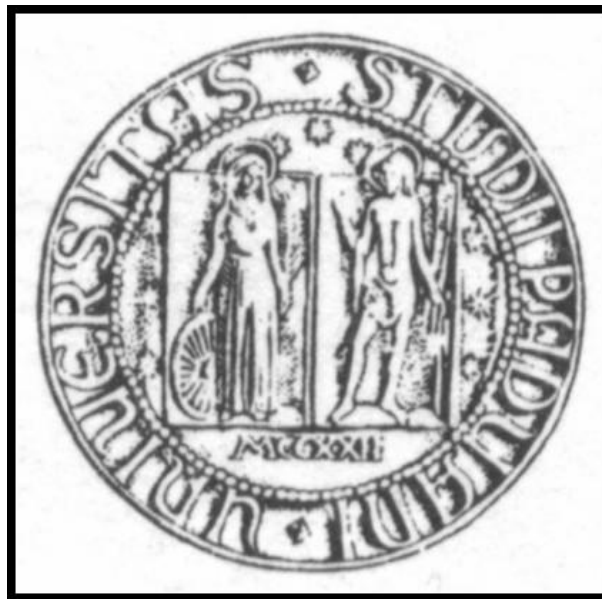


Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E
APPLICATA

Globalizzazione dell'Ottica Geometrica
e di Fresnel

Singolarità di Proiezione e Caustiche



Relatore: Ch.mo Prof. FRANCO CARDIN

Laureando: ALBERTO LOVISON

Anno Accademico 1998-1999

Introduzione

Premessa

In questa tesi si affronta uno studio sistematico di rivisitazione dell'ottica ondulatoria basato sull'equazione di Helmholtz

Equazione di Helmholtz

$$\boxed{(\Delta + k^2 n^2(\mathbf{q})) u(\mathbf{q}, k) = 0,}$$

con particolare enfasi su taluni aspetti legati alla ricerca di soluzioni globalmente definite e alle ostruzioni all'esistenza di esse: le *caustiche*. Le strutture simplettiche si sono rivelate il contesto adeguato nel quale inserire questo studio.

Cenni storici

Strutture simplettiche comparvero per la prima volta, almeno implicitamente, in un lavoro di Lagrange sulle variazioni dei parametri orbitali dei pianeti in meccanica celeste.¹

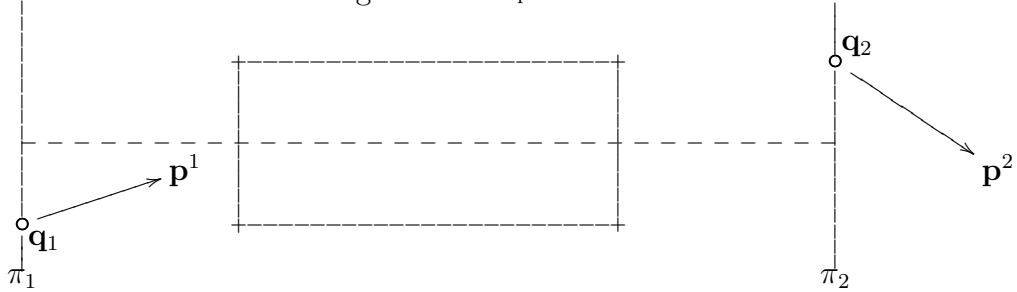
Certamente, esse trovarono una collocazione importante nella fisica con il lavoro di William Hamilton, scaturito proprio dallo studio dell'ottica. Il suo primo lavoro, intitolato *Caustics*, fu presentato nel 1823 al Dr. John Brinkley, il primo astronomo reale di Irlanda. Lo scritto finale, *Theory of Systems of Rays*², fu pubblicato nel 1828, nelle *Transactions of the Royal Irish Academy*.

Il lavoro di Hamilton tratta essenzialmente lo studio delle trasformazioni di un insieme di raggi luminosi, quando queste siano indotte dall'attraversamento di un sistema ottico, ovvero un sistema di lenti, specchi o spazi vuoti, o più in generale una regione dello spazio riempita con un mezzo di trasparenza non omogenea, cioè avente indice di rifrazione $n(\mathbf{q})$ dipendente dal punto.

¹cfr. [WEINSTEIN, 1977]

²[HAMILTON]

Figura 1: Un tipico sistema ottico.



Con la scelta di appropriati sistemi di coordinate sul sistema di raggi entrante e sul sistema di raggi uscente, Hamilton dimostrò che la trasformazione indotta da un sistema ottico è un *diffeomorfismo simplettico*.

Trasformazioni
Canoniche

Naque così il concetto di *trasformazione canonica*, seguito da quello di *funzione generatrice*, che in questa accezione venne battezzata da Hamilton *caratteristica*, essendo questa dipendente solamente dalle caratteristiche fisiche del sistema ottico.

Alcuni anni più tardi le strutture simplettiche acquisirono una posizione centrale nella fisica matematica quando lo stesso Hamilton realizzò che il suo metodo si applicava inalterato allo studio della meccanica. La *Meccanica Hamiltoniana* fu poi sviluppata da altri grandi matematici del XIX secolo, come Jacobi e Poincaré, e divenne un potente ed elegante strumento per l'analisi e la soluzione dei problemi meccanici.

Equazione
dell'Iconale

Ma torniamo all'Ottica Hamiltoniana. La teoria di Hamilton permette di descrivere elegantemente la struttura geometrica di un fascio coerente di raggi. Essa si può impostare attorno all'*equazione dell'iconale*:

$$|\nabla_{\mathbf{q}}\varphi(\mathbf{q})|^2 - n^2(\mathbf{q}) = 0$$

che, appunto, è una equazione di tipo Hamilton-Jacobi di Hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{q})$.

La teoria che si ottiene è di natura essenzialmente geometrica, nel senso che non offre informazioni sul contenuto fisico del concetto di raggio. Le soluzioni sono sottovarietà di T^*Q , rigate (generate) dalle *bicaratteristiche*. Queste sono il fascio coerente delle soluzioni del sistema di equazioni canoniche associato all'equazione classica di Hamilton-Jacobi. Proiettando su Q queste soluzioni si ottengono le *caratteristiche*, ovvero i *raggi*.

Caustiche

La caustica, in questo contesto, è l'involuppo del sistema dei raggi. Essendo la caustica una regione dello spazio dove un tubo di raggi si restringe fintantoché la sua sezione non si annulla (cfr. Figura), ogni teoria geo-

metrica dell'ottica deve prevedere sulla caustica una concentrazione infinita dell'intensità della radiazione luminosa.

