



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Ingegneria Industriale DII
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Analisi numerica del comportamento meccanico di strutture
realizzate con materiali gerarchici

Relatore: Prof. Mirco Zaccariotto

Co-relatore: Prof. Ugo Galvanetto

Valerio Zatta 1104975

Anno Accademico 2016/2017

*L'arte deve turbare,
la scienza deve assicurare.*

Georges Braque

a Giulia

Sommario

La scoperta dei materiali compositi ha cambiato il mondo in cui viviamo, alzando il limite tecnologico e rendendo possibile ciò che prima non lo era. I materiali gerarchici hanno la possibilità di innalzare ulteriormente quel limite, dando la possibilità di creare strutture con caratteristiche meccaniche eccezionali. In questa tesi si è studiata la geometria *bone-like*.

Ci si è posti l'obiettivo di verificare quanto i metodi di omogeneizzazione fossero affidabili per prevedere il comportamento lineare elastico della struttura gerarchica in esame, e si è andati a quantificare di quanto l'energia di frattura assorbita da una struttura gerarchica sia superiore a quella assorbita da un materiale monolitico tradizionale.

Per quanto concerne la verifica delle capacità dei metodi di omogeneizzazione, si sono svolti test numerici ed analitici culminati con una verifica numerica della accuratezza dei modelli omogeneizzati ottenuti; riguardo allo studio sulla energia di frattura, si sono svolte analisi numeriche di tipo FEM non lineare nell'ambiente Abaqus.

Si è dimostrato che i metodi di omogeneizzazione riescono a descrivere il comportamento della struttura gerarchica *bone-like* con un errore pari al 3%. L'incremento di energia di rottura assorbita da una struttura a due gerarchie, rispetto ad un materiale monolitico, arriva fino al 20.5%; una struttura gerarchica a tre gerarchie invece consente un incremento del 24.5%.

Si è dimostrato il valore che le strutture gerarchiche possono assumere oggi nel campo delle applicazioni tecnologiche che richiedono performance elevate, e che vi sono facili strumenti per prevedere il comportamento di tali strutture a livello macroscopico.

Composite materials have changed the world we live in, overcoming previous technical limits and making the impossible possible. Gerarchical materials could have the same impact, today, on the technological limit, because they allow to realize structures that can give exceptional mechanical characteristics. In this essay I studied the bone-like geometry.

In the first place I verified how reliable the homogeneization methods could be to predict a gerarchical material's elastic behaviour; then the focus shifted on how much a gerarchical structure could increase the strain energy density in respect to a monolithic material.

To verify homogenization methods' reliability, I conducted analytical and numerical analysis; to check the increment in strain energy density, instead, I conducted an experimental campaign using FEM non linear analysis (Abaqus).

The outcome was that homogeination methods can predict the material's behaviour with an error of 3%. In the regards of the fracture energy, a two-levels gerarchical material increases this energy absorption up to 20.5% in respect to a monolithical material; a three-levels material increases the energy by 24.5%.

In the end, gerarchical materials can have a great impact, today, on the performance of mechanical performance, and there are reliable methods to predict their macroscopical elastic behaviour.

Indice

1	Introduzione	1
2	Materiali gerarchici	3
2.1	Esempi di materiali gerarchici	4
2.2	Materiale gerarchico proposto	11
3	Omogeneizzazione	13
3.0.1	Il concetto di “omogeneizzazione”	15
3.0.2	Representative Volume Element	17
3.0.3	Modulo Elastico Effettivo	17
3.1	Omogeneizzazione numerica	19
3.1.1	Formulazione matematica	20
3.1.2	Implementazione in Abaqus	22
3.2	Omogeneizzazione analitica	25
3.2.1	Mori-Tanaka Method	26
3.2.2	Self Consistent Method	29
3.2.3	Influenza della geometria delle inclusioni	31
3.2.4	Descrizione codice	32
3.3	Materiale in esame	39
3.3.1	Geometria del modulo gerarchico	39
3.3.2	Proprietà dei materiali	44
3.4	Risultati analisi di omogeneizzazione	45
3.4.1	Scelta dello RVE	45
3.4.2	Parametri meccanici dei materiali	49
3.5	Moduli Elastici Previsti	50
3.6	Confronto tra i metodi di omogeneizzazione	52
4	Studio della frattura	57
4.1	La deformazione plastica in Abaqus	58
4.1.1	Modello di Plasticità utilizzato	63
4.2	La frattura duttile in Abaqus	67
4.2.1	Criterio di inizializzazione del danno	69
4.2.2	Evoluzione del danneggiamento	70
4.3	Analisi Numeriche	73
4.3.1	Geometria dei provini analizzati	73
4.3.2	Mesh	75

4.3.3	Condizioni di Vincolo	76
4.3.4	Condizioni di Carico	78
4.3.5	Metodo di Misura	79
4.3.6	Proprietà meccaniche dei materiali	80
4.3.7	Creazione di una cricca iniziale	89
4.4	Verifica del modello	91
4.5	Studio della geometria 2H	96
4.6	Studio della geometria 3H	104
4.7	Confronto tra geometria 2H e geometria 3H	110
5	Conclusioni	111
6	Ipotesi su studi futuri	113

Elenco delle figure

1	Struttura gerarchica dell'osso[64].	6
2	Struttura gerarchica della madreperla[7].	7
3	Esoscheletro della spugna Euplectella[4].	8
4	Struttura gerarchica della tibia di ragno[20].	10
5	Materiale gerarchico bone-like a diversi livelli gerarchici[55].	12
6	Schema generale Mori-Tanaka.	32
7	Schema logico Compute_MoriTanaka.	34
8	Schema generale SelfConsistent.	36
9	Schema logico Compute_SelfConsistent.	37
10	Rappresentazione della geometria bone-like 2H - strato A.	40
11	Rappresentazione della geometria bone-like 2H - strato B.	41
12	Sviluppo della geometria 2H nella direzione di stacking.	41
13	Rappresentazione della geometria bone-like 3H con zoom su una inclusione - piano A	42
14	Rappresentazione della geometria bone-like 3H - strato B.	43
15	Sviluppo della geometria 3H nella direzione di stacking.	43
16	Strato A dello RVE 2H.	46
17	Strato B dello RVE 2H.	47
18	Sviluppo tridimensionale dello RVE 2H.	47
19	Provino utilizzato per il confronto tra i metodi di omogeneizzazione.	53
20	Dettaglio della faccia sottoposta a vincoli.	53
21	Dettaglio del MPC.	54
22	Diagramma tensione-deformazione di un provino duttile.	58
23	Esempio di strizione che interessa un provino sottoposto a trazione.	59
24	Curva tensione-deformazione con danneggiamento progressivo.	71
25	Provino per la frattura, dimensioni in mm.	74
26	Vincoli di una delle superfici minori del provino.	76
27	Dettaglio del vincolo per la simmetria.	77
28	<i>Coupling</i> tra Reference Point e Provino.	78
29	Curva stress-strain materiale rigido.	81
30	Curva stress-strain materiale A.	82
31	Curva stress-strain materiale B.	83
32	Curva stress-strain materiale C.	84
33	Curva stress-strain materiale D.	85

34	Curva stress-strain materiale E.	86
35	Curva stress-strain materiale F.	87
36	Curve stress-strain materiali.	88
37	Assonometria del provino con la cricca preesistente.	89
38	Dettaglio della cricca preesistente.	90
39	Provino per verifica sperimentale - dimensioni in mm.	92
40	a) dettaglio dei vincoli sul provino; b) MPC agente sul provino.	93
41	A sinistra provino reale sottoposto a test di trazione[55]; a destra provino sottoposto ad analisi numerica.	94
42	Comparazione delle curve tensione-deformazione: a sinistra il risultato numerico, a destra il risultato empirico[55].	95
43	Curve stress-strain provini 2H.	97
44	Andamento strain energy density nel materiale 2H.	98
45	Curva stress-strain materiale F.	99
46	Curva stress-strain materiale F.	100
47	Curve stress-strain zona di ottimo geometria 2H.	101
48	Andamento densità energia di deformazione.	102
49	Curve stress-strain provini 3H.	105
50	Andamento strain energy density nel materiale 3H.	106
51	Curve stress-strain zona di ottimo geometria 3H.	107
52	Andamento densità energia di deformazione.	108

Elenco delle tabelle

1	Influenza della geometria delle inclusioni.	31
2	Proprietà elastiche dei polimeri.	44
3	Dati di Input omogeneizzazione 2H.	49
4	Dati di Input omogeneizzazione 3H.	49
5	Moduli Elastici Previsti - materiale 2H.	50
6	Moduli Elastici Previsti - materiale 3H.	50
7	Riassunto Moduli Elastici.	51
8	Elongazione del provino.	54
9	Dati di plasticizzazione materiale rigido.	81
10	Dati per danneggiamento duttile materiale rigido.	81
11	Dati di plasticizzazione materiale A.	82
12	Dati per danneggiamento duttile materiale A.	82
13	Dati di plasticizzazione materiale B.	83
14	Dati per danneggiamento duttile materiale B.	83
15	Dati di plasticizzazione materiale C.	84
16	Dati per danneggiamento duttile materiale C.	84
17	Dati di plasticizzazione materiale D.	85
18	Dati per danneggiamento duttile materiale D.	85
19	Dati di plasticizzazione materiale E.	86
20	Dati per danneggiamento duttile materiale E.	86
21	Dati di plasticizzazione materiale F.	87
22	Dati per danneggiamento duttile materiale F.	87
23	Dati di plasticizzazione materiale F.	99
24	Dati per danneggiamento duttile materiale F.	99
25	Dati di plasticizzazione materiale F.	100
26	Dati per danneggiamento duttile materiale F.	100
27	Tabella riassuntiva geometria 2H.	103
28	Tabella riassuntiva geometria 3H.	109
29	Tabella riassuntiva performance strutture gerarchiche.	110

1 Introduzione

Il superamento dei limiti tecnologici è un afflato da sempre presente nell'animo dell'uomo: fin dall'antichità la curiosità, l'inventiva e lo spirito di osservazione sono stati preziosissimi alleati dell'uomo nella lotta per la sopravvivenza ed il dominio sulle forze naturali. In epoca moderna si è potuti assistere ad un enorme innalzamento del suddetto limite, grazie all'introduzione dei materiali compositi: leggeri e resistenti come niente prima d'ora, hanno permesso di realizzare cose prima assolutamente inimmaginabili. La stessa carica innovativa propria dei materiali compositi, oggi caratterizza una grande famiglia di materiali. Questi materiali, definiti materiali gerarchici, presentano particolari geometrie tratte dalla attenta osservazione delle strutture naturali: numerosi organismi nel corso di millenni o addirittura milioni di anni hanno ottimizzato i propri esoscheletri od altre parti per loro vitali, traendo il meglio da materiali di costruzioni relativamente semplici. Basti citare l'esempio della madreperla, o della conchiglia di molti animali marini che vivono ad enormi profondità; non è da dimenticarsi però nemmeno la tela di ragno, o addirittura l'osso umano. Queste strutture non si trovano solo negli organismi animali, ma anche negli organismi vegetali: caratterizzano infatti il legno ed il bamboo, per citare un esempio.

Innanzitutto bisogna capire di cosa si stia parlando: un materiale gerarchico è caratterizzato da un particolare geometria: è costituito da strutture, che a loro volta sono costituite da strutture, e così via. Da qui l'appellativo *gerarchico*. In seguito sono citati diversi esempi di materiali gerarchici e di alcune tra le numerose ricerche che li hanno riguardati. Infine si presenta il materiale gerarchico proposto in questa tesi, che è caratterizzato dalla struttura *bone-like*, così denominata perché ricorre la conformazione della parte trabecolare dell'osso umano. Tutti questi aspetti saranno trattati nel secondo capitolo.

Nel capitolo terzo si affronta il tema della *omogeneizzazione*. Le tecniche di omogeneizzazione sono tutte quelle tecniche, che possono essere analitiche o numeriche, che consentono di prevedere il comportamento macroscopico di un mezzo eterogeneo senza la necessità di dover descrivere la struttura nel dettaglio. In particolare si sono studiati i metodi analitici *Mori-Tanaka* e *Self Consistent*, ed il metodo numerico *Kinematic Uniform Boundary Conditions*. Dopo una rapida descrizione dei metodi dal punto di vista matematico, si descrive come operano ed i flussi logici che li caratterizzano. Infine li si applica ad un generico provino del materiale gerarchico studiato in questa

tesi. Il capitolo termina con un confronto sulla accuratezza dei tre metodi nella rappresentazione del materiale bone-like.

Nel capitolo quarto si studia il comportamento a frattura di questa struttura, cercando di evidenziare la sua spiccata resistenza a difetti (cricche) preesistenti rispetto ad un materiale monolitico. Dopo una esaustiva trattazione sul comportamento elasto-plastico e di come esso sia implementato in Abaqus, si descrivono i modelli di plasticità e danno utilizzati. Successivamente sono descritte le fasi di test di vari provini finalizzati a dimostrare le capacità meccaniche del materiale, e rivolte a trovare anche il materiale costituito alla miglior combinazione tra fasi per esaltare la caratteristica di assorbimento della energia di frattura.

Il capitolo quinto offre un riassunto di tutto il lavoro svolto in questa tesi, cercando di trarre opportune conclusioni dai risultati ottenuti.

Il capitolo sesto infine riporta alcune idee su come proseguire in futuro lo studio di questo materiale, considerate le promettenti potenzialità.

La ricerca ha portato ad ottimi risultati: dal punto di vista della omogeneizzazione, si è dimostrato che i metodi utilizzati riescono a prevedere il comportamento del materiale con grande precisione e basso sforzo di calcolo; la capacità di assorbire energia di frattura è decisamente sorprendente, offrendo consistenti margini di miglioramento rispetto ad un materiale monolitico.

2 Materiali gerarchici

Un materiale gerarchico può essere definito come un materiale composto da strutture, in cui queste strutture sono a loro volta costituite da strutture, le quali sono anch'esse costituite da strutture, e così via. La cosa interessante inoltre è che queste strutture sono geometricamente simili, in quanto tra di esse cambia solo la dimensione, ma le proporzioni tra le parti sono le medesime. A prima vista potrebbero essere confuse con dei frattali, con cui senza dubbio condividono molte caratteristiche[50], ma da cui si differenziano perché, anche se il numero di livelli gerarchici è molto elevato, il volume del solido gerarchico non tende a 0.

Ogni livello strutturale prende il nome di livello gerarchico, da cui il nome del materiale. Ogni livello gerarchico è denominato con un numero che lo identifica nella scala delle grandezze dei livelli: il livello esterno, macroscopico, in cui il materiale è considerato come un continuo, è denominato livello $n=0$; se si considera il livello $n=1$ allora si considera il materiale realizzato da tante strutture collegate tra loro, e si prosegue di conseguenza.

Le strutture gerarchiche si possono trovare tanto nei materiali di origine naturale che nei materiali fabbricati dall'uomo; in questi ultimi la loro presenza può essere frutto del caso oppure accuratamente ricercata, perché queste strutture garantiscono delle particolari performance meccaniche al pezzo da esse costituito. Per esempio un materiale gerarchico offre un incremento di resistenza e modulo di resilienza, o addirittura può presentare proprietà fisiche particolari quali un coefficiente di Poisson negativo.

Uno dei primi esempi di struttura realizzata dall'uomo caratterizzata da una geometria gerarchica può essere trovato nella Torre Eiffel. Gustave Eiffel infatti ha progettato la sua torre come una struttura di terzo ordine, ottenendo una densità relativa, cioè il rapporto tra la densità della struttura realizzata e la densità del materiale costituente, del valore di $1.2 * 10^{-3}$. Si pensa che l'utilizzo di piccole barre attirasse l'Ing. Eiffel sia per una maggiore semplicità di realizzazione, sia per un vantaggio strutturale che all'epoca era stato solo intuito ma non dimostrato.

In tempi ben più recenti, nel pieno degli anni '60, Dyson[21] ha osato proposto di utilizzare su larga scala costruzioni a geometria gerarchica nello spazio, dato che questo tipo di strutture permette la realizzazione di enormi costruzioni utilizzando una massa minima. Negli ultimissimi tempi la tendenza è stata purtroppo quella di abbandonare l'uso di strutture gerarchiche

per sistemi di grandi dimensioni, in quanto i costi di realizzazione, almeno al momento, sono considerati eccessivi.

2.1 Esempi di materiali gerarchici

Un semplice esempio di materiale gerarchico può essere quello dei materiali compositi fibrosi[13, 2, 29]: sono costituiti da fibre, lunghe o corte che siano, disposte in modo ordinato o meno, avvolte da una matrice; in tal modo formano delle lamine spiccatamente anisotrope. Quello appena descritto è un materiale gerarchico a basso ordine, cioè composto da poche gerarchie. La lamina è considerata nel suo complesso come un mezzo continuo.

Se si sovrappongono più lamine tra loro si forma un composito laminato: anch'esso, globalmente, può essere considerato come un mezzo continuo al fine delle analisi meccaniche. Si possono effettuare simili assunzioni riguardo a materiali compositi a particelle[3] o a schiume[27].

Un ulteriore esempio sono i materiali cristallini inorganici, in cui ad esempio i bordi di grano, le dislocazioni ed i difetti di punti, quali le dislocazioni o le vacanze atomiche, danno luogo a caratteristiche meccaniche interessanti; è dimostrato infatti che queste peculiarità generano un comportamento meccanico visco-elastico[69, 60, 75] tramite l'attenuazione delle onde di tensione e attraverso lo smorzamento delle vibrazioni in un vasto spettro di frequenza.

Anche i polimeri sono un forte esempio di strutture gerarchiche a livello molecolare, ultra-strutturale e micro-strutturale[6]. Infatti nei polimeri cristallini sono presenti gli sferuliti, dal diametro medio della decina di micrometri; ogni sferulita poi è costituito da una texture lamellare; ogni lamella infine è realizzata da ulteriori microstrutture. Per quanto riguarda i polimeri amorfi, invece, essi hanno delle strutture evidenti e riconoscibili solamente a livello molecolare[6].

Gli esempi più notevoli di materiali a struttura gerarchica, però, sono i materiali biologici. Il primo da sottolineare è quello dell'osso umano, che è caratterizzato da una struttura gerarchica decisamente densa. Si tratta di un materiale decisamente interessante, tanto da suscitare l'interesse di numerosi team di ricerca. Per citare qualche esempio si possono elencare gli studi di Hancox[28] e di Currey[14], che hanno analizzato la struttura dell'osso umano arrivando a riconoscerne le varie strutture e la conformazione gerarchica. Questo materiale è stato studiato anche da Rho, Kuhn-Spearing, Zioupos[64] che si sono dedicati principalmente alla descrizione dettagliata della struttura gerarchica dell'osso umano dal livello nanometrico al livello macroscopico. È

interessante citare i punti salienti della ricerca condotta da quest'ultimo team di ricerca. Innanzi tutto viene sottolineato come sia necessario comprendere le proprietà meccaniche delle singole parti che costituiscono l'osso, per poter poi capire da dove nascono le effettivamente sorprendenti performance meccaniche di quel materiale.

I livelli gerarchici nell'osso sono:

1. la macrostruttura: osso corticale ed osso spugnoso;
2. la microstruttura (che comprende le strutture dai 10 ai 500 μm): i canali di Havers, gli osteoni e le trabecole singole;
3. la sub-microstruttura (da 1 a 10 μm): le lamelle;
4. la nanostruttura (da alcune centinaia di nanometri ad 1 μm): collagene fibrillare e minerali incorporati;
5. la sub-nanostruttura (dimensioni sotto le poche centinaia di nanometri): strutture molecolari di elementi costitutivi quali minerali, collagene e proteine organiche non collagene.

Questa disposizione gerarchica ha una disposizione non ordinata, ma altamente ottimizzata, garantendo alla fine un materiale osseo eterogeneo ed anisotropo. È molto utile osservare Fig. (1) per comprendere la struttura gerarchica dell'osso descritta:

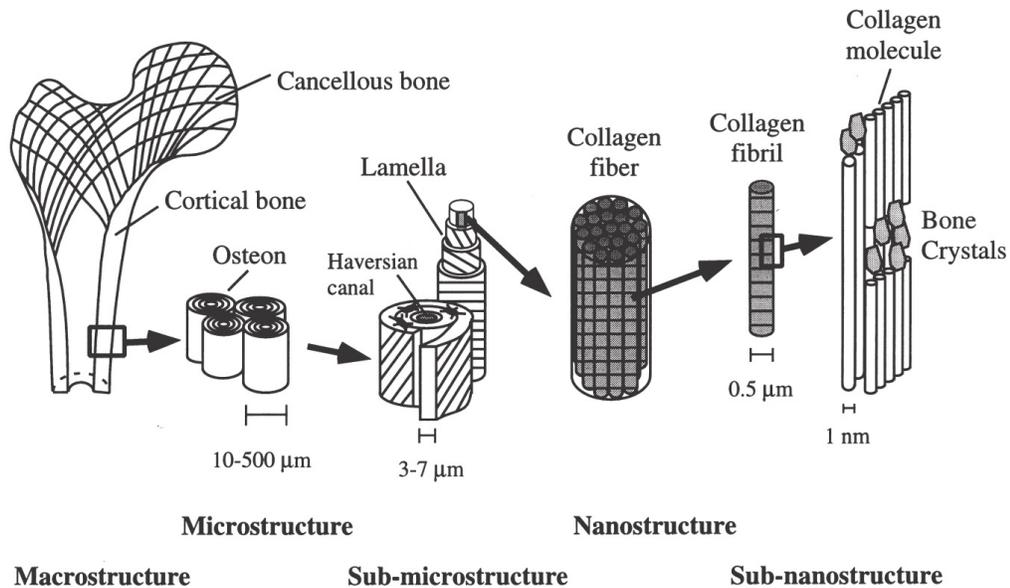


Figura 1: Struttura gerarchica dell'osso[64].

Da sinistra verso destra: osso corticale e spugnoso; osteoni con il sistema di canali di Havers; lamelle; ammassi di fibrille collaginose; cristalli di osso minerale, molecole di collagene e proteine non collaginose.

L'elenco dei materiali biologici che presentano struttura gerarchica non si esaurisce qui: si possono aggiungere infatti anche il legno, studiato da Thomas[71] e da Easterling, Harrysson, Gibson e Ashby[22], i tendini[6] ed il bamboo.

Il team costituito da Barthelat, Tang, Zavattieri, Li ed Espinosa[7] ha studiato le caratteristiche strutturali della madreperla, scoprendo che le sue peculiari proprietà derivano appunto da una complessa struttura gerarchica. La madreperla è costituita al 95% di Aragonite (CaCO_3), organizzata a formare tavolette poligonali impilate in modo da formare una struttura che rievoca un muro di mattoni. I bordi delle tavolette sono accuratamente allineati per le tavolette disposte nella stessa colonna, mentre vi sono delle zone di sovrapposizione con le tavolette delle colonne adiacenti: la superficie coperta dalla sovrapposizione è circa un terzo della superficie totale. Le tavolette non sono piatte, ma mostrano un numero consistente di gibbosità. queste tavolette sono costituite da singoli grani di aragonite, disposti in modo che l'asse cristallografico $[0\ 0\ 1]$ sia ortogonale alla superficie della tavoletta

stessa. L'interfaccia tra le tavolette è invece costituita da diversi strati di biopolimeri.

La struttura della madreperla può essere compresa con maggior facilità osservando l'Fig. (2):

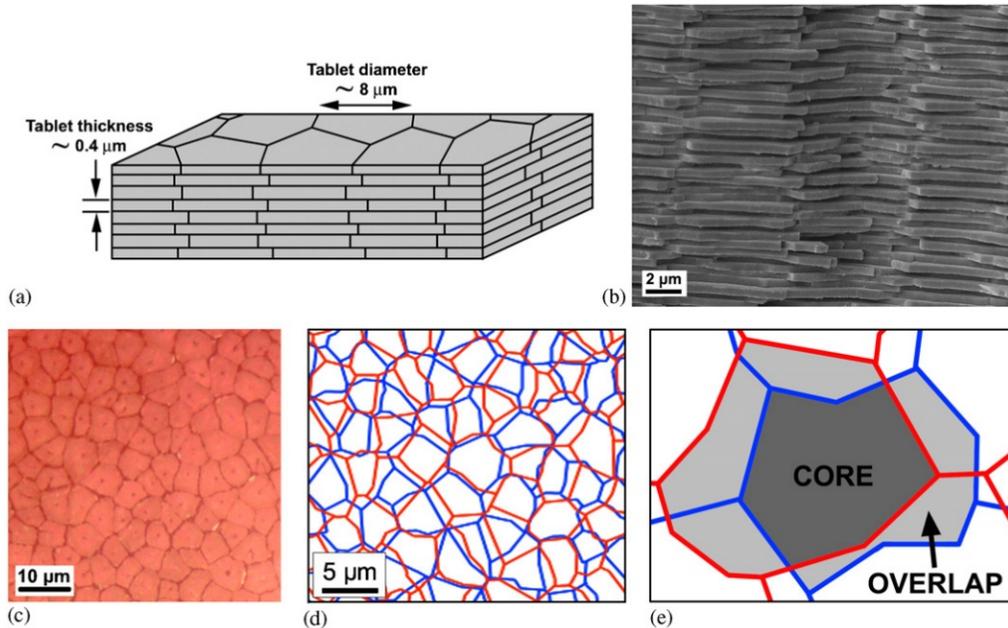


Figura 2: Struttura gerarchica della madreperla[7].

(a) schema della disposizione delle tavolette di Aragonite; (b) SEM su una frattura superficiale nella madreperla; (c) vista dall'alto di una superficie di tavolette di Aragonite; (d) ricostruzione della disposizione delle tavolette tra due livelli; (e) core e sovrapposizione tra tavolette.

La geometria gerarchica dell'esoscheletro della spugna *Euplectella* ha invece interessato Aizenberg, Weaver, Thanawala, Sundar, Morse, Fratzl[4]. I risultati delle loro analisi sono davvero molto interessanti per la precisione ed accuratezza con cui sono riusciti a descrivere l'effettiva struttura gerarchica dell'esoscheletro. Per aiutare la comprensione della complessa geometria, ci si riferisca alla Fig. (3):

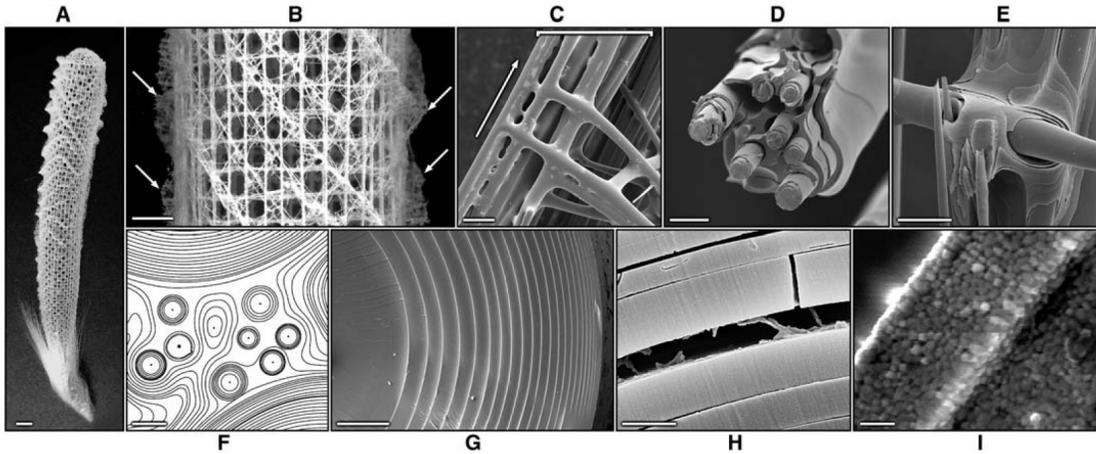


Figura 3: Esoscheletro della spugna *Euplectella*[4].

La figura offre uno spaccato della struttura dell'esoscheletro della spugna *Euplectella*, livello gerarchico per livello gerarchico.

Si va ora a descrivere le immagini una ad una:

- **A:** fotografia dell'intero scheletro, che evidenzia chiaramente la gabbia interna a forma di cilindro. La barretta di riferimento ha dimensione 1 cm;
- **B:** frammento della struttura della gabbia che mostra la griglia costituita da barrette verticali ed orizzontali, con elementi diagonali disposti a foggia di scacchiera. La barretta di riferimento ha dimensione 5 mm;
- **C:** scansione SEM che mostra come ogni barretta in realtà sia composta da molteplici spicole. La barretta di riferimento ha dimensione 100 μm ;
- **D:** scansione SEM di una singola barretta fratturata che rivela la struttura ceramica composita a fibre. La barretta di riferimento ha dimensione 20 μm ;
- **E:** scansione SEM di un'area di congiunzione che mostra la funzione collante degli strati di silicio. La barretta di riferimento ha dimensione 25 μm ;
- **F:** scansione SEM di una sezione di una barretta, che mostra come sia costituita da spicole di differenti diametri circondate da una matrice di silicio laminato. La barretta di riferimento ha dimensione 10 μm ;

- **G**: scansione SEM di una singola spicola, che mostra la sua caratteristica architettura lamellare. La barretta di riferimento ha dimensione $5 \mu m$;
- **H**: scansione SEM di una spicola sottoposta a frattura, che rivela un interstrato di origine organica. La barretta di riferimento ha dimensione $1 \mu m$;
- **I**: superficie di bio-silice trattata chimicamente per mostrare la sua composizione di nanoparticelle condensate. La barretta di riferimento ha dimensione 25 nm.

