

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**Mesh ammissibili in campo complesso e
approssimazione numerica della loro costante di
Lebesgue**

Relatore:
Prof. Alvise Sommariva

Laureando: Federica Feletto
Matricola: 1201479

Correlatore:
Dott. Giacomo Elefante

Anno Accademico 2023/2024

16 Aprile 2024

Introduzione

Il proposito di questo lavoro è di approfondire alcuni temi sviluppati in *Chebyshev admissible meshes and Lebesgue constants of complex polynomial projections* al fine di approssimare le costanti di Lebesgue Λ_n di operatori \mathcal{L}_n per l'interpolazione polinomiale o l'approssimazione ai minimi quadrati a grado n , su domini compatti $K \subset \mathbb{C}$ che siano determinanti per i polinomi.

Il calcolo di Λ_n risulta di fondamentale importanza per controllare la qualità degli insiemi che definiscono tali operatori e coincide con il calcolo del massimo su K della poco regolare funzione di Lebesgue.

Un tipico approccio empirico consiste nell'effettuare valutazioni di quest'ultima su insiemi sufficientemente densi per poi calcolarne il massimo, fornendo così un'approssimazione di Λ_n .

Nell'articolo sopra menzionato si fornisce per la prima volta un algoritmo che permette non solo l'approssimazione di Λ_n ma anche limiti rigorosi sull'errore compiuto.

Lo strumento fondamentale consiste nel valutare la funzione di Lebesgue su *admissible meshes*, insiemi discreti definiti per la prima volta in *Uniform approximation by discrete least squares polynomials* da J.-P. Calvi e N. Levenberg.

Risulta importante ricordare che a partire da tali mesh sono stati calcolati insiemi di punti notevoli per l'interpolazione a grado n quali i punti di Fekete approssimati, di Leja discreti e particolari costruzioni dei cosiddetti pseudo-Leja.

In questo lavoro, dopo aver mostrato come calcolare AM su una vasta famiglia di domini compatti $K \subset \mathbb{C}$, mostreremo come si possano ottenere tali stime di Λ_n .

Nella sezione numerica approfondiamo tale argomento su vari domini complessi la cui frontiera è rappresentata da curve chiuse notevoli. Differentemente dall'articolo sopramenzionato, forniamo un algoritmo che calcola la costante di Lebesgue con un errore *garantito* al più pari alla tolleranza richiesta dall'utente.

Quali operatori \mathcal{L}_n si considereranno non solo quelli basati sull'interpolazione a grado n su punti approssimati di Fekete, di Leja discreti o pseudo-Leja, ma pure quelli relativi all'approssimazione ai minimi quadrati basati su mesh ammissibili.

Indice

1	Nozioni preliminari	2
1.1	Funzioni analitiche	2
1.2	Errore di migliore approssimazione	3
1.3	Approssimazione di funzioni	3
1.3.1	Interpolazione univariata di Lagrange	4
1.3.2	Interpolazione multivariata di Lagrange	4
1.4	Mesh ammissibili e debolmente ammissibili (AM e WAM)	5
1.4.1	Definizione	5
1.4.2	Proprietà	6
2	Nodi per l'interpolazione univariata	8
2.1	Punti di Fekete	8
2.2	Punti di Leja	9
2.3	Sequenze di pseudo-Leja	10
3	Nodi per l'interpolazione multivariata	12
3.1	Punti di Fekete	12
3.2	Punti di tipo Leja	14
3.3	Sequenze di pseudo-Leja	15
4	Mesh ammissibili di Chebyshev e costanti di Lebesgue	17
4.1	Mesh polinomiali complesse di Chebyshev	17
4.2	Calcolo delle costanti di Lebesgue	19
5	Risultati numerici	22
5.1	Test numerici per l'interpolazione su alcuni domini complessi	23
5.2	Test numerici per l'approssimazione ai minimi quadrati	34
A	Codici	42
	Bibliografia	

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo primo capitolo forniremo alcune nozioni teoriche fondamentali al fine di consentire un'adeguata comprensione di quanto verrà trattato nei capitoli successivi. Prima di tutto faremo un accenno ad alcuni risultati di analisi complessa tratti da [12], in particolare ci concentreremo sul concetto di funzione analitica. In seguito introdurremo la definizione di migliore approssimazione e di interpolazione di Lagrange, sia in una variabile che multivariata. Per concludere, caratterizzeremo le mesh ammissibili e debolmente ammissibili, fulcro di questa tesi.

1.1 Funzioni analitiche

Definizione 1 (Funzione analitica). *Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. La funzione f si dice analitica in Ω se esiste $f'(z)$ per ogni $z \in \Omega$. Se Ω è chiuso, con f analitica in Ω intenderemo che f è analitica in un qualche aperto contenente Ω . In particolare, f analitica in z_0 significa che esiste $r > 0$ tale che f è analitica in $B(z_0, r)$.*

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione del piano complesso e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se $z_0 \in \Omega$, f si dice analitica in z_0 se ammette una rappresentazione della forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

valida in qualche intorno di z_0 (cioè se è rappresentabile localmente come serie di potenze).

Proposizione 1. *Una funzione si dice analitica in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se e solo se è analitica in ogni punto di Ω .*

Per chiarire le idee, alcuni esempi di funzioni analitiche nel piano complesso sono i polinomi di grado arbitrario, le funzioni $\sin z$, $\cos z$, $\exp z$. La funzione di Runge $1/(1+z^2)$ invece è analitica in ogni regione non contenente $-i$ e $+i$.

Definizione 2 (Funzione intera). *Una funzione si dice intera se è analitica in tutto \mathbb{C} .*

Enunciamo ora un teorema che coinvolge le funzioni analitiche e che risulterà fondamentale in seguito per la localizzazione di punti utilizzati per approssimare funzioni in campo complesso.

Teorema 1 (Principio del massimo modulo). *Sia f una funzione analitica e non costante in $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Allora $|f|$ non ha massimo in Ω , cioè non esiste un punto $z_0 \in \Omega$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)|$, per ogni $z \in \Omega$.*

Corollario 1. *Sia f una funzione continua in $\Omega \subset \mathbb{C}$ chiuso e limitato, ed inoltre analitica e non costante in $\overset{\circ}{\Omega}$. Allora il massimo di $|f|$ in Ω è assunto su $\partial\Omega$.*

1.2 Errore di migliore approssimazione

Definizione 3 (Errore di miglior approssimazione). *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio funzionale normato, $\mathbb{P}_n = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$ lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici univariati di grado n aventi dimensione $n+1$, e $f \in X$ una funzione. Allora l'errore di miglior approssimazione compiuto dal polinomio p_n approssimando la funzione f è*

$$E_n(f) := \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|p_n - f\|_\infty .$$

Procediamo presentando due teoremi tratti da [13] che mettono in relazione le funzioni analitiche con l'errore di migliore approssimazione, evidenziando come tali funzioni costituiscano un ottimo "strumento" per quanto concerne l'approssimazione polinomiale nel piano complesso.

Teorema 2. *Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è analitica in un aperto Ω del piano complesso contenente $[a, b]$, allora esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che*

$$E_n(f) = \|p_n^* - f\| = O(\theta^n).$$

Teorema 3 (Bernstein). *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(f))^{1/n} = 0 \tag{1.1}$$

se e solo se f è intera (cioè $\Omega = \mathbb{C}$).

Dal teorema di Bernstein si evince che se la funzione f è intera allora la miglior approssimante (ovvero il polinomio p_n che meglio approssima la funzione data) ha asintoticamente un errore inferiore rispetto al caso in cui f è analitica (al più in un aperto strettamente contenuto nel piano complesso).

Infatti applicando la definizione di limite al membro a sinistra dell'equazione (1.1) otteniamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste n^* tale che per ogni $n \geq n^*$ $(E_n(f))^{1/n} \leq \epsilon$ ovvero $E_n(f) \leq \epsilon^n$.

1.3 Approssimazione di funzioni

Ipotizziamo ora di voler approssimare, tramite un polinomio, una funzione in campo complesso, di cui ci è noto il valore solo in alcuni punti. La ricerca di un tale polinomio prende il nome di interpolazione polinomiale. Presentiamo qui di seguito due versioni dell'interpolazione di Lagrange che corrispondono al caso univariato (cfr. [15]) e multivariato (cfr. [8]).

1.3.1 Interpolazione univariata di Lagrange

Sia K un sottoinsieme compatto del piano complesso e siano $z_0, z_1, \dots, z_n \in K$ una sequenza di punti distinti in K . Se f è una funzione in $C(K)$, allora l' n -esimo polinomio che interpola f nei punti z_0, z_1, \dots, z_n è chiamato *polinomio interpolatore di Lagrange di grado n*

$$\mathcal{L}_n f(z) = \sum_{k=0}^n f(z_k) \ell_k(z),$$

dove con

$$\ell_k(z) = \prod_{j \leq n, j \neq k} \frac{z - z_j}{z_k - z_j}$$

denotiamo il k -esimo polinomio elementare di Lagrange.

Se consideriamo \mathcal{L}_n come una mappa $\mathcal{L}_n: (C(K), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ che va dallo spazio delle funzioni continue su K , dotato della norma uniforme, in se stesso, allora possiamo denotare con Λ_n la *costante di Lebesgue*

$$\Lambda_n := \sup_{z \in K} \sum_{k=0}^n |\ell_k(z)|$$

che corrisponde al sup in K della *funzione di Lebesgue*. In generale, la costante di Lebesgue è un indice di *stabilità* dell'interpolazione di Lagrange: più è piccola, più sarà stabile e dunque, in qualche senso, migliore l'interpolazione.

Qui di seguito formuleremo un risultato di fondamentale importanza per l'interpolazione polinomiale poiché fornisce un limite superiore per la distanza del polinomio interpolatore di Lagrange dalla funzione data f , mettendola in relazione la costante di Lebesgue e l'errore di migliore approssimazione uniforme.

Teorema 4. *Se $f \in C(K)$ e $\mathcal{L}_n f$ è il polinomio che interpola f nei punti z_0, z_1, \dots, z_n , si ha che*

$$\|\mathcal{L}_n f - f\|_\infty \leq (\Lambda_n + 1) E_n(f), \quad (1.2)$$

dove $E_n(f)$ è l'errore di miglior approssimazione di f su K compiuto dal polinomio di migliore approssimazione uniforme, di grado al più n .

Dalla disuguaglianza (1.2) infatti è ben evidente che se il valore di Λ_n è piccolo, l'errore compiuto dall'interpolante polinomiale è poco più grande dell'errore di migliore approssimazione uniforme.

1.3.2 Interpolazione multivariata di Lagrange

In questa sezione introdurremo la versione multivariata dell'interpolazione polinomiale di Lagrange, di cui abbiamo appena fornito un breve riassunto.

Denotiamo con $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}^d)$ lo spazio dei polinomi di grado al più n in d variabili complesse. Un sottoinsieme K di \mathbb{C}^d è detto *unisolvante* per $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}^d)$ (o semplicemente unisolvante di grado n) se, per ogni funzione f definita su K , esiste un unico polinomio $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}^d)$ tale che $p(z) = f(z)$ per ogni $z \in K$.

Questo polinomio è chiamato il *polinomio interpolatore di Lagrange* di f nei punti di K ed è indicato con $\mathcal{L}_K f$.

Ci sono due condizioni necessarie affinché K sia unisolvente di grado d :

- la cardinalità di K deve coincidere con la dimensione di $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}^d)$, che è $N := \binom{n+d}{d}$;
- K non deve essere incluso in un'ipersuperficie algebrica di grado minore o uguale a n .

Se $K = \{z_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, la seconda richiesta si traduce in

$$\det V(z_1, z_2, \dots, z_N) \neq 0 \quad (1.3)$$

dove il primo membro della (1.3) è il determinante della matrice di Vandermonde V

$$\det V(z_1, z_2, \dots, z_N) = \det[p^i(z_j)]_{i,j=1,\dots,N} \quad (1.4)$$

e (p^1, \dots, p^N) è la base di $\mathbb{P}_d(\mathbb{C}^n)$ ordinata in ordine lessicografico.

Definendo il *polinomio elementare di Lagrange* con

$$\ell_i(z) = \frac{\det V(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z, z_{i+1}, \dots, z_N)}{\det V(z_1, z_2, \dots, z_N)} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (1.5)$$

abbiamo la formula dell'*interpolazione multivariata di Lagrange*

$$\mathcal{L}_K f(z) = \sum_{z_i \in K} f(z_i) \ell_i(z). \quad (1.6)$$

Se $z_i = (z_i^1, \dots, z_i^n)$ allora $\det V(z_1, z_2, \dots, z_N)$ è un polinomio (non nullo) in n^N variabili z_i^k ($1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq N$). Dunque, la maggior parte delle configurazioni che contengono il numero appropriato di punti (cioè soddisfano la prima condizione) è unisolvente (cioè soddisfano anche la seconda).

1.4 Mesh ammissibili e debolmente ammissibili (AM e WAM)

In questa sezione introduciamo le nozioni di mesh ammissibili e debolmente ammissibili. Di seguito mostreremo come siano rilevanti per la ricerca di punti con proprietà in un certo senso simili a quelle dei punti di Fekete.

1.4.1 Definizione

Dato un insieme compatto $K \subset \mathbb{R}$ o $K \subset \mathbb{C}$ *polinomialmente determinante* (cioè tale per cui ogni polinomio che si annulla in K risulta essere il polinomio nullo), una *mesh debolmente ammissibile* (o WAM, dall'inglese Weakly Admissible Mesh) è definita come una sequenza di sottoinsiemi $\mathcal{A}_n \subset K$ per cui vale

$$\|p\|_K \leq C(\mathcal{A}_n) \|p\|_{\mathcal{A}_n}, \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{P}_n(K) \quad (1.7)$$

ove $\mathbb{P}_n(K)$ è l'insieme dei polinomi di grado al più n su K e $\|p\|_K = \max_{z \in K} |p(z)|$.