Se la caustica è formata da luce solare, viene accompagnata da calore radiante: questo ne spiega l'etimologia.

La teoria ondulatoria della luce, grazie all'esperienza di Young (circa 1800) ed al lavoro di Fresnel (1818), ricevette in quel periodo forti legittimazioni, mostrandosi più accurata della teoria corpuscolare. Alla radiazione luminosa venivano associate quantità complesse (i concetti di fase e ampiezza dell'onda) e comparivano rappresentazioni integrali delle soluzioni.

Questa teoria permette di descrivere tutti quei fenomeni legati all'interferenza e alla diffrazione che sono inspiegabili dal punto di vista corpuscolare. In particolare, ricordando la questione delle caustiche, essa permette di trattarle consistentemente, senza le inevitabili singolarità che si incontrano usando una teoria puramente geometrica. Non è un caso che la presenza delle caustiche sia accompagnata da articolate figure di diffrazione, come si osserva ad esempio nelle Figure 5 e 3. Queste figure rimpiccioliscono al diminuire della lunghezza d'onda, lasciando il posto ad un'unica curva dalla bruciante intensità.

Le tecniche dell'Ottica Ondulatoria sono applicabili anche nella risoluzione dell'equazione di Schrödinger. Ciò è particolarmente interessante se ricordiamo quanto detto riguardo all'applicazione della teoria delle trasformazioni canoniche alla meccanica. Riportiamo a tale proposito quanto affermano Guillemin e Sternberg:³

È ben noto che i fondatori della “meccanica ondulatoria”, che spinsero la loro ricerca nella direzione di ciò che oggi chiamiamo “meccanica quantistica”, erano guidati da una analogia: sentivano che esattamente come esisteva un'ottica ondulatoria che era

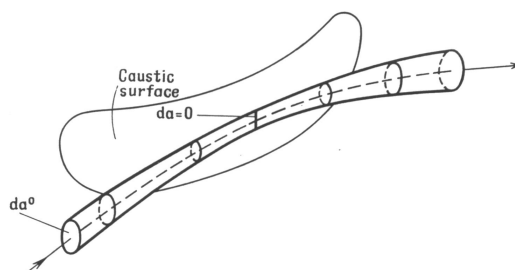


Figura 2: La sezione del tubo di raggi si annulla sulla superficie della caustica

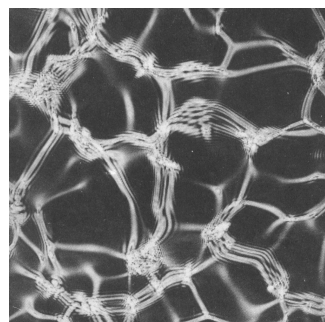


Figura 3: Effetti di diffrazione attorno alle caustiche prodotte da un laser che attraversa un liquido turbolento.

³[GUILLEMIN-STERNBERG, 1984] p.75

una teoria fisica più accurata dell'ottica geometrica di Hamilton, doveva esistere una meccanica ondulatoria stante nella stessa relazione con la meccanica classica.

Fase Stazionaria La relazione di cui si sta parlando è quella di essere una teoria il limite ad onde corte dell'altra. Questa relazione si materializza nel Principio della Fase Stazionaria che in meccanica quantistica prende il nome di *metodo di Wentzel-Kramers-Brillouin*, o *metodo WKB*.

Integrali Oscillanti La formulazione moderna dell'ottica ondulatoria è la teoria degli *integrali oscillanti* di Maslov, ed è volta alla ricerca di soluzioni globali, in particolare ad una opportuna gestione del passaggio attraverso le caustiche. Ne emerge una una teoria asintotica ($k \rightarrow +\infty$), del tutto idonea a descrivere tali fenomeni ad alta frequenza. Talvolta, la rimozione del carattere di approssimazione-asintoticità è riconducibile alla più completa (ma inevitabilmente antieconomica) teoria degli Operatori Integrali di Fourier.⁴

Sottovarietà Lagrangiane L'ambiente matematico conveniente alla ricerca di soluzioni globali per l'equazione di Hamilton-Jacobi è la teoria delle *sottovarietà Lagrangiane*⁵, che è un importante capitolo della geometria simplettica. Il problema della parametrizzazione di queste sottovarietà è la teoria delle *Famiglie di Morse*⁶.

Argomenti principali della tesi

Qui di seguito enumeriamo alcuni argomenti trattati in questa tesi nella cui esposizione si utilizzano idee e tecniche che per alcuni aspetti si distinguono da una trattazione tradizionale.

1. Una generalizzazione del concetto di Problema di Cauchy Geometrico per l'equazione di Hamilton-Jacobi (esso stesso generalizzazione del Problema di Cauchy Classico), che consiste nell'estensione a dati iniziali su sottovarietà di Q di codimensione qualsiasi. (Capitolo 1, Sez 2.)
2. Uno studio esaustivo sulla equivalenza tra le parametrizzazioni delle sottovarietà Lagrangiane. Si è cercato di esporre in modo esteso e approfondito quanto contenuto nei Capitoli 16 e 17 di [ARNOLD-ZADE-VARCHENKO, 1985] dimostrando vari lemmi e dettagli lì lasciati al lettore. (Capitolo 2, Sez. 1 e 2.)

⁴cfr. [HÖRMANDER, 1971] e [DUISTERMAAT, 1973]

⁵cfr. [DUISTERMAAT, 1974] e [ARNOLD-ZADE-VARCHENKO, 1985]

⁶cfr. [WEINSTEIN, 1977], [TULCZYJEW, 1975] e [BENENTI & TULCZYJEW, 1979]

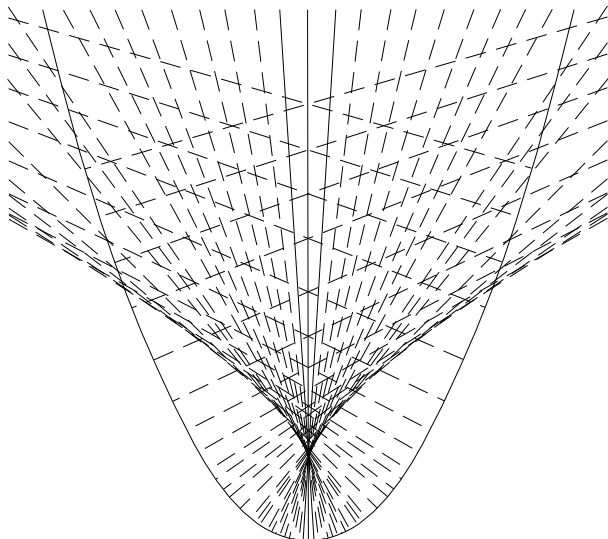


Figura 4: Aspetto geometrico del problema delle caustiche: involuppo dei raggi uscenti da una superficie parabolica.

