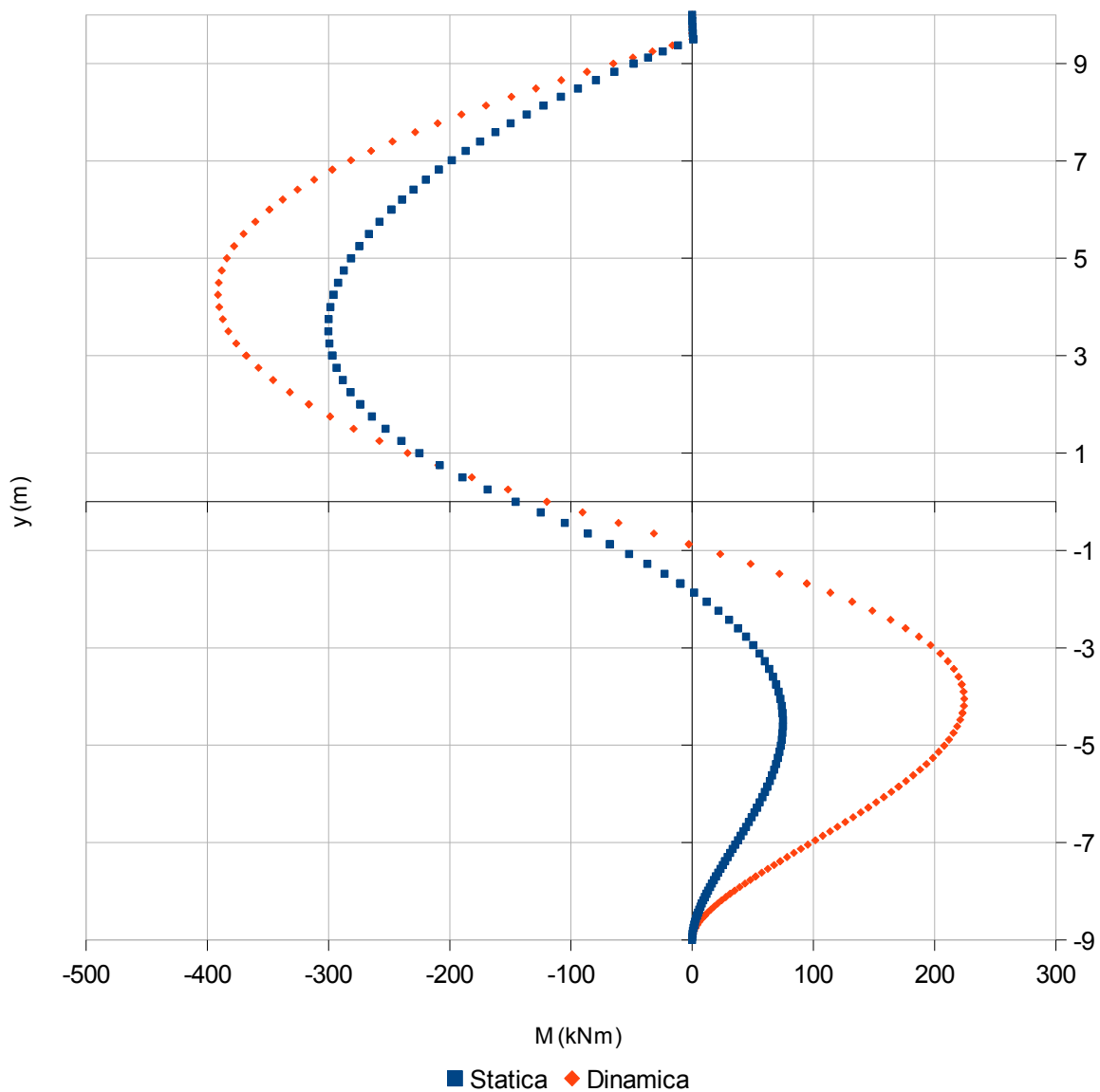


Fig.9.1.4-9

In fig.9.1.4-9 il comportamento anomalo dello spostamento verso il terreno della paratia, comporta che il tratto infisso nel terreno aumenti il proprio effetto di incastro.

Terreno con $e = 0,7$

Sisma del Friuli

Spostamenti cumulati in x della paratia
 incremento da condizione di fine scavo

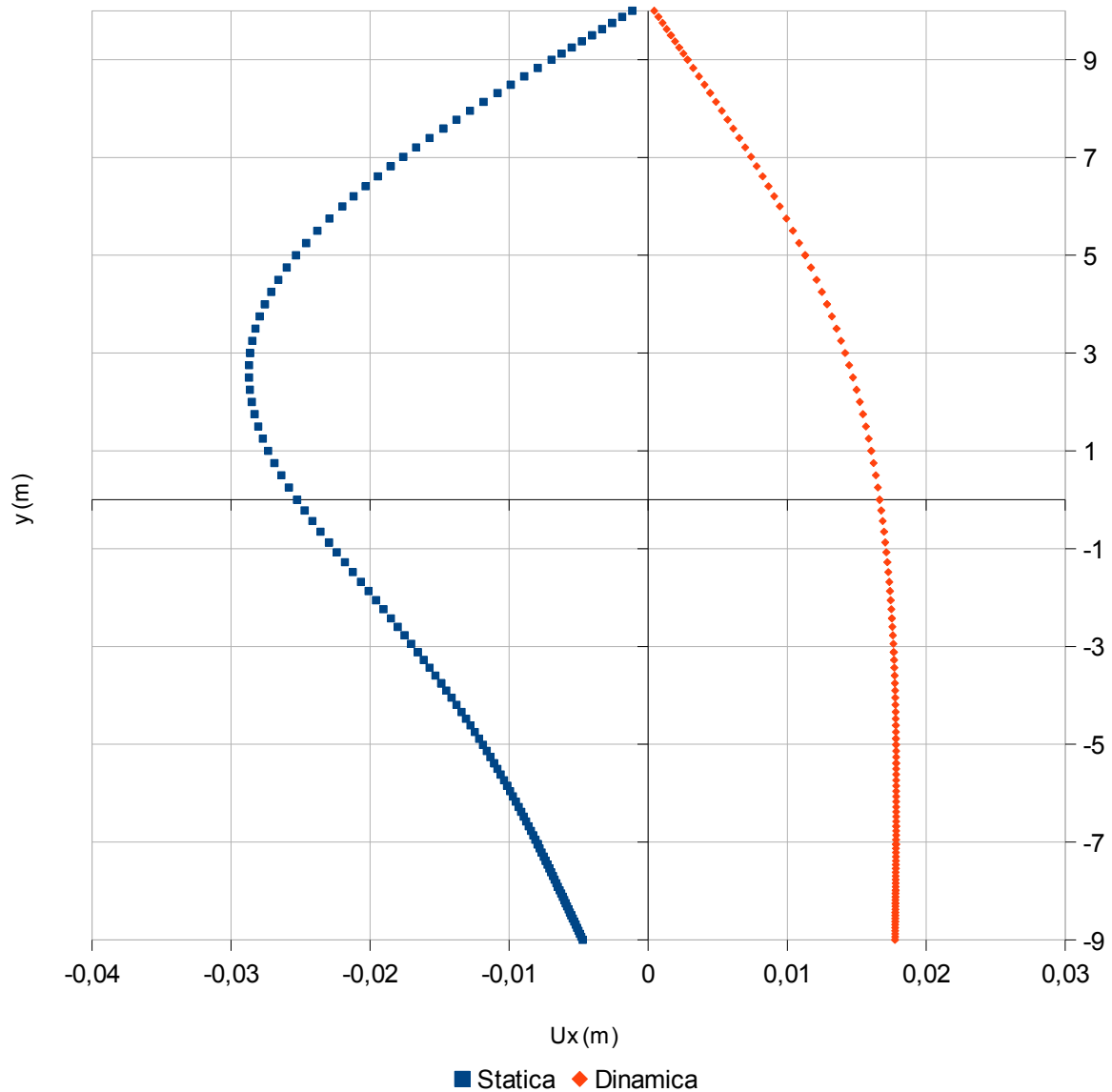


Fig. 9.1.4-10

In fig.9.1.4-10 i risultati ottenuti sono anomali per questo evento sismico. La paratia tende a spostarsi verso destra nella parte infissa del terreno, questo comportamento non viene determinato dalla spinta del terreno sulla paratia, ma dallo spostamento indotto da una riduzione dell'indice dei vuoti particolarmente marcata a monte della paratia.

