



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Introduzione alla teoria dell'omologia

Relatrice:
Prof.ssa Orsola Tommasi

Laureando: Erika Corbioli
Matricola: 2012694

Anno Accademico 2023/2024

19/04/2024

Indice

Introduzione	5
0 Nozioni preliminari	7
0.1 Notazione	7
0.2 Sugli spazi topologici	8
0.3 Sulle superficie reali compatte	16
0.4 Sulle successioni esatte	20
1 Definizioni e proprietà di base della teoria dell'omologia	21
1.1 Definizione dei gruppi di omologia singolare cubica	21
1.2 Omomorfismi indotti da mappe continue	25
1.3 Proprietà di omotopia degli omomorfismi indotti	27
2 Teoremi e risultati fondamentali per calcolo dei gruppi di omologia	33
2.1 Omologia di una coppia	33
2.1.1 Definizione dei gruppi di omologia relativi	33
2.1.2 successione esatta di omologia di una coppia	34
2.1.3 Proprietà dei gruppi di omologia relativi	37
2.2 Il teorema di escissione	39
2.3 La successione esatta di Mayer–Vietoris	44
3 Omologia di superficie reali compatte	49
3.1 Gruppi di omologia delle sfere	49
3.2 Gruppi di omologia delle superficie compatte	52
Bibliografia	63

Introduzione

La teoria dell'omologia è uno strumento molto efficace per studiare gli invarianti omotopici di uno spazio topologico. Ciò è dovuto in gran parte al fatto che calcolare i gruppi di omologia di uno spazio è spesso semplice. Il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ è infatti adatto solo allo studio di superficie di basse dimensioni. In particolare, ad esempio, non distingue le sfere S^n per $n > 2$. Questo problema può essere risolto andando a considerare i gruppi fondamentali di X di ordine superiore, $\pi_n(X)$, tuttavia questi hanno il difetto di non essere in generale facilmente computabili.

La teoria dell'omologia associa a un qualsiasi spazio topologico X una sequenza di gruppi abeliani $H_0(X), H_1(X), H_2(X), \dots$ e a ogni mappa continua $f: X \rightarrow Y$ una sequenza di omomorfismi

$$f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tramite lo studio della struttura dei gruppi di omologia è possibile comprendere molte proprietà topologiche dello spazio. Dei semplici esempi sono l'orientabilità dello spazio, la connessione per archi, la presenza di “buchi” di qualsiasi dimensione.

In questa tesi, dunque, verrà presentata un'introduzione alla teoria dell'omologia, partendo dalle definizioni e dalle proprietà basilari dell'omologia singolare. Verrà mostrata infine un'applicazione dei risultati visti su degli spazi topologici universalmente noti, le superficie reali compatte.

Il capitolo 0 è un capitolo introduttivo, si vedranno qui le definizioni necessarie per trattare di spazi topologici e se ne discuteranno le proprietà fondamentali. Si studieranno poi le superficie reali compatte, in modo che gli oggetti che si andranno ad analizzare all'interno della tesi siano ben chiari. Infine daremo la definizione di successione esatta, strumento che sarà centrale nel calcolo dei gruppi di omologia e nella descrizione della loro struttura. In seguito, nel primo capitolo, vedremo i principali concetti su cui si fonda la teoria dell'omologia e mostreremo esplicitamente sia come ad uno spazio topologico vengano associati i suoi gruppi di omologia, sia come ad una mappa continua tra spazi topologici vengano associati degli omomorfismi di gruppi.

Nel secondo capitolo, quindi, tratteremo alcuni metodi di calcolo dei gruppi di omologia, illustrando dei risultati fondamentali della teoria, quali l'omologia di una coppia, il teorema di escissione e la successione di Mayer–Vietoris.

Infine, nel terzo e ultimo capitolo faremo vedere in modo esplicito un esempio di calcolo dei gruppi di omologia andando a studiare in maniera molto rigorosa le superficie reali compatte, facendo uso del teorema di classificazione e delle nozioni preliminari esposte nel capitolo 0.

Per il capitolo 0 si faccia riferimento a E. Sernesi, *Geometria 2* per la sezione sugli spazi topologici e alcune definizioni nella sezione delle superficie compatte, W. S. Massey, *An introduction to algebraic topology* per la sezione sulle superficie compatte e A. Hatcher, *Algebraic topology* per la definizione di successione esatta vista nella terza sezione.

Per i capitoli 1, 2 e 3 si è seguito principalmente W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology* con alcune integrazioni prese da A. Hatcher, *Algebraic topology*.

Capitolo 0

Nozioni preliminari

Vedremo in questo capitolo le definizioni necessarie per trattare di spazi topologici e passeremo in rassegna alcune loro proprietà basilari come la connessione e la connessione per archi. Seguirà poi una breve introduzione alle superficie compatte, dando le definizioni di caratteristica di Eulero–Poincaré e di genere, per poi enunciare infine il teorema di classificazione.

Infine vedremo la definizione di successione esatta, nozione fondamentale per trattare la teoria dell'omologia.

0.1 Notazione

- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} sono rispettivamente i numeri naturali, i numeri interi, i numeri razionali, i numeri reali e i numeri complessi.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sono gli interi modulo n .
- \mathbb{R}^n è lo spazio euclideo n -dimensionale.
- $I = [0, 1]$ è l'intervallo unitario chiuso e $I^n = I \times \cdots \times I$ (n fattori, $n > 0$) è l' n -cubo unitario, mentre I^0 è lo spazio che consiste di un solo punto.
- \sqcup indicherà l'unione disgiunta di insiemi o di spazi.
- \simeq indicherà un isomorfismo.
- $A \setminus B$ denoterà la differenza di insiemi, ovvero tutti i punti che sono in A ma non in B .
- $\text{Int}(A)$ denoterà l'insieme dei punti interni ad A .
- \bar{A} denoterà la chiusura dell'insieme A .

0.2 Sugli spazi topologici

Definizione 0.2.1 (topologia): Sia X un insieme non vuoto. Una *topologia* \mathcal{T} su X è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X , detti *insiemi aperti*, tali che:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. l'unione di una qualsiasi famiglia di aperti è un insieme aperto, ovvero: presi $U_i \in \mathcal{T}$ con $i \in I$, dove I è una famiglia di indici, si ha che $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
3. l'intersezione di due insiemi aperti qualsiasi è un insieme aperto.

Definizione 0.2.2 (spazio topologico): Uno *spazio topologico* è un insieme X su cui sia stata assegnata una topologia \mathcal{T} , lo si denota (X, \mathcal{T}) o più semplicemente X , sottintendendone la topologia.

Esempio 0.2.1: Vediamo i seguenti esempi:

1. Sia X è uno spazio metrico con distanza $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, la famiglia degli insiemi aperti rispetto a d è una topologia su X , tale topologia si dice *topologia indotta*. Alcuni esempi di spazi topologici con topologia indotta sono: $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, $(\mathbb{C}, \mathcal{E})$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$, $(\mathbb{C}^n, \mathcal{E})$, dove \mathcal{E} è la topologia euclidea, indotta dalla distanza euclidea d .
2. In un qualsiasi insieme non vuoto X la famiglia $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$ definisce una topologia su X , detta *topologia banale*.
3. Un'altra topologia su un qualsiasi insieme X non vuoto si ottiene considerando aperto un qualsiasi sottoinsieme di X , ovvero prendendo $\mathcal{T} = \wp(X)$. Questa topologia viene detta *topologia discreta*.
4. Un altro esempio interessante è la *topologia di Zariski* o *topologia cofinita* su \mathbb{R} . Su \mathbb{R} definiamo una topologia in cui gli aperti sono i complementari di un insieme finito di punti, ovvero gli insiemi $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Possiamo anche vedere U come il complementare dell'insieme degli zeri di un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, esplicitamente $f = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Tale topologia viene detta *topologia di Zariski* o *topologia cofinita*.

Definizione 0.2.3 (base di \mathcal{T}): Sia (X, \mathcal{T}) uno spazio topologico. Una base \mathcal{B} di \mathcal{T} è una famiglia di aperti $B \subseteq \mathcal{T}$ tale che ogni aperto $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, sia unione di aperti di \mathcal{B} . Equivalentemente, \mathcal{B} è una base di \mathcal{T} se per ogni aperto A di X , $A \neq \emptyset$ e per ogni $x \in A$, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$ e $B \subseteq A$.

Proposizione 0.2.1: Sia X un insieme non vuoto e \mathcal{B} una famiglia di sottoinsiemi di X tali che:

- (a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;
- (b) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B$ è unione di elementi di \mathcal{B} .

Allora esiste un'unica topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ su X di cui \mathcal{B} sia una base, tale topologia è detta topologia generata da \mathcal{B} .

Definizione 0.2.4 (ricoprimento): Un *ricoprimento* di un insieme X non vuoto è una famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di X tale che

$$X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Più in generale, se A è un sottoinsieme non vuoto di un insieme X , una famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di X tale che

$$A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

si dice *ricoprimento* di A . In particolare un ricoprimento si dice *ricoprimento aperto* se tutti gli elementi di \mathcal{F} sono aperti.

Definizione 0.2.5 (intorno di un punto): Sia X uno spazio topologico. Un *intorno* di un punto $x \in X$ è un insieme N tale che $x \in N$ ed esiste un aperto U tale che $x \in U$ e $U \subseteq N$. La famiglia di tutti gli intorni di x , che denoteremo con $\mathcal{N}(x)$, è detta *sistema o filtro degli intorni* di x .

Proposizione 0.2.2: Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme U di X è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Definizione 0.2.6 (sistema fondamentale di intorni): Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Un *sistema fondamentale di intorni* di $x \in X$ è una famiglia di intorni di x $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{N}(x)$ tale che per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ esiste $A \in \mathcal{B}(x)$ tale che $A \subseteq N$.

Definizione 0.2.7 (punto interno, esterno, di frontiera): Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. Sia poi $x \in X$. Allora:

- x è detto *interno* ad S se esiste $N \in \mathcal{N}(x)$ tale che $N \subseteq S$. Denotiamo con $Int(S)$ l'insieme dei punti interni ad S .
- x è detto *esterno* ad S se esiste $N \in \mathcal{N}(x)$ tale che $N \cap S = \emptyset$, o, equivalentemente $x \in Int(X \setminus S)$. Denotiamo con $Est(S)$ l'insieme dei punti esterni di S .
- x è detto *di frontiera* per S se per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ si ha $N \cap S \neq \emptyset$ e $N \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$, ovvero se x non è né interno né esterno a S . Denotiamo con $Fr(S)$ l'insieme dei punti di frontiera di S .

Osservazione 0.2.1: Dalla definizione si ha che $X = Int(S) \sqcup Est(S) \sqcup Fr(S)$.

Esempio 0.2.2: Consideriamo \mathbb{R} con la topologia euclidea. Allora, preso $[a, b) \subset \mathbb{R}$ si ha che:

- $Int([a, b)) = (a, b)$
- $Est([a, b)) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$
- $Fr([a, b)) = \{a, b\}$

Proposizione 0.2.3: *Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. Allora $\text{Int}(S)$ è l'unione di tutti gli aperti contenuti in S , cioè il più grande aperto contenuto in S .*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $\text{Int}(S)$ contiene l'unione di tutti gli aperti contenuti in S . Sia quindi $A \subseteq S$ aperto e sia $x \in A$. Poiché A è aperto $A \in \mathcal{N}(x)$ e $A \subseteq S$, dunque $x \in \text{Int}(S)$, da cui $A \subseteq \text{Int}(S)$.

Mostriamo ora che $\text{Int}(S)$ è aperto e dunque coincide con l'unione di tutti gli aperti contenuti in S visto che $\text{Int}(S) \subseteq S$. Fissiamo $x \in \text{Int}(S)$. Allora per definizione esiste $N \in \mathcal{N}(x)$ tale che $x \in N$ e $N \subseteq \text{Int}(S)$. Ora, poiché $N \in \mathcal{N}(x)$, esiste un aperto U tale che $x \in U$ e $U \subseteq N$. Quindi $x \in U \subseteq N \subseteq \text{Int}(S)$. Perciò per ogni $x \in \text{Int}(S)$ esiste un aperto U contenuto in $\text{Int}(S)$ tale che $x \in U$. Dunque $\text{Int}(S)$ è aperto in quanto unione di aperti. \square

Corollario 0.2.4: *Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. Allora:*

- S è aperto $\iff S = \text{Int}(S)$.
- S è aperto $\iff S \cap \text{Fr}(S) = \emptyset$.

Definizione 0.2.8 (insieme chiuso): *Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. Allora S si dice *chiuso* se $X \setminus S$ è aperto.*

Definizione 0.2.9 (chiusura): *Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. La *chiusura* di S , che denoteremo con \bar{S} , è il più piccolo chiuso che contiene S . Ovvero:*

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso,} \\ C \supseteq S}} C.$$

Osservazione 0.2.2: Osserviamo che, dalla definizione:

- $S \subseteq \bar{S}$;
- S chiuso $\iff S = \bar{S}$;
- $\bar{S} = X \setminus \text{Est}(S)$;
- $\bar{S} = S \cup \text{Fr}(S) = S \cup \text{Fr}(X \setminus S)$;
- $S \subseteq T \Rightarrow \bar{S} \subseteq \bar{T}$.

Definizione 0.2.10 (punto di accumulazione): *Sia X uno spazio topologico e sia S un suo sottoinsieme. Un punto $x \in X$ è detto *di accumulazione* per S se per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ esiste $s \in S$, $s \neq x$, $s \in N$, ovvero, per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ si ha che $N \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Denotiamo con $D(S)$ l'insieme dei punti di accumulazione di S e chiamiamo tale insieme *derivato* di S .*

Proposizione 0.2.5: *Sia X uno spazio topologico e sia S un suo sottoinsieme. Allora $\bar{S} = S \cup D(S)$.*

Dimostrazione. Mostriamo le due inclusioni.

- $D(S) \cup S \subseteq \bar{S}$: dalla definizione si ha che $x \in D(S)$ implica che per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ si ha $N \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Ricordiamo ora che, per definizione, $x \in \text{Est}(S)$ se e solo se esiste $N \in \mathcal{N}(x)$ tale che $N \cap S = \emptyset$. Perciò $D(S) \cap \text{Est}(S) = \emptyset$. Dunque, poiché

$\bar{S} = X \setminus Est(S)$, si ha che $D(S) \subseteq \bar{S}$ e quindi $D(S) \cup S \subseteq \bar{S}$.

- $\bar{S} \subseteq D(S) \cup S$: fissiamo $x \in \bar{S}$. Se $x \in S$ abbiamo concluso. Sia dunque $x \notin S$, allora $x \in Fr(S)$ poiché $\bar{S} = S \cup Fr(S)$. Dunque, per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ $N \cap S \neq \emptyset$. Ma $x \notin S$, dunque esiste $y \in N \cap S$, $y \neq x$ e dunque si conclude che $x \in D(S)$. □

Definizione 0.2.11 (insieme denso): Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. Diremo che S è *denso* in X se $\bar{S} = X$.

Proposizione 0.2.6: Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. S è denso se e solo se per ogni $U \subseteq X$ aperto si ha che $S \cap U \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Supponiamo S sia denso e fissiamo un aperto $U \subseteq X$. Se $S \cap U = \emptyset$ allora $U \subseteq X \setminus S$, dunque $X \setminus U$ è un chiuso che contiene S , perciò $\bar{S} \subseteq X \setminus U \neq X$.

Vediamo ora l'altra implicazione. Supponiamo che per ogni U aperto si abbia $S \cap U \neq \emptyset$. Fissiamo quindi $x \in X$. Se $x \in S$, allora chiaramente $x \in \bar{S}$. Supponiamo quindi che $x \notin S$ e mostriamo che $x \in \bar{S}$. Poiché $\bar{S} = S \cup D(S)$, basta mostrare che $x \in D(S)$. Fissiamo $N \in \mathcal{N}(x)$ e scegliamo un aperto $U \subseteq N$ con $x \in U$. Poiché per ipotesi $S \cap U \neq \emptyset$ e $x \notin S$, esiste y tale che $y \in S \cap U$, $y \neq x$. Abbiamo quindi dimostrato che per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$, $N \cap S$ contiene un punto diverso da x , da cui $x \in D(S)$. □

Esempio 0.2.3: L'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} . Infatti, per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si ha che $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Ciò deriva dal fatto che ogni U contiene un aperto del tipo (a, b) dove $a < b$ e dunque contiene anche infiniti punti di \mathbb{Q} .

Definizione 0.2.12 (funzione continua): Siano X e Y due spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è detta *continua nel punto* $x \in X$ se per ogni $N \in \mathcal{N}(f(x))$ esiste $M \in \mathcal{N}(x)$ tale che $f(M) \subseteq N$. In particolare f è *continua* se è continua in ogni $x \in X$.

Proposizione 0.2.7: Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a) $f : X \rightarrow Y$ è continua;
- (b) $\forall A \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(A)$ è aperto;
- (c) $\forall C \subseteq Y$ chiuso, $f^{-1}(C)$ è chiuso.

Esempio 0.2.4: Siano X e Y spazi topologici.

1. La mappa identità $Id_X : X \rightarrow X$ è continua;
2. Sia $y_0 \in Y$ fissato. La mappa costante $\varepsilon_{y_0} : X \rightarrow Y$, tale che $\varepsilon_{y_0}(x) = y_0 \forall x \in X$, è continua;
3. Sia X dotato della topologia discreta, allora ogni mappa $f : X \rightarrow Y$ è continua;
4. Sia Y dotato della topologia banale, allora ogni mappa $f : X \rightarrow Y$ è continua;
5. $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione lineare è continua.

Definizione 0.2.13 (funzione aperta, chiusa): Siano X e Y spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice *aperta* se per ogni aperto $A \subseteq X$ si ha che $f(A)$ è aperto. Analogamente $f : X \rightarrow Y$ si dice *chiusa* se per ogni chiuso $C \subseteq X$ si ha che $f(C)$ è chiuso.

Definizione 0.2.14 (omeomorfismo): Siano X e Y spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è un *omeomorfismo* se f è continua, biettiva e f^{-1} è continua.

Osservazione 0.2.3: Una funzione $f : X \rightarrow Y$ continua e biettiva è un *omeomorfismo* se e solo se f è aperta.

Infatti, per definizione una funzione f scelta in questo modo è omeomorfismo se e solo se f^{-1} è continua, cioè se per ogni aperto $A \subseteq X$ si ha che $(f^{-1})^{-1}(A)$ è aperto. Ma $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$, dunque f^{-1} è continua se e solo se per ogni $A \subseteq X$ aperto $f(A)$ è aperto, ovvero se e solo se f è aperta.

Analogamente si mostra che $f : X \rightarrow Y$ continua e biettiva è un *omeomorfismo* se e solo se f è chiusa.