3. La presentazione di un argomento, tuttora in fase di studio, sulla possibilità di costruire parametrizzazioni globali tramite l'adozione di infiniti parametri ausiliari, esibendo un caso interessante nel quale è possibile ridurre tali parametri ad un numero finito con una tecnica di Punto Unito. Una promettente applicazione di tali parametrizzazioni è proposta per l'integrale di Feynman. (Capitolo 2, Sez. 3.)
4. Un risultato apparentemente originale di Teoria Asintotica degli Integrali Rapidamente Oscillanti, consistente in una stima quantitativa dell'applicabilità del Metodo della Fase Stazionaria in relazione alla lunghezza d'onda della luce considerata. (Capitolo 4, Sez. 1)

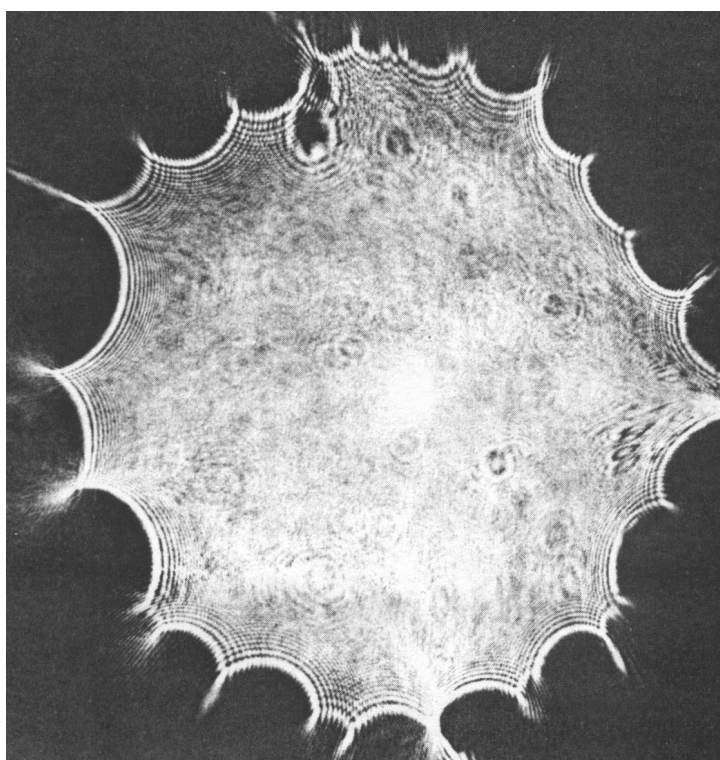


Figura 5: Aspetto ondulatorio del problema delle caustiche: effetti di diffrazione prodotti da luce monocromatica passante per una goccia d'acqua adagiata su di una lastra di vetro.

Indice

Introduzione	i
Premessa	i
Cenni storici	i
Argomenti principali della tesi	iv
1 Nozioni fondamentali di Meccanica Hamiltoniana	1
1.1 Cenni di strutture simplettiche su varietà	1
1.1.1 Sottovarietà Lagrangiane	2
1.1.2 Equazioni di Hamilton	3
1.2 Problemi di Cauchy per l'Equazione Classica di Hamilton-Jacobi	5
1.2.1 Problema di Cauchy classico	5
1.2.2 Problema di Cauchy geometrico	5
1.2.3 Metodo delle caratteristiche	9
2 Sottovarietà Lagrangiane e loro Parametrizzazioni	11
2.1 Il Teorema di Maslov-Hörmander: Esistenza delle Famiglie di Morse	11
2.1.1 Funzioni Generatrici	11
2.1.2 Famiglie Generatrici e Famiglie di Morse	14
2.1.3 Supplemento: Esistenza di Piani Lagrangiani diffeomorfi a sottovarietà Lagrangiane arbitrarie	15
2.2 Equivalenza tra sottovarietà Lagrangiane	19
2.2.1 Preliminari: Fibrazione Ausiliaria e Spazio Misto	19
2.2.2 Equivalenza di Sottovarietà Lagrangiane	22
2.3 Equivalenza di Famiglie di Morse	26
2.3.1 Equivalenza di Famiglie di Morse	26
2.3.2 Dimostrazione del Teorema di Equivalenza	29
2.3.3 Supplemento: Il Lemma di Hadamard	35
2.4 Famiglie di Morse globali per sottovarietà Lagrangiane isotope alla sezione nulla	37
2.4.1 Costruzione a infiniti parametri	37

2.4.2	Sviluppi di Fourier e Punto Fisso	41
2.4.3	La struttura globalmente finita dei fronti d'onda	44
2.4.4	La Funzione Generatrice Globale per la Soluzione Spazio- Temporale	46
3	Ottica Geometrica	49
3.1	Equazioni differenziali alle derivate parziali con soluzioni rap- idamente oscillanti	49
3.1.1	Soluzioni Asintotiche Formali. Sviluppo di Debye.	51
3.1.2	Soluzione formale dell'equazione del trasporto	53
3.2	Caso dell'equazione di Helmholtz	55
3.2.1	Teoria Geometrica della Diffrazione di Keller	56
3.3	Supplemento: La Formula di Liouville	58
3.4	Supplemento: Il Principio di Fermat	59
3.4.1	Supplemento:Un teorema di inversione globale	62
4	Soluzioni in forma di Integrali Oscillanti	63
4.1	Proprietà degli Integrali Oscillanti: Il Principio della Fase Stazionaria	65
4.1.1	Stima del contributo di un punto non di fase stazionaria	65
4.1.2	Supplemento: Lemmi Tecnici	69
4.1.3	Contributo di un punto di fase stazionaria	71
4.2	Integrali Oscillanti come Soluzioni dell'Equazione di Helmholtz	72
4.2.1	Procedura dell'ottica geometrica	72
4.2.2	Metodo di Ludwig	73
4.2.3	Relazioni con l'Ottica Geometrica	76