Andamento sollecitazione tagliante sulla paratia
incremento da condizione di fine scavo

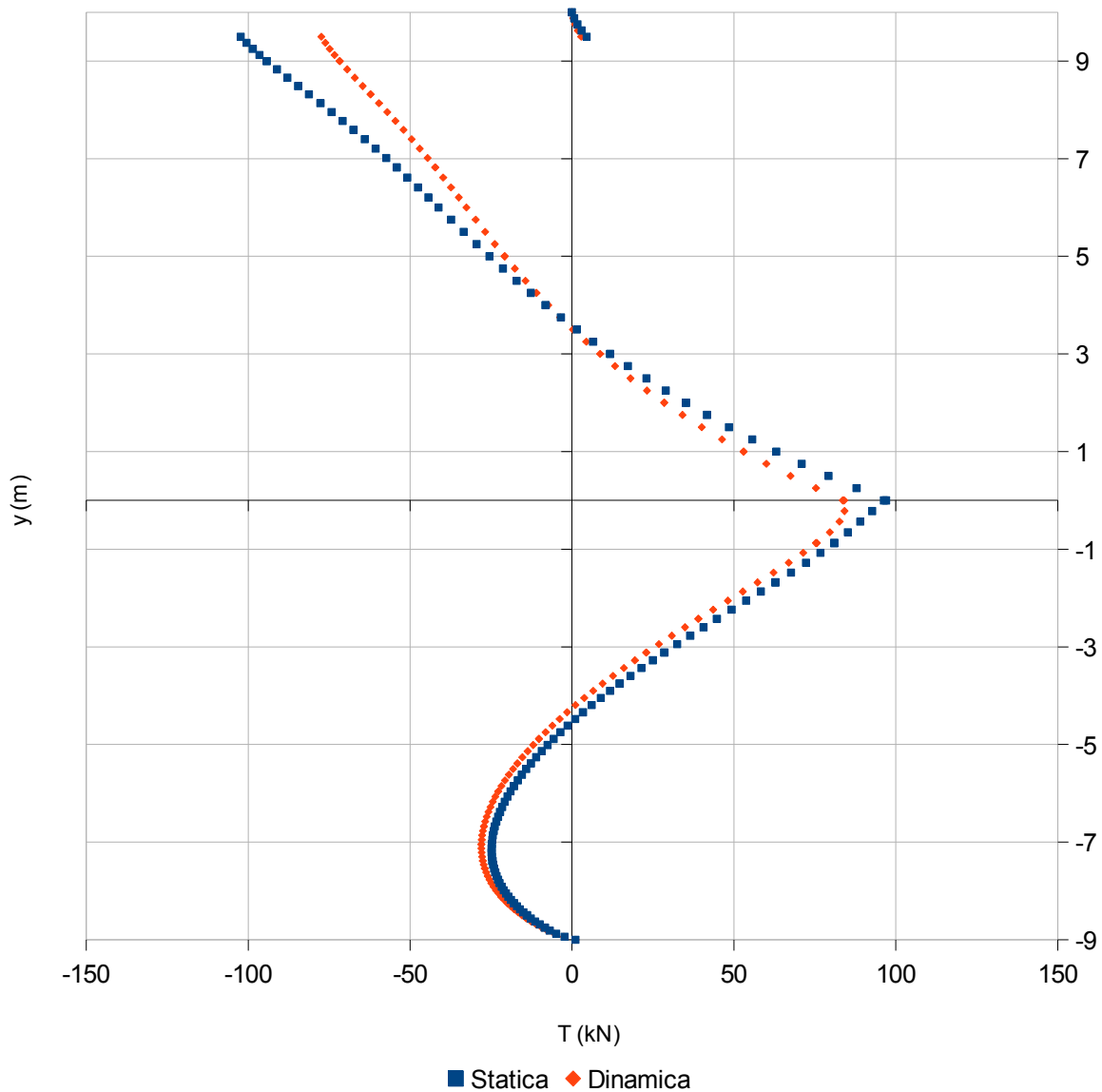


Fig. 9.1.4-11

In fig.9.1.4-11 l'intensità del taglio sulla paratia risulta praticamente invariata per la zona infissa della paratia, diminuita nella zona superiore della paratia per l'effetto dell'azione sismica.

Andamento sollecitazione flessionale sulla paratia
 incremento da condizione di fine scavo

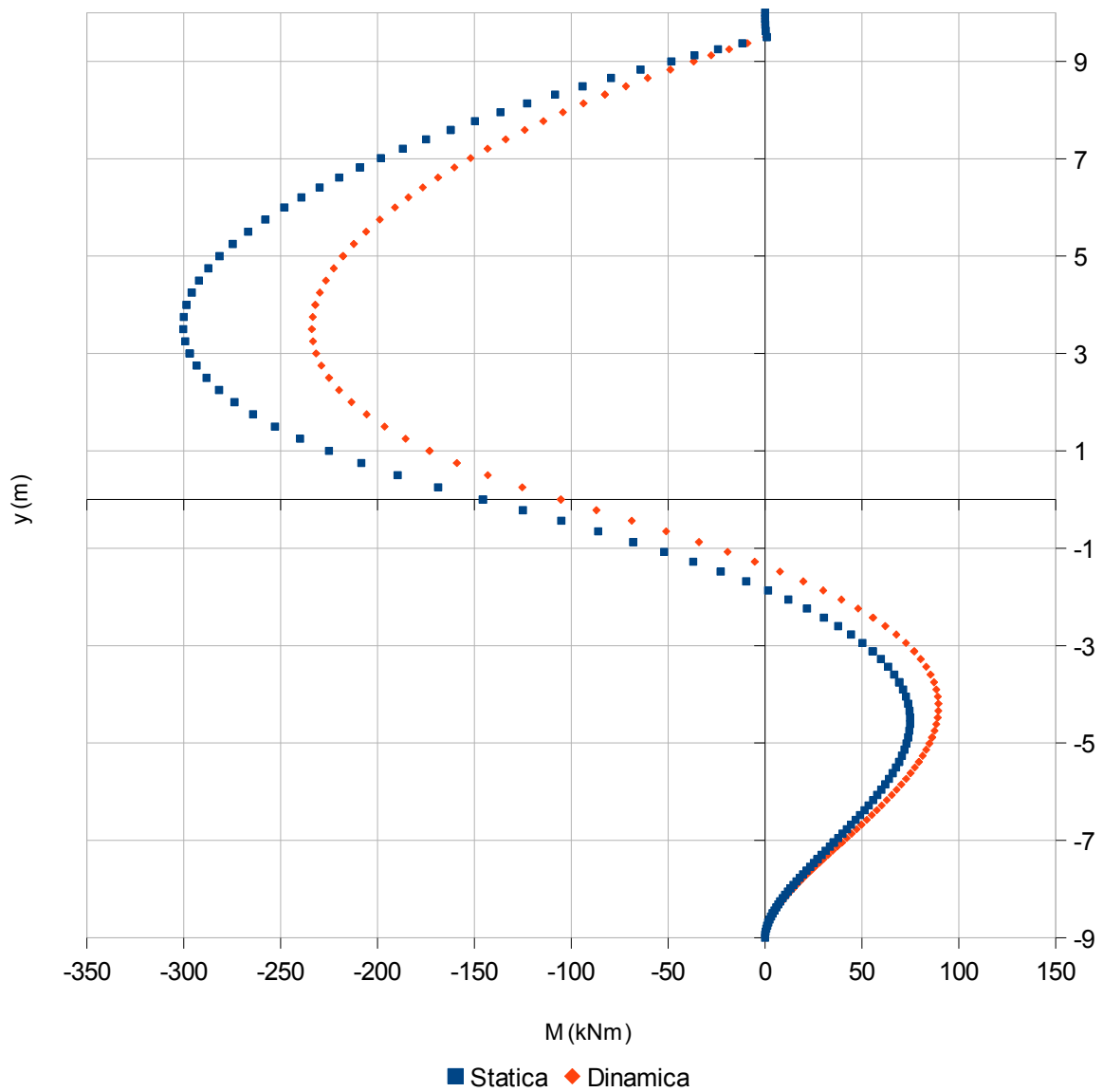


Fig. 9.1.4-12

In fig.9.1.4-12 il comportamento anomalo dello spostamento verso il terreno della paratia, comporta che il tratto infisso nel terreno aumenti il proprio effetto di incastro, mentre nella zona superiore della paratia la sollecitazione flessionale si riduce.