Per citare un ultimo esempio di materiale a struttura gerarchica, si può ricordare lo studio di Du, Liu, Narayanan, Li, Lek Min Lim e Li sulle proprietà della tela di ragno[20].

Anche in questo caso, la Fig. (4) aiuta a comprendere lo sviluppo gerarchico di questo materiale.

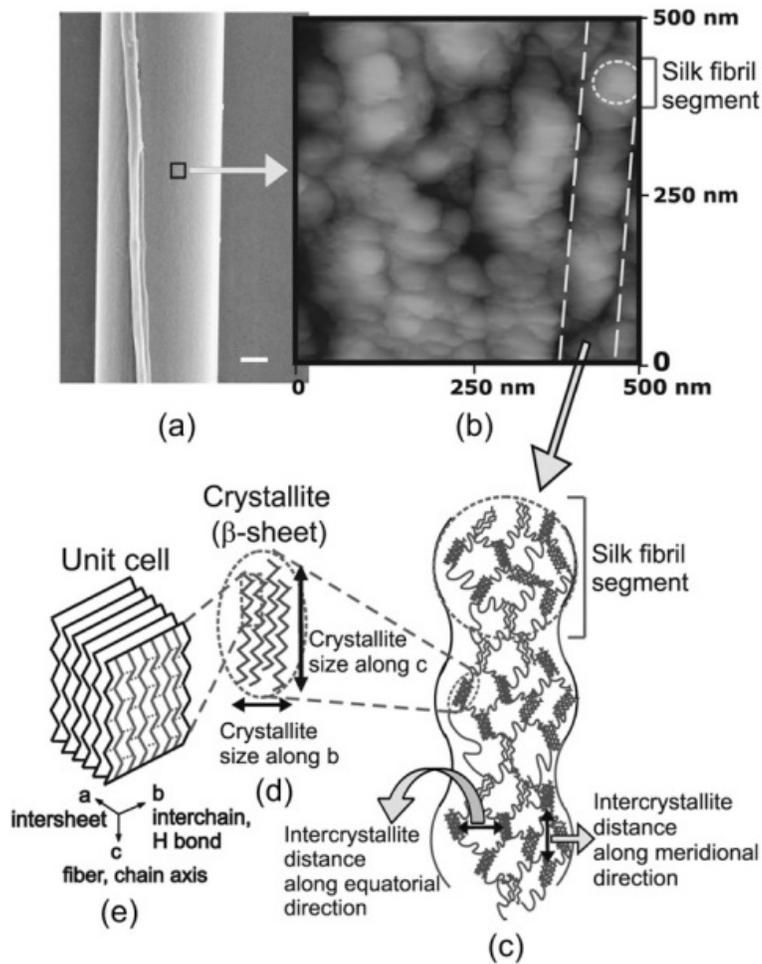


Figura 4: Struttura gerarchica della tela di ragno[20].

Si va ora a descrivere immagine per immagine:

- **A:** scansione SEM di un filo di tela di ragno. Barretta di riferimento, $1 \mu m$.
- **B:** struttura fibrillare individuata dalle linee tratteggiate. Ogni fibrilla è costituita da «segmenti» interconnessi, come indicato dai cerchi tratteggiati dalle dimensioni di circa 50 nm.

- **C**: proposta di modello per la struttura della fibrilla di seta: ogni fibrilla consta di diversi fogli- β connessi da spirali casuali o eliche- α che vanno a costituire una catena di interconnessione a rete di origine proteica polipeptidica.
- **D**: i cristalliti nei fogli- β .
- **E**: unità di cella di un cristallita, dotato di un una configurazione antiparallela a foglio- β .

2.2 Materiale gerarchico proposto

In questa sezione si anticipa ciò che sarà trattato come maggior dettaglio nella sezione **3.3**.

Allo scopo di poter dimostrare le capacità dei materiali gerarchici, se ne è dovuto scegliere uno, per poterlo innanzi tutto descrivere tramite omogeneizzazione, e successivamente per dimostrarne le peculiarità del comportamento a frattura. La conformazione scelta ha dovuto rispettare il vincolo che ci si è imposti di poter essere realizzata tramite la stampa 3D, per renderne possibile la diffusione concreta, e non far rimanere i vantaggi di una struttura di questo tipo solo nel mondo teorico.

La scelta è ricaduta sulla struttura definita “bone-like”, perché ricorda la conformazione dell’osso trabecolare, che sarebbe la parte interna e spugnosa delle ossa.

Questa semplice struttura è già stata studiato con interesse da numerosi team, tra cui Reza Mirzaeifar, Leon S. Dimas, Zhao Qin, Markus J. Buehler [55], Jae-Young Rho, Liisa Kuhn-Spearing, Peter Zioupos [64], Leon S. Dimas, Markus J. Buehler [17, 19, 18], Leon S. Dimas , Graham H. Bratzel , Ido Eylon , Markus J. Buehler [16].

Si compone sostanzialmente di una fase elastica in cui sono disposte in modo ordinato inclusioni regolari di fase rigida, come si può vedere in Fig. (5).

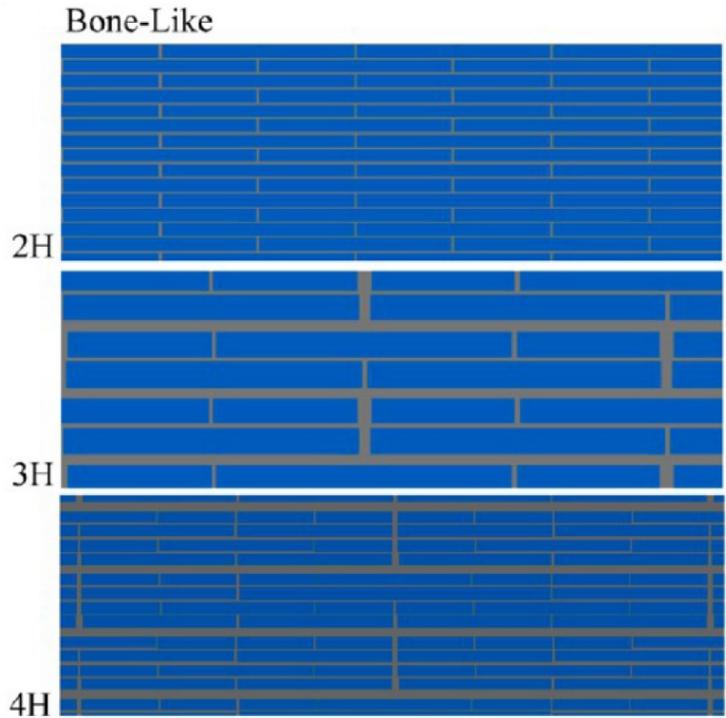


Figura 5: Materiale gerarchico bone-like a diversi livelli gerarchici[55].

Gli studi sopra citati hanno già studiato il materiale, che però è stato preso in una condizione semplificata: si è studiato il materiale disposto in un solo strato. È nata quindi la curiosità di verificare se i risultati trovati da quei team di ricerca siano validi anche nel caso di uno sviluppo tridimensionale, realizzato sovrapponendo diversi strati lievemente traslati per far sì che anche rispetto alla direzione di *stacking* vi sia una continua alternanza tra inclusioni e matrice con la finalità di incrementare le proprietà di resistenza del materiale.

Si studieranno due diverse conformazioni: per prima la geometria 2H a due livelli gerarchici, in cui le inclusioni sono costituite da materiale monolitico, e per seconda la geometria 3H a tre livelli gerarchici, dove le inclusioni sono costituite dal materiale 2H.

3 Omogeneizzazione

La prima cosa da chiarire nel corso di questa trattazione, è cosa si intenda precisamente col termine *omogeneizzazione*. A questo scopo, si cercherà nelle prossime pagine di illustrare in cosa consista e che utilità rivesta.

Sicuramente, come si vedrà, l'*omogeneizzazione* è un processo che riguarda i materiali compositi: lo studio di questa tesi riguarda dei materiali gerarchici, che sono a tutti gli effetti dei materiali compositi particolari, con una struttura geometrica unica, a gerarchie dimensionali appunto, pertanto l'applicazione del metodo della *omogeneizzazione* ai materiali gerarchici è corretta e legittima.

Uno dei fini della Meccanica del Continuo è quello di studiare il comportamento di materiali ideali continui, per arrivare a descrivere e prevedere che risposta daranno a sollecitazioni esterne, utilizzando appropriate relazioni costitutive. La maggior parte delle volte queste relazioni costitutive sono state ricavate dall'osservazione di esperimenti effettuati a livello macroscopico, senza quindi tenere in considerazione gli aspetti meccanici che avvengono a livello microscopico. Ciononostante, è abbastanza semplice capire che ogni provino di materiale su cui si siano eseguiti i vari test avesse al suo interno delle non omogeneità, delle microstrutture o difetti a livello microscopico, che sebbene non fossero visibili a livello macroscopico, hanno poi influenzato il suo comportamento meccanico globale. Dunque, ogni esperimento effettuato a livello macroscopico avrà semplicemente fornito una relazione che lega la sollecitazione esterna alla risposta globale del sistema. Questa riflessione ci conduce a fronteggiare uno fra i principali e fondamentali problemi della scienza e della tecnologia, ossia la relazione cosiddetta "micro-macro": il problema, a livello concreto, consiste nello sviluppare un metodo affidabile per determinare il comportamento macroscopico di un materiale che sia caratterizzato da una eterogeneità a livello microscopico, a partire dalle informazioni a disposizione sulla microstruttura stessa.

L'approccio seguito nel corso di questa tesi segue i dettami della micromeccanica. La micromeccanica studia strutture caratterizzate da dimensioni piccole tali che l'estremo inferiore della scala di grandezza che si sta considerando, cioè l'estremo "micro", sia caratterizzato da una dimensione intermedia tra le grandezze con cui quotidianamente ci si rapporta e le tipiche dimensioni molecolari. Questa *dimensione di riferimento* è correlata alla dimensione media delle eterogeneità nel materiale in esame, siano queste vuoti, fibre, inclusioni, cristalli o altro. Il fine ultimo della micromeccanica è quindi quel-

lo di collegare il comportamento macroscopico di un materiale eterogeneo al dettaglio della struttura microscopica. Il concetto chiave sarà quello di *omogeneizzazione*, che finalmente si può definire come la definizione di un modello di solido omogeneo che dal punto di vista macroscopico si comporti allo stesso modo del solido eterogeneo.

3.0.1 Il concetto di “omogeneizzazione”

In questa sezione si cercherà di chiarire ulteriormente il concetto di omogeneizzazione e di darne una agile formulazione matematica.

Secondo l’approccio della micromeccanica i campi di tensione e di deformazione in un materiale non omogeneo sono suddivisi in contributi che corrispondono ciascuno alla propria grandezza di scala. Si assume che la differenza tra queste grandezze di scala sia grande a sufficienza, in modo tale da ottenere che:

- le fluttuazioni all’interno dei campi di tensione e di deformazione che corrispondono alla minor grandezza di scala (microcampi) influenzino il comportamento macroscopico solamente attraverso la loro media volumetrica;
- sia i gradienti dei campi di tensione e deformazione che i gradienti compositivi alla maggior scala di grandezza (macrocampi) siano insignificanti a livello microscopico, livello al quale questi campi devono apparire localmente costanti e devono poter essere descritti in termini di *campo uniforme (far field)* di tensione e deformazione.

A livello formale, si può descrivere questa suddivisione dei campi di tensione e deformazione in campi *local field* e *far field* con le seguenti relazioni, come già riportato da Kurukuri[46]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) ; \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \quad (1)$$

dove $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sono i campi macroscopici (*far fields*), mentre $\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x})$ rappresentano le fluttuazioni microscopiche.

In ogni regione di un materiale non omogeneo, i campi microscopici di tensione e deformazione, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, sono collegati ai campi macroscopici, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, da relazioni che assumono la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} ; \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2)$$

In aggiunta, se la regione considerata è tale da non contenere, a livello macroscopico, significativi gradienti di tensione, deformazioni o composizione, allora si possono scrivere delle relazioni di omogeneizzazione come segue:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})dV = \frac{1}{2V} \int_S (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}_s + \mathbf{n}_s \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}))dS$$

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2V} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS \\
\bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{V} \int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} dS \\
\bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{2V} \int_S (t_i x_j + t_j x_i) dS
\end{aligned} \tag{3}$$

dove V e S stanno a rappresentare il volume e la superficie della regione presa in esame, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ è il vettore deformazione, $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}_s$ sono i vettori di trazione superficiale, e \mathbf{n}_s sono i versori normali alle superfici. $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ sono denominati *coefficienti di influenza*, oppure *tensori di concentrazione di deformazione e stress*.

Le Eq. (1) e (2) prevedono che le medie volumetriche delle fluttuazioni tendano a zero quando il volume di integrazione è sufficientemente grande; pertanto si ha:

$$\frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) dV = 0 = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) dV \tag{4}$$

Allo stesso modo, pure gli integrali delle fluttuazioni calcolati sulle superfici tendono a 0.

Si può dimostrare che[36], per materiali non omogenei che presentino una differenza sufficiente tra le grandezze di scala, la relazione:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) dV \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) dV \tag{5}$$

fornisce campi di tensione $\boldsymbol{\sigma}^*$ staticamente ammissibili e campi di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ cinematicamente ammissibili. La Eq. (5) è conosciuta come *condizione di Hill per la macro-omogeneità*, nota anche con il nome di *Mandel-Hill condition*. Nel caso particolare di condizioni al contorno di tensione e deformazione omogenee, assume il nome di *Lemma di Hill*. Come conseguenza a queste condizioni, e tenendo sempre valida l'ipotesi di differenza sufficientemente grande tra le grandezze di scala *micro* e *macro*, si ottiene che la densità di energia di deformazione mediata sul volume di un materiale non omogeneo può essere calcolata tramite le medie volumetriche di

tensione e deformazione[46]. In conseguenza, la omogeneizzazione può essere interpretata anche come la ricerca di un modello costitutivo per il materiale che sia energeticamente equivalente alla microstruttura data.

Le micro-geometrie dei materiali non omogenei reali sono sempre casuali e molto complesse, a meno di non ricadere in rari specifici casi, pertanto non è possibile calcolare espressioni esatte di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, ecc. Conseguentemente si dovrà accettare di introdurre delle approssimazioni. Queste approssimazioni saranno basate sulla *ipotesi ergodica* che impone di assumere i materiali eterogenei come statisticamente omogenei[46]. Perciò, scelti casualmente all'interno del materiale diversi volumi sufficientemente estesi su cui svolgere l'omogeneizzazione, questi presenteranno le stesse proprietà meccaniche; queste saranno le proprietà meccaniche del materiale considerato complessivamente a livello macroscopico.

3.0.2 Representative Volume Element

Il volume scelto per svolgere l'omogeneizzazione deve essere selezionato in modo accorto per rappresentare in modo affidabile il materiale studiato; da qui nasce la definizione di RVE (*Representative Volume Element*) ossia un elemento rappresentativo del volume. Lo RVE deve essere un sub-dominio statisticamente rappresentativo delle micro-geometrie ed eterogeneità del materiale in esame.

Si può descrivere lo RVE anche in un altro modo[65, 39] definendolo come un volume che possieda le proprietà meccaniche coincidenti con quelle del materiale globalmente considerato, a prescindere dalle condizioni al contorno applicate. Questa seconda definizione innesca però una dipendenza delle proprietà fisiche in esame dalla dimensione dello RVE[41].

In ogni caso, è buona norma che tale volume sia abbastanza grande da contenere un campionario significativo dei microcampi, ma sufficientemente piccolo da poter ignorare, all'interno di esso, le influenze dei *far fields*. Nel lavoro di Hashin[29] questa esigenza è chiamata *micro* \ll *meso* \ll *macro*, in cui *micro* e *macro* assumono gli usuali significati, mentre *meso* rappresenta la grandezza di scala del volume di omogeneizzazione.

3.0.3 Modulo Elastico Effettivo

I campi di tensione e deformazione di un materiale elastico non omogeneo $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ed $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, ottenuti dalle Eq. (3), possono essere messi in relazione tra loro tramite

i tensori elastici effettivi \mathbf{C}^* e \mathbf{S}^* secondo le relazioni:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^* \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} ; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S}^* \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6)$$

I tensori \mathbf{C}^* e \mathbf{S}^* possono essere considerati i tensori elastici del materiale omogeneo equivalente; possono essere calcolati dalle Eq. (3) a partire dai tensori elastici locali $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ e dai tensori di concentrazione $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ come medie volumetriche:

$$\mathbf{C}^* = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) dV ; \mathbf{S}^* = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) dV \quad (7)$$

dove \mathbf{C}^* rappresenta il tensore effettivo di rigidezza, mentre \mathbf{S}^* rappresenta il tensore effettivo di conformità del materiale.

Il numero di costanti indipendenti in \mathbf{C}^* dipende dalle simmetrie che si assumono.

Il comportamento omogeneizzato di un materiale che presenta più di due fasi può essere idealizzato come statisticamente isotropo[46].

3.1 Omogeneizzazione numerica

Da decenni ormai i materiali compositi sono ampiamente utilizzati in strutture avanzate e sofisticate nei campi più disparati, dall'aeronautico al marino, dal petrolchimico allo spaziale passando per l'automotive, a causa delle loro proprietà meccaniche nettamente superiori ai materiali tradizionali. Pertanto, l'interesse verso lo studio delle proprietà di questi materiali è stato elevato per molto tempo, quindi si sono raggiunti notevoli progressi nello studio delle loro peculiari proprietà, in particolare ci si è concentrati a ricercare metodi per poter prevedere il comportamento del materiale finito. Gli studiosi hanno lavorato utilizzando sia metodi di micro-meccanica che metodi di macro-meccanica.

I metodi di micro-meccanica riescono a descrivere il comportamento globale del materiale composito a partire dalla conoscenza delle proprietà delle fasi che costituiscono il composito stesso, attraverso lo studio di un elemento rappresentativo di volume (RVE)[1, 59].

L'approccio macro-meccanico prevede invece di descrivere il comportamento di un materiale composito con un materiale omogeneo anisotropo equivalente.

Un vantaggio dell'approccio micro-meccanico è quello che, oltre a poter prevedere il comportamento globale del materiale composito, riesce a studiare anche vari importanti meccanismi tra cui quelli di formazione di un danno, o cricca, e la propagazione della stessa.

Vi è un ampio numero di metodi micro-meccanici utilizzati nell'analisi di questi materiali. Ad esempio, si è dimostrata l'esistenza dei limiti superiore ed inferiore per il modulo elastico utilizzando i principi dell'energia variazionale, e grazie all'opera di alcuni ricercatori[32, 31], oggi si hanno a disposizione utili formule analitiche in forma chiusa per poterli calcolare. Purtroppo la generalizzazione di questi metodi ai compositi non lineari, viscoplastici ed elastoplastici è parecchio complessa. Abaoudi[1] è riuscito a sviluppare una teoria micro-meccanica unificata basata sullo studio delle interazioni tra celle periodiche; questa teoria venne usata poi per prevedere il comportamento meccanico globale di materiali compositi, composti sia da fasi elastiche che da fasi inelastiche. Sia nel suo lavoro, che in quello di molti altri studiosi, sono state applicate condizioni al contorno omogenee allo RVE. L'assunzione di vincoli *plane-remains-plane* è valida, infatti, solo per RVE simmetrici sottoposti a sforzi di trazione normali alle superfici esterne; invece, nel caso di sforzi di taglio, i ricercatori hanno indicato che la condizione

al contorno *plane-remains-plane* è ridondante e rende il sistema iper-statico.

Nei prossimi paragrafi si cercherà di evidenziare gli effetti di differenti configurazioni di condizioni al contorno imposte allo RVE, per prevedere le proprietà meccaniche di un materiale eterogeneo attraverso il processo di omogeneizzazione.

3.1.1 Formulazione matematica

Nelle prossime pagine si descriveranno i tre tipi principali di condizioni al contorno che si possono applicare ad un RVE:

1. Condizioni al contorno omogenee;
2. Condizioni al contorno periodiche;
3. Condizioni al contorno miste.

Condizioni al contorno omogenee Le condizioni al contorno omogenee possono essere di due tipi[1]. Sono chiamate omogenee perché, se applicate a corpi omogenei, vi produrranno campi di deformazione o tensione che risulteranno anch'essi omogenei.

Vediamo nel dettaglio le due tipologie:

- *Kinematic uniform boundary conditions (KUBC)*: ossia condizioni al contorno cinematiche uniformi. Concretamente, si applica uno spostamento \mathbf{u}_i ad ogni punto \mathbf{x}_i appartenente alla superficie esterna Γ in modo che:

$$\mathbf{u}_i(\Gamma) = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 \mathbf{x}_j ; \forall \mathbf{x}_j \in \Gamma \quad (8)$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0$ è un tensore di secondo grado, costante e simmetrico, che non ha dipendenza da \mathbf{x}_j .

- *Static uniform boundary conditions (SUBC)*: cioè condizioni al contorno statiche uniformi. In sostanza si impone un vettore di trazione alla superficie esterna:

$$\mathbf{t}_i(\Gamma) = \boldsymbol{\sigma}_{ij}^o \mathbf{n}_j ; \forall \mathbf{x}_j \in \Gamma \quad (9)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_{ij}^o$ è un tensore di secondo grado, costante e simmetrico, che non ha dipendenza da \mathbf{x}_j , e \mathbf{n}_j è il versore normale a Γ in \mathbf{x}_j .

Condizioni al contorno periodiche Si prenda ora in esame una struttura periodica costituita dall'insieme di tante righe, o file, ripetute; ogni riga, o fila, è costituita da una singola unità di cella ripetuta lungo tutta la riga. Il campo di spostamento per tale struttura periodica può essere espresso nel modo seguente:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ij}^0 x_j + \mathbf{u}_i^*(x_1, x_2, x_3) \quad (10)$$

dove ε_{ij}^0 è il tensore di deformazione globale (medio) della struttura periodica. Il primo termine del membro destro dell'equazione rappresenta un campo di spostamento lineare, mentre il secondo termine del membro destro dell'equazione, invece, è una funzione periodica che varia da una cella all'altra. Essa rappresenta l'effetto della eterogeneità del materiale, che produce uno scostamento dallo spostamento lineare introdotto dal primo termine.

Affinché tutte queste righe di celle ripetute diano luogo ad un effettivo corpo fisico continuo, è necessario che le superfici di contatto tra celle adiacenti rispettino le due seguenti condizioni di continuità:

- gli spostamenti devono essere continui, ossia le celle adiacenti non devono né separarsi né compenetrarsi durante la deformazione;
- la distribuzione di sforzi di trazione sulle superfici parallele opposte di una unità di cella devono essere gli stessi.

I campi di spostamento, poiché formulati secondo la Eq. (10), rispettano la prima condizione. La prima condizione, invece, non può essere applicata direttamente alle superfici laterali in quanto la parte periodica $\mathbf{u}_i^*(x_1, x_2, x_3)$ non è in genere nota. Qualsiasi cella elementare deve presentare le superfici esterne sempre in coppie parallele, e gli spostamenti per un paio di superfici parallele opposte possono essere così scritti:

$$\mathbf{u}_i^{k+} = \varepsilon_{ij}^0 \mathbf{x}_j^{k+} + \mathbf{u}_i^* \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_i^{k-} = \varepsilon_{ij}^0 \mathbf{x}_j^{k-} + \mathbf{u}_i^* \quad (12)$$

dove gli indici k^+ e k^- identificano il paio k -esimo di superfici opposte parallele di una cella elementare. È da notare che il contributo $\mathbf{u}_i^*(x_1, x_2, x_3)$ è il medesimo per entrambe le superfici, grazie alla condizione di periodicità, e che pertanto la differenza tra le Eq. (11) e (12) è:

$$(\mathbf{u}_i^{k+} - \mathbf{u}_i^{k-}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 (\mathbf{x}_j^{k+} - \mathbf{x}_j^{k-}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 \Delta \mathbf{x}_j^k \quad (13)$$

$\Delta \mathbf{x}_j^k$ è costante per ogni paio di superfici opposte parallele, perciò il secondo membro della Eq. (13) diviene costante, una volta assunto un valore di $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0$. In questo modo si possono applicare queste equazioni durante le analisi con gli elementi finiti, considerandole come equazioni di vincolo per gli spostamenti dei nodi. L'Eq. (13) è una equazione di vincolo particolare, perché invece che fornire valori degli spostamenti delle superfici esterne, specifica le differenze di spostamento tra due superfici opposte. Pertanto questa equazione rispetta la continuità sugli spostamenti di cui si discuteva poc'anzi. Non si può però essere certi che garantisca sempre il rispetto della continuità degli sforzi di trazione. Le condizioni di continuità tra gli sforzi di trazione, allora, può essere scritta in questo modo:

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{k+} - \boldsymbol{\sigma}_n^{k-} = \mathbf{0} ; \boldsymbol{\sigma}_t^{k+} - \boldsymbol{\sigma}_t^{k-} = \mathbf{0} \quad (14)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_n$ e $\boldsymbol{\sigma}_t$ sono rispettivamente gli sforzi normale e di taglio alle superfici opposte parallele.

Condizioni al contorno miste Queste condizioni al contorno devono essere applicate al RVE in modo tale che tutte le deformazioni meccaniche siano nulle, tranne lungo la direzione secondo la quale si stanno calcolando i coefficienti del materiale. Come carico, viene applicato uno spostamento uniforme unidirezionale.

3.1.2 Implementazione in Abaqus

Le analisi FEM descritte in questa tesi sono state svolte utilizzando il software *DASSAULT Abaqus CAE*.

Per svolgere le analisi di omogeneizzazione numerica in *Abaqus* ci si è avvalsi di un plug-in gratuito, *HomTools*[48], programmato da Stéphane Lejeunes e Stéphane Bourgeois, ricercatori presso i *Laboratori di Meccanica e Acustica* di Marsiglia.

Esso permette di svolgere una analisi di omogeneizzazione numerica con metodo *KUBC* in modo agevole ed accurato.

Una volta creata lo RVE della struttura eterogenea da analizzare, se ne realizza la *mesh* ma non si applica né alcun carico né alcun vincolo. Si definiscono invece 2 *reference points* esterni al corpo. Una volta selezionato il

plug-in *HomTools* dal menù di *Abaqus*, si seleziona il metodo *KUBC small strain*, ossia si svolgerà la omogeneizzazione con il metodo *Kinematic Uniform Boundary Conditions* con piccoli spostamenti, in modo da preservare l'ipotesi di linearità.

Dopo aver selezionato definito i confini dello RVE indicando le sue superfici esterne, e dopo aver selezionato i due *reference points* come punti di controllo, si può dare il via alle analisi vere e proprie: imponendo un piccolo spostamento del primo punto di controllo lungo l'asse X , e applicando un incastro al secondo punto di riferimento, si possono ricavare i termini C'_{11} , C'_{12} e C'_{13} . Allo stesso modo, imponendo un piccolo spostamento lungo gli assi Y e Z , si possono ricavare rispettivamente C'_{22} , C'_{33} e C'_{23} .

Imponendo ora un piccolo spostamento al secondo punto di controllo, e vincolando il primo, lungo le 3 direzioni principali, si possono ricavare rispettivamente C'_{44} , C'_{55} e C'_{66} .

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Per calcolare l'effettivo tensore di rigidezza \mathbf{C} , tuttavia, dobbiamo dividere i termini di \mathbf{C}' per il volume dello RVE:

$$\mathbf{C}^* = \frac{\mathbf{C}'}{V}; \quad C_{ij} = \frac{C'_{ij}}{V}; \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (16)$$

dove V è il volume dello RVE.

Il materiale omogeneizzato è infatti ortotropo.

Sapendo che[66]:

$$\mathbf{C}^* = \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{E_{11}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E_{12}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E_{13}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{E_{12}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E_{22}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E_{23}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{E_{13}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E_{23}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E_{33}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6
 \end{array} \quad (17)$$

si può, impostando un opportuno sistema, ricavare tutti i moduli elastici E , il coefficiente di Poisson ν ed i moduli a taglio G .

3.2 Omogeneizzazione analitica

Le procedure di omogeneizzazione analitica mirano al trovare la risposta dell'elemento di volume a carichi meccanici applicati, che sono tipicamente *far fields* di tensione oppure di deformazione. Dalla risposta dell'elemento si vanno a dedurre le corrispondenti proprietà meccaniche globali. Se si desidera optare per l'approccio più diretto possibile, si può seguire la strada della caratterizzazione del materiale: si simula la risposta del materiale globale a dei semplici carichi imposti, quale per esempio può essere il test di trazione mono-assiale.

Oltre alla caratterizzazione del materiale e ai modelli costitutivi vi sono ulteriori metodi per svolgere l'omogeneizzazione di un materiale, che sono importanti applicazioni della micro-meccanica del continuo; ci si soffermerà soprattutto ad analizzare gli studi dei fenomeni locali nei materiali eterogenei. Per fenomeni locali si possono intendere, ad esempio, la creazione e l'evoluzione di una micro-danno, la nucleazione e la propagazione di una cricca, le tensioni alle intersezioni tra le interfacce macroscopiche e le superfici libere, gli effetti delle instabilità locali, le interazioni tra le trasformazioni di fase e i micro-campi di tensione, ecc. Questi fenomeni locali risentono in modo deciso dell'influsso dei singoli dettagli della micro-struttura, tanto che questi a volte possono determinare effetti macroscopici, quali la resistenza meccanica durante una frattura fragile in un materiale eterogeneo.

