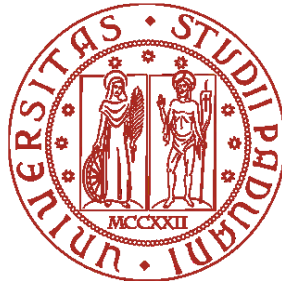


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Triennale in  
Statistica per l'Economia e l'Impresa



RELAZIONE FINALE

Previsione della volatilità dei rendimenti dei prezzi del petrolio e del gas naturale

Relatore Prof. Matteo Grigoletto

Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureanda: Laura Dante

Matricola 1217944

Anno Accademico 2022/2023



# Indice

<b>Introduzione</b> .....	5
<b>Capitolo 1 – Previsioni della volatilità dei rendimenti del petrolio e del gas naturale</b> .....	6
1.1 Petrolio e gas naturale: il mercato delle materie prime.....	6
1.1.1 Petrolio greggio e gas naturale.....	6
1.1.2 <i>Commodity</i> , mercati e metodi di investimento.....	7
1.1.3 Prezzi <i>spot</i> e <i>future</i> .....	8
1.2 Il problema nella previsione sulla volatilità dei rendimenti.....	9
1.3 La gestione dello shock nei prezzi.....	11
<b>Capitolo 2 - Modelli previsivi</b> .....	12
2.1 Modelli di tipo ARCH.....	12
2.1.1 Modello GARCH.....	14
2.2.2. Modello EGARCH.....	15
2.2 Modello GAS.....	17
<b>Capitolo 3 – Dati utilizzati e adattamento dei modelli</b> .....	19
3.1 Dati utilizzati.....	19
3.2 Adattamento <i>in-sample</i> .....	23

<b>Capitolo 4 – Confronto delle capacità previsive dei modelli</b> .....	27
4.1 Previsione della volatilità.....	27
4.2 Metriche utilizzate.....	28
4.2.1 Errore quadratico medio (RMSE).....	28
4.2.2 Winning ratio (WR).....	30
4.2.3 Test di Diebold-Mariano.....	33
4.2.4 Somma cumulata degli errori di previsione al quadrato (CSSFED).....	38
<b>Conclusioni</b> .....	45
<b>Bibliografia</b> .....	46

# Introduzione

Il presente elaborato tratta lo studio sulla previsione della volatilità dei rendimenti per i prezzi del petrolio greggio e del gas naturale. In termini finanziari, è definito rendimento il rapporto fra l'incremento di valore (fra l'inizio e la fine del periodo) dell'investimento e il suo valore iniziale.

In prima battuta si analizza il mercato delle materie prime, in particolare del petrolio greggio e del gas naturale, spiegando come questi vengono scambiati nei principali mercati finanziari, i metodi di investimento e la differenza tra prezzi *spot* e *future*; successivamente viene descritta la difficoltà da cui è caratterizzata questa previsione e la gestione dei relativi shock dei prezzi.

Nel secondo capitolo vengono invece analizzati i modelli che possono fornire una soluzione ai problemi presentati precedentemente: i modelli della famiglia ARCH, in particolare il modello GARCH e il modello EGARCH, e il modello GAS, fornendo per ognuno le principali caratteristiche che lo identificano.

Nel terzo capitolo vengono inizialmente analizzati i dati del campione preso in esame che comprende tre derivati del petrolio greggio, provenienti da due mercati in via di sviluppo: Russia e Cina - il maggior produttore di petrolio e il maggior importatore di petrolio al mondo; descrivendo in seguito l'applicazione dei modelli citati nel secondo capitolo.

Si noterà nel quarto capitolo come i risultati empirici ottenuti mostrino prestazioni di previsioni diverse a seconda dell'utilizzo del modello GARCH e del modello GAS per il petrolio greggio e il gas naturale su diversi orizzonti. Al contrario invece, non si notano differenze significative nella capacità di previsione tra mercati in via di sviluppo e mercati sviluppati. Sono stati utilizzati inoltre quattro diversi parametri di capacità predittiva, per giungere alla fine di questa relazione provando la superiorità del modello GAS, in particolare per i mercati del petrolio greggio su orizzonti a breve termine.

Nel quinto capitolo, infine, si riportano le conclusioni dell'analisi svolta in questa relazione.

# Capitolo 1

## Previsioni sulla volatilità dei rendimenti del petrolio e del gas naturale

### 1.1 Petrolio e gas naturale: il mercato delle materie prime

#### 1.1.1. Petrolio greggio e gas naturale

Il petrolio greggio e il gas naturale sono carburanti fossili di importanza primaria per l'uomo, derivanti dalla decomposizione di plancton, alghe e altri organismi del sottosuolo. In particolare, vengono definiti con il termine idrocarburi: sostanze formate da idrogeno e carbone. Gli idrocarburi assumono ad oggi una rilevante importanza nell'economia e nella geopolitica, grazie al loro ruolo principale di essere un'importante fonte di energia.

Si può definire il petrolio come la materia prima per eccellenza che l'uomo possiede; nell'industria petrolchimica produce per esempio fibre artificiali e materie plastiche, ed è inoltre essenziale per i sistemi di trasporto. La raffinazione del petrolio, inoltre, permette di ottenere carburanti come la benzina e il diesel, e combustibili da riscaldamento come il cherosene.

Il gas naturale è invece un carburante a combustione più pulita; consiste prevalentemente in metano e una miscela di altri idrocarburi. È essenziale per generare elettricità e in processi industriali, come la produzione di vetro, acciaio, plastiche, vernici, tessuti, ecc.

### 1.1.2 *Commodity*, mercati e metodi di investimento

Il petrolio greggio e il gas naturale sono materie prime che fanno parte del mercato delle *commodity*: insieme di materie prime che possono essere acquistate sul mercato indipendentemente da chi le produce. Ci sono diversi tipi di *commodity*, raggruppate in diversi settori: metalli preziosi, metalli industriali, prodotti agricoli e settore energetico, dove in quest'ultimo vengono inseriti anche il petrolio greggio e il gas naturale.

A livello finanziario, queste materie prime influenzano l'economia sia dei Paesi importatori sia dei Paesi esportatori. I mercati principali in cui si negoziano *commodity* sono distribuiti in tutto il mondo, i più importanti si trovano in:

- Nord America, dove è presente il Chicago Mercantile Exchange (CME) in cui sono scambiati *future* su indici, valute, tassi d'interesse e *commodity*, fino ai derivati su indicatori economici; il New York Mercantile Exchange (NYMEX) nel quale vengono negoziati il WTI Crude Oil, il gas naturale, il propano, la benzina, ecc; il Commodity Exchange (COMEX) dove vengono scambiati metalli industriali e preziosi; il Chicago Board of Trade (CBOT) in cui sono negoziati il mais, l'avena, il riso, ecc; e il Toronto Stock Exchange (TSX), principale borsa valori del Canada, nel quale sono negoziati prevalentemente titoli minerari ed energetici.
- Asia, in cui invece si trova il Dalian Commodity Exchange (DCE), la seconda borsa al mondo per lo scambio di *future* nel settore agricolo; il Multi Commodity Exchange (MCX), in cui vengono scambiati sia il petrolio sia il gas naturale.
- Europa, in cui è presente l'Intercontinental Exchange (ICE), mercato di caffè, zucchero, ecc; il London Metal Exchange (LME) dove sono negoziati il rame, il piombo, lo zinco, ecc; l'European Energy Exchange (EEX), borsa merci regolamentata che possiede e gestisce diversi mercati per lo scambio di energia elettrica in Europa, Asia e Stati Uniti; e l'Euronext.liffe, dove sono negoziati i *future* e le opzioni dell'Euronext.

L'importanza delle *commodity* in continua crescita nel mercato finanziario ha portato infatti allo sviluppo di diversi mezzi di investimento diretto o indiretto nelle materie prime.

I principali metodi di investimenti sono:

- L'acquisto diretto del bene: questa modalità è quella utilizzata di meno a causa della deteriorabilità dei beni e in quanto gli investitori finanziari difficilmente sono in possesso di idonee strutture di immagazzinamento necessarie talvolta per lo stoccaggio dei beni.
- L'acquisto di azioni di società che producono beni reali, tenendo però in considerazione l'esposizione al rischio del mercato di quella determinata commodity.
- L'acquisto di un portafoglio di azioni di società che lavorano nel mercato delle materie prime, servendosi di investitori specializzati nel mercato (es: *commodity trading advisors*).
- Negoziazioni *future* sui beni. Modalità utilizzata maggiormente dagli investitori finanziari in quanto possono tutelarsi dalle incertezze sulle quote in borsa: due controparti firmano un contratto, detto *future*, per lo scambio di un bene ad una scadenza decisa concordata da entrambi precedentemente.

### 1.1.3 Prezzi *spot* e *future*

In questa relazione verranno confrontati i rendimenti di prezzi *spot* e *future*. La differenza tra questi due tipi di prezzi risulta essere la seguente: i prezzi *spot* sono ottenuti dalla vendita istantanea del bene fungibile ad una certa data. I *future* invece sono asset finanziari e il prezzo del bene che viene venduto o comprato sarà un prezzo futuro, stabilito però a priori. Man mano che si avvicina la consegna, ovvero la scadenza del titolo, il prezzo *future* della *commodity* converge al prezzo *spot*. Sinteticamente, si può affermare che il prezzo *spot* ha pagamento e consegna immediati di un certo bene, mentre prezzi *future* sono offerte di transazioni finanziarie che avverranno in una data futura: il prezzo *spot* prevede il pagamento e la consegna “sul posto” mentre il prezzo dei *future* blocca in anticipo il costo di una merce.

Il meccanismo di arbitraggio, ovvero operazioni che prevedono l'acquisizione di un bene o di un'attività finanziaria su un mercato per poi rivenderlo in un altro, tende a far convergere il



prezzo del contratto *future* con il prezzo *spot* man mano che il mese di scadenza del contratto *future* si avvicina. Se il prezzo *future* diventa maggiore di quello *spot*, gli arbitraggisti possono vendere il contratto *future*, acquistare il bene sul mercato *spot* e consegnarlo al possessore del *future*; al contrario, se il prezzo *future* è minore di quello *spot*, gli arbitraggisti possono comprare il contratto *future*, farsi consegnare il bene e venderlo al prezzo *spot*.

La differenza tra i due prezzi definisce inoltre la pendenza della curva dei prezzi *future*. La curva delle *commodity* può avere una pendenza sia positiva sia negativa a seconda della domanda e offerta. Una pendenza crescente significa che gli investitori pagheranno più per il *future* che per il bene. Se il prezzo *spot* rimane inalterato fino alla scadenza del contratto *future*, l'investitore avrà perso un rendimento proporzionale alla pendenza iniziale della curva del *future*. A seconda del movimento della domanda e dell'offerta del mercato si possono generare quindi guadagni e perdite derivate dall'evoluzione dei prezzi *future*.

## **1.2 Il problema nella previsione sulla volatilità dei rendimenti**

Il mercato delle *commodity* a livello globale è caratterizzato da un'elevata volatilità dei prezzi. Tra queste, infatti, anche i prezzi del petrolio greggio e del gas naturale sono estremamente volatili ed è di interesse in questa relazione confrontare le diverse capacità previsive sulla volatilità dei rendimenti dei prezzi *spot* e *future* del petrolio greggio e del gas naturale utilizzando diversi tipi di modelli.

Si può notare come i prezzi di questi combustibili siano molto volatili, in particolare, il petrolio greggio ha subito negli anni forti oscillazioni: è salito notevolmente durante la finanziarizzazione del mercato delle materie prime nel 2000, e successivamente sceso durante e dopo la crisi finanziaria del 2008. È possibile ricordare come il prezzo del petrolio aveva registrato un'impennata dai 70 dollari al barile del dicembre 2007 ai 142 dollari al barile dell'estate 2008, per poi calare entro la fine dell'anno a quota 33 dollari. Inoltre, la volatilità dei rendimenti, misurata dalla varianza, del petrolio greggio West Texas Intermediate (WTI) nel 2010 era di 3,75

dollari, nel 2020 invece saliva a 82,86 dollari a causa della guerra dei prezzi del petrolio iniziata il 9 Marzo 2020 in Arabia Saudita.

Le fluttuazioni per i prezzi *spot* e *future* del petrolio greggio possono considerarsi simili nei diversi mercati. Il gas naturale invece, mostra fluttuazioni diverse in mercati diversi. Per esempio, la volatilità del rendimento del prezzo *spot* per il gas naturale di New York (NY) supera i 141,69 dollari nel 2020, è invece inferiore di 12 dollari per il prezzo *spot* della Borsa Internazionale del Petrolio (IPE) di Londra.