Sisma dell'Irpinia

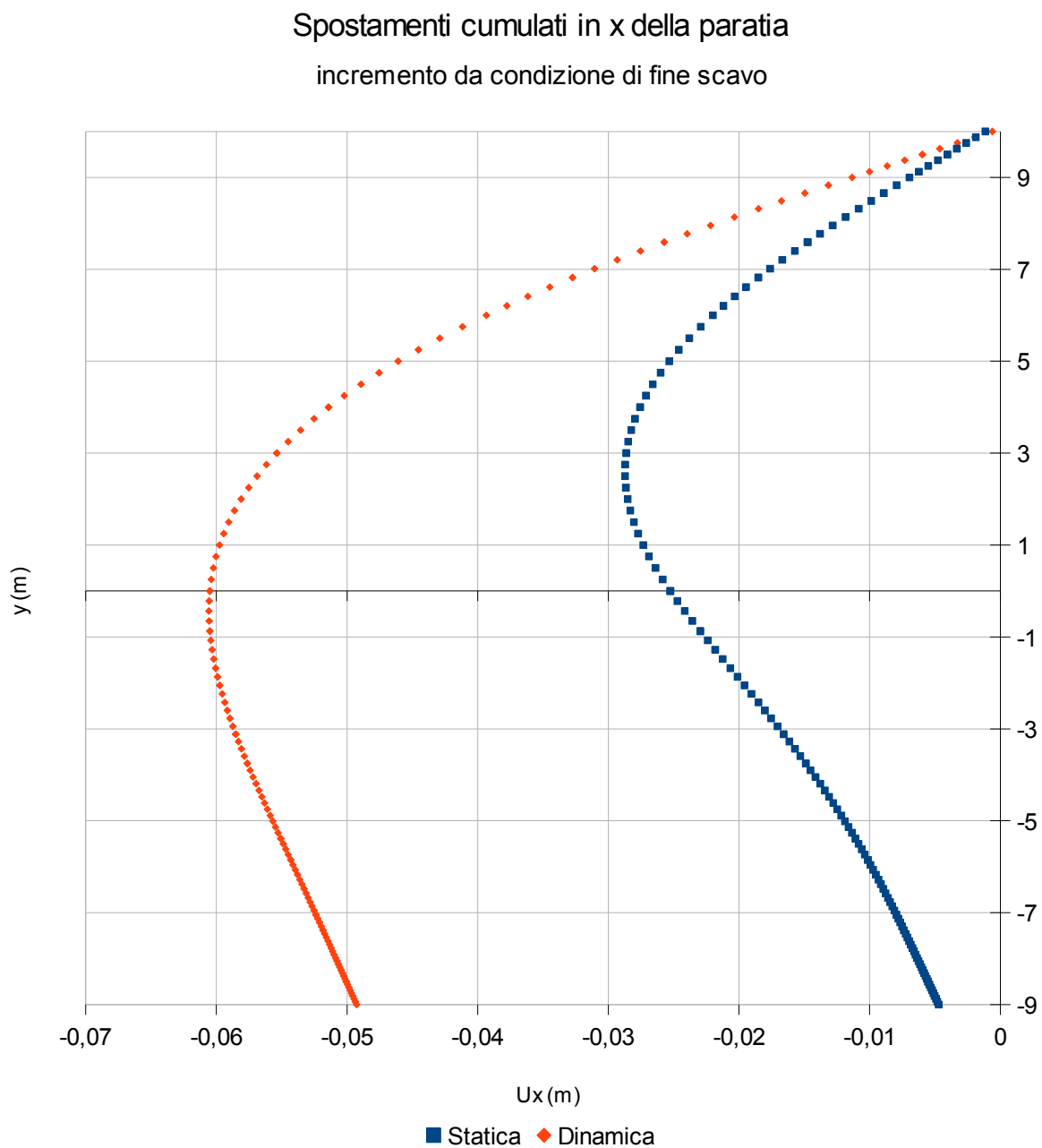


Fig. 9.1.4-13

In fig. 9.1.4-13 si rileva un comportamento degli spostamenti in linea con i risultati di prove sperimentali per cui si registra un incremento di spostamenti dovuti al sisma. Lo spostamento predominante è la traslazione della parte infissa di paratia.

Andamento sollecitazione tagliante sulla paratia
 incremento da condizione di fine scavo