Analizzare nel dettaglio le variazioni spaziali dei micro-campi in un volume che sia sufficientemente grande per rappresentarne la effettiva distribuzione statistica supera le odierne capacità tecnologiche, perciò sarà necessario accettare delle ragionevoli approssimazioni.

Tra poco saranno descritti dei metodi di modellazione, che si possono classificare per praticità e convenienza in due grandi categorie.

- La prima categoria include metodi che descrivono le micro-geometrie dei materiali eterogenei sulla base di informazioni statistiche; tra essi si trovano:
 1. *Mean Field Approaches (MFA)*: l'approccio basato su MFA viene descritto da formulazioni elaborate in termini di tensori di concentrazioni di fase. Richiedono uno sforzo di calcolo relativamente basso, e finora hanno dimostrato di saper descrivere il comportamento elastico dei materiali eterogenei con grande successo[12, 68];

2. *Variational Bounding Methods*: i principi variazionali vengono utilizzati per ottenere i limiti superiore ed inferiore del tensore elastico globale, dei moduli elastici, dei moduli a taglio, e delle altre proprietà fisiche che possono caratterizzare un solido non omogeneo[54, 9]. Spesso sono ricavati dai campi di tensione continui a fase. Diversi Metodi Variazionali sono collegati agli MFA.
 - La seconda categoria di metodi ha come denominatore comune lo studio di micro-strutture definite e discrete, ed include:
 1. *Periodic Microfield Approaches (PMA)* o *Unit Cell Methods*[67, 23];
 2. *Embedded Cell Approaches (ECA)*;
 3. *Windowing Approaches*[26].

Si andrà ora ad analizzare brevemente un paio tra i metodi *MFA*, in particolare quelli che verranno utilizzati nelle analisi svolte in questa tesi, pertanto saranno trattati i metodi:

- *Mori-Tanaka Method*;
- *Self Consistent Method*.

3.2.1 Mori-Tanaka Method

Il metodo *Mori-Tanaka*, omonimo dei due ricercatori che l'hanno elaborato[57] nel 1973, si propone di calcolare gli stress interni medi nella matrice di un materiale che contiene precipitati, tramite l'utilizzo delle *autotensioni*.

Nel 1987 Benveniste[8] ha riformulato il suddetto metodo, affinché potesse essere applicato anche ai materiali compositi.

Benveniste elaborò la sua teoria prendendo in considerazione delle fasi anisotropiche ed ellissoidali. Imponendo condizioni al contorno omogenee per gli spostamenti e per gli sforzi di trazione ottenne:

$$\mathbf{u}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x} ; \mathbf{t}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} \quad (18)$$

dove $\mathbf{u}(S)$ e $\mathbf{t}(S)$ rappresentano rispettivamente gli spostamenti e gli sforzi di trazione, S è la superficie esterna del materiale composito, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ e $\boldsymbol{\sigma}^0$ sono i tensori costanti di deformazione e di tensione, \mathbf{x} denota la posizione del punto

in analisi, n sta a rappresentare il versore normale esterno alla superficie S. Questo duplice set di condizioni al contorno è utile per definire la rigidità effettiva ed il tensore di conformità del materiale composito studiato. Prima di procedere, si ricorda che in questa sezione i pedici f ed m denotano, rispettivamente, la fase di inclusioni e la matrice(matrix).

Sulla base delle Eq. (18), possiamo scrivere le seguenti:

$$\bar{\epsilon} = V_m \bar{\epsilon}^{(m)} + V_f \langle \bar{\epsilon}^{(f)} \rangle = \epsilon^0 \quad (19)$$

$$\bar{\sigma} = V_1 \bar{\sigma}^{(m)} + V_2 \langle \bar{\sigma}^{(f)} \rangle = \sigma^0 \quad (20)$$

dove $\langle \bar{\epsilon}^{(f)} \rangle$ e $\langle \bar{\sigma}^{(f)} \rangle$ sono i tensori medi di deformazione e di tensione, dipendenti dalla direzione; $\bar{\epsilon}^{(m)}$ e $\bar{\sigma}^{(m)}$ rappresentano le quantità medie nella matrice, ed infine $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\sigma}$ denotano i tensori medi globali di deformazione e di tensione.

Il tensore di rigidità effettiva \mathbf{C}^* si definisce come segue:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{C}^* \bar{\epsilon} \quad (21)$$

È possibile definire le proprietà effettive del materiale con la Eq. (22):

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(m)} + V_2 (\mathbf{C}^{(f)} - \mathbf{C}^{(m)}) \mathbf{A}_2 \quad (22)$$

dove $\mathbf{C}^{(m)}$ e $\mathbf{C}^{(f)}$ sono i tensori di rigidità di fase e matrice, ed il tensore che introduce la dipendenza dalla direzione, \mathbf{A}_2 , definito in letteratura come *fattore di concentrazione*, si può ricavare in questo modo:

$$\bar{\epsilon}^{(2)} = \mathbf{A}_2 \epsilon^0 \quad (23)$$

È possibile definire il fattore di concentrazione anche dalla approssimazione diluita, tale che:

$$\mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{T} \quad (24)$$

dove \mathbf{T} può essere scritto in termini del tensore di Eshelby \mathbf{P} , come:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I} + \mathbf{P}[\mathbf{C}^{(m)}]^{-1}(\mathbf{C}^{(f)} - \mathbf{C}^{(m)})]^{-1} \quad (25)$$

dove \mathbf{I} è il tensore identità di 4° ordine.

Questa approssimazione, a causa del modello «diluito», ignora le interazioni tra le singole particelle e risulta quindi valida soprattutto nei casi di scarsa concentrazione di inclusioni.

Per estendere la validità di questo metodo alla maggior parte dei casi riscontrabili nelle analisi del mondo reale, si può assumere che esista un tensore tale che:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(f)} \approx \mathbf{M}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)} \quad (26)$$

Utilizzando le Eq. (20), (23) e (26), si ricava che l'approssimazione in questo metodo consiste nell'affermare che:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}. \quad (27)$$

Risulta perciò che:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(m)} + V_f(\mathbf{C}^{(f)} - \mathbf{C}^{(m)})\mathbf{T}(V_m\mathbf{I} + V_f\mathbf{T})^{-1} \quad (28)$$

ed una relazione simile può essere scritta per l'effettivo tensore di conformità. *Benveniste* ha dimostrato[8] inoltre che questi risultati sono consistenti, nel senso che:

$$\mathbf{S}^* = (\mathbf{C}^*)^{-1}. \quad (29)$$

Infine:

$$\frac{\varepsilon_{kk}^{(f)}}{\varepsilon_{kk}^0} = (3K_m + 4G_m)/(3K_f + 4G_f) \quad (30)$$

e l'effettivo *bulk modulus*:

$$K^* = K_m + \frac{K_m V_f (K_f - K_m)}{(1 - V_f)(K_f - K_m)\alpha_m + K_m} \quad (31)$$

e l'effettivo modulo a taglio:

$$G^* = G_m + \frac{G_m V_f (G_f - G_m)}{(1 - V_f)(G_f - G_m)\alpha_m + G_m} \quad (32)$$

dove

$$\alpha_m = \frac{3K_m}{(3K_m + 4G_m)} \quad (33)$$

3.2.2 Self Consistent Method

Molti studiosi hanno indirizzato le loro ricerche principalmente sulla elaborazione di metodi che potessero predire le proprietà macroscopiche di un solido composito a due fasi[30], ed in particolare che potessero determinare gli estremi massimo e minimo tra i quali ci si potesse aspettare ricadessero i moduli elastici.

Questi “confini ideali” sono influenzati solamente dai rapporti tra i volumi delle fasi, e non risentono in alcun modo della conformazione geometrica del materiale, se non nello specifico caso in cui una fase consista di fibre continue allineate[31].

È tuttavia possibile adottare un approccio molto più diretto, se il materiale analizzato presenta la fase di inclusioni costituita da ellissoidi dispersi nella fase di matrice. A differenza del metodo Mori-Tanaka, peraltro, questo approccio garantisce buoni risultati anche se la concentrazione di inclusioni è medio-alta (circa il 40%). Questo metodo, che prende il nome di *Self Consistent Method*, fu inizialmente elaborato per studiare il comportamento dei policristalli da Hershey[33] e da Kroner[44]. Hill[35] ebbe il merito di rivisitare e rielaborare in un secondo tempo la loro teoria, rendendola applicabile in molti più casi applicativi.

Il metodo prevede di studiare il comportamento meccanico del materiale utilizzando un problema elastico ausiliario. In particolare, si assume di modellare le interazioni tra le fasi ipotizzando che ciascuna fase sia immersa in una matrice omogenea infinita che presenti le proprietà globali del materiale composito (\mathbf{C} ed \mathbf{S}). Prima di procedere, si ricorda che in questa sezione i pedici f ed m denotano, rispettivamente, le inclusioni e la matrice.

Si può iniziare la trattazione a partire dalla relazione elementare che lega le tensioni nelle fasi, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f$ e $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m$, con la tensione media globale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$V_f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + V_m(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = 0 \quad (34)$$

Il postulato base del *Metodo Self Consistent* afferma che:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f - \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^*(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_f) \quad (35)$$

quindi dalla prima delle Eq. (3):

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m - \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^*(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m) \quad (36)$$

Evidentemente, i fattori di concentrazione per entrambe la fasi, inclusione e matrice, sono derivate dallo stesso tensore \mathbf{C}^* . Ciò significa che, se si considerasse un composito fittizio nel quale i ruoli delle fasi fossero invertiti, si otterrebbero i medesimi moduli di elasticità globali. Le Eq. (35) e (36) possono essere combinate:

$$(\mathbf{C}^* + \mathbf{C}_f)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = (\mathbf{C}^* + \mathbf{C}_m)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m = (\mathbf{C}^* + \mathbf{C})\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (37)$$

L'Eq. (37), se risolta, fornisce la rigidezza effettiva del composito per un numero elevato di forme di inclusioni. La procedura risolutiva assume il nome di *Self Consistent Scheme*. Questo metodo approssimato ha dimostrato di saper generare eccellenti previsioni delle effettive proprietà del materiale, quando la concentrazione della componente dispersa è inferiore o uguale al 40%. Tuttavia la affidabilità dei risultati forniti a questo tipo di analisi crolla drasticamente se la concentrazione in volume delle inclusioni supera il 50%.

Per un composito contenente inclusioni elastiche, lo schema Self Consistent fornisce due equazioni per K^* e G^* che vanno risolte in modo iterativo:

$$K^* = K_m + \frac{V_f K^* (K_f - K_m)}{K^* + \left(\frac{3K^*}{3K^* + 4G^*}\right)(K_f - K^*)} \quad (38)$$

$$G^* = G_m + \frac{V_f G^* (G_f - G_m)}{K^* + \left(\frac{6K^* + 12G^*}{15K^* + 10G^*}\right)(G_f - G^*)} \quad (39)$$

dove K^* è l'effettivo bulk modulus del materiale composito, G^* è l'effettivo modulo a taglio del composito, K_f è il bulk modulus e G_f è il modulo a taglio del materiale delle inclusioni, K_m è il bulk modulus e G_m è il modulo a taglio del materiale della matrice, V_f è la frazione di volume delle inclusioni[35].

3.2.3 Influenza della geometria delle inclusioni

Si riportano, nella seguente tabella, i tensori di Eshelby[52] che esplicano l'influenza della geometria delle inclusioni nei calcoli per trovare le proprietà globali di un materiale composito:

	Tensore di Eshelby \mathbf{P}					
Sfera	0.5805	0.1210	0.1210	0	0	0
	0.1210	0.5805	0.1210	0	0	0
	0.1210	0.1210	0.5805	0	0	0
	0	0	0	0.2198	0	0
	0	0	0	0	0.2198	0
	0	0	0	0	0	0.2198
Ellissoide - spect ratio 0.75	0.6783	0.1380	0.2574	0	0	0
	0.1380	0.6783	0.2574	0	0	0
	0.0195	0.0195	0.2207	0	0	0
	0	0	0	0.2208	0	0
	0	0	0	0	0.2208	0
	0	0	0	0	0	0.2702

Tabella 1: Influenza della geometria delle inclusioni.

Nella corso di questa tesi, si approssimeranno le inclusioni con degli ellisoidi, che abbiano gli assi principali della stessa lunghezza delle dimensioni delle inclusioni.

3.2.4 Descrizione codice

Il codice utilizzato in questa tesi per svolgere i calcoli di omogeneizzazione del materiale gerarchico in esame è stato in parte redatto in maniera autonoma ed in parte integrato con delle *functions* appartenenti a *MMTensor 1.0* [56], un pacchetto di utili funzioni, compilate da Maarten Moesen dell'Università Cattolica di Leuven. Il linguaggio di programmazione è MatLab®.

È utile ora illustrare, almeno in linea generale, il funzionamento del codice utilizzato, per avere una idea del flusso logico che sta alla base della procedura di calcolo.

Metodo Mori-Tanaka Il metodo può essere riassunto dal seguente schema:

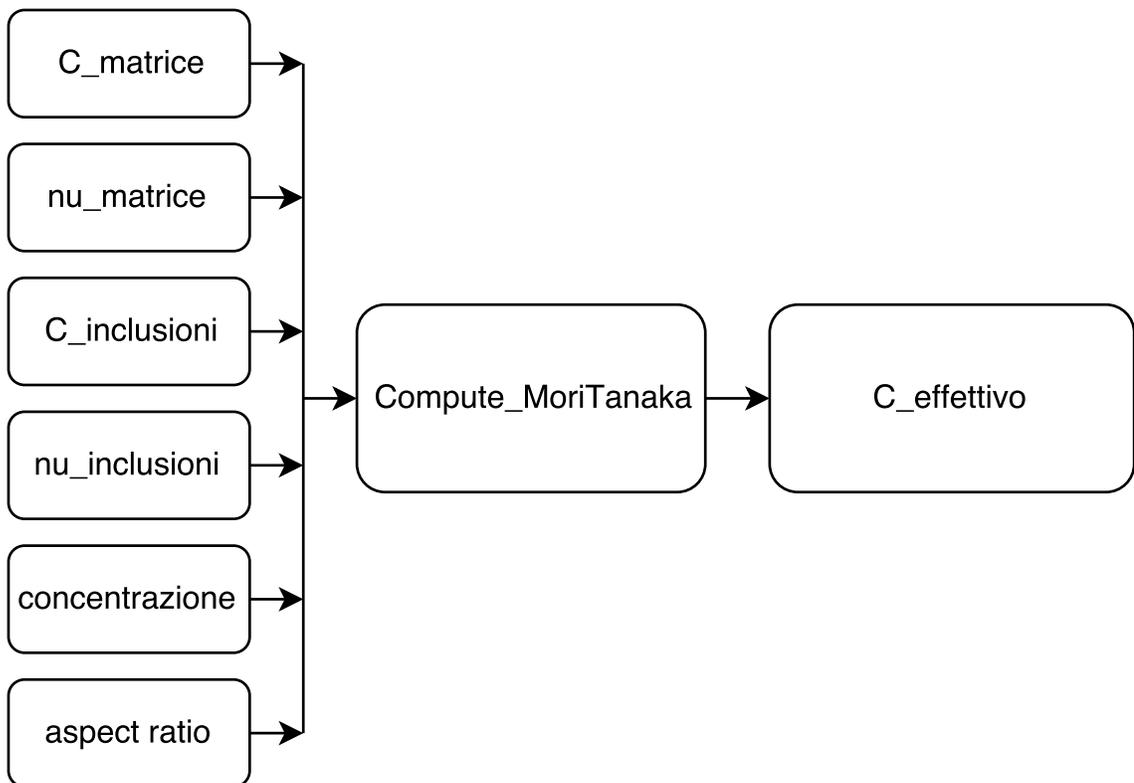


Figura 6: Schema generale Mori-Tanaka.

Il codice riceve come input il tensore di rigidezza della matrice e delle inclusioni, i coefficienti di Poisson dei due materiali, la concentrazione e l'aspect ratio delle inclusioni; all'uscita genera il tensore di rigidezza effettivo del materiale globale.

Volendo però capire con più precisione cosa avviene all'interno del blocco *Compute_MoriTanaka*, ci si può aiutare con la Fig. (7):

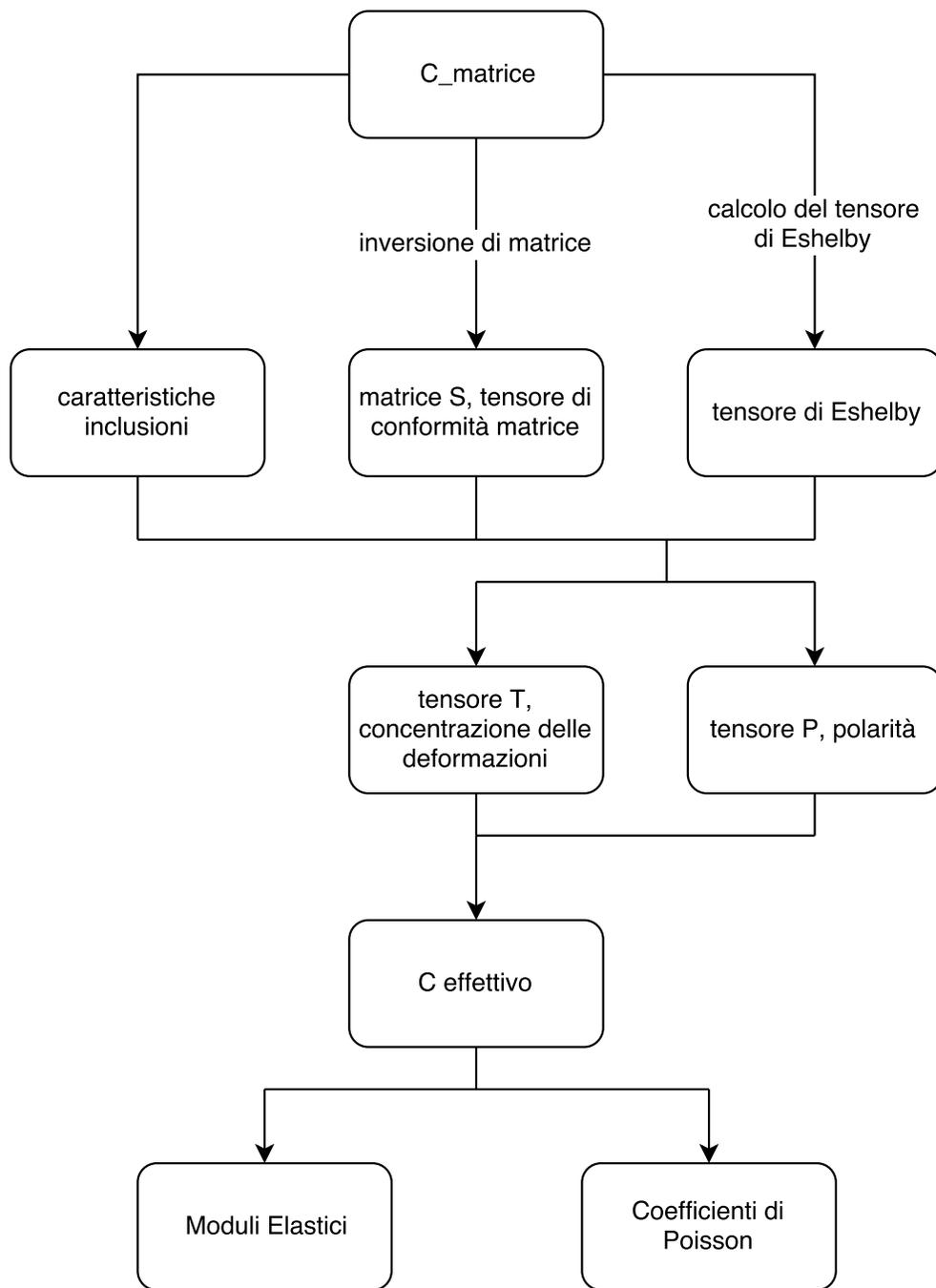


Figura 7: Schema logico Compute_MoriTanaka.

Il codice provvede quindi, come prima cosa, a calcolare le caratteristiche delle inclusioni a partire dai dati di input. Prosegue poi calcolando il tensore di conformità della matrice invertendo il tensore di rigidezza della stessa, ed infine calcola il tensore di Eshelby[58] con il metodo descritto da Mura.

Il passo seguente è il calcolo dei tensori T e P , a partire dai dati appena ricavati. Grazie ai tensori P e T si può agevolmente calcolare il tensore C effettivo del materiale composito.

Una volta ottenuto il tensore di rigidezza del materiale studiato, se ne possono estrarre i moduli elastici ed i coefficienti di Poisson.

Metodo Self Consistent Il metodo Self Consistent, a differenza del metodo Mori-Tanaka che è diretto, prevede un procedimento di calcolo iterativo.

In Fig. (8) è possibile vedere che dati di input siano necessari alla funzione per poter calcolare il tensore di rigidità del materiale.

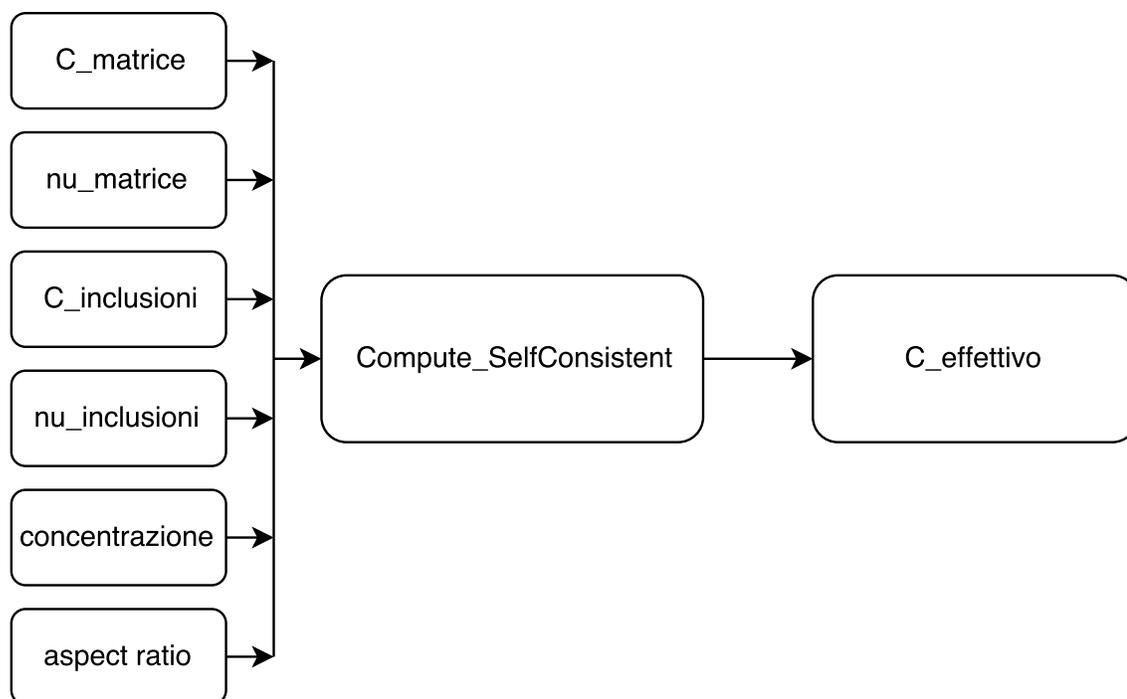


Figura 8: Schema generale SelfConsistent.

In Fig. (9) si potrà apprezzare nel dettaglio il flusso logico, in particolare il loop iterativo che caratterizza questo processo di calcolo:

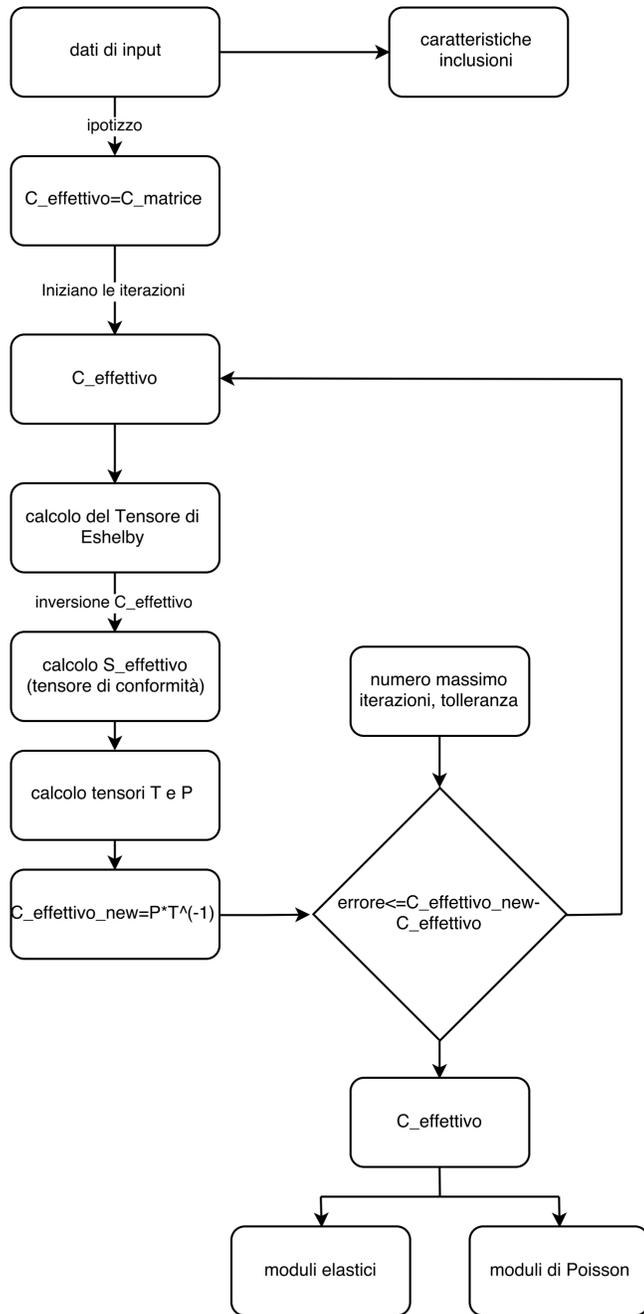


Figura 9: Schema logico Compute_SelfConsistent.

È quindi chiaro il procedimento: il codice ipotizza un $C_{\text{effettivo}}$ di primo tentativo uguale al tensore di rigidezza della matrice, poi calcola il tensore di Eshelby sempre con la procedura di Mura[58]; successivamente vengono calcolati i tensori T e P che permettono il calcolo del nuovo tensore di rigidezza $C_{\text{effettivo_new}}$. Il processo viene iterato fino a quando lo scarto tra i due seguenti $C_{\text{effettivo}}$ è inferiore alla tolleranza impostata. Si pone comunque un tetto massimo alle iterazioni per evitare un lock-down del calcolatore in caso di analisi fallaci.

Infine, una volta ottenuto il tensore di rigidezza effettivo del materiale, se ne possono estrarre i moduli elastici ed i coefficienti di Poisson.

3.3 Materiale in esame

Si procederà ora a dare una descrizione del materiale sottoposto ad analisi. Inizialmente verrà descritta la geometria, sottolineando l'aspetto gerarchico che la caratterizza; in un secondo momento si presenteranno i materiali scelti per la realizzazione del prototipo virtuale.

3.3.1 Geometria del modulo gerarchico

Si è dovuta scegliere una conformazione geometrica tale da poter essere realizzata tramite la sempre più diffusa e comune stampa 3D.

La scelta è ricaduta sulla struttura definita “bone-like”, perché ricorda la conformazione dell'osso trabecolare, che sarebbe la parte interna e spugnosa delle ossa.

Questa configurazione, sebbene relativamente semplice, è stata oggetto di notevole interessamento, infatti è stata studiata da numerosi team di ricerca[55, 64, 17, 19, 18, 16].

La struttura si compone sostanzialmente di una fase elastica in cui sono disposte in modo ordinato inclusioni regolari di fase rigida.

Gli articoli sopra citati hanno già studiato il materiale, che però è stato preso in una condizione semplificata: si è studiato il comportamento meccanico del materiale disposto in un solo strato. L'analisi è stata estesa anche nel caso di uno sviluppo tridimensionale, realizzato sovrapponendo diversi strati lievemente traslati per far sì che anche rispetto alla direzione di *stacking* vi sia una continua alternanza tra inclusioni e matrice. Si ricerca una continua alternanza tra matrice ed inclusioni perché così una cricca, durante la sua propagazione all'interno del materiale gerarchico, dovrà seguire un percorso nella matrice, meno resistente, aggirando le inclusioni. In questo modo la cricca deve compiere un percorso più lungo, ed i cambi di direzione della cricca richiedono energia anch'essi, aumentando quindi l'energia di frattura che il materiale può assorbire prima di giungere a rottura.