Definizione 0.2.15 (topologia indotta): Sia (X, \mathcal{T}_X) uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. La *topologia indotta* da X su S è la topologia $\mathcal{T}_S = i^{-1}(\mathcal{T}_X)$, dove $i : S \rightarrow X$ è l'inclusione canonica. Più esplicitamente \mathcal{T}_S è la topologia i cui aperti sono gli insiemi $A \cap S$ tali che $A \subseteq X$ è aperto.

Esempio 0.2.5: Consideriamo \mathbb{R} con la topologia euclidea e $S = (a, b] \subseteq X$. La topologia indotta da \mathbb{R} è quella in cui gli aperti sono del tipo $(a, b] \cap (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $\forall c \in \mathbb{R}$ tale che $a < c < b$ si ha che $(c, b]$ è aperto di S , ma non è aperto di \mathbb{R} .

Definizione 0.2.16 (spazio topologico T_1): Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) è detto T_1 se tutti i suoi punti sono chiusi.

Proposizione 0.2.8: Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) è T_1 se e solo se $\forall x, y \in X, x \neq y$ esistono due aperti U e V tali che $x \in U, y \notin U, y \in V, x \notin V$.

Dimostrazione. Se X è T_1 , allora $U = X \setminus \{y\}$ e $V = X \setminus \{x\}$ sono aperti e soddisfano le condizioni richieste.

Vediamo ora l'altra implicazione. Supponiamo che valgano le condizioni della proposizione e mostriamo che $\{x\}$ è chiuso. Per farlo basta far vedere che $X \setminus \{x\}$ è aperto. Ora, preso $y \in X \setminus \{x\}$ qualsiasi, esiste V intorno aperto di y tale che $x \notin V$, dunque $V \subseteq X \setminus \{x\}$, perciò $X \setminus \{x\}$ è intorno di ogni suo punto, dunque è aperto. \square

Definizione 0.2.17 (spazio topologico di Hausdorff): Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) è detto T_2 o *di Hausdorff* se per ogni $x, y \in X, x \neq y$, esistono U e V aperti tali che $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Osservazione 0.2.4: Osserviamo che quindi uno spazio topologico di Hausdorff è anche T_1 . Lo si può vedere in maniera evidente utilizzando la **Proposizione 0.2.8** sulla caratterizzazione degli spazi T_1 .

Esempio 0.2.6: \mathbb{R} con la topologia di Zariski è T_1 ma non è T_2 . Infatti ogni punto è un chiuso perché complementare di un aperto, tuttavia l'intersezione di due qualunque aperti contiene infiniti punti, dunque non è mai vuota.

Definizione 0.2.18 (spazio topologico compatto): Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) è *compatto* se da ogni ricoprimento aperto di X è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Definizione 0.2.19 (insieme compatto): Sia (X, \mathcal{T}_X) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $K \subseteq X$ è detto *compatto* se è compatto nella topologia indotta da X , ovvero se (K, \mathcal{T}_K) è compatto.

Esempio 0.2.7: I compatti di \mathbb{R}^n sono i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n chiusi e limitati.

Proposizione 0.2.9: *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.*

Dimostrazione. Fisso $K \subseteq X$ chiuso, sia $\mathcal{F} = \{U_i : i \in I\}$ un ricoprimento di K con U_i aperti di X . Si ha quindi: $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Poiché K è chiuso $U = X \setminus K$ è aperto. Consideriamo dunque $\mathcal{F}' = U \cup \{U_i : i \in I\}$, \mathcal{F}' è un ricoprimento aperto di X , ma poiché X è compatto si avrà che $X \subseteq U \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$, perciò $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$, dunque K è compatto. \square

Proposizione 0.2.10: *Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.*

Dimostrazione. Sia K un sottoinsieme di X , con X spazio topologico T_2 . Mostriamo che allora $X \setminus K$ è aperto. Fissiamo un punto $x \in X \setminus K$ e mostriamo che esiste un aperto V con $x \in V$ e $V \cap K = \emptyset$. Per ogni $y \in K$ scegliamo due aperti U_y e V_y con $y \in U_y$, $x \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$. Ora $K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y$, dunque esistono y_1, \dots, y_n tali che $K \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$. Posto ora $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$ si ha $x \in V$, V è aperto e $V \cap K = V \cap (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}) = \emptyset$, dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che se $z \in U_{y_i}$ per qualche i , allora $z \notin V_{y_i}$, ma $V \subseteq V_{y_i}$, quindi $z \notin V$. \square

Proposizione 0.2.11: *Siano X, Y due spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ continua. Allora se X è compatto anche $f(X)$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} = \{U_i : i \in I\}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Allora gli insiemi $f^{-1}(U_i)$ sono aperti e ricoprono X . Ma X è compatto, dunque esistono i_1, \dots, i_n tali che $X \subseteq f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n})$, da cui: $f(X) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. \square

Definizione 0.2.20 (spazio topologico connesso): Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}_X) si dice *connesso* se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi di X sono X e \emptyset . Se X non è connesso si dice *sconnesso*.

Definizione 0.2.21 (insieme compatto): Sia (X, \mathcal{T}_X) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è detto *connesso* se lo è nella topologia indotta.

Osservazione 0.2.5: X spazio topologico è sconnesso se e solo se è l'unione di due aperti disgiunti non vuoti. Infatti se X è sconnesso esiste V aperto e chiuso, $V \neq X$ e $V \neq \emptyset$. Dunque $W = X \setminus V$ è aperto in quanto V è chiuso. Inoltre $W \neq X$ e $W \neq \emptyset$. Perciò $X = V \cup W$ è unione di aperti con $V \cap W = \emptyset$. Viceversa, sia $X = A \cup B$ con A e B aperti, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Allora $X \setminus B = A$ è chiuso perché B è aperto, dunque $A \neq \emptyset$ è sia aperto sia chiuso, quindi X è sconnesso.

Analogamente si può affermare che X è sconnesso se e solo se è l'unione di due chiusi disgiunti non vuoti.

Proposizione 0.2.12: *Siano X e Y due spazi topologici. Se $f: X \rightarrow Y$ è continua, suriettiva e X è connesso, allora Y è connesso.*

Dimostrazione. Sia per assurdo $A \subseteq Y$ aperto e chiuso, $A \neq Y$, $A \neq \emptyset$. Allora per la continuità di f si ha che $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto e chiuso e $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ perché $A \neq \emptyset$ e f è suriettiva. Ma $f^{-1}(A) \neq X$ perché $A \neq Y$ e f è suriettiva e dunque si giunge all'assurdo in quanto X era per ipotesi connesso. \square

Corollario 0.2.13: *Siano X e Y due spazi topologici. Sia $f: X \rightarrow Y$ continua, allora se $Z \subseteq X$ è connesso si ha che $f(Z) \subseteq Y$ è connesso.*

Proposizione 0.2.14: *Siano Y e Z due sottoinsiemi connessi di X . Se $Y \cap Z \neq \emptyset$ allora $Y \cup Z$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq Y \cup Z$ aperto e chiuso, se $A \neq \emptyset$ mostriamo che necessariamente si deve avere $A = Y \cup Z$. Se $A \neq \emptyset$ allora $A \cap Y \neq \emptyset$ oppure $A \cap Z \neq \emptyset$. Nel primo caso, poiché $A \cap Y$ è aperto e chiuso in Y e Y è connesso $A \cap Y = Y$. Dunque poiché $Y \cap Z \neq \emptyset$ si ha anche che $A \cap Z \neq \emptyset$, dunque $A \cap Z = Z$ dalla connessione di Z . Perciò $A = Y \cup Z$. Nel secondo caso si procede con un ragionamento analogo. \square

Definizione 0.2.22 (due punti connessi): *Sia X uno spazio topologico. Due punti $x, y \in X$ si dicono connessi se esiste un sottoinsieme connesso $C \subseteq X$ con $x \in C$ e $y \in C$.*

Proposizione 0.2.15: *Sia X spazio topologico. Se per ogni $x, y \in X$, x e y sono connessi, allora X è connesso.*

Dimostrazione. Fissiamo $F \subseteq X$, F aperto e chiuso, $F \neq \emptyset$ e mostriamo che $F = X$. Sia $x \in F$. Per ogni $y \in X$ esiste $C \subseteq X$ connesso tale che $x \in C$ e $y \in C$. Ora $F \cap C$ è un aperto e chiuso di C , quindi $F \cap C = C$ perché C è connesso e $F \cap C$ è non vuoto. Quindi $F \supseteq C$ e poiché $y \in C$ allora $y \in F$. Quindi per ogni $y \in X$ concludiamo che $y \in F$, ovvero $X = F$. \square

Proposizione 0.2.16: *L'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico X aventi almeno un punto in comune è connessa.*

Dimostrazione. Sia $Y = \cup_{i \in I} C_i$, C_i connessi per ogni $i \in I$ e $\cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Fissiamo $y_0 \in \cap_{i \in I} C_i$. Dati y_1 e $y_2 \in Y$ scelgo C_{i_1} e C_{i_2} tali che $y_1 \in C_{i_1}$ e $y_2 \in C_{i_2}$. Allora $C_{i_1} \cup C_{i_2}$ è connesso perché $y_0 \in C_{i_1} \cap C_{i_2}$. Perciò y_1 e y_2 sono connessi in Y e dunque Y è connesso. \square

Esempio 0.2.8: Vediamo alcuni esempi.

1. I connessi di \mathbb{R} sono gli intervalli, dunque \mathbb{R} è connesso.
2. La n -sfera è connessa per ogni n .
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è sconnesso. Consideriamo infatti $(-\infty, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, +\infty)$ aperti di \mathbb{R} . Si ha che $\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q})$, dunque \mathbb{Q} è unione di due aperti disgiunti, non vuoti.

Definizione 0.2.23 (cammino): Sia X uno spazio topologico. Un *arco* o *cammino* in X è una funzione continua $\gamma: I \rightarrow X$, dove $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Il punto $\gamma(0)$ viene generalmente chiamato *punto iniziale*, mentre $\gamma(1)$ viene generalmente chiamato *punto finale*.

Definizione 0.2.24 (spazio topologico connesso per archi): Uno spazio topologico X si dice *connesso per archi* se per ogni $x, y \in X$ esiste un cammino $\gamma: I \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è connesso per archi se lo è nella topologia indotta.

Osservazione 0.2.6: Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Allora X è connesso. Infatti sappiamo che per ogni $x, y \in X$ esiste $\gamma: I \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Ora I è connesso, quindi $\gamma(I)$ è connesso per continuità di γ e inoltre $x \in \gamma(I)$, $y \in \gamma(I)$. Ogni coppia di punti di X è quindi connessa e dunque X è connesso. Osserviamo inoltre che non è vera l'implicazione contraria, uno spazio topologico connesso non è necessariamente connesso per archi.

Esempio 0.2.9: Un controesempio importante di quanto appena osservato è il seno del topologo, che viene definito come segue. Consideriamo $A = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$ e $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ e definiamo $X = A \cup B$. Si può dimostrare che X è connesso ma non è connesso per archi.

Definizione 0.2.25 (insieme stellato): Un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *stellato* se esiste x_0 tale che per ogni $x \in Y$ il segmento:

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (1-t)x + tx_0 \end{aligned}$$

è completamente contenuto in Y . Per definizione ogni insieme stellato è connesso.

Definizione 0.2.26 (insieme convesso): Un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni $x, y \in Y$ il segmento:

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (1-t)x + ty \end{aligned}$$

è contenuto in Y . Per definizione ogni insieme convesso è stellato e quindi in particolare connesso.

Proposizione 0.2.17: Siano X e Y spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ continua. Allora preso $Z \subseteq X$ connesso per archi si ha che anche $f(Z) \subseteq Y$ è connesso per archi.

Dimostrazione. Siano $w_1, w_2 \in f(Z)$, $z_1, z_2 \in Z$ tali che $f(z_1) = w_1$ e $f(z_2) = w_2$. Per la connessione per archi di Z esiste quindi $\gamma: I \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = z_1$ e $\gamma(1) = z_2$. Allora $f \circ \gamma: I \rightarrow f(Z)$ è un cammino tale che $(f \circ \gamma)(0) = w_1$ e $(f \circ \gamma)(1) = w_2$, dunque $f(Z)$ è connesso per archi. \square

Definizione 0.2.27 (spazio topologico localmente connesso per archi): Uno spazio topologico X viene detto *localmente connesso per archi* se ogni $x \in X$ possiede un sistema fondamentale di intorni aperti connessi per archi.

Proposizione 0.2.18: *Sia X uno spazio topologico. Se X è connesso e localmente connesso allora è anche connesso per archi.*

Esempio 0.2.10: Vediamo alcuni esempi di insiemi connessi per archi.

1. \mathbb{R}^n è connesso per archi.
2. La n -sfera è connessa per archi per ogni n .
3. I gruppi topologici di matrici $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$ e $U_n(\mathbb{C})$ sono connessi per archi.

0.3 Sulle superficie reali compatte

Diamo innanzitutto alcune definizioni di carattere generale sulle varietà differenziabili in \mathbb{R}^n .

Definizione 0.3.1 (diffeomorfismo di classe C^k): Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto di \mathbb{R}^n e $T \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto di \mathbb{R}^m . Data $f: S \rightarrow T$, diremo che f è un *diffeomorfismo di classe C^k* (rispettivamente C^∞) se f è di classe C^k (rispettivamente C^∞), biettiva, con inversa $f^{-1}: T \rightarrow S$ di classe C^k (rispettivamente C^∞).

Definizione 0.3.2 (n -carta locale): Sia X uno spazio topologico. Una *n -carta locale* è una coppia (U, φ) dove $\varphi: U \rightarrow V$ è un omeomorfismo su $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto di \mathbb{R}^n e $U \subseteq X$ è un aperto di X .

Definizione 0.3.3 (n -carte locali C^k -compatibili): Consideriamo (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) due n -carte locali, con U_1 e U_2 aperti di X . Allora se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ abbiamo un omeomorfismo

$$\varphi_{21}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Le n -carte locali (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) si dicono *C^k -compatibili* (rispettivamente *C^∞ -compatibili*) se $\varphi_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è un diffeomorfismo di classe C^k (rispettivamente C^∞).

Definizione 0.3.4 (n -atlante): Un *n -atlante* differenziabile di classe C^k (rispettivamente C^∞) nello spazio topologico X è una famiglia di n -carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è un ricoprimento di X e le n -carte locali $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ sono a due a due C^k -compatibili (rispettivamente C^∞ -compatibili).

Definizione 0.3.5 (varietà differenziabile di classe C^k): Uno spazio topologico X , di Hausdorff, a base numerabile in cui sia assegnato un n -atlante differenziabile di classe C^k (rispettivamente C^∞), per qualche intero $n \geq 0$, si dice *varietà differenziabile di classe C^k* se $k \geq 1$ (rispettivamente C^∞ se $k = \infty$).

Soffermiamoci ora sulle varietà differenziabili di dimensione 2, che sono quelle che ci interesseranno per parlare poi di superficie compatte.

Definizione 0.3.6 (parametrizzazione regolare): Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$, una superficie differenziabile, ovvero una varietà differenziabile su cui sia stato assegnato un 2-atlante. Ciò è equivalente a chiedere che per ogni $x_0 \in S$ esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con $x_0 \in U$ e un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi : V \rightarrow U \cap S$ sia una *parametrizzazione regolare* di S . Ovvero:

- (i) φ è biettiva;
- (ii) φ è di classe C^∞ ;
- (iii) $\forall t \in V \operatorname{rg}(J\varphi(t)) = 2$;
- (iv) φ è un omeomorfismo tra V e $U \cap S$.

Dove si indica con $J\varphi$ la matrice Jacobiana della funzione φ .

Definizione 0.3.7 (superficie orientabile): Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie differenziabile, allora diciamo che S è *orientabile* se esiste una famiglia di parametrizzazioni regolari $\{\varphi_i : V_i \rightarrow U_i\}_{i \in J}$, dove $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ e $U_i \subseteq S$ tali che:

- (i) gli aperti $V_i = \varphi(U_i)$ ricoprono S ;
- (ii) $\forall i, j$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si ha che $\det(J\varphi_{ji}(\varphi_i^{-1}(p))) > 0$ per ogni $p \in U_i \cap U_j$, dove $\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$.

Concentriamoci ora sulle superficie reali compatte e definiamole in modo più preciso.

Definizione 0.3.8 (superficie topologica reale): Una *superficie topologica reale* è uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, con base numerabile, munito di un atlante $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in J}$ dove $U_i \subset X$ sono aperti e V_i sono sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^2 . Si deve quindi avere che $\bigcup_{i \in J} U_i = X$ e le funzioni φ_i sono omeomorfismi. Chiameremo poi le funzioni $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ funzioni di transizione. Chiediamo inoltre che $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sia almeno C^1 , in modo da definire l'orientabilità della superficie.

Definizione 0.3.9 (superficie topologica reale compatta): Una *superficie topologica reale* X si dice *compatta* se è compatta come spazio topologico.

Definizione 0.3.10 (superficie topologica reale orientabile): Una *superficie topologica reale* X si dice *orientabile* se ammette un atlante in cui le funzioni di transizione preservano l'orientamento, ossia il determinante della matrice Jacobiana di $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ è positivo.

Esempio 0.3.1: Vediamo alcuni esempi noti:

- La sfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, data dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, è una superficie topologica reale compatta e orientabile.
- Il toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ è una superficie topologica reale compatta e orientabile.
- L'otre di Klein \mathbb{K} è una superficie topologica reale compatta non orientabile.

Definiamo quindi un'importante operazione, la somma connessa di superficie reali compatte.

Definizione 0.3.11 (somma connessa): Siano S_1 e S_2 due superficie reali compatte. Definiamo $S_1 \# S_2$, ovvero la *somma connessa* di S_1 e S_2 , come la superficie ottenuta considerando $S'_1 = S_1 \setminus D_1$ dove D_1 è un disco aperto in S_1 e $S'_2 = S_2 \setminus D_2$ dove D_2 è un disco aperto in S_2 e incollando lungo i bordi dei due dischi recisi. Per farlo è necessario fissare un omeomorfismo sui bordi dei dischi considerati.

Teorema 0.3.1 (teorema di classificazione delle superficie reali compatte): *Si ha che:*

- (a) *Ogni superficie reale compatta orientabile è omeomorfa alla sfera, S^2 , oppure ad una somma connessa di tori $\mathbb{T}^{\#m} = \mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}$.*
- (b) *Ogni superficie reale compatta non orientabile è omeomorfa al piano proiettivo reale, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ o ad una somma connessa di piani proiettivi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})^{\#n} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

Osservazione 0.3.1: L'operazione $\#$ su superficie reali compatte:

1. ha un elemento neutro, la sfera, S^2 ;
2. è associativa: $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$;
3. è commutativa: $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$;
4. non ha tuttavia la proprietà di cancellabilità, non vi è infatti l'inverso.