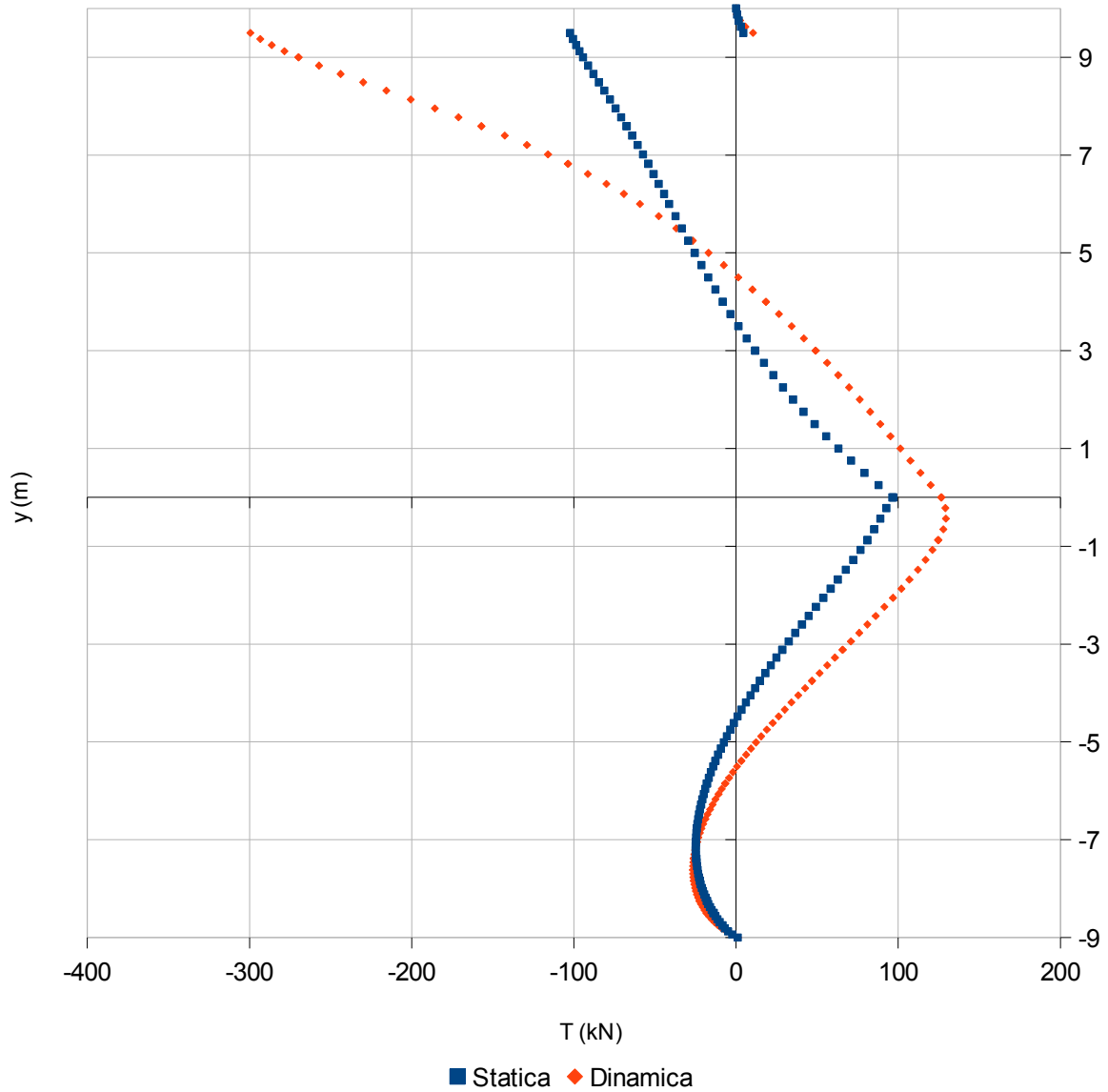


Fig. 9.1.4-14

In fig.9.1.4-14 si rileva un generale aumento dell'azione tagliante verso la zona di fondo scavo e della testa della paratia.

Andamento sollecitazione flessionale sulla paratia
incremento da condizione di fine scavo

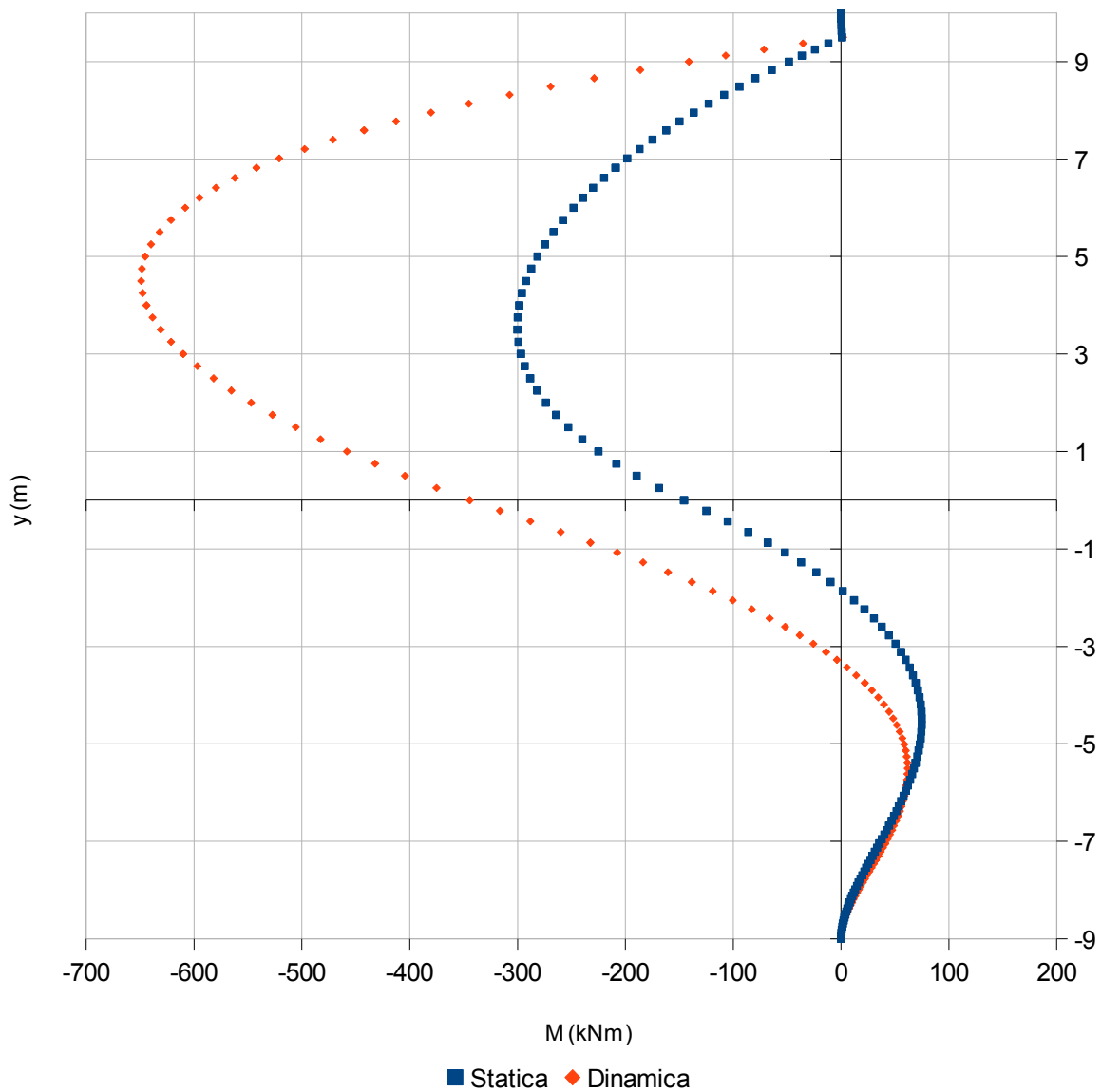


Fig. 9.1.4-15

In fig.9.1.4-15 la sollecitazione del momento risulta notevolmente variata nel tratto superiore della paratia, mentre nel tratto infisso i valori restano simili.