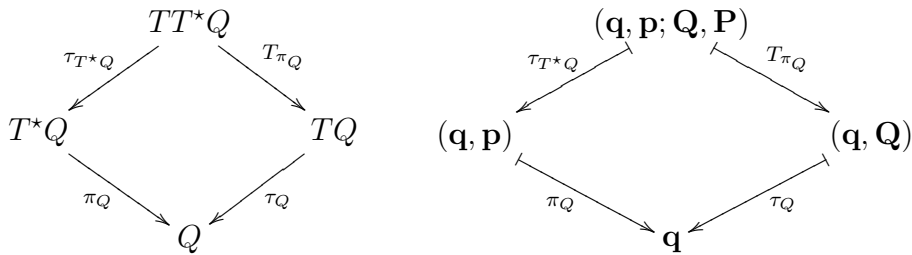
Capitolo 1

Nozioni fondamentali di Meccanica Hamiltoniana

1.1 CENNI DI STRUTTURE SIMPLETTICHE SU VARIETÀ

Quanto segue si può trattare con facilità nel caso generale di una varietà simplettica (M, ω) di dimensione $2n$. Essendo però tale trattazione inessenziale per i nostri scopi, affronteremo solamente il caso in cui M è il fibrato cotangente di una n -varietà differenziale Q , la cui struttura simplettica sia data dalla 2-forma canonica $\omega_Q = d\theta_Q$, laddove θ_Q è la 1-forma di Liouville:

$$\forall v \in TT^*Q \quad \langle v, \theta_Q \rangle = \langle T_{\pi_Q} v, \tau_{T^*Q} v \rangle,$$



In coordinate locali, la 1-forma di Liouville può essere scritta come

$$\theta_Q = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = p_i dq^i, \quad \theta_Q(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} = p_i Q^i,$$

perciò

$$\begin{aligned} \omega_Q &= d\theta_Q = dp_i \wedge dq^i, \\ \forall v, \bar{v} \in TT^*Q, \quad \langle v \wedge \bar{v}, \omega_Q \rangle &= \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Q} = \langle \mathbb{E}v, \bar{v} \rangle. \end{aligned}$$

Con

$$\mathbb{E} \in M(\mathbb{R}, 2n), \quad \mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

si è indicato la matrice simplettica fondamentale.

1.1.1 Sottovarietà Lagrangiane

Sia S una sottovarietà di T^*Q , $j : S \hookrightarrow T^*Q$. Per ogni $x \in S$ consideriamo il seguente sottospazio di $T_{j(x)}T^*Q$, il *complemento emiortogonale* a S in x :

$$T_x^\S S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in T_{j(x)}T^*Q \mid \forall u \in T_x S, \quad \langle Tj u \wedge v, d\theta_Q \rangle = 0 \right\}.$$

Si osservi che se $k = \dim S = \dim T_x S$, allora $\dim T_x^\S S = 2n - k$.

DEFINIZIONE 1.1.1. *Diremo che*

1. S è isotropa se $\forall x \in S, T_x S \subseteq T_x^\S S$, cioè quando $\forall u, v \in T_x S$, $\langle Tj u \wedge Tj v, d\theta_Q \rangle = \langle u \wedge v, j^* d\theta_Q \rangle = 0$, cioè quando $j^* \theta_Q$ è chiusa;
2. S è coisotropa se $\forall x \in S, T_x^\S S \subseteq T_x S$;
3. S è Lagrangiana se $\forall x \in S, T_x S = T_x^\S S$.

Le sottovarietà isotrope hanno dimensione ‘bassa’: ad esempio ogni s.v. 1–dimensionale di T^*Q è isotropa. Le sottovarietà coisotrope, invece, hanno dimensione ‘alta’: ad esempio ogni $S = f^{-1}(0)$, con $f : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ regolare, è coisotropa. Di importanza centrale sono infine le sottovarietà Lagrangiane:

PROPOSIZIONE 1. *Le sottovarietà Lagrangiane sono sottovarietà isotrope di dimensione massima.*

dim: Per le s.v. isotrope vale $\dim T_x S \leq \dim T_x^\S S \Rightarrow k \leq 2n - k \Rightarrow k \leq n$, mentre per le coisotrope vale $k \geq n$, per cui ogni s.v. Lagrangiana ha dimensione n , cioè massima per una s.v. isotropa. D'altra parte, se $\dim T_x^\S S = 2n - \dim T_x S = 2n - n = n = \dim T_x S$, e $T_x S \subseteq T_x^\S S$, si deve avere l'uguaglianza tra i due spazi, e quindi anche $T_x^\S S \subseteq T_x S$. \square

Le sottovarietà Lagrangiane sono state introdotte come una generalizzazione *geometrica* delle forme differenziali chiuse su T^*Q . Infatti vale la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Una forma chiusa su Q è un'immersione Lagrangiana.*

dim: Sia data una forma chiusa $\alpha = \tilde{p}_i(\mathbf{q})dq^i$ su Q . Sia S la s.v. di T^*Q definita dall'immersione:

$$\begin{aligned} j : Q &\longrightarrow T^*Q \\ \mathbf{q} &\longmapsto (\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q})). \end{aligned}$$

Ma allora

$$j^*\theta_Q(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \langle \mathbf{Q}, (\theta_Q \circ j)(\mathbf{q}) \rangle = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{Q} = \alpha(\mathbf{Q}),$$

che è esattamente la stessa forma, è chiusa. Inoltre $\dim S = \dim Q = n$, per cui S è Lagrangiana. \square

In particolare le forme esatte, cioè il differenziale $df : Q \rightarrow T^*Q$ di una qualsiasi $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ regolare, è una s.v. Lagrangiana.¹

Nel prossimo capitolo indagheremo sistematicamente sulle peculiarità e in particolare sulle parametrizzazioni delle s.v. Lagrangiane.

1.1.2 Equazioni di Hamilton

DEFINIZIONE 1.1.2. *Un campo vettoriale su T^*Q^2 ,*

$$\begin{aligned} X_H : T^*Q &\longrightarrow TT^*Q \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\longmapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p}, X_{\mathbf{q}}, X_{\mathbf{p}}), \end{aligned}$$

si dice localmente Hamiltoniano se la 1-forma differenziale $i_{X_H}d\theta_Q$ è chiusa, ovvero quando

$$d(i_{X_H}d\theta_Q) = 0.$$

DEFINIZIONE 1.1.3. *Diremo che X_H è globalmente Hamiltoniano, di Hamiltoniana H , se $i_{X_H}d\theta_Q$ è esatta, e se $-H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ è una sua primitiva (0-forma),*

$$i_{X_H}d\theta_Q = -dH \quad \Leftrightarrow \quad X_{\mathbf{p}}d\mathbf{q} - X_{\mathbf{q}}d\mathbf{p} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial d\mathbf{p}}d\mathbf{p} \quad (1.1)$$

Viceversa, data una qualunque funzione liscia $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$, resta ad essa associato un campo vettoriale su T^*Q , tramite la stessa relazione 1.1.