Definizione 0.3.12 (rappresentazione poligonale di una superficie reale): Una *rappresentazione poligonale* di una superficie reale S è un poligono piano con una regola di identificazione dei lati tale che la superficie S sia omeomorfa allo spazio quoziente dato dal poligono sulla relazione di identificazione. Tali rappresentazioni non sono uniche e possono essere modificate attraverso tagli e incollamenti.

Definizione 0.3.13 (triangolo, triangolazione di una superficie reale compatta): Diamo le seguenti definizioni:

- Un *triangolo* T' di una superficie S è un sottospazio di S omeomorfo al triangolo euclideo standard T .
- Una *triangolazione* τ di una superficie reale compatta S è una collezione $\{(T_i, \varphi_i)\}_{i \in J}$ dove $\varphi_i: T \rightarrow T_i$ sono omeomorfismi, $\cup_{i \in J} T_i = S$ e inoltre, fissato un punto $P \in S$ qualsiasi abbiamo i seguenti casi possibili:
 - P appartiene ad un triangolo ma non ai suoi lati ed il triangolo aperto (ovvero il triangolo privato del bordo) è un intorno di P . In tal caso tale triangolo è l'unico che contiene P .
 - P appartiene al lato di un triangolo T_i , con i fissato, non ne è il vertice ed esiste un altro triangolo T_j , dove j è fissato, con $P \in T_j$. In tal caso si ha che T_i e T_j condividono un lato.
 - P è il vertice di un triangolo. Allora esistono finiti triangoli che contengono P , per tutti questi triangoli P è un vertice e l'unione dei dati triangoli è un intorno di P .

Teorema 0.3.2 (teorema di Rodò): *Ogni superficie reale compatta ammette una triangolazione.*

Definizione 0.3.14 (caratteristica di Eulero–Poincaré, genere): Sia S una superficie reale compatta e sia τ una triangolazione di S , allora definiamo:

- $\chi_S = \chi(S) = V - L + T \in \mathbb{Z}$, dove V , L e T vanno ad indicare rispettivamente il numero di vertici, il numero di lati e il numero di triangoli in τ e la chiamiamo *caratteristica di Eulero–Poincaré* di S .

$$g(S) = \begin{cases} \frac{2-\chi(S)}{2} & \text{se } S \text{ è orientabile,} \\ 2 - \chi(S) & \text{se } S \text{ non è orientabile.} \end{cases}$$

e lo chiamiamo *genere topologico* di S .

Esempio 0.3.2: Vediamo la caratteristica di Eulero–Poincaré e il genere di alcune superficie reali compatte note.

- La sfera S^2 ha caratteristica di Eulero–Poincaré 2 e genere 0.
- Il toro \mathbb{T} ha caratteristica di Eulero–Poincaré 0 e genere 1.
- Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha caratteristica di Eulero–Poincaré 1 e genere 1.
- L’otre di Klein \mathbb{K} ha caratteristica di Eulero–Poincaré 0 e genere 2.

Osservazione 0.3.2: Osserviamo che intuitivamente il genere topologico di una superficie descrive il numero di “buchi” nel caso al superficie sia orientabile, mentre se la superficie non è orientabile ne descrive il numero di “cross-cap”.

Lemma 0.3.3: *Siano S_1, S_2 due superficie reali compatte di caratteristica di Eulero–Poincaré χ_1 e χ_2 rispettivamente, e di genere g_1 e g_2 rispettivamente. Allora $S_1 \# S_2$ ha caratteristica $\chi = \chi_1 + \chi_2$ e genere g dove $g = g_1 + g_2$ se entrambe le superficie S_1 e S_2 sono orientabili o non orientabili, altrimenti, se S_1 è orientabile e S_2 non lo è si ha che $g = 2g_1 + g_2$.*

Dimostrazione. Consideriamo una triangolazione τ_1 di S_1 e una triangolazione τ_2 di S_2 . Sia ora t_1 un triangolo in τ_1 e sia t_2 un triangolo in τ_2 . Rimuoviamo l’interno di ciascun triangolo e incolliamone i bordi. In tal modo $S_1 \# S_2$ risulta con una triangolazione che chiameremo τ . Avremo che il numero di triangoli di τ sarà dato da $T = T_1 + T_2 - 2$, il numero dei lati sarà $L = L_1 + L_2 - 3$ e infine il numero dei vertici sarà $V = V_1 + V_2 - 3$. Dunque:

$$\chi = T - L + V = T_1 + T_2 - 2 - L_1 - L_2 + 3 + V_1 + V_2 - 3 = \chi_1 + \chi_2 - 2$$

Abbiamo dimostrato quindi che $\chi = \chi_1 + \chi_2$, mostriamo ora la parte del lemma relativa al genere g di $S_1 \# S_2$. Per definizione $g = \frac{2-\chi}{c}$ dove $c = 2$ se $S_1 \# S_2$ è orientabile, ovvero se S_1 e S_2 sono entrambe orientabili e $c = 1$ se $S_1 \# S_2$ non è orientabile, ovvero se S_1 e S_2 sono entrambe non orientabili. Dunque:

$$g = \frac{2 - \chi_1 - \chi_2 + 2}{c} = \frac{2 - \chi_1}{c} + \frac{2 - \chi_2}{c} = g_1 + g_2$$

□

0.4 Sulle successioni esatte

Definizione 0.4.1 (successione esatta): Una sequenza di omomorfismi

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \rightarrow \cdots$$

si dice *esatta* se $\text{Ker}(\alpha_n) = \text{Im}(\alpha_{n+1})$ per ogni n . Le inclusioni $\text{Im}(\alpha_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(\alpha_n)$ sono equivalenti al richiedere che $\alpha_n \alpha_{n+1} = 0$.

Osservazione 0.4.1: Osserviamo che:

- (i) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ è esatta se e solo se $\text{Ker}(\alpha) = 0$, ovvero se α è iniettiva;
- (ii) $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ è esatta se e solo se $\text{Im}(\alpha) = B$, ovvero se α è suriettiva;
- (iii) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ è esatta se e solo se α è un isomorfismo, per quanto visto sopra;
- (iv) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\alpha} C \rightarrow 0$ è esatta se e solo se α è iniettiva, β è suriettiva e $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$. Quindi β induce un isomorfismo $C \simeq B/\text{Im}(\alpha)$. Se pensiamo ad α come una mappa di inclusione di A come sottogruppo di B ciò può essere riscritto $C \simeq B/A$.

Una successione $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ come in (iv) è detta *successione esatta corta*.

Lemma 0.4.1 (Five-lemma): *Si consideri il seguente diagramma di gruppi abeliani e omomorfismi.*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 & \xrightarrow{i_4} & A_5 \\ f_1 \downarrow & \circlearrowleft & f_2 \downarrow & \circlearrowleft & f_3 \downarrow & \circlearrowleft & f_4 \downarrow & \circlearrowleft & f_5 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{j_1} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 & \xrightarrow{j_4} & B_5 \end{array}$$

Si assuma che ogni riga sia esatta e che ogni quadrato sia commutativo, che f_1 sia un epimorfismo, che f_2 e f_4 siano isomorfismi e f_5 sia un monomorfismo. Allora anche f_3 è un isomorfismo.

In riferimento a questo capitolo introduttivo si vedano E. Serres, *Geometria 2*, W. S. Massey, *An introduction to algebraic topology* e A. Hatcher, *Algebraic topology*.

Capitolo 1

Definizioni e proprietà di base della teoria dell'omologia

La teoria dell'omologia si basa su una procedura con cui viene assegnata a uno spazio topologico X una successione di gruppi abeliani $H_0(X), H_1(X), H_2(X), \dots$ e a ogni mappa continua $f: X \rightarrow Y$ una sequenza di omomorfismi $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. In particolare lo studio dei gruppi di omologia di uno spazio topologico X permette di osservare diverse proprietà topologiche legate alla geometria dello spazio in questione. In questo capitolo vedremo la definizione dei gruppi di omologia e alcuni primi semplici esempi in cui traspare come la struttura algebrica dei gruppi di omologia sia legata alla geometria dello spazio.

In generale considereremo X spazio topologico, sottintendendo la topologia associata.

1.1 Definizione dei gruppi di omologia singolare cubica

Definizione 1.1.1 (*n-cubo singolare*): Un *n-cubo singolare* di X è una mappa continua $T: I^n \rightarrow X$ con $n \geq 0$.

Osservazione 1.1.1: Per $n = 1$ tali mappe vengono dette cammini.

Definizione 1.1.2 (*n-cubo singolare degenere*): Un *n-cubo singolare* $T: I^n \rightarrow X$ di X è *degenere* se esiste $1 \leq i \leq n$ tale che $T(x_1, \dots, x_n)$ non dipende da x_i .

Osservazione 1.1.2:

- Uno 0-cubo singolare non è mai degenere.
- Un 1-cubo singolare $T: I \rightarrow X$ è degenere se e solo se T è una mappa costante.

Definizione 1.1.3 ($Q_n(X), D_n(X), C_n(X)$):

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $Q_n(X)$ come il gruppo abeliano libero generato dall'insieme di tutti gli *n-cubi singolari* in X . Dunque:

$$Q_n(X) = \left\{ \sum_i n_i T_i(x_1, \dots, x_n) : n_i \in \mathbb{Z}, T_i: I^n \rightarrow X \text{ n-cubo singolare di } X \right\}.$$

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $D_n(X) \leq Q_n(X)$ come il sottogruppo di $Q_n(X)$ generato dagli n -cubi singolari degeneri.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo infine $C_n(X)$ come il gruppo quoziente $Q_n(X)/D_n(X)$. Tale gruppo viene detto il *gruppo delle n -catene singolari* di X o, più semplicemente, il *gruppo delle n -catene* di X .

Osservazione 1.1.3:

- Dato X uno spazio topologico qualsiasi, si ha che $Q_n(X), D_n(X), C_n(X)$ sono gruppi abeliani liberi per ogni $n \geq 1$. In particolare $C_n(X)$ è il gruppo abeliano libero delle classi di equivalenza degli n -cubi non degeneri di X modulo $D_n(X)$.
- Se $X = \emptyset$ allora $Q_n(X) = D_n(X) = C_n(X) = \{0\}$ per ogni $n \geq 0$.
- Se $X = \{x\}$ vi è un unico n -cubo singolare di X per ogni $n > 0$. Tale n -cubo è degenero se $n \geq 1$. Dunque $C_0(X)$ è un gruppo ciclico infinito e $C_n(X) = \{0\}$, $n > 0$.
- Dato X uno spazio topologico qualsiasi, $D_0(X) = \{0\}$, dunque $C_0(X) = Q_0(X)$.

Definizione 1.1.4 (A_iT, B_iT): Sia $T: I^n \rightarrow X$ un n -cubo singolare di X . Per $i = 1, \dots, n$ definiamo gli $(n-1)$ -cubi singolari $A_iT, B_iT: I^{n-1} \rightarrow X$ attraverso le formule:

$$A_iT(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$B_iT(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

A_iT è detto i -faccia anteriore di T e B_iT è detto i -faccia posteriore di T .

Gli operatori appena definiti soddisfano le seguenti identità, dove $n > 1$ e $1 \leq i < j \leq n$:

$$A_iA_j(T) = A_{j-1}A_i(T),$$

$$B_iB_j(T) = B_{j-1}B_i(T),$$

$$A_iB_j(T) = B_{j-1}A_i(T),$$

$$B_iA_j(T) = A_{j-1}B_i(T).$$

Definizione 1.1.5 (operatore di bordo): Definiamo quindi, preso un qualsiasi n -cubo T , la funzione $\partial_n: Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$ nel seguente modo:

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_iT - B_iT], \quad n > 0.$$

Tale funzione è detta *operatore di bordo*. Essa rappresenta il bordo orientato dell' n -cubo T e soddisfa le due seguenti proprietà:

1. $\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0 \quad \forall n > 1$
2. $\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1} \quad \forall n > 0$

Come conseguenza della proprietà **2** ∂_n induce un omomorfismo $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$, che denoteremo ancora con lo stesso simbolo ∂_n . Osserviamo che tale sequenza di omomorfismi $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$ soddisfa ancora l'equazione **1**: $\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0$. Si ottiene quindi una sequenza di gruppi abeliani liberi mappati gli uni negli altri attraverso gli omomorfismi ∂_n in cui la composizione di mappe consecutive è nulla.

Definizione 1.1.6 (gruppo di omologia singolare n -dimensionale): Sia ∂_n l'omomorfismo sulle n -catene di X indotto dall'operatore di bordo definito in precedenza. Definiamo quindi:

$$Z_n(X) = \text{Ker}(\partial_n) = \{u \in C_n(X) : \partial(u) = 0\} \leq C_n(X), \quad n > 0$$

$$B_n(X) = \text{Im}(\partial_{n+1}) = \partial_{n+1}(C_{n+1}) \leq C_{n+1}(X), \quad n \geq 0.$$

Osserviamo che come conseguenza di **1** si ha che $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$. È quindi possibile definire:

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X).$$

$H_n(X)$ è detto *gruppo di omologia singolare n -dimensionale* di X , o più semplicemente *gruppo di omologia n -dimensionale* di X .

$Z_n(X)$ è invece detto *gruppo dei cicli singolari n -dimensionali* di X , mentre $B_n(X)$ è detto *gruppo dei bordi n -dimensionali* di X oppure *gruppo dei cicli con bordo n -dimensionali* di X .

Rimangono tuttavia da definire $H_0(X)$ e $H_n(X)$ per $n < 0$. Per definire $H_0(X)$ definiremo innanzitutto $Z_0(X)$ e poi porremo $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$. Si noti che vi sono due possibili definizioni per $Z_0(X)$, che danno quindi luogo a due gruppi $H_0(X)$ leggermente differenti. In alcuni casi risulta essere più vantaggiosa la prima, mentre in altri è meglio utilizzare la seconda. Le vedremo entrambe.

Definizione 1.1.7 ($H_0(X)$): Definiamo $Z_0(X) = C_0(X)$ e

$$H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = C_0(X)/B_0(X).$$

Un modo più diretto per arrivare a questa definizione è il seguente: definiamo $C_n(X) = \{0\}$ per $n < 0$ e $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ nell'unico modo possibile per $n \leq 0$, ovvero $\partial_n = 0$ per $n \leq 0$. Dunque si pone $Z_0(X) = \text{Ker}(\partial_n)$ per ogni intero n , coerentemente alla definizione data in precedenza per $n > 0$, $B_n(X) = \partial_{n-1}(C_{n+1}) \subseteq Z_n(X)$ e $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ per ogni n .

In tal caso è evidente che $H_n(X) = \{0\}$ per $n < 0$. Si osservi inoltre che $H_n(X)$ è definito anche nel caso X sia l'insieme vuoto.

Definizione 1.1.8 ($\tilde{H}_0(X)$, il gruppo di omologia 0-dimensionale ridotto): Per dare questa seconda definizione è necessario prima definire un omomorfismo $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Tale omomorfismo viene solitamente chiamato *omomorfismo di aumentazione*. Poiché $C_0(X) = Q_0(X)$ è un gruppo sull'insieme degli 0-cubi è sufficiente definire $\varepsilon(T)$ per ogni 0-cubo T in X . Si pone quindi $\varepsilon(T) = 1 \quad \forall T$ 0-cubo di X . Da ciò segue che per ogni

0-catena $u = \sum_i n_i T_i$ vale $\varepsilon(u) = \sum_i n_i$, ovvero $\varepsilon(u)$ è dato semplicemente dalla somma dei coefficienti n_i . Sicché si ottiene:

$$\varepsilon \circ \partial_1 = 0.$$

Definiamo ora $\tilde{Z}_0(X) = \text{Ker}(\varepsilon)$. Dalla formula vista si ha che $B_0(X) \subseteq \tilde{Z}_0(X)$, è possibile dunque definire

$$\tilde{H}_0(X) = \tilde{Z}_0(X)/B_0(X).$$

$\tilde{H}_0(X)$ viene detto *gruppo di omologia 0-dimensionale ridotto* di X . Nel caso di X non vuoto si preferirà considerare $\tilde{H}_0(X)$. Per $n > 0$ inoltre si porrà $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$.

Osservazione 1.1.4: Osserviamo che $\tilde{Z}_0(X)$ è un sottogruppo di $Z_0(X) = C_0(X)$, da cui si ha che $\tilde{H}_0(X)$ è un sottogruppo di $H_0(X)$. Indichiamo quindi l'omomorfismo inclusione con $\xi: \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X)$. Notiamo inoltre che poiché $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ si ha $\varepsilon(B_0(X)) = 0$, dunque l'omomorfismo aumentazione induce a sua volta un omomorfismo su $H_0(X)$

$$\varepsilon_*: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Proposizione 1.1.1: *La seguente sequenza di gruppi e omomorfismi*

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\xi} H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

è una successione esatta. Dunque, possiamo identificare $\tilde{H}_0(X)$ con $\text{Ker}(\varepsilon_)$ (assumiamo che X sia diverso dal vuoto). In particolare $H_0(X)$ è la somma diretta di $\tilde{H}_0(X)$ e un gruppo ciclico infinito. Questa decomposizione di $H_0(X)$ tuttavia non è naturale, il gruppo ciclico infinito infatti può essere scelto in più modi diversi.*

Vediamo quindi alcuni risultati che legano le proprietà di connessione dello spazio topologico X con la struttura del suo 0-esimo gruppo di omologia.

Proposizione 1.1.2: *Sia X uno spazio topologico non vuoto connesso per archi. Allora $\varepsilon_*: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ è un isomorfismo e $\tilde{H}_0(X) = \{0\}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\varepsilon_*: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ è in particolare un epimorfismo, infatti, preso $n \in \mathbb{Z}$ esiste sempre $u \in C_0(X)$ tale che $\varepsilon_*(u) = n$, basta scegliere $u = \sum_{i=1}^m n_i T_i$ tale che $\sum_{i=1}^m n_i = n$.

Proviamo ora che $B_0(X) = \text{Ker}(\varepsilon_*)$. L'inclusione $B_0(X) \subseteq \text{Ker}(\varepsilon_*)$ discende in modo evidente da $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, dobbiamo quindi mostrare che vale $\text{Ker}(\varepsilon_*) \subseteq B_0(X)$.

