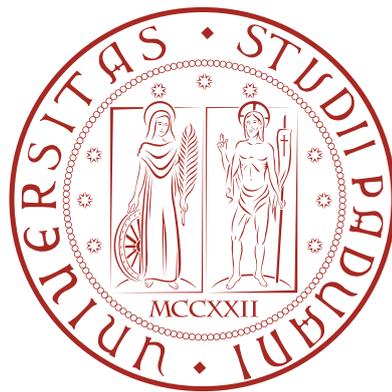


Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

**CONTROLLO IN
RETROAZIONE DI UN
SISTEMA MECCANICO**



Laureanda

Daniela Dejacó

Relatore

Prof. Mauro Bisiacco

PADOVA, 27 NOVEMBRE 2012

Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser

Detto popolare tedesco

Indice

1	Introduzione	7
2	Sistema meccanico	9
3	Sistema in catena aperta	13
3.1	Andamento di $\alpha(t)$	14
3.2	Andamento di $x(t)$	15
4	Sistema ad anello chiuso	17
4.1	Prima soluzione	18
4.2	Seconda soluzione	24
5	Sistema non linearizzato	33
5.1	Prima soluzione	34
5.1.1	Andamento con angolazione iniziale del pendolo diversa da zero	35
5.1.2	Ingresso del sistema	36
5.2	Seconda soluzione	37
5.2.1	Ingressi del sistema	37
6	Conclusioni	41
A	Codice sorgente in MATLAB	43

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questa tesi é, come ci suggerisce il titolo, quello di controllare un sistema meccanico. Nel nostro caso il sistema meccanico é un carrello che si muove in una sola direzione in corrispondenza del cui baricentro viene appeso un pendolo. In questo modo le forze applicate al carrello influiscono sul moto del pendolo e a sua volta le oscillazioni del pendolo si ripercuotono sul moto del carrello.

Nella parte iniziale della tesi vengono ricavate le equazioni differenziali che descrivono il moto del sistema e, linearizzandole, vengono successivamente trasformate in modelli SISO nel dominio di Laplace.

Nel capitolo *Sistema in catena aperta* vedremo brevemente come si comporta il sistema in catena aperta in corrispondenza all'applicazione di un gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ al carrello.

Successivamente, nel capitolo *Sistema ad anello chiuso* retroazioneremo il sistema e vedremo come si possano ottenere certe specifiche: l'obiettivo finale é riuscire a spostare il carrello da un punto iniziale a un punto finale in un tempo prefissato con una contemporanea scarsa presenza di oscillazioni nel pendolo. Verranno proposte due soluzioni differenti per ottenere le specifiche desiderate.

Nel capitolo successivo, invece, ci occuperemo del sistema non linearizzato e verificheremo se le soluzioni proposte sono adatte anche al sistema non linearizzato. Inoltre analizzeremo l'effetto delle condizioni iniziali e discuteremo brevemente l'andamento degli ingressi del sistema.

Infine, nella conclusione, verranno messi a confronto i due metodi proposti.

Capitolo 2

Sistema meccanico

Il sistema meccanico considerato (figura 2.1) é un carrello che si muove in una sola direzione su un piano orizzontale. In corrispondenza del baricentro di tale carrello é appeso un pendolo, anche questo vincolato a muoversi in una sola direzione. Al sistema carrello-pendolo viene applicata una forza $u(t)$ in direzione orizzontale, che ne determina il moto.

Ricaviamo il sistema di equazioni che descrive il moto di tale sistema, assumendo che si manifesti un attrito volvente tra carrello e piano orizzontale; trascureremo invece l'effetto dell'attrito statico. Per quanto riguarda il pendolo assumeremo che il filo inestensibile abbia massa trascurabile e che agisca una forza di attrito viscoso che si oppone all'oscillazione del pendolo. I parametri che useremo sono i seguenti:

- M é la massa del carrello
- m é la massa del pendolo
- l é la lunghezza del pendolo
- κ é il coefficiente che tiene conto delle perdite dovute all'attrito viscoso del pendolo
- ν é il coefficiente che tiene conto delle perdite dovute all'attrito volvente
- $\alpha(t)$ descrive l'angolo che il filo forma con la verticale all'istante t
- $x(t)$ descrive la posizione del centro di massa del carrello all'istante t
- $x_c(t)$ é il centro di massa del sistema al tempo t
- $u(t)$ é la forza applicata

Definiamo innanzitutto il centro di massa del sistema

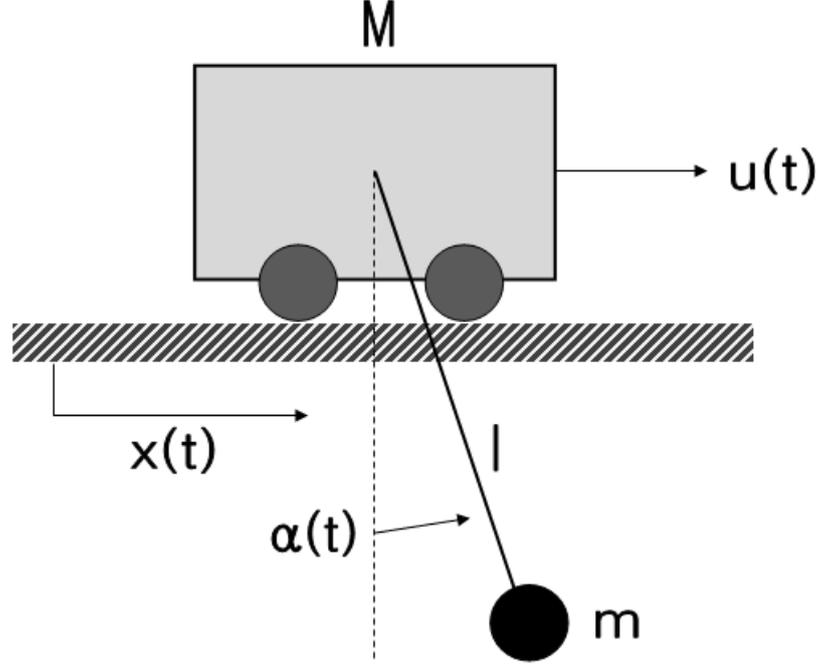


Figura 2.1: Sistema meccanico

$$x_c(t) = \frac{Mx(t) + m(x(t) + l \sin \alpha(t))}{M + m} \quad (2.1)$$

Applichiamo la *Seconda Legge di Newton* al centro di massa del sistema, considerando anche la forza di attrito volvente

$$(M + m) \ddot{x}_c(t) = u(t) - \kappa \dot{x}_c(t) \quad (2.2)$$

Inserendo la (2.1) nella (2.2) si ottiene la seguente equazione:

$$(M + m) \ddot{x}(t) + lm [-\sin \alpha(t) \dot{\alpha}^2(t) + \cos \alpha(t) \ddot{\alpha}(t)] + \kappa \dot{x}(t) + \frac{\kappa ml}{M + m} \cos \alpha(t) \dot{\alpha}(t) = u(t) \quad (2.3)$$

Consideriamo invece adesso le forze che agiscono sul pendolo, ponendo come riferimento il centro di massa del carrello, e decomponiamole in forze radiali e forze tangenziali. Le prime si elidono grazie alla tensione del filo. Le forze tangenziali invece possiamo descriverle come segue:

$$ml\ddot{\alpha}(t) = -mg \sin \alpha(t) - m\ddot{x}(t) \cos \alpha(t) - \nu \dot{\alpha}(t)l \quad (2.4)$$

Linearizzando le equazioni (2.3) e (2.4), cioè ponendo $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$ e $\dot{\alpha}^2 = 0$ si trova il seguente modello:

$$(M + m) \ddot{x}(t) + lm\ddot{\alpha}(t) + \kappa\dot{\alpha}(t) + \kappa\dot{x}(t) + \frac{\kappa ml}{M + m} \dot{\alpha}(t) = u(t) \quad (2.5)$$

$$l\ddot{\alpha}(t) + g\alpha(t) + \ddot{x}(t) + \frac{\nu l}{m} \dot{\alpha}(t) = 0 \quad (2.6)$$

Il sistema in due equazioni appena ricavato contiene sia le derivate di $x(t)$ sia quelle di $\alpha(t)$. Vogliamo ora modificare le equazioni in modo che una delle due sia solo funzione di $x(t)$ e l'altra solo funzione di $\alpha(t)$. A tale scopo trasformiamo il sistema nel dominio di *Laplace*, ottenendo:

$$X(s) [(M + m) s^2 + \kappa s] + A(s) \left[lm s^2 + \frac{\kappa ml}{M + m} s \right] = U(s) \quad (2.7)$$

$$X(s) s^2 + A(s) \left[l s^2 + g + \frac{\nu l s}{m} \right] = 0 \quad (2.8)$$

Eliminando $X(s)$ dalle due equazioni (2.7) e (2.8) ricaviamo la

$$A(s) = \frac{s}{\underbrace{s^3 a_3 + s^2 a_2 + s a_1 + a_0}_{G_1(s)}} U(s) \quad (2.9)$$

con

- $a_3 = -lM$
- $a_2 = \frac{\kappa ml}{M+m} - \kappa l - \frac{\nu l}{m} (M + m)$
- $a_1 = -\frac{\nu l \kappa}{m} - g (M + m)$
- $a_0 = -g\kappa$

dove $G_1(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento tra la forza applicata $U(s)$ e l'angolazione del pendolo $A(s)$. Eliminando invece $A(s)$ dalle (2.7) e (2.8) troviamo la

$$X(s) = - \underbrace{\frac{ls^2 + \frac{\nu l}{m} s + g}{s^2}}_{G_2(s)} G_1(s) U(s) \quad (2.10)$$

dove abbiamo usato la funzione di trasferimento $G_1(s)$ precedentemente ricavata.