Un altro motivo per cui è difficile prevedere la volatilità dei rendimenti dei prezzi del petrolio greggio e del gas naturale è dovuto alla profonda finanziarizzazione dei mercati degli stessi che fa aumentare la partecipazione delle istituzioni finanziarie e i loro comportamenti speculativi rafforzano l'incertezza dell'offerta e della domanda (Ma et al., 2020). Da notare infatti, che fino a qualche anno fa, nel mercato del gas naturale, le dinamiche di mercato e il prezzo che emergeva tra lo scambio reale fra domanda e offerta delle *commodity* erano la base su cui si fondavano le aspettative sui prodotti derivati (*future*) che alimentavano la speculazione. Oggi invece avviene il contrario: le aspettative sulla dinamica futura dei prezzi rappresentate dal valore dei *future* sul gas determinano il prezzo dello scambio di mercato.

Per prevedere la volatilità di questi rendimenti di prezzi uno dei modelli più classici utilizzati è il modello GARCH (*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*; Bollerslev, 1968), derivante dalla famiglia di modelli ARCH. Successivamente, come si può leggere nella pubblicazione dei ricercatori Arouri (2012) e Wei (2010) il modello è stato analizzato più approfonditamente per descrivere in maniera più accurata il clustering della volatilità, l'asimmetria e le distribuzioni a coda pesante delle attività finanziarie. Quest'ultime infatti, in particolare, la memoria lunga, il clustering della volatilità e la persistenza della volatilità variabile nel tempo degli asset del petrolio greggio, sono state confermate dagli studi sui prezzi *spot* del Brent, Dubai e WTI di Herrera (2018), Kang (2009) e Zhang (2019) e sui contratti *future* scambiati sul New York Mercantile Exchange (NYMEX) tra cui petrolio greggio WTI, gasolio da riscaldamento e la benzina senza piombo di Kang e Yoon (2013).

### 1.3 La gestione dello shock nei prezzi

Un problema da tenere in considerazione per ottenere accurate previsioni sulla volatilità dei rendimenti dei prezzi del petrolio greggio e del gas naturale è la gestione dello shock dei prezzi. Gli shock drastici sono comuni e significativi non solo per il petrolio e il gas naturale, ma anche per l'intero settore del mercato energetico, in particolare nell'anno 2020. Durante questo periodo, c'è stata una vera e propria guerra di prezzi, iniziata il 9 Marzo 2020 in Arabia Saudita. Ma non solo, il mercato del petrolio greggio è stato soggetto a conflitti geopolitici (l'invasione del Kuwait da parte dell'Iraq e l'operazione Desert Fox, campagna di bombardamenti condotta dagli Stati Uniti in Iraq), a shock finanziari, come la crisi finanziaria del 2008, e a shock dell'offerta, come le riduzioni della produzione OPEC e la guerra del prezzo del petrolio in Arabia Saudita.

I modelli più comuni utilizzati per le previsioni sono i modelli della famiglia ARCH, in particolare il modello GARCH e il modello EGARCH. Tuttavia, per la gestione dello shock dei prezzi, Creal (2013) propose un nuovo modello denominato GAS (*Generalized Autoregressive Score*) che include il modello GARCH ma tiene conto della presenza di *outlier* (Harvey & Sucarrat, 2014) e dalla sua struttura dovrebbe generare prestazioni migliori nelle previsioni *out-of-sample* rispetto al modello GARCH. Quest'ultimo mostra una performance buona per quanto riguarda la stima della volatilità dei rendimenti degli asset finanziari, questo viene però a meno quando il modello viene utilizzato per produrre previsioni *out-of-sample* (Agnolucci, 2009).

# Capitolo 2

## Modelli per la previsione dei rendimenti

Per la previsione dei rendimenti dei prezzi del petrolio greggio e del gas naturale vengono utilizzati in questa relazione tre modelli, come spiegato nel primo capitolo. I primi due sono modelli comuni e ampiamente conosciuti, appartenenti ai modelli della famiglia ARCH: il modello GARCH e il modello EGARCH. Il terzo invece è meno noto, si tratta del modello GAS, definito da Creal (2013).

### 2.1 Modelli di tipo ARCH

Le serie storiche, in particolare quelle finanziarie, mostrano spesso legami non lineari tra loro, creando di conseguenza problemi nell'analisi delle stesse poiché i modelli conosciuti non comprendevano questa problematica. Si è notato in questo tipo di analisi di dati che errori, grandi o piccoli, sembrano ricorrere e che la varianza del termine di disturbo dipende da questi, generando quindi una forma di eteroschedasticità.

I primi studi di Mandelbrot (1963) e Fama (1965) mostrano inoltre che le serie storiche dei rendimenti sono caratterizzate da “*volatility clustering*”: si nota infatti un'alternanza di periodi con ampie oscillazioni intorno al valore medio e periodi invece con piccole oscillazioni. Per volatilità si intende la variabilità di una variabile calcolata in un preciso intervallo di tempo, è possibile quindi definirla come l'espressione osservabile dell'incertezza dei mercati finanziari, ovvero come concetto di varianza condizionale. Si può definire quindi una serie storica ad “eteroschedasticità condizionata” quando la varianza è correlata serialmente.

Per spiegare questo fenomeno di volatilità variabile, si è giunti alla definizione del primo modello di tipo ARCH, acronimo di *Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*, ovvero modelli Auto-Regressivi a Eteroschedasticità condizionata, presentati per la prima volta da Robert Franklin Engle (1982). Da questo modello ne nascono poi altri collegati ad esso, in grado di spiegare le diverse caratteristiche riferite al fenomeno della volatilità variabile.

Definito il set informativo  $I_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}\}$ , il termine di disturbo di un modello di regressione lineare seguirà un processo di tipo ARCH se:

- La media di  $\varepsilon_t$  condizionata a  $I_{t-1}$  è nulla per ogni  $t$ .

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t | I_{t-1}) = 0 \tag{1}$$

- La componente innovazione  $\varepsilon_t$  è definita come segue:

$$\varepsilon_t = u_t \sigma_t \tag{2}$$

dove  $u_t \sim i.i.d. (0,1)$  è detto processo standardizzato.

La (2) definisce l'equazione dell'innovazione valida per qualsiasi modello di tipo ARCH.

Il modello ARCH definisce la varianza condizionale con la seguente espressione:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 \tag{3}$$

dove  $\alpha > 0, \beta_i \geq 0$  per  $i = 1, 2, \dots, q$ .

Si può riscrivere il modello anche nel modo seguente:

$$\sigma_t^2 = \alpha + A(L)\varepsilon_t^2 \tag{4}$$

dove  $A(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q$  è il polinomio dell'operatore ritardo.

La serie dei rendimenti del modello ARCH viene invece spiegata come segue:

$$R_t = \mu + \varepsilon_t \tag{5}$$

dove  $\mu$  rappresenta la media condizionale e  $\varepsilon_t$  l'errore al tempo  $t$ .

### 2.1.1 Modello GARCH

Dai modelli ARCH deriva il modello GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*), elaborato da Bollerslev (1986).

Un modello generico GARCH (p,q) definisce la varianza condizionale in questo modo:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \gamma_j \sigma_{t-j}^2 \quad (6)$$

dove  $\alpha > 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ , per  $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $\gamma_j \geq 0$ , per  $j = 1, 2, \dots, p$ . La varianza condizionale dipende da  $(1+p+q)$  parametri, dove p si riferisce all'ordine del ritardo della parte autoregressiva rappresentata dai valori della varianza condizionale stessa nel passato, mentre q mostra il numero dei ritardi della componente  $\varepsilon_t^2$ .

Utilizzando l'operatore ritardo, possiamo riscrivere il modello in questo modo:

$$\sigma_t^2 = \alpha + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)\sigma_t^2 \quad (7)$$

Il processo GARCH (p,q) è stazionario in covarianza quando le radici del polinomio  $1 - A(L) - B(L)$  cadono al di fuori del cerchio unitario.

Il vantaggio del modello GARCH è che riesce ad approssimare modelli ARCH di ordine maggiore con l'aiuto di un numero di parametri inferiore.

Il modello convenzionale GARCH(1,1) descrive in questo modo la serie di rendimenti  $R_t$ :

$$R_t = \mu + \varepsilon_t = \mu + \sigma_t u_t \quad (8)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2 \quad (9)$$

dove  $\mu$  denota la media condizionale,  $\sigma_t$  è la volatilità misurata dalla varianza condizionale standard, e  $\varepsilon_t$  indica l'innovazione.  $u_t$  si ipotizza che segua una distribuzione gaussiana o una

distribuzione a code pesanti come la distribuzione  $t$  di Student. I coefficienti sconosciuti di  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , sono positivi e soddisfano  $\beta + \gamma \leq 1$ . La somma di  $\beta$  e  $\gamma$  riflette la persistenza degli shock alla varianza condizionale.

Il modello GARCH(1,1) risulta essere un modello di riferimento che spesso sovraperforma modelli GARCH più complicati, per approfondimenti si vedano Agnolucci (2009) e Cheong (2009).

### 2.1.2 Modello EGARCH

Black (1976) notò che i movimenti dei rendimenti e quelli della volatilità sono negativamente correlati: da questa osservazione nacquero poi i modelli con asimmetria. In seguito a uno shock positivo sui rendimenti, la volatilità registra valori meno elevati rispetto a shock negativi della stessa ampiezza. Possiamo quindi affermare che nei periodi in cui il livello dei rendimenti è minore di quello atteso la volatilità tende a crescere; tende invece a diminuire nei periodi dove accade il contrario. Queste volatilità asimmetriche sono comunemente riscontrate per gli asset azionari e per i prodotti energetici.

Si può quindi utilizzare per le previsioni prese in esame il modello EGARCH, ovvero il modello GARCH esponenziale, elaborato da Nelson (1991). Il processo EGARCH (p,q) è definito dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= e^{\frac{1}{2}\log(\sigma_t^2)} u_t \\ \log(\sigma_t^2) &= \delta + \sum_{i=1}^q \alpha_j g(u_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \vartheta_j \log(\sigma_{t-i}^2) \\ g(u_{t-i}) &= \varphi u_{t-i} + \eta(|u_{t-i}| - \mathbb{E}(|u_{t-i}|)), \end{aligned} \tag{10}$$

dove  $\mathbb{E}(g(u_{t-i})) = 0$ ;  $\eta$  misura l'effetto simmetrico dello shock sulla volatilità ed è tipicamente positivo;  $\varphi$  misura l'effetto con segno (asimmetrico) della volatilità.

Per esempio, il processo EGARCH(1,1) nel caso condizionatamente Gaussiano è specificato dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, \sigma^2) \\ \log(\sigma_t^2) &= \delta^* + \vartheta \log(\sigma_{t-1}^2) + \zeta \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \kappa \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \end{aligned} \quad (11)$$

dove  $\delta^* = \delta - \zeta \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ,  $\zeta = \alpha\eta$ ,  $\vartheta$ ,  $\kappa = \alpha\varphi$  sono parametri da stimare del modello e non sono soggetti ad alcuna restrizione.

L'effetto asimmetrico viene evidenziato dal termine  $\kappa \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ , dove  $\varepsilon_{t-1}$  compare con segno.

Inoltre, tale effetto è proporzionale all'entità dell'innovazione.

In generale l'impatto è asimmetrico se  $\kappa \neq 0$ .

Data la specificazione logaritmica, l'effetto leverage è esponenziale. L'effetto leverage si collega agli studi di Black (1976) e prevede che shock positivi possano contribuire ad una contrazione del rischio, mentre shock negativi comportano un incremento del rischio. Concetto spesso confuso con l'asimmetria, la quale invece prevede sempre un incremento di rischio, minore per shock positivi.

L'espressione per la varianza condizionata quindi diventa:

$$\sigma_t^2 = \delta^{**} (\sigma_{t-1}^2)^\vartheta \exp \left\{ \frac{\zeta |\varepsilon_{t-1}| + \kappa \varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right\}, \quad (12)$$

dove  $\delta^{**} = \exp(\delta^*)$ .

Se  $\varepsilon_{t-1} > 0$  allora il numeratore diventa  $(\zeta + \kappa)\varepsilon_{t-1}$  mentre se  $\varepsilon_{t-1} < 0$  si ha  $(\kappa - \zeta)\varepsilon_{t-1}$  quindi se  $\kappa \neq 0$  si ha l'asimmetria, ma se  $\kappa < 0 \cup \kappa < \zeta < -\kappa$  si ha l'effetto leverage poiché  $(\zeta + \kappa)$  e  $(\kappa - \zeta)$  sono entrambi negativi, quindi: shock positivi riducono il rischio e shock negativi lo incrementano.



## 2.2 Modello GAS

Creal (2013) propose un nuovo modello utile a generare previsioni migliori rispetto ai modelli della famiglia ARCH: il modello GAS (*Generalized Autoregressive Score*).