Si studieranno due diverse conformazioni: per prima la geometria 2H a due livelli gerarchici, in cui le inclusioni sono costituite di materiale monolitico, e per seconda la geometria 3H a tre livelli gerarchici, dove le inclusioni sono costituite dal materiale 2H.

Geometria 2H Nella Fig. (10) si riporta la geometria 2H oggetto dello studio:

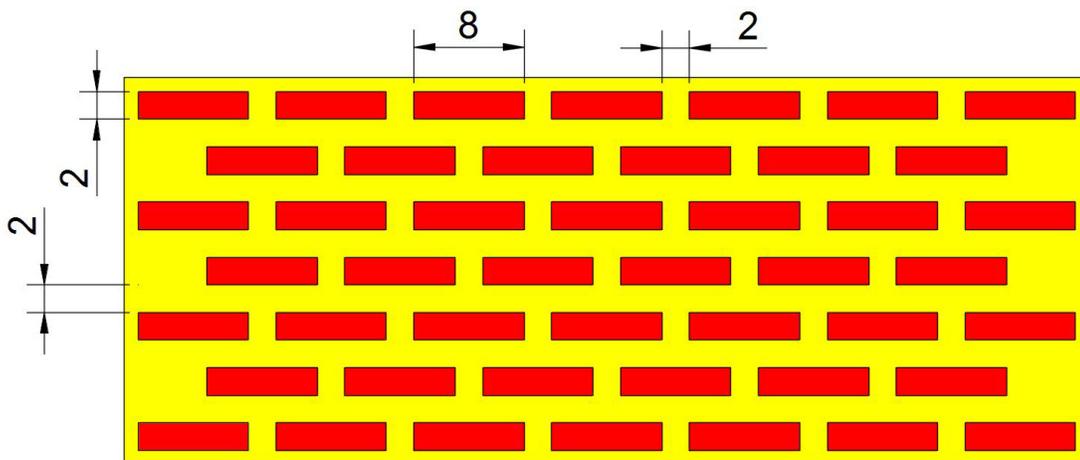


Figura 10: Rappresentazione della geometria bone-like 2H - strato A.

Osservando la Fig. (10) si può apprezzare la conformazione geometrica, con la fase elastica, colorata in giallo, che avvolge la fase rigida, colorata in rosso. Si possono apprezzare anche le dimensioni in mm della geometria, costituita quindi da delle inclusioni di dimensioni $8*2*2 mm$ immerse in modo ordinato e regolare in una matrice elastica. Gli interstizi tra una inclusione e quelle adiacenti sono di $2 mm$. La Fig. (10) rappresenta lo strato A, mentre nella Fig. (11) si può vedere la disposizione dello strato B. Il materiale sarà poi costituito da una sovrapposizione ripetuta di piani B e piani A.

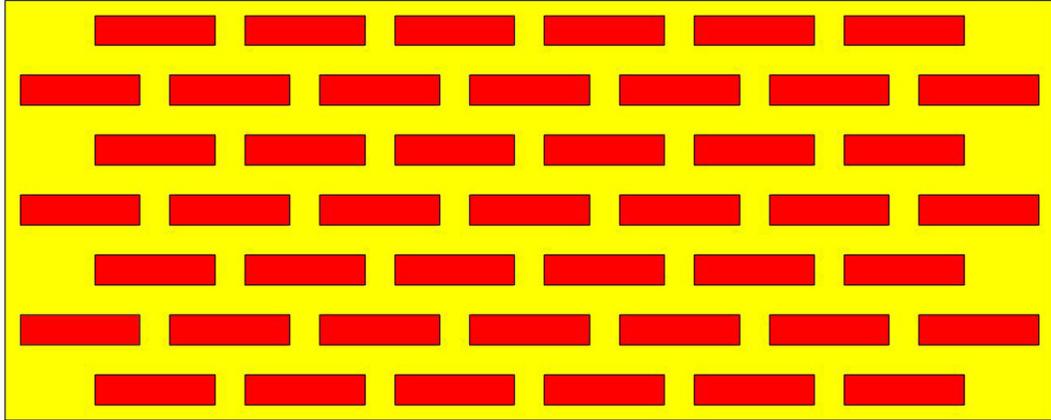


Figura 11: Rappresentazione della geometria bone-like 2H - strato B.

Per meglio comprendere lo sviluppo nella terza dimensione, ci si avvarrà dell'ausilio della Fig. (12):



Figura 12: Sviluppo della geometria 2H nella direzione di stacking.

Lo spessore di ogni strato è di 2 mm .

Geometria 3H Considerato che il materiale studiato è una struttura gerarchica, risulta ovvio dire che la geometria di terzo ordine (3H) è identica alla geometria 2H, da cui differisce solo per due aspetti:

1. differenti dimensioni, ma uguali rapporti dimensionali tra le parti;
2. le inclusioni sono costituite da materiale a struttura 2H.

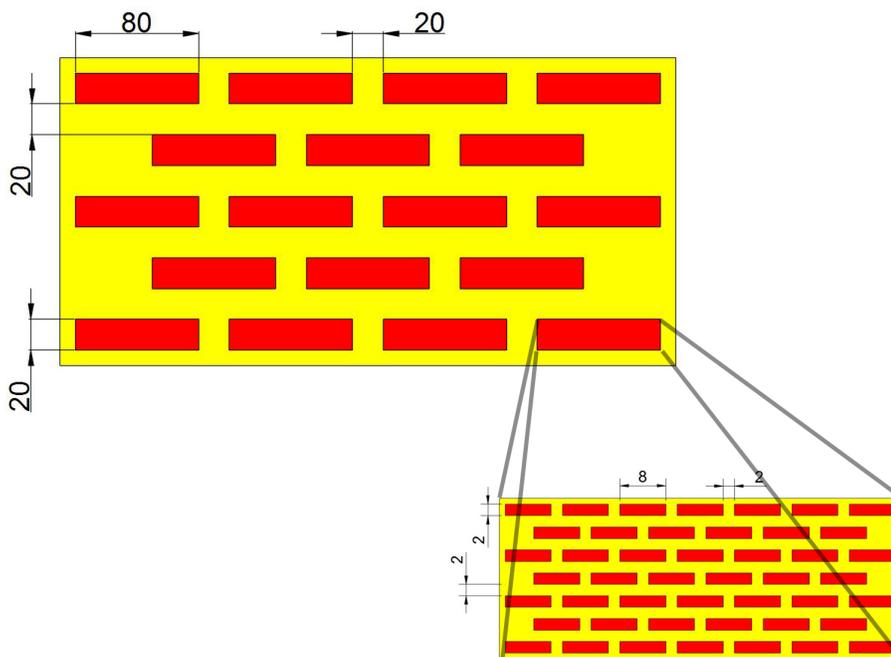


Figura 13: Rappresentazione della geometria bone-like 3H con zoom su una inclusione - piano A

In Fig. (13) è possibile apprezzare la conformazione di una porzione di uno strato di geometria 3H: si vedono le inclusioni, costituite di materiale 2H e colorate in rosso, immerse nella matrice, colorata in giallo. Le inclusioni hanno dimensioni $80*20*20 \text{ mm}$. Anche per la geometria di terzo ordine lo sviluppo nella terza dimensione è costituita da piani lievemente sfasati; se nella Fig. (13) è rappresentato lo strato A, nella Fig. (14) si può vedere la disposizione delle inclusioni nello strato B, disposte per avere una continua alternanza, nel materiale, tra matrice ed inclusioni:

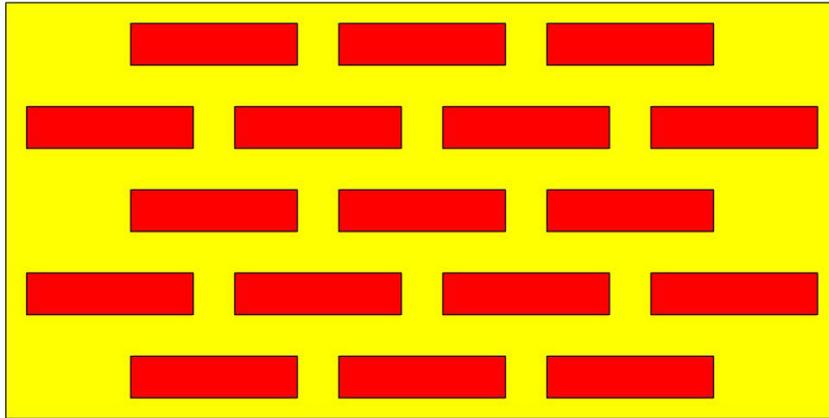


Figura 14: Rappresentazione della geometria bone-like 3H - strato B.

Infine la Fig. (15) chiarifica la disposizione degli strati lungo lo sviluppo della terza dimensione:

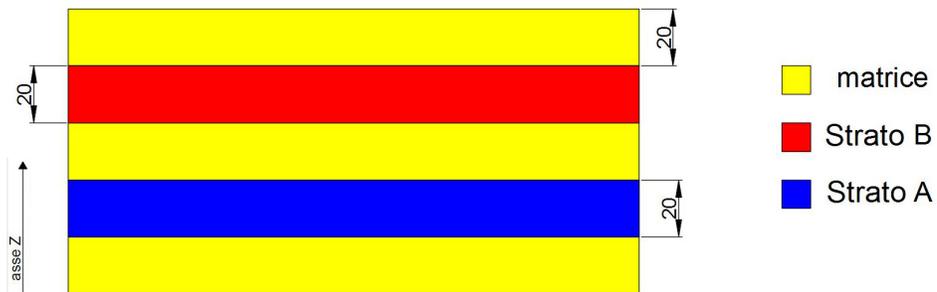


Figura 15: Sviluppo della geometria 3H nella direzione di stacking.

Si nota come ogni strato sia spesso 20 mm .

3.3.2 Proprietà dei materiali

La scelta dei materiali da utilizzare per lo studio del materiale in esame è ricaduta su due polimeri che manifestano proprietà meccaniche contrastanti. Questi materiali sono stati utilizzati in diversi studi[55, 17, 16, 19, 18], a causa della loro ottima adattabilità al processo di stampa 3D.

I due polimeri, prodotti dalle ZARE Prototipi, sono fotopolimeri, basati su resine fotopolimeriche a base acrilica.

Per la fase rigida si è scelto il polimero *VeroWhitePlus*, mentre per la fase elastica il polimero prescelto è il *TangoBlackPlus*.

Le caratteristiche meccaniche salienti dei due materiali sono riportate nella tabella 2:

Polimero	Modulo Elastico [MPa]	Coefficiente di Poisson
<i>VeroWhitePlus</i>	3000	0.35
<i>TangoBlackPlus</i>	1320	0.35

Tabella 2: Proprietà elastiche dei polimeri.

La scelta dei moduli elastici non è casuale ma risponde a scelte di progettazione ben precise: studi precedenti[55, 17, 16, 19, 18] hanno infatti dimostrato che le performance meccaniche del materiale gerarchico realizzato con geometria *bone-like* raggiungono i valori massimi quando il rapporto tra i moduli $\rho = \frac{E_{soft}}{E_{stiff}}$ assume il valore 0.44 .

Risulta importante specificare che, essendo l'omogeneizzazione un processo che riguarda solo la fase di deformazione lineare elastica, le uniche caratteristiche dei materiali che servono, in questa fase dello studio, sono appunto i soli moduli elastici ed i coefficienti di Poisson.

3.4 Risultati analisi di omogeneizzazione

Nelle prossime pagine si descriveranno le analisi di omogeneizzazione numerica; si confronteranno poi i risultati ottenuti, al fine di verificare quale, tra i vari metodi di omogeneizzazione proposti, sia il più attendibile per la struttura gerarchica in esame.

3.4.1 Scelta dello RVE

Come prima cosa, risulta essenziale capire che RVE si è scelto per queste analisi. Si è sottolineata infatti, nelle pagine precedenti, quanto sia importante effettuare la scelta di un RVE opportuno affinché possa rappresentare in modo completo e statisticamente affidabile la micro-geometria del materiale che si deve studiare.

Innanzitutto, si presenterà lo RVE prescelto per la analisi 2H, che differirà in quanto a dimensioni dallo RVE per la geometria 3H: le configurazioni dei due RVE saranno invece sostanzialmente identiche, in quanto differenti livelli gerarchici dello stesso materiale, ma le dimensioni effettive saranno senza dubbio differenti, perché è presente un intero salto di scala tra i due livelli.

RVE 2H Avere una visione d'insieme sulla geometria del materiale è un requisito fondamentale per poter scegliere in modo opportuno lo RVE. Nella prossima figura si può osservare come la ripetizione continua ed ordinata delle inclusioni possa essere fedelmente rappresentata dallo RVE selezionato in blu, descritto dalle dimensioni in mm:

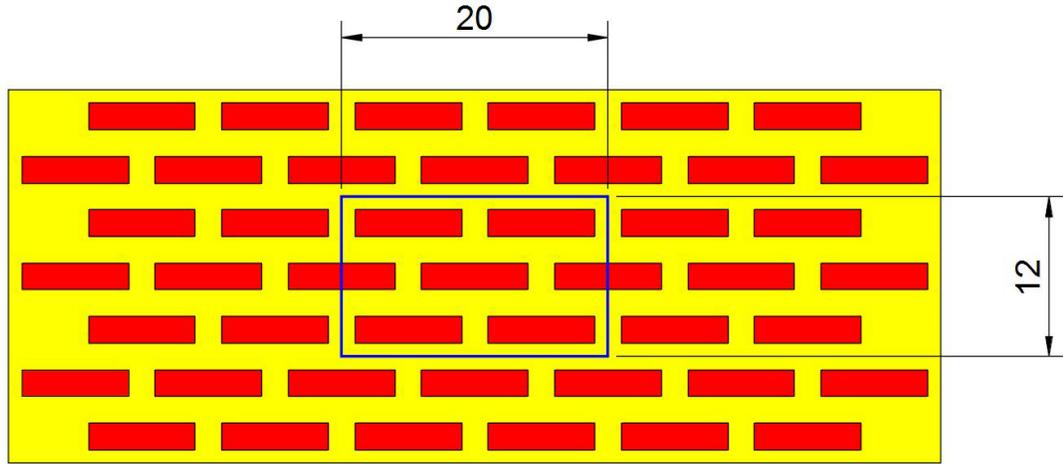


Figura 16: Strato A dello RVE 2H.

Si può quindi verificare come lo RVE prescelto costituisca una rappresentazione affidabile, anche statisticamente, delle inclusioni e delle geometrie del materiale.

Nelle prossime figure è possibile osservare la geometria dello RVE, che dovendo rappresentare un materiale tridimensionale, presenterà anch'esso uno sviluppo nella direzione di stacking. Anche qui ci sarà utile la notazione di piano A e piano B per indicare due strati differenti di materiale che andranno a sovrapporsi per costituire il materiale finale.

In Fig. (17) si può apprezzare nel dettaglio le dimensioni, in mm , del piano A. Nella prossima figura sarà riportato il strato B:

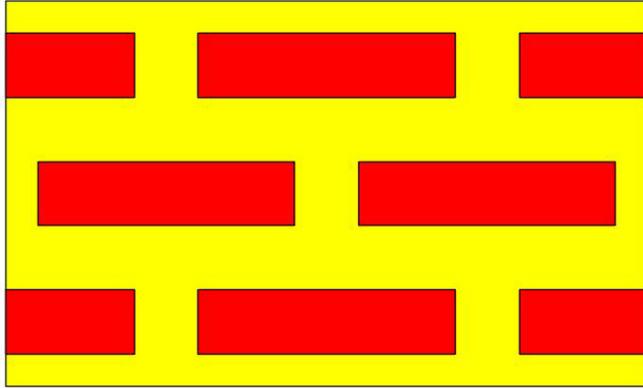


Figura 17: Strato B dello RVE 2H.

Le dimensioni sono le medesime della Fig. (16).

Infine si presenta lo sviluppo della geometria nella direzione di *stacking*:

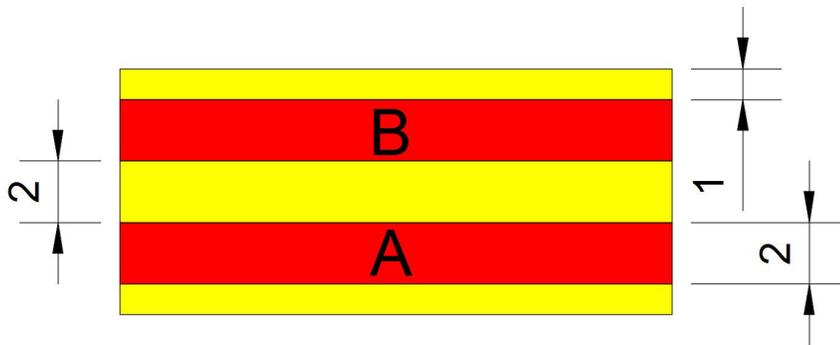


Figura 18: Sviluppo tridimensionale dello RVE 2H.

Lo sviluppo nella terza dimensione consta quindi di due strati da 1 mm di matrice esterni, ed all'interno i due strati A e B, spessi entrambi 2 mm, separati da un ulteriore strato di matrice spesso 2 mm.

Il modello di RVE presenta perciò le dimensioni di 20*12*8 mm.

Per quanto concerne la *mesh* realizzata sullo RVE al fine di svolgere l'analisi di omogeneizzazione numerica, la dimensione tipica di elemento è stata

posta ad 1 mm, ed il tipo di elemento prescelto è stato l'elemento *hexagonal* ad 8 nodi. In totale la mesh dello RVE 2H è costituita da 1920 elementi *hexa*.

Questo RVE è capace di generare, tramite sue ripetizioni nello spazio, l'effettivo materiale gerarchico in esame. Purtroppo però costringe ad una approssimazione in un altro campo, perché le inclusioni che contiene presentano due differenti *aspect ratios*, in quanto hanno differenti dimensioni, mentre invece il materiale originale è costituito da inclusioni tutte uguali tra loro; questa approssimazione però consente di ottenere delle percentuali delle fasi rigida ed elastica nello RVE che siano quelle esatte del materiale studiato.

RVE 3H Essendo la struttura gerarchica caratterizzata dalla ripetizione delle configurazioni ai differenti livelli di scala, e poiché la differenza di scala tra il livello 2H ed il livello 3H è esattamente un fattore 10, lo RVE della geometria 3H è perfettamente simile allo RVE della geometria 2H, con due sole, ma fondamentali, differenze:

1. Ogni dimensione dello RVE 3H è esattamente 10 volte la corrispondente misura dello RVE 2H;
2. le inclusioni della geometria 3H sono realizzate dal materiale con geometria 2H.

Evitando di presentare immagini ridondanti, resta semplicemente da sottolineare che la dimensione tipica di elemento pre questo modello è stata posta a 10 mm, quindi la *mesh* di questo RVE è costituito anch'esso da 1920 elementi *hexa* a 8 nodi.

3.4.2 Parametri meccanici dei materiali

I dati di input utilizzati nelle simulazioni sono i moduli elastici dei due materiali costituenti, i coefficienti di Poisson di questi due materiali, l'aspect ratio delle inclusioni e la frazione in volume delle fasi.

Risulta chiaro che certi dati, necessari alla analisi del materiale 3H, saranno disponibili solo una volta aver concluso l'analisi 2H.

Conviene dapprima dare una chiara lettura dei dati di input, intanto per la analisi della geometria 2H:

MATERIALE	E [MPa]	ν	%V	aspect ratio
rigido - inclusioni 1	3000	0.35	16.7	0.75
rigido - inclusioni 2	3000	0.35	5	0.5
elastico - matrice	1320	0.35	78.3	\

Tabella 3: Dati di Input omogeneizzazione 2H.

Tab. (4) riporta i dati per ora a disposizione per la geometria 3H:

MATERIALE	E[MPa]	ν	%V	aspect ratio
inclusioni fase 1	*	*	16.7	0.75
inclusioni fase 2	*	*	5	0.5
matrice - elastico	1320	0.35	78.3	\

Tabella 4: Dati di Input omogeneizzazione 3H.

* sta ad indicare che il valore sarà risultato dalla analisi della geometria 2H. Si nota come, nel caso della geometria 3H, si sono dovute considerare due diverse fasi di inclusioni, caratterizzate dallo stesso materiale ma da differenti geometrie, e quindi da differenti aspect ratios.

Per quanto concerne il metodo *Self Consistent*, si devono fornire in input anche il numero massimo di iterazioni e l'errore massimo accettabile: il numero massimo di iterazioni è stato fissato a 1000, mentre l'errore massimo accettabile è stato posto a 0.1 Pa.

3.5 Moduli Elastici Previsti

Una volta svolte le analisi di omogeneizzazione sia analitica che numerica, si hanno a disposizione i risultati sui moduli elastici e sui coefficienti di Poisson. I risultati sono presentati nella prossima tabella riguardano l'omogeneizzazione del materiale 2H:

Metodo	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	E_3 [MPa]	ν
Mori-Tanaka	1575.6	1575.6	1554.3	0.35
Self Consistent	1581.3	1581.3	1563.1	0.35
KUBC	1604.7	1548.3	1548.3	0.353

Tabella 5: Moduli Elastici Previsti - materiale 2H.

Quello che è importante sottolineare a questo punto è come tutti e tre i metodi di omogeneizzazione descrivano il materiale 2H come sostanzialmente isotropo, infatti le differenze tra i moduli elastici lungo i tre principali assi sono davvero minime: ciò è essenziale per poter proseguire con la omogeneizzazione analitica della geometria 3H, poiché i metodi Mori-Tanaka e Self Consistent accettano in input solo materiali isotropi. Per proseguire, quindi, si stabilisce di associare alla geometria 2H un valore medio tra i tre relativi alle direzioni principali per ogni metodo, e quindi si ottengono i seguenti valori dei moduli elastici da inserire nella Tab. (4) per poter proseguire nella omogeneizzazione 3H:

- Metodo Mori-Tanaka: modulo elastico di 1568.5 MPa;
- Metodo Self Consistent: modulo elastico di 1575.23 MPa;
- Metodo KUBC: modulo elastico di 1567.1 MPa.

È possibile allora procedere alla omogeneizzazione della geometria 3H con gli opportuni dati di input, che porta ai risultati che saranno riportati nella Tab. (6):

Metodo	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	E_3 [MPa]	ν
Mori-Tanaka	1370.7	1370.7	1369.8	0.35
Self Consistent	1372.0	1372.0	1371.2	0.35
KUBC	1400.2	1400.2	1400.2	0.344

Tabella 6: Moduli Elastici Previsti - materiale 3H.

Ancora una volta si vede come il materiale omogeneizzato sia sostanzialmente isotropo, viste le minime differenze di modulo elastico tra le tre direzioni principali. Per comodità, si assegna al materiale omogeneizzato un modulo elastico dato dalla media dei moduli elastici lungo gli assi principali, e quindi:

- Metodo Mori-Tanaka: modulo elastico di 1370.4 MPa;
- Metodo Self Consistent: modulo elastico di 1371.73 MPa;
- Metodo KUBC: modulo elastico di 1400.2 MPa.

È evidente come tutti e tre i metodi abbiano dato risultati molto vicini tra loro, ma resta da verificare innanzi tutto la bontà delle loro previsioni, e anche quale tra questi si sarà avvicinato di più alla descrizione corretta del materiale reale.

Prima di proseguire con la verifica della bontà delle previsioni, è però opportuno redigere una ultima tabella riassuntiva dove siano riportati i moduli elastici del materiale 2H e del materiale 3H ottenuti con i metodi proposti.

MATERIALE	MODULO ELASTICO [MPa]
fase rigida	3000
fase elastica	1320
2H - Mori-Tanaka	1568.5
2H - Self Consistent	1575.23
2H - KUBC	1567.1
3H- Mori-Tanaka	1370.4
3H - Self Consistent	1371.73
3H - KUBC	1400.2

Tabella 7: Riassunto Moduli Elastici.

Come ci si aspetta, si può vedere che il modulo elastico diminuisce e che se il numero di livelli gerarchici tende a infinito, questo tende al modulo elastico della fase elastica (matrice).

3.6 Confronto tra i metodi di omogeneizzazione

Una volta che si siano capite le basi matematiche dei metodi e come implementarli, resta da verificare se le loro previsioni siano affidabili e quale, tra i metodi proposti, rappresenti al meglio il comportamento del materiale studiato.

Per verificare questi aspetti si è pensato di simulare un provino, definito *master*, caratterizzato da dimensioni ben più grandi dello RVE analizzato, realizzato con materiale prima 2H. In seguito si definiranno dei provini dalle dimensioni uguali al *master* ma costituiti di materiale omogeneizzato con i differenti metodi. Tutti questi provini saranno sottoposti ad un test di trazione con lo stesso carico e le stesse condizioni al contorno, e si vedrà quale tra i materiali omogeneizzati ricalcherà al meglio il comportamento del materiale gerarchico. Il confronto tra i materiali omogeneizzati con i vari metodi sarà svolto solo col materiale 2H, in quanto si assume che la precisione del metodo di omogeneizzazione resti costante attraverso i differenti livelli di scala.

Il provino ha dimensioni 101*40*20 mm. La dimensione media di elemento è stata posta a 1 mm, e per realizzare la mesh si è scelto di utilizzare elementi di tipo esagonale a 8 nodi. La mesh del provino consta perciò di 80800 elementi *hexa*. L'analisi svolta è di tipo lineare statico, con una estremità del provino privata del grado di libertà di traslazione lungo l'asse X, con l'aggiunta di un incastro nel nodo baricentrico della faccia per mantenere la simmetria nel corso della analisi, mentre l'estremità opposta verrà vincolata tramite *MPC* (multi point constraint) ad un nodo cui sarà applicato il carico di trazione. Lo spostamento misurato, che verrà preso come riferimento per la deformazione longitudinale del provino, sarà quello del nodo cui viene applicato il carico.

Il provino quindi assume l'aspetto riportato in figura:

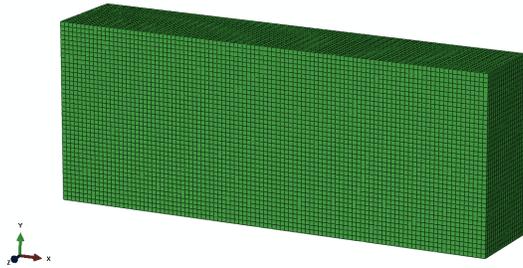


Figura 19: Provino utilizzato per il confronto tra i metodi di omogeneizzazione.

La faccia vincolata è quella sul piano $x=0$, come mostrato nella immagine seguente:

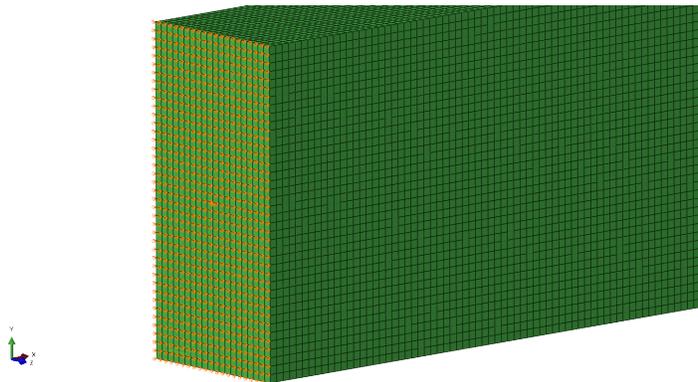


Figura 20: Dettaglio della faccia sottoposta a vincoli.

La figura 21 riporta il vincolo MPC che vincola il punto RP (reference point), cu cui sarà applicato il carico di trazione, alla faccia opposta a quella vincolata:

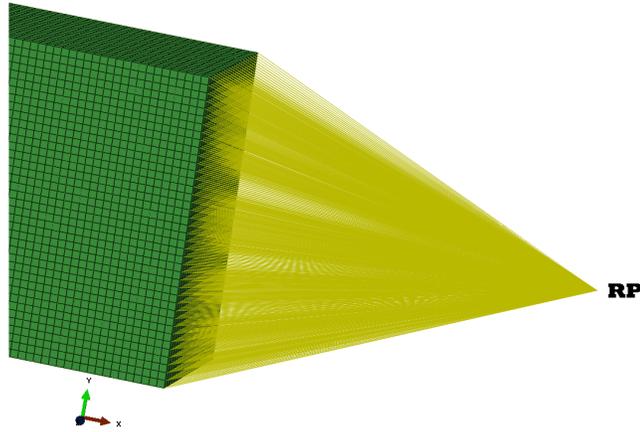


Figura 21: Dettaglio del MPC.

Sul punto RP , appunto, verrà applicato il carico di trazione con intensità di 10000 Newton ed è orientato secondo l'asse x . Il punto RP è anche il punto sul quale verrà misurato lo spostamento effettivo causato dal carico applicato.

Dopo aver svolto le analisi lineari statiche con il software *Abaqus*, è comodo riportare gli spostamenti cui è stato soggetto il punto RP in una tabella. Tali spostamenti rappresentano a tutti gli effetti l'elongazione del provino studiato, sotto l'effetto del carico applicato.

MATERIALE	ELONGAZIONE [mm]
materiale 2H	0.774
Mori-Tanaka	0.797
Self Consistent	0.793
KUBC	0.797

Tabella 8: Elongazione del provino.