Sia $u = \sum_{i=1}^m n_i T_i \in C_0(X)$, $u \in \text{Ker}(\varepsilon_*)$, ovvero $\sum_{i=1}^m n_i = 0$. Consideriamo quindi per $i = 1, \dots, m$ i cammini $S_i: I \rightarrow X$ tali che $S_i(0) = x_0$ e $S_i(1) = T_i \quad \forall i$. Allora si ha che

$$\partial \left(\sum_{i=1}^m n_i S_i \right) = \sum_{i=1}^m n_i T_i - \sum_{i=1}^m n_i x_0 = \sum_{i=1}^m n_i T_i = u, \text{ poiché } \sum_{i=1}^m n_i = 0.$$

Dunque $u \in B_0(X)$. Si conclude quindi per il primo teorema di isomorfismo di gruppi. \square

Proposizione 1.1.3: *Sia X uno spazio topologico e sia $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ l'insieme delle componenti connesse per archi di X . Allora $H_n(X) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_n(X_\gamma)$ in modo naturale.*

Dimostrazione. Poiché un n -cubo singolare è un mappa continua, si ha che ogni n -cubo singolare giace completamente in una delle componenti connesse per archi di X . Dunque $Q_n(X)$ si spezza in modo naturale in una somma diretta:

$$Q_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} Q_n(X_\gamma).$$

Dunque, similmente:

$$D_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} D_n(X_\gamma).$$

Da cui, passando al gruppo quoziente si ha che:

$$C_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_n(X_\gamma).$$

Osserviamo quindi che se un n -cubo singolare giace completamente nella componente connessa per archi X_γ , allora anche le sue facce sono contenute in X_γ . Perciò l'operatore $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ mappa $C_n(X_\gamma)$ in $C_{n-1}(X_\gamma)$. Da ciò si hanno le seguenti decomposizioni:

$$Z_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} Z_n(X_\gamma),$$

$$B_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_n(X_\gamma).$$

Di conseguenza:

$$H_n(X) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_n(X_\gamma).$$

□

Corollario 1.1.4: *Per un qualsiasi spazio topologico X , $H_0(X)$ è la somma diretta di gruppi ciclici infiniti, con un addendo per ogni componente connessa di X . Ovvero, $H_0(X)$ è un gruppo abeliano libero il cui rango è uguale al numero di componenti connesse per archi di X .*

Osservazione 1.1.5: Osserviamo che questa decomposizione in somma diretta non vale per $\tilde{H}_0(X)$, il gruppo di omologia 0-dimensionale ridotto.

1.2 Omomorfismi indotti da mappe continue

La teoria dell'omologia associa quindi a ogni spazio topologico una sequenza di gruppi abeliani $H_n(X)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Analogamente, associa anche a ogni mappa continua tra spazi topologici $f: X \rightarrow Y$ una sequenza di omomorfismi $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. In particolare alcune proprietà topologiche della mappa f vengono riflesse in proprietà algebriche degli omomorfismi f_* . Definiamo per prima cosa la sequenza di omomorfismi f_* .

Definizione 1.2.1 ($f_{\#}$): Data $f: X \rightarrow Y$, definiamo innanzitutto l'omomorfismo $f_{\#}: Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y)$ tale che:

$$f_{\#}(T) = f \circ T \quad \forall T \text{ } n\text{-cubo singolare e } \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Tale mappa soddisfa le seguenti proprietà:

1. Se T è un n -cubo singolare degenere allora lo è anche $f_{\#}(T)$. Dunque $f_{\#}(D_n(X)) \subseteq D_n(Y)$, in particolare $f_{\#}$ induce un omomorfismo di $C_n(X)$ in $C_n(Y)$. Denoteremo l'omomorfismo indotto con lo stesso simbolo:

$$f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Il seguente diagramma commuta per $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{array}{ccc} Q_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & Q_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \partial_n \\ Q_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & Q_{n-1}(Y) \end{array}$$

Si ha quindi che $\partial_n \circ f_{\#} = f_{\#} \circ \partial_n$, o, analogamente, si può dire che $f_{\#}$ commuta con l'operatore di bordo. Da ciò segue inoltre che anche il seguente diagramma è commutativo per $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Dunque $f_{\#}(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y)$ e $f_{\#}(B_n(X)) \subseteq B_n(Y)$ per ogni $n \geq 0$. Di conseguenza $f_{\#}$ induce un omomorfismo fra i gruppi di omologia:

$$f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3. Anche il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} Q_n(X) & & \\ \downarrow f_{\#} & \searrow \varepsilon & \\ & \circlearrowleft & \mathbb{Z} \\ Q_{n-1}(X) & \nearrow \varepsilon & \end{array}$$

Dunque $f_{\#}(\tilde{Z}_n(X)) \subseteq \tilde{Z}_n(Y)$ e induce un omomorfismo tra i gruppi di omologia ridotta, $\tilde{H}_0(X)$ e $\tilde{H}_0(Y)$:

$$f_*: \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Inoltre anche i due seguenti diagrammi sono commutativi:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & H_0(X) & \\
 \tilde{H}_0(X) & \xrightarrow{\xi} & H_0(X) & \downarrow & \searrow \varepsilon_* \\
 f_* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f_* & f_* \downarrow & \circlearrowleft & \mathbb{Z} \\
 \tilde{H}_0(Y) & \xrightarrow{\xi} & H_0(Y) & \downarrow & \nearrow \varepsilon_* \\
 & & & H_0(Y) &
 \end{array}$$

4. Sia $f: X \rightarrow X$ la funzione identità. Allora tutti i seguenti sono omomorfismi identici:

$$\begin{aligned}
 f_{\#} &: Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y), \\
 f_{\#} &: C_n(X) \rightarrow C_n(Y), \\
 f_* &: H_n(X) \rightarrow H_n(Y), \\
 f_* &: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y).
 \end{aligned}$$

5. Siano X, Y e Z spazi topologici, siano $g: X \rightarrow Y, f: Y \rightarrow Z$ funzioni continue. Denoteremo con $fg: X \rightarrow Z$ la composizione delle due funzioni. Consideriamo gli omomorfismi

$$\begin{aligned}
 f_*g_* &: H_n(X) \rightarrow H_n(Z), \\
 (fg)_* &: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Z) \quad \forall n \geq 0.
 \end{aligned}$$

Affermiamo allora che $f_*g_* = (fg)_*$. Ciò si può vedere osservando che $f_{\#}g_{\#}$ e $(fg)_{\#}$ sono lo stesso omomorfismo da $Q_n(X)$ a $Q_n(Z)$ e quindi che $f_{\#}g_{\#}$ e $(fg)_{\#}$ sono lo stesso omomorfismo da $C_n(X)$ a $C_n(Z)$. Da ciò segue direttamente quanto affermato.

Osservazione 1.2.1: Osserviamo che se f è biettiva, non si ha necessariamente che anche f_* è biettiva e, analogamente se f è suriettiva, non necessariamente lo è anche f_* .

Tuttavia se f è iniettiva lo è anche f_* . Infatti, se per assurdo avessimo f iniettiva e f_* non iniettiva esisterebbero $u, v \in H_n(X)$, con $u \neq v$ tali che $f_*(u) = f_*(v)$.

Consideriamo quindi dei rappresentanti $u', v' \in C_n(X)$ delle classi u e v . Per quanto visto si dovrà avere che $f_{\#}(u') = f_{\#}(v')$, ovvero, $f_{\#}(u') - f_{\#}(v') = 0$, da cui $f_{\#}(u' - v') = 0$.

Ora ricordiamo la definizione di $f_{\#}$. Poiché $f_{\#}(D_n(X)) \subseteq D_n(Y)$ possiamo ricondurci alla definizione di $f_{\#}$ su $Q_n(X)$ ristretta a $C_n(X)$. Si ha quindi che $f_{\#}(u' - v') = f \circ (u' - v') = 0$, ma f è iniettiva quindi $u' - v' = 0$. Ciò è assurdo in quanto $u \neq v$ e dunque certamente $u' \neq v'$.

1.3 Proprietà di omotopia degli omomorfismi indotti

Definizione 1.3.1 (mappe omotope, omotopia): Due mappe continue $f, g: X \rightarrow Y$ si dicono *omotope* (lo denoteremo con $f \sim g$) se esiste una mappa continua

$$F: I \times X \rightarrow Y$$

tale che:

- $F(0, x) = f(x) \quad \forall x \in X$
- $F(1, x) = g(x) \quad \forall x \in X$.

La funzione F viene detta *omotopia* tra le mappe f e g .

La relazione di omotopia tra mappe continue è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza sono dette *classi di omotopia*.

Nota: Intuitivamente si ha che $f \sim g$ se e solo se è possibile “deformare in modo continuo” la mappa f nella mappa g .

Teorema 1.3.1: *Siano f e g due mappe continue, $f, g: X \rightarrow Y$. Se f e g sono omotope, allora gli omomorfismi indotti*

$$f_*, g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y),$$

$$f_*, g_*: \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)$$

sono uguali.

Dimostrazione. Sia $F: I \times X \rightarrow Y$ una mappa continua tale che $F(0, x) = f(x)$ e $F(1, x) = g(x)$. Useremo la mappa F per costruire una sequenza di omomorfismi

$$\varphi_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tale che valga la seguente relazione:

$$-f_{\#} + g_{\#} = \partial_{n+1} \circ \varphi_n + \varphi_{n-1} \circ \partial_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Per $n = 0$ interpreteremo l'equazione nel modo seguente: $C_{-1}(X) = C_{-1}(Y) = \{0\}$, ∂_0 è l'omomorfismo nullo, e quindi $\varphi: C_{-1} \rightarrow C_0(Y)$ è necessariamente l'omomorfismo nullo.)

Da questa equazione segue direttamente quanto affermato nell'enunciato. Infatti, sia $u \in H_n(X)$, consideriamo quindi un rappresentante $u' \in Z_n(X)$ della classe di omologia di u . Poiché $\partial_n(u') = 0$, dall'equazione segue che:

$$-f_{\#}(u') + g_{\#}(u') = \partial_{n+1}(\varphi_n(u')).$$

Quindi, $-f_{\#}(u') + g_{\#}(u') \in B_n(Y)$ e dunque $f_*(u) = g_*(u)$.

Rimane quindi solo da costruire la sequenza di omomorfismi $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Per farlo, definiamo innanzitutto la sequenza di omomorfismi

$$\Phi_n: Q_n(X) \rightarrow Q_{n+1}(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

come segue. Per ogni n -cubo singolare $T: I^n \rightarrow X$, definiamo un $(n+1)$ -cubo singolare $\Phi(T): I^{n+1} \rightarrow Y$ attraverso l'equazione

$$\Phi_n T(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(x_1, T(x_2, \dots, x_{n+1})).$$

Vorremmo ora calcolare $\partial_{n+1}\Phi_n(T)$. A questo scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned} A_1\Phi_n(T) &= f_{\#}(T) \\ B_1\Phi_n(T) &= g_{\#}(T) \\ A_i\Phi_n(T) &= \Phi_{n-1}A_{i-1}(T), \quad 2 \leq i \leq n+1 \\ B_i\Phi_n(T) &= \Phi_{n-1}B_{i-1}(T), \quad 2 \leq i \leq n+1. \end{aligned}$$

Calcoliamo quindi $\partial_{n+1}\Phi_n(T)$.

$$\begin{aligned} &\partial_{n+1}\Phi_n(T) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i T - B_i T] \\ &= -[f_{\#}(T) - g_{\#}(T)] + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i \Phi_{n-1}(A_{i-1}(T) - B_{i-1}(T)) \\ &= -f_{\#}(T) + g_{\#}(T) + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \Phi_{n-1}(A_j(T) - B_j(T)) \\ &= -f_{\#}(T) + g_{\#}(T) - \Phi_{n-1}\partial_n(T). \end{aligned}$$

Dunque, possiamo concludere che per ogni $u \in Q_n(X)$

$$-f_{\#}(u) + g_{\#}(u) = \partial_{n+1}\Phi_n(u) + \Phi_{n-1}\partial_n(u).$$

Ora, osserviamo che se T è un n -cubo singolare degenero, $n > 0$, allora $\Phi_n(T)$ è un $(n+1)$ -cubo singolare degenero. Dunque:

$$\Phi(D_n(X)) \subset D_{n+1}(Y)$$

e quindi Φ_n induce un omomorfismo

$$\varphi_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y).$$

Per quanto visto φ_n soddisfa le proprietà desiderate. □

Osservazione 1.3.1: Diremo che la sequenza di omomorfismi $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è un'omotopia fra morfismi di catene, in particolare è un'omotopia tra i morfismi $f_{\#}$ e $g_{\#}$.

Definizione 1.3.2 (spazi omotopicamente equivalenti, equivalenza omotopica): Due spazi X e Y sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due mappe continue $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ tali che gf è omotopa alla mappa identità $id_X: X \rightarrow X$, e fg è omotopa alla mappa identità $id_Y: Y \rightarrow Y$. In tal caso le mappe f e g sono dette *equivalenze omotopiche*.

Osservazione 1.3.2: Se, ad esempio, X e Y sono omeomorfi allora sono omotopicamente equivalenti. Infatti poiché sono omeomorfi, esistono due mappe $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ biettive e continue tali che $g = f^{-1}$. In tal caso le composizioni sono esattamente le mappe identità dei due spazi e dunque X e Y sono omotopicamente equivalenti. Dunque ogni omeomorfismo è, in particolare, un'equivalenza omotopica.

Teorema 1.3.2: *Se $f: X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica, allora $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ e $f_*: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$, per $n = 0, 1, 2, \dots$, sono isomorfismi.*

Dimostrazione. Poiché f è un'equivalenza omotopica, esiste $g: X \rightarrow Y$ tale che gf è omotopa a $id_X: X \rightarrow X$ e fg è omotopa a $id_Y: Y \rightarrow Y$. Dunque per il **Teorema 1.3.1** si ha che gli omomorfismi indotti $(gf)_*, id_{X*}: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ sono uguali. Inoltre, per la proprietà **5.** vale che $(gf)_* = g_*f_*$. Analogamente si ha che $(gf)_* = id_{Y*}$ e $(fg)_* = f_*g_*$. Dunque:

$$g_*f_* = id_{X*} \quad \text{e} \quad f_*g_* = id_{Y*}$$

Allora f_* è un omomorfismo di gruppi iniettivo e suriettivo, ovvero è un isomorfismo di gruppi. Si trova la stessa conclusione per $f_*: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$ ragionando in modo analogo. \square

Definizione 1.3.3 (omotopia relativa ad un sottospazio): Siano $f, g: X \rightarrow Y$ due mappe continue e sia $A \subseteq X$ un sottospazio (topologico) di uno spazio X . Si dice che f è *omotopa a g relativamente ad A* se f è omotopa a g ed esiste H , omotopia tra f e g , tale che $H(t, a) = f(a) = g(a) \forall t \in I, \forall a \in A$. Si scriverà $f \sim_{rel A} g$.

Osservazione 1.3.3: Osserviamo che tale condizione implica $f|_A = g|_A$.

Definizione 1.3.4 (retrazione): Sia A un sottospazio (topologico) di uno spazio X . Si dice che la mappa continua $r: X \rightarrow A$ è una *retrazione* se la composizione $r \circ i: A \rightarrow A$ è la mappa identità su A , dove $i: A \rightarrow X$ è l'inclusione canonica.

In tal caso A si dice *retrato di X tramite r* .

Definizione 1.3.5 (retrazione per deformazione): Sia A un sottospazio (topologico) di uno spazio X , una retrazione $r: X \rightarrow A$ si dice *retrazione per deformazione* se è tale che $id_X \sim_{rel A} (i \circ r)$, dove i è, come sopra, l'inclusione canonica. Ovvero, se esiste un'omotopia $F: I \times X \rightarrow X$ tale che:

$$\begin{aligned} F(0, x) &= x \quad \forall x \in X, \\ F(1, x) &= r(x) \quad \forall x \in X, \\ F(t, a) &= r(a) = a \quad \forall t \in I, \forall a \in A. \end{aligned}$$

In tal caso A si dice *retrato per deformazione di X* .

Definizione 1.3.6 (spazio contraibile ad un punto): Uno spazio X si dice *contraibile ad un punto x_0* se esiste una retrazione per deformazione di X in $\{x_0\}$. Ovvero, se esiste una mappa continua $F: I \times X \rightarrow X$ tale che $F(0, x) = x$ e $F(1, x) = x_0$, per ogni $x \in X$, dove x_0 è un punto in X fissato.

Osservazione 1.3.4: Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n stellato rispetto ad un punto x_0 è contraibile a quel punto. Dunque, in particolare, ogni sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n è contraibile. Infatti, preso x_0 (nel caso di un sottoinsieme convesso possiamo scegliere x_0 arbitrariamente), possiamo definire l'omotopia $F: I \times X \rightarrow X$ attraverso la formula

$$F(t, x) = (1 - t)x + tx_0 \quad \forall (x, t) \in X \times I.$$

Ora, F è continua, $F(0, x) = x$ e $F(1, x) = x_0$, come richiesto.

Osservazione 1.3.5: Se uno spazio X è contraibile ad un punto, allora è omotopicamente equivalente ad uno spazio contenente un solo punto, e i suoi gruppi di omologia sono i seguenti:

$$\begin{aligned} H_0(X) &\simeq \mathbb{Z}, & \tilde{H}_0(X) &= 0, \\ H_n(X) &= 0 & \text{per } n \neq 0. \end{aligned}$$

Proposizione 1.3.3: *Se A è un retratto per deformazione di X , allora la mappa di inclusione $i: A \rightarrow X$ è un'equivalenza omotopica di spazi topologici. Dunque, gli omomorfismi indotti*

$$\begin{aligned} i_*: H_n(A) &\rightarrow H_n(X), \\ i_*: \tilde{H}_n(A) &\rightarrow \tilde{H}_n(X), \end{aligned}$$

sono isomorfismi.

Dimostrazione. Poiché A è un retratto per deformazione di X , esiste $r: X \rightarrow A$ retrazione e dunque $r \circ i = id_A$. Ora per la proprietà **5** $r_* i_* = (ri)_* = id_{A*}$, dove l'ultima uguaglianza è data dalla proprietà **4**. Dunque i_* è iniettiva e r_* è suriettiva. Ora, poiché r è in particolare retrazione per deformazione si ha che $i \circ r \sim_{rel A} id_X$. Allora, per il **Teorema 1.3.1**, gli omomorfismi indotti $i_* r_* = (ir)_* = id_{X*}$ sono uguali. Quindi i_* è suriettiva e r_* è iniettiva, ossia i_* e r_* sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro. \square

Capitolo 2

Teoremi e risultati fondamentali per calcolo dei gruppi di omologia

In questo capitolo discuteremo alcuni risultati fondamentali per il calcolo dei gruppi di omologia di uno spazio topologico X qualsiasi. Vedremo quindi alcuni teoremi che mettono in relazione i gruppi di omologia dello spazio X con quelli di un suo sottospazio A . Definiremo in particolare i gruppi di omologia di una coppia di spazio-sottospazio (X, A) qualsiasi. Tali gruppi vengono detti gruppi di omologia relativi e verranno denotati con $H_n(X, A)$. In seguito vedremo la successione di Mayer–Vietoris, un analogo al teorema di Seifert–Van Kampen nella teoria dell’omologia.