Si ha che

- $\text{card}(\mathcal{A}_n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, $\alpha \geq 1$, e tale mesh risulta ottimale quando $\alpha = 1$;
- $\text{card}(\mathcal{A}_n) \geq \dim(\mathbb{P}_n(K)) := n + 1$ dal momento che \mathcal{A}_n è $\mathbb{P}_n(K)$ -determinante ;
- $C(\mathcal{A}_n)$ cresce al più *polinomialmente* con n . Se $C(\mathcal{A}_n) = c$ è una costante indipendente da n allora parleremo di *mesh ammissibile* (o AM, dall'inglese Admissible Mesh).

In [5] troviamo una formulazione pressoché analoga alla precedente per il caso multivariato, dove, fissato un insieme $K \subset \mathbb{R}^d$ o $K \subset \mathbb{C}^d$, una *mesh debolmente ammissibile* $\mathcal{A}_n \subset K$ deve soddisfare

$$\|p\|_K \leq C(\mathcal{A}_n) \|p\|_{\mathcal{A}_n}, \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{P}_n^d(K) \quad (1.8)$$

ove $\mathbb{P}_n^d(K)$ è l'insieme dei polinomi d -variati di grado al massimo n su K .

Si ha che

- $\text{card}(\mathcal{A}_n) \geq N := \dim(\mathbb{P}_n^d(K)) = \binom{n+d}{d}$ e
- $C(\mathcal{A}_n)$ cresce al più polinomialmente con n . Se $C(\mathcal{A}_n)$ è limitata parliamo di *mesh ammissibili*.

Di seguito useremo la notazione $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$, dove f è una funzione limitata sull'insieme compatto K .

1.4.2 Proprietà

Qui di seguito riportiamo un elenco di proprietà in cui sono riassunte le principali caratteristiche delle WAM:

1. Le WAM sono invarianti sotto trasformazioni affini e mantengono la stessa costante $C(\mathcal{A}_n)$.
2. Ogni sequenza di insiemi interpolanti unisolventi la cui costante di Lebesgue Λ_n cresce al più polinomialmente con n è una WAM, ove $C(\mathcal{A}_n)$ è la costante di Lebesgue Λ_n .
3. Ogni sequenza di sovrainsiemi di una WAM la cui cardinalità cresce al massimo polinomialmente con n è una WAM con la stessa costante $C(\mathcal{A}_n)$.
4. Un'unione finita di WAM è una WAM per la corrispondente unione di compatti e $C(\mathcal{A}_n)$ è il massimo delle costanti corrispondenti.
5. Il prodotto cartesiano finito di WAM è una WAM per il corrispondente prodotto di compatti e $C(\mathcal{A}_n)$ è il prodotto delle costanti corrispondenti.
6. In \mathbb{C}^d una WAM sulla frontiera ∂K è una WAM per K (per il principio del massimo modulo, vedi sezione 1.1).
7. Data la mappa di un polinomio π_s di grado s , allora $\pi_s(\mathcal{A}_{ns})$ è una WAM per $\pi_s(K)$ con costante $C(\mathcal{A}_{ns})$.

8. Ogni insieme K che soddisfa la disuguaglianza di Markov sui polinomi della forma $\|\Delta p\|_K \leq Mn^r \|p\|_K$ ha una AM con $\mathcal{O}(n^{rd})$ punti.
9. Approssimazione polinomiale ai minimi quadrati di $f \in C(K)$: il polinomio ai minimi quadrati $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_n} f$ che approssima la funzione f in una WAM è tale che

$$\|f - \mathcal{L}_{\mathcal{A}_n} f\|_K \lesssim C(\mathcal{A}_n) \sqrt{\text{card}(\mathcal{A}_n)} \min \{ \|f - p\|_K, p \in \mathbb{P}_n^d(K) \}.$$

10. *Punti approssimati di Fekete*: La costante di Lebesgue Λ_n dei punti approssimati di Fekete estratti da una WAM è tale che $\Lambda_n \leq NC(\mathcal{A}_n)$. Inoltre, la loro distribuzione asintotica è la stessa dei punti di Fekete continui.

Capitolo 2

Nodi per l'interpolazione univariata

In questo capitolo analizzeremo e metteremo a confronto tre tipologie di nodi per l'interpolazione di Lagrange nel caso univariato: i punti di Fekete, i punti di Leja e le sequenze di pseudo-Leja.

2.1 Punti di Fekete

Sia K un insieme compatto, non vuoto, del piano complesso e siano ξ_0, \dots, ξ_n un insieme di punti di K per i quali il valore assoluto del determinante della matrice di Vandermonde

$$V(z_0, \dots, z_n) := \begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{pmatrix}$$

sia il più grande possibile; tali punti sono denominati punti di Fekete continui.

Esempio: l'intervallo $[-1, 1]$

I punti di Fekete continui sono noti esplicitamente solo in due casi particolari, l'intervallo e il cerchio (dove sono disposti, in modo equispaziato, lungo tutta la circonferenza). Nell'articolo [7] l'autore evidenzia come i punti di Fekete in $[-1, 1]$ coincidano con quelli di Gauss-Lobatto.

Nell'intervallo $[-1, 1]$ i punti di quadratura di Gauss $-1 < b_0 < b_1 < \dots < b_n < 1$ sono tali per cui la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \sum_{i=0}^n w_i f(b_i)$$

è *esatta* per tutti i polinomi di grado al più $2n + 1$. Qui i pesi w_i sono dati da

$$w_i = \int_{-1}^1 \ell_i(z) dz,$$

dove $\ell_i(z)$ è il polinomio elementare di Lagrange associato. Gli estremi ± 1 non sono inclusi nei punti di Gauss quindi i punti di Gauss-Lobatto possono essere descritti

come i punti di quadratura che includono gli estremi ± 1 . Precisamente sono i punti $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = +1$ tali per cui la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \sum_{i=0}^n w_i f(\xi_i)$$

è *esatta* per tutti i polinomi di grado al più $2n - 1$.

Infatti possono anche essere definiti come gli zeri del polinomio $(z^2 - 1)p'_{n-1}(z)$ ove p_k è il k -esimo polinomio di Legendre.

Dal momento che il polinomio elementare di Lagrange può essere espresso nella forma

$$l_i(z) = \frac{\det V(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, z, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)}{\det V(\xi_0, \dots, \xi_n)},$$

abbiamo che per questi punti di Gauss-Lobatto vale la proprietà

$$\max_{-1 \leq z \leq 1} |l_i(z)| = 1, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Fejér mostrò inoltre che, solo per tali punti, vale anche l'equivalenza più stretta

$$\max_{-1 \leq z \leq 1} \sum_{i=0}^n \ell_i^2(z) = 1.$$

Infatti, se poniamo $F(z) := \sum_{i=0}^n \ell_i^2(z)$ possiamo osservare che $F(z)$ è un polinomio di grado $2n$. Ora, per costruzione, $\ell_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ da cui segue che

$$F(\xi_j) = \sum_{i=0}^n \delta_{ij}^2(z) = 1 \quad 0 \leq j \leq n,$$

cioè $F(z)$ raggiunge il suo massimo valore nei punti ξ_i .

2.2 Punti di Leja

Sia K un sottoinsieme compatto, non vuoto, del piano complesso e sia (ξ_n) una sequenza di punti di K . Si dice che (ξ_n) è una *sequenza di Leja* per K se

$$|w_n(\xi_n)| = \max_{z \in K} |w_n(z)|$$

ove

$$w_n(z) = (z - \xi_0) \cdots (z - \xi_{n-1}) \quad n \geq 1.$$

Dunque l' $(n + 1)$ -esimo termine ξ_n di una sequenza di Leja deve massimizzare il prodotto delle distanze dai precedenti n .

Inoltre se K è *polinomialmente convesso*, ovvero

$$K = \{z : |p(z)| \leq \|p\|_K \text{ per ogni } p \in \mathbb{P}\}$$

allora una sequenza di Leja fornisce dei buoni punti per l'interpolazione di funzioni analitiche (vedi [3]).

Esistono molte differenze e similitudini tra i punti di Leja e di Fekete, e risulta d'interesse considerarne alcune.

- Per il principio del massimo modulo delle funzioni analitiche, sia i punti di Fekete che i punti di Leja si trovano sulla frontiera di K .
- La differenza tra i punti di Leja e i punti di Fekete è che i primi formano una sequenza mentre i secondi un vettore. Quindi, quando noi passiamo da n a $n + 1$, abbiamo $n + 2$ nuovi punti di Fekete mentre solo un nuovo punto di Leja.

Ci sono due vantaggi a lavorare con le sequenze invece che con i vettori:

1. Da un punto di vista computazionale, possiamo usare i calcoli fatti a $\mathcal{L}_{\xi_0, \dots, \xi_n} f$ per calcolare $\mathcal{L}_{\xi_0, \dots, \xi_{n+k}} f$;
 2. Le sequenze consentono di costruire insiemi estremali di punti per l'interpolazione multivariata di Lagrange sul prodotto cartesiano di insiemi planari (unidimensionali).
- Sebbene ogni insieme compatto ammetta infinite sequenze di Leja, è in generale difficile calcolare i punti di Leja (o Fekete), a parte per valori di n molto piccoli.

Studieremo ora le *sequenze di pseudo-Leja* legate ad un insieme compatto nel piano complesso, presentate in [1], le quali forniscono di nuovo dei buoni punti per l'interpolazione polinomiale.

2.3 Sequenze di pseudo-Leja

Assumiamo che K sia un sottoinsieme compatto polinomialmente convesso di \mathbb{C} . Si dice che una sequenza di numeri reali (M_n) ha una *crescita subesponenziale* (o *polinomiale*) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = 1.$$

Quindi, data una sequenza di punti (ξ_n) in K e sia (M_n) una sequenza con crescita subesponenziale con $M_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, diciamo che (ξ_n) è una *sequenza di pseudo-Leja* di M_n se

$$M_n |w_n(\xi_n)| \geq \max_{z \in K} |w_n(z)|$$

ove

$$w_n(z) = (z - \xi_0) \cdots (z - \xi_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

A differenza delle sequenze di Leja però, i cui elementi necessariamente vivono nella frontiera di K , i punti delle sequenze di pseudo-Leja non necessitano di stare nella frontiera.

Calcolo di sequenze pseudo-Leja tramite WAM

Cominciamo ricordando la definizione di *mesh debolmente ammissibile* in una formulazione più "comoda" ma equivalente a quella data precedentemente. Diciamo che una sequenza di insiemi \mathcal{A}_n , $n \in \mathbb{N}$, è una mesh debolmente ammissibile per K se soddisfa le seguenti condizioni:

1. \mathcal{A}_n è un sottoinsieme finito di K ;
2. esiste una sequenza (M_n) con crescita subesponenziale tale che

$$M_n \max_{z \in \mathcal{A}_n} |p(z)| \geq \max_{z \in K} |p(z)| \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{P}_n(K).$$

La sequenza (M_n) è riferita alla crescita della mesh (\mathcal{A}_n) . Nel caso in cui M_n sia limitata da M diremo che (\mathcal{A}_n) è una mesh ammissibile di parametro M .

Teorema 5. *Sia (\mathcal{A}_n) una mesh debolmente ammissibile di crescita (M_n) . Definiamo induttivamente una sequenza (a_n) come segue. Prendiamo $a_0 \in K$, e per $j \geq 1$, selezioniamo $a_j \in \mathcal{A}_j$ tale che*

$$|w_j(a_j)| = \max_{z \in \mathcal{A}_j} |w_j(z)| \tag{2.1}$$

dove $w_j(z) = (z - a_0) \cdots (z - a_{j-1})$. Allora (a_n) è una sequenza di pseudo Leja con crescita (M_n) per K .

Dimostrazione. (\mathcal{A}_j) per ipotesi è una mesh debolmente ammissibile di crescita (M_j) , quindi moltiplicando entrambi i membri della (2.1) per M_j e applicando la definizione di WAM otteniamo la seguente catena di disuguaglianze

$$M_j |w_j(a_j)| = M_j \max_{z \in \mathcal{A}_j} |w_j(z)| \geq \max_{z \in K} |w_j(z)|$$

dalla quale osserviamo che (a_j) è una sequenza di pseudo Leja con crescita (M_j) per K . □

Questo teorema riduce quindi il problema di calcolare una sequenza di pseudo Leja per K a quello di costruire una mesh debolmente ammissibile: il processo consiste nel calcolare $w_j(\mathcal{A}_j)$ e selezionare un elemento di \mathcal{A}_j per il quale il massimo è raggiunto (per evitare un eccessivo costo computazionale, è preferibile prendere la cardinalità di \mathcal{A}_n più piccola possibile).

Inoltre sappiamo già che per ogni polinomio p di grado n vale

$$\max_{z \in K} |p(z)| \leq \Lambda_n \max_{z \in \mathcal{A}_n} |p(z)|$$

poiché nelle sequenze di pseudo-Leja (Λ_n) è subesponenziale, cioè $(\Lambda_n)^{1/n} \rightarrow 1$ (cfr.[15]), quindi per la proprietà 2 delle WAM si ha che $C(\mathcal{A}_n) = \Lambda_n$.

Capitolo 3

Nodi per l'interpolazione multivariata

Abbiamo visto nel capitolo precedente come le sequenze di Leja e di pseudo Leja forniscano degli ottimi nodi su cui interpolare una funzione a valori in campo complesso. Dedichiamo questo capitolo allo studio della versione multivariata di queste sequenze e dei punti di Fekete, presentati negli articoli [11] e [4].

Focalizziamo la nostra attenzione su sequenze di nodi di interpolazione, contenuti in un insieme compatto $K \in \mathbb{C}^d$, per cui in [3] l'autore garantisce l'uniforme convergenza su K del polinomio interpolatore di Lagrange $\mathcal{L}_K f$ alla funzione f , che è analitica in un intorno aperto di K .

All'interno di queste famiglie considereremo i *Punti di Fekete Approssimati* (che abbrevieremo con AFP, acronimo di *Approximate Fekete Points*), i *Punti di Leja Discreti* (che abbrevieremo con DLP, acronimo di *Discrete Leja Points*) e i *Punti di Pseudo Leja* (che abbrevieremo con PLP, acronimo di *Pseudo Leja Points*).