Sia il vettore  $y_t$   $N \times 1$ , noto a indicare la variabile dipendente di interesse,  $f_t$  il vettore dei parametri variabili nel tempo,  $x_t$  un vettore di variabili esogene (covariate), tutte al tempo  $t$ , e  $\theta$  un vettore di parametri statici. Definiamo  $Y^t = \{y_1, \dots, y_t\}$ ,  $F^t = \{f_0, f_1, \dots, f_t\}$ , e  $X^t = \{x_1, \dots, x_t\}$ . L'insieme delle informazioni disponibili al tempo  $t$  è costituito da  $\{f_t, \mathcal{F}_t\}$ , dove

$$\mathcal{F}_t = \{Y^{t-1}, F^{t-1}, X^t\}, \text{ per } t = 1, \dots, n \quad (13)$$

Si assume che  $y_t$  sia generato dalla seguente densità:

$$y_t \sim p(y_t | f_t, \mathcal{F}_t; \theta) \quad (14)$$

Inoltre, il meccanismo di aggiornamento del parametro variabile nel tempo  $f_t$  è determinato dall'equazione di aggiornamento autoregressiva, definita in questo modo:

$$f_{t+1} = \omega + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j+1} \quad (15)$$

dove  $\omega$  è un vettore di costanti, le matrici dei coefficienti  $A_i$  e  $B_j$  hanno dimensioni appropriate per  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, q$ , mentre  $s_t$  è una funzione appropriata dei dati passati,  $s_t = s(t, f_t, F_t; \theta)$ . I coefficienti incogniti sono funzioni di  $\theta$ ; cioè  $\omega = \omega(\theta)$ ,  $A_i = A_i(\theta)$ , e  $B_j = B_j(\theta)$  per  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, q$ .

Quando viene realizzata un'osservazione  $y_t$ , si aggiorna il parametro  $f_t$  variabile nel tempo al periodo successivo  $t + 1$  utilizzando la (15) con

$$\begin{aligned}
 s_t &= S_t \nabla_t, \\
 \nabla_t &= \frac{\partial \ln p(y_t | f_t, F_t; \theta)}{\partial f_t}, \\
 S_t &= S(t, f_t, F_t; \theta)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

dove  $S(\cdot)$  è una funzione matriciale.

Considerando  $\varepsilon_t = \sigma_t u_t$  dove  $u_t \sim N(0,1)$ , e  $\sigma_t$  è una deviazione standard variabile nel tempo, si può mostrare che il modello standard GAS(1,1) con  $S_t = J_{t|t-1}^{-1}$ , dove  $J_{t|t-1} = E_{t-1}[\nabla_t \nabla_t']$ , e  $f_t = \sigma_t^2$ , si riduce a :

$$f_{t+1} = \omega + A_1(\varepsilon_t^2 - f_t) + B_1 f_t
 \tag{17}$$

che è equivalente al modello standard GARCH(1,1) dato da:

$$f_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 f_t
 \tag{18}$$

dove  $f_t = \sigma_t^2$ , i coefficienti  $\alpha_0 = \omega$ ,  $\alpha_1 = A_1$  e  $\beta_1 = B_1 - A_1$  sono sconosciuti e richiedono determinate condizioni di stazionarietà (Bollerslev, 1986).

Per stimare il modello GAS (1,1) è appropriato l'utilizzo del metodo della massima verosimiglianza (per maggiori dettagli si veda l'articolo di Creal (2013))

# Capitolo 3

## Dati utilizzati e adattamento dei modelli

### 3.1 Dati utilizzati

Nella presente relazione viene utilizzato un insieme di dati relativo ai prezzi di chiusura giornalieri del petrolio greggio e del gas naturale. Per prezzo di chiusura giornaliero si intende il prezzo di un bene sul mercato alla fine della giornata di negoziazione. In totale, il campione in esame comprende dieci serie di rendimenti di prezzi *spot* e *future* relativi al petrolio greggio e al gas naturale, provenienti da mercati diversi, scaricati dal database WIND. Per il petrolio greggio sono stati considerati i mercati relativi ai rendimenti dei prezzi *spot* WTI e Brent per i mercati sviluppati e Daqing (il più grande giacimento petrolifero della Cina) per i mercati in via di sviluppo. Per i rendimenti dei prezzi *future* è stato considerato WTI per i mercati sviluppati e IPE Brent e MICEX Brent Russia per i mercati in via di sviluppo. Per quanto riguarda il gas naturale, invece, sono stati considerati i mercati relativi ai rendimenti dei prezzi *future* del NYMEX e IPE, e *spot* del NY e AECO Canada.

Il periodo di campionamento per le dieci serie di rendimenti va dal 23 Novembre 2009 all'11 Agosto 2009 comprendendo tutti i dati disponibili. Il rendimento al tempo  $t$  è calcolato come segue:

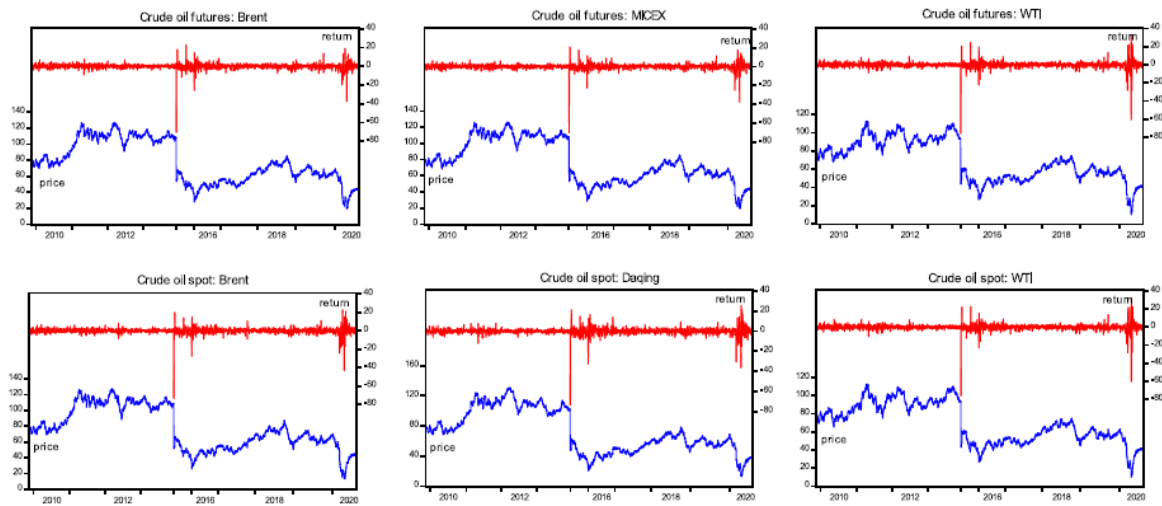
$$100 * \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \tag{19}$$

dove  $P_t$  rappresenta il prezzo di chiusura giornaliero.

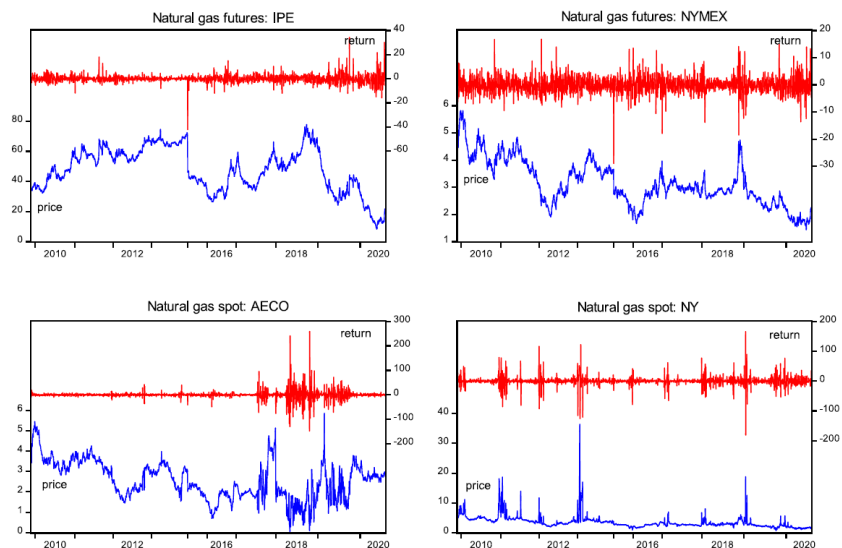
Nella *Figura A1* si possono osservare i rendimenti e i prezzi giornalieri *spot* e *future* del petrolio greggio nei diversi mercati: Brent, MICEX, WTI per i prezzi *future* e Brent, Daqing e WTI per i prezzi *spot*. Si notano tendenze simili nei diversi mercati: per esempio, un forte calo nel biennio 2014-2015 seguito da un lieve aumento e un altro abbassamento all'inizio del 2020, seguito però

da una ripresa già nell'Aprile dello stesso anno. Per quanto riguarda invece il confronto tra i mercati sviluppati e mercati in via di sviluppo, si nota invece come non sussistano differenze tra quest'ultimi.

Osservando invece la *Figura A2*, che mostra i rendimenti e i prezzi giornalieri *spot* e *future* del gas naturale, si può notare come questi prezzi siano meno strettamente correlati rispetto a quelli del petrolio greggio della *Figura A1*. Inoltre, durante il 2010 fino a metà del 2012 i prezzi dell'IPE aumentano, invece per NYMEX, AECO e NY mostrano una tendenza a diminuire; mentre all'inizio del 2014, i prezzi *spot* e *future* presentano forti aumenti e diminuzioni rispettivamente. Tuttavia, i prezzi *spot* tendono ad oscillare più dei *future*.



*Figura A1: Rendimenti e prezzi giornalieri spot e future del petrolio greggio*



**Figura A2:** Rendimenti e prezzi giornalieri spot e future del gas naturale

La *Tabella 1* rappresenta le statistiche descrittive e i risultati dei test statistici per le dieci serie di rendimenti giornalieri. Analizzando la tabella si può osservare che la media e la mediana di tutti i mercati sono prossime allo 0; i valori massimi e minimi sono molto più ampi per i rendimenti *spot* del gas naturale; la curtosi, ovvero quanto la distribuzione si allontana da una curva normale standardizzata, è molto più grande per i rendimenti *spot* e *future* del petrolio greggio rispetto a quelli del gas naturale e sempre il petrolio greggio ha valori più alti dell'indice di asimmetria; le deviazioni standard dei rendimenti *spot* del gas naturale sono maggiori di quelle dei *future* e di quelle del petrolio greggio. Si può dedurre quindi che i rendimenti *spot* del gas naturale sono più oscillanti di quelli del petrolio greggio. La maggior parte dei rendimenti presenta un'asimmetria negativa, implicando quindi distribuzioni con code più piene rispetto alla distribuzione normale, presenti però due eccezioni: i rendimenti *future* IPE e *spot* AECO.

Dalla *Tabella 1*, inoltre, si possono osservare i risultati del test di Jarque-Bera che rifiutano la normalità delle serie dei rendimenti. Quest'ultimo è un test statistico volto a verificare l'ipotesi di normalità, basato sulla misura dell'asimmetria e della curtosi di una distribuzione, verificando simultaneamente se questi due indici sono coerenti con i valori che dovrebbero assumere sotto l'ipotesi nulla di normalità, ossia 0 l'indice di asimmetria e 3 l'indice di curtosi. Sotto l'ipotesi nulla  $H_0$  il test si distribuisce come una Chi-Quadro con due gradi di libertà.

Il secondo test presente invece, il test Dickey-Fuller (ADF), permette di sapere se c'è una presenza significativa di trend nelle serie temporali delle variabili mediante un test di ipotesi. In questo caso i risultati del test mostrano che tutte le serie sono stazionarie.

Infine, si può notare sempre dalla *Tabella 1* che non vi sono differenze tra mercati in via di sviluppo e mercati sviluppati per quanto riguarda il petrolio greggio.