¹sarebbe più corretto dire che il differenziale df è un'immersione Lagrangiana, mentre $im(df) \subseteq T^*Q$ è la s.v. in senso insiemistico.

²si tratta di una *sezione* di τ_{T^*Q}

Ad ogni campo vettoriale globalmente Hamiltoniano resta associato naturalmente un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine, le *equazioni di Hamilton* o *equazioni canoniche* o *sistema canonico*:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Un campo vettoriale $X(x)$ si dirà *completo* quando l'equazione differenziale associata $\dot{x} = X(x)$ ammetta per ogni dato iniziale $x_0 \in T^*Q$ soluzione estesa su tutta la retta reale $\mathbb{R} \leftarrow t \mapsto x(t) \in T^*Q$, $x(0) = x_0$.

In quanto segue faremo l'assunzione che i campi vettoriali Hamiltoniani esaminati siano completi.

DEFINIZIONE 1.1.4. *Il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi:*

$$\Phi_{X_H}^t : T^*Q \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*Q,$$

per il quale X_H è il campo delle velocità, definito dall'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt} \Phi_{X_H}^t(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = X_H(\Phi_{X_H}^t(\mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad \Phi_{X_H}^0(\cdot) = id_{T^*Q},$$

si chiama flusso del campo vettoriale X_H .

Nel caso autonomo, cioè con Hamiltoniana non dipendente da t , vale la notevole proprietà di gruppo:

$$\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{s+t}.$$

Nel caso non autonomo non sussiste l'invarianza della soluzione per traslazioni nella variabile temporale; in tal caso è necessario rappresentare la soluzione con la notazione estesa:

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi_{X_H}^{t, t_0}(x_0)$$

per indicare il punto incontrato al tempo t_1 dalla soluzione uscente da x_0 al tempo t_0 .

1.2 PROBLEMI DI CAUCHY PER L'EQUAZIONE CLASSICA DI HAMILTON-JACOBI

Sia data una Hamiltoniana $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 1.2.1. *L'equazione classica di Hamilton-Jacobi è la seguente equazione alle derivate parziali:*

$$H \circ dS = 0, \quad \text{ovvero,} \quad H \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0. \quad (1.3)$$

dove $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$.

1.2.1 Problema di Cauchy classico

Sia data una ipersuperficie connessa Σ di Q :

$$\iota : \Sigma \longrightarrow Q, \quad \dim \Sigma = n - 1,$$

$$\chi \longmapsto \tilde{\mathbf{q}}(\chi)$$

e su di essa una funzione:

$$S_0 : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R},$$

DEFINIZIONE 1.2.2. *Il problema di Cauchy classico di dato iniziale S_0 consiste nell'individuare una soluzione dell'equazione classica di H-J, $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, che estenda S_0 , nel senso che*

$$\forall \mathbf{q} \in Q \quad H \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0 \quad e \quad \forall \chi \in \Sigma \quad S(j(\chi)) = S_0(\chi).$$

1.2.2 Problema di Cauchy geometrico

Il problema che si incontra nella ricerca delle soluzioni classiche è la presenza di più valori compatibili per una stessa soluzione. La soluzione che si trova è una funzione a molti valori, non più univoca³. La generalizzazione del concetto di soluzione classica è dovuta a Maslov e a Vinogradov,⁴ e queste soluzioni generalizzate vanno sotto il nome di *relazioni simplettiche*⁵.

³In letteratura, *multivalued function*.

⁴cfr. [MASLOV, 1971] e [VINOGRADOV, 1973]

⁵cfr. [BENENTI & TULCZYJEW, 1979]

Sia data una $(n - 1)$ -sottovarietà isotropa connessa di T^*Q :

$$\begin{aligned} j_0 : \Lambda_0^{(n-1)} &\hookrightarrow T^*Q \\ j_0^* \omega_{T^*Q} = j_0^* d\theta_Q &= 0, \quad \dim \Lambda_0^{(n-1)} = n - 1, \end{aligned}$$

compatibile con H , nel senso che:

$$H \circ j_0 \equiv 0, \quad \text{ovvero} \quad \Lambda_0^{(n-1)} \subseteq H^{\leftarrow}(0).$$

DEFINIZIONE 1.2.3. *Il problema di Cauchy geometrico consiste nell'individuare una sottovarietà Lagrangiana Λ di T^*Q*

$$\begin{aligned} j : \Lambda &\hookrightarrow T^*Q \\ j^* \omega_{T^*Q} = j^* d\theta_Q &= 0, \quad \dim \Lambda = n, \end{aligned}$$

soddisfacente alla versione geometrica dell'equazione di H-J

$$H \circ j \equiv 0, \quad \text{cioè} \quad \forall (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Lambda, \quad H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0, \quad \text{ossia} \quad \Lambda \subseteq H^{\leftarrow}(0)$$

e contenente la sottovarietà dato iniziale, cioè tale che esista una immersione l di $\Lambda_0^{(n-1)}$ in Λ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{j} & T^*Q \\ \uparrow l & \nearrow j_0 & \\ \Lambda_0^{(n-1)} & & \end{array} \quad \text{oppure, insiemisticamente}$$

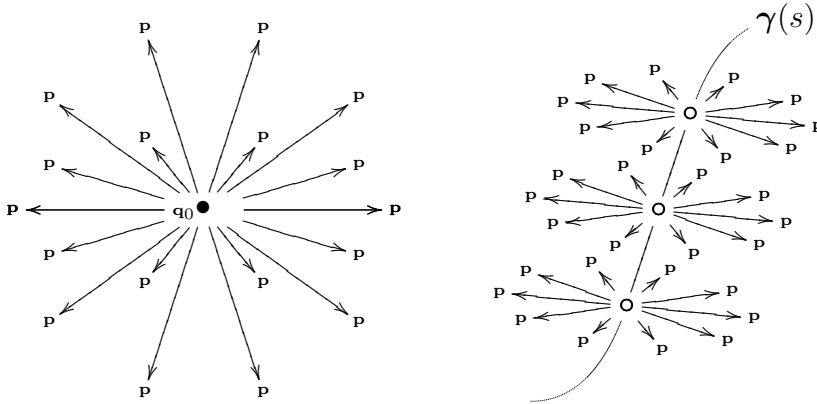
$$\Lambda_0^{(n-1)} \subseteq \Lambda \subseteq H^{\leftarrow}(0) \subseteq T^*Q.$$