3.1 Punti di Fekete

Dato un insieme compatto, una classica famiglia di nodi utile per l'interpolazione polinomiale multivariata è quella fornita dai punti di Fekete, tali per cui il valore assoluto del determinante della matrice di Vandermonde è massimo. Questi sono noti analiticamente solo in certi istanti e sono difficili da determinare poiché il calcolo della versione discreta è non lineare, costoso e numericamente impegnativo.

Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ (o \mathbb{C}^d) un insieme compatto e $S_n = \text{span}(p_j)_{1 \leq j \leq N}$ lo spazio generato dagli elementi della base dell'insieme dei polinomi in d variabili di grado al massimo n , ove $N = \dim(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}^d))$. Fissato un insieme finito di punti $\{\xi_1, \dots, \xi_N\} \subset K$, ordinando in qualche modo gli elementi della base possiamo costruire la matrice di Vandermonde

$$V(\xi; p) = [p_j(\xi_i)], 1 \leq i, j \leq N .$$

Se $\det V(\xi; p) \neq 0$ allora l'insieme $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ è unisolvente per l'interpolazione in S_n , e

$$\ell_j(z) = \frac{\det V(\xi_1, \dots, \xi_{j-i}, z, \xi_{j+i}, \dots, \xi_N; p)}{\det V(\xi_1, \dots, \xi_{j-i}, \xi_j, \xi_{j+i}, \dots, \xi_N; p)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

è il polinomio elementare di Lagrange tale per cui $\ell_j(\xi_k) = \delta_{jk}$ (delta di Kronecker). Dunque $\mathcal{L}_{S_n}f(z) = \sum_{j=1}^N f(\xi_j)\ell_j(z)$ è il polinomio interpolatore di Lagrange che interpola qualunque funzione f in $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$.

Nel caso in cui tali punti massimizzano il valore assoluto del determinante della matrice di Vandermonde in K (punti di Fekete) allora dalla (3.1) segue banalmente che $\|\ell_j\|_K \leq 1$ per ogni j . Di conseguenza, poiché vale

$$\|\mathcal{L}_{S_n}\| = \max_{z \in K} \sum_{j=1}^N |\ell_j(z)| = \Lambda_n, \quad (3.2)$$

la norma dell'operatore dell'interpolazione $\mathcal{L}_{S_n}: C(K) \rightarrow S_n$ è limitata superiormente dalla dimensione dello spazio dell'interpolazione

$$\|\mathcal{L}_{S_n}\| = \Lambda_n \leq N. \quad (3.3)$$

Calcolo dei punti di Fekete approssimati a partire da una WAM

Un possibile approccio per calcolare punti che abbiano proprietà simili a quelli di Fekete consiste nell'utilizzare una discretizzazione del dominio di partenza, passando quindi dall'ottimizzazione continua a quella combinatoria non lineare.

A tal proposito, in virtù alla proprietà 10, consideriamo una WAM di un insieme compatto polinomialmente determinante $K \subset \mathbb{C}^d$:

$$\mathcal{A}_n = a = \{a_1, \dots, a_M\}, \quad M \geq N = \dim(\mathbb{P}_n^d(K))$$

e costruiamo la matrice di Vandermonde

$$V = V(a; p) = V(a_1, \dots, a_M; p) := [p_j(a_i)], \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N$$

Calcolare i punti di Fekete approssimati equivale dunque a selezionare N righe di V tali che il valore assoluto del determinante della sottomatrice risultante $N \times N$ (cioè il volume generato da tali righe) sia massimo.

Il problema di selezionare una sottomatrice quadrata $N \times N$ con determinante massimo, data una matrice rettangolare $M \times N$, è molto complicato, ma può essere risolto numericamente grazie al seguente algoritmo che produce un insieme di nodi interpolanti discreti noti come *punti di Fekete approssimati*.

Algoritmo greedy AFP (Punti di Fekete Approssimati)

1. $V_0 = V(a; p); \quad T_0 = I;$
for $k = 0, \dots, s-1$
 $V_k = Q_k R_k; \quad P_k = \text{inv}(R_k);$
 $V_{k+1} = V_k(P_k); \quad T_{k+1} = T_k(P_k);$
end ;

2. $\text{ind} = []; \quad W = (V_s)^t;$
for $k = 1, \dots, N$ (algoritmo greedy per una sottomatrice di volume massimo)
- seleziona la colonna di norma più grande $\text{col}_{i_k}(W)$; $\text{ind} = [\text{ind}, i_k]$;
- rimuovi da ogni colonna di W la sua proiezione ortogonale su col_{i_k} ;
end ;

3. $\xi = \mathbf{a}(\text{ind})$; (estrazione dei punti di Fekete approssimati)

Nel punto 1, qualora non si disponga di basi polinomiali ben condizionate, note solo in casi sporadici come l'intervallo, il semplice, il disco, la sfera e l'ipercubo, si ovvia al potenziale *malcondizionamento* della matrice $V_0 = V(\mathbf{a}; \mathbf{p})$ mediante un cambio di base, ottenuto mediante un procedimento che fa uso della fattorizzazione QR della matrice di Vandermonde. Si suggerisce di non iterare tale processo più di due volte (un numero maggiore di iterazioni non migliora la *qualità* della base).

Nel punto 2 dell'algoritmo si individuano gli indici ind dei punti della mesh da estrarre, completando tale operazione nel punto 3 in cui si individuano i punti ξ approssimati di Fekete.

3.2 Punti di tipo Leja

Sia $K \subset \mathbb{C}^d$ un insieme compatto e supponiamo di avere una base ordinata $p = \{p_1, \dots, p_N\}$ per $\mathbb{P}_n^d(K)$.

I punti di Leja per K , fino al grado n , rispettando l'ordine della base p , sono una sequenza di punti $\xi_1, \dots, \xi_N \in K$ definiti come segue.

- Il primo punto ξ_1 è il punto che massimizza $|p_1|$ su K . Se c'è più di un punto allora ogni scelta diversa porta ad una diversa sequenza di punti di Leja.
- Supponiamo allora che i punti ξ_1, \dots, ξ_k siano già stati scelti. Il punto successivo allora ξ_{k+1} è quello che massimizza la funzione

$$z \mapsto |\det V(\xi_1, \dots, \xi_k, z; p_1, \dots, p_k, p_{k+1})|.$$

Di nuovo, se c'è più di un punto di massimo, ogni scelta porta ad una diversa sequenza.

In generale risulta molto complicato calcolare il massimo richiesto qualora K sia un *continuo* e quindi risulta di interesse introdurre una sua variante discreta.

Calcolo dei punti di Leja discreti estratti da una WAM

Consideriamo una mesh debolmente ammissibile \mathcal{A}_n di un insieme polinomialmente determinante K e applichiamo l'algoritmo per il calcolo dei punti di Leja discreti, di cui forniamo una breve implementazione in codice Matlab.

Algoritmo greedy DLP (Punti di Leja Discreti)

1. $\mathbf{a} = \mathcal{A}_n = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M\}$;
2. $\mathbf{A} = V(\mathbf{a}; \mathbf{p})$;
3. $[\mathbf{L}, \mathbf{U}, \sigma] = \text{LU}(\mathbf{A}, \text{'vector'})$; (σ è un vettore di permutazione)
4. $\text{ind} = \sigma(1:N)$; $\xi = \mathbf{a}(\text{ind})$; (estrazione dei punti di Leja discreti)

Se $V(\mathbf{a}; \mathbf{p})$ è malcondizionata, come può succedere se non sono disponibili basi ortogonali, possiamo semplicemente applicare lo step 1 dell'algoritmo AFP per effettuare un cambio di base.

Osserviamo inoltre che nel punto 3 l'algoritmo fattorizza la matrice \mathbf{A} data in input e ritorna come output le matrici triangolari \mathbf{L} ed \mathbf{U} . La condizione **vector** è un'indicazione che forniamo per il terzo output σ , mediante cui si fornisce un *vettore* che contiene in ordine il valore della riga in cui trova il pivot e conseguentemente la matrice di permutazione P , usata per la fattorizzazione $PA = LU$.

Per comprendere l'algoritmo sopra indicato è fondamentale osservare che il *pivoting parziale* permette agevolmente di scegliere di volta in volta per quale elemento della mesh si ottiene il massimo in valore assoluto tra tutti i determinanti.

Una volta individuati i pivot è immediato estrarre nel punto 4 dell'algoritmo i punti di Leja discreti così selezionati.

3.3 Sequenze di pseudo-Leja

Una sequenza di pseudo Leja per un insieme compatto $K \subset \mathbb{C}^d$ ($d \geq 1$) è una sequenza $(\xi_i) \subset K$ per la quale esiste una sequenza di numeri reali (M_i) che soddisfa:

1. $M_j |\det V(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i)| \geq \max_{z \in K} |\det V(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, z)|$ per qualunque $i \geq 1$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\max_{t_{n-1}(d) \leq i \leq N} M_i)^{1/n} = 1$
ove $t_n(d) := \binom{d+n}{d} = N$ è la dimensione dello spazio dei polinomi in d variabili complesse e di grado al massimo n .

Diremo che tale sequenza è una sequenza di pseudo-Leja con coefficiente di crescita di Edrei (M_j) . Osserviamo che una classica sequenza di Leja è una sequenza di pseudo-Leja con coefficiente di crescita di Edrei pari a 1.

Costruzione di sequenze di pseudo-Leja a partire da una WAM

Ci limitiamo alla costruzione di sequenze di pseudo-Leja estratte da una WAM per il caso $d = 1$.

Sia (\mathcal{A}_n) una mesh debolmente ammissibile con crescita (M_n) per un insieme compatto $K \subset \mathbb{C}$. Definiamo induttivamente una sequenza (ξ_i) come segue: scegliamo arbitrariamente $\xi_0 \in K$ e selezioniamo, uno dopo l'altro, i punti ξ_i da \mathcal{A}_n tale che

$$|\det V(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i)| = \max_{\xi \in \mathcal{A}_n} |\det V(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi)|,$$

per $i = 1, \dots, N$. Allora la sequenza (ξ_i) è una sequenza di pseudo-Leja con coefficiente di crescita (M_i) per K , dove $(M_i) = M_n$ per ogni $i = 1, \dots, N$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

L'algoritmo che troviamo qui di seguito, scritto in codice Matlab, ripropone in modo sintetico come costruire sequenze di pseudo-Leja a partire da una mesh ammissibile.

Algoritmo greedy PLP (Punti di pseudo-Leja)

1. $\mathbf{a} = \mathcal{A}_1 = [\mathbf{a}_1; \dots; \mathbf{a}_{M_1}]$; (punti della mesh per $\text{deg} = 1$)
 $[\text{val}, \text{index}] = \max(\text{imag}(\mathbf{a}))$; (seleziona il massimo)
 $\xi_0 = \mathbf{a}(\text{index})$; (scelgo il primo elemento)

 2. for $k = 1, \dots, \text{deg}$
 - genera i punti \mathbf{a}_i della mesh debolmente ammissibile \mathcal{A}_k
 - per ogni elemento di \mathcal{A}_k calcola $\text{diff} = \prod_{j=0}^{k-1} |\mathbf{a}_i - \xi_j|$;
 - seleziona l'elemento ξ che massimizza diff
 - $\xi_k = \xi$; (estrazione dei punti di pseudo-Leja approssimati)
- end

Il primo punto di pseudo-Leja, che rappresenta l'elemento di partenza dell'algoritmo, è scelto arbitrariamente tra i punti della mesh ammissibile di grado pari ad 1; in questo caso, nel punto 1, viene preso quello che ha parte immaginaria maggiore.

Per individuare i punti successivi viene generata, nel punto 2, una mesh ammissibile e viene estratto l'elemento che massimizza il determinante diff della matrice di Vandermonde, costruita con gli elementi già selezionati. Il nuovo punto viene quindi inserito nell'insieme, che costituirà l'insieme dei punti di pseudo-Leja approssimati, e si ripete la procedura descritta nel punto 2 fino ad arrivare al grado deg prefissato.

Capitolo 4

Mesh ammissibili di Chebyshev e costanti di Lebesgue

In questo capitolo studieremo come costruire mesh polinomiali ammissibili su curve trigonometriche a tratti del piano complesso, tramite punti di Chebyshev univariati. L'importanza di tali mesh è che possono essere utilizzate sia per l'estrazione dei punti di Fekete e di tipo Leja approssimati, sia per la valutazione della loro costante di Lebesgue.

4.1 Mesh polinomiali complesse di Chebyshev

I risultati proposti qui di seguito sono estratti dall'articolo [2].

Lemma 1. *Sia $\phi(t)$, con $t \in [a, b]$, un polinomio algebrico o trigonometrico a coefficienti complessi di grado al massimo ν (con $b-a \leq 2\pi$ nel caso trigonometrico).*

Denotiamo con \mathcal{T}_N l'insieme di N zeri di Chebyshev in $(-1, 1)$ ovvero

$$x_j = \cos((2j-1)\pi/2N), \quad 1 \leq j \leq N,$$

oppure l'insieme di $N+1$ estremi di Chebyshev in $[-1, 1]$,

$$x_j = \cos((j\pi)/N), \quad 0 \leq j \leq N.$$

Consideriamo i punti

$$X_\nu^m = \sigma(\mathcal{T}_N) \subset [a, b] \tag{4.1}$$

dove

$$N = m\nu, \quad \sigma(u) = \frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, \quad u \in [-1, 1] \tag{4.2}$$

nel caso algebrico, e

$$N = 2m\nu, \quad \sigma(u) = 2 \arcsin\left(u \sin\left(\frac{b-a}{4}\right)\right) + \frac{b+a}{2}, \quad u \in [-1, 1] \tag{4.3}$$

nel caso trigonometrico.