Vediamo quindi che la funzione di trasferimento tra $U(s)$ e $X(s)$ non é altro che $G_1(s)$ moltiplicata per un fattore $G_2(s)$:

$$A(s) = G_1(s) U(s)$$

$$X(s) = G_1(s) G_2(s) U(s)$$

Capitolo 3

Sistema in catena aperta

Finora abbiamo trattato il sistema in modo puramente teorico. Da adesso in poi invece faremo riferimento a un possibile sistema reale usando dei valori numerici ragionevoli:

- $M = 10kg$
- $m = 0,5kg$
- $l = 2m$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $\nu = 0,2 \frac{kg}{s}$
- $\kappa = 0,2 \frac{kg}{s}$

ottenendo:

$$A(s) = - \underbrace{\frac{s}{20s^3 + 8.8s^2 + 103.2s + 2}}_{G_1(s)} U(s) \quad (3.1)$$

$$X(s) = - \underbrace{\frac{2s^2 + 0.8s + 9.8}{s^2}}_{G_2(s)} G_1(s) U(s) \quad (3.2)$$

Applichiamo ora un gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ al carrello e osserviamo come variano $x(t)$ e $\alpha(t)$ nel tempo.

A tale scopo usiamo *Simulink* e creiamo lo schema di figura 3.1, dove prelevaremo gli andamenti dei segnali $x(t)$ e $\alpha(t)$ rispettivamente dallo *Scope 1* e dallo *Scope 2*.

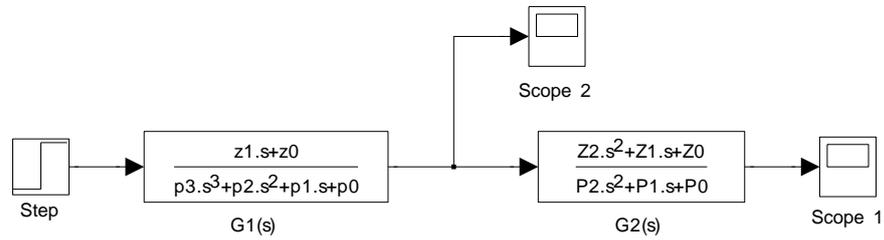


Figura 3.1: Schema in *Simulink*: sistema linearizzato ad anello aperto

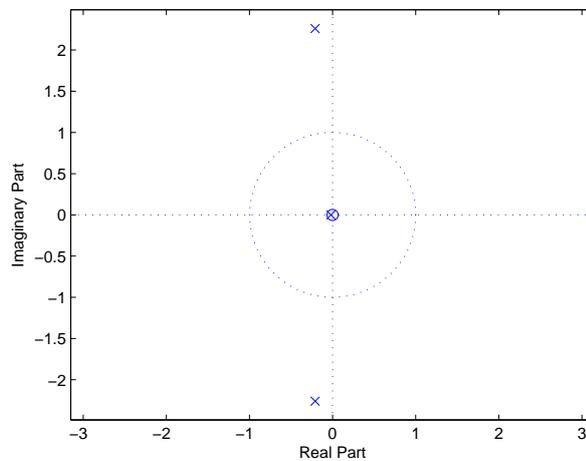


Figura 3.2: Zeri e poli della funzione di trasferimento $G_1(s)$

3.1 Andamento di $\alpha(t)$

La figura 3.2 ci mostra dove si trovano gli zeri e i poli della funzione di trasferimento $G_1(s)$: due poli complessi coniugati a parte reale negativa (per cui ci aspettiamo un andamento oscillatorio smorzato), uno zero nell'origine (che si semplificherá con il fattore $\frac{1}{s}$, che é la *Trasformata di Laplace* di $\delta_{-1}(t)$) e un polo a parte reale negativa (siccome é molto vicino all'origine ci aspettiamo un esponenziale che si smorza in un periodo di tempo elevato).

La risposta al gradino di $G_1(s)$ in figura 3.3 conferma tutte le considerazioni svolte. Vediamo infatti che inizialmente il pendolo si scosta dall'origine con un angolazione opposta a quella del moto del carrello ed oscilla attorno all'angolo $\alpha = -0.008$. Queste oscillazioni si smorzano pian piano come conseguenza del coefficiente ν e inoltre dopo un tempo piú lungo anche l'addendo inizialmente quasi costante si estingue a causa del coefficiente κ .

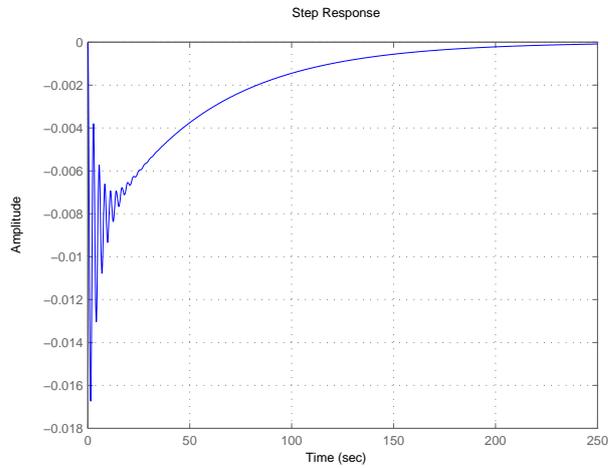


Figura 3.3: Risposta al gradino di $G_1(s)$: andamento del pendolo nel sistema ad anello aperto

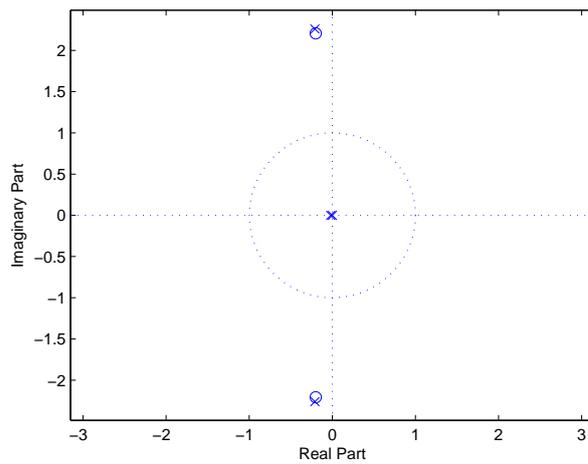


Figura 3.4: Zeri e poli della funzione di trasferimento $G_1(s)G_2(s)$

3.2 Andamento di $x(t)$

La figura 3.4 mostra la disposizione sul piano cartesiano degli zeri e poli della funzione di trasferimento data da $G_1(s)G_2(s)$: la coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa é molto vicina alla coppia di zeri complessi coniugati e quindi il loro contributo al moto del carrello sará molto limitato. Dominante

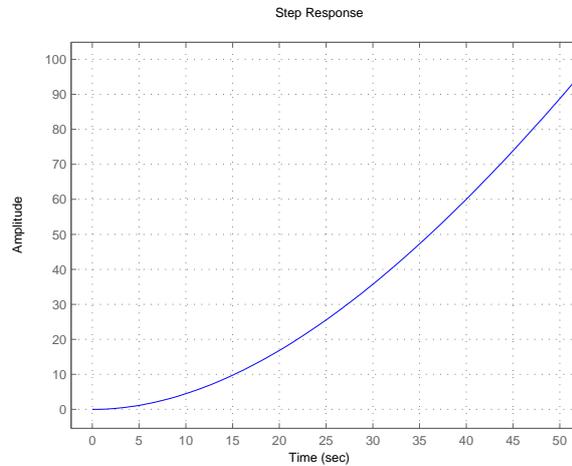


Figura 3.5: Risposta al gradino di $G_1(s)G_2(s)$: andamento del carrello nel sistema ad anello aperto

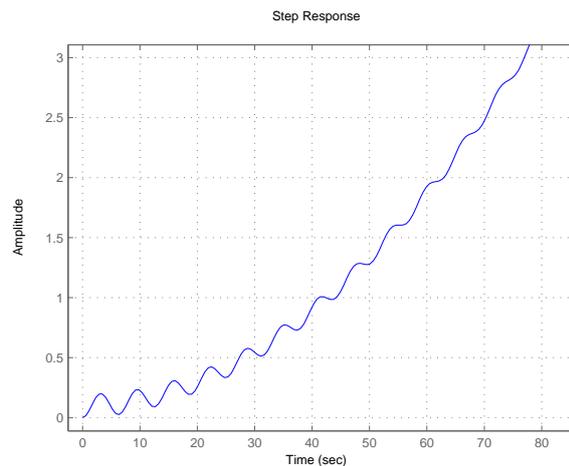


Figura 3.6: Andamento del carrello nel sistema ad anello aperto se ponessimo $m = 1000kg$ e $l = 1000kg$

sarà invece il polo nell'origine, che darà luogo a un moto divergente.

La figura 3.5 conferma la presenza di un modo divergente; il modo oscillatorio invece non si osserva, come previsto. Se decidessimo di usare un pendolo molto piú lungo e molto piú pesante ponendo $l = 1000m$ e $m = 1000kg$, tale carattere oscillatorio si vedrebbe benissimo come conferma la figura 3.6.

Capitolo 4

Sistema ad anello chiuso

In questo capitolo analizzeremo invece la risposta al gradino del sistema ad anello chiuso, ovvero poniamo una retroazione unitaria negativa tra ingresso e uscita, come si può vedere nella figura 4.1; infine progetteremo compensatori $C(s)$ adeguati per ottenere certe specifiche sull'andamento del sistema. Le figure 4.2 e 4.3 mostrano rispettivamente gli andamenti delle risposte al gradino di $x(t)$ e $\alpha(t)$ nel sistema ad anello chiuso.

Vogliamo riuscire a spostare il sistema carrello-pendolo da un punto iniziale x_0 a un punto finale x_1 . Dobbiamo quindi applicare al sistema un gradino di ampiezza pari alla distanza tra i due punti, cioè un segnale $(x_1 - x_0)\delta_{-1}(t)$, e dobbiamo fare in modo che il segnale di uscita inseguia il segnale d'ingresso (e quindi che il sistema sia di *TIPO 1* o più). Vogliamo inoltre avere un tempo di assestamento al 10% quasi pari al tempo di salita al 10%, cioè vogliamo evitare oscillazioni ed in particolare sovraelongazioni.

Scegliamo di porre la specifica:

$$t_s(10\%) = t_r(10\%) = 10s$$

Inoltre vogliamo fare sí che quando il carrello sarà arrivato al punto finale x_1 anche le oscillazioni del pendolo si saranno smorzate quasi completamente.