2.1 Omologia di una coppia

2.1.1 Definizione dei gruppi di omologia relativi

Sia A un sottospazio dello spazio topologico X e sia $i : A \rightarrow X$ la mappa di inclusione. Poiché i è iniettiva, l’omomorfismo indotto $i_{\#} : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$ è iniettivo: possiamo quindi considerare $C_n(A)$ come un sottogruppo di $C_n(X)$. In particolare $C_n(A)$ è il sottogruppo generato da tutti gli n -cubi singolari non degeneri in A .

Definizione 2.1.1 (gruppo delle catene n -dimensionali della coppia (X, A)): Denoteremo il gruppo quoziente $C_n(X)/C_n(A)$ con $C_n(X, A)$. Tale gruppo è detto il *gruppo delle catene n -dimensionali della coppia (X, A)* .

Definizione 2.1.2 (gruppo di omologia n -dimensionale della coppia (X, A)): L’operatore di bordo $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ è tale che $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$, dunque induce un omomorfismo ∂'_n sui gruppi quozienti

$$\partial'_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A).$$

Possiamo quindi, analogamente a quanto fatto in precedenza, definire il *gruppo dei cicli n -dimensionali della coppia (X, A)* per $n > 0$:

$$Z_n(X, A) = \text{Ker}(\partial'_n) = \{u \in C_n(X, A) : \partial'(u) = 0\}$$

e, per $n \geq 0$, il *gruppo dei cicli con bordo n -dimensionali* di (X, A) :

$$B_n(X, A) = \text{Im}(\partial'_{n+1}) = \partial'_{n+1}(C_{n+1}(X, A)).$$

Poiché $\partial'_n \partial'_{n+1} = 0$, essendo indotto da ∂_n , segue che:

$$B_n(X, A) \subseteq Z_n(X, A).$$

Possiamo quindi definire il *gruppo di omologia n -dimensionale della coppia* (X, A)

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A)/B_n(X, A).$$

Per $n = 0$ definiamo $Z_0(X, A) = C_0(X, A)$ e $H_0(X, A) = C_0(X, A)/B_0(X, A)$.

Osservazione 2.1.1: Intuitivamente il gruppo di omologia della coppia (X, A) , $H_n(X, A)$, è definito in modo analogo al gruppo di omologia di X , $H_n(X)$, ad eccezione del fatto che in $H_n(X, A)$ anche gli n -cubi singolari di A vengono trascurati.

2.1.2 successione esatta di omologia di una coppia

È utile mostrare i gruppi $C_n(A)$, $C_n(X)$ e $C_n(X, A)$ insieme in un diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_{n+1}(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_{n+1}(X, A) \\
 \downarrow \partial_{n+1} \quad \circlearrowleft & & \downarrow \partial_{n+1} \quad \circlearrowleft & & \downarrow \partial'_{n+1} \\
 C_n(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_n(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_n(X, A) \\
 \downarrow \partial_n \quad \circlearrowleft & & \downarrow \partial_n \quad \circlearrowleft & & \downarrow \partial'_n \\
 C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_{n-1}(X, A) \\
 \vdots \downarrow \partial_{n-1} & & \vdots \downarrow \partial_{n-1} & & \vdots \downarrow \partial'_{n-1}
 \end{array} \quad (*)$$

dove le linee verticali denotano gli operatori di bordo, $i_{\#}$ è il monomorfismo indotto dalla mappa di inclusione e $j_{\#}$ denota l'epimorfismo naturale di $C_n(X)$ nel gruppo quoziente $C_n(X, A)$. Ogni rettangolo del diagramma è commutativo. In modo da evitare di considerare il caso $n = 0$ come eccezionale, definiremo per ogni intero $n < 0$:

$$C_n(A) = C_n(X) = C_n(X, A) = \{0\}.$$

Si avrà così che il diagramma si estende infinitamente sia in alto che in basso.

Come visto in precedenza per gli omomorfismi indotti da mappe continue, l'omomorfismo $i_{\#}$ induce a sua volta un omomorfismo i_* da $H_n(A)$ in $H_n(X)$ per ogni n . Analogamente, l'omomorfismo $j_{\#}$ induce l'omomorfismo $j_* : H_n(X) \rightarrow H_n(A)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$

Definizione 2.1.3 (operatore di bordo della coppia (X, A)): Possiamo quindi definire

$$\partial_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

per ogni intero n come segue. Sia $u \in H_n(X, A)$, vorremmo definire $\partial_*(u) \in H_{n-1}(A)$. Prendiamo quindi un rappresentante della classe di omologia di u , $u' \in C_n(X, A)$. Poiché $j_\#$ è suriettivo possiamo scegliere $u'' \in C_n(X)$ tale che $j_\#(u'') = u'$. Consideriamo la catena $\partial_n(u'') \in C_{n-1}(X)$. Per la commutatività del diagramma si ha che $j_\#(\partial_n(u'')) = 0$, infatti $j_\#(\partial_n(u'')) = \partial'_n(j_\#(u'')) = \partial'_n(u') = 0$ poiché $u' \in Z_n(X, A) = \text{Ker}(\partial'_n)$. Dunque $j_\#(\partial_n(u'')) = 0$, ovvero $\partial_n(u'') \in \text{Ker}(j_\#)$.

Osserviamo che per definizione degli omomorfismi $i_\#$ e $j_\#$ si ha $\text{Im}(i_\#) = \text{Ker}(j_\#) = C_{n-1}(A)$, dunque esiste $w \in C_{n-1}(A)$ tale che $\partial_n(u'') = i_\#(w)$, ovvero $\partial_n(u'')$ appartiene al sottogruppo $C_{n-1}(A)$ di $C_{n-1}(X)$.

Inoltre $\partial_{n-1}(w) = 0$, infatti $\partial_{n-1}(w) = i_\#(\partial_{n-1}(w)) = \partial_{n-1}(i_\#(w)) = \partial_{n-1}(\partial_n(u'')) = 0$.

Definiamo quindi $\partial_*(u)$ come la classe di omologia del ciclo w , che è ben definita in $H_{n-1}(A)$. Dimostriamolo:

- L'elemento w è univocamente determinato da $\partial_n(u'')$, in quanto $i_\#$ è iniettivo.
- Consideriamo un altro elemento v al posto di u'' tale che $j_\#(v) = u'$. Allora $j_\#(v) = j_\#(u'') = u'$, dunque $v - u'' \in \text{Ker}(j_\#) = \text{Im}(i_\#)$. Pertanto esiste $x \in C_n(A)$ tale che $v - u'' = i_\#(x)$, ovvero $v = u'' + i_\#(x)$. Osserviamo ora che tuttavia aver sostituito u'' con $u'' + i_\#(x)$ significa semplicemente aver scambiato w con $w + \partial_n(x)$, che ha la stessa classe di omologia di w . Infatti:

$$i_\#(w + \partial_n(x)) = i_\#(w) + i_\#(\partial_n(x)) = \partial_n(u'') + \partial_n(i_\#(x)) = \partial_n(u'' + i_\#(x)).$$

- Un altro rappresentante della classe di omologia u è della forma $u' + \partial_{n+1}(z)$. Ora, poiché $z = j_\#(z')$ per un qualche $z' \in C_{n+1}(X)$, abbiamo che

$$u' + \partial_{n+1}(z) = u' + \partial_{n+1}(j_\#(z')) = u' + j_\#(\partial_{n+1}(z')) = j_\#(u'' + \partial_{n+1}(z')).$$

Dunque u'' viene sostituito con $u'' + \partial_{n+1}(z')$. Ciò lascia $\partial_n(u'')$ inalterato e di conseguenza anche w .

Dimostriamo infine che la mappa $\partial_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ è un omomorfismo. Siano $\partial_*(u_1) = [w_1]$ e $\partial_*(u_2) = [w_2]$, consideriamo gli elementi u''_1 e u''_2 presi come nella definizione sopra. Allora

$$j_\#(u''_1 + u''_2) = j_\#(u''_1) + j_\#(u''_2) = u'_1 + u'_2 \quad e$$

$$i_\#(w_1 + w_2) = i_\#(w_1) + i_\#(w_2) = \partial_n(u''_1) + \partial_n(u''_2) = \partial_n(u''_1 + u''_2),$$

dunque $\partial_*(u_1 + u_2) = [w_1] + [w_2]$.

L'omomorfismo ∂_* è detto *operatore di bordo della coppia* (X, A) .

Definizione 2.1.4 (successione di omologia della coppia (X, A)): È naturale considerare allora la successione di gruppi e omomorfismi:

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

Tale successione è detta *successione di omologia della coppia* (X, A) . Nuovamente, per evitare di considerare il caso $n = 0$ come un'eccezione, adotteremo la convenzione che per $n < 0$, $H_n(A) = H_n(X) = H_n(X, A) = \{0\}$. Dunque la successione di omologia di una coppia si estende all'infinito in entrambe le direzioni.

Teorema 2.1.1: *La successione di omologia di una qualsiasi coppia (X, A) è esatta.*

Dimostrazione. Per provare il teorema è sufficiente provare le seguenti sei inclusioni:

$$\begin{array}{ll} - \text{Im}(i_*) \subseteq \text{Ker}(j_*), & - \text{Im}(i_*) \supseteq \text{Ker}(j_*), \\ - \text{Im}(j_*) \subseteq \text{Ker}(\partial_*), & - \text{Im}(j_*) \supseteq \text{Ker}(\partial_*), \\ - \text{Im}(\partial_*) \subseteq \text{Ker}(i_*), & - \text{Im}(\partial_*) \supseteq \text{Ker}(i_*). \end{array}$$

- $\text{Im}(i_*) \subseteq \text{Ker}(j_*)$: segue direttamente dal fatto che $j_{\#}i_{\#} = 0$ e dunque $j_*i_* = 0$.

- $\text{Im}(j_*) \subseteq \text{Ker}(\partial_*)$: in quanto $\partial_*(j_*(u)) = 0 \quad \forall u \in H_n(X)$ per definizione di ∂_* .

- $\text{Im}(\partial_*) \subseteq \text{Ker}(i_*)$: sia $u \in H_n(X, A)$. Si ha che $\partial_*(u)$ è definita come la classe di omologia di w tale che $i_{\#}(w) = \partial_n(u'')$, dove $j_*(u'') = u$. Dunque è la classe di omologia del bordo dell'antimmagine tramite $j_{\#}$ di u . Di conseguenza l'inclusione in X manda $\partial_*(u)$ in un bordo, ovvero i_* mappa $\partial_*(u)$ nella classe di omologia della catena nulla in X . Da ciò $\text{Im}(\partial_*) \subseteq \text{Ker}(i_*)$.

- $\text{Im}(i_*) \supseteq \text{Ker}(j_*)$: prendiamo una classe di omologia u in $H_n(X)$ tale che $u \in \text{Ker}(j_*)$ e consideriamo un suo rappresentante in $u' \in C_n(X)$.

Allora per la commutatività del diagramma esiste $u'' \in C_{n+1}(X, A)$ tale che $j_{\#}(u') = \partial'_{n+1}(u'')$. Ora, poiché $j_{\#}$ è suriettiva, $u'' = j_{\#}(v)$ per qualche $v \in C_{n+1}(X)$. Allora: $j_{\#}(u' - \partial_{n+1}(v)) = j_{\#}(u') - j_{\#}(\partial_{n+1}(v)) = j_{\#}(u') - \partial'_{n+1}(j_{\#}(v)) = j_{\#}(u') - \partial'_{n+1}(u'') = 0$, in quanto $\partial'_{n+1}(u'') = j_{\#}(u')$.

Ora $\text{Ker}(j_{\#}) = \text{Im}(i_{\#})$, dunque esiste $w \in C_n(A)$ tale che $u' - \partial_{n+1}(v) = i_{\#}(w)$. Tale w è un ciclo poiché $i_{\#}$ iniettiva e $i_{\#}(\partial_n(w)) = \partial_n(i_{\#}(w)) = \partial_n(u' - \partial_{n+1}(v)) = \partial_n(u') = 0$. Possiamo quindi concludere che $i_*([w]) = [u' - \partial_{n+1}(v)] = [u'] = u$, da cui l'asserto.

- $\text{Im}(j_*) \supseteq \text{Ker}(\partial_*)$: utilizziamo la notazione della definizione di ∂_* . Consideriamo quindi una classe di omologia u in $H_n(X, A)$ tale che $u \in \text{Ker}(\partial_*)$, essa sarà rappresentata da un ciclo $u' \in C_n(X, A)$. Scegliamo dunque $u'' \in C_n(X)$ tale che $j_{\#}(u'') = u'$. Ora, definiamo $z = \partial_n(u'')$, per quanto visto nella definizione di ∂_* si ha che $z \in C_{n-1}(A)$. In particolare $\partial_*(u)$ sarà la classe di omologia di z in $H_n(A)$ e $\partial_*(u) = 0$, in quanto $u \in \text{Ker}(\partial_*)$.

Consideriamo dunque $z' \in C_n(A)$ tale che $\partial_n(z') = z$. Osserviamo che $u'' - i_{\#}(z')$ è un ciclo, in quanto $\partial_n(u'' - i_{\#}(z')) = \partial_n(u'') - \partial_n(i_{\#}(z')) = z - \partial_n(z') = 0$.

Calcoliamo quindi $j_{\#}(u'' - i_{\#}(z'))$:

$$j_{\#}(u'' - i_{\#}(z')) = j_{\#}(u'') - j_{\#}(i_{\#}(z')) = j_{\#}(u'') = u'.$$

Ora u' è un rappresentante della classe $u \in H_n(X, A)$, dunque $u \in \text{Im}(j_*)$ e da ciò si conclude.

- $Im(\partial_*) \supseteq Ker(i_*)$: sia $x \in C_{n-1}(A)$ tale che $i_{\#}(x) = \partial_n(x')$, $x' \in C_n(X)$. In tal caso si ha infatti che x è un rappresentante della classe di omologia $[x]$ tale che $i_*([x]) = 0$, ovvero $[x] \in Ker(i_*)$. Ora, $j_{\#}(x')$ è un ciclo in quanto $\partial_n(j_{\#}(x')) = j_{\#}(\partial_n(x')) = j_{\#}(i_{\#}(x)) = 0$ e quindi $\partial_*([j_{\#}(x')]) = [x]$, che mostra quanto desiderato. \square

Proposizione 2.1.2: *Sia (X, A) una coppia con $A \neq \emptyset$. Allora l'operatore di bordo $\partial_* : H_1(X, A) \rightarrow H_0(A)$ mappa $H_1(X, A)$ nel sottogruppo $\tilde{H}_0(A)$ di $H_0(A)$ e la seguente successione è esatta:*

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \xrightarrow{\partial_*} 0.$$

Osservazione 2.1.2: Questa proposizione può essere interpretata nel modo seguente: se $A \neq \emptyset$ possiamo sostituire $H_0(A)$ e $H_0(X)$ con $\tilde{H}_0(A)$ e $\tilde{H}_0(X)$ nella successione di omologia della coppia e la successione che ne risulta è ancora una successione esatta. Ovvero possiamo sostituire i gruppi di omologia con quelli di omologia ridotta.

Osservazione 2.1.3: Una generalizzazione della successione esatta di omologia della coppia (X, A) è la successione esatta di omologia della tripla (X, A, B) dove $B \subseteq A \subseteq X$. Ovvero:

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

È infatti la successione esatta dei gruppi di omologia associata alla seguente successione di gruppi di n -catene:

$$0 \rightarrow C_n(A, B) \rightarrow C_n(X, B) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0.$$

Proposizione 2.1.3: *Consideriamo la coppia $(X, \{x_0\})$, con $x_0 \in X$. Allora per ogni n si ha che:*

$$H_n(X, \{x_0\}) \simeq \tilde{H}_n(X).$$

Dimostrazione. Per dimostrare l'asserto basta applicare la successione esatta dei gruppi di omologia ridotti di una coppia vista nella **Proposizione 2.1.2** alla coppia $(X, \{x_0\})$, infatti $\tilde{H}_n(\{x_0\}) = \{0\}$ per ogni n . \square

2.1.3 Proprietà dei gruppi di omologia relativi

Per poter determinare la struttura dei gruppi di omologia relativi è necessario prima conoscere le principali proprietà di questi gruppi. Vedremo innanzitutto dei risultati analoghi a quelli visti per gli omomorfismi indotti da mappe continue nei gruppi di omologia. Per estendere tali risultati ai gruppi di omologia relativi avremo bisogno tuttavia di considerare un nuovo tipo di funzioni, un po' più particolare.

Definizione 2.1.5 (mappa di coppia): Siano $(X, A), (Y, B)$ coppie formate da uno spazio topologico e un suo sottospazio. Diremo che una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ è una *mappa della coppia (X, A) nella coppia (Y, B)* se $f(A) \subseteq f(B)$.

Indicheremo tali mappe con $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Osservazione 2.1.4: Osserviamo che ogni mappa di coppia $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce un omomorfismo $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ dei corrispondenti gruppi di omologia relativi. Infatti, presa una mappa continua f si ha che f induce un omomorfismo $f_\# : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ per ogni n . Ora, se f è una mappa della coppia (X, A) nella coppia (Y, B) si ha che $f(A) \subseteq B$. Da ciò segue quindi che $f_\#$ mappa il sottogruppo $C_n(A)$ nel sottogruppo $C_n(B)$ e dunque vi è un omomorfismo indotto tra i gruppi quozienti $C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, A)$ che denoteremo di nuovo con $f_\#$. Questo omomorfismo commuta con l'operatore di bordo per ogni n , ovvero il seguente diagramma è commutativo per ogni n :

$$\begin{array}{ccc} C_n(X, A) & \xrightarrow{f_\#} & C_n(Y, B) \\ \partial_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X, A) & \xrightarrow{f_\#} & C_{n-1}(Y, B) \end{array}$$

Segue quindi che, analogamente a quanto visto in precedenza, $f_\#$ induce un omomorfismo $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ dei corrispondenti gruppi di omologia per ogni n .

Osservazione 2.1.5: È possibile verificare che le proprietà descritte nel capitolo precedente per mappe continue riadattate ai gruppi di omologia relativi valgono anche per le mappe di coppia.

Osservazione 2.1.6: L'omomorfismo $j_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X, A)$ facente parte della successione di omologia della coppia (X, A) visto nella sezione precedente è di fatto un omomorfismo di questo tipo. È facile infatti verificare che l'omomorfismo $j_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X, A)$ è l'omomorfismo indotto dalla mappa di coppia $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$.