Sisma Umbro-Marchigiano

Spostamenti cumulati in x della paratia
 incremento da condizione di fine scavo

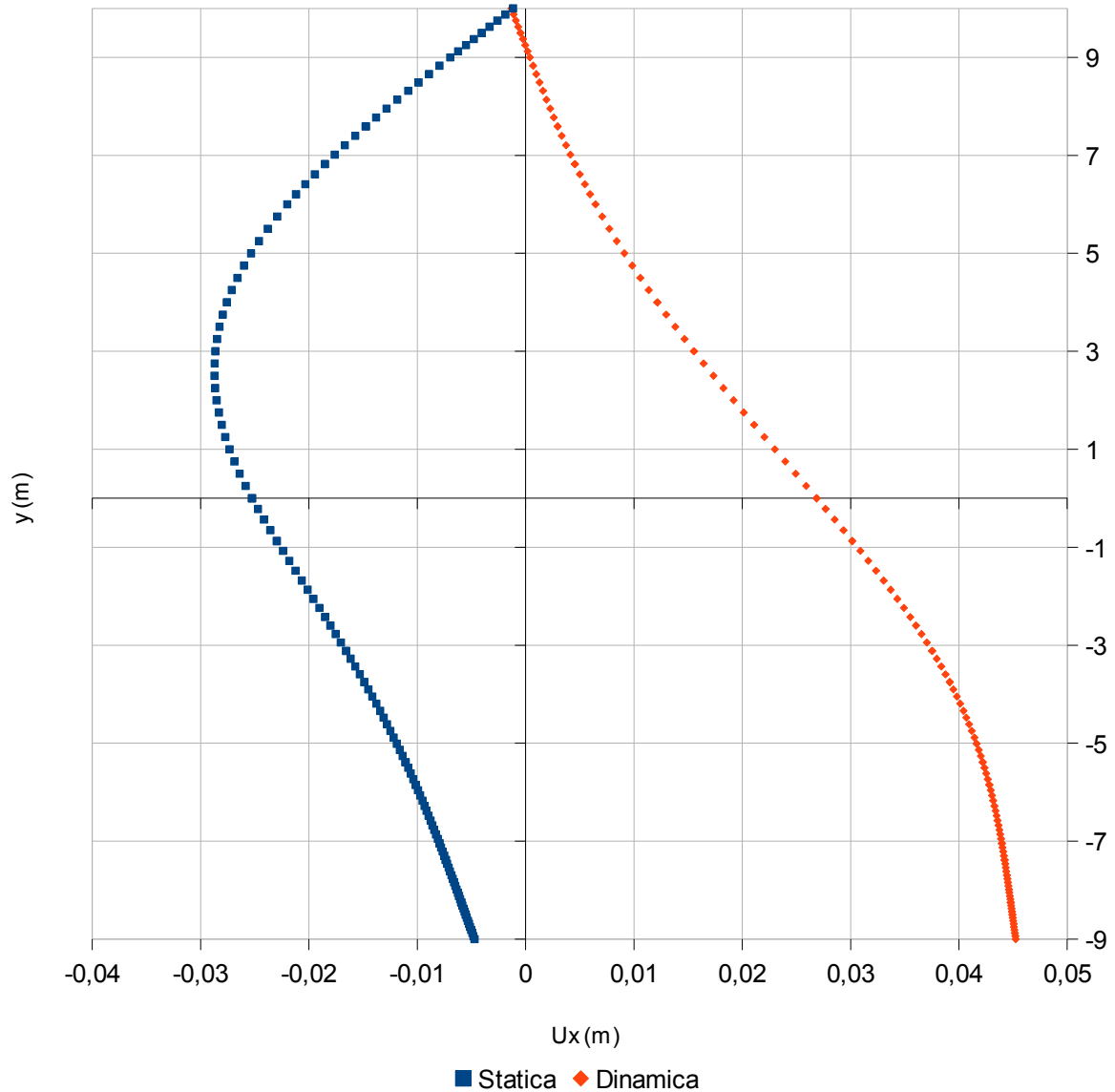


Fig. 9.1.4-16

In fig.9.1.4-16 analogamente ai risultati ottenuti con l'evento sismico del Friuli il comportamento del modello è anomalo. La paratia tende a spostarsi verso destra, questo comportamento viene interpretato non come azione della paratia sul terreno, ma come spostamento indotto da una riduzione dell'indice dei vuoti particolarmente marcata a monte della paratia.

Andamento sollecitazione tagliante sulla paratia
incremento da condizione di fine scavo

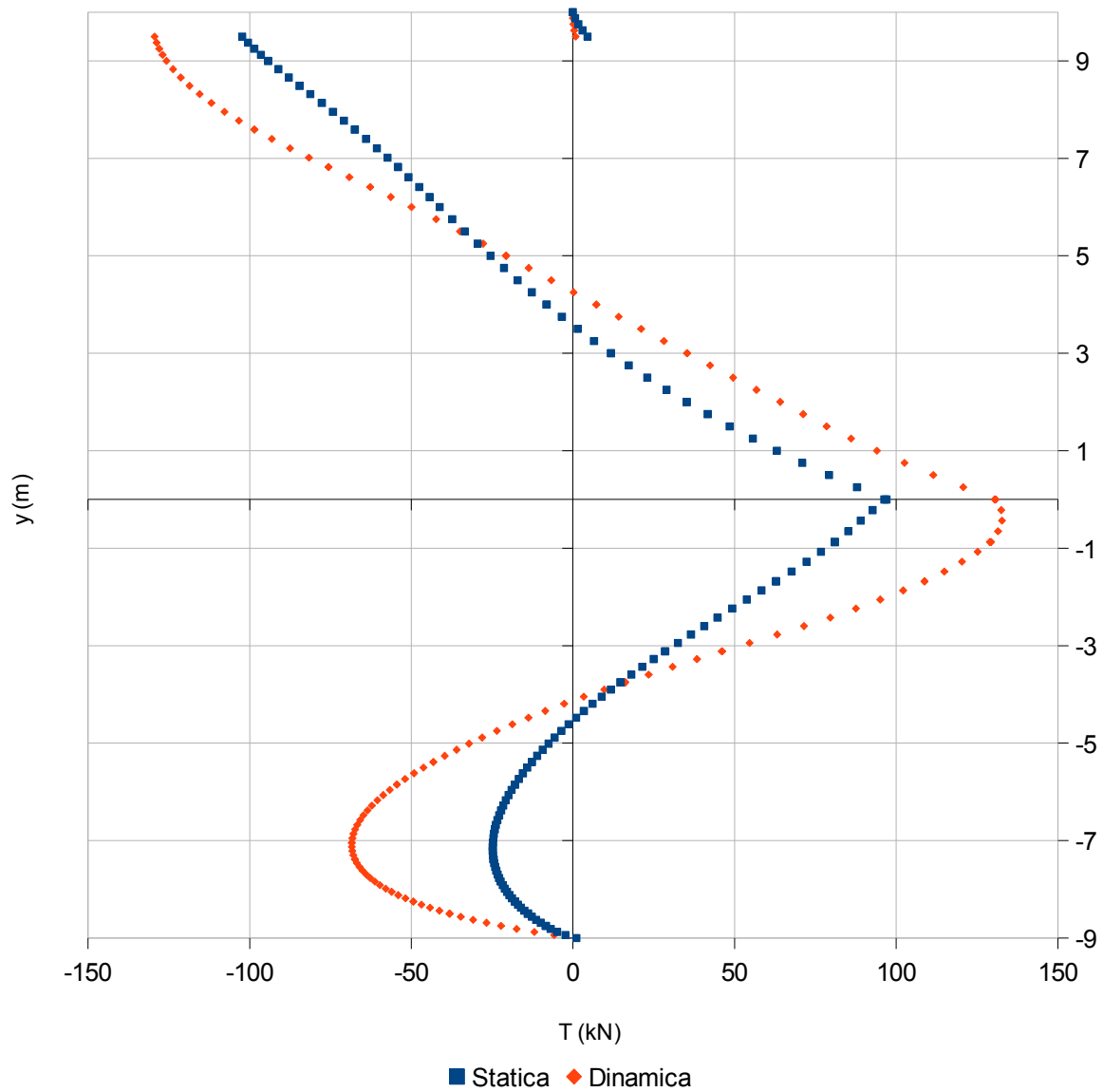


Fig. 9.1.4-17

In fig.9.1.4-17 l'intensità del taglio risulta globalmente incrementata durante l'azione sismica.

Andamento sollecitazione flessionale sulla paratia
 incremento da condizione di fine scavo