Di seguito vengono proposte due possibili soluzioni al problema: la prima

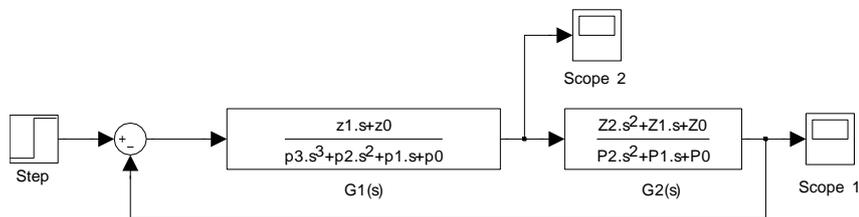


Figura 4.1: Schema in *Simulink*: sistema linearizzato in catena chiusa

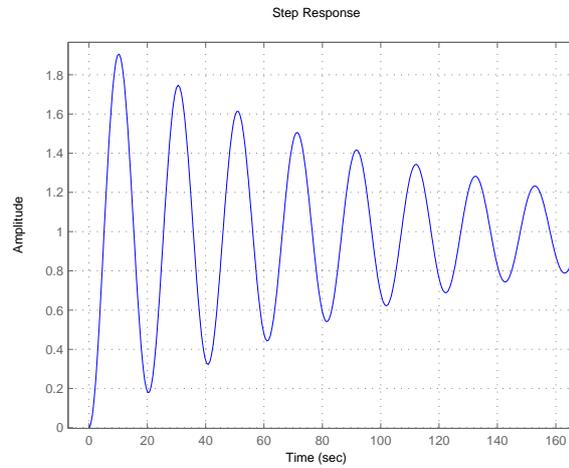


Figura 4.2: Andamento della posizione carrello nel sistema ad anello chiuso

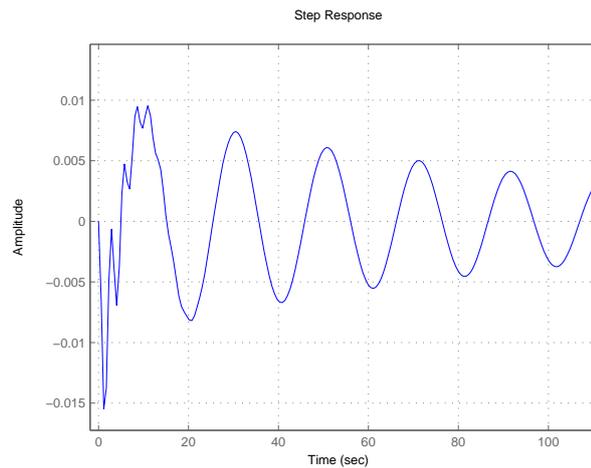
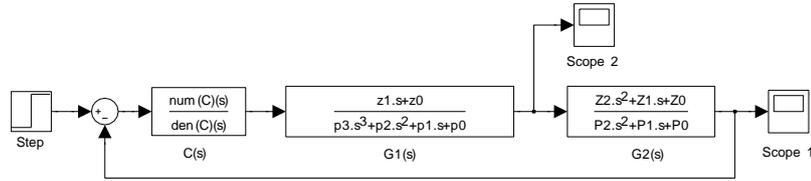
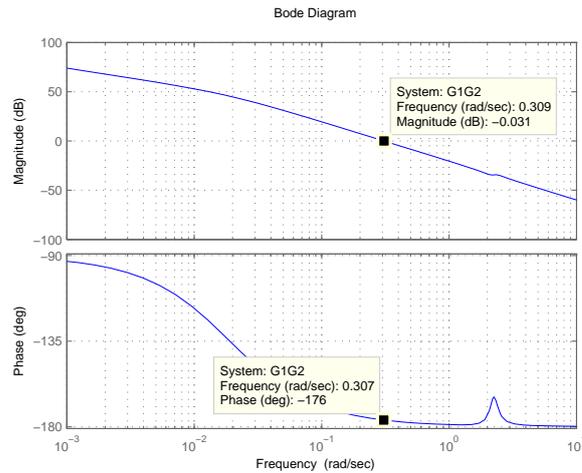


Figura 4.3: Andamento delle oscillazioni del pendolo nel sistema ad anello chiuso

usa un solo compensatore per regolare le due uscite $x(t)$ e $\alpha(t)$. La seconda invece impone l'uso di due compensatori distinti e di due anelli di retroazione.

4.1 Prima soluzione

La prima soluzione proposta usa lo schema in retroazione di figura 4.4, che prevede l'uso di un solo compensatore $C(s)$ per regolare entrambe le uscite.

Figura 4.4: Schema in *Simulink*: Sistema in catena chiusa con compensatoreFigura 4.5: Diagramma di Bode di $G_1(s)G_2(s)$

Sappiamo che il sistema descritto da $X(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$ é un sistema di *TIPO 2* perché la funzione di trasferimento ha due poli nell'origine. Ciò assicura che il segnale inseguirà con errore nullo il gradino unitario $\delta_{-1}(t)$.

Il grafico 4.5 mostra il *Diagramma di Bode* della funzione di trasferimento $G_1(s)G_2(s)$ e ci da informazioni su:

- Frequenza di attraversamento $\omega_a = 0.3rad = 10^{-0.52}rad$
- Margine di fase $m_\varphi = 4^\circ$: il margine di fase così basso spiega la presenza delle oscillazioni marcate nelle figure 4.2 e 4.3

Per ottenere un tempo di assestamento $t_s(10\%) = 10s$, preferibilmente uguale al tempo di salita $t_r(10\%)$, useremo la nota formula empirica:

$$t_r(10\%)Bp(3db) = \ln 10 \approx 2.3$$

dove Bp é la banda passante a 3 decibel del sistema ad anello chiuso e vale $Bp(3db) \approx \omega_a$, che é la frequenza di attraversamento del sistema ad anello

aperto.

Ponendo $t_r(10\%) = 10s$ si ricava la frequenza di attraversamento desiderata

$$\omega_{a,des} \approx Bp(3db) = \frac{\ln 10}{10} = 0.23rad = 10^{-0.64}rad$$

Il margine di fase alla frequenza di attraversamento desiderata $m_\varphi(\omega_{a,des}) = 32^\circ$ é troppo basso; lo vorremmo almeno di 90° . Di conseguenza, in questo caso, é opportuno usare una *rete anticipatrice*

$$C_1(s) = K \frac{1 + s\tau_z}{1 + s\tau_p}$$

dove poniamo lo zero 1 decade prima di $\omega_{a,des}$, cioè in $10^{-1.64}rad = 0.023rad$; così facendo otteniamo:

$$\tau_z = 10^{1.64}$$

Mettiamo invece il polo in alta frequenza: $\tau_p = 10^{-5}$.

A questo punto in $\omega_{a,des}$ il modulo vale $25.2db = 18.2$; sceglieremo quindi

$$K = \frac{1}{18.2} \approx 0.055$$

lasciando inalterato il diagramma delle fasi e modificando solo il diagramma del modulo. Il compensatore diventa:

$$C_1(s) = 0.055 \frac{1 + s10^{1.64}}{1 + s10^{-5}}$$

La figura 4.6 mostra il nuovo *Diagramma di Bode* di $G_1(s)G_2(s)C_1(s)$ ad anello aperto ottenuto, che ha un buon margine di fase:

$$m_\varphi(\omega_{a,des}) = 89^\circ$$

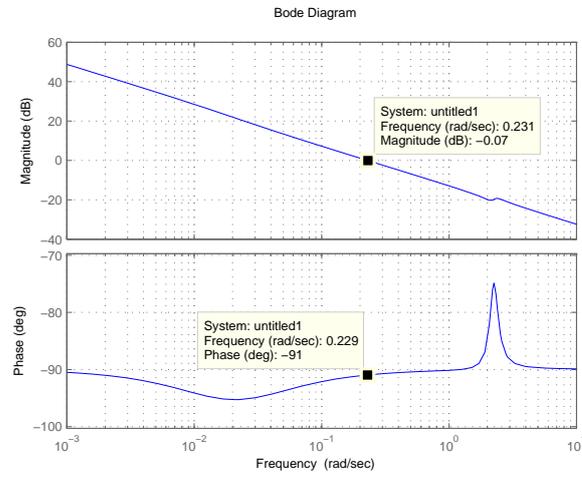
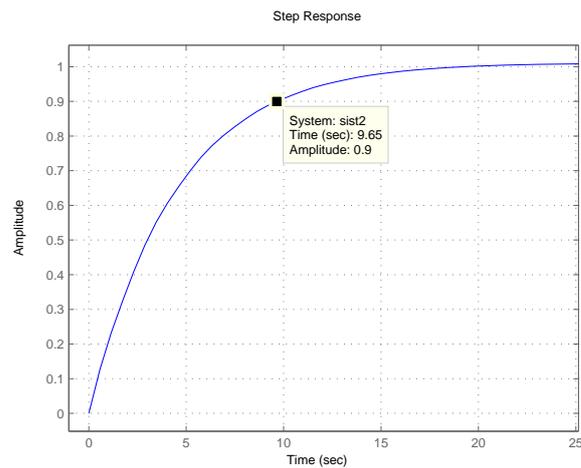
In catena chiusa tale sistema produce la risposta al gradino unitario di figura 4.7, che ha

$$t_r(10\%) = t_s(10\%) = 9.65s$$

ed é priva di oscillazioni e sovraelongazioni.

Occupiamoci adesso delle oscillazioni del pendolo. Vorremo che dopo un tempo pari a $2t_s(10\%) = 20s$ le oscillazioni del pendolo si smorzassero all' 1%. La figura 4.8 mostra l'andamento di $\alpha(t)$ nel sistema in retroazione con compensatore $C_1(s)$. Si può vedere che dopo un tempo pari a $20s$ le oscillazioni si sono già smorzate circa all' 1% delle oscillazioni iniziali; l' andamento potrebbe già andare bene.