	Crude oil						Natural gas			
	Futures			Spot			Futures		Spot	
	Brent	MICEX	WTI	Brent	Daqing	WTI	IPE	NYMEX	AECCO	NY
Mean	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.03	-0.04	-0.02	-0.04
Median	0.12	0.10	0.10	0.09	0.06	0.13	-0.06	-0.14	0.00	0.00
Min.	-70.41	-70.01	-75.47	-73.33	-73.52	-76.06	-42.29	-28.90	-148.16	-181.16
Max.	22.73	20.70	31.96	22.95	25.53	31.96	34.27	16.82	259.53	165.80
Kurtosis	157.33	170.43	131.91	132.15	119.23	133.66	30.24	10.71	61.55	31.90
Skewness	-6.92	-7.50	-5.96	-6.20	-5.68	-6.08	0.26	-0.12	2.58	-0.53
Std. dev.	3.11	3.03	3.76	3.43	3.52	3.76	3.30	3.13	17.33	15.95
J-B	1,913,837 (0.00)	2,252,480 (0.00)	133,599 (0.00)	1,341,771 (0.00)	1,087,076 (0.00)	1,372,655 (0.00)	59,175 (0.00)	4,746 (0.00)	275,387 (0.00)	66,679 (0.00)
ADF	-43.60 (0.00)	-41.13 (0.00)	-21.18 (0.00)	-19.07 (0.00)	-19.13 (0.00)	-21.22 (0.00)	-43.33 (0.00)	-46.01 (0.00)	-32.79 (0.00)	-19.01 (0.00)
Obs.	1913	1913	1913	1913	1913	1913	1913	1913	1913	1913

*Tabella 1: Analisi descrittiva e preliminare dei dati per i rendimenti giornalieri del petrolio greggio e del gas naturale*

*NOTA: Max. e Min. denotano il massimo e il minimo delle osservazioni; J-B si riferisce al test Jarque-Bera per la verifica dell'ipotesi di normalità; il test ADF saggia l'ipotesi nulla di radice unitaria; Std. dev, è la deviazione standard; Obs. rappresenta il numero di osservazioni.*

### 3.2 Adattamento *in-sample*

Il campione preso in esame si può suddividere in due periodi: il periodo *in-sample* dal 24 Novembre 2009 al 31 Maggio 2018, e il periodo *out-of-sample* dall'1 Giugno 2018 all'11 Agosto 2020. Il periodo *out-of-sample* comprende 500 osservazioni, ovvero circa un quarto dell'intero campione. Come si è potuto osservare dalla *Tabella 1*, *Figura A1* e *Figura A2* è necessario stimare un modello che tenga conto della volatilità dei rendimenti del petrolio greggio e del gas naturale, per cui vengono stimati i modelli GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GAS(1,1) con un'innovazione  $t$  di Student per i rendimenti giornalieri a causa delle distribuzioni non normali delle serie temporali. In primo luogo, vengono adattati i dati *in-sample* con modelli specifici, e successivamente viene utilizzato un approccio *rolling-window* per generare le previsioni *out-of-sample*. Nelle *Tabella 2*, *Tabella 3* e *Tabella 4* si possono osservare gli adattamenti dei modelli GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GAS(1,1) per i dati *in-sample*.

Per i modelli GARCH, modello definito dall'equazione (9), osservando la *Tabella 2* si nota che la stima delle medie condizionate  $\mu$  è statisticamente significativa per i tre *future* del petrolio greggio (Brent, MICEX e WTI), non lo è invece per il petrolio greggio *spot* e per i prodotti del gas naturale. Le stime di  $\beta$  e  $\gamma$  sono significative e questo supporta la volatilità variabile nel tempo dei mercati del petrolio greggio e del gas naturale. I vincoli parametrici di  $\beta + \gamma \leq 1$ , inoltre, sono soddisfatti per tutte le serie di rendimenti. Infine, i valori della log-verosimiglianza (LL) sono più alti nei rendimenti *future* e *spot* del petrolio greggio e questo fa intendere che quest'ultimi sono meglio catturati, dal modello GARCH, in confronto ai rispettivi asset del gas naturale.

Nella *Tabella 3* si possono osservare invece i risultati dell'adattamento del modello EGARCH, definito dall'equazione (11). Così come per il modello GARCH, le medie condizionate sono significative solo per il petrolio greggio *future* e considerando i valori della log-verosimiglianza più elevati per il petrolio si può affermare che i rendimenti di quest'ultimo, come nel caso precedente, sono meglio spiegati rispetto quelli del gas naturale. Gli effetti ARCH ( $\vartheta$ ) e GARCH ( $\kappa$ ) sono significativi per le dieci serie di rendimenti. Invece, osservando il parametro  $\zeta$ , che esprime l'asimmetria della volatilità, si può notare che petrolio e gas naturale rispondono in modo diverso agli shock positivi e negativi, e che per i *future* NYMEX del gas naturale l'asimmetria della volatilità non esiste.

Per i modelli GAS è stato utilizzato nella *Tabella 4* un modello GAS(1,1) definito dalla seguente equazione:

$$f_{t+1} = \lambda + \xi s_t + \varpi f_t \quad (20)$$

dove  $f_{t+1} = \log(\sigma_t^2)$ .  $\lambda$ ,  $\xi$ ,  $\varpi$  sono equivalenti rispettivamente a  $\omega$ ,  $A_i$ ,  $B_j$  definiti nell'equazione (15).  $s_t$  definito invece nell'equazione (16). Osservando la *Tabella 4*, anche in questo caso, le medie condizionate sono statisticamente significative per tutti i *future* del petrolio greggio e per il WTI *spot*, mentre non lo sono per i restanti prodotti *spot* del petrolio greggio e per i prodotti del gas naturale. Le stime di  $\lambda$  sono positive e statisticamente significative al 10% per tutte le serie, ad eccezione dei rendimenti *future* del petrolio greggio Brent e *spot* Daqing. Così come anche sono significative le stime di  $\xi$  e  $\varpi$ . Un alto valore di  $\varpi$  rappresenta un'alta persistenza della volatilità, ed essendo  $\varpi$  un valore molto alto sia per i rendimenti di petrolio che di gas naturale si può affermare che le volatilità di tutti i rendimenti sono altamente persistenti. I valori della log-verosimiglianza sono maggiori rispetto a quelli dei modelli GARCH ed EGARCH per le serie di rendimenti *future* del petrolio greggio MICEX e per due *future* del gas naturale, si può quindi affermare che il modello GAS si comporta meglio nel catturare i momenti *in-sample* dei rendimenti di questi asset energetici, non si può però affermare lo stesso per i restanti.



GARCH	Crude oil						Natural gas			
	Futures			Spot			Futures		Spot	
	Brent	MICEX	WTI	Brent	Daqing	WTI	IPE	NYMEX	AECO	NY
$\mu$	0.097 (0.041)	0.083 (0.040)	0.082 (0.045)	0.047 (0.043)	0.059 (0.040)	0.081 (0.045)	-0.015 (0.042)	-0.077 (0.066)	-0.131 (0.081)	-0.096 (0.102)
$\alpha$	0.018 (0.005)	0.017 (0.005)	0.163 (0.039)	0.014 (0.005)	0.015 (0.005)	0.021 (0.006)	0.147 (0.046)	0.228 (0.110)	3.235 (0.694)	7.524 (1.472)
$\beta$	0.987 (0.002)	0.989 (0.002)	0.902 (0.016)	0.990 (0.002)	0.988 (0.002)	0.988 (0.002)	0.862 (0.020)	0.934 (0.022)	0.613 (0.037)	0.513 (0.033)
$\gamma$	0.004 (0.001)	0.003 (0.001)	0.060 (0.014)	0.003 (0.001)	0.006 (0.001)	0.005 (0.001)	0.137 (0.026)	0.038 (0.012)	0.387 (0.073)	0.487 (0.086)
$\nu$	4.030 (0.295)	4.323 (0.314)	4.462 (0.309)	4.027 (0.283)	3.524 (0.256)	4.305 (0.309)	3.523 (0.298)	5.307 (0.560)	3.128 (0.272)	2.833 (0.197)
LL	-2863.23	-2820.07	-2990.09	-2910.63	-2924.27	-2989.80	-3015.44	-3444.60	-4113.76	-4630.07

**Tabella 2:** Risultati delle stime del modello GARCH(1,1)

**NOTA:** Questa tabella riporta le stime dei rendimenti giornalieri spot e future per il petrolio greggio e il gas naturale del modello GARCH(1,1). Standard errors in parentesi tonde. LL denota il valore della log-verosimiglianza, e  $\nu$  è il numero di gradi di libertà per una distribuzione *t* di Student.

EGARCH	Crude oil						Natural gas			
	Futures			Spot			Futures		Spot	
	Brent	MICEX	WTI	Brent	Daqing	WTI	IPE	NYMEX	AECO	NY
$\mu$	0.093 (0.041)	0.083 (0.041)	0.077 (0.045)	0.043 (0.043)	0.049 (0.041)	0.075 (0.045)	0.003 (0.042)	-0.057 (0.067)	-0.177 (0.080)	-0.054 (0.097)
$\delta$	0.003 (0.003)	0.005 (0.003)	0.004 (0.003)	0.004 (0.003)	0.002 (0.002)	0.003 (0.003)	0.0114 (0.007)	0.044 (0.026)	0.223 (0.042)	0.574 (0.125)
$\kappa$	0.996 (0.002)	0.994 (0.002)	0.995 (0.002)	0.996 (0.002)	0.997 (0.001)	0.996 (0.002)	0.9917 (0.004)	0.978 (0.012)	0.933 (0.011)	0.886 (0.015)
$\theta$	0.031 (0.008)	0.033 (0.009)	0.026 (0.009)	0.027 (0.008)	0.030 (0.008)	0.022 (0.008)	0.1075 (0.016)	0.107 (0.029)	0.454 (0.051)	0.994 (0.345)
$\zeta$	-0.020 (0.008)	-0.015 (0.008)	-0.029 (0.009)	-0.019 (0.008)	-0.025 (0.007)	-0.031 (0.008)	0.0458 (0.013)	0.005 (0.017)	-0.108 (0.032)	0.178 (0.084)
$\nu$	4.108 (0.300)	4.464 (0.319)	4.546 (0.334)	4.100 (0.289)	3.629 (0.266)	4.531 (0.332)	3.5554 (0.291)	5.501 (0.594)	3.015 (0.251)	2.217 (0.170)
LL	-2856.82	-2811.88	-2971.75	-2904.21	-2919.35	-2979.28	-2989.66	-3438.79	-4113.98	-4610.93

**Tabella 3:** Risultati delle stime del modello EGARCH(1,1)

**NOTA:** Questa tabella riporta le stime dei rendimenti giornalieri spot e future per il petrolio greggio e il gas naturale del modello EGARCH(1,1). Standard errors in parentesi tonde. LL denota il valore della log-verosimiglianza, e  $\nu$  è il numero di gradi di libertà per una distribuzione *t* di Student.

GAS(1,1)	Crude oil						Natural gas			
	Futures			Spot			Futures		Spot	
	Brent	MICEX	WTI	Brent	Daqing	WTI	IPE	NYMEX	AECO	NY
$\mu$	0.102 (0.042)	0.093 (0.041)	0.088 (0.047)	0.062 (0.043)	0.066 (0.041)	0.090 (0.048)	0.014 (0.039)	0.055 (0.066)	0.123 (0.087)	0.117 (0.099)
$\lambda$	0.017 (0.011)	0.015 (0.008)	0.021 (0.013)	0.018 (0.009)	0.021 (0.014)	0.019 (0.010)	0.027 (0.014)	0.045 (0.020)	0.146 (0.045)	0.397 (0.107)
$\xi$	0.095 (0.026)	0.085 (0.015)	0.099 (0.027)	0.091 (0.018)	0.128 (0.032)	0.093 (0.021)	0.144 (0.028)	0.078 (0.014)	0.319 (0.043)	0.467 (0.055)
$\varpi$	0.987 (0.007)	0.988 (0.005)	0.986 (0.008)	0.988 (0.006)	0.986 (0.009)	0.987 (0.006)	0.983 (0.008)	0.979 (0.010)	0.959 (0.013)	0.925 (0.019)
$\nu$	4.209 (0.693)	4.313 (0.748)	4.994 (1.139)	4.146 (0.690)	3.804 (0.559)	4.571 (0.830)	3.516 (0.367)	5.578 (0.890)	2.865 (0.310)	2.199 (0.178)
LL	-2861.08	-2810.17	-2977.50	-2906.63	-2923.41	-2984.26	-2975.42	-3437.63	-4122.95	-4630.47

**Tabella 4:** Risultati delle stime del modello GAS(1,1)

**NOTA:** Questa tabella riporta le stime dei rendimenti giornalieri spot e future per il petrolio greggio e il gas naturale del modello GAS(1,1). Standard errors in parentesi tonde. LL denota il valore della log-verosimiglianza, e  $\nu$  è il numero di gradi di libertà per una distribuzione  $t$  di Student.

# Capitolo 4

## Confronto delle capacità previsionive dei modelli

### 4.1 Previsione della volatilità

I modelli GARCH, EGARCH e GAS, descritti nel Capitolo 3, sono stati utilizzati per fare previsioni sulla volatilità *out-of-sample* del campione in esame. Nel seguente capitolo è quindi d'interesse mostrare un confronto fra le diverse capacità previsionive dei modelli citati, definendo infine il modello che ha migliore capacità previsioniva. Si valuta l'accuratezza delle previsioni ad 1 passo, 5 passi, 20 passi e 60 passi in avanti utilizzando un sistema *rolling-window* con finestra di dimensioni fisse, che corrispondono alle frequenze di 1 giorno, 1 settimana, 1 mese e 1 trimestre rispettivamente.

Il metodo *rolling-window* prevede l'utilizzo di "finestre scorrevoli": avendo, per esempio, una serie storica di dati settimanali e prendendo in analisi  $n$  periodi, si ha un punto di partenza ed un punto di arrivo, da cui si può ricavare il rendimento: si hanno quindi  $n$  rendimenti settimanali. Se si sposta l'analisi in avanti di una settimana, si ha un nuovo punto di partenza diverso dal primo e un nuovo punto di arrivo, quindi una nuova performance, ovvero una nuova volatilità. È stato utilizzato questo metodo perché mostra una migliore robustezza in presenza di parametri variabili nel tempo rispetto ad uno ricorsivo, il quale aggiunge nuove osservazioni nel campione senza eliminare quelle vecchie (Herrera et al., 2018).