Allora, per ogni $\nu \geq 1, m > 1$ si ha che

$$\|\phi\|_{[a,b]} \leq c_m \|\phi\|_{X_\nu^m}, \quad c_m := \frac{1}{\cos(\pi/(2m))} \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Sia $t^* \in [a, b]$ tale che $|\phi(t^*)| = \|\phi\|_{[a,b]}$. Possiamo supporre che $\phi(t^*) \neq 0$, dal momento che per (4.4) vale banalmente che $\phi \equiv 0$. Definiamo il numero complesso $u = \overline{\phi(t^*)}/|\phi(t^*)|$ che appartiene alla circonferenza unitaria poiché

$$|u| = \left| \frac{\overline{\phi(t^*)}}{|\phi(t^*)|} \right| = \frac{|\overline{\phi(t^*)}|}{|\phi(t^*)|} = 1$$

per definizione di modulo in campo complesso. Osserviamo che

$$u\phi(t^*) = |\phi(t^*)|^2/|\phi(t^*)| = |\phi(t^*)|.$$

Definiamo ora $\psi(t) := u\phi(t)$. Vale dunque che:

- $|\psi(t)| = |u|\phi(t) = |\phi(t)|$;
- $\Im(\psi(t^*)) = 0$, poiché $\psi(t^*) = u\phi(t^*) = |\phi(t^*)|$ è reale, per l'osservazione precedente.

Dato che $\Re(\psi(t))$ è un polinomio algebrico o trigonometrico *reale*, possiamo scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$\|\phi\|_{[a,b]} = |\phi(t^*)| = \Re(\psi(t^*)) \leq \|\Re(\psi)\|_{[a,b]} \leq c_m \|\Re(\psi)\|_{X_\nu^m} \leq c_m \|\psi\|_{X_\nu^m} = c_m \|\phi\|_{X_\nu^m} \quad \square$$

Vediamo ora come questa struttura delle mesh ammissibili, calcolate a partire da polinomi algebrici o trigonometrici, può essere estesa alla loro "immagine".

Proposizione 2. *Sia Γ (l'immagine di) una curva parametrica complessa $z(t)$ con $t \in [a, b]$, dove $z(t)$ è un polinomio algebrico o trigonometrico di grado $k \geq 1$ (con $b - a \leq 2\pi$ nel caso trigonometrico). Allora la sequenza $\mathcal{A}_n^m(k) = z(X_{nk}^m)$ forma una mesh polinomiale ammissibile per Γ poiché la seguente disuguaglianza vale per ogni $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, $m > 1$*

$$\|p\|_\Gamma \leq c_m \|p\|_{\mathcal{A}_n^m(k)} \quad (4.5)$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione composta $\phi(t) = p(z(t))$ che è un polinomio algebrico o trigonometrico in $[a, b]$ a coefficienti complessi, di grado al massimo $\nu = nk$ che corrisponde al prodotto dei gradi delle due funzioni composte. La tesi si dimostra applicando il lemma precedente ed osservando che

$$\|p\|_\Gamma = \|\phi\|_{[a,b]} \leq c_m \|\phi\|_{X_{nk}^m} = c_m \|p\|_{\mathcal{A}_n^m(k)} \quad \square$$

Osserviamo come la proposizione appena vista può essere riscritta ampliando l'insieme dal quale estrarre le mesh ad una catena di curve parametriche.

Osservazione 1. *Sia la curva $\Gamma = \bigcup_{j=1}^s \Gamma_j$ una catena di archi algebrici o trigonometrici Γ_j di grado k_j su $[a_j, b_j]$, $1 \leq j \leq s$. Allora per ogni $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, $m > 1$*

$$\|p\|_\Gamma \leq c_m \|p\|_{\mathcal{A}_n^m}, \quad \mathcal{A}_n^m = \bigcup_{j=1}^s \mathcal{A}_n^m(k_j) \quad (4.6)$$

cioè \mathcal{A}_n^m è un'ottima mesh ammissibile per Γ , grazie alla proprietà dell'unione finita di mesh ammissibili. D'altra parte, tale \mathcal{A}_n^m è una mesh ammissibile anche per ogni dominio compatto $K \subset \mathbb{C}$ avente una curva chiusa di questo tipo come frontiera $\partial K = \Gamma$, grazie al principio del massimo modulo.

4.2 Calcolo delle costanti di Lebesgue

La proposizione successiva mostra che adeguate mesh ammissibili della forma (4.5) possono essere utilizzate per calcolare le costanti di Lebesgue, con precise limiti dell'errore. Ricordiamo prima di tutto, nel seguente lemma, la relazione tra la costante di Lebesgue e un generale operatore di proiezione (come ad esempio il polinomio di Lagrange, per quanto concerne il caso dell'interpolazione che stiamo trattando).

Lemma 2. *Sia $K \subset \mathbb{C}$ un insieme compatto e $\mathcal{L}_n: C(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un operatore di proiezione lineare tale che*

$$\mathcal{L}_n f(z) = \sum_{j=0}^n f(\xi_j) \phi_j(z),$$

dove $\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_n\} \in K$ e $\{\phi_j\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Inoltre, sia

$$\lambda_n(z) = \sum_{j=0}^n |\phi_j(z)|$$

la funzione di Lebesgue di \mathcal{L}_n .

Allora la costante di Lebesgue di \mathcal{L}_n , che coincide con la sua norma uniforme, è uguale alla norma-sup della funzione di Lebesgue in K

$$\Lambda_n = \|\mathcal{L}_n\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n f\|_K}{\|f\|_K} = \|\lambda_n\|_K = \|\lambda_n\|_{\partial K_{ext}}$$

Dimostrazione. La disuguaglianza $\|\mathcal{L}_n\| \leq \|\lambda_n\|_K$ è immediata osservando che

$$|\mathcal{L}_n f(z)| \leq \sum_{j=0}^n |f(\xi_j)| |\phi_j(z)| \leq \|f\|_{\Xi} \lambda_n(z) \leq \|f\|_K \lambda_n(z). \quad (4.7)$$

- Dobbiamo però dimostrare che vale l'uguaglianza, ovvero $\|\mathcal{L}_n\| = \|\lambda_n\|_K$. Consideriamo $z^* \in K$ tale che $\|\lambda_n\|_K = |\lambda_n(z^*)|$. Ora cerchiamo una funzione f^* su K tale che $f^*(\xi_j) = u_j = |\phi_j(z^*)|/\phi_j(z^*)$ per ogni j tale che $\phi_j(z^*) \neq 0$, e $\|f^*\|_K = 1$. Dal momento che $|u_j| = 1$ possiamo scrivere $u_j = e^{i\theta_j}$, dove $\theta_j \in [0, 2\pi)$, e la funzione così definita $g: \{\xi_j\} \rightarrow [0, 2\pi)$ tale che $g(\xi_j) = \theta_j$. Grazie all'estensione del teorema di Tietze, poiché g è banalmente continua su sottoinsiemi chiusi discreti $\{\xi_j\}$, in tali insiemi deve esistere un'estensione $\tilde{g} \in C(K)$ a valori in $[0, 2\pi)$. Allora $f^*(z) = e^{i\tilde{g}(z)} \in C(K)$ è la funzione richiesta, perché $f^*(\xi_j) = e^{i\tilde{g}(\xi_j)} = e^{i\theta_j} = u_j$ e $|f^*(z)| \equiv 1$.

- Per dimostrare che $\|\lambda_n\|_K = \|\lambda_n\|_{\partial K_{ext}}$ possiamo restringerci a domini compatti e quindi applicare il principio del massimo modulo per funzioni subarmoniche a λ_n poiché abbiamo appena dimostrato che $\|\lambda_n\|_K = \|\mathcal{L}_n\|$ e $|\phi_j|$ è subarmonica essendo il modulo di una funzione olomorfa (intera) e la somma di funzioni subarmoniche è subarmonica.

□

Proposizione 3. *Assumiamo che $\mathcal{L}_n: C(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ sia un operatore lineare di proiezione come nel Lemma 2. Allora le seguenti stime valgono per ogni $n \geq 1, m > 1$*

$$\|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} \leq \|\mathcal{L}_n\| \leq c_m \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} \quad , \quad (4.8)$$

e

$$0 \leq \|\mathcal{L}_n\| - \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} \leq (c_m - 1) \|\mathcal{L}_n\| \quad . \quad (4.9)$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima la (4.9).

La prima disuguaglianza è ovvia una volta dimostrata (4.8). La seconda si ottiene applicando la disuguaglianza (4.6) al polinomio $\mathcal{L}_n f$. Abbiamo quindi che

$$\|\mathcal{L}_n f\|_{\Gamma} = \|\mathcal{L}_n f\|_{\partial K_{ext}} \leq c_m \|\mathcal{L}_n f\|_{\mathcal{A}_n^m} \quad .$$

Dalla (4.7) notiamo che vale $|\mathcal{L}_n f(z)| \leq \|f\|_{\Xi} \lambda_n(z) \leq \|f\|_{\Gamma} \lambda_n(z)$ e quindi

$$\|\mathcal{L}_n f\|_{\Gamma} \leq c_m \|\mathcal{L}_n f\|_{\mathcal{A}_n^m} \leq c_m \|f\|_{\Gamma} \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} .$$

Dimostriamo ora la (4.8).

Da $\|\mathcal{L}_n f\|_{\Gamma} \leq c_m \|f\|_{\Gamma} \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}$ abbiamo immediatamente che

$$\|\mathcal{L}_n\| = \|\lambda_n\|_{\Gamma} \leq c_m \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}$$

e la disuguaglianza a destra è dimostrata.

Dal momento che vale $\|\lambda_n\|_{\Gamma} \geq \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}$ e $\|\mathcal{L}_n\| = \|\lambda_n\|_{\Gamma}$ abbiamo così dimostrato anche la prima disuguaglianza. □

Osservazione 2. *Notiamo che $c_m \rightarrow 1$ e quindi $\|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} \rightarrow \|\mathcal{L}_n\|$ per $m \rightarrow \infty$. Inoltre (4.9) dà una stima dell'errore relativo*

$$\frac{\|\mathcal{L}_n\| - \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}}{\|\mathcal{L}_n\|} \leq c_m - 1 = \frac{1 - \cos(\pi/(2m))}{\cos(\pi/(2m))} \sim \frac{\pi^2}{8m^2} \approx \frac{1.23}{m^2} \quad (4.10)$$

della costante di Lebesgue nella forma $\|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}$, mentre (4.8) da una stima rigorosa e calcolabile dell'errore assoluto

$$0 \leq \|\mathcal{L}_n\| - \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} \leq (c_m - 1) \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} .$$

Osservazione 3. *La struttura dell'operatore di proiezione include sia l'operatore di interpolazione, sia l'operatore per i minimi quadrati negli $M > n + 1$ nodi $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_M\}$ con pesi positivi $W = \{w_1, \dots, w_M\}$. Infatti, denotando con $\{\pi_k\}$,*

$1 \leq k \leq n + 1$ i polinomi ortonormali relativi al corrispondente prodotto scalare discreto

$$(f, g)_{L_W^2(\Xi)} = \sum_{j=1}^M w_j f(\xi_j) \overline{g(\xi_j)},$$

abbiamo che

$$\mathcal{L}_n f(z) = \sum_{k=1}^{n+1} (f, \pi_k)_{L_W^2(\Xi)} \pi_k(z) = \sum_{j=1}^M f(\xi_j) w_j K_n(z, \xi_j),$$

cioè $\phi_j(z) = w_j K_n(z, \xi_j)$ ove $K_n(z, v) = \sum_{k=1}^{n+1} \pi_k(z) \overline{\pi_k(v)}$ è il nucleo associato al prodotto scalare discreto. In questo caso i ϕ_j sono linearmente indipendenti pertanto formano un insieme di generatori di $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Capitolo 5

Risultati numerici

In quest'ultimo capitolo intendiamo illustrare numericamente quanto esposto in precedenza.

Prenderemo in esame alcuni domini in campo complesso e cercheremo di estrarre, grazie alla costruzione di mesh ammissibili di Chebyshev, i punti approssimati di Fekete (AFP), discrete-Leja (DLP) e pseudo-Leja (PLP), i cui algoritmi di calcolo sono stati definiti precedentemente.

Ci concentreremo poi sullo studio della loro costante di Lebesgue; in particolare vedremo come ricavarne una stima sia dall'alto che dal basso al variare di una tolleranza fornita dall'utente.

In seguito ne osserveremo l'andamento, per ciascuna diversa tipologia di punti di interpolazione, all'aumentare del grado della mesh.

A tal proposito è utile ricordare quanto visto nella Sezione 4.2.

Lemma 3. *La costante di Lebesgue Λ_n del polinomio interpolatore di Lagrange \mathcal{L}_n coincide con la sua norma uniforme*

$$\Lambda_n = \|\mathcal{L}_n\| = \|\lambda_n\|_{\partial K_{ext}} .$$

Dalla proposizione 3 abbiamo inoltre che

$$\|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} \leq \|\mathcal{L}_n\| \leq c_m \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} ,$$

quindi vale

$$\|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} \leq \|\lambda_n\|_{\partial K_{ext}} \leq c_m \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m} . \quad (5.1)$$

Notiamo che questa catena di disuguaglianze ci fornisce un intervallo per stimare la costante di Lebesgue se i punti appartengono alla frontiera dell'insieme compatto K considerato.

Avendo in mente l'obiettivo di calcolare la costante di Lebesgue una volta fornita una tolleranza `tol` ed una costante `m_pts` fissata, abbiamo aggiunto una *demo* alla suite introdotta nell'articolo [2]. Il valore `m_pts` definirà la mesh ammissibile di Chebyshev per l'estrapolazione dei punti di interpolazione, mentre una AM con un parametro potenzialmente diverso sarà costruita per il calcolo della costante di Lebesgue Λ_n .

Riassumiamo brevemente in un lemma come ricavare il fattore `m` legato alla mesh ammissibile per stimare Λ_n , con un errore relativo inferiore alla tolleranza `tol` richiesta dall'utente.