Proviamo comunque a migliorare tale andamento. Il segnale $\alpha(t)$ prelevato allo *Scope 2* é esprimibile come:

Figura 4.6: Diagramma di Bode di $G_1(s)G_2(s)C_1(s)$ Figura 4.7: Risposta al gradino del sistema ottenuto retroazionando $G_1(s)G_2(s)C_1(s)$

$$\alpha(t) = L^{-1}[A(s)]$$

dove

$$A(s) = \frac{C_1(s)G_1(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)G_2(s)}U(s)$$

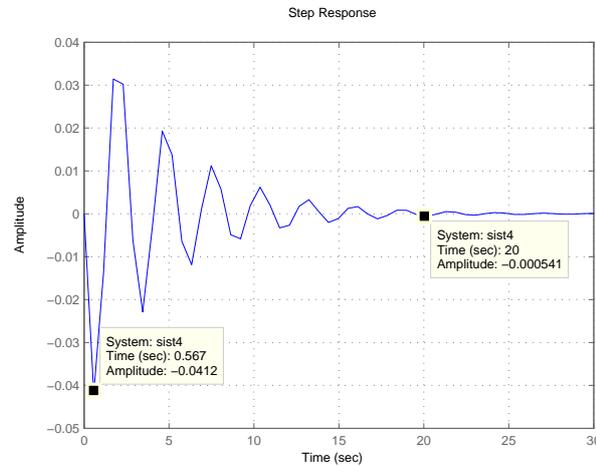


Figura 4.8: Andamento di $\alpha(t)$ nel sistema in retroazione con compensatore $C_1(s)$

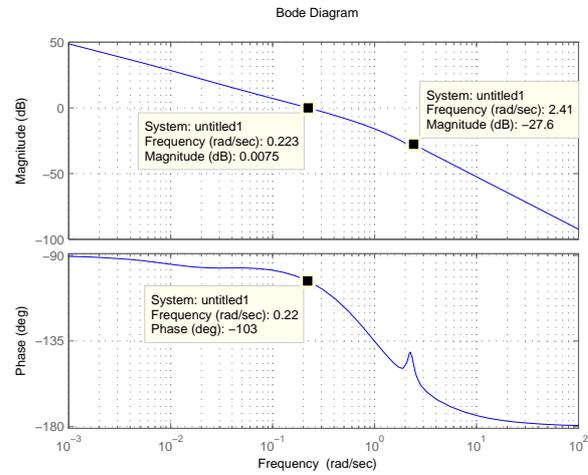
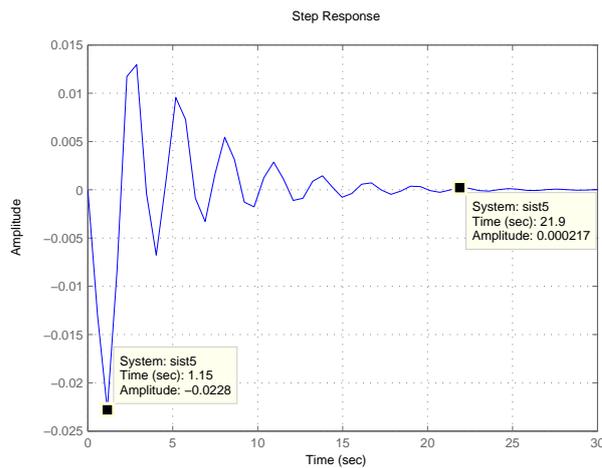
Per diminuire le oscillazioni possiamo dunque osservare il *Diagramma di Bode* di $C_1(s)G_1(s)G_2(s)$ di figura 4.6 e cercare di:

- Avere m_φ accettabile (condizione già rispettata)
- Per valori $|C_1(s)G_1(s)G_2(s)|_{db} < 0$ il *Diagramma di Bode* dovrebbe tenersi il piú lontano possibile dall'ascissa; ciò corrisponde nel *Diagramma di Nyquist* a tenersi il piú lontano possibile dal punto -1 dopo essere entrati nel cerchio unitario.

Il *Diagramma di Bode* del modulo presenta un piccolissimo picco in corrispondenza della frequenza $\omega_{picco} = 2.39rad = 10^{0.38}rad$. Con un polo possiamo abbassare tale picco; dobbiamo però stare attenti a non metterlo troppo vicino alla frequenza di attraversamento ω_a per non modificarla in modo sensibile. Un buon compromesso può essere quello di mettere il polo in 10^0 . Il compensatore diventa

$$C(s) = C_1(s) \frac{1}{1+s} = 0.055 \frac{1+s10^{1.64}}{1+s10^{-5}} \frac{1}{1+s}$$

e il *Diagramma di Bode* di $C(s)G_1(s)G_2(s)$ è mostrato in figura 4.9. Il picco si è abbassato di $27.6db - 19.2db = 8.4db$ e la ω_a è rimasta pressoché inalterata; l'unico problema potrebbe essere che il m_φ è diminuito diventando 77° . L'andamento di $\alpha(t)$, che si vede in figura 4.10, è migliorato; il tempo di smorzamento all' 1% è ancora di circa $20s$, ma l'ampiezza è dimezzata. Per sicurezza osserviamo l'andamento di $x(t)$ dopo aver effettuato tali modifiche (figura 4.11): il $t_s(10\%)$ è diminuito diventando $8.36s$, ma è ancora uguale

Figura 4.9: Diagramma di Bode di $C(s)G_1(s)G_2(s)$ Figura 4.10: Nuovo andamento di $\alpha(t)$ dopo aver modificato il compensatore

al tempo di assestamento. C'è però un fenomeno indesiderato: una leggera sovralongazione (overshoot)

$$s = \left(\frac{1.01 - 1}{1} 100 \right) \% = 1\%$$

Con il metodo appena visto non riusciremo a ridurre ulteriormente le oscillazioni senza modificare in modo negativo l'andamento di $x(t)$. In seguito,

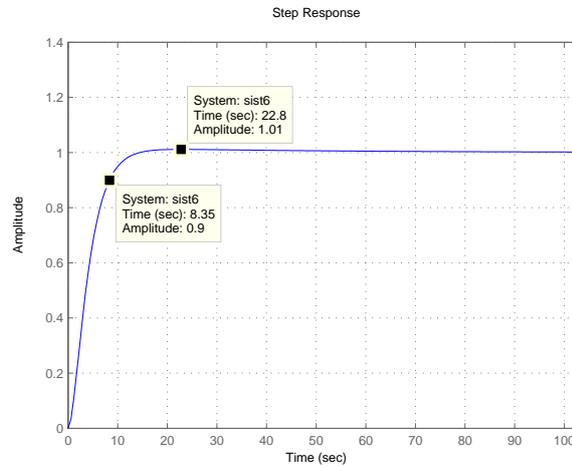


Figura 4.11: Nuovo andamento di $x(t)$ dopo aver modificato il compensatore

peró, proponiamo un'altro metodo leggermente piú complesso per ovviare a tale inconveniente.

4.2 Seconda soluzione

La seconda soluzione proposta é un po' piú complessa della precedente. Infatti usiamo due anelli di retroazione e due compensatori distinti per regolare l'andamento di $x(t)$ e $\alpha(t)$; tale metodo viene chiamato *Compensatore a due gradi di libert a*.

Saremmo tentati di usare lo schema di figura 4.12. C'  peró un problema che ne vieta l'uso e impone di effettuare una piccola modifica.

Sappiamo che

$$A(s) = G_1(s)U(s)$$

in cui $G_1(s)$ ha uno zero nell'origine, un polo reale stabile e una coppia di poli complessi coniugati stabili. Si puó quindi scrivere:

$$G_1(s) = \frac{-Hs}{(s+p)(s^2+a_1s+a_0)} = -\frac{H}{s^2+a_1s+a_0} \left(-\frac{s}{s+p} \right)$$

con $p, a_1, a_0, H > 0$. Per poter scrivere

$$X(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$$

bisogna porre

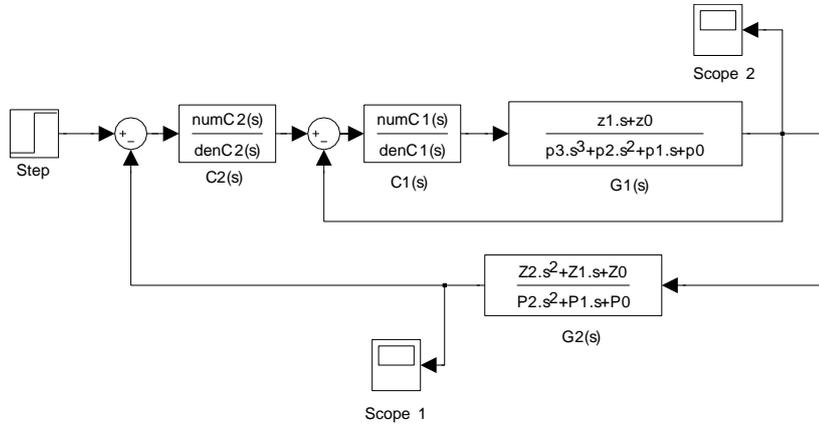


Figura 4.12: Schema in *Simulink*: Compensatore a due gradi di libertà. SOLUZIONE ERRATA

$$G_2(s) = \frac{s^2 + b_1s + b_0}{-Ks^2}$$

con $b_1, b_0, K > 0$. Se poniamo $G_1(s)$ e $G_2(s)$ in serie ci sarà una cancellazione zero-polo nell'origine.

Nella prima soluzione proposta abbiamo progettato un unico compensatore per la serie

$$G_1(s)G_2(s) = \frac{H(s^2 + b_1s + b_0)}{Ks(s+p)(s^2 + a_1s + a_0)}$$

in cui la cancellazione zero-polo nell'origine è stata effettuata prima di progettare il compensatore e quindi non ha creato problemi.

Nella soluzione che proponiamo adesso, però, vogliamo prima creare un compensatore $C_1(s)$ e definendo

$$W_1(s) = \frac{C_1(s)G_1(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)}$$

troveremo successivamente un secondo compensatore $C_2(s)$ che sarà posto in serie con $W_1(s)G_2(s)$. Sappiamo che $W_1(s)$ ha gli stessi zeri di $C_1(s)G_1(s)$ e quindi sicuramente avrà anche uno zero nell'origine. Pertanto ci sarà una cancellazione del fattore instabile s tra $W_1(s)$ e $G_2(s)$ e in questo caso ciò non è accettabile.