Sono state considerate 500 previsioni di volatilità *out-of-sample*, che corrispondono al periodo che inizia l'1 Giugno 2018 e termina l'11 Agosto 2020. Per esempio, prendendo le previsioni a 60 passi, vengono realizzate le prime 60 previsioni per il periodo che va dal 27 Febbraio 2018 all'1 Giugno 2018, utilizzando i dati dal 24 novembre 2009 al 26 febbraio 2018. Successivamente, si registra la volatilità all'1 Giugno 2018 come prima previsione *out-of-sample* e vengono aggiornati i dati per coprire il periodo del 25 Novembre 2009 al 27 Febbraio 2018, e in seguito generate le seconde 60 previsioni per il periodo dal 28 Febbraio 2018 al 4 Giugno 2018. Allo stesso modo, si registra la previsione del 4 Giugno 2018 come seconda previsione

*out-of-sample*. Dopo 499 aggiornamenti, si dispone di 500 previsioni che coprono l'intero periodo *out-of-sample*.

## 4.2 Metriche utilizzate

Per calcolare la previsione della volatilità *out-of-sample* e per valutare le loro prestazioni sono state utilizzate quattro metriche:

- Errore quadratico medio di previsione *out-of-sample* (RMSE)
- Winning ratio (WR)
- Test di Diebold-Mariano in versione multivariata
- Somma cumulativa della differenza quadratica degli errori di previsione (CSSFED)

Segue la spiegazione di tali metriche di confronto.

### 4.2.1 Errore quadratico medio (RMSE)

Assumendo  $t_0$  il punto iniziale del periodo *out-of-sample*, la devianza campionaria della volatilità giornaliera è rappresentata dal quadrato dei rendimenti (Chun et al. 2019). L'RMSE, ovvero l'errore quadratico medio di previsione *out-of-sample*, è calcolato come segue:

$$RMSE = \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n (V_t - \hat{V}_t)^2 \right]^{1/2} \quad (21)$$

dove  $n$  rappresenta il numero di osservazioni del campione in esame e  $V_t$  e  $\hat{V}_t$  rappresentano rispettivamente la volatilità realizzata e prevista.

L'RMSE (*Root Mean Squared Error*) è una misura di errore assoluta in cui, per evitare che valori positivi e negativi possano annullarsi, le deviazioni vengono elevate al quadrato. Esso indica la differenza quadratica media fra i valori osservati e i valori previsti, è inoltre più sensibile ai valori anomali rispetto ad altre metriche di accuratezza. Per quanto riguarda la sua interpretazione, è necessario osservare il valore che lo identifica: un valore inferiore (rispetto ad altri) indica un modello più preciso.

Nella *Tabella 5* si possono osservare gli RMSE rispettivamente dei modelli GARCH, EGARCH e GAS. Dall'osservazione di questa tabella si può notare che i modelli GAS, per la previsione a 1 passo in avanti, superano i modelli della famiglia ARCH poiché gli RMSE del modello GAS sono minori per tutte le sei serie di rendimenti del petrolio greggio, per i rendimenti relativi ai prezzi *future* del gas naturale IPE e *spot* di NY. Per i *future* NYMEX e *spot* AECO del gas naturale si può osservare invece il miglior risultato (RMSE minore) per il modello EGARCH. Osservando invece le previsioni a 5 passi in avanti, per tutte le dieci serie di rendimenti si osserva la performance migliore del modello GAS avendo in tutti i casi l'RSME più basso. Per le previsioni a 20 passi in avanti, come quelle ad 1 passo, solo in due casi non prevale il modello GAS: per i *future* NYMEX del gas naturale dove è migliore il modello GARCH, e per il gas naturale *spot* NY dove invece ha RMSE più basso il modello EGARCH. Tuttavia, per le previsioni a 60 passi in avanti, sembra essere migliore il modello EGARCH per le 10 serie di rendimenti, avendo RMSE minori per sei serie su dieci.

In generale, si può affermare che il modello GARCH in nessun caso genera una performance migliore rispetto ai modelli EGARCH e GAS; inoltre, il modello GAS sembra generare performance migliore dei modelli della famiglia ARCH a orizzonti di previsione più bassi.

Un'altra osservazione che si può notare dalla *Tabella 5*, confrontando l'RMSE complessivo, è che quest'ultimo tende ad assumere valori più alti con il crescere dell'orizzonte previsivo. Per cui, l'accuratezza della previsione diminuisce con l'aumentare dell'orizzonte previsivo (Herrera et al., 2018).

Osservando invece la *Tabella 5* dal punto di vista del confronto tra gas naturale e petrolio greggio, quest'ultimo, insieme al *future* IPE del gas naturale, sembra essere meglio previsto dal modello GAS (soprattutto a orizzonti di 1, 5, e 20 passi), a differenza invece dei rendimenti rimanenti in cui i modelli di tipo ARCH generano performance migliori. A seconda dell'orizzonte di previsione e del mercato varia se risulta essere migliore il modello GARCH o EGARCH.

Si può quindi affermare infine che la funzione di perdita dell'RMSE non determina in modo assoluto una performance migliore se viene adottato il modello GAS, ma mostra un'evidenza a favore di quest'ultimo nella previsione del mercato del petrolio greggio.

K and model		Crude oil						Natural gas			
		Futures			Spot			Futures		Spot	
		Brent	MICEX	WTI	Brent	Daqing	WTI	IPE	NYMEX	AECO	NY
1	GAS	<b>68.161</b>	<b>70.109</b>	<b>176.035</b>	<b>93.974</b>	<b>83.136</b>	<b>176.232</b>	<b>76.297</b>	30.041	3340.078	<b>2010.734</b>
	GARCH	69.945	72.398	180.883	100.159	87.766	181.073	78.305	30.013	3455.738	2022.716
	EGARCH	69.307	71.624	179.858	98.492	86.370	180.040	76.610	<b>30.001</b>	<b>3076.793</b>	148159.074
5	GAS	<b>68.399</b>	<b>70.716</b>	<b>178.102</b>	<b>95.816</b>	<b>86.601</b>	<b>178.282</b>	<b>75.978</b>	<b>30.265</b>	<b>3441.086</b>	<b>2045.554</b>
	GARCH	70.605	72.961	182.733	101.350	90.129	182.741	78.684	31.201	3494.716	2094.458
	EGARCH	70.439	73.141	183.042	101.615	90.206	183.032	78.725	31.227	3494.608	2057.603
20	GAS	<b>69.635</b>	<b>72.261</b>	<b>181.947</b>	<b>100.737</b>	<b>89.593</b>	<b>182.016</b>	<b>76.405</b>	31.213	<b>3484.451</b>	2058.092
	GARCH	70.528	72.950	182.716	101.345	89.888	182.745	78.462	<b>31.149</b>	3494.131	2086.116
	EGARCH	70.755	73.095	183.003	101.572	89.900	183.000	78.939	32.074	3494.649	<b>2040.735</b>
60	GAS	70.710	<b>73.049</b>	183.013	101.637	90.004	183.027	<b>78.828</b>	32.210	3496.783	2058.444
	GARCH	72.209	74.093	183.692	102.763	90.094	183.532	79.002	<b>31.036</b>	<b>3494.052</b>	2131.361
	EGARCH	<b>70.708</b>	73.055	<b>182.965</b>	<b>101.523</b>	<b>89.817</b>	<b>182.958</b>	79.184	31.041	3494.656	<b>2037.493</b>

**Tabella 5:** Errori di previsione out-of-sample misurati dall'RMSE

**NOTA:** L'orizzonte di previsione è  $k$  giorni. I numeri in grassetto indicano che il modello corrispondente è il migliore modello di previsione tra gli altri.

#### 4.2.2 Winning ratio (WR)

Il WR (Winning Ratio) rappresenta un'altra misura per determinare l'accuratezza delle previsioni realizzate da un determinato modello. Il WR di previsione determina infatti il numero di casi in cui l'errore assoluto di previsione di un modello risulta essere minore di quello degli altri modelli, diviso per il numero di previsioni totali. Come l'RMSE, penalizza la distanza tra le volatilità previste e quelle osservate: può essere considerato come una funzione di penalizzazione costante, poiché i casi che hanno un errore di previsione minore rispetto agli altri modelli sono trattati allo stesso modo, indipendentemente dalla distanza tra le volatilità stimate e osservate.

In questo caso, a differenza dell'RMSE dove un valore minore determinava il modello migliore, avviene il contrario: un WR maggiore, rispetto ad altri modelli associati, determina il modello che genera una performance migliore.

Nella *Tabella 6* si possono osservare i risultati del WR relativi al caso in esame. Per le previsioni ad 1 passo in avanti il modello GARCH assume valori maggiori per tutti i prodotti del petrolio e per uno del gas naturale. Per i rendimenti *future* IPE e *spot* AECO del gas naturale invece assume valori più alti il modello EGARCH. A differenza, il modello GAS vede la sua predominanza solo per i *future* NYMEX del gas naturale. Tuttavia, confrontando tali risultati con quelli della *Tabella 5*, per le previsioni ad 1 passo in avanti, il modello GARCH genera *outlier* troppo grandi nella previsione delle volatilità, per cui non si può affermare sia molto efficace, come invece sembra essere dalla *Tabella 6*.

Per le previsioni ad orizzonti maggiori, a 5, 20 e 60 passi in avanti, ad eccezione solo del rendimento *spot* AECO del gas naturale a 60 passi in avanti, nel quale risulta migliore il modello GARCH, e del *future* IPE del gas naturale a 20 passi in avanti, nel quale invece risulta migliore il modello EGARCH, si osserva la completa predominanza del modello GAS per tutte le serie di rendimenti. Ciò dimostra che il modello GAS è più efficace degli altri due nelle previsioni a orizzonti maggiori; mentre per le previsioni a 1 passo in avanti si comporta meglio il modello GARCH. Osservando, per esempio, le previsioni a 60 passi in avanti, il modello GAS produce previsioni accurate per almeno il 35% dei 500 casi *out-of-sample*, collocandosi in un intervallo di 35%-65% per tutte le serie di rendimenti.

Considerando invece le differenze tra i rendimenti di petrolio greggio e gas naturale, si nota la totale predominanza del modello GARCH per l'orizzonte a 1 passo in avanti e del modello GAS per i restanti tre orizzonti per il petrolio greggio e per il rendimento *spot* NY del gas naturale. Mentre, per i rendimenti dei *future* NYMEX, il modello GAS supera i modelli di tipo GARCH per tutti gli orizzonti. Per le altre due serie di rendimenti, i *future* IPE e gli *spot* AECO, nessun modello mostra un vantaggio definitivo rispetto agli altri. Per cui, si può affermare che i modelli di tipo GARCH sono adeguati per la previsione dei rendimenti del gas naturale sull'orizzonte a 1 passo in avanti. Il modello GAS mostra invece un vantaggio nella previsione della volatilità dei rendimenti del gas naturale a orizzonti maggiori, i quali rappresentano mercati estremamente

fluttuanti. Il modello GAS, infatti, protegge la robustezza in presenza di *outlier* (Harvey & Sucarrat, 2014).

Inoltre, come nel caso del RMSE, non vi sono differenze significative tra mercati in via di sviluppo e mercati sviluppati.

Infine, i risultati della *Tabella 6* dimostrano che il modello GAS genera performance migliori per la volatilità dei rendimenti per i prezzi del petrolio greggio e del gas naturale rispetto ai modelli di tipo GARCH per le previsioni a 5, 20 e 60 passi in avanti.