Corollario 2. Sia tol una tolleranza fissata dall'utente. Se

$$m \geq \left\lceil \frac{\pi}{2 \arccos(1/(\text{tol} + 1))} \right\rceil \quad (5.2)$$

allora

$$\frac{\|\mathcal{L}_n\| - \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}}{\|\mathcal{L}_n\|} \leq \text{tol}.$$

Dimostrazione. Visto che

$$\frac{\|\mathcal{L}_n\| - \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}}{\|\mathcal{L}_n\|} \leq c_m - 1 = \frac{1}{\cos(\pi/(2m))} - 1.$$

se imponiamo che

$$\frac{1}{\cos(\pi/(2m))} - 1 \leq \text{tol}$$

necessariamente

$$\frac{\|\mathcal{L}_n\| - \|\lambda_n\|_{\mathcal{A}_n^m}}{\|\mathcal{L}_n\|} \leq \text{tol}.$$

Con facili conti ricaviamo che basta sia

$$m \geq \left\lceil \frac{\pi}{2 \arccos(1/(\text{tol} + 1))} \right\rceil. \quad (5.3)$$

□

Di conseguenza, volendo stimare la costante di Lebesgue $\|\lambda_n\|$ a meno della tolleranza tol , utilizzeremo una mesh di controllo \mathcal{A}_n^m con

$$m = \left\lceil \frac{\pi}{2 \arccos(1/(\text{tol} + 1))} \right\rceil.$$

Procediamo prendendo in considerazione sei diversi domini dei quali forniamo uno studio dettagliato della relativa costante di Lebesgue.

5.1 Test numerici per l'interpolazione su alcuni domini complessi

In questa sezione testiamo quanto indicato sopra su alcuni domini complessi, prendendo in esame set di punti AFP, DLP e PLP.

La discussione verterà sulle costanti di Lebesgue di alcuni di questi insiemi, utili per l'interpolazione polinomiale fino a grado 50.

Esempio 1: Cardioide

La cardioide è una curva, con una sola cuspidi, che appartiene alla famiglia delle epicicloidi. Tale famiglia è composta da curve piane generate da un punto appartenente ad una circonferenza che ruota attorno ad un'altra circonferenza fissata, rimanendo sempre tangente ad essa.

Il suo nome è rappresentativo della sua forma, che appunto ricorda quella di un cuore, come possiamo vedere dalla figura 5.1.

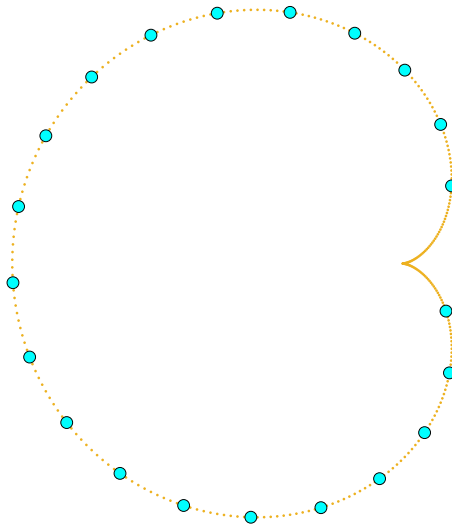


Figura 5.1: Cardioide: in arancione i punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev di grado 20 con `m_pts=4` e in azzurro i 21 punti di Fekete approssimati estratti dalla mesh, su un dominio avente come bordo esterno una cardioide.

L'equazione della curva in campo complesso è data da

$$z(t) = \cos t(1 - \cos t) + i(\sin t(1 - \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

I punti in arancione, che formano la cardioide, sono i punti della mesh ammissibile (AM) di Chebyshev di grado 20, la cui cardinalità è 320. La mesh è calcolata come suggerito dall'equazione (4.1), con costante fornita dall'utente (`m_pts`).

Tra questi punti vengono selezionati, mediante gli algoritmi descritti nel capitolo 4, i punti di interpolazione, evidenziati in azzurro. Nei nostri test considereremo i punti AFP (mostrati in figura), DLP e PLP.

Per stimare la costante di Lebesgue, come già detto in precedenza, viene ricalcolata la mesh fino al grado 50, ma questa volta il parametro `m` viene calcolato con la formula (5.3) a partire dalla tolleranza `tol` richiesta dall'utente (nei nostri test pari a 10^{-2}).

Il grafico tracciato nella figura 5.2 rappresenta l'andamento della stima della costante di Lebesgue al variare del grado $1, \dots, 50$.

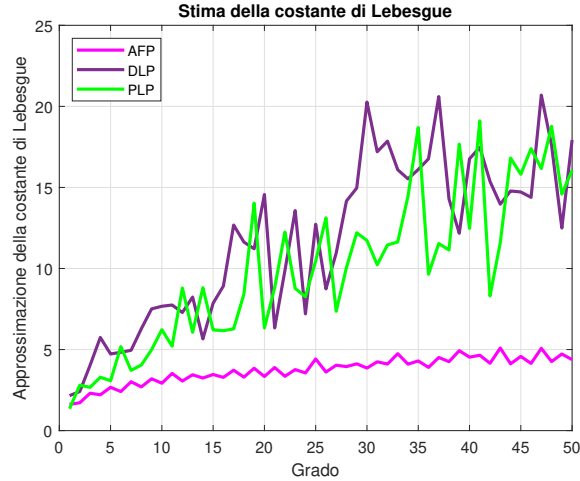


Figura 5.2: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi di interpolazione pari a $1, \dots, 50$, relativamente ai punti AFP (linea rosa), DLP (linea viola) e PLP (linea verde), su un dominio avente come bordo esterno una cardioide.

La stima della costante Λ_n viene calcolata prendendo il punto medio dell'intervallo definito da (5.1) che ha come estremi il limite inferiore e superiore della stessa.

Possiamo osservare dal grafico che in generale l'andamento della costante di Lebesgue è crescente; in particolare quella legata ai punti di Fekete approssimati ha un comportamento più regolare e presenta meno oscillazioni rispetto a quella dei punti di Leja e pseudo-Leja discreti.

È importante notare anche che per punti di Fekete approssimati la costante di Lebesgue è tendenzialmente minore rispetto alle altre due tipologie di punti di interpolazione.

Una conseguenza è che possiamo avere ad ogni grado una stima particolarmente favorevole dell'errore in norma infinito compiuto dall'interpolante di una funzione continua rispetto a quello di migliore interpolazione.

Nella tabella 5.1 sottostante sono riassunti i principali risultati connessi al calcolo della costante di Lebesgue per ciascuna tipologia di punti calcolati. In particolare nelle ultime tre righe possiamo leggere nell'ordine i valori della stima della costante di Lebesgue e gli estremi dell'intervallo in cui si trova il valore esatto, di cui la stima considerata ne è il punto medio.

<i>Punti di interpolazione</i>	<i>AFP</i>	<i>DLP</i>	<i>PLP</i>
Grado massimo	50	50	50
Tolleranza richiesta (τ_{01})	0.01	0.01	0.01
Fattore AM (m)	12	12	12
Stima Λ_{50}	4.378263	17.929563	16.055098
Limitazione inferiore Λ_{50}	4.359454	17.852539	15.986126
Limitazione superiore Λ_{50}	4.39772	18.006588	16.124069

Tabella 5.1: Tabella riassuntiva per la costante di Lebesgue della cardioide a grado 50.

Esempio 2: Rodonea

La rodonea è una curva piana appartenente alla categoria delle ipocicloidi. Il suo grafico è disegnato da un punto che si muove di moto oscillatorio sopra una retta, la quale ruota attorno al centro. L'equazione che descrive la rodonea in campo complesso è

$$z(t) = \cos(4t) \cos(t) + i \cos(4t) \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Anche in questo caso il nome ricorda la curva, che è simile ad una rosa.

Nella figura 5.3 sono rappresentati in arancione i punti della mesh ammissibile di Chebyshev di grado 20, calcolata con `m_pts=4`, di cardinalità 800. Tra questi vengono estratti i punti AFP, i punti DLP (evidenziati in azzurro in figura) e i punti PLP.

Possiamo osservare che i punti di interpolazione tendono a concentrarsi nella parte più esterna della curva, evitando invece il punto di auto-intersezione centrale.

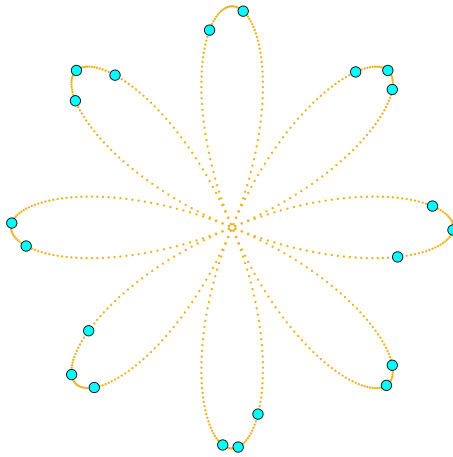


Figura 5.3: In arancione i punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev di grado 20 con `m_pts=4` e in azzurro i 21 punti di Leja discreti estratti dalla mesh, su un dominio avente come bordo esterno una rodonea.

Come prima, per studiare la costante di Lebesgue della curva in questione abbiamo calcolato la costante `m` a partire dalla tolleranza scelta dall'utente (per semplicità abbiamo posto `tol = 10-2`) e quindi i punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev fino al grado 50. Dopo aver estratto i tre diversi insiemi di punti di interpolazione abbiamo stimato la costante di Lebesgue per ciascuna tipologia.

Dal grafico riportato in figura 5.4 osserviamo che la costante di Lebesgue ha un comportamento simile sia per i punti AFP che per i punti DLP e PLP: globalmente l'andamento è crescente anche se piuttosto oscillante ed irregolare, soprattutto per i punti AFP.

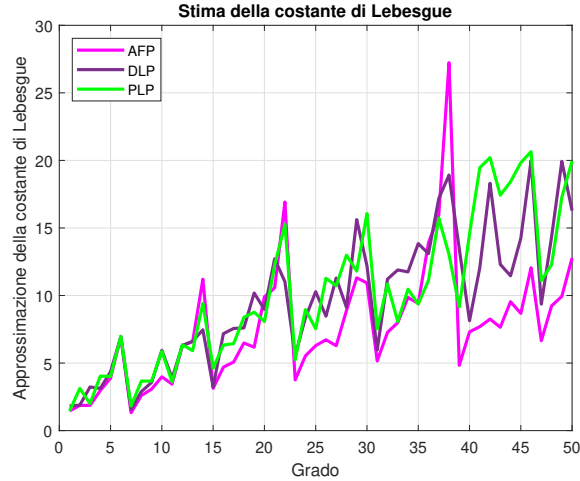


Figura 5.4: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi di interpolazione pari a $1, \dots, 50$, relativamente ai punti AFP (linea rosa), DLP (linea viola) e PLP (linea verde) su un dominio avente come bordo esterno una rodonea.

Nella tabella sottostante sono riportati i valori della costante di Lebesgue approssimata, a grado 50, per ciascun insieme di punti di interpolazione, con i rispettivi intervalli di esistenza del valore esatto.

<i>Punti di interpolazione</i>	<i>AFP</i>	<i>DLP</i>	<i>PLP</i>
Grado massimo	50	50	50
Tolleranza richiesta (<i>tol</i>)	0.01	0.01	0.01
Fattore AM (<i>m</i>)	12	12	12
Stima Λ_{50}	12.777049	16.279731	19.966901
Limitazione inferiore Λ_{50}	12.722159	16.209794	19.881124
Limitazione superiore Λ_{50}	12.831938	16.349667	20.052677

Tabella 5.2: Tabella riassuntiva per la costante di Lebesgue a grado 50 su un dominio avente come bordo esterno una rodonea.

Esempio 3: Sole

Il dominio in questione assume la forma di un sole poiché consiste in un disco unitario con otto segmenti di lunghezza che formano i raggi.

Il k -simo raggio è composto dai punti $r(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))$ con $r \in [1, 1.5]$ e $\theta_k = 2\pi k/8$, $k = 1, \dots, 8$.

In figura 5.5 sono raffigurati in arancione gli 800 punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev di grado 20 e in azzurro sono evidenziati i punti della mesh che costituiscono i 21 punti di interpolazione scelti, in questo caso i punti PLP.

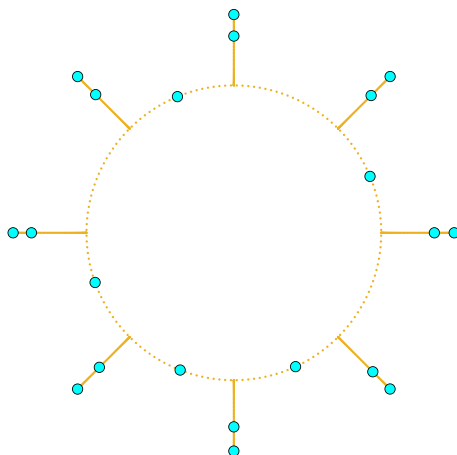


Figura 5.5: Sole: in arancione i punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev di grado 20 con $m_pts=4$ e in azzurro i 21 punti PLP estratti dalla mesh.

Anche qui, come per la rodonea, i punti assumono un comportamento di tipo elettrostatico, cioè tendono a distribuirsi sulla parte più esterna del dominio, quindi sui raggi, e, all'aumentare del grado, man mano si posizionano sulla circonferenza unitaria.

Dopo aver calcolato una seconda mesh ammissibile di Chebyshev per il dominio in questione, con costante m ricavata a partire dalla tolleranza, abbiamo osservato ancora una volta l'andamento delle costanti di Lebesgue al variare della tipologia di punti di interpolazione. Il grafico in figura 5.6 mostra il comportamento piuttosto simile delle tre costanti Λ_n : per i punti DLP e PLP l'andamento è crescente e con molte oscillazioni, mentre per i punti AFP le oscillazioni sono piccole fino al grado 30 e poi aumentano la loro ampiezza tanto da rendere irregolare il comportamento della costante di Lebesgue.

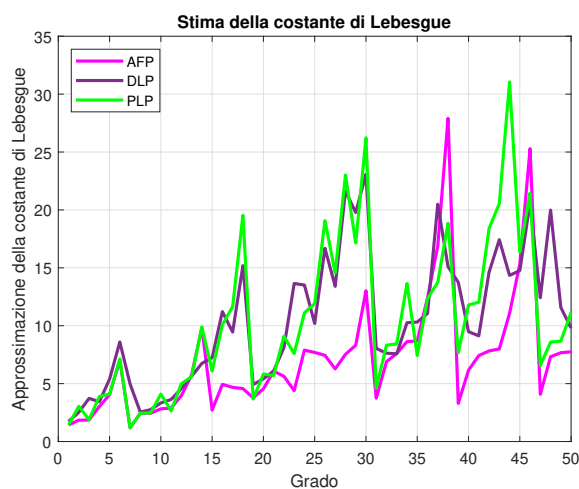


Figura 5.6: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi di interpolazione pari a $1, \dots, 50$, relativamente ai punti AFP (linea rosa), DLP (linea viola) e PLP (linea verde), su un dominio di tipo *sole*.