Per aggirare questo ostacolo definiamo

$$G_3(s) = -\frac{s}{s+p}$$

e modifichiamo $G_1(s)$ e $G_2(s)$ definendoli

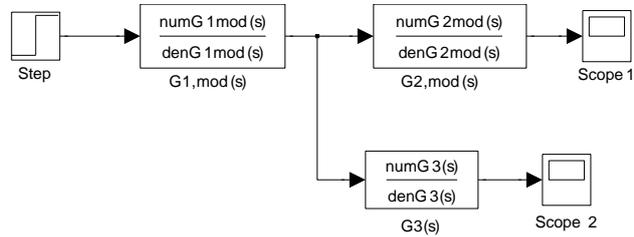


Figura 4.13: Schema in *Simulink*: Definizione di nuove funzioni di trasferimento per aggirare il problema della cancellazione zero-polo nell'origine

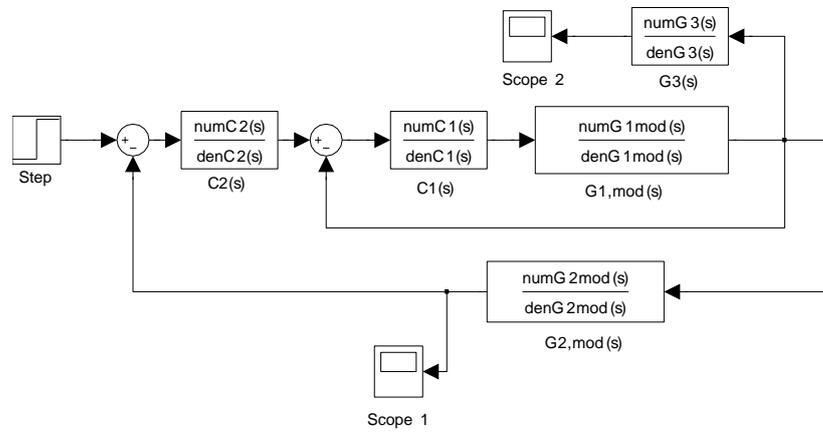


Figura 4.14: Schema in *Simulink*: Compensatore a due gradi di libertà: SOLUZIONE CORRETTA

$$G_{1,mod}(s) = G_1(s) \frac{1}{G_3(s)} = -\frac{-H}{s^2 + a_1s + a_0}$$

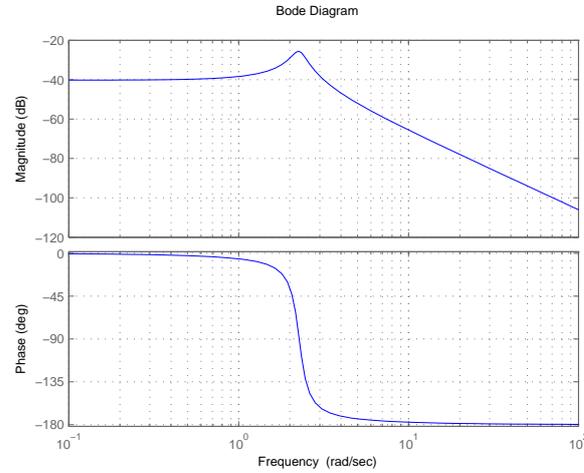
$$G_{2,mod}(s) = G_2(s)G_3(s) = -\frac{s^2 + b_1s + b_0}{-Ks(s+p)}$$

in modo che la serie $G_{1,mod}(s)G_{2,mod}$ non abbia cancellazioni zero-polo nell'origine. Possiamo quindi porre, come reso chiaro dallo schema in catena aperta di figura 4.13:

$$A(s) = G_{1,mod}(s)G_3(s)U(s)$$

$$X(s) = G_{1,mod}(s)G_{2,mod}(s)U(s)$$

Lo schema con doppia retroazione diventa quindi come indicato in figura 4.14.

Figura 4.15: Diagramma di Bode di $G_{1,mod}(s)$

Iniziamo col progetto di un compensatore $C_1(s)$ adeguato. La figura 4.15 mostra il *Diagramma di Bode* di $G_{1,mod}(s)$. Siccome $G_{1,mod}(s)$ non ha né poli né zeri nell'origine, alle basse frequenze il diagramma del modulo è piatto e il diagramma delle fasi è nullo. Si può notare che $|G_{1,mod}(\omega)| < 1 \forall \omega$ e quindi non c'è frequenza di attraversamento.

Ora siccome $W_{1,mod}(s)$, definita come

$$W_{1,mod}(s) = \frac{C_1(s)G_{1,mod}(s)}{1 + C_1(s)G_{1,mod}(s)}$$

verrà messa in serie con $G_{2,mod}(s)$ vorremmo che, per tutte le frequenze minori di $10\omega_{a,des} = 2.3rad = 10^{0.36}rad$ valesse

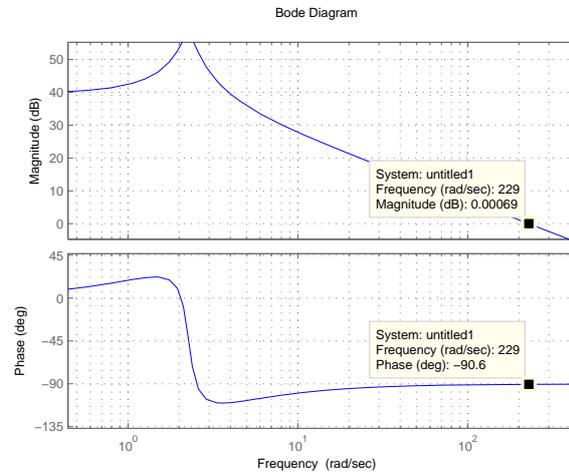
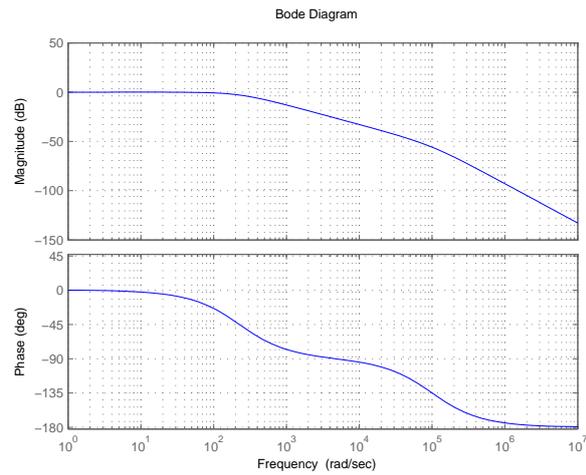
- $|W_{1,mod}(\omega)| \approx 1 \Rightarrow |W_{1,mod}(\omega)G_{2,mod}(\omega)| \approx |G_{2,mod}(\omega)|$
- $\arg W_{1,mod}(\omega) \approx 0gradi \Rightarrow \arg [W_{1,mod}(\omega)G_{2,mod}(\omega)] \approx \arg W_{1,mod}(\omega)$

in modo che $W_{1,mod}(s)$ non modifichi $G_{2,mod}(s)$ nello spettro di frequenze di interesse. Vogliamo inoltre evitare che abbia picchi di risonanza.

Dobbiamo quindi alzare di molto il diagramma del modulo di $G_{1,mod}(s)$, aumentando così anche la ω_a e poi rendere $m_\varphi \approx 90^\circ$. Una buona soluzione è la rete anticipatrice

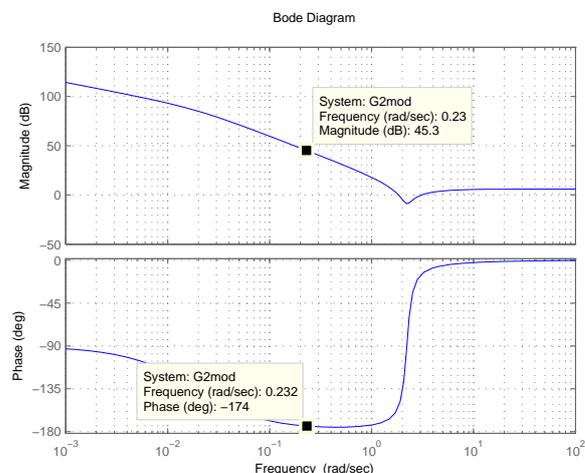
$$C_1(s) = 10^4 \frac{10^{-0.34}s + 1}{10^{-5}s + 1}$$

che rende i *Diagrammi di Bode* di $C_1(s)G_{1,mod}(s)$ e $W_{1,mod}(s)$ come quelli delle figure 4.16 e 4.17.

Figura 4.16: Diagramma di Bode di $C_1(s)G_{1,mod}(s)$ Figura 4.17: Diagramma di Bode di $W_{1,mod}(s)$

Siamo cosí riusciti a soddisfare tutte le specifiche desiderate.

Passiamo ora alla ricerca del secondo compensatore $C_2(s)$. Siccome abbiamo fatto sí che $W_{1,mod}(s)$ non modificherá $G_{2,mod}(s)$ alle frequenze di interesse, possiamo considerare la sola serie $C_2(s)G_{2,mod}(s)$ e moltiplicarla in un secondo momento per $W_{1,mod}(s)$. La figura 4.18 mostra il *Diagramma di Bode* di $G_{2,mod}(s)$. Il sistema é già di *TIPO 1* perché $G_{2,mod}(s)$ ha un polo nell'origine. La frequen-

Figura 4.18: Diagramma di Bode di $G_{2,mod}(s)$

za di attraversamento desiderata $\omega_{a,des}$ é come sempre $0,23rad = 10^{-0.64}rad$ e vogliamo avere un margine di fase a tale frequenza $m_{\varphi}(\omega_{a,des}) \approx 90^{\circ}$. Possiamo ottenere tali specifiche se scegliamo una *rete anticipatrice* con un polo aggiuntivo per abbassare ulteriormente il picco di risonanza, e cioè

$$C_2(s) = 10^{-3.26} \frac{10^{1.64}s + 1}{(s + 1)(10^{-0.2}s + 1)}$$

Il *Diagramma di Bode* della serie $C_2(s)W_{1,mod}(s)G_{2,mod}(s)$ diventa come quello di figura 4.19 ed ha $m_{\varphi} = 69^{\circ}$.

Preleviamo ora i segnali $x(t)$ e $\alpha(t)$ rispettivamente dallo *Scope 1* e dallo *Scope 2* di figura 4.14; i grafici sono mostrati nelle figure 4.20 e 4.21.