<i>k</i> and model		Crude oil						Natural gas			
		Futures			Spot			Futures		Spot	
		Brent	MICEX	WTI	Brent	Daqing	WTI	IPE	NYMEX	AECO	NY
1	GAS	0.386	0.342	0.374	0.372	0.332	0.364	0.298	<b>0.466</b>	0.268	0.314
	GARCH	<b>0.468</b>	<b>0.558</b>	<b>0.428</b>	<b>0.494</b>	<b>0.500</b>	<b>0.412</b>	0.278	0.296	0.310	<b>0.502</b>
	EGARCH	0.146	0.100	0.198	0.134	0.168	0.224	<b>0.424</b>	0.238	<b>0.422</b>	0.184
5	GAS	<b>0.516</b>	<b>0.462</b>	<b>0.510</b>	<b>0.502</b>	<b>0.674</b>	<b>0.536</b>	<b>0.420</b>	<b>0.616</b>	<b>0.532</b>	<b>0.584</b>
	GARCH	0.160	0.186	0.170	0.164	0.168	0.180	0.260	0.170	0.206	0.170
	EGARCH	0.324	0.352	0.320	0.334	0.158	0.284	0.320	0.214	0.262	0.246
20	GAS	<b>0.584</b>	<b>0.466</b>	<b>0.558</b>	<b>0.488</b>	<b>0.506</b>	<b>0.586</b>	0.374	<b>0.378</b>	<b>0.648</b>	<b>0.578</b>
	GARCH	0.174	0.216	0.196	0.202	0.198	0.206	0.218	0.256	0.142	0.190
	EGARCH	0.242	0.318	0.246	0.310	0.296	0.208	<b>0.408</b>	0.366	0.210	0.232
60	GAS	<b>0.638</b>	<b>0.478</b>	<b>0.608</b>	<b>0.524</b>	<b>0.504</b>	<b>0.602</b>	<b>0.426</b>	<b>0.642</b>	0.352	<b>0.594</b>
	GARCH	0.214	0.256	0.242	0.268	0.258	0.252	0.292	0.196	<b>0.578</b>	0.102
	EGARCH	0.148	0.266	0.150	0.208	0.238	0.146	0.282	0.162	0.070	0.304

*Tabella 6: WR (Winning Ratio) di previsione out-of-sample*

*NOTA: L'orizzonte di previsione è k giorni. I numeri in grassetto indicano che il modello corrispondente è il migliore modello di previsione tra gli altri.*



### 4.2.3 Test di Diebold-Mariano

Il test DM (Diebold-Mariano) è un test statistico che viene utilizzato per determinare quale tra due modelli meglio riesce a prevedere il fenomeno in esame. Esso si basa sul calcolo della differenza tra le funzioni di perdita calcolate per le due previsioni: queste sono ugualmente accurate se il valore atteso di questa differenza è nullo.

Definendo:

- $y_t$  una serie storica
- $f_{1t}$  e  $f_{2t}$  due serie storiche che corrispondono a due differenti previsioni ottenute da due diversi modelli
- $e_{it} = f_{it} - y_t$  l'errore di previsione con  $i = 1,2$ .
- $L(e_{it})$  la funzione di perdita
- $d_t = L(e_{1t}) - L(e_{2t}) = L(f_{1t} - y_t) - L(f_{2t} - y_t)$  la differenza tra le due funzioni di perdita

Le ipotesi risultano essere:

$$\begin{cases} H_0: E(d_t) = 0 & f_{1t} \text{ e } f_{2t} \text{ hanno la stessa accuratezza previsiva} \\ H_1: E(d_t) \neq 0 & \text{una previsione tra } f_{1t} \text{ e } f_{2t} \text{ è pi\`u accurata} \end{cases} \quad (22)$$

Il test è costruito sfruttando il Teorema del Limite Centrale, considerando quindi la distribuzione limite:

$$\sqrt{h}(\bar{d} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \hat{\omega}_m(d_t)), \quad (23)$$

dove:

- $\bar{d} = \frac{1}{h} \sum_{t=1}^h d_t$  è la media campionaria della differenza  $d_t$
- $h = T - T_0$  è il numero dei passi in avanti considerati nell'effettuare le previsioni
- $\hat{\omega}_m(d_t)$  è la varianza di lungo periodo di  $d_t$
- $\mu = E(d_t)$

La statistica test risulta:

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{\widehat{\omega}_m(d_t)}{h}}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

(24)

Poiché il test DM è un test a due code, si rifiuta  $H_0$  quando risulta

$$|DM| > z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oppure} \quad p - \text{value} = 2 \Pr(Z > DM) < \alpha$$

(25)

dove  $Z \sim N(0,1)$  e  $\alpha$  è il livello di significatività del test.

Nel caso in esame, tenendo presente dalle *Tabella 5* e *Tabella 6* che i diversi modelli mostrano capacità previsive diverse, si utilizza il test DM per valutare se la differenza osservata è statisticamente significativa.

Nella *Tabella 7* si possono osservare i modelli in esame, GARCH, EGARCH e GAS, i quali sono stati classificati, in base all'RMSE: con il numero 1 i modelli con l'RMSE più basso, sono stati poi accoppiati due modelli ed è stato implementato il test DM a una coda. Conseguono tre possibili risultati: l'identificazione del modello migliore, l'identificazione dei modelli ottimali e subottimali e l'equivalenza della capacità predittiva tra i tre modelli.

Per le previsioni a 1 passo in avanti il modello GAS presenta la migliore capacità predittiva per otto serie su dieci. In particolare, per i rendimenti *spot* Brent e WTI e per i tre *future* del petrolio greggio, per le coppie GAS-GARCH e GAS-EGARCH, l'ipotesi nulla del test DM viene rifiutata contemporaneamente con l'ipotesi alternativa: il primo modello (GAS) produce previsioni più accurate del secondo per i cinque asset sopra citati. La coppia EGARCH-GARCH accetta anche l'ipotesi alternativa, per cui le previsioni EGARCH sono più accurate di quelle GARCH, classificandosi così come modello subottimale. Per il petrolio greggio *spot* Daqing, il *future* IPE del gas naturale, e il NY *spot* del gas naturale, nonostante il modello GAS abbia un RMSE minore rispetto al modello GARCH, risulta avere una capacità predittiva indistinguibile

con il secondo modello. Per i rendimenti *future* NYMEX e *spot* AECO del gas naturale invece i tre modelli hanno capacità predittive equivalenti. In conclusione, si può affermare che il modello GAS ha una capacità previsiva migliore rispetto agli altri due modelli in esame ad un orizzonte di 1 passo in avanti.

Per le previsioni a 5 passi in avanti invece, la tesi che il modello GAS risulta più performante è ancora più forte: quest'ultimo si comporta meglio per quasi tutte le serie di rendimenti, unica eccezione il rendimento *spot* Daqing del petrolio greggio, che mostra una capacità predittiva indistinguibile di GAS e GARCH. Simili risultati anche per le previsioni a 20 passi in avanti.

Confrontando invece il petrolio greggio con il gas naturale, si può notare quanto segue: per i sei asset del petrolio greggio, il modello GAS risulta avere l'RMSE più basso e mostra una capacità predittiva significativamente migliore rispetto agli altri due modelli per i rendimenti *future* del Brent e del MICEX; capacità predittiva invece indistinguibile da GARCH, superando però EGARCH, per gli altri quattro asset. Per il gas naturale, considerando i rendimenti *future* IPE e *spot* AECO, il modello GAS risulta essere migliore dei modelli di tipo ARCH. Tuttavia, per i rendimenti *spot* NY, quest'ultimo viene superato dal modello EGARCH.

Per le previsioni a 60 passi in avanti, la superiorità del modello GAS rispetto ai modelli di tipo GARCH diminuisce. Infatti, il modello EGARCH risulta essere il modello con la migliore capacità previsiva per i rendimenti *future* WTI e i tre rendimenti *spot* del petrolio greggio, e i rendimenti *spot* NY del gas naturale. Invece, il modello GAS diventa il peggiore modello di previsione per i rendimenti *future* NYMEX e *spot* AECO del gas naturale.

In conclusione, si può affermare che anche il test DM rivela che nessun modello è intrinsecamente superiore agli altri nella previsione della volatilità dei rendimenti. Come si può osservare nella *Tabella 8*, in cui sono riassunti i migliori modelli per ogni mercato su diversi orizzonti, il modello GAS è generalmente superiore ai modelli di tipo GARCH per il petrolio greggio *spot* e *future*, in particolare per gli orizzonti a 1, 5 e 20 passi in avanti.

Anche in questo caso, non ci sono differenze nelle capacità previsive tra i mercati sviluppati e quelli in via di sviluppo. La differenza significativa però, si può osservare tra il mercato del petrolio greggio e quello del gas naturale. Il modello GAS mostra una superiorità su orizzonti brevi-medi, mentre su orizzonti a lungo termine si può osservare una superiorità del modello

GARCH. Tuttavia, per il mercato *spot* del gas naturale, in quanto estremamente fluttuante, il modello migliore cambia a seconda dell'orizzonte di previsione e del mercato.

L'ultima osservazione rilevante è la discrepanza tra i risultati del test DM e quelli del WR, poiché infatti la statistica DM si basa sulla distanza tra le volatilità previste e osservate.

k and model		Crude oil						Natural gas			
		Futures			Spot			Futures		Spot	
		Brent	MICEX	WTI	Brent	Daqing	WTI	IPE	NYMEX	AECO	NY
1	GAS	1#	1#	1#	1#	1	1#	1	3	2	1
	GARCH	3	3	3	3	3	3	3	2	3	2
	EGARCH	2#	2#	2#	2#	2#	2#	2#	1	1	3
5	GAS	1#	1#	1#	1#	1	1#	1#	1#	1#	1#
	GARCH	3	2#	2#	2#	2#	2#	2	2	3	3
	EGARCH	2#	3	3	3	3	3	3	3	2	2#
20	GAS	1#	1#	1	1	1	1	1#	2#	1#	2#
	GARCH	2#	2#	2#	2#	2	2#	2#	1	2#	3
	EGARCH	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1#
60	GAS	2#	1	2#	2#	2	2#	1	3	3	2#
	GARCH	3	3	3	3	3	3	2#	1	1#	3
	EGARCH	1	2#	1#	1#	1#	1#	3	2#	2#	1#

**Tabella 7:** Test di capacità predittiva out-of-sample (test DM)

**NOTA:** L'orizzonte di previsione è k giorni. I numeri nella tabella indicano il grado del modello nella previsione delle volatilità in termini di errori al quadrato. 1# significa che il modello è il miglior modello di previsione con previsioni significativamente più accurate rispetto ai modelli classificati al secondo e terzo posto. 2# significa che il modello è il modello di previsione subottimale con previsioni significativamente più accurate rispetto al terzo modello classificato.

Market/horizon		1 day (1-step)	1 week (5-step)	1 month (20-step)	1 quarter (60-step)
Crude oil futures	Brent	GAS	GAS	GAS	EGARCH
		GARCH	GAS	GAS	GAS
		GAS	GAS	GAS	EGARCH/GAS
	MICEX	GAS	GAS	GAS	GAS
		GARCH	GAS	GAS	GAS
		GAS	GAS	GAS	GAS/EGARCH
	WTI	GAS	GAS	GAS	EGARCH
		GARCH	GAS	GAS	GAS
		GAS	GAS	GAS/GARCH	EGARCH
Crude oil spot	Brent	GAS	GAS	GAS	EGARCH
		GARCH	GAS	GAS	GAS
		GAS	GAS	GAS/GARCH	EGARCH
	Daqing	GAS	GAS	GAS	EGARCH
		GARCH	GAS	GAS	GAS
		GAS/EGARCH	GAS/GARCH	GAS/GARCH	EGARCH
	WTI	GAS	GAS	GAS	EGARCH
		GARCH	GAS	GAS	GAS
		GAS	GAS	GAS/GARCH	EAGRCH
Natural gas futures	IPE	GAS	GAS	GAS	GAS
		EGARCH	GAS	EGARCH	GAS
		GAS/EGARCH	GAS	GAS	GAS/GARCH
	NYMEX	EGARCH	GAS	GARCH	GARCH
		GAS	GAS	GAS	GAS
		EGARCH/GARCH/GAS	GAS	GARCH/GAS	GARCH/EGARCH
Natural gas spot	AECO	EGARCH	GAS	GAS	GARCH
		EGARCH	GAS	GAS	GARCH
		EGARCH/GAS/GARCH	GAS	GAS	GARCH
	NY	GAS	GAS	EGARCH	EGARCH
		GARCH	GAS	GAS	GAS
		GAS/GARCH/EGARCH	GAS	EGARCH	EGARCH

**Tabella 8:** Sintesi delle previsioni out-of-sample

**NOTA:** Questa tabella riassume il miglior modello di previsione per il periodo out-of-sample in base a tre metriche. La prima, la seconda e la terza riga per ogni mercato mostrano il miglior modello di previsione della volatilità utilizzando rispettivamente le metriche RMSE, WR e test DM.

#### 4.2.4 Somma cumulativa della differenza quadratica degli errori di previsione (CSSFED)

Il CSSFED, ovvero la somma cumulativa della differenza quadratica degli errori di previsione, è stato utilizzato per monitorare graficamente l'evoluzione della performance previsionale di un certo modello rispetto ad un altro (Siliverstovs, 2017; Welch & Goyal, 2008).