In questa classe di problemi di Cauchy rientrano anche le seguenti situazioni del tutto legittime nello studio dell'ottica: il caso della sorgente puntiforme

$$\Lambda_0^{(n-1)} = \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in H^{\leftarrow}(0) \mid \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \right\},$$

oppure quando la sorgente è un filamento (una curva $\mathbb{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in Q$)

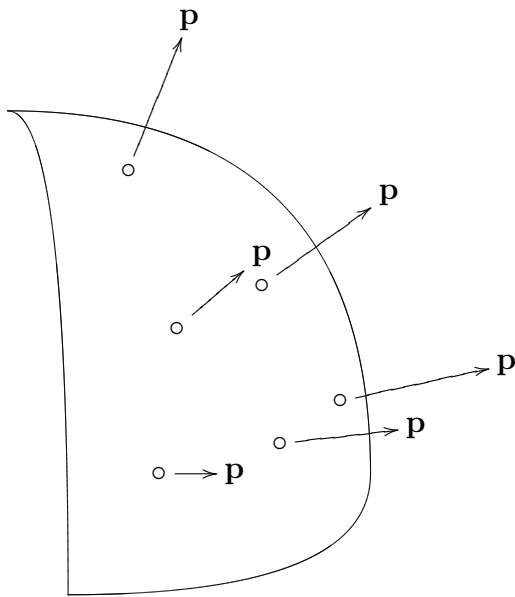
$$\Lambda_0^{(n-1)} = \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in H^{\leftarrow}(0) \mid \mathbf{q} = \gamma(s), \quad \langle \dot{\gamma}(s), \mathbf{p} \rangle = 0 \right\},$$



o infine una varietà di codimensione uno, come nel caso classico

$$\Lambda_0^{(n-1)} = \text{im}(\iota), \quad \text{dove } \iota : \Sigma \hookrightarrow T^*Q,$$

$$\dim \Sigma = n - 1, \quad \text{rk}(d(\pi_Q \circ \iota)) = n - 1 = \max,$$



Dimostriamo ora che questo nuovo concetto è effettivamente una generalizzazione del problema classico di Cauchy.

La funzione $S_0 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ individua, assieme ad H , una $(n - 1)$ -sottovarietà $\Lambda_0^{(n-1)}$ dato iniziale per un problema di Cauchy geometrico “equivalente” a quello classico dato. Ciò accade nel modo seguente.

Costruiamo intanto la *sottovarietà Lagrangiana dei dati iniziali*:

$$L_{(\Sigma, S_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*Q \mid \exists \chi \in \Sigma \quad \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}(\chi), \right. \\ \left. \forall v \in T_\chi \Sigma \quad \langle T_j v, \mathbf{p} \rangle = \langle v, dS_0 \rangle \right\},$$

che in coordinate locali diventa,

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in L_{(\Sigma, S_0)} \quad \text{sse} \quad \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}(\chi), \quad \forall v \in T_\chi \Sigma, \quad p_i \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial \chi^h} v^h = \frac{\partial S_0}{\partial \chi^h} v^h \quad \text{sse} \\ \text{sse} \quad \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}(\chi), \quad p_i \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial \chi^h}(\chi) = \frac{\partial S_0}{\partial \chi^h}(\chi).$$

Come dato iniziale del problema geometrico poniamo ora:

$$\Lambda_0^{(n-1)} \equiv L_{(\Sigma, S_0)} \cap H^{\leftarrow}(0).$$

TEOREMA 1. *La soluzione di un problema di Cauchy classico è soluzione per il problema di Cauchy geometrico corrispondente.*⁶

Dimostrazione. Sia $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di un problema classico di Cauchy, $H \circ dS = 0$, $S \circ j = S_0$. Il grafico del suo differenziale

$$\Lambda \equiv \left\{ \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right) \mid \mathbf{q} \in Q \right\},$$

è una s.v. Lagrangiana di T^*Q . Consideriamo la seguente $(n-1)$ -s.v. contenuta in Λ

$$\bar{\Lambda}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Lambda \mid \exists \chi \in \Sigma \quad \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}(\chi), \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}(\chi)) \right\} \subseteq \Lambda.$$

Essa è contenuta in $L_{(\Sigma, S_0)}$, essendo

$$\mathbf{p} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \chi} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} (S \circ j) = \frac{\partial S_0}{\partial \chi},$$

ed è contenuta anche in $H^{\leftarrow}(0)$, essendolo Λ . Perciò

$$\bar{\Lambda}_0 \subseteq \Lambda_0^{(n-1)}.$$

Ma le due s.v. sono connesse ed hanno la stessa dimensione, perciò vale l'uguaglianza. Si può infine concludere:

$$\Lambda_0^{(n-1)} \subseteq \Lambda.$$

□

⁶La semplicità di questo enunciato lo rende preferibile alla sua formulazione corretta: è il differenziale dS , pensato come immersione Lagrangiana $Q \ni \mathbf{q} \mapsto (\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q})) \in T^*Q$ ad essere soluzione del problema di Cauchy geometrico.

La possibilità di invertire questo teorema è ben più interessante, ma in generale è realizzabile solo localmente, e mai in un intorno di punti appartenenti al ciclo di Maslov, la caustica, ovvero quando $\text{rank}d(\pi_Q \circ j) < \max = n$. Vale il seguente

TEOREMA 2. *Se Λ risolve il problema di Cauchy geometrico associato ad un problema classico ed ammette una primitiva $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $\Lambda = \text{im}(dS)$, allora $S(\mathbf{q})$, a meno di costanti additive, risolve il problema di Cauchy classico.*

Dimostrazione. Poniamo

$$\Lambda_0 = \left\{ \chi \mapsto (\tilde{\mathbf{q}}(\chi), \tilde{\mathbf{p}}(\chi)) \mid \tilde{\mathbf{p}}(\chi) \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \chi}(\chi) = \frac{\partial S_0}{\partial \chi}(\chi) \right\}.$$

Se Λ è soluzione geometrica, allora $H \circ dS = 0$, inoltre, se $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$, $\tilde{\mathbf{p}}(\chi) = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}(\chi))$, perciò

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}(\chi)) \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \chi}(\chi) = \frac{\partial S_0}{\partial \chi}(\chi)$$

e dunque

$$S(\tilde{\mathbf{q}}(\chi)) = S_0(\chi) + \text{cost.}$$

□

1.2.3 Metodo delle caratteristiche

Se dunque fosse più facile trovare soluzioni geometriche, potremmo costruire a partire da queste delle soluzioni classiche, studiarne le proprietà globali, o dedurne l'inesistenza.