Per comprendere meglio con che precisione i metodi si avvicinino a descrivere il comportamento del materiale reale, è utile andare a capire quale sia il valore assoluto e relativo di ogni metodo:

- Mori-Tanaka commette un errore assoluto di 0.0229 mm, che corrisponde ad un errore relativo del 2.95% ;

- Self Consistent commette un errore assoluto di 0.0195 mm, che corrisponde ad un errore relativo del 2.51%,
- KUBC commette un errore assoluto di 0.0236 mm, che corrisponde ad un errore relativo del 3.05%.

Per prima cosa si può dire che tutti e tre i metodi riescono a prevedere il modulo elastico del materiale gerarchico con una ottima approssimazione, infatti ogni metodo presenta un errore relativo inferiore al 5%. Risulta anche che, sebbene di poco, il metodo Self Consistent riesca a dare la previsione più accurata riguardo al modulo elastico del materiale studiato.

In conclusione quindi, risulta che il metodo Self Consistent consente di ottenere la precisione maggiore nella previsione delle proprietà elastiche di un solido caratterizzato da struttura gerarchica bone-like, ma è altresì vero che anche gli altri due metodi proposti, Mori-Tanaka e Kinematic Uniform Boundary Conditions, garantiscono delle previsioni con una precisione ampiamente accettabile. Se ci si pone dal punto di vista della facilità pratica del calcolo di omogeneizzazione, tuttavia, il metodo numerico KUBC viene decisamente distanziato dai due metodi analitici in esame, perché sebbene garantisca una precisione di poco inferiore agli altri, richiede un tempo di calcolo e gestione dei dati decisamente superiore, in quanto richiede la creazione di un accurato modello tridimensionale, con la creazione di una mesh adeguata e della scrittura di innumerevoli equazioni di vincolo, l'attesa della convergenza dell'analisi FEM, ed infine l'estrapolazione dal modello risolto dei dati utili; le analisi di tipo analitico invece prevedono semplicemente l'immissione dei dati della struttura in un file MatLab e l'attesa, di qualche secondo, dei risultati prodotti dal software. In questo campo quindi, i metodi analitici vincono a man bassa sul metodo numerico.

4 Studio della frattura

Uno degli aspetti che più di tutti stimola l'interesse verso i materiali gerarchici è la loro capacità di assorbire molta più energia dei materiali classici prima di giungere a rottura, riuscendo a mantenere la massa e l'ingombro al minimo. Questa proprietà è importantissima e molto utile, e può trovare applicazione praticamente in ogni campo della ingegneria, dalla costruzione di edifici o ponti alla realizzazione di parti strutturali per veicoli, dalle strutture aeronautiche all'impiego nautico. È chiaro perciò il motivo per cui in questa tesi sia scelto di studiare anche questo aspetto per questa classe di materiali. Nello specifico, in questo elaborato si vuole quantificare quale incremento di *toughness modulus* possa fornire una struttura gerarchica bone-like, sia essa 2H o 3H. Sul concetto di toughness modulus si tornerà nelle prossime pagine, ma si può intanto anticipare qualcosa, dicendo che questa espressione definisce quanta energia uno specifico provino, o pezzo di materiale, riesca ad assorbire, prima di giungere alla frattura completa. In particolare, i materiali gerarchici dovrebbero incrementare in modo deciso le performance di toughness rispetto a materiali uniformi. Per verificare questa proprietà, i provini sono modellati con una cricca iniziale, che consente di studiare come la frattura si propaga nel materiale gerarchico grazie all'utilizzo dei metodi di soluzione disponibili in Abaqus.

I materiali scelti per la modellazione di queste strutture, i polimeri della Zare Prototipi descritti nei paragrafi precedenti[Par. 3.3.2, Tabella 2], sono descrivibili con un modello elasto-plastico, e giungono a rottura tramite il meccanismo di frattura duttile: si modellerà quindi la rottura dei provini in esame ipotizzando un modello di frattura duttile; l'ipotesi di frattura duttile è supportata da precedenti studi che hanno utilizzato i medesimi materiali[55]. Prima di procedere, perciò, è d'obbligo prendersi del tempo per parlare di cosa sia nello specifico la frattura duttile e come si comporti.

La frattura è definita duttile quando porta alla rottura del provino a causa dell'accumulo di danno plastico: il provino quindi, una volta giunto al limite di snervamento, inizia a danneggiarsi in modo plastico, con la nucleazione al suo interno di vuoti o bolle. Man mano che la deformazione plastica aumenta, questi vuoti crescono, si incontrano e coalescono, portando il provino a rottura per l'accumulo di danno plastico.

Si cercherà di descrivere la frattura duttile, ed in particolare come la frattura duttile è stata modellata in *Abaqus CAE*, che è il software che sarà utilizzato per le analisi di questa sezione.

Prima di giungere a parlare della frattura però, è bene descrivere il processo che il materiale attraversa nei momenti precedenti la frattura, ossia la deformazione di tipo plastico.

4.1 La deformazione plastica in Abaqus

Si supponga di prendere un provino di materiale elasto-plastico e duttile, e di sottoporlo al test di trazione monoassiale. Questo si allungherà progressivamente; ad un certo punto comparirà un restringimento localizzato verso la parte centrale del provino: questo restringimento prende il nome di *strizione*. Il provino quindi striziona, cioè restringe la sua sezione, fino a quando si rompe, e quindi risulta separato in due pezzi distinti. È interessante notare che la direzione seguita dalla frattura duttile segue in genere i piani secondo i quali la tensione a taglio è la massima.

I vari passaggi risultano chiari se si osserva un diagramma tensione-deformazione di un provino duttile:

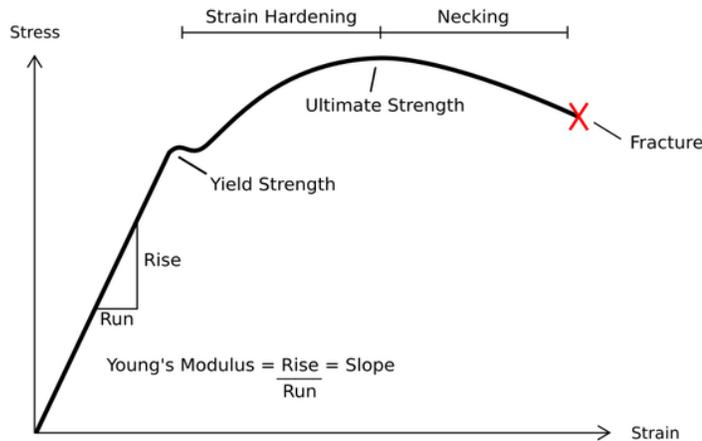


Figura 22: Diagramma tensione-deformazione di un provino duttile.
[72]

Nella prima fase di trazione, il provino è in piena fase elastica e si allunga deformandosi secondo il suo modulo di Young. Raggiunta la tensione di snervamento, inizia la fase di deformazione plastica. Questa in genere è costituita da una prima fase in cui il materiale *incrudisce*, cioè aumenta la sua

rigidezza in risposta alla deformazione che sta subendo. Questo incrudimento però non dura a lungo, perché giunti alla tensione ultima di resistenza, inizia il processo di *necking*, o strizione in italiano, che porta infine il pezzo a rottura completa.



Figura 23: Esempio di strizione che interessa un provino sottoposto a trazione.

[70]

In *Abaqus CAE* si trovano implementate le relazioni costitutive dei materiali plastici in tutte le loro possibili varianti, ed è interessante darne almeno una rappresentazione veloce.

La prima cosa da sottolineare è che tutti i modelli di risposta elasto-plastica in *Abaqus* hanno la stessa forma generale, poiché la teoria della plasticità incrementale si basa su pochi ma fondamentali postulati.

Una prima distinzione da fare è quella tra metodi *rate-dependent* e metodi *rate-independent*; la differenza risiede nel fatto che nei primi la risposta costitutiva dipende dalla velocità di deformazione, mentre nei secondi la velocità di deformazione non influenza la risposta del materiale.

Per dare il via ad una trattazione anche matematica della plasticità, si può dire che la deformazione di un materiale può essere suddivisa in un contributo elastico ed in un contributo inelastico, cioè plastico per l'appunto. Questa considerazione si può esprimere con la prossima equazione:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{el} * \mathbf{F}^{pl} \quad (40)$$

dove \mathbf{F} è il gradiente di deformazione totale, \mathbf{F}^{el} è il gradiente di deformazione elastica, cioè è il gradiente della parte di deformazione che è pienamente recuperabile al momento considerato, ed \mathbf{F}^{pl} è definito come $\mathbf{F}^{pl} = [\mathbf{F}^{el}]^{-1} * \mathbf{F}$, e rappresenta pertanto il gradiente di deformazione plastica. Il significato del gradiente $[\mathbf{F}^{el}]^{-1}$ è legato alla definizione di \mathbf{F}^{el} come gradiente di deformazione elastica, dato che ne è la matrice inversa: esso rappresenta la deformazione che avverrebbe se, arrivati ad un certo punto della deformazione elasto-plastica del provino, lo si lasciasse libero da ogni carico. Se un provino è già entrato in fase plastica quindi, la deformazione $[\mathbf{F}^{el}]^{-1}$ non costituisce un ritorno del provino alle condizioni di partenza, come sarebbe se si fosse rimasti nel solo campo elastico, bensì rappresenta un parziale ritorno del provino alla geometria iniziale, dal quale differirà proprio in virtù della avvenuta deformazione plastica \mathbf{F}^{pl} . In ogni caso, questo modo di scomporre la deformazione può essere usata per formulare direttamente un modello di plasticità.

Nel tempo si sono elaborati alcuni artifici, per esempio si è fatto uso della *velocità compositiva di deformazione*[5] così definita:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{pl} \quad (41)$$

dove $\dot{\varepsilon}$ è la velocità di deformazione totale meccanica, $\dot{\varepsilon}^{el}$ è la velocità di deformazione elastica, e $\dot{\varepsilon}^{pl}$ è la velocità di deformazione plastica. Si può dimostrare che la Eq. (41) è una approssimazione della Eq. (40) nel caso in cui la deformazione elastica sia infinitesima e se la velocità di deformazione sia definita come segue:

$$\dot{\varepsilon} = sym \left[\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} \right] \quad (42)$$

ossia che la velocità della deformazione (ingegneristica) , o *strain*, corrisponda alla velocità della deformazione (geometrica) denominata anche *deformation*.

Le Eq. (41-42) sono alla base di ogni modello di plasticità implementato in Abaqus. Presentano il limite di essere affidabili solo per deformazioni elastiche limitate a qualche punto percentuale; se si desidera elaborare modelli costitutivi che possano tenere conto di deformazioni elastiche estese, è bene elaborare dei modelli a parte con delle *subroutines* che prendano come punto di partenza la Eq. (40).

Tornando ora alla scomposizione tra deformazione elastica e plastica, si può ipotizzare che, derivando l'energia potenziale di deformazione elastica secondo lo *strain* elastico, si possa ottenere la tensione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} \quad (43)$$

dove U sia, appunto, l'energia potenziale di deformazione elastica. Si può dire che $\boldsymbol{\sigma}$ così definito rappresenti lo stress di Cauchy, perché si è assunto che la variazione di strain elastico corrisponda alla variazione della velocità di deformazione, nel caso in cui la deformazione plastica sia inesistente.

Tutti i modelli di plasticità rate-independent in Abaqus presentano una regione in cui si verifica solo una risposta elastica del materiale; si definisce allora la funzione di cedimento (*yield function*), come la funzione che descrive i limiti della regione puramente elastica:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \theta, H_\alpha) < 0 \quad (44)$$

dove θ è la temperatura, e H_α sono i parametri di incrudimento.

Taluni stati di tensioni inducono la *yield function* ad assumere nullo; nei modelli rate-independent non è possibile che tale funzione assuma valori positivi. Quando la *yield function* assume valore nullo avviene la deformazione plastica.

Durante la deformazione inelastica, è possibile descrivere la parte plastica della deformazione tramite l'utilizzo della regola di flusso, che si può scrivere come segue:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \sum_i d\lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (45)$$

dove $g_i(\boldsymbol{\sigma}, \theta, H_{i,a})$ rappresenta il potenziale di flusso per il sistema i-esimo, $d\lambda_i$ è la velocità di variazione del tempo (dt) per un modello rate-dependent,

oppure è uno scalare che quantifichi la velocità di deformazione plastica del sistema i -esimo per un modello rate-independent. In questo secondo caso il valore di $d\lambda_i$ si può calcolare risolvendo la condizione di conformità $f_i = 0$. La sommatoria coinvolge solo gli i sistemi in cui sta avvenendo una deformazione plastica, quelli cioè in cui $f_i = 0$; se $f_i < 0$ allora $d\lambda_i = 0$.

Infine Abaqus modella anche l'ultimo aspetto saliente della deformazione plastica, ovverosia l'incrudimento. Il set di equazioni che regola l'incrudimento può essere così riassunto:

$$dH_{i,\alpha} = d\lambda_i h_{i,\alpha}(\boldsymbol{\sigma}, \theta, H_{i,\beta}) \quad (46)$$

dove $h_{i,\alpha}$ è la legge di incrudimento per $H_{i,\alpha}$.

4.1.1 Modello di Plasticità utilizzato

Abaqus offre una pletora di modelli di plasticità, ed è quindi opportuno scegliere il modello che più accuratamente riesca a rappresentare l'effettivo comportamento dei materiali utilizzati.

In primo luogo si è scelto un modello di plasticità rate-independent perché è il più indicato per rappresentare la risposta plastica dei materiali alle basse temperature, cioè a temperature al di sotto della metà della temperatura di fusione. Inoltre l'andamento del carico di trazione è monotono, e gli effetti di creep sono trascurabili e non ricadono nell'area di interesse delle analisi che saranno svolte. Il modello dovrà prevedere un incrudimento di tipo isotropo, e dovrà permettere l'analisi della frattura.

In seguito a tutte queste considerazioni, il modello migliore per le analisi che si devono andare ad eseguire è il modello di plasticità classico.

Classical Plasticity Model Il modello di plasticità classico è basato sulle equazioni di *von Mises*[73] e di *Hill*[34, 37] con l'aggiunta del flusso plastico associato, e quindi può prevedere i comportamenti di deformazioni sia isotrope che anisotrope. Utilizza sia il comportamento di incrudimento isotropico che la plasticità perfetta senza incrudimento, e soprattutto è totalmente compatibile con i modelli di danno e frattura, cosa essenziale e fondamentale per le analisi che andranno ad essere svolte.

La teoria delle *yield surfaces* di Mises ed Hill prevede che il cedimento del materiale non sia causato dalla tensione di pressione equivalente; questa è una assunzione che è stata ampiamente dimostrata a livello sperimentale.

Non si hanno a disposizione i dati sull'incrudimento dei materiali utilizzati, ma risulta importante definire il comportamento plastico dei materiali utilizzati in questa tesi. Di conseguenza, il comportamento plastico e di incrudimento dei materiali sarà modellato in modo da ottenere materiali che, con l'aumentare del proprio modulo elastico, riescano a deformarsi plasticamente sempre meno.

Prima di proseguire, è opportuno soffermarsi brevemente per dare una descrizione di tipo matematico alla elasto-plasticità isotropa.

Innanzitutto si assume che durante la deformazione non vi sia deformazione plastica volumetrica, e che quindi le variazioni di volume siano così piccole da poter essere ignorate. Si può pertanto definire la deformazione di volume:

$$\varepsilon_{vol} = \text{traccia}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (47)$$

e la deformazione deviatorica come:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_{vol}\boldsymbol{I} \quad (48)$$

Si può suddividere la velocità di deformazione come segue:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (49)$$

che si può scrivere anche in forma integrale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (50)$$

Poiché la elasticità è lineare ed isotropa, può essere espressa rispetto a due grandezze che siano dipendenti dalla temperatura, cioè il *bulk modulus* K ed il modulo a taglio G . Questi possono essere agevolmente calcolati a partire dal modulo di Young E e dal coefficiente di Poisson ν :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (51)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (52)$$

L'elasticità può essere espressa in termini di componenti deviatoriche e volumetriche:

- Deviatoriche

$$\boldsymbol{S} = 2G\boldsymbol{e}^{el} \quad (53)$$

dove \boldsymbol{S} è lo stress deviatorico $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} + p\boldsymbol{I}$;

- Volumetriche

$$p = -K\varepsilon_{vol} \quad (54)$$

dove p è lo stress di pressione equivalente $p = -\frac{1}{3}\text{traccia}(\boldsymbol{\sigma})$.

La regola di flusso è

$$d\boldsymbol{e}^{pl} = d\bar{\varepsilon}^{pl}\boldsymbol{n} \quad (55)$$

dove $\boldsymbol{n} = \frac{3\boldsymbol{S}}{2q}$, $q = \sqrt{\frac{3\boldsymbol{S}}{2} : \boldsymbol{S}}$ e $d\bar{\varepsilon}^{pl}$ è la velocità di deformazione plastica equivalente scalare.

La plasticità richiede che sia necessariamente soddisfatta la Eq. (56), che descrive la condizione di cedimento del materiale:

$$q = \sigma^0 \quad (56)$$

dove $\sigma^0(\bar{e}^{pl}, \theta)$ è lo sforzo di cedimento, ed è definito dall'utente come una funzione della deformazione plastica equivalente \bar{e}^{pl} e della temperatura θ .

Queste equazioni descrivono il moto del materiale nel caso di flusso plastico, e pertanto vanno integrate in ogni incremento in cui avventa deformazione plastica ed infine risolte per l'istante di termine di ogni incremento. L'integrazione viene svolta secondo il metodo a ritroso di Eulero:

$$\Delta \mathbf{e}^{pl} = \Delta \bar{e}^{pl} \mathbf{n} \quad (57)$$

Se si combinano le Eq. (57), (53) e (49), si può ottenere:

$$\mathbf{S} = 2G(\mathbf{e}^{el} |_{t+\Delta t} + \Delta \mathbf{e} - \Delta \bar{e}^{pl} \mathbf{n}) \quad (58)$$

che può essere scritta anche:

$$\left(1 + \frac{3G}{q} \Delta \bar{e}^{pl}\right) \mathbf{S} = 2G(\mathbf{e}^{el} |_{t+\Delta t} + \Delta \mathbf{e}) \quad (59)$$

Per semplicità nella scrittura, si può definire $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^{el} |_{t+\Delta t} + \Delta \mathbf{e}$ in modo da poter riscrivere la Eq. (59) come segue

$$\left(1 + \frac{3G}{q} \Delta \bar{e}^{pl}\right) \mathbf{S} = 2G\hat{\mathbf{e}} \quad (60)$$

Se si svolge il prodotto interno della Eq. (60) con sé stessa, si ottiene

$$q + 3G\Delta \bar{e}^{pl} = 3G\tilde{e} \quad (61)$$

dove $\tilde{e} = \sqrt{\frac{2}{3}\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}}$.

Lo stress equivalente di Mises, che sarebbe q , deve soddisfare l'Eq. (56) in modo da ottenere

$$3G(\tilde{e} - \Delta \bar{e}^{pl}) - \bar{\sigma} = 0 \quad (62)$$

che è una equazione non lineare, da risolvere secondo il metodo classico di Newton:

$$c^{pl} = \frac{3G(\tilde{e} - \Delta\bar{e}^{pl}) - \bar{\sigma}}{3G + H} \quad (63)$$

dove $H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}^{pl}}$, per poi calcolare

$$\Delta\bar{e}^{pl} = \Delta\bar{e}^{pl} + c^{pl} \quad (64)$$

e si prosegue iterando fino a convergenza.

Una volta che sia stato calcolato il termine $\Delta\bar{e}^{pl}$ la soluzione del problema risulta finalmente totalmente definita. Risulta infatti che $q = \bar{\sigma}$ dalla Eq. (56), e dalla Eq. (60) invece si può ricavare

$$\mathbf{S} = \frac{2G}{1 + \frac{3G}{q}\Delta\bar{e}^{pl}} \hat{e} \quad (65)$$

Proseguendo, una volta calcolato \mathbf{S} si può utilizzare la relazione (55) per calcolare

$$\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q} \quad (66)$$

da cui segue

$$\Delta e^{pl} = \Delta\bar{e}^{pl} \mathbf{n} \quad (67)$$

4.2 La frattura duttile in Abaqus

Ripetendo quanto accennato nelle pagine precedenti, la frattura duttile è quel processo che porta alla rottura di un materiale duttile. Se per esempio si considera un fenomeno di trazione di un provino, durante la fase di deformazione plastica, nel materiale vanno formandosi dei vuoti, delle bolle microscopiche di aria. Man mano che la deformazione plastica aumenta, le varie bolle crescono, si incontrano e coalescono a formare dei vuoti sempre più estesi. Ad un certo punto la sezione attiva del materiale che può resistere alla trazione è così esigua che esso finisce per troncarsi in due parti separate e distinte. Spesso è facile riconoscere una frattura duttile dal fatto che le due estremità del pezzo sono lisce e levigate, a causa dell'attrito che la frizione tra le due parti durante la rottura ha fatto nascere.

I materiali utilizzati per modellare il provino di materiale gerarchico sono compatibili con una frattura di tipo duttile, quindi è bene verificare che abilità presenti il software Abaqus nel modellare questo fenomeno.

Il software offre la possibilità di modellare il danno progressivo e la rottura di materiali duttili, includendo nello specifico la descrizione del criterio di danno duttile. In seguito all'inizializzazione del danno, la rigidità del materiale crolla vistosamente, secondo la specificata evoluzione del danno. Il modello di danno progressivo consente di ottenere una diminuzione graduale della rigidità del materiale studiato, consentendo quindi di ottenere ottimi risultati nelle analisi dinamiche come quella in cui ci si cimenterà nel corso dello studio della frattura.

Una nota dolente sulle analisi di danno condotte tramite FEM, è la dipendenza dalla mesh. Nella meccanica del continuo il modello costitutivo è generalmente espresso in termini di relazioni stress-strain. Se il materiale subisce incrudimento, e quindi localizzazione della deformazione, questo modo di formulare il modello costitutivo conduce a una forte dipendenza dalla forma e dalle dimensioni della mesh: l'energia dissipata diminuisce se la mesh è eccessivamente raffinata. In Abaqus è stata implementata una formulazione delle equazioni costitutive tali da diminuire quanto più possibile il problema. Sostanzialmente si collega la dimensione media dell'elemento della mesh ad una dimensione caratteristica, e si esprime la legge costitutiva come una relazione tensione-spostamento e non tensione-deformazione: si ottiene così il risultato di avere espressa l'energia di deformazione per unità di superficie, e non di volume. Questa energia così definita è coerente col concetto di velocità di rilascio di energia critica come parametro del materiale nello studio della

meccanica della frattura. Così facendo si riduce notevolmente la dipendenza delle analisi della frattura dalla mesh.

Per definire completamente le caratteristiche di un materiale per poterlo sottoporre ad una analisi di danno, occorre eseguire diversi step:

1. definire la risposta elasto-plastica del materiale non danneggiato (vedere Paragrafo 4.1);
2. definire un criterio di inizializzazione di danno;
3. definire una risposta evolutiva del danno, inclusa la scelta di rimuovere l'elemento danneggiato.

Il punto (1) è stato affrontato nel paragrafo precedente, restano da chiarire i punti (2) e (3).

4.2.1 Criterio di inizializzazione del danno

La scelta è ricaduta ovviamente sul criterio di rottura per materiali duttili.

Questo criterio può condurre alla frattura tramite due diversi meccanismi:

- frattura duttile dovuta alla nucleazione, crescita e coalescenza dei vuoti;
- frattura a taglio dovuta alla localizzazione della banda di taglio.

Considerata la natura del problema da affrontare, risulta chiaro come il primo meccanismo sia quello da selezionare per uno studio attendibile della frattura del materiale gerarchico.

Il modello prevede l'assunzione di base che la deformazione plastica equivalente $\bar{\varepsilon}_D^{pl}$ sia funzione della velocità di deformazione e della *triassialità della tensione* cioè si assume che:

$$\bar{\varepsilon}_D^{pl} = \bar{\varepsilon}_D^{pl}(\eta, \dot{\varepsilon}^{pl}) \quad (68)$$

dove $\eta = \frac{-p}{q}$ è la triassialità della tensione, p è la tensione di pressione, q è lo stress equivalente di Mises, e $\dot{\varepsilon}^{pl}$ è la velocità di deformazione plastica equivalente.

Il criterio di rottura è attivo, e quindi il materiale si danneggia, quando vale la seguente relazione:

$$\omega_D = \int \frac{d\bar{\varepsilon}^{pl}}{\bar{\varepsilon}_D^{pl}(\eta, \dot{\varepsilon}^{pl})} = 1 \quad (69)$$

dove ω_D è una variabile di stato che aumenta in maniera monotona con la deformazione plastica. Ad ogni incremento infatti, si calcola l'incremento di questa variabile:

$$\Delta\omega_D = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}}{\bar{\varepsilon}_D^{pl}(\eta, \dot{\varepsilon}^{pl})} \geq 0 \quad (70)$$

4.2.2 Evoluzione del danneggiamento

Una volta che il criterio di danno è verificato, il materiale inizia a danneggiarsi ed insorge l'esigenza di descrivere la velocità di diminuzione della rigidità del materiale. La legge di evoluzione del materiale consente di fare esattamente questo: in sostanza può descrivere come si propaga il danno nel materiale.

Se si definisce con D il danno globale del sistema, e con $\bar{\sigma}$ il tensore effettivo delle tensioni calcolato allo step corrente, si può calcolare il tensore delle tensioni come segue:

$$\sigma = (1 - D)\bar{\sigma} \quad (71)$$

Affermare che $\bar{\sigma}$ è il tensore effettivo delle tensioni significa che rappresenta le tensioni che sarebbero esistite nel materiale se non fosse insorto un danneggiamento. Non appena D assume valore unitario, il materiale è considerato totalmente danneggiato, quindi rotto; l'elemento della mesh viene rimosso.

Per comprendere come l'evoluzione del danno sia modellata, ci si può aiutare con la Fig.(24):

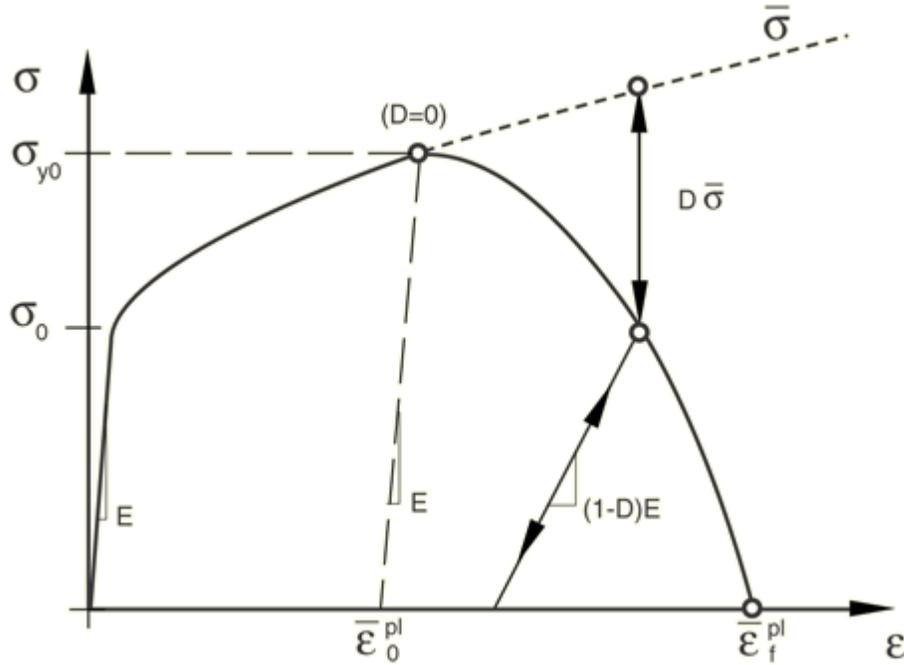


Figura 24: Curva tensione-deformazione con danneggiamento progressivo. [15]

La tensione σ_{y0} rappresenta la tensione di cedimento, mentre $\bar{\varepsilon}_0^{pl}$ rappresenta la deformazione plastica equivalente all'istante di inizio del danneggiamento. Il termine $\bar{\varepsilon}_f^{pl}$ invece costituisce lo strain plastico equivalente alla rottura completa, ossia quando la variabile di danno D raggiunge il valore unitario. Il valore del parametro strain plastico a rottura è strettamente legato alle dimensioni dell'elemento della mesh considerato, è non può assolutamente essere utilizzato come un parametro per descrivere l'evoluzione del danneggiamento nel materiale.

Quello che invece è bene fare, è esprimere la legge di danneggiamento rispetto allo spostamento equivalente dovuto alla plasticità \bar{u}^{pl} oppure rispetto alla dissipazione di energia G_f . In questa tesi si userà il modello di danneggiamento basato sullo spostamento plastico \bar{u}^{pl} .

Una volta che il materiale inizia a danneggiarsi, è preferibile evitare di riferirsi alla classica relazione stress-strain, perché si incorrerebbe in errori notevoli. Conviene piuttosto seguire l'approccio proposto da *Hillerborg*[38] sulla energia di frattura. Egli propose di seguire la relazione tensione-spostamento

anziché la relazione tensione-deformazione, in modo da ridurre decisamente la dipendenza dei risultati dalla mesh. Si definisce pertanto come parametro del materiale l'energia necessaria per aprire nel materiale una fessura di area unitaria, e la si denomina G_f .