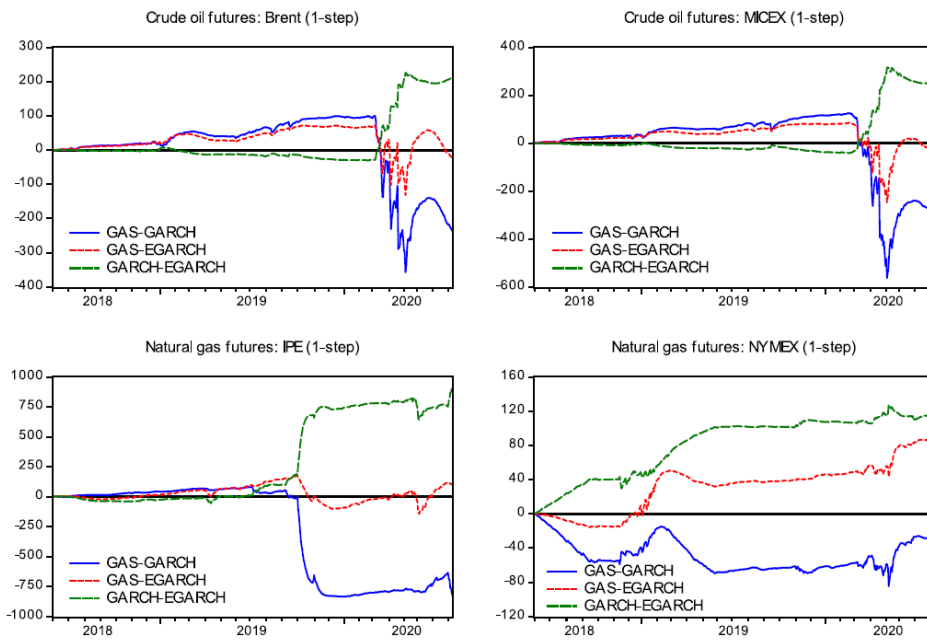
Il CSSFED è definito come segue:

$$CSSFED_{t_0,t_1} = \sum_{t=t_0}^{t_1} [(V_{M1,t} - \hat{V}_t)^2 - (V_{M2,t} - \hat{V}_t)^2] \quad (26)$$

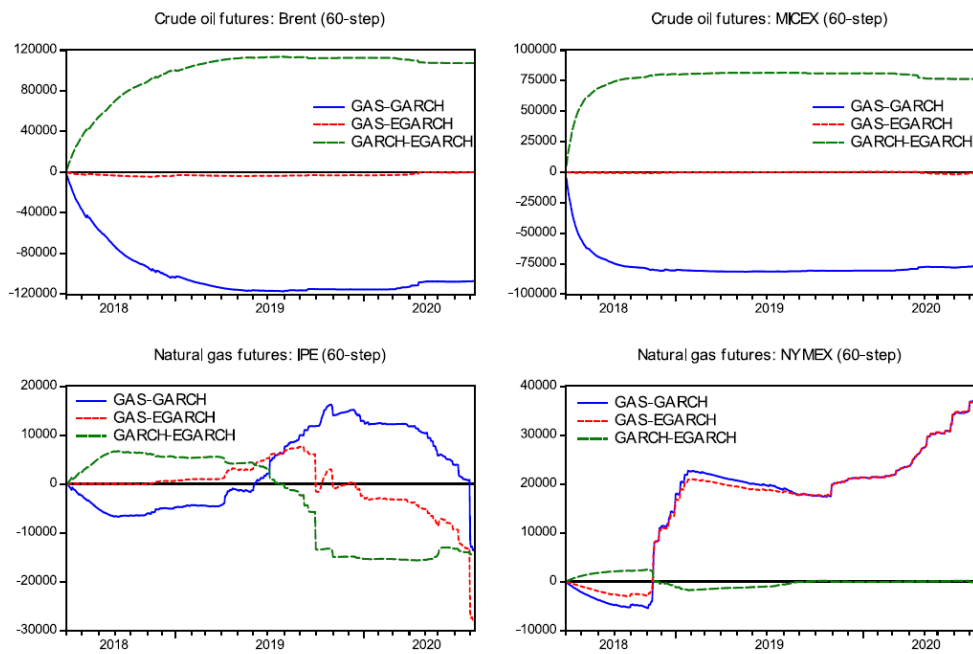
$CSSFED_{t_0,t_1}$  misura la somma cumulativa della differenza quadratica degli errori di previsione tra il modello M1 e il modello M2 durante il periodo di valutazione delle previsioni  $(t_0, t_1)$ .

L'RMSE è una variabile scalare, mentre il CSSFED è una serie temporale che mostra l'evoluzione dell'accuratezza previsionale di M1 e M2. Basandosi sui risultati del CSSFED si può determinare se la superiore accuratezza previsionale di un modello è generata da un continuo miglioramento della capacità predittiva maturata nel tempo.

Per brevità, sono state selezionate le serie relative ai rendimenti *future* Brent e MICEX del petrolio greggio, e i *future* IPE e NYMEX del gas naturale per rappresentare l'evoluzione dell'accuratezza previsionale. Nelle *Figura 1* e *Figura 2* si possono osservare i risultati delle coppie GAS-GARCH, GAS-EGARCH e GARCH-EGARCH per gli orizzonti a 1 e 60 passi in avanti, rispettivamente (nelle *Figura A3* e *A4* sono riassunti invece i risultati per gli altri asset). Quando il CSSFED descrive una tendenza ad alzarsi significa che il modello precedente nella coppia produce errori di previsione più grandi rispetto al suo concorrente fino a quel punto nell'asse temporale. Al contrario, se tende ad abbassarsi indica che il modello precedente nella coppia produce errori di previsione più piccoli.



**Figura 1:** Valutazione dell'accuratezza delle previsioni (CSSFED) all'orizzonte di 1 passo avanti per gli assets selezionati



**Figura 2:** Valutazione dell'accuratezza delle previsioni (CSSFED) all'orizzonte di 60 passi avanti per gli assets selezionati

Osservando la *Figura 1* si possono notare le variazioni del CSSFED delle tre coppie di modelli GAS-GARCH, GAS-EGARCH e GARCH-EGARCH ad un orizzonte di 1 passo in avanti. Per il *future* Brent del petrolio greggio, per esempio, il 16 Marzo 2020, il CSSFED della coppia GAS-GARCH passa nettamente da positivo in negativo. Prima del 13 Marzo 2020, il CSSFED di quest'ultimo si manteneva invece positivo in continuo aumento. Invece, il CSSFED della coppia GARCH-EGARCH passa da negativo a positivo il 12 Marzo 2020. Questo è dovuto al crollo dei prezzi del petrolio greggio (oltre il 30%) del 9 Marzo 2020, quando l'Arabia Saudita ha ridotto drasticamente il prezzo del petrolio greggio venduto ai mercati esteri. Decise infatti di voler aumentare la sua produzione di petrolio, in un momento in cui, anche a causa della pandemia globale dovuta dal virus SARS-CoV-2, la domanda di petrolio era molto bassa. Questa decisione da parte dell'Arabia Saudita ha quindi prodotto un calo dei prezzi. Prima di questo, GARCH sembra essere superiore rispetto a GAS e EGARCH. Tuttavia, perde la sua buona capacità previsiva quando accadono eventi straordinari o devastanti per i mercati finanziari. Al contrario invece, il modello GAS, che riesce a gestire bene situazioni anomale, e il modello EGARCH, che considera invece gli effetti asimmetrici, sembrano avere una capacità previsiva migliore del modello GARCH in questi contesti.

Osservando la *Figura A3* per i *future* del petrolio greggio WTI i risultati sono simili. Per i *future* del MICEX il punto di crollo è ancora più prematuro, rispetto a quello dei mercati sviluppati, a causa della reazione più rapida agli shock esterni. Il CSSFED della coppia GAS-GARCH scende a fine Febbraio 2020 diventando negativo il 10 Marzo 2020. Per le altre tre serie di rendimenti *spot* del petrolio greggio, rappresentate sempre nella *Figura A3*, i risultati sono simili: il modello GAS sembra avere buona capacità previsiva per tutto il periodo *out-of-sample*. Il modello GARCH, invece, solo quando la situazione è stabile: il crollo dei prezzi di Marzo 2020, i tagli alla produzione del petrolio greggio all'inizio del 2019 guidati dall'Arabia Saudita e dalla Russia, il conflitto geopolitico tra gli Stati Uniti e l'Iran nel giugno del 2019, e gli attacchi all'impianto petrolifero di Aramco a metà settembre 2019, sono eventi che corrispondono a forti diminuzioni del CSSFED per le coppie GAS-GARCH e GAS-EGARCH, ed aumenti invece per la coppia GARCH-EGARCH.

Spostando l'attenzione sui grafici relativi al gas naturale, a differenza del petrolio greggio, le cui tendenze del CSSFED sono simili nei vari mercati, le variazioni del CSSFED del gas sono molto



distinte a seconda del mercato in osservazione. Si nota una forte variazione del CSSFED nel mercato dei *future* IPE a Settembre 2019 (*Figura 1*), punto in cui successivamente è peggiorata la capacità previsiva del modello GARCH. Tuttavia, non si riscontrano cambiamenti drastici in questo punto per gli altri tre mercati del gas naturale. Per i mercati *future* NYMEX e *spot* AECO e NY (*Figura A3*) il CSSFED evidenzia una discesa per la coppia di modelli GAS-GARCH, evidenziando la superiorità del modello GAS rispetto al modello GARCH. Per le coppie GAS-EGARCH e GARCH-EGARCH invece presenta una tendenza a crescere nei mercati *future* NYMEX e *spot* AECO, in particolare si può osservare un vantaggio del modello EGARCH (risultato concordante con RMSE e WR). Tuttavia, nel mercato *spot* NY, i CSSFED di GAS-EGARCH e di GARCH-EGARCH si mantengono negativi e diminuiscono nel periodo *out-of-sample*, provando invece che il modello EGARCH non risulta essere un modello ottimale per questo mercato (risultato concordante con RMSE e WR).

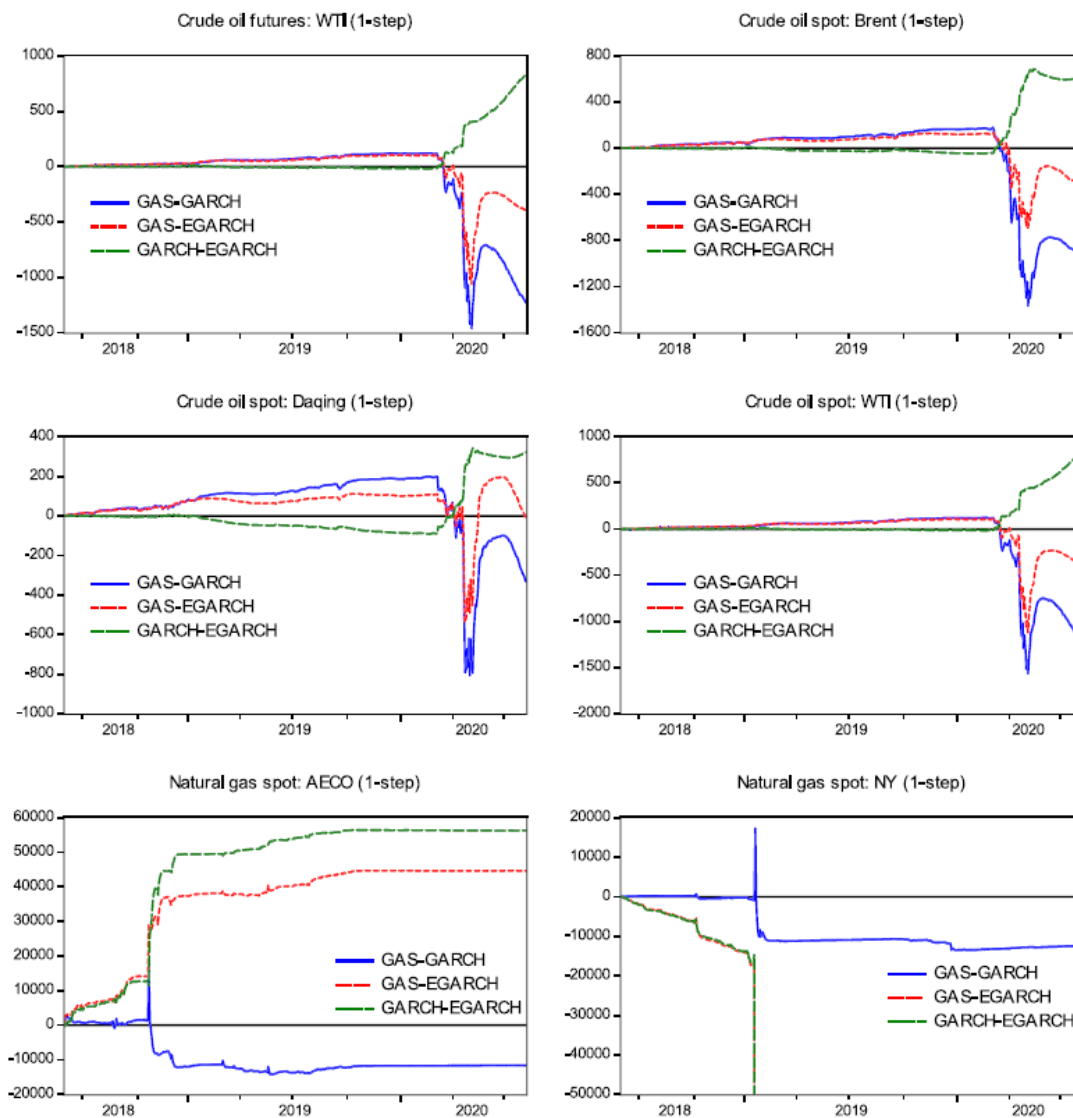
Per le previsioni a 60 passi in avanti (*Figura A4*), il vantaggio attribuito fino ad ora al modello GAS si indebolisce: per il mercato *spot* del petrolio greggio Brent, il CSSFED per le coppie di modelli GAS-GARCH e GAS-EGARCH assume un valore negativo dall'1 Giugno 2018 al 6 Agosto 2020, mentre la coppia GARCH-EGARCH assume valori positivi, mostrando infatti la superiorità nella capacità previsiva del modello GAS solo nel periodo *in-sample* e non più in quello *out-of-sample*. Per la coppia GAS-GARCH si osserva una curva inclinata verso il basso, la quale suggerisce il vantaggio del modello GAS rispetto a GARCH. Osservando invece la coppia GAS-EGARCH, il CSSFED inizia ad aumentare da Dicembre 2018 diventando positivo il 7 Agosto 2020, alla fine del periodo *out-of-sample*. Rispetto a EGARCH, il modello GAS genera quindi un RMSE complessivamente maggiore ma anche un WR maggiore. Analogamente, il CSSFED del mercato *future* del petrolio greggio WTI evidenzia la superiorità nella capacità previsiva della volatilità del modello EGARCH rispetto al modello GAS per il periodo *out-of-sample*. Contrariamente, il CSSFED per il mercato *future* del petrolio greggio MICEX (*Figura 2*) della coppia GAS-EGARCH presenta un forte calo tra Aprile 2020 e Giugno 2020, in corrispondenza del calo dei prezzi dell'Arabia Saudita. Analogamente, anche nei mercati *spot* del Brent e WTI, il CSSFED per la coppia GAS-EGARCH è positivo alla fine del periodo *out-of-sample*, negativo dall'1 Giugno 2018 al 6 Marzo 2020: il modello GAS sovraperforma il modello EGARCH in questo periodo. Nel mercato Daqing, la superiorità di EGARCH si mantiene per tutto il 2019-2020. Per i mercati relativi al prezzo *spot* del petrolio