Nel caso in cui il dato iniziale sia *non caratteristico*, ovvero trasversale al campo vettoriale X_H :

$$\forall x \in \Lambda_0, \quad X_H(x) \notin T_x \Lambda_0,$$

la soluzione geometrica si trova una volta noto il flusso di X_H . Il modo per costruirla si chiama *metodo delle caratteristiche*

TEOREMA 3. *Se i dati sono non caratteristici, allora soluzione del Problema di Cauchy Geometrico è*

$$\Lambda \equiv \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Phi_{X_H}^t \left(\Lambda_0^{(n-1)} \right). \quad (1.4)$$

Dimostrazione. Λ soddisfa certamente al dato iniziale, ed anche alla $H|_{\Lambda} = 0$, perché l'Hamiltoniana si conserva lungo il flusso di X_H , ed è nulla su $\Lambda_0^{(n-1)}$. Il fatto che sia varietà discende dal teorema di differenziabilità del flusso rispetto ai dati iniziali. Resta da dimostrare che Λ è Lagrangiana, cioè che $\omega|_{(T_x\Lambda)^2} \equiv 0$. Per ogni $x \in \Lambda$ esiste $t \in \mathbb{R}$ ed $y \in \Lambda_0^{(n-1)}$ tali che $x = \Phi_{X_H}^t(y)$. Dunque

$$\begin{aligned} T_x\Lambda &= T\Phi_{X_H}^t(T_y\Lambda) = T\Phi_{X_H}^t\left(T_y\Lambda_0^{(n-1)} \oplus \mathbb{R}X_H(y)\right) = \\ &= T_{\Phi_{X_H}^t(y)}\left[\Phi_{X_H}^t\left(\Lambda_0^{(n-1)}\right)\right] \oplus \mathbb{R}T\Phi_{X_H}^t[X_H(y)] = \\ &= T_x\left[\Phi_{X_H}^t\left(\Lambda_0^{(n-1)}\right)\right] \oplus \mathbb{R}X_H(x), \end{aligned}$$

essendo Φ^t diffeomorfismo di Λ in sè e di conseguenza $T\Phi^t$ isomorfismo tra spazi vettoriali. Inoltre si ha che

$$T\Phi_{X_H}^t X_H(y) = X_H(\Phi_{X_H}^t(y)),$$

infatti,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Phi^t(\Phi^s(x))\Big|_{s=0} &= \frac{\partial\Phi^t}{\partial x}X_H(x) \\ || \\ \frac{d}{ds}\Phi^s(\Phi^t(x))\Big|_{s=0} &= X_H(\Phi^t(x)). \end{aligned}$$

Indichiamo con u, u_1, u_2 vettori in $T_x\left[\Phi_{X_H}^t\left(\Lambda_0^{(n-1)}\right)\right]$ e con v, v_1, v_2 vettori in $\mathbb{R}X_H(x)$. Allora

$$\begin{aligned} \langle v_1 \wedge v_2, \omega \rangle &= 0 \quad \text{perché } v_1 \text{ e } v_2 \text{ sono paralleli,} \\ \langle v \wedge u, \omega \rangle &= \langle \alpha X_H \wedge u, \omega \rangle = -\alpha dH(x)u = 0 \\ &\quad \text{perché, a meno di differenziali di immersioni,} \\ &\quad u \in T_{\Phi^t(y)}(H^{\leftarrow}(0)) = \ker dH(\Phi^t(x)), \\ \langle u_1 \wedge u_2, \omega \rangle &= \langle T\Phi\bar{u}_1 \wedge T\Phi\bar{u}_2, \omega \rangle = \langle \bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2, \Phi^*\omega \rangle = \langle \bar{u}_1 \wedge \bar{u}_2, \omega \rangle = 0, \end{aligned}$$

poiché $\omega|_{T_y\Lambda_0^{(n-1)}} = 0$ essendo $\Lambda_0^{(n-1)}$ isotropa. Abbiamo sfruttato a fondo il fatto che il flusso è trasformazione canonica. \square

Capitolo 2

Sottovarietà Lagrangiane e loro Parametrizzazioni

Nella prima parte di questo capitolo affronteremo uno studio sistematico delle possibili parametrizzazioni locali delle s.v. Lagrangiane. Tratteremo solamente parametrizzazioni aventi un numero finito di parametri ausiliari. In questa esposizione seguiremo soprattutto [ARNOLD-ZADE-VARCHENKO, 1985] e [CARDIN, 1997].

Nella seconda parte prenderemo in considerazione la possibilità di costruire delle parametrizzazioni globali. Queste parametrizzazioni avranno nel peggiore dei casi infiniti parametri ausiliari (uno spazio di curve), ma in alcuni casi ammetteranno una riduzione ad un numero finito di parametri. Questa discussione prende spunto soprattutto da alcuni lavori di [VITERBO, 1996] e dall'articolo [CARDIN, 2000].

2.1 IL TEOREMA DI MASLOV-HÖRMANDER: ESISTENZA DELLE FAMIGLIE DI MORSE

2.1.1 *Funzioni Generatrici*

Le Funzioni Generatrici sono il metodo classico di rappresentazione delle s.v. Lagrangiane, esso risale ad Hamilton [HAMILTON], e viene rivisitato puntualmente in tutti i più importanti testi sull'ottica geometrica ¹. La discussione seguente è di natura locale, per semplicità tralascieremo la scrittura, volta per volta, di *germe di immersione Lagrangiana*, *germe di diffeomorfismo*, *germe di mappa Lagrangiana*, ecc...