La tabella mostrata in 5.3 infatti evidenzia l'affinità della costante di Lebesgue,

al grado 50, per le tre categorie di punti: per i punti AFP il suo valore oscilla tra 7.71 e 7.78, per i punti DLP tra 9.76 e 9.84 e per i punti PLP tra 11.1 e 11.19.

<i>Punti di interpolazione</i>	<i>AFP</i>	<i>DLP</i>	<i>PLP</i>
Grado massimo	50	50	50
Tolleranza richiesta (<i>tol</i>)	0.01	0.01	0.01
Fattore AM (<i>m</i>)	12	12	12
Stima Λ_{50}	7.748980	9.799189	11.143997
Limitazione inferiore Λ_{50}	7.715690	9.757092	11.096123
Limitazione superiore Λ_{50}	7.782269	9.841285	11.191871

Tabella 5.3: Tabella riassuntiva per la costante di Lebesgue a grado 50 di alcuni set di punti di interpolazione del dominio a forma di *sole*.

Esempio 4: Deltoide

Il deltoide è un'ipocicloide con tre cuspidi, cioè una curva generata da un punto di una circonferenza che ruota sulla parte interna di un'altra circonferenza, fissata.

L'equazione parametrica che lo descrive in campo complesso è

$$z(t) = (2 \cos t - \cos 2t) + i(2 \sin t + \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

In figura 5.7 sono illustrati in arancione i 320 punti della mesh ammissibile di Chebyshev di grado 20 con *m_pts*=4, che disegnano la curva, e in azzurro i 21 punti di Fekete approssimati estratti dalla mesh.

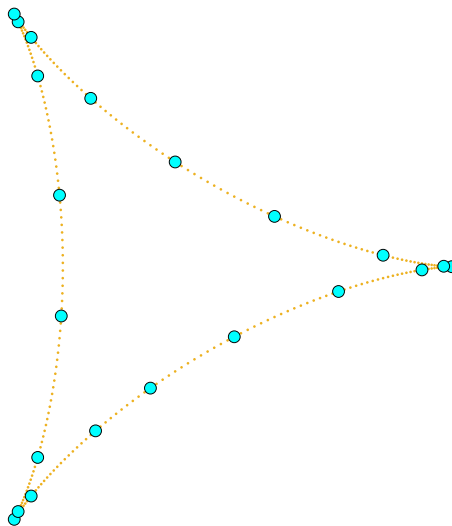


Figura 5.7: In arancione i punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev di grado 20 con *m_pts*=4 e in azzurro i 21 punti AFP estratti dalla mesh, su un dominio il cui bordo esterno è un deltoide.

Osserviamo che per la curva in esame i punti AFP si concentrano in modo evidente sulle tre cuspidi, a differenza della cardioide studiata precedentemente in cui avevamo visto come i punti fossero distribuiti equamente eccetto nel punto più interno della curva. La spiegazione per questo fenomeno è ancora una volta la tendenza

dei punti ad occupare "posizioni più esterne", mantenendo un comportamento di tipo elettrostatico.

Nel grafico in figura 5.8 osserviamo l'andamento della costante di Lebesgue approssimata, a partire dalla tolleranza fornita dall'utente, per la costruzione della mesh con la quale calcolare l'intervallo di esistenza del valore esatto di Λ_n .

È evidente come la stima della costante di Lebesgue per i punti AFP, cresca molto più lentamente rispetto a quella dei punti DLP e PLP, che cresce più rapidamente all'aumentare del grado.

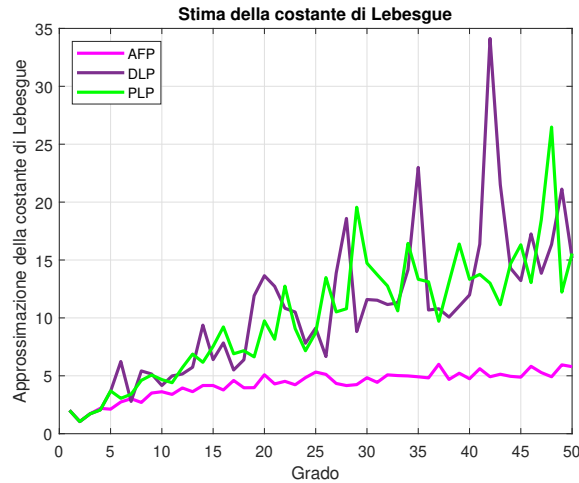


Figura 5.8: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi di interpolazione pari a $1, \dots, 50$, relativamente ai punti AFP (linea rosa), DLP (linea viola) e PLP (linea verde), su un dominio avente come bordo esterno un deltoide.

La tabella 5.4 infatti mostra la netta differenza tra il valore della costante Λ_n al grado 50 per i punti AFP e quella per punti di interpolazione DLP e PLP.

<i>Punti di interpolazione</i>	<i>AFP</i>	<i>DLP</i>	<i>PLP</i>
Grado massimo	50	50	50
Tolleranza richiesta (τ_{01})	0.01	0.01	0.01
Fattore AM (m)	12	12	12
Stima Λ_{50}	5.789374	15.172927	15.566460
Limitazione inferiore Λ_{50}	5.764503	15.107745	15.499588
Limitazione superiore Λ_{50}	5.814245	15.238109	15.633333

Tabella 5.4: Tabella riassuntiva per la costante di Lebesgue del deltoide a grado 50.

Esempio 5: Epicicloide

Come abbiamo già descritto in precedenza, l'epicicloide è una curva piana disegnata da un punto di una circonferenza che ruota sulla superficie esterna di una seconda circonferenza fissata. La rappresentazione parametrica di un'epicicloide generata da una circonferenza di raggio r che rotola su una circonferenza più grande di raggio $R = kr$, nel piano complesso, è data da

$$z(t) = (12 \cos t - 3 \cos 4t) + i(12 \sin t - 3 \sin 4t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nella figura 5.9 troviamo in arancione i 640 punti della mesh ammissibile di Chebyshev di grado 20, calcolata con $m_pts=4$, dalla quale sono stati estratti i 21 punti di Leja discreti, marcati in azzurro, calcolati con l'algoritmo DLP descritto nel capitolo 4.

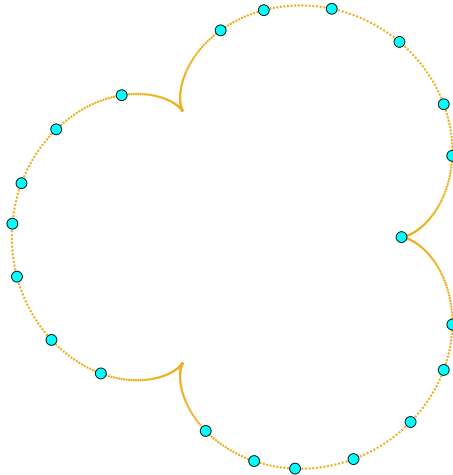


Figura 5.9: In arancione i punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev di grado 20 con $m_pts=4$ e in azzurro i 21 punti DLP estratti dalla mesh, nel caso di un dominio il cui bordo esterno è un epicicloide.

Qui di seguito, in figura 5.10, riportiamo il grafico che riassume il comportamento della costante di Lebesgue fino al grado 50 per le tre tipologie di punti di interpolazione. Possiamo notare che, anche in questo caso, la costante Λ_n dei punti di AFP cresce più lentamente rispetto ai punti di tipo DLP e PLP. Interpolando su questi punti possiamo quindi ottenere una stima molto vantaggiosa dell'errore in norma infinito compiuto dall'interpolante di una funzione continua rispetto a quello di migliore approssimazione.

Notiamo inoltre che, a differenza dei punti di Fekete approssimati, rappresentati ad esempio nella cardioide, i punti di Leja discreti occupano un posto, anche se molto di rado, nei punti interni (che coincidono con le cuspidi in questi due casi); tuttavia, per l'analisi appena fatta sulla costante di Lebesgue degli AFP, questi ultimi forniscono un'approssimazione migliore dei DLP evidenziati in figura.

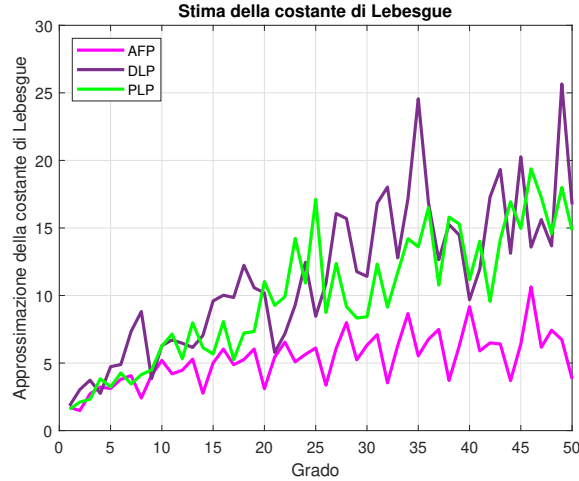


Figura 5.10: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi di interpolazione pari a $1, \dots, 50$, relativamente ai punti AFP (linea rosa), DLP (linea viola) e PLP (linea verde), su un dominio avente come bordo esterno una epicloide.

Nella tabella sottostante sono riportati i valori degli estremi dell'intervallo per la costante di Lebesgue Λ_{50} al grado 50, derivati dalla mesh ammissibile di Chebyshev con $m = 12$, calcolato a partire dalla tolleranza $\tau_{01} = 0.01$ scelta dall'utente. La figura 5.5 ci conferma che i punti di Fekete approssimati sono disposti in modo migliore rispetto ai punti di tipo Leja discreti poiché il valore della costante di Lebesgue per i primi è molto minore rispetto ai secondi.

<i>Punti di interpolazione</i>	<i>AFP</i>	<i>DLP</i>	<i>PLP</i>
Grado massimo	50	50	50
Tolleranza richiesta (τ_{01})	0.01	0.01	0.01
Fattore AM (m)	12	12	12
Stima Λ_{50}	3.832309	16.740271	14.824965
Limitazione inferiore Λ_{50}	3.815846	16.668356	14.761277
Limitazione superiore Λ_{50}	3.848773	16.812187	14.888652

Tabella 5.5: Tabella riassuntiva per la costante di Lebesgue dell'epicloide a grado 50.

Esempio 6: Curva di Lissajous

La curva di Lissajous presa in esame, proiettata nel piano complesso, è descritta dall'equazione parametrica

$$z(t) = \sin(t) + i \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nella figura 5.11 sono illustrati in arancione i 320 punti della mesh ammissibile di Chebyshev di grado 20, calcolata con $m_pts=4$ e in azzurro i 21 punti AFP estratti dalla mesh.

Possiamo osservare ancora una volta come i punti di Fekete approssimati tendano ad occupare le posizioni più esterne rispetto al centro della figura, che in questo caso coincide con il punto di auto-intersezione della curva.

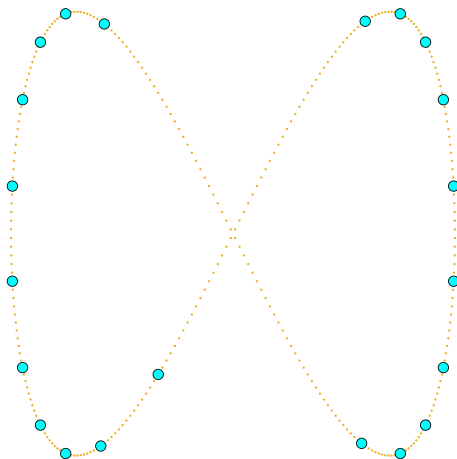


Figura 5.11: Lissajous: in arancione i punti della mesh polinomiale ammissibile di Chebyshev di grado 20 con $m_pts=4$ e in azzurro i 21 punti di Fekete estratti dalla mesh.

Come per gli esempi studiati precedentemente, con la tolleranza tol fornita dall'utente abbiamo ricavato il valore di m con cui calcolare la mesh ammissibile di Chebyshev di grado 50, sul dominio che stiamo analizzando.

Successivamente abbiamo stampato il grafico della figura 5.12, che riproduce l'andamento della costante di Lebesgue interpolando sui punti AFP (linea rosa), DLP (linee viola e verde rispettivamente), dal quale possiamo notare che la costante per i punti AFP è, ad ogni grado, minore delle restanti due. Inoltre, l'intervallo di valori in cui oscilla, se consideriamo i punti AFP, è molto piccolo. Questo implica che tali punti costituiscono un insieme di nodi quasi ottimale per l'interpolazione.

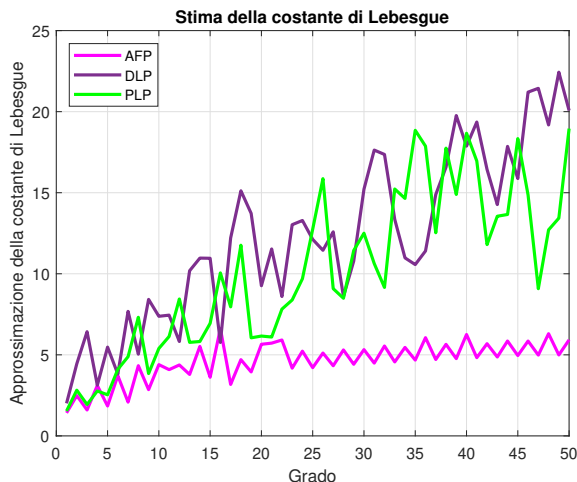


Figura 5.12: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi di interpolazione pari a $1, \dots, 50$, relativamente ai punti AFP (linea rosa), punti DLP (linea viola) e PLP (linea verde), su un dominio avente come bordo esterno una figura di Lissajous.