In formule possiamo descrivere le uscite come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(s)] \\ X(s) &= \frac{C_2(s)W_{1,mod}(s)G_{2,mod}(s)}{1 + C_2(s)W_{1,mod}(s)G_{2,mod}(s)}U(s) \\ \alpha(t) &= L^{-1}[A(s)] \\ A(s) &= G_3(s) \frac{C_2(s)W_{1,mod}(s)}{1 + C_2(s)W_{1,mod}(s)G_{2,mod}(s)}U(s) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $x(t)$ c'è una sovranelongazione del 2% e $t_r(10\%) = t_s(10\%) = 7,64s$. Il pendolo presenta un buon andamento $\alpha(t)$: in circa 15s le oscillazioni si smorzano all' 1% e il modulo della massima ampiezza é pari a 0.01. Inoltre c'è un solo periodo di oscillazioni, dopodiché $\alpha(t)$ si avvicina esponenzialmente all'origine.

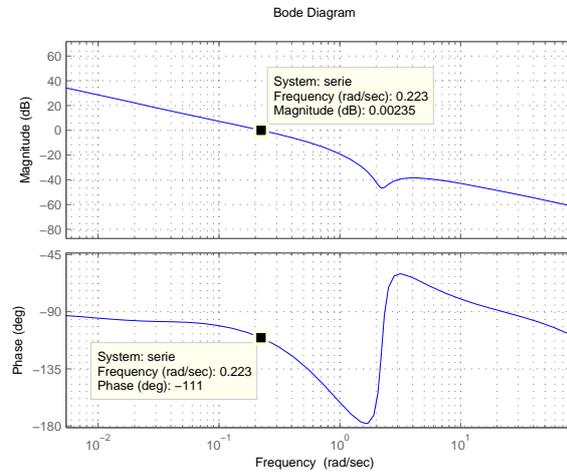


Figura 4.19: Diagramma di Bode di $C_2(s)W_{1,mod}(s)G_{2,mod}(s)$

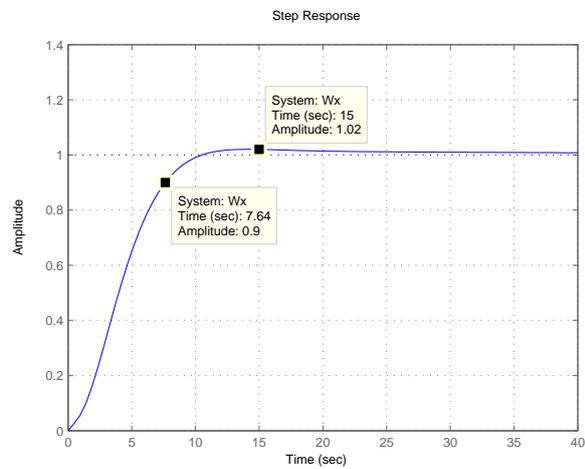


Figura 4.20: Compensatore a due gradi di libertà: andamento della posizione del carrello $x(t)$

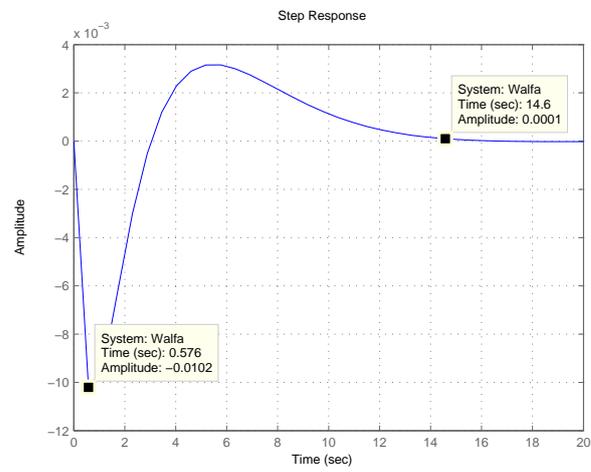


Figura 4.21: Compensatore a due gradi di libertà: andamento delle oscillazioni del pendolo $\alpha(t)$

Capitolo 5

Sistema non linearizzato

Finora abbiamo considerato solo il modello linearizzato del sistema meccanico e basandoci su tale modello abbiamo trovato dei compensatori adeguati.

In questo capitolo vogliamo invece analizzare come si comporta il sistema non linearizzato e verificare se i compensatori vanno bene anche in tal caso.

Riprendiamo dunque le equazioni ricavate precedentemente che descrivono il moto del sistema non linearizzato

$$(M + m) \ddot{x}(t) + lm [-\sin \alpha(t) \dot{\alpha}^2(t) + \cos \alpha(t) \ddot{\alpha}(t)] + \kappa \dot{x}(t) + \frac{\kappa ml}{M + m} \cos \alpha(t) \dot{\alpha}(t) = u(t) \quad (5.1)$$

$$ml \ddot{\alpha}(t) = -mg \sin \alpha(t) - m \ddot{x}(t) \cos \alpha(t) - \nu \dot{\alpha}(t)l \quad (5.2)$$

e le riscriviamo uguagliando rispetto a $\ddot{x}(t)$ e a $\ddot{\alpha}(t)$ rispettivamente:

$$\ddot{x}(t) = \frac{u(t) - lm [-\sin \alpha(t) \dot{\alpha}^2(t) + \cos \alpha(t) \ddot{\alpha}(t)]}{M + m} - \frac{\kappa \dot{x}(t) + \frac{\kappa ml}{M + m} \cos \alpha(t) \dot{\alpha}(t)}{M + m} \quad (5.3)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{-mg \sin \alpha(t) - m \ddot{x}(t) \cos \alpha(t) - \nu \dot{\alpha}(t)l}{ml} \quad (5.4)$$

Usando *Simulink* implementiamo lo schema (figura 5.1) che rappresenta il modello dato dalle equazioni (5.3) e (5.4).

Come sempre si preleva $x(t)$ dallo *Scope 1* e $\alpha(t)$ dallo *Scope 2*.

Per semplificare il grafico di figura 5.1 creiamo un sottosistema che lo contiene; saranno accessibili solo l'ingresso e le due uscite, come mostra la figura 5.2.

Su questo schema dovremo ora vedere se le due soluzioni proposte funzionano bene.

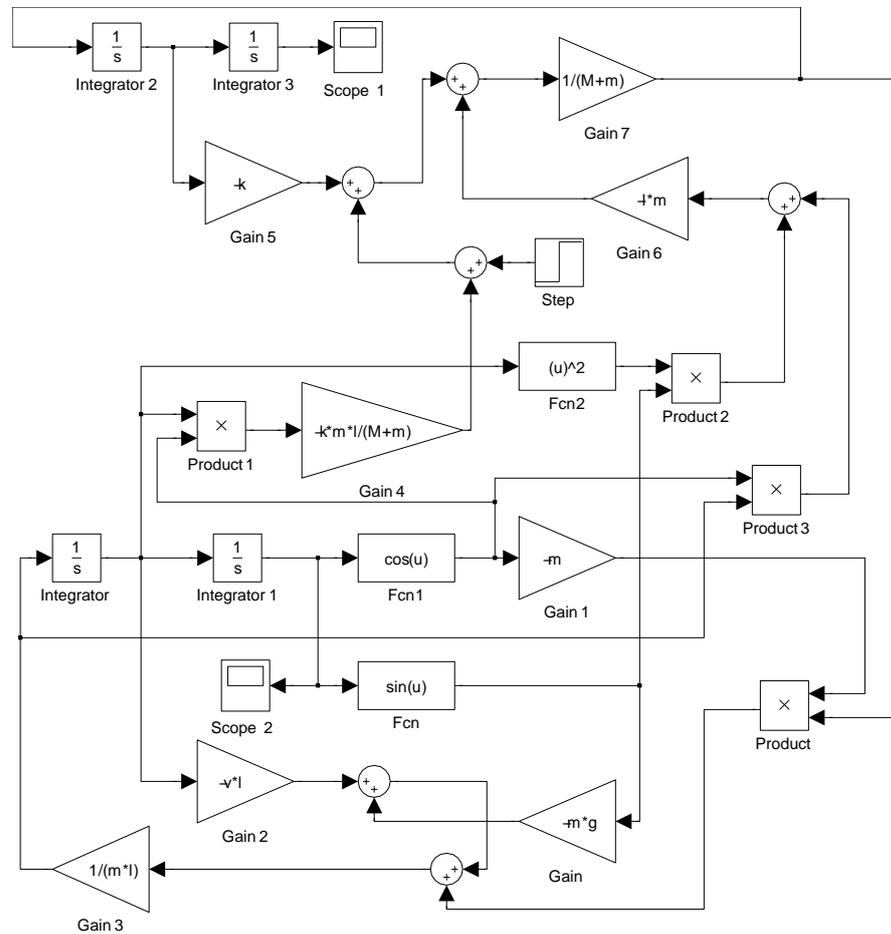
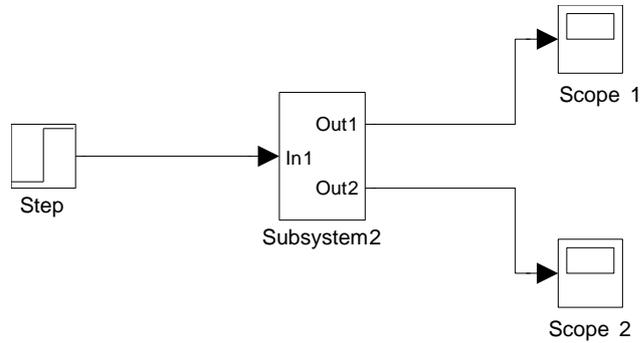
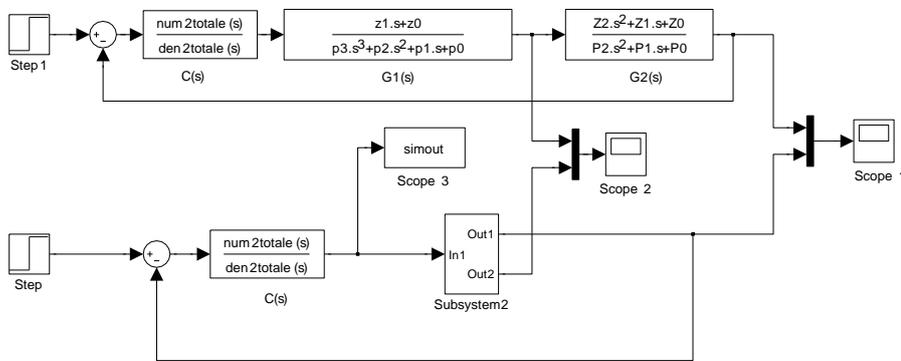


Figura 5.1: Schema in *Simulink*: sistema non linearizzato

5.1 Prima soluzione

Occupiamoci della prima soluzione proposta. Possiamo ora retroazionare il sistema e aggiungere il compensatore $C(s)$ progettato. La figura 5.3 mostra sia lo schema in retroazione del sistema linearizzato che quello non linearizzato. Lo *Scope 1* e lo *Scope 2* prelevano la sovrapposizione dei segnali dei diversi schemi. Osservando tali grafici possiamo vedere che sono praticamente IDENTICI e ciò ci suggerisce che la prima soluzione proposta funziona bene non solo sul sistema linearizzato, ma anche su quello non linearizzato.