Definizione 2.1.6 (mappe di coppia omotope): Due mappe di coppia $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sono *omotope* come *mappe di coppia* se esiste una mappa continua

$$F : (I \times X, I \times A) \rightarrow (Y, B)$$

tale che:

- $F(0, x) = f(x) \quad \forall x \in X$
- $F(1, x) = g(x) \quad \forall x \in X$
- $F(I \times A) \subseteq B$.

Teorema 2.1.4: Siano $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ due mappe di coppia. Se f e g sono omotope come mappe di coppia, allora gli omomorfismi indotti $f_*, g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ sono uguali.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla dimostrazione del **Teorema 1.3.1**. Le ipotesi più forti sull'omotopia F assicurano che la successione di omomorfismi φ_n soddisfi anche la seguente condizione:

$$\varphi_n(C_n(A)) \subseteq C_{n+1}(B).$$

Dunque φ_n induce un omomorfismo dei gruppi quozienti.

$$\varphi_n : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tale successione di omomorfismi permette quindi di dimostrare l'uguaglianza tra f_* e g_* utilizzando la stessa tecnica vista nella dimostrazione del **Teorema 1.3.1**. \square

Definizione 2.1.7 (coppie omotopicamente equivalenti, equivalenza omotopica di coppie): Due coppie (X, A) e (Y, B) sono *coppie omotopicamente equivalenti* se esistono due mappe di coppia $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ tali che gf è omotopa come mappa di coppia alla mappa identità $id_{(X,A)} : (X, A) \rightarrow (X, A)$, e fg è omotopa come mappa di coppia alla mappa identità $id_{(Y,B)} : (Y, B) \rightarrow (Y, B)$. In tal caso le mappe f e g sono dette *equivalenze omotopiche di coppie*.

Si può estendere anche il **Teorema 1.3.2** a coppie omotopicamente equivalenti giungendo al seguente risultato:

Teorema 2.1.5: *Se $f : X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica di coppie, allora gli omomorfismi indotti $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ e $f_* : \tilde{H}_0(X, A) \rightarrow \tilde{H}_0(Y, B)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$, sono isomorfismi.*

Si possono analogamente generalizzare anche le definizioni di retracts e retracts per deformazione di uno spazio topologico X a retracts e retracts per deformazione di una coppia (X, A) ed è possibile dimostrare che anche per questi valgono delle proprietà analoghe a quelle enunciate nel capitolo precedente.

Studiamo ora come si comporta l'omomorfismo indotto f_* da una mappa di coppia $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sulle successioni di omologia delle coppie (X, A) e (Y, B) , che sappiamo essere delle successioni esatte.

Proposizione 2.1.6: *Sia $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ una mappa di coppia. Allora ogni quadrato del seguente diagramma commuta.*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & f_* \downarrow & \circlearrowleft & f_* \downarrow & \circlearrowleft & f_* \downarrow & \circlearrowleft & f_* \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(Y, B) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Per i primi due quadrati, la commutatività segue direttamente dall'analogo per mappe di coppia della proprietà **3** vista nel capitolo precedente. Ovvero $(gh)_* = g_*h_*$ per ogni g, h mappe di coppia. La commutatività del terzo quadrato invece deriva dalle definizioni degli oggetti coinvolti ed esprime una proprietà specifica dell'omologia di una coppia.

2.2 Il teorema di escissione

Vedremo ora la più importante e sottile delle proprietà dei gruppi di omologia relativi, detta la *proprietà di escissione*. Ciò ci aiuterà a comprendere meglio i gruppi di omologia relativi e, in particolare, da che cosa dipendono.

Teorema 2.2.1 (Teorema di escissione): *Sia (X, A) una coppia, e sia $W \subseteq A$ tale che $\bar{W} \subseteq \text{Int}(A)$. Allora la mappa di inclusione $i : (X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo di gruppi di omologia relativi:*

$$H_n(X \setminus W, A \setminus W) \simeq H_n(X, A), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

L'enunciato del teorema può essere parafrasato nel modo seguente: sotto opportune ipotesi possiamo recidere l'insieme W senza influenzare la struttura dei gruppi di omologia relativi. La dimostrazione, che vedremo dopo aver enunciato alcuni risultati preliminari, si basa sul fatto che nella definizione dei gruppi di omologia relativi possiamo restringerci a scegliere n -cubi singolari arbitrariamente piccoli. Ad esempio, se X è uno spazio metrico ed ε è un numero positivo piccolo a piacere, si può vedere che è possibile definire $H_n(X, A)$ facendo uso di solo n -cubi singolari con diametro minore di ε . Se invece X non è uno spazio metrico possiamo considerare un ricoprimento aperto di X e scegliere solo gli n -cubi singolari contenuti all'interno di un singolo insieme del dato ricoprimento.

Definizione 2.2.1 (ricoprimento aperto generalizzato, n -cubo singolare di ordine \mathcal{U}): Sia $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una famiglia di sottoinsiemi dello spazio topologico X tale che $\text{Int}(\mathcal{U}) = \{\text{Int}(U_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ sia un ricoprimento aperto di X . Una tale famiglia di insiemi è detta *ricoprimento aperto generalizzato* di X .

Un n -cubo singolare $T : I^n \rightarrow X$ è detto *piccolo di ordine \mathcal{U}* se esiste un indice $\lambda \in \Lambda$ tale che $T(I^n) \subseteq U_\lambda$.

Ad esempio, se X è uno spazio metrico e ε è un numero positivo arbitrariamente piccolo, possiamo scegliere \mathcal{U} come il ricoprimento di X dato da tutte le sfere di raggio ε .

Possiamo quindi ora riprendere tutte le definizioni date in precedenza e modificarle in modo da considerare solo cubi singolari piccoli di ordine \mathcal{U} . Ciò è possibile poiché se $T : I^n \rightarrow X$ è un n -cubo singolare di ordine \mathcal{U} , allora $\partial_n(T)$ è una combinazione lineare di $(n-1)$ -cubi singolari tutti anch'essi piccoli di ordine \mathcal{U} .

Utilizzeremo quindi la seguente notazione:

- $Q_n(X, \mathcal{U})$ è il sottogruppo di $Q_n(X)$ generato dagli n -cubi singolari di ordine \mathcal{U} ;
- $D_n(X, \mathcal{U}) = Q_n(X, \mathcal{U}) \cap D_n(X)$;
- $C_n(X, \mathcal{U}) = Q_n(X, \mathcal{U})/D_n(X, \mathcal{U})$.

Similmente, per ogni sottospazio topologico A di X :

- $Q_n(A, \mathcal{U}) = Q_n(A) \cap Q_n(X, \mathcal{U})$;
- $D_n(A, \mathcal{U}) = D_n(A) \cap D_n(X, \mathcal{U})$;
- $C_n(A, \mathcal{U}) = Q_n(A, \mathcal{U})/D_n(A, \mathcal{U})$.

E, dunque, per i gruppi di catene relativi avremo:

- $C_n(X, A, \mathcal{U}) = C_n(X, \mathcal{U})/C_n(A, \mathcal{U})$.

Osserviamo che ∂_n mappa $Q_n(X, \mathcal{U})$ in $Q_{n-1}(X, \mathcal{U})$ e quindi induce i seguenti omomorfismi:

- $C_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow C_{n-1}(X, \mathcal{U})$;
- $C_n(A, \mathcal{U}) \rightarrow C_{n-1}(A, \mathcal{U})$;

$$- C_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow C_{n-1}(X, A, \mathcal{U})$$

che verranno nuovamente tutti denotati con ∂_n .

Possiamo ora definire, esattamente come fatto in precedenza:

$$- Z_n(X, A, \mathcal{U}) = \{u \in C_n(X, A, \mathcal{U}) : \partial_n(u) = 0\} = \text{Ker}(\partial_n);$$

$$- B_n(A, \mathcal{U}) = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X, A, \mathcal{U})).$$

E infine, visto che $B_n(X, A, \mathcal{U}) \subseteq Z_n(X, A, \mathcal{U})$:

$$- H_n(X, A, \mathcal{U}) = Z_n(X, \mathcal{U})/B_n(X, \mathcal{U}).$$

Osservazione 2.2.1: Osserviamo che per $n = 0$ si ha che $Q_0(X, \mathcal{U}) = Q_0(X)$, da cui segue:

$$\begin{aligned} C_0(X, A, \mathcal{U}) &= C_0(X, A), \\ Z_0(X, A, \mathcal{U}) &= Z_0(X, A), \\ H_0(X, A, \mathcal{U}) &= C_0(X, A)/B_0(X, A, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Osservazione 2.2.2: Osserviamo inoltre che l'inclusione $Q_n(X, \mathcal{U}) \subseteq Q_n(X)$ induce $\forall n \in \mathbb{N}$, gli omomorfismi:

$$\sigma_n : C_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow C_n(X, A).$$

Si può verificare che tali σ_n sono iniettivi. In particolare gli omomorfismi σ_n commutano con l'operatore di bordo ∂_n e dunque il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X, A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X, A, \mathcal{U}) \\ \sigma_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \sigma_n \\ C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X, A) \end{array}$$

Dunque, σ_n mappa $Z_n(X, A, \mathcal{U})$ in $Z_n(X, A)$ e $B_n(X, A, \mathcal{U})$ in $B_n(X, A)$ e quindi induce un omomorfismo

$$\sigma_* : H_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.2.2: *Assumiamo che \mathcal{U} sia un ricoprimento aperto generalizzato di X . Allora l'omomorfismo indotto $\sigma_* : H_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X, A)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Diamo un'idea della di dimostrazione. Per maggiori dettargli si veda W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, pp. 178-185.

Per provare il teorema si procede in due passi successivi, si considera prima il caso più semplice in cui $A = \emptyset$ e poi si generalizza facendo uso di un argomentazione puramente algebrica, il *five lemma*.

Per la dimostrazione del caso semplice si definisce un operatore $sd_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$, detto *operatore di suddivisione*, e se ne dimostrano alcune importanti proprietà.

Si definiscono quindi degli omomorfismi $\varphi_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ tali che per ogni u in $C_n(X)$ si abbia $sd_n(u) - u = \partial_{n+1}\varphi_n(u) + \varphi_{n-1}\partial_n(u)$. Ovvero φ_n è un'omotopia fra i morfismi di catene sd e l'identità. Si procede definendo per ogni n -cubo singolare l'($n+1$)-cubo singolare $G_e(T) : I^{n+1} \rightarrow X$ e il morfismo $\Phi_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n+1}(X)$.

Fatti questi preliminari si dimostra infine che $\sigma_* : H_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X)$ è un isomorfismo utilizzando le proprietà degli oggetti introdotti. \square

Facendo uso di questo teorema possiamo finalmente dimostrare la proprietà di escissione, ovvero il **Teorema 2.2.1**.

Dimostrazione. Siano (X, A) e W come nelle ipotesi del **Teorema 2.2.1**. Allora:

$$\text{Int}(A) \cup \text{Int}(X \setminus W) = X.$$

Dunque $\mathcal{U} = \{A, X \setminus W\}$ è un ricoprimento aperto generalizzato del tipo richiesto nelle ipotesi del **Teorema 2.2.2**. Osserviamo che per ogni n vale

$$C_n(X, \mathcal{U}) = C_n(A) + C_n(X \setminus W)$$

per definizione di $C_n(X, \mathcal{U})$. Ovvero $C_n(X, \mathcal{U})$ è il più piccolo gruppo che li contiene entrambi. Per provare la proprietà di escissione consideriamo il seguente diagramma commutativo per ogni $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X \setminus W, A \setminus W) & \xrightarrow{1} & C_n(X, A) \\ & \searrow 2 & \uparrow \sigma_n \\ & & C_n(X, A, \mathcal{U}) \end{array}$$

(Il diagramma è commutativo, con un cerchio di scorcio tra le frecce 1 e 2.)

Ogni omomorfismo indicato nel diagramma è indotto da una relazione di inclusione. Passando ai gruppi di omologia otteniamo il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X \setminus W, A \setminus W) & \xrightarrow{3} & H_n(X, A) \\ & \searrow 4 & \uparrow \sigma_* \\ & & H_n(X, A, \mathcal{U}) \end{array}$$

(Il diagramma è commutativo, con un cerchio di scorcio tra le frecce 3 e 4.)

Vogliamo dimostrare che l'omomorfismo indicato con la freccia 3 è un isomorfismo, la dimostrazione in questo modo sarebbe infatti conclusa. Dal **Teorema 2.2.2** abbiamo che σ_* è un isomorfismo. Ci basta quindi mostrare che l'omomorfismo indicato con la freccia 4 è un isomorfismo. Osserviamo che l'omomorfismo indicato con la freccia 4 è indotto dall'omomorfismo indicato nel diagramma precedente con la freccia 2. Studiamo quindi tale omomorfismo in modo più preciso:

$$\begin{aligned} C_n(X \setminus W, A \setminus W) &= C_n(X \setminus W) / C_n(A \setminus W) \\ &= C_n(X \setminus W) / [C_n(X \setminus W) \cap C_n(A)] \end{aligned}$$

poiché $C_n(A \setminus W) = C_n(X \setminus W) \cap C_n(A)$. Analogamente:

$$\begin{aligned} C_n(X, A, \mathcal{U}) &= C_n(X, \mathcal{U}) / C_n(A, \mathcal{U}) \\ &= [C_n(X \setminus W) + C_n(A)] / C_n(A) \end{aligned}$$

Perciò possiamo riscrivere l'omomorfismo indicato con la freccia 2 come:

$$\frac{C_n(X \setminus W)}{C_n(X \setminus W) \cap C_n(A)} \rightarrow \frac{C_n(X \setminus W) + C_n(A)}{C_n(A)}$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$, indotto dalle relazioni di inclusione. Segue quindi dal primo teorema di isomorfismo di gruppi che tale mappa è un isomorfismo. Dunque la freccia 2 va a indicare un isomorfismo. Ma allora anche l'omomorfismo indotto, ovvero quello indicato dalla freccia 4, è un isomorfismo. Pertanto per il diagramma precedente anche l'omomorfismo indicato con la freccia 3 è un isomorfismo. \square

Consideriamo una coppia (X, A) . Vediamo ora un'importante conseguenza che ci permetterà, sotto opportune ipotesi, di identificare il gruppo di omologia n -dimensionale relativo $H_n(X, A)$ con il gruppo di omologia n -dimensionale dello spazio quoziente $H_n(X/A)$. Ci serve tuttavia dare prima la seguente definizione:

Definizione 2.2.2 (buona coppia): Sia X uno spazio topologico e A un suo sottospazio, la coppia (X, A) si dice *buona coppia* se esiste un sottoinsieme aperto di X che si retrae per deformazione su A .

Proposizione 2.2.3: Sia (X, A) una buona coppia. Allora la mappa di coppia quoziente $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induce un isomorfismo $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \simeq H_n(X/A)$ per ogni n .

Dimostrazione. Sia V un intorno aperto di A in X che si retrae per deformazione su A . Si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ q_* \downarrow & \circlearrowleft & q_* \downarrow & \circlearrowleft & q_* \downarrow \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n(X/A \setminus A, V/A) \end{array}$$

La mappa in alto a sinistra è un isomorfismo poiché nella successione della tripla (X, V, A)

$$\dots \xrightarrow{i_*} H_n(V, A) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{H_n} H_n(X, V) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(V, A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

i gruppi $H_n(V, A)$ sono zero per ogni n . Infatti, essendo che A è un retratto per deformazione di V si ha che le coppie (V, A) e (A, A) sono omotopicamente equivalenti, dunque $H_n(V, A) = H_n(A, A) = \{0\}$ per ogni n . Per lo stesso motivo anche la mappa orizzontale in basso a sinistra è un isomorfismo, infatti la retrazione per deformazione di V in A induce una retrazione per deformazione di V/A in A/A .

Ora, le altre due mappe orizzontali sono anch'esse isomorfismi per il teorema di escissione. Infine, la mappa verticale a destra q_* è un isomorfismo in quanto q ristretto al complementare di A è un omeomorfismo. Dunque per commutatività del diagramma anche la mappa verticale a sinistra q_* è un isomorfismo. \square

2.3 La successione esatta di Mayer–Vietoris

Sia X uno spazio topologico e siano A e B due suoi sottospazi tali che

$$X = A \cup B.$$

Vorremmo capire quali relazioni sussistono tra i gruppi di omologia $H_n(A)$, $H_n(B)$, $H_n(A \cap B)$ e $H_n(X)$. Vedremo che sotto opportune ipotesi tali gruppi danno luogo a una successione esatta, chiamata *successione di Mayer–Vietoris*. Questa successione esatta gioca lo stesso ruolo nella teoria dell'omologia del Teorema di Seifert–Van Kampen nel calcolo del gruppo fondamentale.

Definizione 2.3.1 (φ, ψ): Siano definiti

- $i_* : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A)$,
- $j_* : H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(B)$,
- $k_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$,
- $l_* : H_n(B) \rightarrow H_n(X)$

come gli omomorfismi indotti dalle relazioni di inclusione. Attraverso questi omomorfismi definiamo gli omomorfismi:

$$\begin{aligned}\varphi : H_n(A \cap B) &\rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \\ \psi : H_n(A) \oplus H_n(B) &\rightarrow H_n(X)\end{aligned}$$

nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (i_*(x), j_*(x)) \quad \forall x \in H_n(A \cap B) \\ \psi(u, v) &= k_*(u) - l_*(v) \quad \forall u \in H_n(A), v \in H_n(B).\end{aligned}$$

Teorema 2.3.1 (Successione di Mayer–Vietoris): *Siano A e B sottospazi topologici dello spazio topologico X tali che $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.*

Allora è possibile definire per ogni n un omomorfismo naturale

$$\Delta : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$$

tale che la seguente successione sia esatta:

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} \dots$$

Se $A \cap B \neq \emptyset$, la successione rimane esatta se sostituiamo i gruppi di omologia standard con i gruppi di omologia ridotta.