greggio, l'andamento della coppia GAS-GARCH è simile per tutti e tre: mantiene la negatività e presenta una tendenza al ribasso prima dello shock dei prezzi di Marzo 2020.

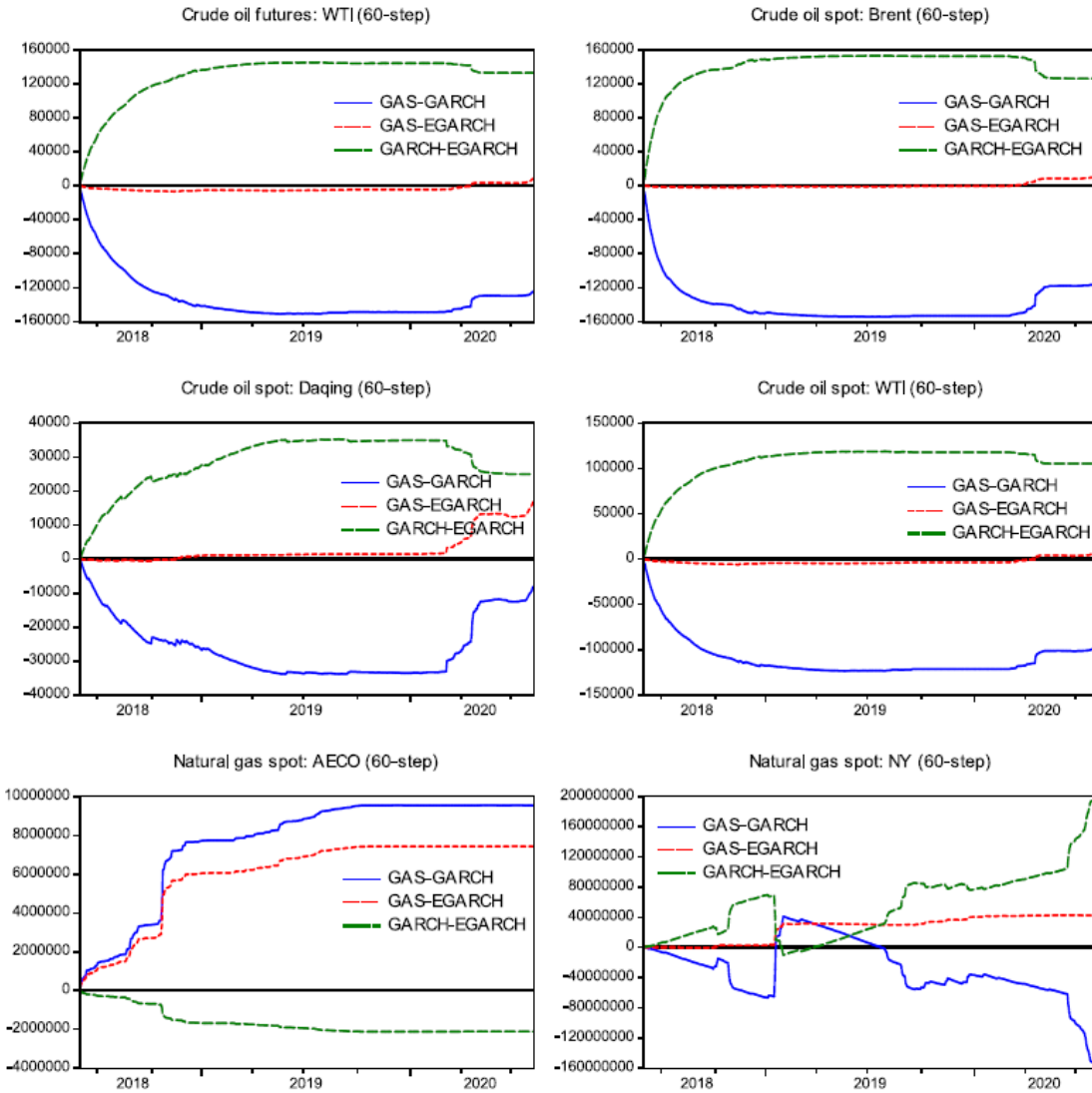
Valutando invece il mercato del gas naturale l'andamento delle curve è molto diverso rispetto a quello del petrolio greggio. Per i *future* IPE (*Figura 2*) il CSSFED dimostra la superiorità del modello GARCH prima di Agosto 2020. Tuttavia, il CSSFED per GAS-GARCH diventa negativo nell'Agosto 2020, indicando che GAS assume una migliore accuratezza predittiva *out-of-sample*. È quindi spiegabile il motivo per cui il GAS ha il minore RMSE e WR, ma non mostra una capacità di previsione migliore di GARCH secondo i risultati dei test DM. I movimenti di CSSFED per il gas naturale *future* del NYMEX confermano che GAS è superato dai modelli di tipo GARCH, mentre GARCH ha una performance simile a quella di EGARCH, in linea con i risultati di RMSE e WR.

Per quanto riguarda gli andamenti delle coppie di modelli per i rendimenti *spot* del gas naturale AECO e NY (*Figure A4*), questi risultano essere diversi rispetto agli stessi relativi a 1 passo in avanti. Per il mercato AECO, il modello EGARCH nelle previsioni a 60 passi in avanti perde la sua superiorità, mentre la acquista il modello GARCH, il quale supera GAS e EGARCH con errori di previsione minori, per tutto il periodo *out-of-sample*. Per il mercato NY il modello EGARCH risulta essere nuovamente quello migliore: il CSSFED per la coppia GAS-EGARCH rimane positivo da Gennaio 2019 in continuo aumento, dimostrando la superiorità di EGARCH rispetto a GAS. Il CSSFED della coppia GARCH-EGARCH essendo in continuo aumento, in particolare da Febbraio 2019, evidenzia invece la superiorità di EGARCH rispetto GARCH.

Si può quindi affermare che per le previsioni a 1 passo in avanti il modello GARCH è inferiore ai modelli EGARCH e GAS per tutti i mercati tranne per il mercato *spot* del gas naturale NY. Per le previsioni a 60 passi in avanti prevale il modello EGARCH per tutti i mercati del petrolio greggio in tutto il periodo *out-of-sample*. Per il gas naturale invece nessuno dei tre modelli sembra avere una capacità previsiva migliore rispetto agli altri modelli in esame. Si può infine sostenere che il modello GAS supera il modello GARCH (tranne per il rendimento *spot* del petrolio greggio Daqing) prima dello shock dei prezzi del 2020 e risulta essere un buon modello per la previsione della volatilità dei rendimenti in esame, in particolare per i mercati del petrolio greggio e per le previsioni a breve termine che non superano il mese di anticipo.



**Figura A3:** Valutazione dell'accuratezza delle previsioni (CSSFED) all'orizzonte di 1 passo avanti



**Figura A4:** Valutazione dell'accuratezza delle previsioni (CSSFED) all'orizzonte di 60 passi avanti

# Conclusioni

La presente relazione riporta il risultato di un'indagine empirica il cui obiettivo è stato quello di individuare il miglior modello, tra i modelli GARCH, EGARCH e GAS, in termini di capacità previsiva della volatilità per dieci serie di rendimenti di prezzi del petrolio greggio e del gas naturale a orizzonti multipli. Per giungere al risultato finale sono state utilizzate quattro metriche: l'RMSE, il WR, il test DM e il CSSFED.

Da quest'indagine risulta migliore il modello GAS, soprattutto per i mercati del petrolio greggio su diversi orizzonti. Le volatilità a breve termine possono essere ben descritte da un modello di tipo GARCH parsimonioso. Tuttavia, il modello GAS incorpora gli *outlier*, riuscendo quindi a catturare bruschi cambiamenti nei parametri e generando ugualmente delle buone previsioni *out-of-sample*. Per il gas naturale, non sussiste un modello predominante ma il modello GAS è vantaggioso ad orizzonti di 1 e 5 passi in avanti. I risultati empirici suggeriscono, per le strategie di copertura, l'utilizzo comunque del modello GAS, soprattutto per i *future* IPE, poiché precedenti studi mostrano una bassa efficienza di copertura del modello GARCH (Ghoddusi & Emamzadehfard, 2017).

# Bibliografia

- Agnolucci, P. (2009). Volatility in crude oil futures: A comparison of the predictive ability of GARCH and implied volatility models. *Energy Economics*, 31(2), 316–321.
- Arouri, M. E. H., Lahiani, A., Lévy, A., & Nguyen, D. K. (2012). Forecasting the conditional volatility of oil spot and futures prices with structural breaks and long memory models. *Energy Economics*, 34(1), 283–293.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Cheong, C. W. (2009). Modeling and forecasting crude oil markets using ARCH-type models. *Energy Policy*, 37(6), 2346–2355.
- Chun, D., Cho, H., & Kim, J. (2019). Crude oil price shocks and hedging performance: A comparison of volatility models. *Energy Economics*, 81, 1132–1147.
- Creal, D., Koopman, S. J., & Lucas, A. (2013). Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, 28(5), 777–795.
- Ghoddusi, H., & Emamzadehfard, S. (2017). Optimal hedging in the US natural gas market: The effect of maturity and cointegration. *Energy Economics*, 63, 92–105.
- Harvey, A., & Sucarrat, G. (2014). EGARCH models with fat tails, skewness and leverage. *Computational Statistics & Data Analysis*, 76, 320–338.
- Herrera, M. A., Hu, L., & Pastor, D. (2018). Forecasting crude oil price volatility. *International Journal of Forecasting*, 34(4), 622–635.
- Kang, H. S., Kang, S. M., & Yoon, S. M. (2009). Forecasting volatility of crude oil markets. *Energy Economics*, 31(1), 119–125.
- Kang, H. S., & Yoon, S. M. (2013). Modeling and forecasting the volatility of petroleum futures prices. *Energy Economics*, 36(3), 354–362.

Ma, J., Vivian, A., & Wohar, M. E. (2020). What drives commodity returns? Market, sector or idiosyncratic factors? *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 82(2), 311–330.

Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59, 347–370.

Siliverstovs, B. (2017). Dissecting models' forecasting performance. *Economic Modelling*, 67, 294–299.

Wei, Y., Wang, Y., & Huang, D. (2010). Forecasting crude oil market volatility: Further evidence using GARCH-class models. *Energy Economics*, 32(6), 1477–1484.

Welch, I., & Goyal, A. (2008). A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction. *The Review of Financial Studies*, 21(4), 1455–1508.

Zhang, J. Y., Yao, T., He, Y. H., & Ripple, R. (2019). Volatility forecasting of crude oil market: Can the regime switching GARCH model beat the single-regime GARCH models? *International Review of Economics & Finance*, 59, 302–317.