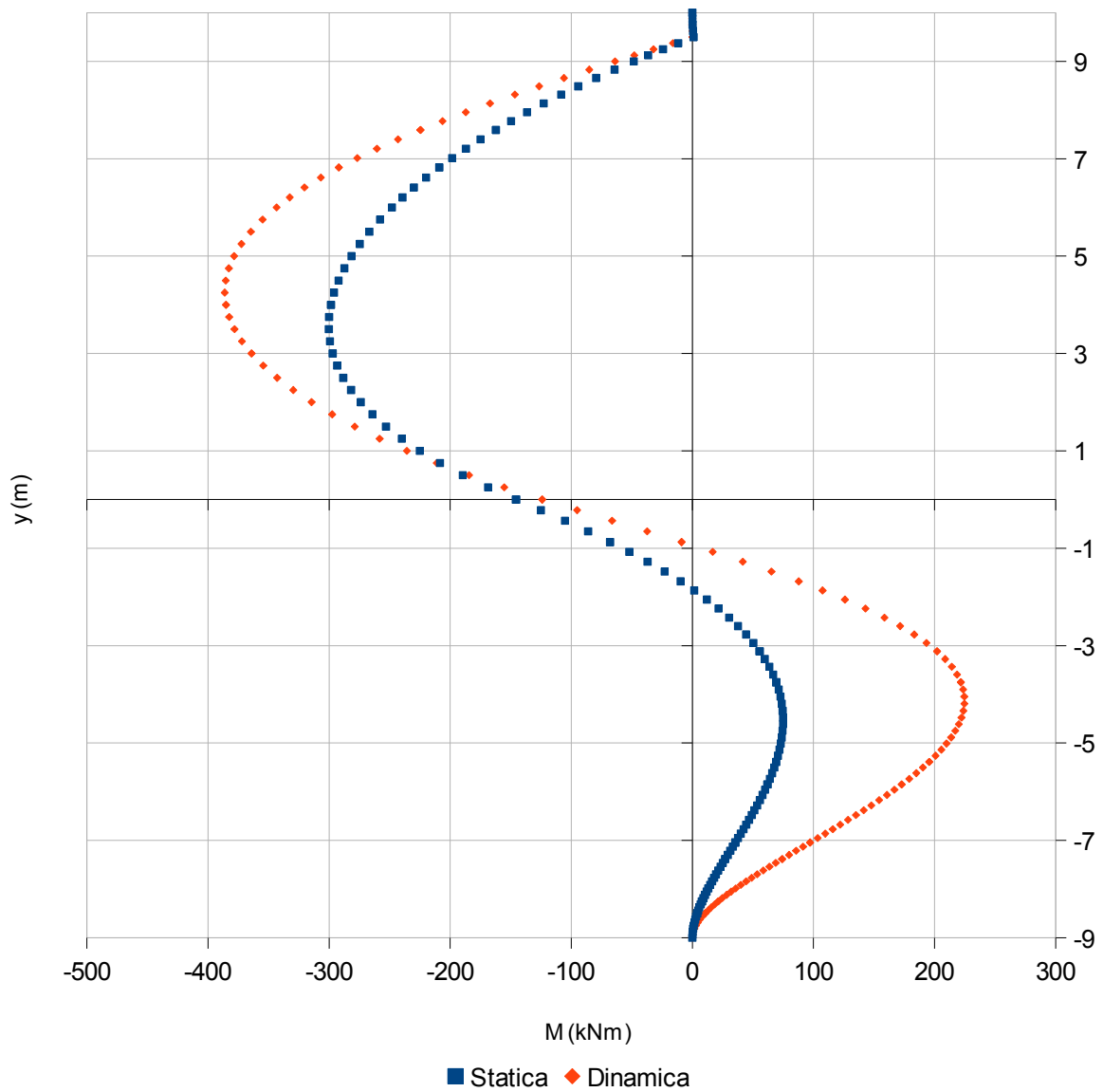


Fig. 9.1.4-18

In fig.9.1.4-18 analogamente alla sollecitazione del taglio la sollecitazione flessionale risulta globalmente incrementata, il valore coincide con il valore statico in prossimità del fondo scavo.

9.1.5 Spostamenti in direzione verticale

Un comportamento anomalo rilevato nei risultati prodotti dal modello costitutivo ipoplastico è l'accumulo di cedimenti verticali. Il modello produce valori di cedimento eccessivi quando sottoposto all'azione vibratoria indotta dall'evento sismico. Questi cedimenti affliggono il dominio in modo uniforme. Di seguito sono presentate alcune immagini di deformate significative per il caso di terreno con indice dei vuoti $e = 1$, il caso con $e = 0,7$ risulta analogo ma con valori leggermente ridotti del cedimento che resta comunque significativo.