Risulta pertanto necessario definire il parametro di *lunghezza caratteristica* L .

L'energia di frattura può essere così scritta:

$$G_f = \int_{\bar{\varepsilon}_0^{pl}}^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} L \sigma_y d\bar{\varepsilon}^{pl} = \int_0^{\bar{u}_f^{pl}} \sigma_y d\bar{u}^{pl} \quad (72)$$

Questa equazione evidenzia come si possa considerare lo spostamento equivalente plastico moltiplicato per la tensione di cedimento costituiscono il lavoro di frattura alla partenza della danneggiamento. La lunghezza caratteristica è collegata alla geometria e alla formulazione degli elementi, ad esempio corrisponde alla diagonale di un elemento di primo ordine, o a metà diagonale se l'elemento è del secondo ordine. Se l'elemento è una trave, allora corrisponde alla lunghezza lungo l'asse principale, e così via per ogni tipologia di elemento.

In ogni caso, risulta chiaro infine che la relazione che guida l'evoluzione del danno è la seguente:

$$\dot{\bar{u}}^{pl} = L \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} \quad (73)$$

dove L è appunto la lunghezza caratteristica.

Per le analisi svolte in questa tesi si è scelto di assumere una evoluzione lineare della variabile di danneggiamento; si è quindi indicato lo spostamento plastico effettivo a rottura, e la variabile di danno è modulata dalla seguente relazione:

$$\dot{d} = \frac{L \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\bar{u}_f^{pl}} = \frac{\dot{\bar{u}}^{pl}}{\bar{u}_f^{pl}} \quad (74)$$

4.3 Analisi Numeriche

4.3.1 Geometria dei provini analizzati

Si desiderano svolgere delle analisi dinamiche riguardanti la nascita e la propagazione di una frattura nella struttura gerarchica proposta in questa tesi, e sarà interessante verificare come un numero differente di gerarchie influenzi il comportamento a frattura: si modellerà pertanto un provino che sarà modellato sia con materiale monolitico rigido, sia con materiale gerarchico 2H, che con materiale gerarchico 3H. Questo ha portato una limitazione nella scelta delle dimensioni del provino: l'idea sarebbe stata quella di modellare un provino abbastanza grande da contenere interamente più RVE di materiale 3H, purtroppo però la complessità geometrica di modelli così vasti avrebbe reso impossibile la gestione di un modello FEM sia in fase di modellazione e di importazione in *Abaqus*, sia durante la fase delle analisi dinamiche che, essendo svolte su un PC standard e non su di un server di cluster dedicato, avrebbe impiegato tempi ben maggiori di quelli a disposizione. Considerando quanto esposto si è perciò scelto un provino dalle dimensioni generose, che sappia rappresentare in modo efficace e perfettamente attendibile la geometria 2H sia nello svolgimento planare che nella terza direzione, mentre si accontenta di saper modellare con precisione lo sviluppo planare della geometria 3H, senza riuscire a descrivere cosa succede nella terza direzione; in sostanza, facendo riferimento alla Fig. (15), il modello rappresenta un unico *strato* di geometria 3H. Questo però non rappresenta per forza un limite alla attendibilità dei risultati raggiunti: la geometria bone-like perlopiù è pensata per andare a realizzare delle piastre, dallo spessore contenuto quindi; con un singolo strato di materiale 3H si raggiungono comunque i 2 cm, pertanto le analisi che saranno svolte garantiscono una ottima affidabilità per un utilizzo in condizioni reali della struttura bone-like.

Il provino è stato modellato in un solido rettangolo dalle dimensioni $300*120*20$ mm, come visibile in Fig. (25):

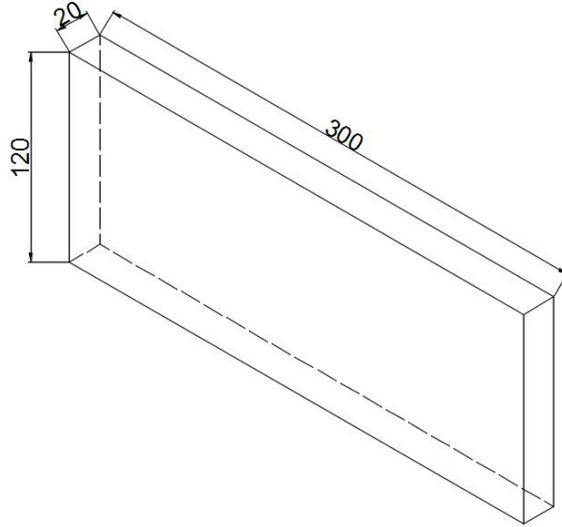


Figura 25: Provino per la frattura, dimensioni in mm.

4.3.2 Mesh

Nella realizzazione della mesh, si è dovuto scegliere la dimensione di elemento più grande possibile, sia per ridurre il numero di elementi che per mitigare la dipendenza dei risultati dalla mesh, ma che fosse abbastanza piccole per modellare con accuratezza la conformazione geometrica: il mesh seed è stato pertanto posto alla dimensione di 1 mm, ed il provino risulta costituito da 720000 elementi *hexagonal* a 8 nodi.

Gli elementi *hexa* selezionati per queste analisi in *Abaqus* sono di tipo lineare, pertanto sono realizzati con 8 nodi, e descritti dalla formulazione esplicita, e si è selezionato la formulazione ad integrazione ridotta. L'utilizzo della integrazione ridotta consente di ridurre i tempi di analisi, inoltre l'utilizzo di meno punti di integrazione di Gauss descrive un elemento meno rigido di quello che dovrebbe essere. Questo difetto è tuttavia auspicabile nel caso di analisi, come quelle che saranno svolte, che prevedono lo studio di plasticità e fratture, perché nonostante si introduca un errore rispetto alla descrizione matematica, si avvicina di molto il comportamento del materiale modellato a quello *real-life*. Considerato l'utilizzo di elementi ad integrazione ridotta, si è dovuto attivare il controllo della deformazione *hour-glass*, per mantenere elevata l'affidabilità. Gli elementi andranno incontro a severe deformazioni, perciò si è attivato anche il controllo di distorsione. Infine, dato che si svolgeranno analisi di fratture, che quindi dovranno prevedere il *failure* di alcuni elementi, si dovranno eliminare gli elementi danneggiati: per ottenere questo essenziale risultato si è impostato la voce *Element Deletion* su ON.

4.3.3 Condizioni di Vincolo

Nel corso delle analisi si andrà a simulare un test di trazione monoassiale a velocità controllata; il metodo più semplice per realizzarlo è di mettere in trazione una superficie, mentre quella opposta viene sottoposta ad una particolare condizione di vincolo. Per rispettare le necessarie condizioni di simmetria anche un particolare nodo della faccia sottoposta a trazione dovrà essere sottoposto ad un vincolo.

Una delle facce minori del provino quindi viene sottratta del grado di libertà di spostamento lungo l'asse X.

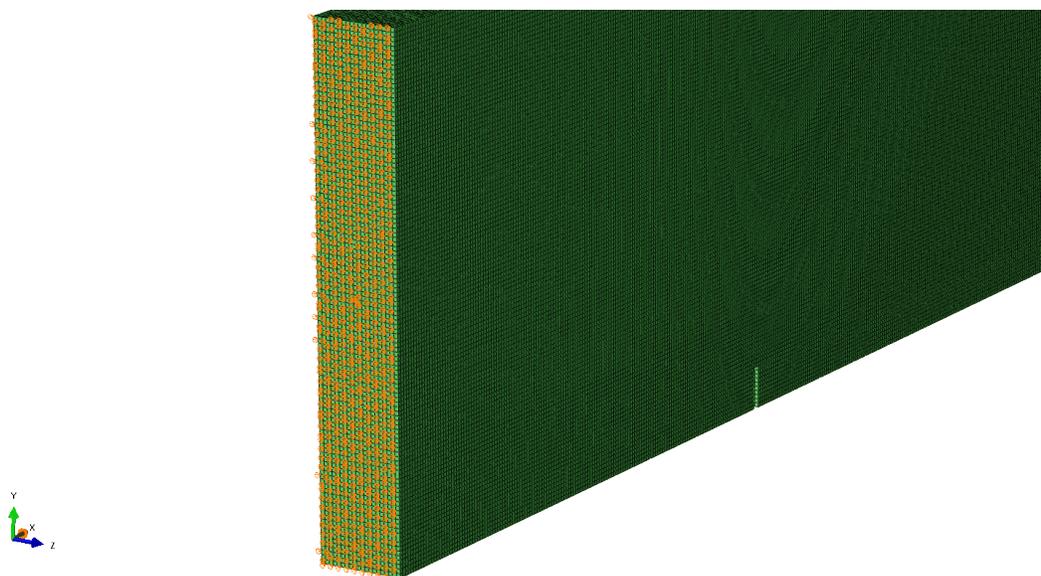


Figura 26: Vincoli di una delle superfici minori del provino.

Contestualmente i nodi centrali delle facce minori, per conservare la simmetria durante l'analisi, vengono sottoposte ad un vincolo che blocchi le traslazioni lungo gli assi Y e Z:

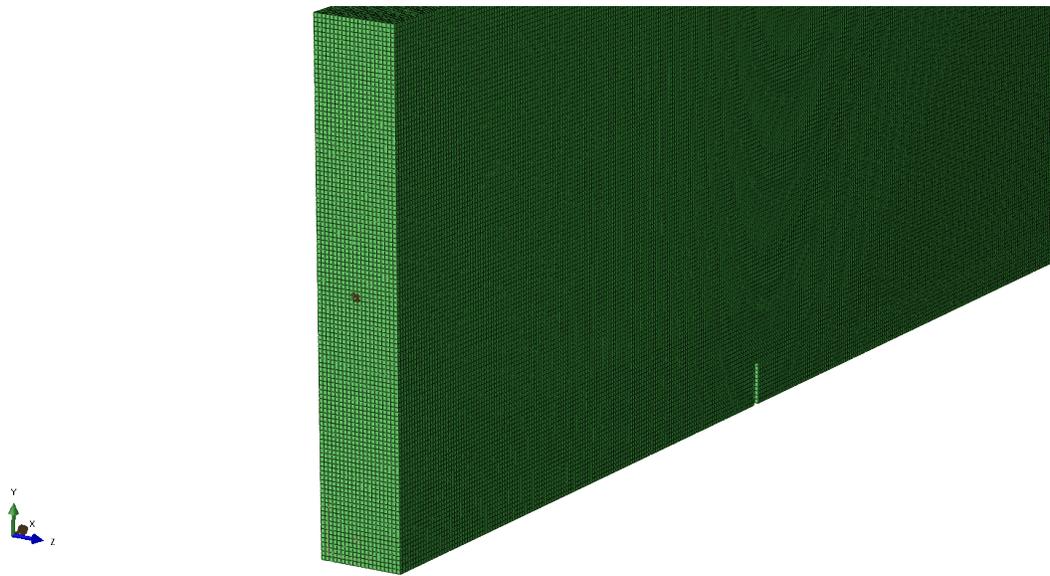


Figura 27: Dettaglio del vincolo per la simmetria..

In Fig. (22) è possibile vedere il vincolo che agisce sulla faccia già privata della traslazione lungo l'asse X; sulla faccia opposta il vincolo è il medesimo ed agisce sempre sul nodo centrale della faccia.

4.3.4 Condizioni di Carico

Nelle prossime analisi il carico è costituito da uno spostamento controllato da applicare sulla superficie minore opposta a quella su cui agisce il vincolo principale. Per realizzare questa trazione si è creato un *Reference Point* distante 400 mm dalla superficie cui sarà applicata la trazione, la cui proiezione cadesse sul baricentro della faccia caricata. In seguito questo *Reference Point* è stato collegato tramite un vincolo di tipo *coupling* ai nodi della superficie caricata.

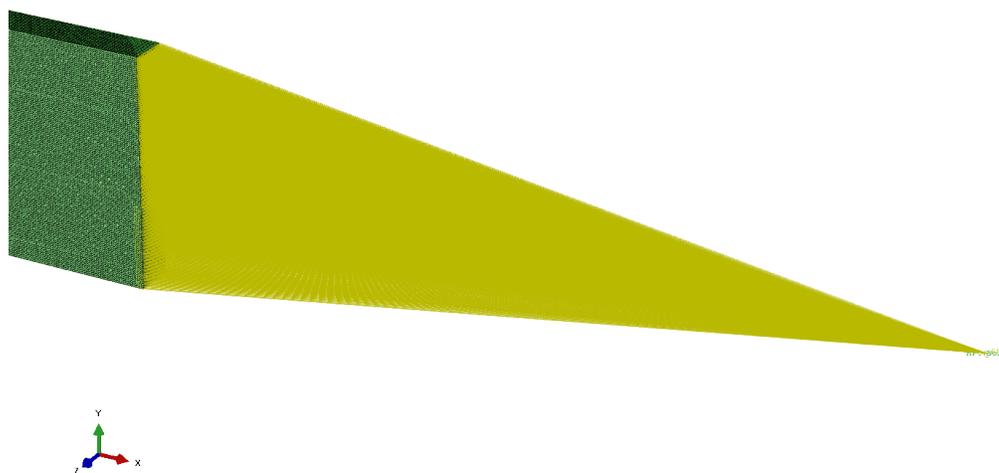


Figura 28: *Coupling* tra Reference Point e Provino.

Lo spostamento imposto, orientato nel verso crescente dell'asse X , è di 100 mm , applicato con una velocità costante di 10 mm/min .

4.3.5 Metodo di Misura

Lo scopo delle analisi sarà fornire per ogni test di trazione il relativo grafico *stress-strain*; per ottenere questo, si dovranno ottenere e registrare lo spostamento della superficie sottoposta a trazione e la forza resistente che il provino oppone alla trazione istante per istante.

Il modo migliore e più semplice per ottenere un record di queste due serie di dati è di registrare lo spostamento del *Reference Point* cui è effettivamente applicato lo spostamento imposto, e l'intensità della reazione vincolare (lungo l'asse X) che il provino scarica tramite il vincolo di accoppiamento sul Reference Point.

Il software registrerà quindi i risultati della simulazione, salvando i valori di spostamento e intensità di reazione vincolare per ognuno dei 100 *time steps* definiti.

Questi vettori di spostamento e intensità di reazione vincolare verranno processati tramite un codice MatLab compilato dal sottoscritto che permetterà di ottenere in uscita i vettori deformazione e tensione, con i quali sarà possibile plottare un grafico tensione-deformazione.

4.3.6 Proprietà meccaniche dei materiali

Lo scopo di questa parte di tesi è verificare quale combinazione di materiali sia la più adatta per ottenere un materiale gerarchico 2H o 3H che garantisca la massimizzazione della proprietà meccaniche target, cioè la massimizzazione della energia assorbita a frattura prima di arrivare al cedimento completo del provino. Conseguentemente, si prenderanno i polimeri della ZARE Prototipi come modelli di base, le cui proprietà saranno liberamente modellate per ottenere una serie di differenti combinazioni tra moduli elastici e curva di plasticizzazione al fine di trovare, almeno a livello teorico, la miglior combinazione di materiali per ottenere una struttura gerarchica con la massima capacità di assorbire energia di danno possibile. I diversi materiali di riferimento saranno individuati dalle lettere A, B, C, D, E, F.

Nasce quindi l'esigenza di definire una serie di coppie di materiali, un materiale elastico ed un materiale rigido, che vadano a costituire le fasi del materiale descritte nel capitolo precedente. Per semplicità si è scelto di fissare le caratteristiche meccaniche del materiale rigido, e modulare opportunamente le caratteristiche meccaniche del materiale elastico. Durante la campagna di simulazioni svolta durante la tesi si è visto come i risultati migliori al fine dello scopo che ci si è prefisso è quello di variare modulo elastico e caratteristiche di plasticizzazione in modo che al crescere del modulo di Young il materiale plasticizzasse meno prima di arrivare a rottura.

Materiale stiff Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 3000 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
14.0	0
15.0	0.05
16.0	0.2

Tabella 9: Dati di plasticizzazione materiale rigido.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
1	0	30
0.5	0.1	30

Tabella 10: Dati per danneggiamento duttile materiale rigido.

Damage evolution: strain at failure=0.09.

Curva stress-strain:

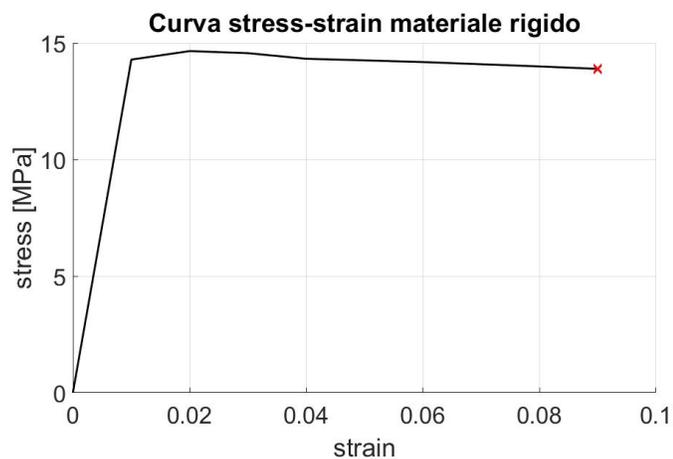


Figura 29: Curva stress-strain materiale rigido.

Materiale A Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 600 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
2.8	0
3.5	0.05
4.2	0.2

Tabella 11: Dati di plasticizzazione materiale A.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
1	0	30
0.5	0.4	30

Tabella 12: Dati per danneggiamento duttile materiale A.

Damage evolution: strain at failure=0.25.

Curva stress-strain:

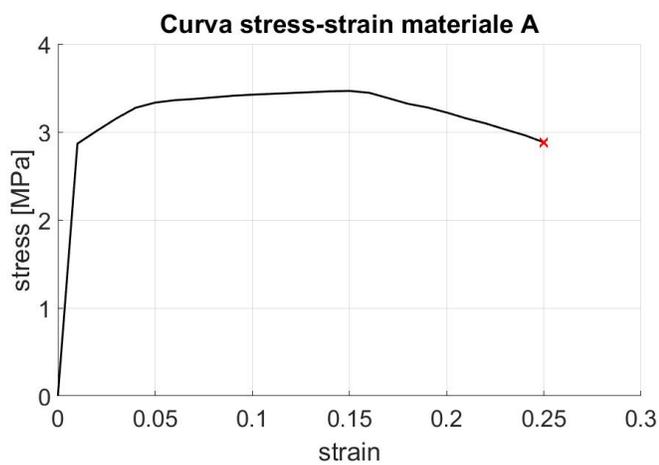


Figura 30: Curva stress-strain materiale A.

Materiale B Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 960 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
4.6	0
5.7	0.05
6.9	0.2

Tabella 13: Dati di plasticizzazione materiale B.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
1	0	30
0.5	0.4	30

Tabella 14: Dati per danneggiamento duttile materiale B.

Damage evolution: strain at failure=0.24.

Curva stress-strain:

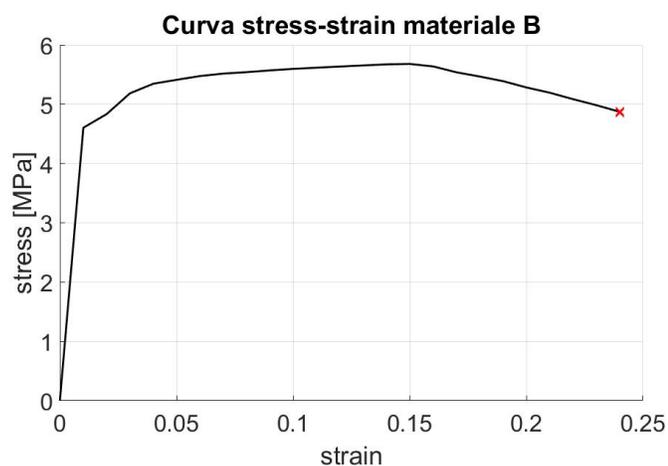


Figura 31: Curva stress-strain materiale B.

Materiale C Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 1320 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
6.16	0
7.7	0.05
9.24	0.2

Tabella 15: Dati di plasticizzazione materiale C.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
1	0	30
0.5	0.4	30

Tabella 16: Dati per danneggiamento duttile materiale C.

Damage evolution: strain at failure=0.22.

Curva stress-strain:

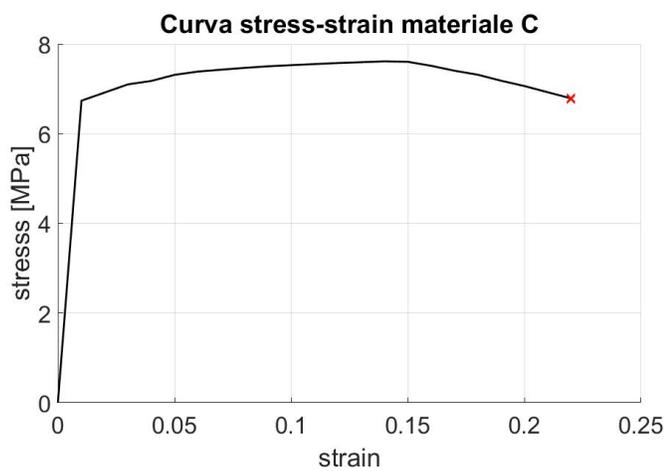


Figura 32: Curva stress-strain materiale C.

Materiale D Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 1680 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
7.8	0
8.3	0.05
8.8	0.2

Tabella 17: Dati di plasticizzazione materiale D.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
0.6	0	30
0.5	0.2	30

Tabella 18: Dati per danneggiamento duttile materiale D.

Damage evolution: strain at failure=0.18.

Curva stress-strain:

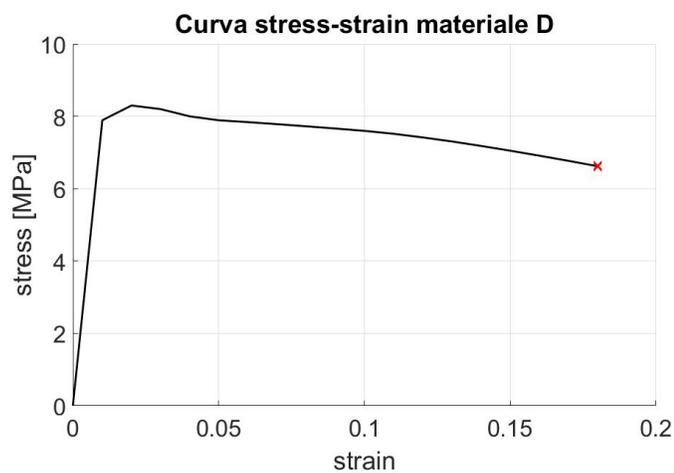


Figura 33: Curva stress-strain materiale D.

Materiale E Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 2100 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
9.0	0
9.1	0.05
9.8	0.2

Tabella 19: Dati di plasticizzazione materiale E.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
0.6	0	30
0.5	0.2	30

Tabella 20: Dati per danneggiamento duttile materiale E.

Damage evolution: strain at failure=0.16.

Curva stress-strain:

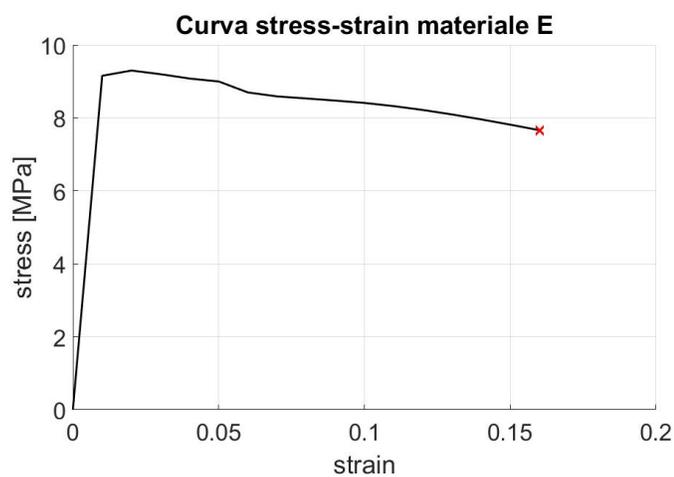


Figura 34: Curva stress-strain materiale E.

Materiale F Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 2460 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
11.0	0
11.5	0.05
11.6	0.2

Tabella 21: Dati di plasticizzazione materiale F.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
0.5	0	30
0.3	0.3	30

Tabella 22: Dati per danneggiamento duttile materiale F.

Damage evolution: strain at failure=0.12.

Curva stress-strain:

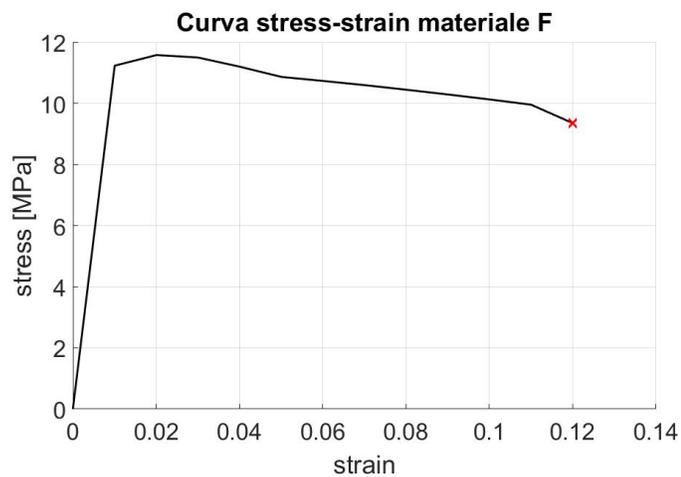


Figura 35: Curva stress-strain materiale F.

Risulta utile poter confrontare il comportamento di tutti i materiali confrontandoli l'uno all'altro.

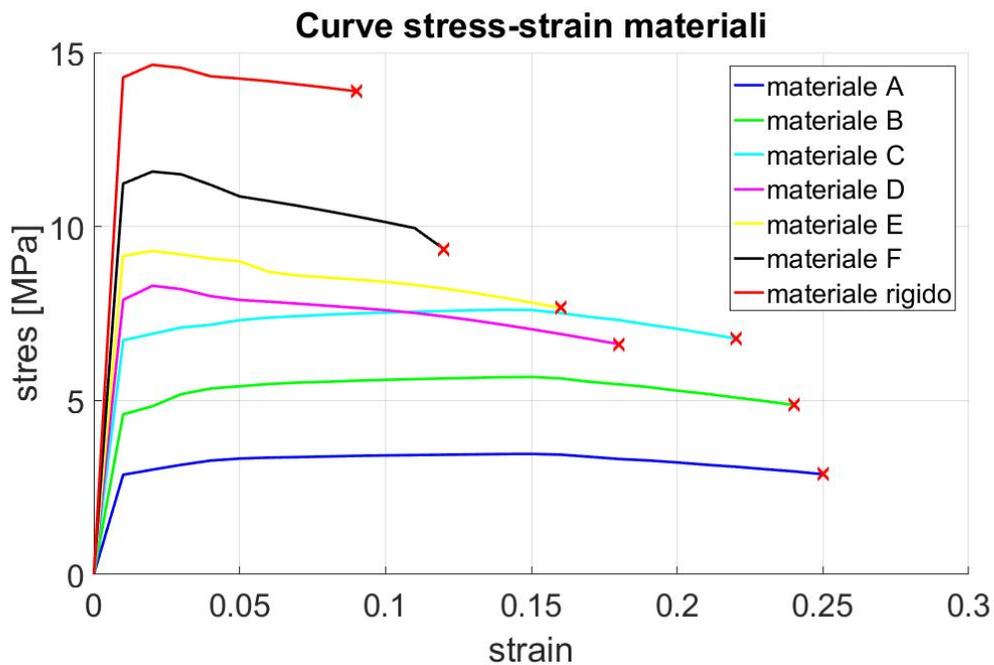


Figura 36: Curve stress-strain materiali.

È qui chiaro che i materiali sono stati modellati in modo da ottenere un modulo di elasticità crescente, ed al tempo stesso una minor resistenza alla deformazione plastica.

4.3.7 Creazione di una cricca iniziale

Uno dei vantaggi che un materiale a struttura gerarchica dovrebbe presentare rispetto ad un materiale monolitico è la capacità di resistere molto meglio a dei difetti, siano essi di fabbricazione o derivati da danneggiamenti precedenti. Per simulare questo aspetto, si aggiunge una cricca preesistente al provino, simulando così un difetto esistente prima dall'inizio della simulazione di trazione. Il provino non sarà più perciò totalmente integro, ma soffrirà di una cricca di dimensione non trascurabile. Ovviamente, ogni provino analizzato, realizzato con le diverse combinazioni di materiali, sarà dotato della medesima cricca, nella stessa posizione e delle stesse dimensioni.

La cricca è essenzialmente una fessura creata nella parte inferiore del lato maggiore, esattamente a metà del provino, spessa 2 mm e lunga 10 mm.

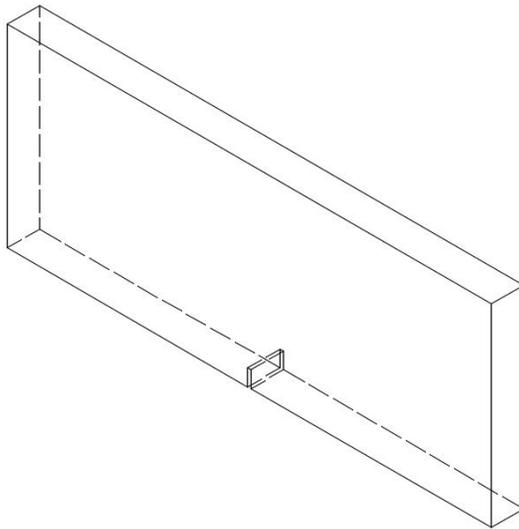


Figura 37: Assonometria del provino con la cricca preesistente.