Tale successione esatta è detta successione di Mayer–Vietoris. L’enunciato afferma in particolare che la definizione dell’omomorfismo Δ è naturale. Ciò è da intendersi nel modo seguente: supponiamo che esistano due sottospazi A' e B' di X' tali che $X' = \text{Int}(A') \cap \text{Int}(B')$ e una mappa continua $f : X \rightarrow X'$ tale che $f(A) \subseteq A'$ e $f(B) \subseteq B'$. Allora il seguente diagramma è commutativo per ogni n :

$$\begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(A \cap B) \\ \downarrow f_* & \circlearrowleft & \downarrow f_* \\ H_n(X') & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(A' \cap B') \end{array}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{A, B\}$, allora \mathcal{U} è un ricoprimento aperto generalizzato. Ciò viene garantito dalle ipotesi fatte su A e B . Dunque per il **Teorema 2.2.2** l’omomorfismo di inclusione $\sigma : C_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow C_n(X)$ induce un isomorfismo $\sigma_* : H_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X)$ per ogni n . Osserviamo inoltre che

$$C_n(X, \mathcal{U}) = C_n(A) + C_n(B),$$

dove $C_n(A) + C_n(B)$ è il più piccolo sottogruppo di $C_n(X)$ che contiene sia $C_n(A)$ sia $C_n(B)$. Siano

- $i_{\#} : C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A)$,
- $j_{\#} : C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(B)$,
- $k_{\#} : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$,
- $l_{\#} : C_n(B) \rightarrow C_n(X)$

gli omomorfismi indotti dalle relazioni di inclusione. Osserviamo che, per quanto visto, $\text{Im}(k_{\#}), \text{Im}(l_{\#}) \subseteq C_n(X, \mathcal{U})$. Dunque si hanno i due seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} & C_n(X, \mathcal{U}) & \\ & \nearrow k'_{\#} & \downarrow \sigma \\ C_n(A) & \circlearrowleft & C_n(X) \\ & \searrow k_{\#} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & C_n(X, \mathcal{U}) & \\ & \nearrow l'_{\#} & \downarrow \sigma \\ C_n(B) & \circlearrowleft & C_n(X) \\ & \searrow l_{\#} & \end{array}$$

Poiché $H_n(X)$ e $H_n(X, \mathcal{U})$ sono isomorfi, possiamo sostituire $H_n(X)$ con $H_n(X, \mathcal{U})$, nel farlo dobbiamo quindi andare a sostituire anche gli omomorfismi $k_{\#}$ e $l_{\#}$ con $k'_{\#}$ e $l'_{\#}$. Per semplicità di notazione assumeremo che ciò sia stato fatto e andremo ad indicare con $k_{\#}$ e $l_{\#}$ gli omomorfismi $k'_{\#}$ e $l'_{\#}$. Per analogia con le definizioni degli omomorfismi φ e ψ date poco fa, definiamo:

$$\begin{aligned} \Phi &: C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A) \oplus C_n(B), \\ \Psi &: C_n(A) \oplus C_n(B) \rightarrow C_n(X, \mathcal{U}) \end{aligned}$$

nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (i_{\#}(x), j_{\#}(x)) \\ \Psi(u, v) &= k_{\#}(u) - l_{\#}(v).\end{aligned}$$

Ora consideriamo il seguente diagramma di gruppi di catene e omomorfismi:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n+1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi} & C_{n+1}(A) \oplus C_{n+1}(B) & \xrightarrow{\Psi} & C_{n+1}(X, \mathcal{U}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{n+1} & \circlearrowleft & \downarrow \partial_{n+1} & \circlearrowleft & \downarrow \partial_{n+1} \\ 0 & \longrightarrow & C_n(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi} & C_n(A) \oplus C_n(B) & \xrightarrow{\Psi} & C_n(X, \mathcal{U}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_n & \circlearrowleft & \downarrow \partial_n & \circlearrowleft & \downarrow \partial_n \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi} & C_{n-1}(A) \oplus C_{n-1}(B) & \xrightarrow{\Psi} & C_{n-1}(X, \mathcal{U}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial_{n-1} \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Le frecce verticali vanno a indicare l'appropriato operatore di bordo. Per le frecce verticali nella colonna di mezzo si considera la somma diretta degli operatori di bordo di A e di B . I due fatti più importanti sul diagramma sono:

1. Ogni rettangolo del diagramma è commutativo. Ciò segue direttamente dalla definizione di Φ e Ψ .
2. Ogni successione orizzontale del diagramma è una successione esatta. Dimostriamolo: consideriamo per ogni $n > 0$ la successione:

$$0 \rightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\Psi} C_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow 0.$$

Osserviamo che:

- $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow (i_{\#}(x), j_{\#}(x)) = (0, 0)$, ma questo vale se e solo se $x = 0$, dunque Φ è iniettiva.
- Ψ è suriettiva per la definizione data di $C_n(X, \mathcal{U})$.
- $Im(\Phi) \subseteq Ker(\Psi)$, infatti $\Psi(\Phi(x)) = \Psi((i_{\#}(x), j_{\#}(x))) = k_{\#}(x) - l_{\#}(x) = 0$, poiché $x \in C_n(A \cap B)$;
- $Ker(\Psi) \subseteq Im(\Phi)$, infatti preso $(u, v) \in Ker(\Psi)$ allora $u - v = 0$, ovvero $u = v$, ma allora $(u, v) \in \Phi(C_n(A \cap B))$.

In particolare si può verificare che tale diagramma gode di proprietà analoghe al diagramma \star , utilizzato per costruire la successione di omologia di una coppia.

Definiamo quindi per ogni n l'omomorfismo Δ in maniera del analoga a quanto fatto per definire l'operatore di bordo ∂_* di una coppia:

$$\Delta : H_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B).$$

Applicando la stessa tecnica utilizzata per dimostrare l'esattezza della successione di omologia di una coppia si mostra che la successione

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} \cdots$$

è esatta. Sostituendo quindi $H_n(X)$ con $H_n(X, \mathcal{U})$ tramite l'isomorfismo σ_* si trova l'enunciato. \square

Capitolo 3

Omologia di superficie reali compatte

In questo capitolo tratteremo un esempio esplicito di calcolo dei gruppi di omologia di spazi noti, le superficie reali compatte. Tuttavia prima di procedere ci soffermeremo sul calcolo dei gruppi di omologia delle n -sfere, esempio interessante anche solo di per sé, i cui risultati ottenuti saranno necessari per quanto segue.

3.1 Gruppi di omologia delle sfere

In questa sezione utilizzeremo i risultati visti nel capitolo precedente per calcolare i gruppi di omologia della sfera. In particolare faremo uso della successione omologica esatta di una coppia e della proprietà di escissione. Per $n \in \mathbb{N}$, indiciamo con S^n la sfera n -dimensionale, ovvero:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Teorema 3.1.1: Per ogni intero $n \geq 0$:

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = n \\ \{0\}, & \text{se } i \neq n. \end{cases}$$

Dunque:

$$H_0(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. La seconda affermazione è equivalente alla prima con $i = 0$, in virtù della relazione presente tra i gruppi di omologia e i gruppi di omologia ridotti. Proviamo quindi la prima asserzione.

Procediamo per induzione su n .

- *Base d'induzione:* Per $n = 0$ l'asserto è verificato, infatti S^0 è uno spazio dato semplicemente da due punti e quindi $\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$ e $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

- *Passo induttivo:* Supponiamo di aver dimostrato l'enunciato per S_n e vediamo per S_{n+1} . Identifichiamo quindi S^n con l'equatore di S^{n+1} , ovvero:

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} = 0\}.$$

Consideriamo inoltre i seguenti sottoinsiemi di S^{n+1} :

$$\begin{aligned} E_+^{n+1} &= \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} \geq 0\}, \\ E_-^{n+1} &= \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} \leq 0\}. \end{aligned}$$

che possono essere pensati come l'emisfero superiore e l'emisfero inferiore di S^{n+1} . I due emisferi sono omeomorfi al disco unitario $(n+1)$ -dimensionale nell'iperpiano $\{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x_{n+2} = 0\}$ di \mathbb{R}^{n+2} , ovvero all'insieme:

$$E^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : |x| \leq 1 \text{ e } x_{n+2} = 0\},$$

dunque sono contraibili. Consideriamo ora le seguenti mappe di inclusione di coppie

$$\begin{aligned} j &: (S^{n+1}, \emptyset) \rightarrow (S^{n+1}, E_-^{n+1}), \\ k &: (E_+^{n+1}, S^n) \rightarrow (S^{n+1}, E_+^{n+1}). \end{aligned}$$

Guardando gli omomorfismi indotti da j e k sui gruppi di omologia si ha il seguente diagramma:

$$\tilde{H}_i(S^n) \xleftarrow{\partial_*} H_{i+1}(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{k_*} H_{i+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \xleftarrow{j_*} \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}).$$

dove la mappa ∂_* è il morfismo di bordo nella successione della coppia (E_-^{n+1}, S^n) . Osserviamo che in particolare ∂_* è un isomorfismo, infatti E_-^{n+1} ha gruppo di omologia banale, essendo contraibile. Ora, poiché la successione della coppia (E_-^{n+1}, S^n) è una successione esatta e anche E_+^{n+1} è contraibile ad un punto, segue che anche j_* è un isomorfismo. Mostrando che anche k_* è un isomorfismo si conclude, si avrebbe infatti $\tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \simeq \tilde{H}_i(S^n)$, da cui l'asserto.

Ora, la coppia (E_-^{n+1}, S^n) si può ottenere dalla coppia (S^{n+1}, E_+^{n+1}) recidendo $E_+^{n+1} \setminus S^n$, ovvero andando a considerare $(S^{n+1} \setminus (E_+^{n+1} \setminus S^n), E_+^{n+1} \setminus (E_+^{n+1} \setminus S^n))$. Tuttavia non è possibile applicare la proprietà di escissione, (**Teorema 2.2.1**), in quanto la chiusura di $E_+^{n+1} \setminus S^n$ non è contenuta in $\text{Int}(E_+^{n+1})$. Possiamo tuttavia aggirare il problema. Sia

$$W = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} \geq \frac{1}{2}\}.$$

Consideriamo quindi il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_{i+1}(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{k_*} & H_{i+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \\ & \searrow h_* & \nearrow e_* \\ & & H_{i+1}(S^{n+1} \setminus W, E_+^{n+1} \setminus W) \end{array}$$

↻

Dove le mappe h_* e e_* sono gli omomorfismi indotti dalle mappe di inclusione di coppie

$$\begin{aligned} h &: (E_-^{n+1}, S^n) \rightarrow (S^{n+1} \setminus W, E_+^{n+1} \setminus W), \\ e &: (S^{n+1} \setminus W, E_+^{n+1} \setminus W) \rightarrow (S^{n+1}, E_+^{n+1}). \end{aligned}$$

Ora possiamo utilizzare il teorema di escissione e concludere che e_* è un isomorfismo. Infatti si ha che $\overline{E_+^{n+1} \setminus W} \in \text{Int}(E_+^{n+1})$. In particolare anche h_* è un isomorfismo in quanto la mappa h è un'equivalenza omotopica di coppie. Ciò si dimostra osservando che la coppia $(S^{n+1} \setminus W, E_+^{n+1} \setminus W)$ è un retratto per deformazione della coppia (E_+^{n+1}, S^n) . Dalla commutatività del diagramma segue quindi che anche k_* è un isomorfismo, come desiderato. \square

Questa dimostrazione mostra una strategia che viene spesso utilizzata per applicare la proprietà di escissione.

Vediamo ora una dimostrazione alternativa del **Teorema 3.1.1** che fa uso della successione di Mayer–Vietoris.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n .

- *Base d'induzione:* Per $n = 0$ abbiamo visto che il teorema è banalmente verificato.

- *Passo induttivo:* Supponiamo di aver dimostrato l'enunciato per S_n e vediamo per S_{n+1} . Assumiamo quindi che $\tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_i(S^n) = \{0\}$ per $i \neq n$.

Identifichiamo S^n con l'equatore di S^{n+1} , come fatto in precedenza. Siano ora

$$\begin{aligned} A &= S^{n+1} \setminus (0, \dots, 0, -1), \\ B &= S^{n+1} \setminus (0, \dots, 0, +1). \end{aligned}$$

Allora A e B sono sottoinsiemi aperti di S^{n+1} tali che $A \cup B = S^{n+1}$. Dunque possiamo applicare il **Teorema 2.3.1**. Osserviamo in particolare che $A \cap B \neq \emptyset$, possiamo quindi considerare la successione di Mayer–Vietoris dei gruppi di omologia ridotti:

$$\dots \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_{i+1}(A) \oplus \tilde{H}_{i+1}(B) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \xrightarrow{\psi} \dots$$

Attraverso la proiezione stereografica si mostra che A e B sono isomorfi a \mathbb{R}^{n+1} e di conseguenza sono contraibili. Dunque $\tilde{H}_i(A) = \tilde{H}_i(B) = \{0\}$ per ogni i . Segue quindi dall'esattezza della successione che Δ è un isomorfismo, ossia $\tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \simeq \tilde{H}_i(A \cap B)$. Ora $A \cap B$ è omeomorfo a \mathbb{R}^{n+1} tolto un punto e dunque si retrae per deformazione sulla sfera S^n . Dunque, per ipotesi induttiva si ha che $\tilde{H}_n(A \cap B) = \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_i(A \cap B) = \{0\}$ per $i \neq n$. Poiché Δ è un isomorfismo segue che $\tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) = \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_i(S^{n+1}) = \{0\}$ per $i \neq n + 1$, come si voleva dimostrare. \square

Vediamo alcune applicazioni e corollari che discendono da questo risultato. Utilizzeremo la notazione E^n per indicare il disco unitario, ovvero l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq 1\}$, come visto nella dimostrazione.

Proposizione 3.1.2: *La sfera S^n non è contraibile a un punto.*

Proposizione 3.1.3: *La sfera S^n non è un retratto di E^{n+1} .*

Proposizione 3.1.4: *I gruppi di omologia relativi della coppia (E^n, S^{n-1}) , per $n \geq 1$, sono:*

$$H_i(E^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = n \\ \{0\}, & \text{se } i \neq n. \end{cases}$$

3.2 Gruppi di omologia delle superficie compatte

Una superficie compatta è omeomorfa a una delle seguenti: la sfera, S^2 ; il toro, $S^1 \times S^1$; il piano proiettivo reale; una somma connessa di tori o una somma connessa di piani proiettivi.

Prima di procedere tuttavia al calcolo diretto dei gruppi di omologia delle superficie compatte vediamo alcuni risultati preparatori.

Definizione 3.2.1 (wedge sum): Siano X e Y due spazi topologici, siano $x \in X$, $y \in Y$. La *wedge sum* di X e Y , $X \vee Y$ è il quoziente dell'unione disgiunta di X e Y mediante l'identificazione $x \sim y$. Ovvero $X \vee Y = X \sqcup Y / \sim$. Più in generale è possibile definire la *wedge sum* $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ di un'arbitraria famiglia di spazi topologici X_{α} come il quoziente dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ indentificando i punti $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ ad un solo punto.

Teorema 3.2.1: Consideriamo la wedge sum $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$, allora prese le mappe di inclusione $i_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$, esse inducono un isomorfismo

$$\bigoplus_{\alpha} i_{\alpha*} : \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(X_{\alpha}) \rightarrow \tilde{H}_n(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}),$$

a patto che i punti $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ attraverso i quali si definisce la wedge sum siano tali che $(X_{\alpha}, \{x_{\alpha}\})$ è una buona coppia.

Dimostrazione. I gruppi di omologia ridotti $\tilde{H}_n(X_{\alpha})$ sono isomorfi ai gruppi di omologia delle coppie (X_{α}, x_{α}) per la **Proposizione 2.1.3**. Di conseguenza l'enunciato segue direttamente dalla **Proposizione 2.2.3**, prendendo $(X, A) = (\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}, \bigsqcup_{\alpha} \{x_{\alpha}\})$. \square

Osserviamo che per $n > 0$ il teorema implica che $\bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha}) \simeq H_n(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha})$ per definizione dei gruppi di omologia ridotti.

Corollario 3.2.2: Consideriamo la wedge sum $S^1 \vee S^1$, anche detta bouquet di due circonferenze, allora si ha che:

$$\tilde{H}_n(S^1 \vee S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per $n = 0$ l'enunciato segue direttamente dal fatto che $S^1 \vee S^1$ è connessa per archi, si veda la **Proposizione 1.1.2** a riguardo. Per $n = 1$ consideriamo l'isomorfismo $H_n(S^1 \vee S^1) \simeq H_n(S^1) \oplus H_n(S^1)$, dato dal **Teorema 3.2.1**. Dunque $H_n(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, per quanto visto sui gruppi di omologia delle n -sfere. Infine, per $n \geq 2$ si può utilizzare la stessa argomentazione del caso $n = 1$ e si conclude quindi che $H_n(S^1 \vee S^1) = \{0\}$, in quanto $H_n(S^1) = \{0\}$ per $n \geq 2$. \square

Quanto visto per la wedge sum di due circonferenze si generalizza facilmente alla wedge sum di n circonferenze facendo uso delle stesse argomentazioni utilizzate nella dimostrazione del corollario precedente.

Possiamo ora procedere all'esempio delle superficie compatte. Per calcolare i gruppi di omologia di queste superficie utilizzeremo il fatto che ogni superficie reale compatta può essere costruita come quoziente di poligoni rispetto all'identificazione di coppie di opportuni lati.

1. **Il toro:**

Il toro può essere ottenuto da un quadrato mediante l'identificazione dei lati opposti, mantenendo l'orientamento, come in figura:

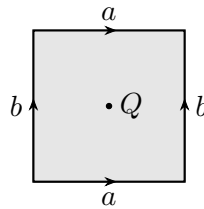


Figura 3.1: Rappresentazione poligonale del toro

I lati da identificare sono infatti i lati indicati con la stessa lettera e l'identificazione deve essere fatta in modo che le direzioni indicate dalle frecce siano concordi. Mediante l'identificazione ogni paio di lati diventa un cerchio e i due cerchi, si intersecano in un solo punto. Useremo la seguente notazione:

\mathbb{T} = il toro

X = il quadrato

$f : X \rightarrow \mathbb{T}$, la mappa di identificazione.

Consideriamo quindi un opportuno ricoprimento aperto di \mathbb{T} e calcoliamo i gruppi di omologia del toro attraverso la successione di Mayer–Vietoris. Sia Q il punto al centro del quadrato, come in figura, consideriamo i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{T} ,

$$U = f(\text{Int}(X)) \quad \text{e} \quad V = \mathbb{T} \setminus f(\{Q\}).$$

Osserviamo che U e V sono aperti e in particolare ricoprono tutto \mathbb{T} . Consideriamo la successione di Mayer–Vietoris:

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi} H_n(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(\mathbb{T}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che U è contraibile ad un punto, V invece è omeomorfo ad un bouquet di due circonferenze, $S^1 \vee S^1$, mentre $U \cap V$ è retraibile a una circonferenza. Dunque:

$$H_n(U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n > 0 \end{cases} \quad H_n(V) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$H_n(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Per $n \geq 3$ si ha quindi $H_n(U) = H_n(V) = H_n(U \cap V) = \{0\}$. Di conseguenza dall'esattezza della successione si ha che anche $H_n(\mathbb{T}) = \{0\}$ per $n \geq 3$.

Inoltre $H_0(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$ in quanto \mathbb{T} è connesso per archi.