Sisma del Friuli

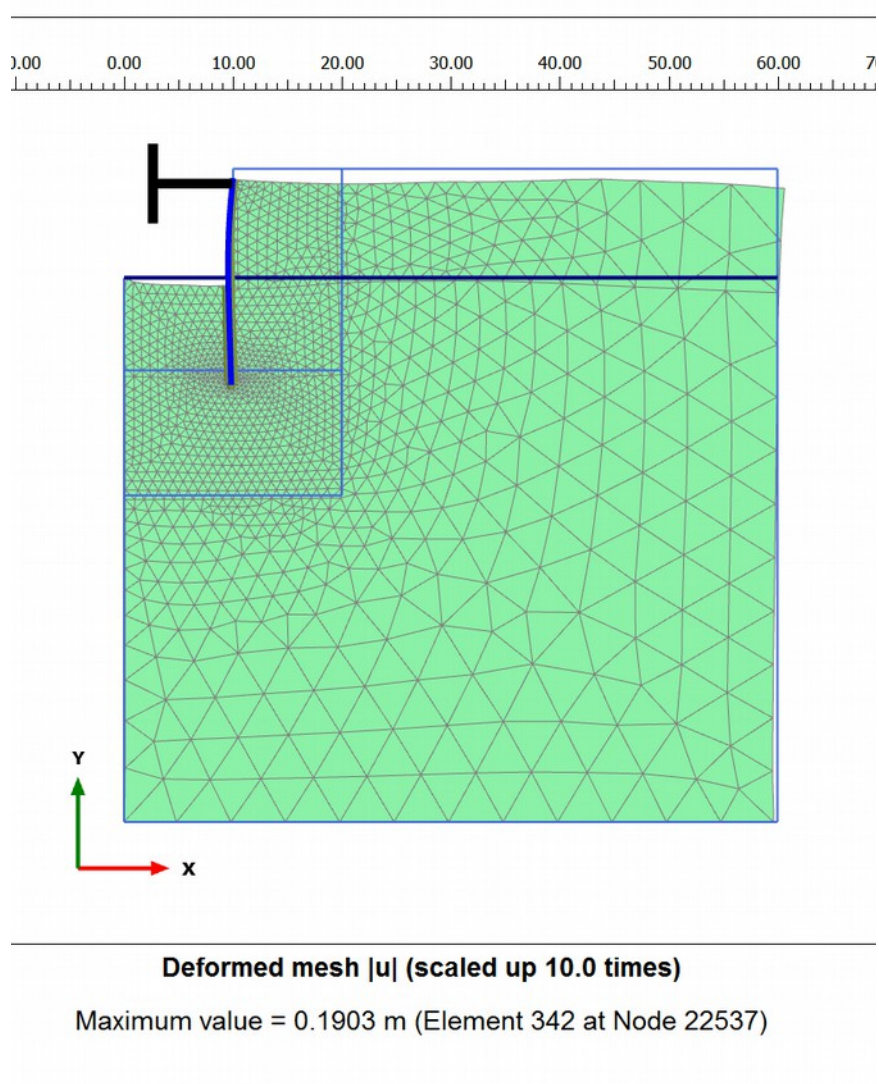


Fig. 9.1.5-1

Sisma dell'Irpinia

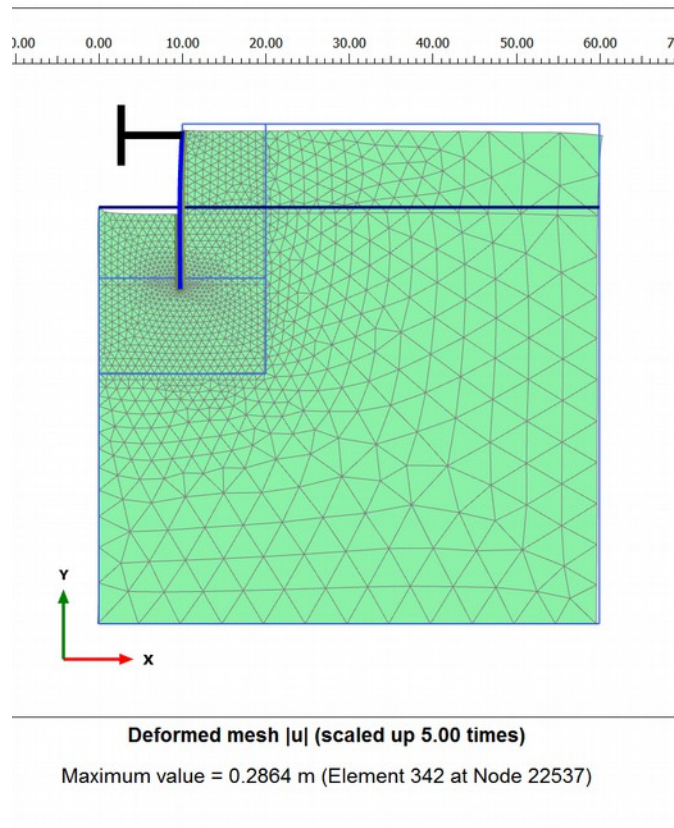


Fig. 9.1.5-2

Sisma Umbro-Marchigiano

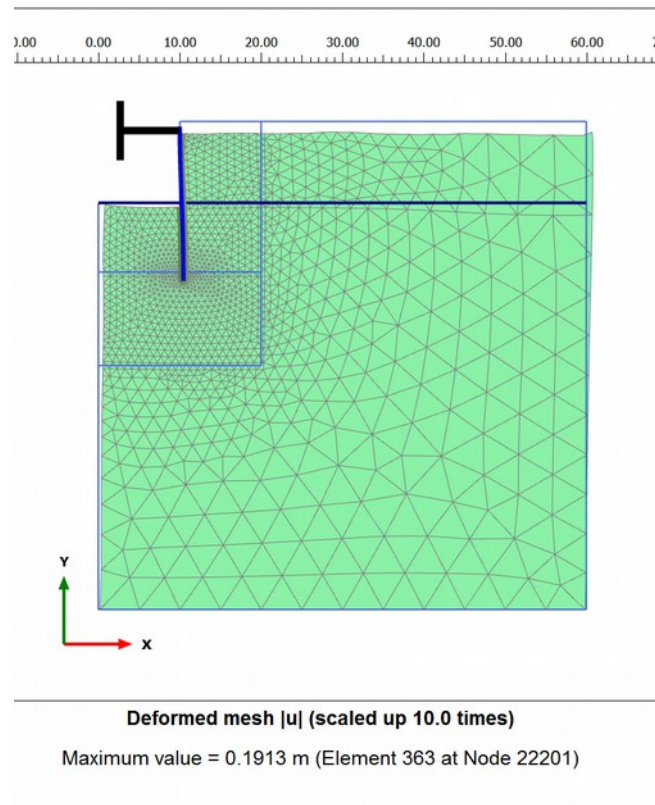


Fig. 9.1.5-3

9.1.6 Variazione dell'indice dei vuoti

Il modello costitutivo ipoplastico ha la sua peculiarità nella determinazione della variazione dell'indice dei vuoti. Questa variabile di stato svolge un ruolo fondamentale nel comportamento dei terreni granulari. L'addensamento che consegue ad una sollecitazione vibratoria può variare in prossimità della struttura a causa del differente andamento tensionale che lì si trova. In prossimità della punta della paratia si riscontra un maggiore addensamento per il contatto fra terreno e struttura dotati di rigidzze diverse e modi di vibrare diversi. Nel seguito si riportano i casi del terreno con indice dei vuoti pari a $e = 1$, il comportamento nel caso di $e = 0,7$ è analogo.

Sisma del Friuli

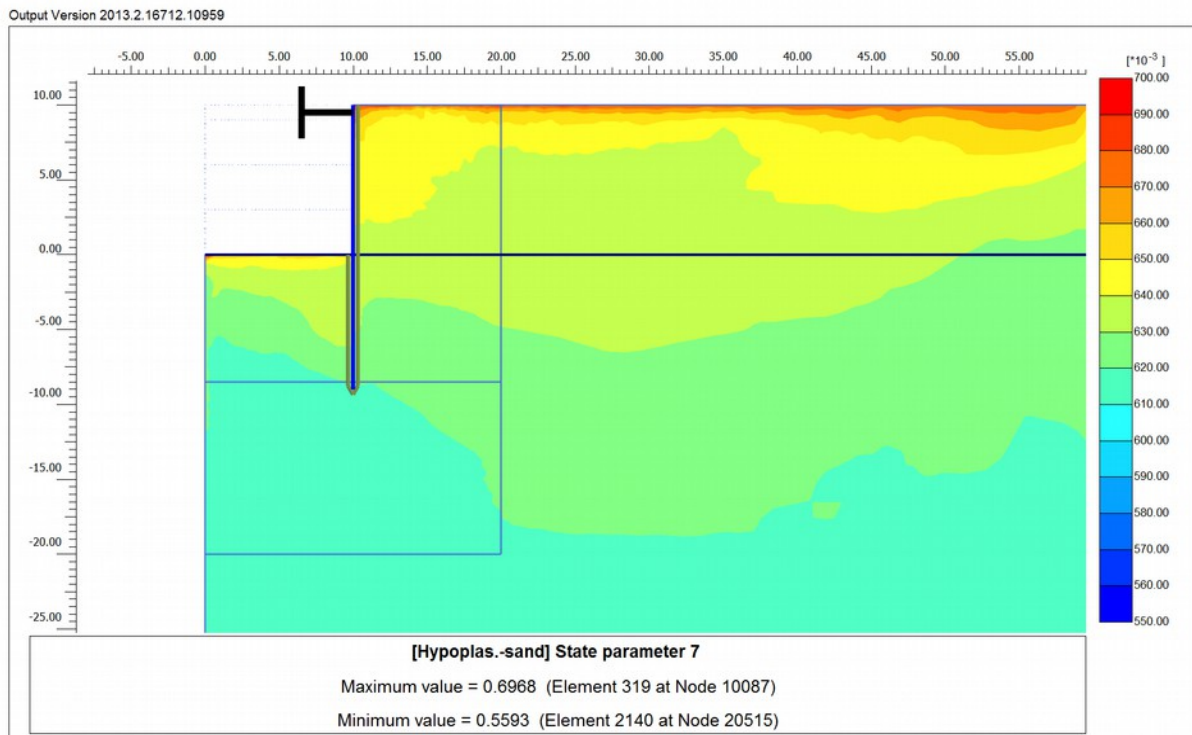


Fig.9.1.6-1

Nella fig.9.1.6-1 si nota la variazione di addensamento in punta alla palancola e la tendenza del modello di descrivere il terreno a sinistra della palancola come soggetto a maggiore addensamento dovuto alla spinta passiva che si genera.

Sisma dell'Irpinia

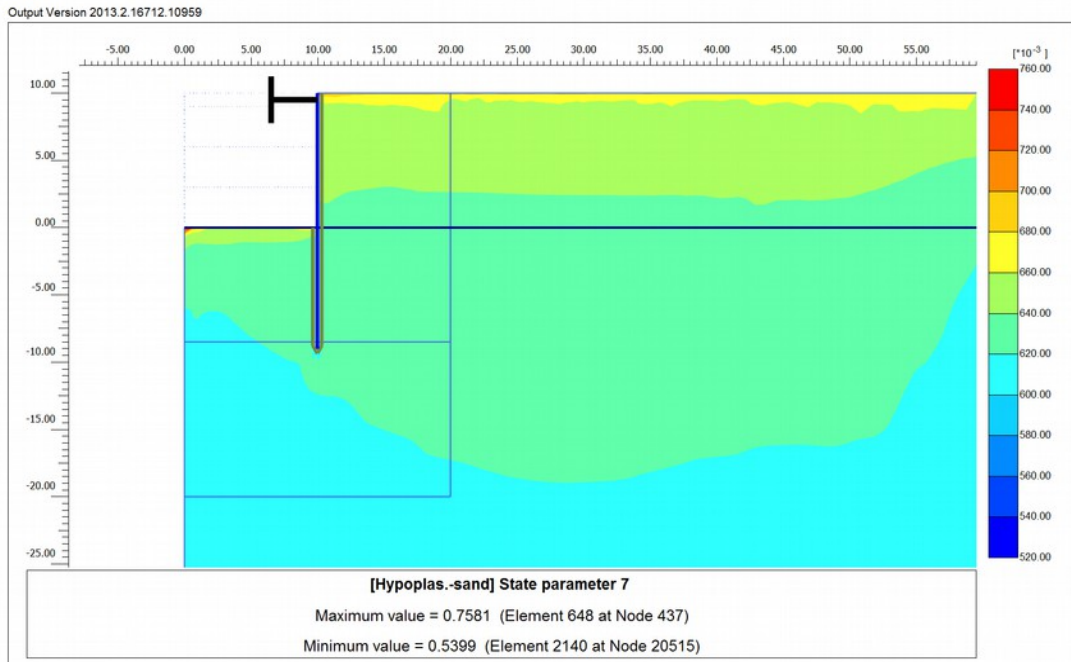


Fig.9.1.6-2

Nella fig.9.1.6-2 si nota che gli effetti di maggiore spostamento della parte infissa della paratia porta ad una maggiore variazione dell'indice dei vuoti al di sotto del fondo scavo. Anche in questo caso in punta alla paratia si registra un'area di maggiore addensamento del terreno.