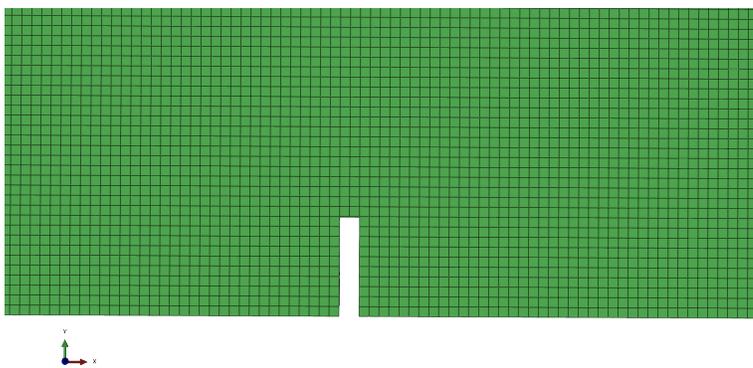


Figura 38: Dettaglio della cricca preesistente.

4.4 Verifica del modello

Prima di proseguire, è buona cosa prendersi del tempo per verificare se un modello realizzato come descritto nelle pagine precedenti può trovare riscontro nella realtà o meno.

Per verificare se il modello è realistico, ci si deve confrontare con i dati di una analisi realistica, il più possibile simile alle analisi che si andranno a svolgere per questa tesi.

Si decide di riferirsi, pertanto, allo studio *Defect-Tolerant Bioinspired Hierarchical Composites: Simulation and Experiment*[55] in cui vengono sottoposti a trazione degli effettivi provini di materiale bone-like realizzati con stampa 3D. Considerate le differenti dimensioni delle geometrie tra la struttura proposta in questa tesi e la struttura analizzata nello studio citato in precedenza, e considerato anche il fatto che i materiali modellati in questa tesi non corrispondono ai materiali utilizzati nella stampa 3D dei provini sottoposti a test, non ci si aspetta una perfetta corrispondenza tra i risultati, ma si desidera verificare che l'andamento del percorso di frattura e che l'andamento generale del grafico stress-strain ottenuti sottoponendo a trazione provini reali sia rispecchiato anche dalle analisi numeriche svolte sui provini modellati. In particolare nello studio [55] si riportano i dati ottenuti dai test su di un provino di materiale bone-like 2H con presente una cricca, disposta su di un lato alla metà del lato stesso, lunga il 10 % del lato del provino. Il provino, inoltre, è realizzato con un solo strato di materiale gerararchico, ed i materiali che lo compongono sono i due polimeri della *Zare Prototipe* già descritti in precedenza, ed utilizzati come riferimento anche in questa tesi.

Si decide perciò di modellare un provino in *Abaqus*, caratterizzato dalle dimensioni di $100*100*2$ mm, a cui si applica una cricca come mostrato nella prossima figura:

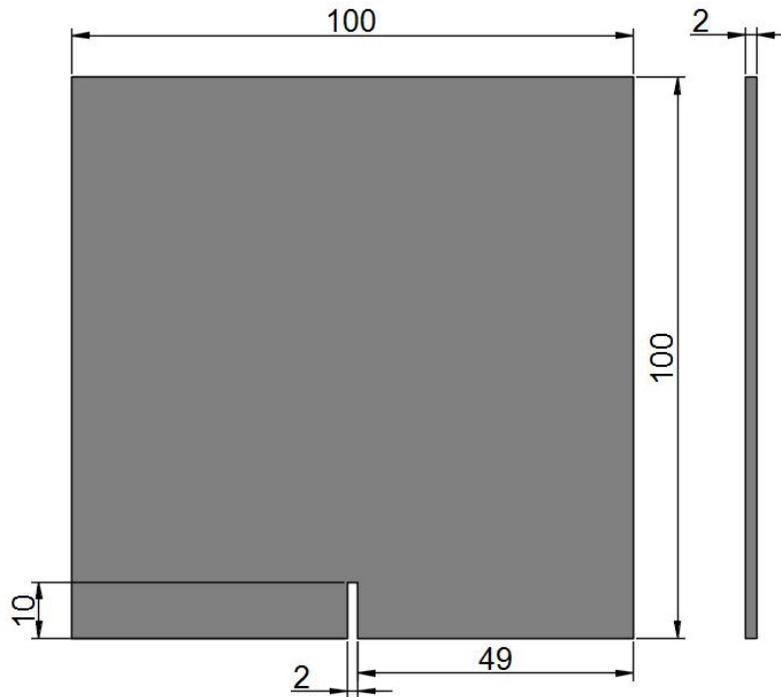


Figura 39: Provino per verifica sperimentale - dimensioni in mm.

Si può notare la cricca inserita a metà del lato inferiore, dimensioni 10×2 mm, lunga cioè il 10% del lato del quadrato.

Il provino è realizzato in materiale gerarchico con geometria 2H; la matrice è costituito da materiale A e le inclusioni dal materiale rigido.

Il provino va sottoposto a test di trazione monoassiale, pertanto i vincoli seguono lo schema proposto nella sezione precedente: il lato in cui è presente la cricca ed il lato opposto sono lasciati liberi, un lato adiacente è vincolato e privato delle traslazioni lungo l'asse X, ed il suo baricentro è vincolato e perde pure i gradi di libertà lungo gli assi Y e Z. Il rimanente lato presenta il baricentro vincolato e privato delle traslazioni lungo gli assi Y e Z, ed è collegato tramite un MPC ad avere lo stesso spostamento lungo l'asse X di un reference point cui sarà applicata una traslazione lungo l'asse X nel senso positivo di 100 mm, con una velocità di 10 mm/min.

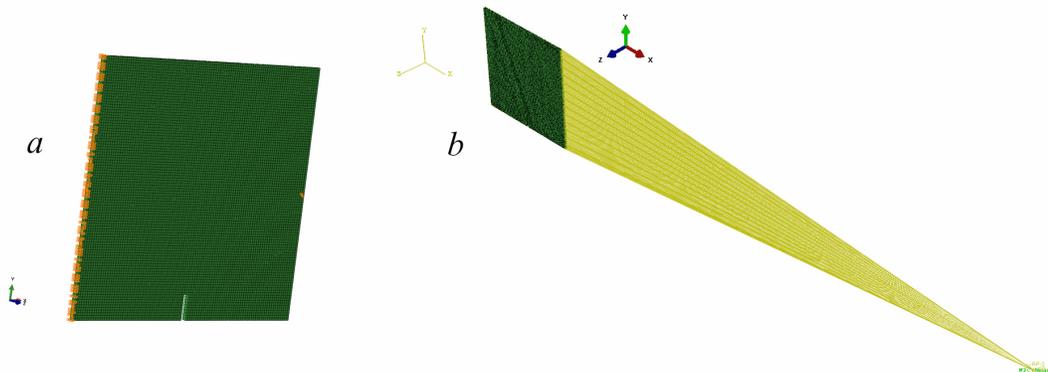


Figura 40: a) dettaglio dei vincoli sul provino; b) MPC agente sul provino.

Per quanto concerne la mesh, la dimensione media di elemento è stata posta ad 1 mm, e gli elementi prescelti sono gli *hexa* a 8 nodi, formulazione ridotta. In totale il provino è costituito da 19960 elementi.

Esposte queste doverose premesse circa le condizioni di svolgimento delle analisi, si vanno a riportare i risultati ottenuti mettendoli a confronto con i risultati corrispondenti dello studio sperimentale:

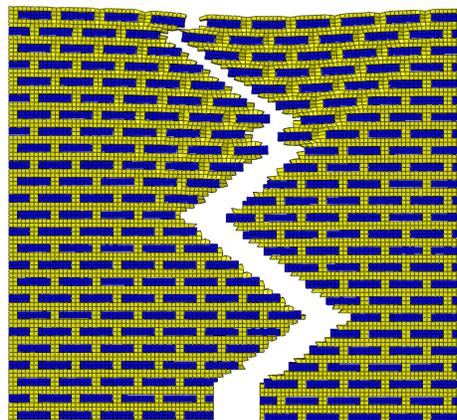
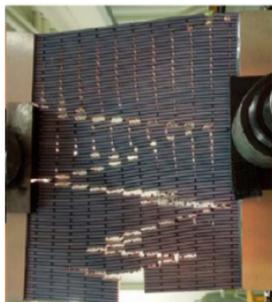


Figura 41: A sinistra provino reale sottoposto a test di trazione[55]; a destra provino sottoposto ad analisi numerica.

Ciò che l'immagine precedente dice è che effettivamente il modello adottato per le analisi di questa tesi riflette il comportamento reale di propagazione della cricca, che in entrambi i provini prosegue sostanzialmente a zig-zag preferendo come terreno su cui espandersi le zone costituite da matrice (colore giallo), aggirando le inclusioni rigide (colore blu).

L'andamento del grafico stress-strain del provino modellato numericamente è paragonabile con la curva tensione-deformazione ottenuta dal test sul provino reale:

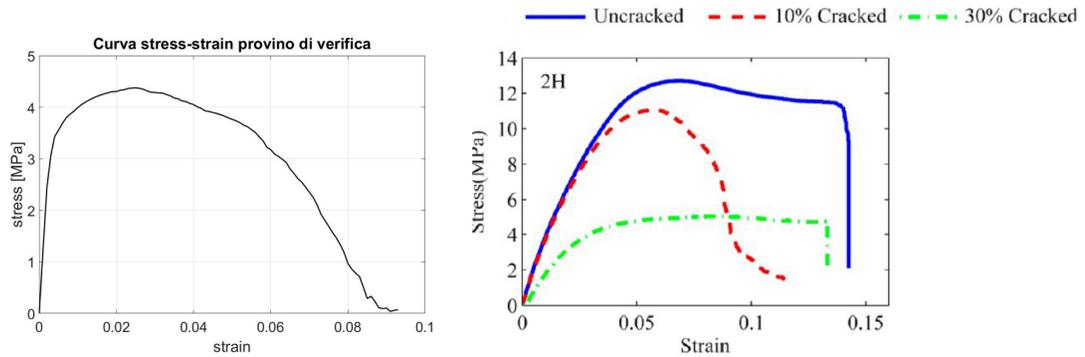


Figura 42: Comparazione delle curve tensione-deformazione: a sinistra il risultato numerico, a destra il risultato empirico[55].

Si nota che il grafico di sinistra rispecchia l'andamento del grafico di destra (linea tratteggiata rossa) per quanto riguarda il comportamento a frattura di un provino con una pre-crack lunga il 10% del lato.

In definitiva, questo piccolo confronto dice che il modello implementato per questa tesi trova riscontro nel comportamento reale della struttura gerarchica bone-like.

4.5 Studio della geometria 2H

In queste pagine si studierà con accuratezza il comportamento a frattura del materiale a geometria 2H.

La prima cosa da fare è vedere come si comportano i provini realizzati coi diversi materiali nel test di trazione monoassiale.

- **MATERIALE MONOLITICO** Il provino costituito interamente di materiale rigido arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 3%; la *strain energy density* $U_T = 0.351 J/m^3$.
- **PROVINO A** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale A. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 8.3%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.26 J/m^3$.
- **PROVINO B** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale B. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 7.7%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.351 J/m^3$.
- **PROVINO C** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale C. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 7.2%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.423 J/m^3$.
- **PROVINO D** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale D. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 5.7%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.371 J/m^3$.
- **PROVINO E** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale E. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 4.0%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.308 J/m^3$.

Il comportamento dei vari provini è più chiaro se si osserva la prossima figura:

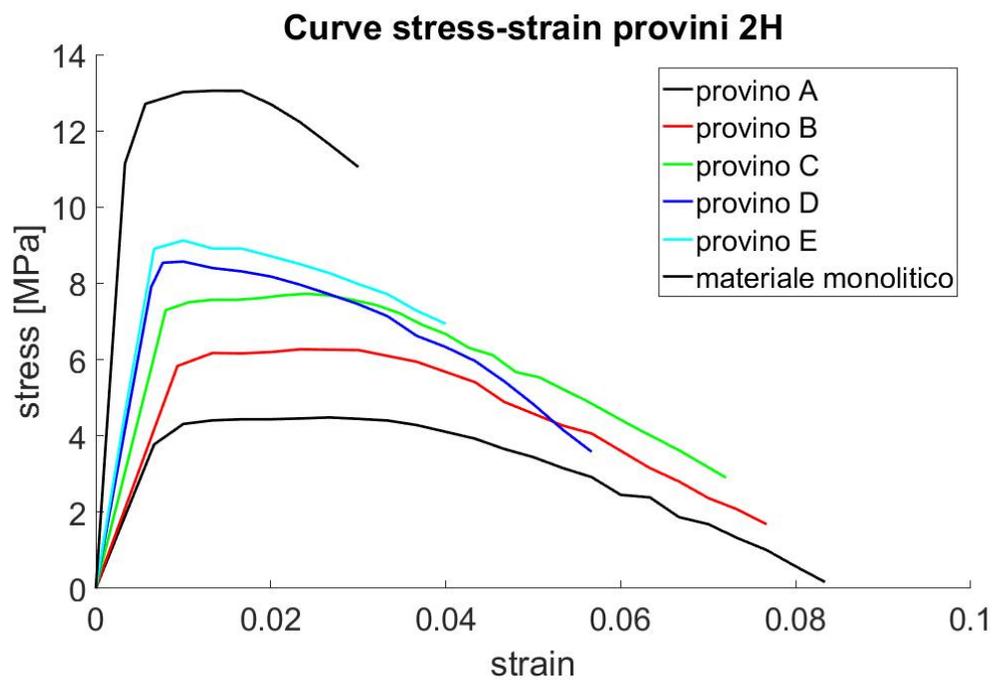


Figura 43: Curve stress-strain provini 2H.

L'obiettivo della ricerca è però quello di innalzare la capacità del materiale di assorbire energia di frattura; a tal fine è bene studiare il prossimo grafico.

È utile premettere che, per semplicità di notazione, si definisce ρ il rapporto tra il modulo elastico del materiale elastico e quello del materiale rigido.

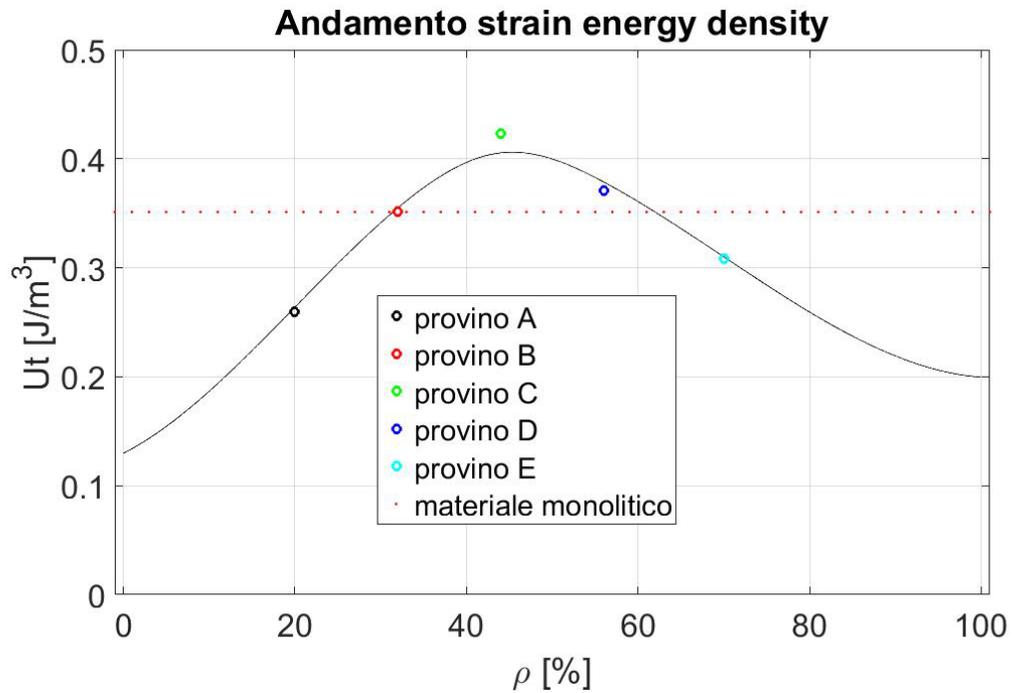


Figura 44: Andamento strain energy density nel materiale 2H.

La linea puntinata segna il livello di U_T garantita dal materiale monolitico, e l'obiettivo è quindi quello di ottenere un risultato che stia sopra quella linea. Si nota chiaramente come nella zona da circa $\rho = 30$ a $\rho = 65$ i materiali gerarchici offrano un incremento della prestazioni.

La linea nera rappresenta una spline tracciata per andare a cercare il punto di ottimo: si vede bene che il massimo della densità di energia di frattura sarà fornita da un ρ attorno al valore 45. Per proseguire con maggior precisione si definiscono due materiali ausiliari, caratterizzati da $\rho = 40$ e $\rho = 50$, per andare a investigare con dettaglio la zona del grafico maggiormente promettente.

Materiale ausiliario 1 Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 1200 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
5.1	0
7.2	0.05
7.86	0.2

Tabella 23: Dati di plasticizzazione materiale F.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
1	0	30
0.5	0.5	30

Tabella 24: Dati per danneggiamento duttile materiale F.

Damage evolution: strain at failure=0.23.

Curva stress-strain:

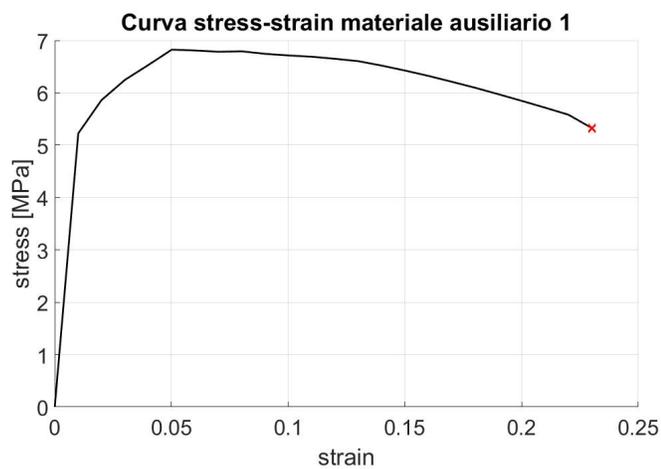


Figura 45: Curva stress-strain materiale F.

Materiale ausiliario 2 Proprietà meccaniche:

- modulo elastico: 1500 MPa
- coefficiente di Poisson: 0.35

Dati di plasticizzazione:

Yield Stress [MPa]	Plastic Strain
7.0	0
8.2	0.05
8.4	0.2

Tabella 25: Dati di plasticizzazione materiale F.

Dati per danneggiamento duttile:

Fracture Strain	Stress Triaxiality	Rate Strain
0.6	0	30
0.5	0.2	30

Tabella 26: Dati per danneggiamento duttile materiale F.

Damage evolution: strain at failure=0.185.

Curva stress-strain:

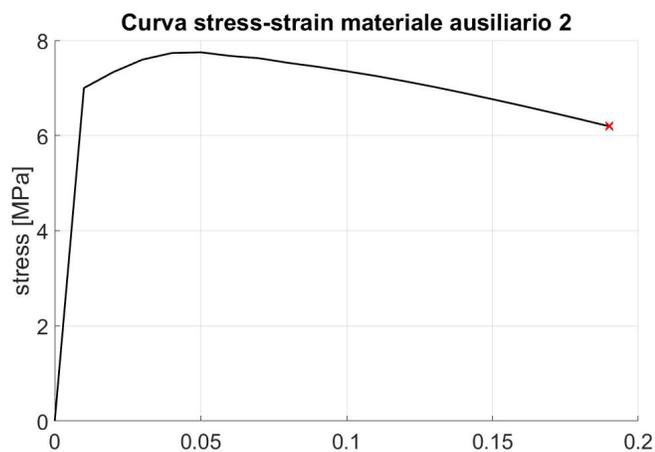


Figura 46: Curva stress-strain materiale F.

Ecco le curve tensione-deformazione dei provini nella zona di massimo:

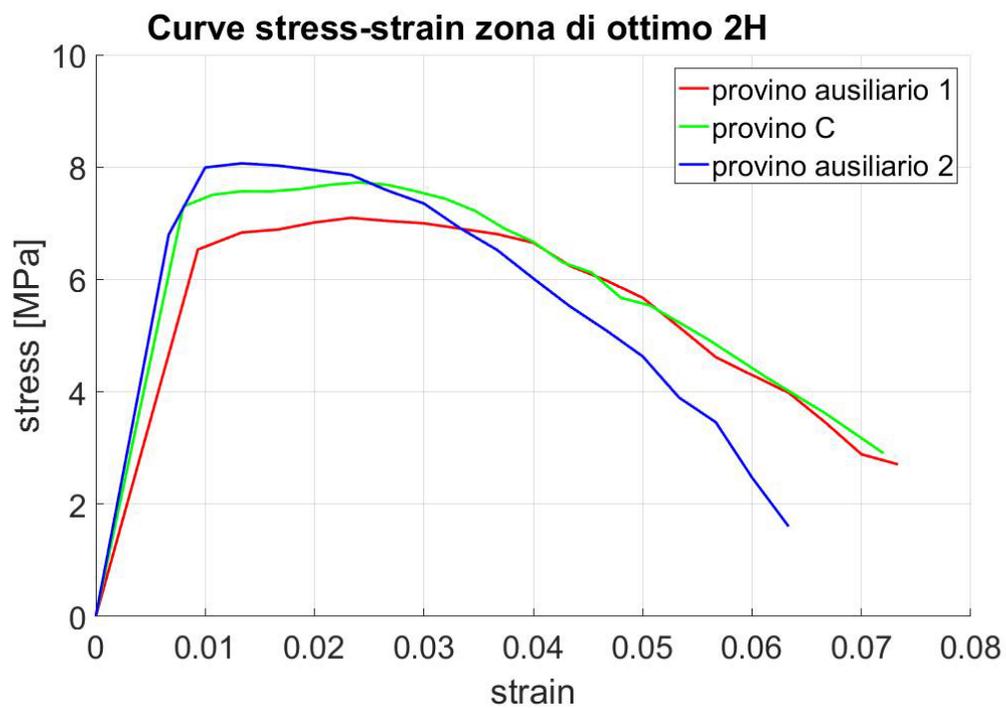


Figura 47: Curve stress-strain zona di ottimo geometria 2H.

Per quanto concerne il parametro di interesse, ossia la strain energy density:

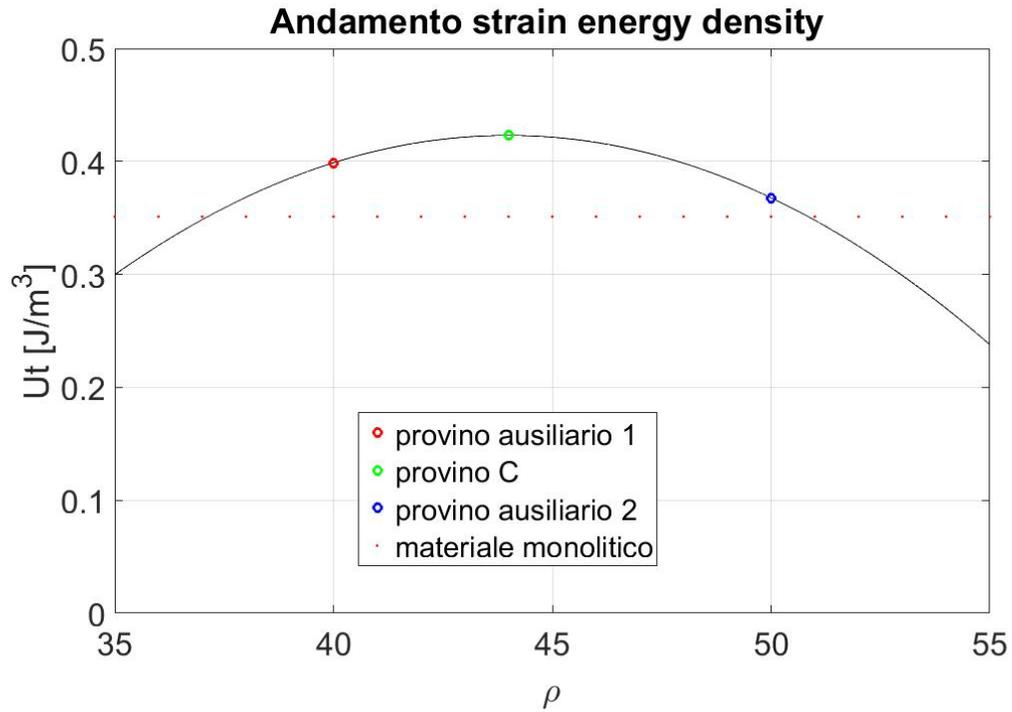


Figura 48: Andamento densità energia di deformazione.

Si è tracciata una interpolazione con un polinomio di secondo grado, che incorona il punto $\rho = 44$ come il punto di ottimo, ossia caratterizza il materiale gerarchico 2H che garantisce la massimizzazione della energia di frattura.

Per ricapitolare, è utile osservare la prossima tabella:

materiale	materiale monolitico	provino C ($\rho = 44$)
massima deformazione relativa	3.00 %	7.20 %
$U_T [J/m^3]$	0.351	0.423

Tabella 27: Tabella riassuntiva geometria 2H.

La geometria 2H realizzata con matrice di materiale C e con inclusioni di materiale rigido offre un incremento del 20.5 % di strain energy density rispetto al solo materiale rigido in struttura monolitica.

4.6 Studio della geometria 3H

Nei prossimi paragrafi ci si concentrerà invece sul comportamento a frattura del materiale a geometria 3H.

La prima cosa da fare, anche qui, è vedere come si comportano i provini realizzati coi diversi materiali nel test di trazione monoassiale.

- **MATERIALE MONOLITICO** Il provino costituito interamente di materiale rigido arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 3%; la *strain energy density* $U_T = 0.351 J/m^3$.
- **PROVINO A** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale A. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 9.0%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.246 J/m^3$.
- **PROVINO B** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale B. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 8.7%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.359 J/m^3$.
- **PROVINO C** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale C. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 8.0%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.437 J/m^3$.
- **PROVINO D** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale D. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 8.0%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.392 J/m^3$.
- **PROVINO E** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale E. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 5.7%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.379 J/m^3$.
- **PROVINO F** Il provino è costituito da inclusioni realizzate in materiale rigido, e la matrice è costituita da materiale F. Il pezzo arriva a rottura dopo una deformazione relativa del 3.7%, mentre la *strain energy density* è $U_T = 0.299 J/m^3$.

Il comportamento dei vari provini è più chiaro se si osserva la prossima figura:

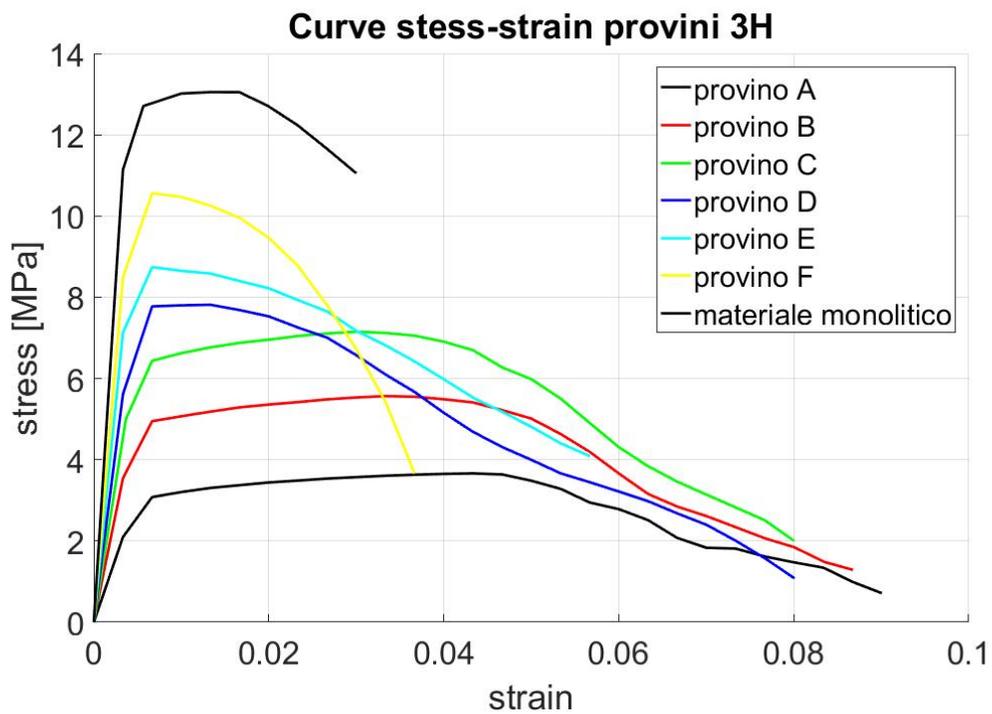


Figura 49: Curve stress-strain provini 3H.