Figura 5.2: Schema in *Simulink*: modello non linearizzatoFigura 5.3: Schema in *Simulink*: Schema linearizzato e non linearizzato a confronto

5.1.1 Andamento con angolazione iniziale del pendolo diversa da zero

Vogliamo ora vedere cosa succede se il pendolo ha un'angolazione iniziale

$$\alpha_{in} = \frac{1}{3}\pi$$

Le figure 5.4 e 5.5 mostrano gli andamenti di $x(t)$ e di $\alpha(t)$. Le oscillazioni del pendolo si smorzano all'1% in 20s. L'andamento di $x(t)$ presenta invece delle oscillazioni, che non si erano mai viste nel sistema con $\alpha_{in} = 0$. Inoltre il tempo di salita $t_r(10\%)$ è triplicato, essendo all'incirca di 30s.

Questi andamenti sono comunque accettabili, perché le condizioni di funzionamento sono diverse da quelle viste finora. Nella pratica non avremo mai un'angolazione iniziale di $\alpha_{in} = \frac{\pi}{3}$, ma gli andamenti relativi a tale condizione iniziale dimostrano che il controllo in retroazione sul sistema non lineare riesce ad adattarsi a situazioni critiche.

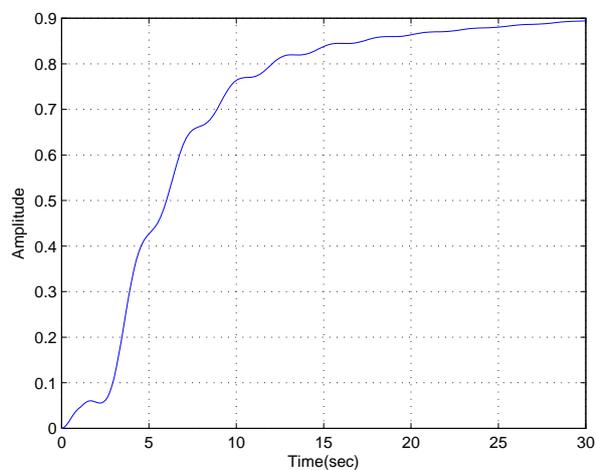


Figura 5.4: Andamento di $x(t)$ con condizione iniziale $\alpha_{in} = \frac{\pi}{3}$

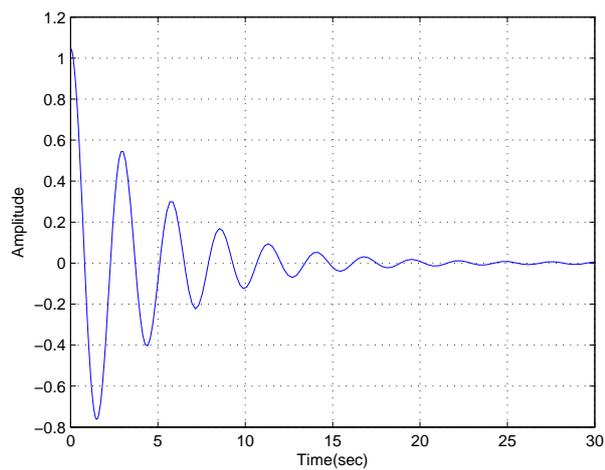


Figura 5.5: Andamento di $\alpha(t)$ con condizione iniziale $\alpha_{in} = \frac{\pi}{3}$

5.1.2 Ingresso del sistema

Vogliamo fare un ultimo accorgimento, che non altera l'esattezza della teoria finora discussa, ma potrebbe creare problemi nella pratica se decidessimo di implementare tale sistema.

Si tratta degli ingressi del sistema, cioè gli andamenti prelevati dal sistema retroazionato tra il compensatore e le funzioni di trasferimento proprie del sis-

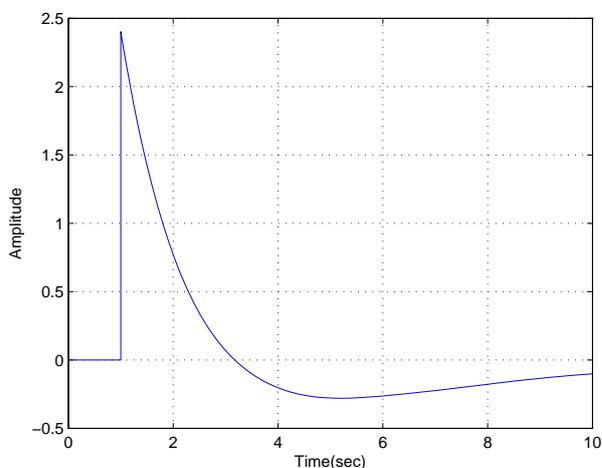


Figura 5.6: Ingresso del sistema

tema meccanico. In questo caso lo preleviamo dal sistema non linearizzato, e cioè mediante lo *Scope 3* di figura 5.3.

I problemi nascono se tali ingressi presentano componenti impulsive molto elevate (nel nostro caso elevato potrebbe significare di ampiezza superiore a 20). Il nostro ingresso invece (figura 5.6) non presenta tale andamento, essendo il suo massimo valore circa uguale a 2,5.

5.2 Seconda soluzione

Per calcolare i compensatori nella seconda soluzione proposta abbiamo modificato le funzioni di trasferimento (relative al sistema già linearizzato) proprie del sistema rendendole $G_{1,mod}(s)$ e $G_{2,mod}(s)$. Il problema é che non conosciamo il modello non linearizzato relativo a tali funzioni di trasferimento modificate; non possiamo quindi analizzare come si comporta il sistema non linearizzato.

5.2.1 Ingressi del sistema

Vediamo se anche gli ingressi del sistema relativi alla seconda soluzione sono accettabili. In questo caso dobbiamo prelevare due segnali per verificarne la correttezza, e cioè mediante lo *Scope 3* e *Scope 4* dello schema di figura 5.7.

L'ingresso relativo allo *Scope 4* (figura 5.8) non crea problemi; infatti l'ampiezza é dell'ordine di 10^{-3} . Invece l'ingresso prelevato dallo *Scope 3* (figura 5.9) ha un impulso iniziale di ampiezza 175 che potrebbe non andare bene.

Per modificare tale ingresso potremmo provare a rendere l'andamento del gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ applicato meno brusco; cioè fare in modo che abbia

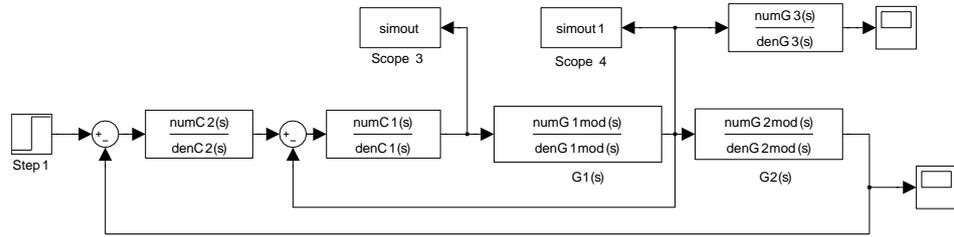


Figura 5.7: Schema in *Simulink*: prelevamento degli ingressi del sistema

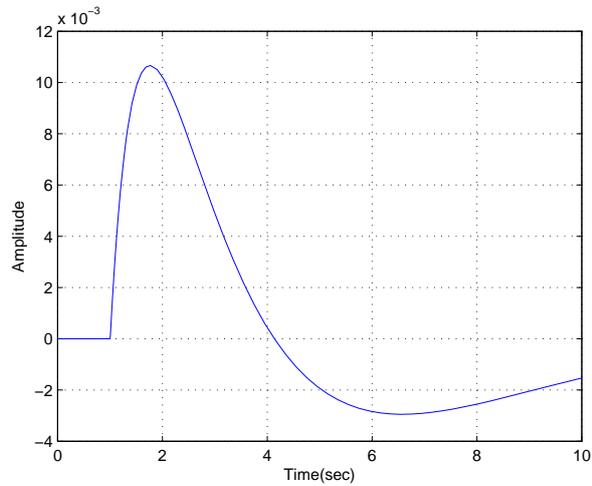


Figura 5.8: Ingresso del sistema prelevato allo *Scope 4*

una pendenza non infinita. Possiamo ottenere tale specifica filtrando il gradino unitario con la funzione di trasferimento

$$C_{\delta_{-1}(t)}(s) = \frac{1}{\frac{s}{2} + 1}$$

In tal modo riusciamo a togliere quasi completamente la componente impulsiva dell'ingresso prelevato allo *Scope 3* (si veda la figura 5.10) e adesso la massima ampiezza del segnale é di 1,5. Inoltre non abbiamo peggiorato gli andamenti di $x(t)$ e di $\alpha(t)$; li abbiamo solamente resi leggermente piú lenti.