Possiamo quindi considerare solo la seguente porzione della successione:

$$\begin{aligned} 0 \xrightarrow{\psi} H_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(\mathbb{T}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere come:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Studiamo la mappa $\varphi : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$. Osserviamo innanzitutto che l'omomorfismo d'inclusione $i_* : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U)$ è nullo, in quanto $H_1(U) = \{0\}$. Ora $H_1(U \cap V) \simeq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, con $H_1(U \cap V)$ generato dal ciclo attorno al punto Q . Consideriamo quindi l'omomorfismo di inclusione $j_* : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V)$. Si ha che l'immagine del generatore di $H_1(U \cap V)$ tramite j_* è il ciclo $b + a - b - a = 0$, dunque anche j_* è nullo. Segue che φ è la mappa nulla. Ora, per l'esattezza della successione si ha che Δ è un isomorfismo, ovvero: $H_2(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}$.

Consideriamo dunque la seconda parte della successione. Studiamo quindi le mappe $\varphi : H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ e $\Delta : H_1(\mathbb{T}) \rightarrow H_0(U \cap V)$. Osserviamo che poiché φ è per definizione iniettiva, si ha che $\text{Ker}(\varphi) = \{0\} = \text{Im}(\Delta)$, dove l'ultima uguaglianza discende dall'esattezza della successione. Si conclude che Δ è la mappa nulla e dunque $\psi : H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(\mathbb{T})$ è un isomorfismo. Da ciò $H_1(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Dunque:

$$H_n(\mathbb{T}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Osservazione 3.2.1: Si consideri una successione esatta. Osserviamo che in generale se vi sono al suo interno delle mappe nulle si ha sempre che la mappa successiva a quella nulla è una mappa iniettiva, mentre quella precedente è una mappa suriettiva. È quindi sempre possibile spezzare la successione in successioni esatte più brevi. Nel caso del toro, una volta osservato che la mappa $\Delta : H_1(\mathbb{T}) \rightarrow H_0(U \cap V)$ è nulla si può spezzare la successione in:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{T}) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. Il piano proiettivo reale:

Il piano proiettivo reale è una superficie compatta e in particolare è non orientabile. Vedremo che la non orientabilità del piano proiettivo porta a una diversa struttura dei suoi gruppi di omologia.

Può essere ottenuto da un disco attraverso l'identificazione dei punti antipodali del bordo. Passando quindi al quoziente mediante l'identificazione, si ottiene la superficie in questione, che denoteremo con \mathbb{P}^2 .

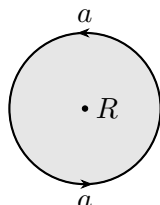


Figura 3.2: Rappresentazione poligonale del piano proiettivo

Useremo la seguente notazione:

$\mathbb{P}^2 =$ il piano proiettivo reale

$X =$ il disco

$g : X \rightarrow \mathbb{P}^2$, la mappa di identificazione.

Procediamo ora in modo analogo a quanto fatto per il toro. Consideriamo quindi un opportuno ricoprimento aperto di \mathbb{P}^2 e calcoliamo i gruppi di omologia del piano proiettivo attraverso la successione di Mayer–Vietoris. Sia R il punto al centro del disco, come rappresentato in figura, siano poi:

$$U = g(\text{Int}(X)) \quad \text{e} \quad V = \mathbb{P}^2 \setminus g(\{R\}).$$

Osserviamo che U e V sono aperti e ricoprono tutto \mathbb{P}^2 . Inoltre, analogamente al caso del toro, si ha che U è contraibile ad un punto, V si può retrarre al bordo e $U \cap V$ si retrae a una circonferenza. Consideriamo nuovamente la successione di Mayer–Vietoris:

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi} H_n(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(\mathbb{P}^2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che dopo l'identificazione il bordo della figura diventa un cerchio, in particolare percorso due volte. Dunque abbiamo che $V \simeq S^1$. Come nel caso del toro, si ha che per $n \geq 3$ si ha $H_n(U) = H_n(V) = H_n(U \cap V) = \{0\}$. Segue dall'esattezza della successione che anche $H_n(\mathbb{P}^2) = \{0\}$ per $n \geq 3$.

Inoltre tutti gli insiemi presi in considerazione sono in particolare connessi per archi, dunque $H_0(U) = H_0(V) = H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$.

Per quanto detto i gruppi di omologia di U , V , $U \cap V$ sono determinati per ogni n :

$$H_n(U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n > 0 \end{cases} \quad H_n(V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$H_n(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Consideriamo ora la seguente porzione della successione:

$$\begin{aligned} 0 \xrightarrow{\psi} H_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(\mathbb{P}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere come:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \{0\} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Poiché la mappa $\varphi : H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ è iniettiva, la mappa $\Delta : H_1(\mathbb{P}^2) \rightarrow H_0(U \cap V)$ è nulla, possiamo quindi spezzare la successione e considerare solo la seguente porzione:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \{0\} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\Delta} 0$$

Consideriamo la mappa $\varphi : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$, l'omomorfismo d'inclusione $i_* : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U)$ è nullo poiché $H_1(U) = \{0\}$. Ora $H_1(U \cap V) \simeq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, con $H_n(U \cap V)$ generato dal ciclo attorno al punto R . Consideriamo quindi l'omomorfismo di inclusione $j_* : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V)$. Si ha che l'immagine del generatore di $H_1(U \cap V)$ tramite j_* è il ciclo $a + a = 2a$, in quanto il bordo del disco mediante l'identificazione percorre due volte un cerchio.

In particolare quindi φ è tale che:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \{0\} \oplus \mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto (0, 2). \end{aligned}$$

Dunque è evidente che $Im(\varphi) = 2\mathbb{Z}$ e $Ker(\varphi) = \{0\}$. Inoltre per quanto appena visto φ è iniettiva. Per l'esattezza della successione si ha che Δ è la mappa nulla ed è anche iniettiva, dunque si deve avere $H_2(\mathbb{P}^2) = \{0\}$.

Ora, applicando il primo teorema di isomorfismo di gruppi si ha che $\mathbb{Z}/Ker(\psi) \simeq Im(\psi)$, dove ci si riferisce a ψ come l'omomorfismo $H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(\mathbb{P}^2)$. Dall'esattezza si ha che $Ker(\psi) = Im(\varphi) = 2\mathbb{Z}$. Inoltre $Im(\psi) = H_1(\mathbb{P}^2)$ infatti per l'esattezza della successione è uguale al nucleo della mappa nulla, che è dunque tutto $H_1(\mathbb{P}^2)$. Da ciò: $H_1(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dunque:

$$H_n(\mathbb{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{se } n = 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

3. L'otre di Klein:

L'otre di Klein è una superficie reale compatta non orientabile, che ha la proprietà interessante di non poter essere immersa in \mathbb{R}^3 senza autointersezioni.

Vi sono due diversi modi di ottenere l'otre di Klein attraverso l'identificazione dei lati di un quadrato. Utilizzeremo quello indicato nella seguente figura:

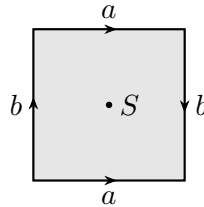


Figura 3.3: Rappresentazione poligonale dell'otre di Klein

Vengono quindi identificati i lati opposti in modo da mantenerne l'orientamento. Useremo la seguente notazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \text{l'otre di Klein} \\ X &= \text{il quadrato} \\ h : X &\rightarrow \mathbb{K}, \text{ la mappa di identificazione.} \end{aligned}$$

Per calcolarne i gruppi di omologia procediamo in modo analogo a quanto fatto precedentemente: consideriamo due aperti U e V che ricoprono \mathbb{K} e studiamo quindi la successione di Mayer–Vietoris. Definiamo S come il punto al centro del quadrato, come in figura, e scegliamo U e V nel modo seguente:

$$U = h(\text{Int}(X)) \quad \text{e} \quad V = \mathbb{K} \setminus h(\{S\}).$$

Osserviamo quindi che U è contraibile ad un punto, V si può retrarre al bordo e $U \cap V$ si retrae a una circonferenza. Consideriamo la successione:

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi} H_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(\mathbb{K}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il bordo del quadrato è mandato mediante l'identificazione in un bouquet di due circonferenze, di cui una percorsa due volte. Si osserva anche in questo caso che per $n \geq 3$ tutti i gruppi di omologia di U , V e $U \cap V$ sono $\{0\}$ e ne si deduce per l'esattezza della successione che anche $H_n(\mathbb{K}) = \{0\}$ per $n \geq 3$. Anche in questo caso si stanno considerando insiemi connessi per archi e quindi si ha che $H_0(U) = H_0(V) = H_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$. Dunque:

$$H_n(U) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n > 0 \end{cases} \quad H_n(V) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$H_n(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Possiamo ora limitarci a considerare la successione:

$$\begin{aligned} 0 \xrightarrow{\psi} H_2(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(\mathbb{K}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere come:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

La mappa $\varphi : H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi}$ è iniettiva e quindi $\Delta : H_1(\mathbb{P}^2) \rightarrow H_0(U \cap V)$ è nulla, spezziamo la successione e consideriamo la seguente porzione:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} H_1(\mathbb{K}) \xrightarrow{\Delta} 0$$

Osserviamo che $H_1(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}$, dove $H_1(U \cap V)$ generato dal ciclo attorno al punto S . L'omomorfismo di inclusione i_* è nullo. Consideriamo quindi solamente $j_* : H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(V)$. L'immagine del generatore di $H_1(U \cap V)$ tramite j_* è il ciclo $a + b - a + b = 2b$, in quanto come già osservato il bordo del quadrato percorre due circonferenze, una doppiamente. Si ha quindi che:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto (0, 0, 2). \end{aligned}$$

Da ciò $Im(\varphi) = 2\mathbb{Z}$ e $Ker(\varphi) = \{0\}$. Inoltre φ è iniettiva. Ora, utilizzando l'esattezza della successione, si giunge alla conclusione che $H_2(\mathbb{K}) = \{0\}$, come nel caso del piano proiettivo. Infatti anche in questo caso Δ è nullo ed è anche iniettivo.

Utilizzando, in modo analogo al caso di \mathbb{P}^2 , il primo teorema di isomorfismo si ottiene: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/Ker(\psi) \simeq Im(\psi)$, con $\psi : H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(\mathbb{K})$. Infine, sempre sfruttando l'esattezza della successione, si ricava che $Ker(\psi) = Im(\varphi) = 2\mathbb{Z}$ e $Im(\psi) = H_1(\mathbb{K})$. Da ciò: $H_1(\mathbb{P}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dunque:

$$H_n(\mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{se } n = 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Possiamo generalizzare quindi quanto visto alle somme connesse di n tori e alle somme connesse di n piani proiettivi. Per il teorema di classificazione delle superficie reali compatte, infatti, una superficie reale compatta di genere $n \geq 0$ è

omeomorfa, nel caso sia orientabile, o a S^2 oppure a una somma connessa di n tori. Altrimenti, se non è orientabile, è omeomorfa a una somma connessa di n piani proiettivi.

4. **Somma connessa di n tori** (*superficie orientabile di genere n*):

Consideriamo quindi una superficie reale compatta X , orientabile di genere n . Allora X può essere ottenuta da un poligono con $4n$ lati, identificando a coppie i lati in modo da mantenerne l'orientamento, come in figura:

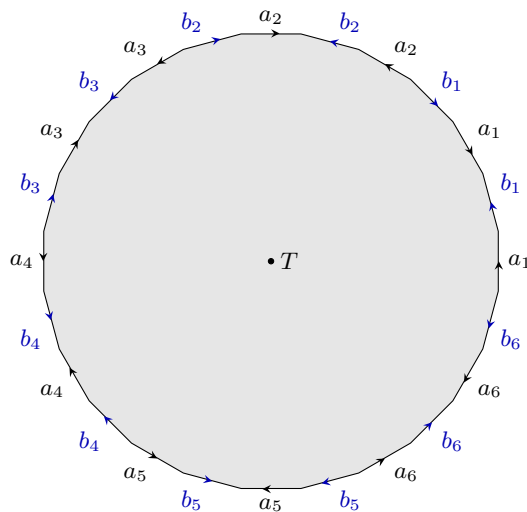


Figura 3.4: Rappresentazione poligonale di X orientabile di genere 6

Analogamente a quanto fatto per il toro si considerano due aperti che ricoprono la superficie: U dato dall'immagine tramite l'identificazione dell'interno del poligono, V dato dalla superficie X tolta l'immagine tramite l'identificazione del punto T , posto al centro del poligono. Per calcolare i gruppi di omologia della superficie si considera quindi la successione di Mayer–Vietoris:

$$0 \xrightarrow{\psi} H_2(X) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(X) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(X) \rightarrow 0$$

Anche in questo caso si ha che $H_n(U) = H_n(V) = H_n(U \cap V) = \{0\}$ per $n \geq 3$, e dunque per esattezza della successione $H_n(X) = \{0\}$ per $n \geq 3$.

Si osserva che U , come nei casi precedenti, è stato scelto contraibile, mentre V viene mandato mediante l'identificazione in un bouquet di $2n$ cerchi che si intersecano tutti in un unico punto ed è dunque omeomorfo a una wedge sum di $2n$ circonferenze. Infine, l'intersezione è sempre retraibile a una sola circonferenza. Inoltre gli insiemi considerati sono tutti connessi per archi quindi $H_0(U) = H_0(V) = H_0(U \cap V) = H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Ora, poiché $\varphi : H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ è iniettiva, $\Delta : H_1(X) \rightarrow H_0(U \cap V)$ è nullo, analogamente a quanto visto per il toro. Si può considerare quindi successione:

$$0 \rightarrow H_2(X) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \{0\} \oplus \mathbb{Z}^{2n} \xrightarrow{\psi} H_1(X) \xrightarrow{\Delta} 0.$$

Anche in questo caso si può vedere che $\varphi : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$ è la mappa nulla. Infatti preso un generatore di $H_1(U \cap V)$ esso viene mandato dall'omomorfismo di inclusione in $H_1(V)$ in $a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_n + b_n - a_n - b_n = 0$.

Ora per esattezza della successione, Δ è un isomorfismo, quindi: $H_2(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Inoltre, poiché anche $\Delta : H_1(X) \rightarrow H_0(U \cap V)$ è nullo, $\psi : H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(X)$ è un isomorfismo. Da ciò: $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}^{2n}$.

Dunque in generale presa una superficie compatta X orientabile di genere n :

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z}^{2n}, & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

5. **Somma connessa di n piani proiettivi** (*superficie non orientabile di genere n*):

Consideriamo quindi una superficie reale compatta X , non orientabile di genere $n \geq 1$. In particolare se n è pari può essere vista come somma connessa di un otre di Klein e una superficie orientabile di genere $\frac{1}{2}(n - 2)$, mentre se n è dispari può essere vista come somma connessa di un piano proiettivo e una superficie orientabile di genere $\frac{1}{2}(n - 1)$.

La sua rappresentazione poligonale, con le identificazioni indicate, è rappresentata dalla seguente figura:

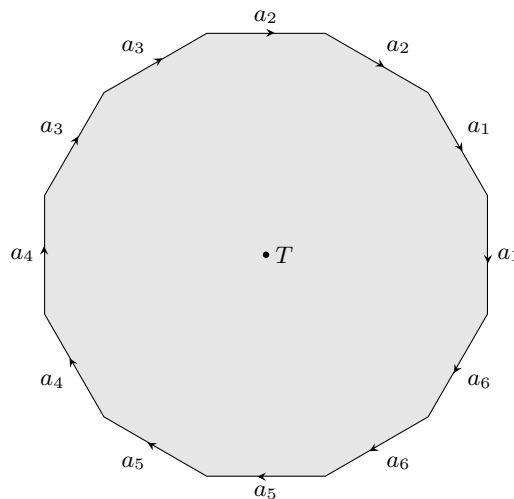


Figura 3.5: Rappresentazione poligonale di X non orientabile di genere 6

Infatti la somma connessa di n piani proiettivi può essere ottenuta da un poligono con $2n$ lati, identificando i lati a coppie in modo da mantenerne l'orientamento.

Per il calcolo dei gruppi di omologia si procede in modo analogo a quanto si è fatto per calcolare quelli del piano proiettivo. Si considera dunque il solito ricoprimento

aperto, dato da U , scelto come l'immagine tramite l'identificazione dell'interno del poligono e da V , scelto invece come la superficie X tolta l'immagine del punto T , posto al centro del poligono.

Analogamente ai casi precedenti U è contraibile, mentre V viene invece mappato mediante l'identificazione in una wedge sum di n circonferenze, tutte percorse due volte, indipendentemente dal fatto che n sia pari o dispari. L'intersezione $U \cap V$ è sempre retraibile a una singola circonferenza.

Ora $H_n(U) = H_n(V) = H_n(U \cap V) = \{0\}$ per $n \geq 3$ e dunque $H_n(X) = \{0\}$ per esattezza della successione. Guardiamo quindi la successione di Mayer–Vietoris:

$$0 \xrightarrow{\psi} H_2(X) \xrightarrow{\Delta} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi} H_1(X) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi} H_0(X) \rightarrow 0$$

Inoltre $H_0(U) = H_0(V) = H_0(U \cap V) = H_0(X) = \mathbb{Z}$ per la connessione per archi degli insiemi considerati.

La mappa $\varphi : H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ è iniettiva e quindi $\Delta : H_1(X) \rightarrow H_0(U \cap V)$ è nulla. Possiamo limitarci quindi a considerare la seguente:

$$0 \rightarrow H_2(X) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \{0\} \oplus \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\psi} H_1(X) \xrightarrow{\Delta} 0.$$

Analogamente a quanto fatto per il piano proiettivo si studia quindi l'immagine del ciclo attorno al punto T , ovvero del generatore di $H_1(U \cap V)$, tramite la mappa $\varphi : H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$. Osserviamo che esso viene mappato da φ in $(0, a_1 + a_1 + a_2 + a_2 \cdots + a_n + a_n) = (0, 2a_1 + \cdots + 2a_n)$. Si può concludere quindi che $Im(\varphi) = \{0\} \oplus (2, 2, \dots, 2)\mathbb{Z}$ e, in particolare, φ è iniettiva. Utilizzando quindi l'esattezza della successione si ha che $\Delta : H_2(X) \rightarrow H_1(U \cap V)$ è nella e anche iniettiva, da cui $H_2(X) = \{0\}$.

Infine per il primo teorema di isomorfismo di gruppi si ha che $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Possiamo vederlo in maniera più evidente scegliendo come base di \mathbb{Z}^n la base canonica al cui ultimo vettore è stato sostituito $(1, 1, \dots, 1)$.

Dunque in generale presa una superficie compatta X non orientabile di genere n :

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{se } n = 1 \\ \{0\}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Bibliografia

- [1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*. Vol. 127. Springer, 2019.
- [3] William S. Massey. *Algebraic topology: an introduction*. New York, 1987.
- [4] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 1994.
- [5] Damiano Vinciarelli. *Teoria dell'omologia: esempi e applicazioni classiche*. Tesi di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova. 2016.