La tabella 5.6, in cui sono riportati i valori della costante di Lebesgue al grado 50, rimarca quanto appena detto, cioè che i punti di Fekete approssimati, per la

tolleranza scelta, sono associati ad una costante di Lebesgue che è molto più piccola di quella dei punti di Leja e pseudo-Leja discreti.

<i>Punti di interpolazione</i>	<i>AFP</i>	<i>DLP</i>	<i>PLP</i>
Grado massimo	50	50	50
Tolleranza richiesta (<code>tol</code>)	0.01	0.01	0.01
Fattore AM (<code>m</code>)	12	12	12
Stima Λ_{50}	5.924168	20.073011	18.954626
Limitazione inferiore Λ_{50}	5.898718	19.986779	18.873198
Limitazione superiore Λ_{50}	5.949618	20.159244	19.036054

Tabella 5.6: Tabella riassuntiva per la costante di Lebesgue della curva di Lissajous a grado 50.

5.2 Test numerici per l'approssimazione ai minimi quadrati

Dedicheremo quest'ultima sezione allo studio della costante di Lebesgue legata all'approssimazione ai minimi quadrati.

Come per l'interpolazione, anche in questo caso continua a valere il Lemma 3 che definisce un intervallo di esistenza per il valore esatto della costante di Lebesgue, tenendo presente che \mathcal{L}_n diventa l'operatore dei minimi quadrati di grado n , relativo al set di punti in esame.

Nello specifico prenderemo in considerazione alcuni dei domini complessi appena visti e, a partire dal calcolo della mesh ammissibile, cercheremo di analizzare il grafico della stima della costante Λ_n fino al grado 50.

A tal proposito abbiamo aggiunto una seconda *demo* alla suite introdotta nell'articolo [2] con lo scopo di calcolare una mesh di parametro `m` ricavato a partire da una tolleranza `tol` fornita dall'utente, come indicato nel Corollario 2.

Riassumiamo brevemente i passaggi eseguiti per studiare la costante di Lebesgue. In primis abbiamo calcolato la mesh ammissibile di Chebyshev di grado 50 e parametro `m_pts=4` prefissato, i cui punti sono distribuiti a formare il bordo del dominio preso in esame e saranno utilizzati per calcolare il valore numerico della costante di Lebesgue. In secondo luogo viene calcolata la costante `m`, per la seconda mesh, a partire dalla tolleranza (negli esempi abbiamo posto `tol = 10-2`) che si desidera imporre per limitare l'errore relativo associato a Λ_n . Infine, utilizzando questa seconda AM, viene determinata un'approssimazione della stessa costante come descritto nel Lemma 3.

Esempio 1 : Cardioide

Come primo esempio consideriamo la cardioide descritta dall'equazione parametrica

$$z(t) = \cos t(1 - \cos t) + i(\sin t(1 - \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Come accennato, si considerano AM di tipo Chebyshev quali mesh che definiscono l'operatore \mathcal{L}_n . Nei nostri test la tolleranza è stata fissata a $\text{tol} = 10^{-2}$ dunque la costante per la mesh ammissibile (utilizzata per il calcolo della stima della costante di Lebesgue) di grado 50, che ha cardinalità 2400, risulta essere $m = 12$.

Dal grafico in figura 5.13 possiamo osservare che la costante di Lebesgue ha un andamento crescente ma, a differenza del caso dell'interpolazione sui punti AFP, DLP e PLP, la crescita nel caso dell'approssimazione ai minimi quadrati avviene molto più lentamente.

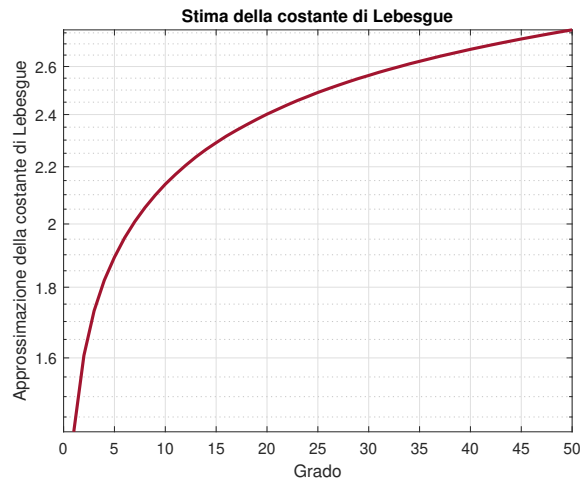


Figura 5.13: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi pari a $1, \dots, 50$, relativamente all'operatore dei minimi quadrati, per i punti della mesh, su un dominio avente come bordo esterno una cardioide.

Dalla figura 5.13 si vede che la costante di Lebesgue mantiene un valore molto piccolo per gradi inferiori al grado 50 fissato, dunque l'errore in norma infinito che si commette è ad ogni grado minore rispetto a quello legato all'interpolazione sui punti AFP, DLP e PLP (come si evince dalla tabella 5.7).

Notiamo inoltre che in questo specifico esempio il comportamento della costante Λ_n è molto regolare e privo di oscillazioni.

<i>deg</i>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>LS</i>	1.89	1.95	2.00	2.05	2.09	2.13	2.17	2.20	2.23	2.26
<i>AFP</i>	2.67	2.41	3.01	2.69	3.19	2.92	3.52	3.05	3.44	3.24
<i>DLP</i>	4.72	4.83	4.95	6.28	7.50	7.67	7.74	7.28	8.23	5.65
<i>PLP</i>	3.07	5.17	3.71	4.04	4.99	6.22	5.21	8.79	6.06	8.81

Tabella 5.7: Tabella riassuntiva per la stima della costante di Lebesgue della cardioide per i gradi $5, \dots, 14$.

Esempio 2 : Sole

Quale secondo esempio consideriamo il caso del dominio a forma di sole trattato in precedenza.

Anche in questo caso, si considerano AM di tipo Chebyshev quali mesh che definiscono l'operatore \mathcal{L}_n . Il valore della tolleranza è sempre fissato a 10^{-2} dunque il valore della costante m risulta essere pari a 12, ma in questo caso la mesh, che ha grado 50, è formata da 6000 punti pertanto la sua cardinalità è nettamente superiore a quella relativa all'esempio precedente.

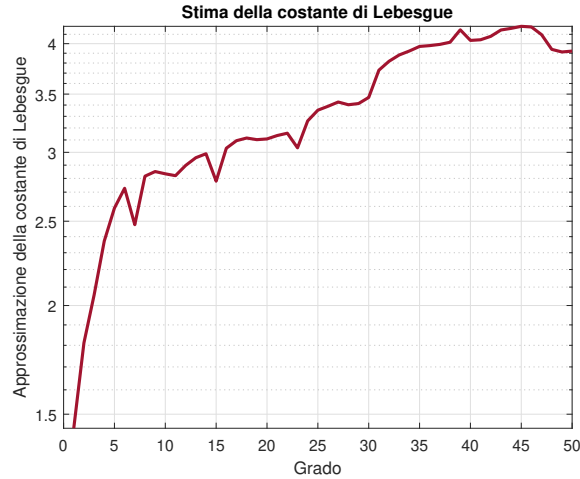


Figura 5.14: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi pari a $1, \dots, 50$, relativamente all'operatore dei minimi quadrati, per i punti della mesh, su un dominio di tipo *sole*.

Notiamo dal grafico in figura 5.14 che la costante di Lebesgue approssimata, all'aumentare del grado, cresce ma molto lentamente fino quasi a stabilizzarsi per valori del grado superiori a 35. Tuttavia, il suo andamento, in questo esempio, è meno regolare rispetto a quello osservato per la cardioide.

<i>deg</i>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>LS</i>	2.58	2.72	2.47	2.81	2.85	2.83	2.82	2.89	2.95	2.98
<i>AFP</i>	4.04	7.03	1.18	2.44	2.43	2.82	2.88	3.95	5.76	9.82
<i>DLP</i>	5.38	8.59	4.96	2.54	2.75	3.33	3.63	4.57	5.63	6.74
<i>PLP</i>	4.09	7.12	1.18	2.44	2.45	4.09	2.64	4.99	5.59	9.89

Tabella 5.8: Tabella riassuntiva per la stima della costante di Lebesgue del *sole* per i gradi $5, \dots, 14$.

La tabella 5.8 mostra il valore della stima della costante di Lebesgue per i gradi $5, \dots, 14$ per l'approssimazione ai minimi quadrati e l'interpolazione nei punti di Fe-kete, Leja e pseudo-Leja approssimati. È immediato osservare, al grado massimo, la notevole differenza che intercorre tra il il valore della costante di Lebesgue associata ai minimi quadrati e quella legata all'interpolazione nei punti AFP, DLP e PLP.

Esempio 3 : Epicicloide

Come ultimo esempio consideriamo il dominio avente come bordo esterno un'epicloide, la cui rappresentazione parametrica è

$$z(t) = (12 \cos t - 3 \cos 4t) + i(12 \sin t - 3 \sin 4t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Anche in questo caso la tolleranza è pari a 10^{-2} e la costante della mesh ammissibile di Chebyshev di grado 50, che ha cardinalità 4800, è uguale a 12.

La costante di Lebesgue, anche per l'epicicloide, cresce molto lentamente all'aumentare del grado, come possiamo vedere dalla figura 5.15, seppur con piccole oscillazioni.

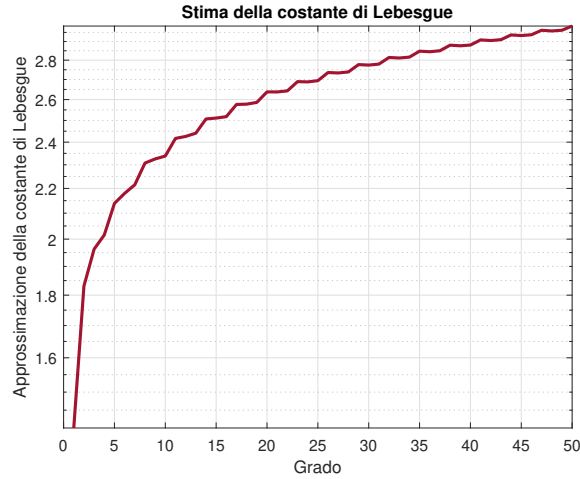


Figura 5.15: Andamento della stima della costante di Lebesgue, per gradi pari a $1, \dots, 50$, relativamente all'operatore dei minimi quadrati, per i punti della mesh, su un dominio avente come bordo esterno un'epicicloide.

Osservando la tabella riportata qui di seguito infatti possiamo notare che al grado 13, ad esempio, la costante di Lebesgue per l'operatore dei minimi quadrati è 2.44, un valore molto minore rispetto a quello associato all'operatore di interpolazione.

<i>deg</i>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>LS</i>	2.13	2.18	2.21	2.30	2.32	2.33	2.41	2.42	2.44	2.50
<i>AFP</i>	3.11	3.80	4.07	2.41	4.10	5.19	4.20	4.47	5.28	2.76
<i>DLP</i>	4.73	4.89	7.33	8.81	3.84	6.28	6.71	6.46	6.15	7.03
<i>PLP</i>	3.23	4.27	3.45	4.14	4.48	6.25	7.14	5.32	7.98	6.14

Tabella 5.9: Tabella riassuntiva per la stima della costante di Lebesgue dell'epicicloide per i gradi $5, \dots, 14$.

Bibliografia

- [1] L. Białas-Cieź, J.-P. Calvi, *Pseudo Leja sequences*, Ann. Mat. Pura Appl., 191 (2012), pp.53–75.
- [2] L. Białas-Cieź, D. J. Kenne, A. Sommariva, M. Vianello, *Chebyshev admissible meshes and Lebesgue constants of complex polynomial projections*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 443 (2024), 115766.
- [3] T. Bloom and L. Bos and J.-P. Calvi, N. Levenberg, *Polynomial Interpolation and Approximation in C^d* , Annales Polonici Mathematici, 106 issue 1 (2012), pp.53–81.
- [4] L. Bos, S. De Marchi, A. Sommariva, M. Vianello, *Computing multivariate Fekete and Leja points by numerical linear algebra*, SIAM J. Numer. Anal., 48 (2010), pp.1984–1999.
- [5] L. Bos, S. De Marchi, A. Sommariva, M. Vianello, *Weakly admissible meshes and discrete extremal sets*, Numer. Math. Theor. Meth. Appl., 4 (2011), pp.1-12.
- [6] L. Bos, N. Levenberg, *On the calculation of approximate Fekete points: the univariate case*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, 30 (2008), pp.377-397.
- [7] L. Bos and M. A. Taylor, B. A. Wingate, *Tensor product Gauss-Lobatto points are Fekete points for the cube*, Math. Comp., 70 issue 236 (2000), pp.1543–1547.
- [8] J.-P. Calvi, *Intertwining unisolvent arrays for multivariate Lagrange interpolation*, Advances in Computational Mathematics, 23 (2005), pp.393-414.
- [9] D. J. Kenne, *Multidimensional pseudo-Leja sequences*, <https://arxiv.org/html/2303.11871v2>.
- [10] J.P. Calvi, N. Levenberg, *Uniform approximation by discrete least squares polynomials*, J. Approx. Theory 152 (2008), pp.82–100.
- [11] D. J. Kenne, *Multidimensional pseudo-Leja sequences*, <https://arxiv.org/html/2303.11871v2>.
- [12] C. Presilla, *Elementi di analisi complessa: funzioni di una variabile*. Springer, 2011.
- [13] A. Sommariva, *Note del corso di Analisi Numerica*, (2023).

- [14] A. Sommariva, M. Vianello, *Computing approximate Fekete points by QR factorizations of Vandermonde matrices*, *Comput. Math. Appl.*, 57 (2009), pp.1324–1336.
- [15] V. Totik, *The Lebesgue constants for Leja points are subexponential*, *Journal of Approximation Theory*, 287 (2023), 105863.