Sisma Umbro-Marchigiano

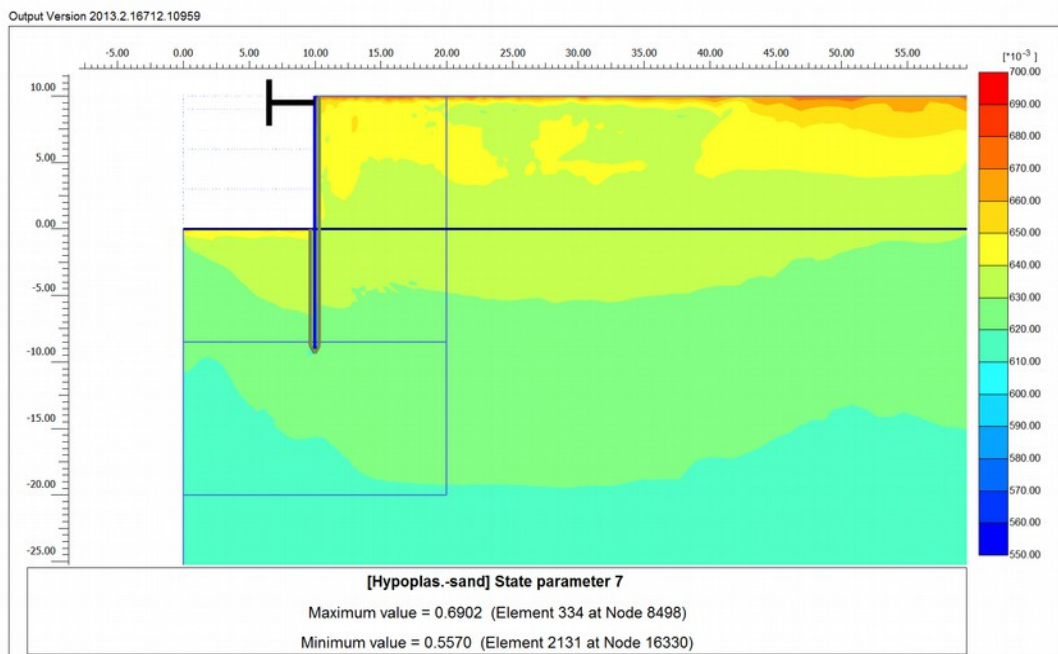


Fig.9.1.6-3

Nella fig.9.1.6-3 l'anomalia dei risultati ottenuti per questo evento sismico si riflette nell'andamento dell'indice dei vuoti che non risente in maniera considerevole della presenza della paratia.

10 Conclusioni

Nella tesi si è studiato il comportamento, in campo statico e sismico, di paratie puntellate in testa. Per prima cosa si è rilevato come la definizione dei parametri dell'interfaccia intervenga sui risultati ottenuti. Con una serie di test, in campo statico, si è determinato un set di valori che comportava una convergenza più veloce alla soluzione non lineare del problema e dei parametri adatti di rigidezza e di resistenza del terreno definito con il modello ipoplastico. E' risultata necessaria questa taratura dei parametri di interfaccia per l'instabilità numerica a cui è soggetto il legame ipoplastico per valori di rigidezza elevata dell'interfaccia. I risultati che si sono ottenuti con la taratura dell'interfaccia sono:

- gli spostamenti sulla paratia aumentano al ridursi della rigidezza dell'interfaccia e dell'angolo di attrito assegnato all'interfaccia
- la sollecitazione di taglio risulta praticamente invariata a modifiche della rigidezza di interfaccia mentre varia in modo non marcato per variazione dell'angolo di attrito, aumenta la sollecitazione tagliante sulla paratia al ridursi dell'angolo di attrito di interfaccia
- il momento risulta incrementato dalla riduzione della rigidezza e dell'angolo di attrito di interfaccia
- la variazione delle sollecitazioni e quindi degli spostamenti è principalmente dovuta al raggiungimento della tensione tangenziale massima ammissibile dall'interfaccia. Si determinano valori di sollecitazione e spostamento superiori per i casi in cui la tensione tangenziale limite non viene raggiunta.

Le analisi successive hanno interessato lo studio del comportamento della paratia sottoposta ad azioni sismiche. Per queste analisi si è scelto di porre lo stesso terreno iniziale in due condizioni di addensamento, imponendo l'indice dei vuoti iniziale pari a $e = 1$ ed $e = 0,7$. Entrambi i terreni sono stati sottoposti a tre sollecitazioni dinamiche corrispondenti a tre eventi sismici rilevanti registrati: terremoto del Friuli, dell'Irpinia e quello Umbro Marchigiano. Dai risultati si rileva un generale incremento di spostamenti e sollecitazioni sulla paratia rispetto al caso statico, con andamenti in linea con i risultati sperimentali. In alcuni casi come il terremoto Umbro-Marchigiano l'analisi ha dato valori ritenuti anomali dovuti principalmente alla compattazione del terreno a monte della paratia. Durante le analisi dinamiche si sono ottenuti cedimenti verticali considerevoli e che variano con l'intensità del terremoto, questi valori sono dovuti al legame costitutivo ipoplastico che determina un forte cambiamento della variabile di stato indice dei vuoti. Conseguentemente si rileva una compattazione del materiale evidenziata nelle immagini

dell'andamento dell'indice dei vuoti. Infine si rileva come il legame costitutivo non lineare adottato descriva correttamente le sollecitazioni e gli spostamenti nel caso statico ma risente di eccessivi cedimenti verticali nel caso dinamico.

11 Bibliografia

Conoscenze di base

CARMELO MAJORANA , STEFANO ODORIZZI – Metodi numerici per l'analisi dinamica delle strutture, Pitagora Editrice Bologna

GIUSEPPE LANZO , FRANCESCO SILVESTRI – Risposta sismica locale, Hevelius Edizioni

STEVEN L. KRAMER – Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics

Collasso dei diaframmi a moto sismico

CALLISTO - Capacity design of embedded retaining structures, Géotechnique 64

R. CONTI ,G.S.P.MADABHUSHI , G.M.B.VIGGIANI - On the behaviour of flexible retaining walls under seismic actions, Géotechnique 62

Modellazione numerica

A. NIEMUNIS , I. HERLE - Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range, Mechanics of cohesive-frictional materials

HERLE , G. GUDEHUS - Determination of parameters of a hypoplastic constitutive model from properties of grain assemblies, Mechanics of cohesive-frictional materials

Sitografia:

DAVID MAŠÍN – PLAXIS implementation of hypoplasticity,

<http://web.natur.cuni.cz/uhigug/masin>

DAVID MAŠÍN - Hypoplasticity for Practical Applications -Part 4: Determination of material parameters, <http://web.natur.cuni.cz/uhigug/masin>

Descrizione solutore ed elementi utilizzati

Sitografia:

Manuale PLAXIS 2D, <http://www.plaxis.nl>

Validazione del modello

G. LANZO, A. PAGLIAROLI E B. D'ELIA, Influenza della modellazione di Rayleigh dello smorzamento viscoso nelle analisi di risposta sismica locale, WIT press

YUYI ZHANG , ZHAOHUI YANG , JACOBO BIELAK , JOEL P. CONTE , AHMED ELGAMAL - Treatment of seismic input and boundary conditions in nonlinear seismic analysis of a bridge ground system, ASCE Engineering Mechanics Conference 2003

Sitografia:

CIRO VIGONE, EMILIO BILOTTA, FILIPPO SANTUCCI DE MAGISTRIS, Remarks on site response analysis by using Plaxis dynamic module, PLAXIS Bulletin <http://www.plaxis.nl>