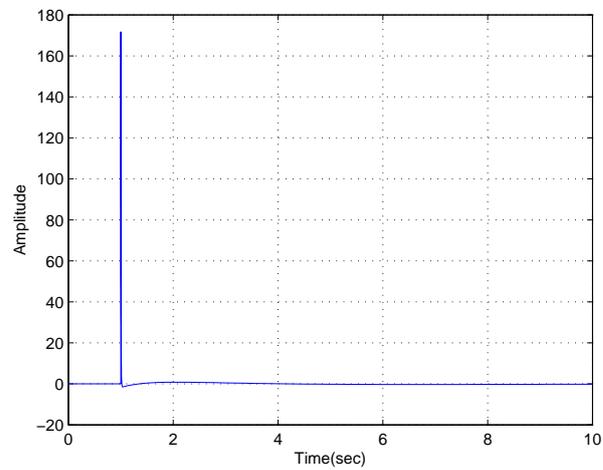


Figura 5.9: Ingresso del sistema prelevato allo *Scope 3*; andamento non soddisfacente

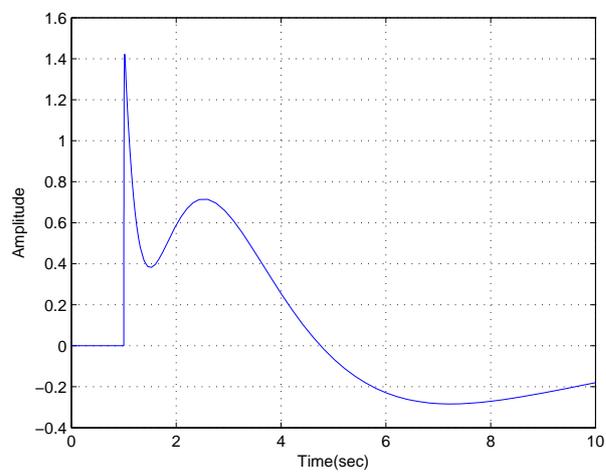


Figura 5.10: Andamento migliorato dell'ingresso prelevato allo *Scope 3*

Capitolo 6

Conclusioni

In questa parte conclusiva della tesi mettiamo a confronto le due soluzioni proposte per ottenere certe specifiche sul sistema carrello-pendolo.

Sicuramente, per quanto riguarda gli andamenti ottenuti, é preferibile la seconda soluzione: pur aumentando dell'1% la sovraelongazione di $x(t)$ possiamo osservare notevoli miglioramenti nell'andamento dell'oscillazione del pendolo $\alpha(t)$. Infatti, rispetto alla prima soluzione, l'ampiezza iniziale delle oscillazioni é dimezzata e inoltre, mentre la prima soluzione presenta un andamento con numerose oscillazioni, la seconda soluzione riesce a fare in modo che $\alpha(t)$ abbia un solo periodo di oscillazioni.

In quanto a complessitá e quindi per ciò che riguarda i costi di implementazione, é preferibile la prima soluzione, perché richiede meno collegamenti e meno compensatori.

C'è un altro piccolo problema legato alla seconda soluzione proposta: l'andamento di $\alpha(t)$ é descritto da

$$\alpha(t) = L^{-1} [A(s)]$$
$$A(s) = G_3(s) \frac{C_2(s)W_{1,mod}(s)}{1 + C_2(s)W_{1,mod}(s)G_{2,mod}(s)} U(s)$$

e quindi la funzione di trasferimento tra $A(s)$ e $U(s)$ é data dalla serie di una componente in catena aperta e una componente in catena chiusa. Sappiamo che la componente in catena chiusa é retroazionata e quindi é scarsamente sensibile ad eventuali disturbi (possibili ostacoli nel percorso). La parte in catena aperta, invece, applica una forza che é indipendente dall'uscita del sistema e quindi se dovesse esserci un'andamento imprevisto dovuto a fattori esterni, tale componente non puó tenerne conto e ciò puó dare luogo ad andamenti indesiderati.

Per quanto riguarda gli ingressi del sistema, che abbiamo trattato nel capitolo *Sistema non linearizzato*, abbiamo visto che la prima soluzione non crea problemi e invece la seconda soluzione presenta una componente impulsiva che dobbiamo ovviare con l'aiuto di un filtro, che aumenta ulteriormente la complessitá del sistema e rappresenta un costo aggiuntivo.

In conclusione si può dire che la seconda soluzione proposta é preferibile in quanto a prestazioni, ma se vogliamo limitare la complessità e i costi la soluzione migliore é la prima.

Appendice A

Codice sorgente in MATLAB

```
clc
clear all
close all

%definizione delle grandezze
M=10;
m=0.5;
l=2;
g=9.81;
v=0.2;%attrito viscoso
k=0.2;%attrito sulla strada

%modello linearizzato con attriti

%A(s)=G1(s)U(s) zeri e poli di G1(s)

z1=1
z0=0

p3=-(1*M)
p2=((k*m*l)/(M+m))-(k*l)-(v*l*(M+m)/m)
p1=-(v*l*k/m)-g*(M+m)
p0=-(g*k)

%X(s)=G1(s)G2(s)U(s) zeri e poli di G2(s)

Z2=-1
```

```
Z1=-(v*1/m)
Z0=-g

P2=1
P1=0
P0=0

G1=tf([z1 z0],[p3 p2 p1 p0])
G2=tf([Z2 Z1 Z0],[P2 P1 P0])
G1G2=G1*G2;
%%
%%Diagrammi di Bode di G1(s) e di G1(s)G2(s), zeri e poli

figure
step(G1);
grid on

figure
step(G1G2);
grid on

[num12,den12] = tfdata(G1G2,'v');
zeriopenloop=roots(num12);
poliopenloop=roots(den12);

[num1,den1] = tfdata(G1,'v');
zeriopenloop=roots(num1);
poliopenloop=roots(den1);

figure
zplane(num1,den1);

figure
zplane(num12,den12);

%%
%provo a usare una rete ritardatrice per ottenere un tempo di salita di
%circa 10s
figure
bode(G1G2);
grid on

figure
sist1=feedback(G1G2,1);
step(sist1);
grid on
```

```

figure
sist2=feedback(G1,G2);
step(sist2);
grid on
%%
%%Prima soluzione
compensatore2=tf([10^(1.64) 1],[10^(-5) 1]);
figure
bode(compensatore2*G1G2);
grid on

K2=0.055;
figure
bode(compensatore2*G1G2*K2);
grid on

figure
sist2=feedback(compensatore2*K2*G1G2,1);
step(sist2);
grid on

denC2=[10^(-5) 1];
numC2=K2*[10^(1.7) 1];

%%
%%Vediamo come si comporta il pendolo
figure
sist4=feedback(compensatore2*K2*G1,G2);
step(sist4);
grid on

%%
%%Proviamo a rendere le oscillazioni meno marcate.
figure
bode(compensatore2*G1G2*K2);
grid on

comp_pend=tf([1],[1 1]);

figure
bode(compensatore2*G1G2*K2*comp_pend);
grid on

figure
sist5=feedback(compensatore2*G1*K2*comp_pend,G2);

```

```

step(sist5);
grid on

figure
sist6=feedback(compensatore2*G1G2*K2*comp_pend,1);
step(sist6);
grid on
%%
%%funzione di trasferimento data dal prodotto di compensatore2, K2 e
%%comp_pend

compensatore2totale=compensatore2*K2*comp_pend;

[num2totale,den2totale] = tfdata(compensatore2totale,'v')
%%
%%ingresso del sistema
figure
step(feedback(compensatore2totale,G1G2));
grid on

%%
%%Seconda soluzione

%Calcolo del polo reale di G1(s);

poliG1=roots([p3 p2 p1 p0])

polo_reale=-0.019;
polo_cc1=-0.21+(2.2597*i);
polo_cc2=-0.21-(2.2597*i);

polo_reale_pol=[1 -polo_reale];
polo_cc1_pol=[1 -polo_cc1];
polo_cc2_pol=[1 -polo_cc2];

%Definizione di G1mod(s)
denG1mod=[1 (-polo_cc1-polo_cc2) polo_cc1*polo_cc2];

G1mod=tf([1],1*M*denG1mod);

G3=tf([-1 0],polo_reale_pol);

G1mod*G3;
G1;
%%
%%Progetto di C1

```

```

%Uso una rete anticipatrice con poloHF e tale che mphase>90
figure
bode(G1mod);
grid on

K1=10^(4)
figure
bode(G1mod*K1);
grid on
%zero in 10^(0.34), polo in HF

C1zp=tf([10^(-0.34) 1],[10^(-5) 1]);

C1=C1zp*K1;
%%
figure
bode(G1mod*C1);
grid on

W1=feedback(G1mod*C1,1);

figure
bode(W1);
grid on
%W1 ha un andamento perfetto

%%
G2mod1=G2*G3;

G2mod=tf([2 0.8 9.81],[1 0.019 0])

%%
%adesso lavoro solo su G2mod
%ha gi un integratore
figure
bode(G2mod);
grid on

%%
%Progetto di C2
%zero 1 dec prima, polo in 10^0
C2zp=tf([10^(1.64) 1],[10^(0) 1])
figure
bode(G2mod*C2zp);
grid on

```

```
%modulo =65.2
K2=1/(10^(65.2/20));

C2prov=K2*C2zp;
%%
figure
bode(G2mod*C2prov);
grid on
%%
%ora aggiungo anche W1

altropolo=tf([1],[10^(-0.2) 1])
C2=C2prov*altropolo;
serie=G2mod*C2*W1;

figure
bode(serie);
grid on

Wx=feedback(serie,1);

Wbeta=feedback(serie/G2mod,G2mod);
Walfa=Wbeta*G3;
figure
step(Wx);
grid on

figure
step(Walfa);
grid on

%%
%Definizioni dei numeratori e denominatori per Simulink
C1add=tf([1],[10^(-5) 1]);

[numC2,denC2]=tfdata(C2,'v');
[numC1,denC1]=tfdata(C1,'v');
[numG1mod,denG1mod]=tfdata(G1mod,'v');
[numG2mod,denG2mod]=tfdata(G2mod,'v');
[numG3,denG3]=tfdata(G3,'v');
[numC1add,denC1add]=tfdata(C1add,'v');
```

Ringraziamenti

Per concludere questo lavoro di tesi vorrei ringraziare tutti quelli che in un modo o nell'altro, anche inconsapevolmente, mi hanno sostenuta durante questo percorso.

In particolare ringrazio i miei genitori e famigliari, che, credendo nelle mie potenzialità, mi hanno sempre sostenuta sia psicologicamente che finanziariamente.

Inoltre vorrei porgere un particolare ringraziamento al mio relatore, il Prof. Mauro Bisiacco, che mi ha seguita passo dopo passo durante la stesura della tesi.

E per finire, un grazie di cuore a tutti i miei amici per aver reso speciale questa avventura a Padova.

Bibliografia

- [1] M. Bisiacco e M. E. Valcher, Controlli automatici, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2008.
- [2] P. Mazzoldi, M. Nigro e C. Voci, Fisica, Volume 1, EdiSES s.r.l., 1991.
- [3] MATLAB Documentation R2009a