Appendice A

Codici

In questa sezione vengono riportate in calce le principali routines utili nella realizzazione di questa tesi, con i relativi commenti ed eventuale documentazione. Gli stessi codici sono disponibili open-source al link:

https://github.com/FedericaFeletto/Codici_tesi_triennale

```
function demo_adaptive(example)

%-----
% OBJECT:
%-----
% This demo shows how to estimate the Lebesgue constant and its relative
% error at degree "deg" of the interpolation at pointset "pts" in a certain
% domain, with a fixed tolerance.
%-----
% INPUT:
%-----
%
% example: the variable defines the following domains
%
%   example 1: 'sun';
%   example 2: 'polygon';
%   example 3: 'cardioid';
%   example 4: 'curvpolygon';
%   example 5: 'uniondisks';
%   example 6: 'lune';
%   example 7: 'hypocycloid';
%   example 8: 'epicycloid';
%   example 9: 'epitrochoid';
%   example 10: 'limacon';
%   example 11: 'ellipse';
%   example 12: 'lissajous';
%   example 13: 'deltoid';
%   example 14: 'rhodonea';
%   example 15: 'habenicht_clover';
%   example 16: 'egg';
%   example 17: 'bifolium';
%   example 18: 'torpedo';
%
% deg: Admissible Mesh degree
%
```

```

%-----
% DATES:
%-----
% Written on March 19, 2024 (by F. Feletto and A. Sommariva).
% Checked on March 20, 2024 (by G. Elefante).
%
% Authors involved:
% L. Leokadia Białas-Cieź, G. Elefante, F. Feletto, D.J. Kenne,
% A. Sommariva, M. Vianello.
%-----
% LICENSE
%-----
% Copyright (C) 2023-
% L. Leokadia Białas-Cieź, G. Elefante, F. Feletto, D.J. Kenne,
% A. Sommariva, M. Vianello.
%
% This program is free software; you can redistribute it and/or modify
% it under the terms of the GNU General Public License as published by
% the Free Software Foundation; either version 3 of the License, or
% (at your option) any later version.
%
% This program is distributed in the hope that it will be useful,
% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
% GNU General Public License for more details.
%
% You should have received a copy of the GNU General Public License
% along with this program; if not, write to the Free Software
% Foundation, Inc., 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
%
% Authors:
%
% G. Elefante
% F. Feletto
% L. Leokadia Białas-Cieź,
% D.J. Kenne
% Alvise Sommariva <alvise@math.unipd.it>
% Marco Vianello <marcov@math.unipd.it>
%
% Date: March 19, 2024.
%-----

% SETTINGS.
if nargin < 1, example=14; end

warning off;
tol= 10^(-2); % Lebesgue constant relative error tolerance.
m_pts=4; % Constant of the AM set used for intp. points extraction.
maxdeg=20;
save_domain_plots=1; % 1. save figs with domain

% ----- Main Code Below -----

% DEFINE DOMAIN.
domain= define_domain(example);

% COMPUTE "m" SO THAT "tol=c_m-1" IMPLIES "err < tol".
den=2*acos(1/(1+tol));
m=ceil(pi/den);

```

```

% EXPERIMENTS RUN.
degV=1:maxdeg;
lejaV=0:2;
AM_cost=zeros(degV(end),3);
lebV_est=zeros(degV(end),3);
lebV_LB=zeros(degV(end),3);
lebV_UB=zeros(degV(end),3);
pts_leja={};

for leja=lejaV

% Displays.
fprintf('\n \t * Running tests on: ');
switch leja
    case 0
        set_leja_L='AFP';
    case 1
        set_leja_L='DLP';
    case 2
        set_leja_L='PLP';
end
disp(set_leja_L);
zAM_forall_deg={};
pts_forall_deg={};

% Actual experiments.
for deg=degV
    [pts,zAM_pts,domain]=interp_pointset(domain,leja,deg,m_pts);
    [leb_constant,zAM,C,domain]=evaluate_leb_const(domain,pts,deg,m);
    leb_LB=leb_constant;
    leb_UB=C*leb_LB;
    leL_est=(leb_LB+leb_UB)/2; % estimating Lebesgue constant for AFP/
    DLP/PLP
    lebV_est(deg,leja+1)=leL_est;
    lebV_LB(deg,leja+1)=leb_LB;
    lebV_UB(deg,leja+1)=leb_UB;
    AM_cost(deg,leja+1)=C;
    zAM_forall_deg{end+1}=zAM;
    pts_forall_deg{end+1}=pts;

    fprintf('\n \t -> deg: %2.0f leb: %1.3e m_pts: %2.0f m: %2.0f AM
    #: %6.0f',...
    deg,leb_constant,m_pts,m,length(zAM));

end

zAM_forall_deg{end+1}=zAM_forall_deg;
pts_leja{end+1}=pts_forall_deg;

% Results
fprintf('\n \n \t ..... Summary
.....');

fprintf('\n \t Example : %2.0f',example);
fprintf('\n \t Pointset : %s',set_leja_L);
fprintf('\n \t Max Degree : %2.0f',degV(end));
fprintf('\n \t Required tolerance (tol) : %3.6f',tol);
fprintf('\n \t AM factor (m_pts) : %2.0f',m_pts);
fprintf('\n \t AM card for maxdeg : %5.0f',length(
zAM_forall_deg{1,maxdeg}));

```

```

fprintf('\n \t
.....');
fprintf('\n \n');

end

% STATISTICS.
fprintf('\n \t .....AFP.....');
fprintf('\n \t Max Degree : %3.0f',degV(end));
fprintf('\n \t Leb. const. est. for maxdeg : %3.6f',lebV_est(maxdeg,1));
fprintf('\n \t Leb. const. LB for maxdeg : %3.6f',lebV_LB(maxdeg,1));
fprintf('\n \t Leb. const. UB for maxdeg : %3.6f',lebV_UB(maxdeg,1));
fprintf('\n \n');

fprintf('\n \t .....DLP.....');
fprintf('\n \t Max Degree : %3.0f',degV(end));
fprintf('\n \t Leb. const. est. for maxdeg : %3.6f',lebV_est(maxdeg,2));
fprintf('\n \t Leb. const. LB for maxdeg : %3.6f',lebV_LB(maxdeg,2));
fprintf('\n \t Leb. const. UB for maxdeg : %3.6f',lebV_UB(maxdeg,2));
fprintf('\n \n');

fprintf('\n \t .....PLP.....');
fprintf('\n \t Max Degree : %3.0f',degV(end));
fprintf('\n \t Leb. const. est. for maxdeg : %3.6f',lebV_est(maxdeg,3));
fprintf('\n \t Leb. const. LB for maxdeg : %3.6f',lebV_LB(maxdeg,3));
fprintf('\n \t Leb. const. UB for maxdeg : %3.6f',lebV_UB(maxdeg,3));
fprintf('\n \n');

% Type of pointset in figure 1:
Leja=2; % 1: AFP, 2: DLP, 3: PLP
set_Leja=pts_leja{Leja};
pts=set_Leja{end};

% PLOT.

% A. Lebesgue constants plots
clear_figure(1);
fig=figure(1);
plot(real(zAM_pts),imag(zAM_pts),'.','color',[0.9290 0.6940 0.1250],'
MarkerSize',4); hold on;
plot(real(pts),imag(pts),'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','c','
MarkerSize',6);
axis equal;
axis off;
axis tight;
set(gca,'xtick',[])
set(gca,'ytick',[])
hold off;

if save_domain_plots
print(fig,'example.eps','-depsc');
savefig('example.fig');
end

% B. Plot domain and pointsets
clear_figure(2);
fig=figure(2);

```



```

plot(degV(:),lebV_est(:,1),'m','Linewidth',2); hold on;
plot(degV(:),lebV_est(:,2),'color',[0.4940 0.1840 0.5560],'Linewidth',2);
    hold on;
plot(degV(:),lebV_est(:,3),'g','Linewidth',2); hold on;
title('Lebesgue constant estimate');
xlabel('Degree'); ylabel('Lebesgue constants approximation');
legend('AFP','DLP','PLP','Location','northwest');
grid on;
hold on;

if save_domain_plots
print(fig,'leb_const_est.eps','-depsc');
savefig('leb_const_est.fig');
end

function clear_figure(nfig)

h=figure(nfig);
f_nfig=ishandle(h)&&strcmp(get(h,'type'),'figure');
if f_nfig
    clf(nfig);
end

```

```

function demo_adaptive_LS(example)

%-----
% OBJECT
%-----
% This demo shows how to estimate the Lebesgue constant and its relative
% error at degree "deg" of LS-AM pointset "pts" in a certain
% domain, with a fixed tolerance.
%-----
% INPUT
%-----
%
% example: the variable defines the following domains
%
%   example 1: 'sun';
%   example 2: 'polygon';
%   example 3: 'cardioid';
%   example 4: 'curvpolygon';
%   example 5: 'uniondisks';
%   example 6: 'lune';
%   example 7: 'hypocycloid';
%   example 8: 'epicycloid';
%   example 9: 'epitrochoid';
%   example 10: 'limacon';
%   example 11: 'ellipse';
%   example 12: 'lissajous';
%   example 13: 'deltoid';
%   example 14: 'rhodonea';
%   example 15: 'habenicht_clover';
%   example 16: 'egg';
%   example 17: 'bifolium';
%   example 18: 'torpedo';
%
% deg: Admissible Mesh degree
%
%-----
% DATES:
%-----
% Written on March 19, 2024 (by F. Feletto and A. Sommariva).
% Checked on March 20, 2024 (by G. Elefante).
%
% Authors involved:
% L. Leokadia Białas-Cieź, G. Elefante, F. Feletto, D.J. Kenne,
% A. Sommariva, M. Vianello.
%-----
% LICENSE
%-----
% Copyright (C) 2023-
% L. Leokadia Białas-Cieź, G. Elefante, F. Feletto, D.J. Kenne,
% A. Sommariva, M. Vianello.
%
% This program is free software; you can redistribute it and/or modify
% it under the terms of the GNU General Public License as published by
% the Free Software Foundation; either version 3 of the License, or
% (at your option) any later version.
%
% This program is distributed in the hope that it will be useful,
% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
% GNU General Public License for more details.
%

```

```

% You should have received a copy of the GNU General Public License
% along with this program; if not, write to the Free Software
% Foundation, Inc., 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
%
% Authors:
%
% G. Elefante
% F. Feletto
% L. Leokadia Białas-Cieź,
% D.J. Kenne
% Alvise Sommariva <alvise@math.unipd.it>
% Marco Vianello <marcov@math.unipd.it>
%
% Date: March 19, 2024.
%-----

% SETTINGS.
if nargin < 1, example=1; end

warning off;
tol= 10^(-2); % Lebesgue constant relative error tolerance.
m_pts=4;
mindeg=1;
maxdeg=50;
save_domain_plots=1; % 1. save figs with domain

% ----- Main Code Below -----

% DEFINE DOMAIN.
domain= define_domain(example);

% COMPUTE "m" SO THAT "tol=c_m-1" IMPLIES "err < tol".
den=2*acos(1/(1+tol));
m=ceil(pi/den);

% EXPERIMENTS RUN.
degV=mindeg:maxdeg;
AM_cost=zeros(degV(end),1);
lebV_LB=zeros(degV(end),1);
lebV_UB=zeros(degV(end),1);
lebV_est=zeros(degV(end),1);

% Actual experiments.
for deg=degV

    % Below:
    % leb_LB, leb_UB: Lebesgue constant bounds
    % lebL_est      : (leb_LB+leb_UB)/2
    % leb_LB       : fine approximation of Lebesgue constant.

    pts=complex_AM(domain,deg,m_pts);
    [leb_LB,zAM,C,domain]=evaluate_leb_const(domain,pts,deg,m);
    leb_UB=C*leb_LB;
    lebL_est=(leb_LB+leb_UB)/2; % estimating Lebesgue constant
    lebV_est(deg,1)=lebL_est;
    lebV_LB(deg,1)=leb_LB;
    lebV_UB(deg,1)=leb_UB;
    AM_cost(deg,1)=C;
end

```

```

fprintf('\n \t -> deg: %3.0f leb: [%1.3e , %1.3e] m_pts: %3.0f m:
      %3.0f AM#: %7.0f',...
      deg,leb_LB,leb_UB,m_pts,m,length(zAM));

end

% Results.

fprintf('\n \n \t ..... Summary .....');
fprintf('\n \t Pointset AM');
fprintf('\n \t Example : %2.0f',example);
fprintf('\n \t Max Degree : %3.0f',degV(end));
fprintf('\n \t Required tolerance (tol) : %1.5f',tol);
fprintf('\n \t AM factor (m_pts) : %6.0f',m_pts);
fprintf('\n \t .....');
fprintf('\n \n');

% STATISTICS.

fprintf('\n \t .....LS.....');
fprintf('\n \t Max Degree : %3.0f',degV(end));
fprintf('\n \t Leb. const. est. for maxdeg : %3.6f',lebV_est(maxdeg,1));
fprintf('\n \t Leb. const. LB for maxdeg : %3.6f',lebV_LB(maxdeg,1));
fprintf('\n \t Leb. const. UB for maxdeg : %3.6f',lebV_UB(maxdeg,1));
fprintf('\n \n');

% PLOT.

% A. Plot pointset
clear_figure(1);
fig=figure(1);
plot(real(zAM),imag(zAM),'.','color',[0.9290 0.6940 0.1250],'MarkerSize',4)
; hold on;
axis equal;
axis off;
axis tight;
set(gca,'xtick',[])
set(gca,'ytick',[])
hold off;

if save_domain_plots
print(fig,'example_LS.eps','-depsc');
savefig('example_LS.fig');
end

% B. Lebesgue constants plots
clear_figure(2);
fig=figure(2);
semilogy(degV(:),lebV_est(:,1),'color',[0.6350 0.0780 0.1840],'Linewidth',
,2); hold on;
title('Lebesgue constant estimate');
xlabel('Degree'); ylabel('Lebesgue constants approximation');
grid on;
hold on;

if save_domain_plots
print(fig,'leb_const_est_LS.eps','-depsc');
savefig('leb_const_est_LS.fig');
end

```

```
function clear_figure(nfig)

h=figure(nfig);
f_nfig=ishandle(h)&&strcmp(get(h,'type'),'figure');
if f_nfig
    clf(nfig);
end
```