L'obiettivo della ricerca è però quello di innalzare la capacità del materiale di assorbire energia di frattura; a tal fine è bene andare a studiare il prossimo grafico.

Si ricorda che si definisce ρ come il rapporto tra il modulo elastico del materiale elastico e quello del materiale rigido.

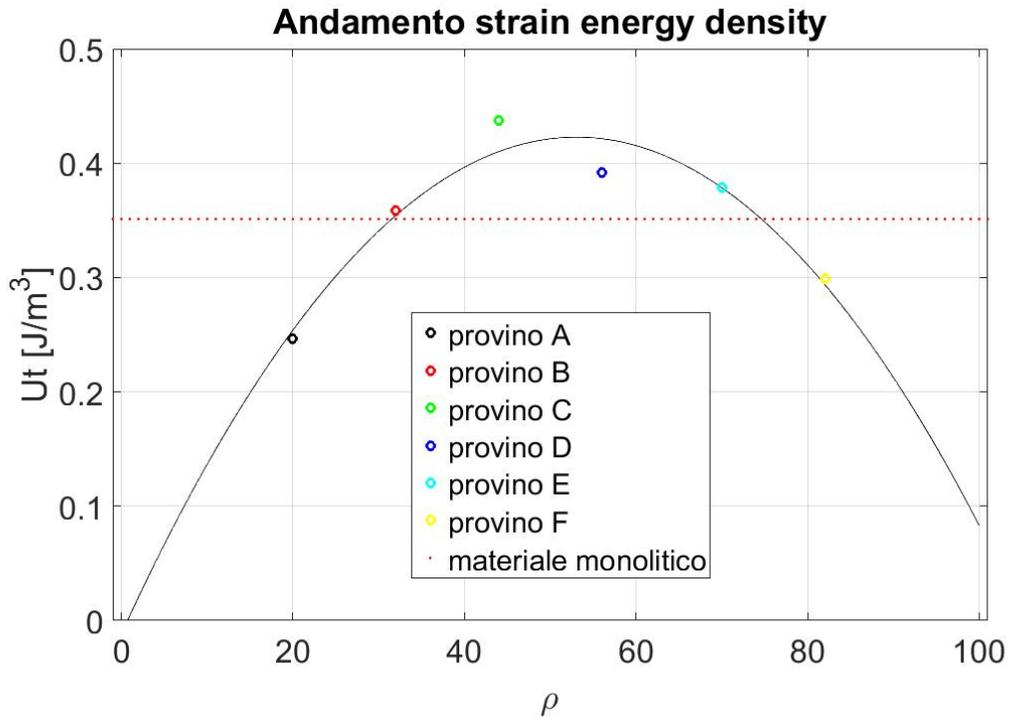


Figura 50: Andamento strain energy density nel materiale 3H.

La linea puntinata segna il livello di U_T garantita dal materiale monolitico, e l'obiettivo è quindi quello di ottenere un risultato che stia sopra quella linea. Si nota chiaramente come nella zona da circa $\rho = 35$ a $\rho = 70$ i materiali gerarchici offrano un incremento della prestazioni.

La linea nera rappresenta una spline tracciata per andare a cercare il punto di ottimo: si vede bene che il massimo della densità di energia di frattura sarà fornita da un ρ attorno al valore 45. Per proseguire con maggior precisione si utilizzano ancora una volta i due materiali ausiliari, caratterizzati da $\rho = 40$ e $\rho = 50$, per andare a investigare con dettaglio la zona del grafico maggiormente promettente.

Ecco le curve tensione-deformazione dei provini nella zona di massimo:

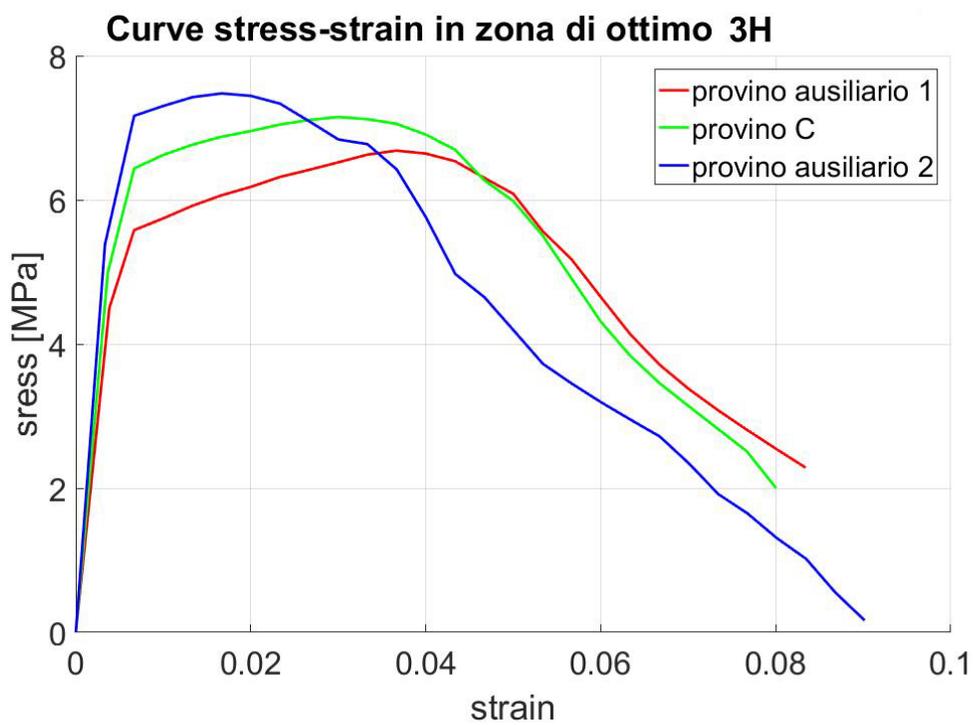


Figura 51: Curve stress-strain zona di ottimo geometria 3H.

Per quanto concerne il parametro di interesse, ossia la strain energy density:

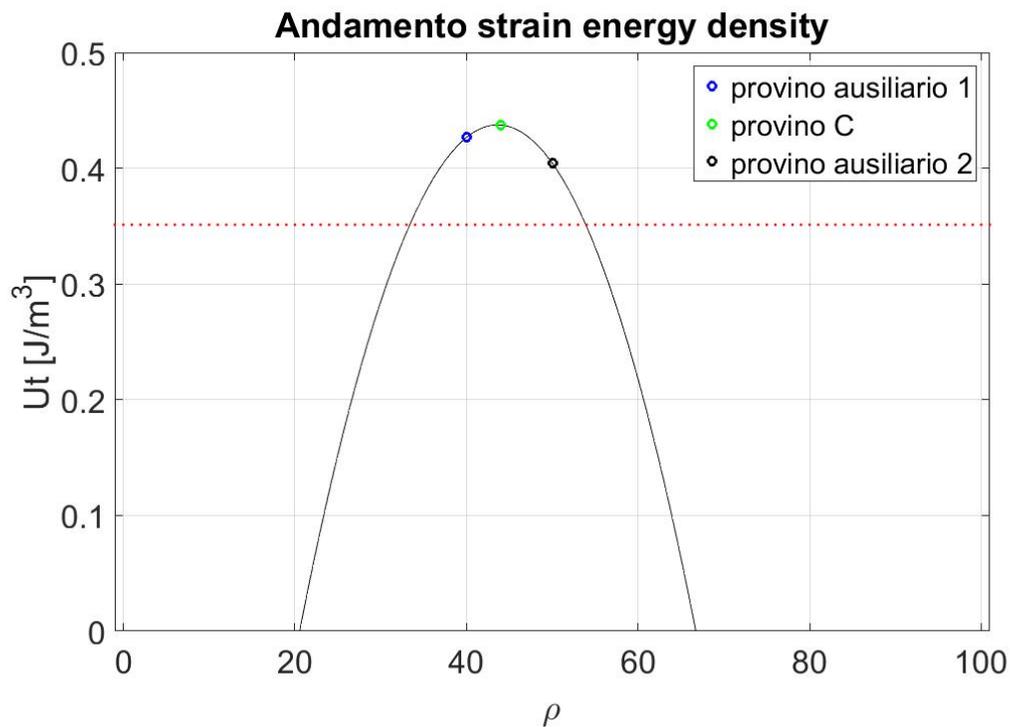


Figura 52: Andamento densità energia di deformazione.

Anche in questo caso si è tracciata una linea interpolante descritta da un polinomio di secondo grado, che incorona nuovamente il punto $\rho = 44$ come il punto di ottimo, ossia caratterizza il materiale gerarchico 3H che garantisce la massimizzazione della energia di frattura.

Per ricapitolare, è utile osservare la prossima tabella:

materiale	materiale monolitico	provino C ($\rho = 44$)
massima deformazione relativa	3.00 %	8.00 %
$U_T [J/m^3]$	0.351	0.437

Tabella 28: Tabella riassuntiva geometria 3H.

La struttura gerarchica 2H realizzata con matrice di materiale C e con inclusioni di materiale rigido offre un incremento del 24.5 % di strain energy density rispetto al solo materiale rigido in struttura monolitica.

4.7 Confronto tra geometria 2H e geometria 3H

Una volta che si è verificata la capacità di incrementare consistentemente la *strain energy density*, è interessante indagare come la performance target (innalzamento strain energy density) sia in dipendenza dal numero di livelli gerarchici della struttura.

Come prima cosa è interessante notare che sia la geometria 2H che la geometria 3H garantiscono la massima performance con la stessa accoppiata di materiali: fasi rigide costituite di materiale rigido, e fase elastica realizzata con il materiale C.

In secondo luogo si evidenzia come la geometria 3H garantisca, prima di arrivare a rottura, una deformazione maggiore: il provino arriva a rottura dopo una deformazione relativa dell'8.0 ; la geometria 2H arriva a rottura dopo una deformazione del 7.2%. Infine, la geometria 3H è caratterizzato da una strain energy density maggiore di quella che caratterizza la geometria 2H. Per comodità ci si riferisca alla prossima tabella:

	materiale monolitico	geometria 2H	geometria 3H
massima elongazione [%]	3.00	7.20	8.00
$U_T [J/m^3]$	0.3512	0.4231	0.4374
incremento U_T [%]	\	20.47	24.54

Tabella 29: Tabella riassuntiva performance strutture gerarchiche.

Risulta evidente che la geometria 3H è quella che garantisce un incremento maggiore di strain energy density.

5 Conclusioni

Giunti alla fine di questo lavoro, è bene riassumere i risultati ottenuti.

Nel corso del Cap. (3) si è verificata la bontà delle previsioni che i metodi di omogeneizzazione Mori-Tanaka, Self Consistent e KUBC possono fornire circa il comportamento elastico lineare della struttura con configurazione bone-like. In particolare, si è osservato come tutti e tre i metodi consentano di ottenere un errore nelle previsioni del comportamento elastico inferiore o uguali al 3%, con l'accuratezza massima ottenuta dal metodo Self Consistent, seguito a breve distanza dal metodo Mori-Tanaka. al metodo KUBC spetta l'ultimo posto, che è comunque un risultato di tutto rispetto in quanto l'errore generato è del 3.05 %. Come già evidenziato alla fine del Cap. (3), però, il metodo KUBC è basato su un approccio numerico e richiede un procedimento senza dubbio più lungo e complesso rispetto agli altri due metodi studiati, che sono analitici. La maggior semplicità e velocità operativa, congiuntamente alla accuratezza maggiore, portano a preferire i metodi analitici come vincitori del confronto svolto, in particolar modo il metodo Self Consistent. I metodi analitici, tuttavia, risentono di un limite non banale: possono essere applicati solo a determinate configurazioni geometriche; i metodi numerici invece sono applicabili a molte più configurazioni gerarchiche, offrono una maggior flessibilità nell'impiego e sono pertanto più generali.

Il Cap. (4) invece contiene lo studio del comportamento a frattura di un materiale caratterizzato dalla struttura gerarchica bone-like. Le analisi hanno messo in evidenza come tale materiale sia caratterizzato da una *strain energy density* (densità di energia di frattura che il materiale assorbe prima di arrivare a rottura) superiore a quella di un materiale monolitico, garantendo nel contempo una maggior capacità di elongazione prima di giungere a rottura. La geometria 3H ha una capacità di assorbire energia di frattura superiore alla geometria 2H. Non avendo indagato anche le strutture di ordine superiore al terzo, non si può affermare che effettivamente tale caratteristica sia proporzionale al numero di livelli gerarchici, ma i risultati finora ottenuti suggeriscono che questa proporzionalità potrebbe sussistere; resta la curiosità di indagare questo aspetto in futuri studi.

Si è visto chiaramente come questa caratteristica, per la conformazione gerarchica studiata in questo elaborato, dipenda fortemente dalle proprietà meccaniche dei materiali che si scelgono per costituire la struttura gerarchica; se infatti per certi rapporti tra moduli elastici la capacità di assorbire energia di frattura aumenta in modo deciso, differenti combinazioni danno luogo a

materiali gerarchici molto poco resistenti, con un comportamento peggiore del materiale monolitico. Per entrambe le geometrie si è rivelata vincente la combinazione tra un materiale rigido, con ridotta deformazione plastica a rottura, ed un materiale con modulo elastico pari a 0,44 volte quello del materiale rigido, caratterizzato da una plasticizzazione più ampia ed estesa. Un provino realizzato con la geometria 3H, ottenuta con questi materiali, assorbe il 24.5 % in più di energia di frattura di un provino realizzato con il solo materiale rigido.

In conclusione, questa struttura gerarchica è una struttura con un comportamento elastico lineare facilmente prevedibile, e capace di garantire performance meccaniche in termini di assorbimento di energia per la frattura interessanti rispetto al materiale monolitico.

6 Ipotesi su studi futuri

Considerati i promettenti risultati ottenuti nel corso di questa tesi, risulta interessante delineare, almeno a grandi linee, quella che potrebbe essere una *road-map* per approfondire in futuro lo studio della struttura gerarchica bone-like.

Per quanto riguarda lo studio sulla accuratezza della omogeneizzazione, nel corso di questo lavoro ci si è fermati a valutarne la precisione in campo elastico; sarebbe molto interessante verificare se i modelli già elaborati possano descrivere, e con che accuratezza, il comportamento anche nel campo plastico e viscoso.

Per proseguire invece lo studio circa la toughness di questa configurazione gerarchica, si potrebbe verificare il comportamento a frattura della geometria 3H realizzata con più strati, superando il limite che ha caratterizzato le analisi svolte per questo elaborato.

Proseguendo, potrebbe essere utile verificare il comportamento di questo materiale in presenza di condizioni esterne differenti, per esempio in presenza di una pressione idrostatica.

Inoltre, nella prospettiva di applicare questi materiali nelle costruzioni meccaniche in ambito meccanico, aeronautico e spaziale, è di fondamentale interesse studiarne prima numericamente (quando possibile) e poi sperimentalmente il comportamento rispetto a vibrazioni nei range di frequenze che tipicamente interessano queste applicazioni, ed anche rispetto a carichi ciclici a fatica.

Ringraziamenti

Giunto al termine di questo percorso, intendo ringraziare in primis il Prof. Mirco Zaccariotto per la disponibilità, comprensione e gentilezza sempre dimostrate: la forte passione che comunica e trasmette verso la sua materia e lo studio in generale è l'eredità più importante che vorrò conservare gelosamente.

Un ringraziamento va anche ai miei colleghi, in primis Sebastiano e Serena, per aver affrontato assieme questo viaggio, sostenendoci vicendevolmente nelle cadute; mi auguro che lo stesso spirito ci accompagni nei prossimi anni, verso nuove e sempre più stimolanti sfide. Grazie a Domenica, per la preziosa compagnia dapprima nei lunghi viaggi da pendolare, poi nella vita quotidiana come cara amica.

Grazie ai miei genitori ed alla mia famiglia, per avermi sostenuto in questi anni dal punto di vista personale, emotivo ed economico. Provo un forte senso di gratitudine verso i miei cognati Paolo e Jacopo, che col loro atteggiamento curioso verso il mondo mi hanno fatto scoprire la vocazione per l'ingegneria. Non posso esimermi dall'esprimere tutta la mia gratitudine per l'esistenza dei miei 6 adorati nipoti, che con la loro innocenza fanciullesca sanno sempre farmi scoprire un motivo per sorridere.

Grazie alla famiglia Dallon che, fin dalla prima infanzia, mi ha sempre fatto sentire a casa quando ero loro ospite.

Un pensiero va a Jacopo, cui sono grato per l'amicizia che ci ha legato per tanti anni. Quanto vorrei fossi qui oggi per condividere la gioia di questo traguardo!

Come non ringraziare poi tutti i frati del Carmelo di Treviso, soprattutto Padre Gabriele e Padre Giuseppe. Sempre disponibili ed attenti, hanno saputo accompagnarmi da vicino nel complesso percorso che porta dall'essere ragazzo all'essere uomo.

Gli amici lì conosciuti sono stati una benedizione, un balsamo che ha saputo rendere gioiosa la mia vita: Piero, Chiara, Maria Elena, Davide, Agostino, Federico, Paola, Massimo, Alessandra, Virginia, Gabriele, Giovanna, Gianni, e tutte quante le meravigliose persone conosciute in questi ricchi anni.

Ringrazio Tonino e Stefania ed i loro figli per aver donato il loro affetto ed il loro tempo, in modo gratuito e sorprendente, affinché potessimo, io e Giulia, affrontare con le scarpe giuste l'affascinante scalata di una storia d'amore.

Ringrazio Marta e Paolo, Flavia e Riccardo, Laura e Matteo per l'amicizia nata grazie al Corso Fidanzati; mi auguro che cresca sempre e che possiamo sempre essere gli uni per gli altri sostegno e memoria della grande promessa che il nostro cuore ha scoperto.

Ringrazio la famiglia di Giulia per avermi dimostrato accoglienza ed amicizia fin da subito; la generosità di Fabio sarà sempre un esempio.

Infine ringrazio Giulia, che mi ha fatto scoprire un senso nuovo nel fare le semplici cose, ed ha portato nella mia vita un vento di novità e gioia che permane ad anni di distanza, e che rivoluziona ogni giornata, non concede pausa e spinge le ali della mia vita sempre più in alto.

Grazie!

Riferimenti bibliografici

- [1] Aboudi J., *Mechanics of Composite Materials*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1991.
- [2] Agarwal B. D., Broutman L. J., *Analysis and Performance of Fiber Composites*, Wiley Interscience, 1980.
- [3] Ahmed S., Jones F. R., *A review of particulate reinforcement theories for polymer composites*, Journal of Materials Science **25(12)**, 4933-4942, 1990.
- [4] Aizenberg J., Weaver J.C., Thanawala M.S., Sundar V.C., Morse D.E., Fratzl P., *Skeleton of Euplectella sp.: Structural Hierarchy from the Nanoscale to the Macroscale*, Science **309**, 275-278, 2005.
- [5] Aravas N., *On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **24**, 1395-1416, 1987.
- [6] Baer E., Hiltner A., Kieth H. D., *Hierarchical structure in polymeric materials*, Science **235(4792)**, 1015-1022, 1987.
- [7] Barthelat F., Tang H., Zavattieri P.D., Li C.M., Espinosa H.D., *On the mechanics of mother-of-pearl: A key feature in the material hierarchical structure*, J. Mech. Phys. Solids **55**, 306-337, 2007.
- [8] Benveniste Y., *A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials*, Mechanics of Materials **6(2)**, 147-157, 1987.
- [9] Bisegna P., Luciano R., *On methods for bounding the overall properties of periodic piezoelectric fibrous composites*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **45(8)**, 1329-1356, 1997.
- [10] Brunig M., Chyra O., Albrecht D., Drimeier L., Alves M., *A ductile damage criterion at various stress triaxialities*, International Journal of Plasticity **24**, 1731-1755, 2008.
- [11] Carpinteri A., Pugno N.M., *Mechanics of hierarchical materials*, International Journal of Fracture **150**, 221-226, 2008.

- [12] Chaboche J.L., Kanouté P., Roos A., *On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites*, International Journal of Plasticity **21(7)**, 1409-1434, 2005.
- [13] Christensen R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Journal of Polymer Science Part C: Polymer Letters, Wiley-Interscience, 1979.
- [14] Currey J., *The Mechanical Adaptations of Bone*, Princeton University Press, New Jersey, 1984.
- [15] Dassault Systemes, *Abaqus analysis user's guide*, 2012.
- [16] Dimas L.S., Bratzel G.H., Eylon I., Buehler M.J., *Tough Composites Inspired by Mineralized Natural Materials: Computation, 3D printing, and Testing*, Advanced Functional Materials **23**, 4629-4638, 2013.
- [17] Dimas L.S., Buehler M.J., *Influence of geometry on mechanical properties of bio-inspired silica-based hierarchical materials*, Bioinspiration & Biomimetics **7**, 1-10, 2012.
- [18] Dimas L.S. , Buehler M.J., *Modeling and additive manufacturing of bio-inspired composites with tunable fracture mechanical properties*, Royal Society of Chemistry **10**, 4436-4442, 2014.
- [19] Dimas L.S., Buehler M.J., *Tough and stiff composites with simple building blocks*, Journal of Materials Research **28**, 1295-1303, 2013
- [20] Du N., Liu X.Y., Narayanan J., Li L., Min Lim M.K., Li D., *Design of Superior Spider Silk: From Nanostructure to Mechanical Properties*, Biophysical Journal **91**, 4528-4535, 2006.
- [21] Dyson F. J., *Perspective in Modern Physics: Essays in Honor of Hans Bethe*, Wiley Interscience, 1966.
- [22] Easterling K. E., Harrysson R., Gibson L. J., Ashby M. F., *On the mechanics of balsa and other woods*, Proceedings of the Royal Society of London **383(1784)**, 1982.
- [23] Gänser H.P., Werner E.A., Fischer F.D., *Forming limit diagrams: a micromechanical approach*, International Journal of Mechanical Sciences **42(10)**, 2041-2054, 2000.

- [24] Garcia A.P., Sen D., Buehler M.J., *Hierarchical Silica Nanostructures Inspired by Diatom Algae Yield Superior Deformability, Toughness, and Strength*, Metallurgical and Materials Transactions **42A**, 3889-3897, 2011.
- [25] Geissler M., Schmid H., Bietsch A., Michel B., Delamarche E., *Defect-Tolerant and Directional Wet-Etch Systems for Using Monolayers as Resists*, Langmuir **18**, 2374-2377, 2002.
- [26] Gloria A., *An Analytical Framework for Nuclear Homogenization, Part II: Windowing and Oversampling*, Multiscale Modeling and Simulations **7(1)**, 274-293, 2006.
- [27] Gibson L. J., Ashby M. F., *Cellular Solids: Structures & Properties*, Oxford: Pergamon Press, 1988.
- [28] Hancox N. M., *Biology of Bone*, Cambridge University Press, New York, 1972.
- [29] Hashin Z., *Analysis of Composite Materials*, Journal of Applied Mechanics **50(3)**, 481-505, 1983.
- [30] Hashin Z., *Viscoelastic behavior of heterogeneous media*, Journal of Applied Mechanics **35(3)**, 630-636, 1965.
- [31] Hashin Z., Rosen B.W., *The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials*, Journal of Applied Mechanics **31(2)**, 223-232, 1964.
- [32] Hashin Z., Shtrikman S., *A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **11**, 127-140, 1963.
- [33] Hershey A.V., *The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals*, Journal of Applied Mechanics **21(3)**, 236-240, 1954.
- [34] Hill R., *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proceedings of the Royal Society of London **193(1033)**, 281-297, 1948.
- [35] Hill R., *Continuum micro-mechanics of elasto-plastic polycrystals*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **13(2)**, 89-101, 1965.

- [36] Hill R., *On the classical constitutive laws for elastic-plastic solids*, Recent Progress in Applied Mechanics, 241-249, 1967.
- [37] Hill R., *Theoretical plasticity of textured aggregates*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **85(1)**, 179-191, 1979.
- [38] Hilleborh A., Moéer M., Petersson P.E., *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*, Cement Concrete Resources **6(6)**, 773-781, 1976.
- [39] Huet C., *Coupled size and boundary-condition effects in viscoelastic heterogeneous and composite bodies*, Mechanics of Materials **31**, 787-829, 1999.
- [40] Kalpakjian S., Schimdt S. R., *Tecnologia Meccanica*, Pearson, Milano-Torino, 2014.
- [41] Kanit T., Forest S., Gallier I., Mounoury V., Jeulin D., *Determination of the Size of the Representative Volume Element for Random Composites: Statistical and Numerical Approach*, International Journal of Solids and Structures **40**, 3647-3679, 2003.
- [42] Kilic B., Agwai A., Madenci E., *Peridynamic theory for progressive damage prediction in center-cracked composite laminates*, Composite Structures **90**, 141-150, 2009.
- [43] Klusemann B., Svendsen B., *Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks*, Technische Mechanik **30(4)**, 374-386, 2010.
- [44] Kroner E., *Zur Plastischen Verformung des Vielkristalls*, Acta Metallurgica **9(2)**, 155-161, 1961.
- [45] Kurukuri S., *A Review of Homogenization Techniques for Heterogeneous Materials*, Bauhaus-University Weimar, 2004.
- [46] Kurukuri S., *Homogeneization of damaged concrete meso-structures using representative volume elements*, Bauhaus-University Weimar, 2005.

- [47] Lakes R., *Materials with structural hierarchy*, Nature **361**, 511-515, 1993.
- [48] Lejeunes S., Bourgeois S., *Une Toolbox Abaqus pour le calcul de propriétés effectives de milieux hétérogènes*, LMA - Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique [Marseille].
- [49] Loyrette H., *Gustave Eiffel*, Rizzoli, New York, 1985.
- [50] Mandelbrot B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, 1983.
- [51] Martínez-Ayuso G., Friswell M. I., Adhikari S., Khodaparast H. H., Berger H., *Homogenization of porous piezoelectric materials*, International Journal of Solids and Structures **113-114**, 218-229, 2017.
- [52] Men T.T., Anh Tuan V.T., *Mean-Field Homogenization*, Université de Liège, 2011.
- [53] Mercier S., Molinari A., *Homogenization of elastic-viscoplastic heterogeneous materials: Self-consistent and Mori-Tanaka schemes*, International Journal of Plasticity **25**, 1024-1048, 2009.
- [54] Milton G.W., *The Theory of Composites*, Cambridge University Press, 2002.
- [55] Mirzaeifar R., Dimas L. S., Qin Z., Buehler M. J., *Defect-Tolerant Bioinspired Hierarchical Composites: Simulation and Experiment*, ACS Biomaterials Science & Engineering **1**, 295-304, 2015.
- [56] Moesen M., *MMTensor 1.0*, Kathlie Universiteit, Leuven, 2011.
- [57] Mori T., Tanaka K., *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, Acta Metallurgica **21(5)**, 571-574, 1973.
- [58] Mura T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Mechanics of Elastic and Inelastic Solids, 1987.
- [59] Nemat-Nasser S., Hori M., *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North Holland-Amsterdam, 1993.

- [60] Nowic A. S., Berry B. S., *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, Academic, New York, 1972.
- [61] Ogierman W., Kokot G., *Mean field homogenization in multi-scale modelling of composite materials*, Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering **61(2)**, 343-348, 2013.
- [62] Oterkus E., Madenci E., Weckner O., Silling S., Bogert P., Tessler A., *Combined finite element and peridynamic analyses for predicting failure in a stiffened composite curved panel with a central slot*, Composite Structures **94**, 839-850, 2011.
- [63] Paggi M., Wriggers P., *Stiffness and Strength of hierarchical polycrystalline materials with imperfect interfaces*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **60**, 557-572, 2012.
- [64] Rho J.Y., Kuhn-Spearing L., Zioupos P., *Mechanical properties and the hierarchical structure of bone*, Medical Engineering & Physics **20**, 92-102, 1998.
- [65] Sab K., *On the homogenization and the simulation of random materials*, European Journal of Mechanics and Solids **11(5)**, 585-607, 1992.
- [66] Sacco E., *Appunti di meccanica delle strutture*, Università di Cassino, 2014.
- [67] Seurado J., Llorca J., *Computational micromechanics of composites: The effect of particle spatial distribution*, Mechanics of Materials **38(8-10)**, 873-883, 2006.
- [68] Segurado J., Llorca J., González C., *On the accuracy of mean-field approaches to simulate the plastic deformation of composites*, Scripta Materialia **46(7)**, 525-529, 2002.
- [69] Smith C. S., *Hierarchical Structures*, Elsevier, New York, 1969.
- [70] Spagnoli A., *Allungamento*, www.wikitecnica.com, 2011.
- [71] Thomas R. J., *Wood: Structure and Chemical Composition*, ACS Symposium Series **43**, 1-23, 1977.
- [72] Trauffer D., *Blog*, www.Quora.com, 2015.

- [73] von Mises R., *Mechanik der festen Korper im plastisch- deformablen Zustand*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 582-591, 1913.
- [74] Wegst U.G.K., Bai H., Saiz E., Tomsia A.P., Ritchie R.O., *Bioinspired structural materials*, Nature Materials **14**, 23-36,2015.
- [75] Zener C., *Elasticity and Anelasticity of Metals*, Univeristy of Chicago Press, 1948.