¹si veda ad esempio [GUILLEMIN-STERNBERG, 1984]

Sappiamo che nel “migliore” dei casi, relativamente ad un generico punto $\lambda_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in \Lambda$, una s.v. Lagrangiana è trasversale alla fibra di π_Q (ovvero al piano Lagrangiano $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$):

$$\text{rk}(d(\pi_Q \circ j_\Lambda)(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)) = n = \max.$$

In tal caso, localmente a $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$, si può rappresentare la s.v. Λ come immagine del differenziale di una funzione liscia $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$, cioè per mezzo dell’immersione Lagrangiana

$$\begin{aligned} j_\Lambda : Q &\longrightarrow T^*Q \\ \mathbf{q} &\longmapsto \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \right). \end{aligned}$$

In questi casi la soluzione del problema geometrico produce anche una soluzione per il problema classico: la stessa funzione $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Queste condizioni non sono sempre verificate, anzi, il loro decadere conferisce al problema un interesse aggiuntivo. Il metodo che indagheremo consiste nell’ignorare la differenza qualitativa tra le variabili \mathbf{q} e i momenti \mathbf{p} . Come dimostreremo in appendice a questa sezione, una s.v. Lagrangiana, anche se non è trasversale alla fibra di π_Q , è comunque trasversale ad almeno

Piani Lagrangiani uno dei 2^n *piani Lagrangiani*

$$p_I = 0, q^J = 0, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} p_{i_1} = 0 \\ \dots \\ p_{i_k} = 0 \\ q^{j_{k+1}} = 0 \\ \dots \\ q^{j_n} = 0 \end{cases} \quad \text{laddove} \quad \begin{cases} I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I \cap J = \emptyset. \end{cases}$$

Ciò significa che Λ è localmente parametrizzabile per mezzo delle variabili

$$(q^I, p_J) = (q^{i_1}, \dots, q^{i_k}; p_{j_{k+1}}, \dots, p_{j_n}), \quad i_h \neq j_l \quad \forall h, l.$$

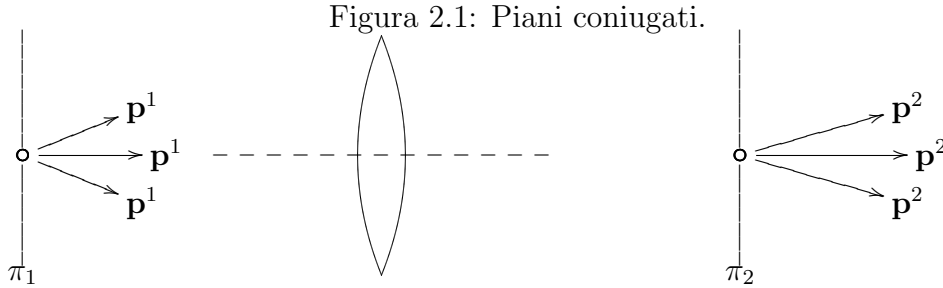
La rappresentazione di Λ per mezzo di questa carta si chiama *coordinate focali di Maslov*:

Coordinate Focali di Maslov

$$\begin{aligned} j_\Lambda : \Lambda &\longrightarrow T^*Q \\ (q^I, p_J) &\longmapsto (q^I, q^J(q^I, p_J); p_J, p_I(q^I, p_J)). \end{aligned}$$

A questo punto l’immersione Lagrangiana può essere descritta da una funzione generatrice del tutto analoga a quella del caso banale. È infatti sufficiente operare una rotazione ² di $\frac{\pi}{2}$ nel piano delle coordinate (q^{j_i}, p_{j_i}) , cioè

²una per ogni variabile p_j nelle coordinate focali, quindi k rotazioni in tutto.



la trasformazione canonica $(q^j, p_j) \mapsto (p_j, -q^j)$, per portarsi nella situazione classica. Dalla soluzione classica si ottiene allora la funzione generatrice $S(q^I, p_J)$, per la quale

$$p_{i_h} = \frac{\partial S}{\partial q^{i_h}}(q^I, p_J), \quad q^{j_l} = -\frac{\partial S}{\partial p_{j_l}}(q^I, p_J), \quad (2.1)$$

con $h = 1, \dots, k$, $l = k + 1, \dots, n$. Le variabili (q^{j_l}, p_{j_l}) , quelle con il segno meno nella formula 2.1, si dicono *patologiche*. Se la proiezione di Λ su Q è di rango $n - k$, si può scegliere una funzione generatrice S con k argomenti patologici. Resta così definita l'immersione Lagrangiana (a meno di rinumerazioni delle variabili)

$$j_\Lambda : \Lambda \longrightarrow T^*Q$$

$$(q^I, p_J) \longmapsto \left(q^I, -\frac{\partial S}{\partial p_J}; \frac{\partial S}{\partial q^I}, p_J \right).$$

In letteratura si trova spesso che la s.v. Lagrangiana Λ rappresenta una trasformazione canonica associata ad un sistema ottico, cioè una corrispondenza tra due insiemi di raggi, uno *entrante*, $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}^1)$, e l'altro *uscente*, $(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}^2)$, dal sistema. La funzione generatrice S della trasformazione canonica può assumere tre forme diverse a seconda della distribuzione degli argomenti patologici. S si chiamerà *caratteristica puntuale*, *caratteristica mista* o *caratteristica angolare*, rispettivamente quando non ci sono argomenti patologici ($S = S(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$), solo un gruppo di variabili è patologico ($S = S(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}^2)$), oppure sono tutti patologici ($S = S(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2)$), è la corrispondenza tra due piani coniugati di una lente biconvessa, vedi Figura 2.1).³

³Su come scegliere un appropriato sistema di coordinate su un fascio di raggi, si veda [CARIÑENA & NASARRE, 1996]

2.1.2 Famiglie Generatrici e Famiglie di Morse

Abbiamo visto come una s.v. Lagrangiana n -dimensionale possa essere definita tramite una funzione generatrice generalizzata in n variabili.

Qualche volta è più conveniente descrivere una immersione Lagrangiana in termini di una “funzione generatrice” definita su di una varietà più grande di Q , che chiameremo \widehat{Q} , che si ottiene affiancando alle variabili q^1, \dots, q^n dei parametri ausiliari u_1, \dots, u_m , numerosi almeno quanto gli argomenti patologici ($m \geq k$). Ciò si realizza nel modo seguente: si consideri la funzione liscia

$$\begin{aligned} W : Q \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \mathbf{u}) &\longmapsto W(\mathbf{q}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

e i suoi punti \mathbf{u} -critici, cioè quei

$$(\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) \in Q \times \mathbb{R}^m \quad \text{tali che} \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) = 0. \quad (2.2)$$

Singularità di Morse

Essi si dicono *singularità di Morse*, se sono non degeneri, cioè se vale anche la⁴

$$\text{rk} \left(d \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) \right) = \text{rk} \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 W}{\partial q^h \partial u_l} & \frac{\partial^2 W}{\partial u_m \partial u_l} \end{array} \right) = \max = m.$$

Se i punti \mathbf{u} -critici di W sono tutti di Morse l'insieme

$$\Sigma_W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) \mid \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) = 0 \right\}$$

Famiglia di Morse è una sottovarietà liscia di $Q \times \mathbb{R}^k$ di dimensione $(n+k) - k = n$. In tal caso la funzione W si dice *funzione fase non degenera*, o *famiglia di Morse*.

Dimostreremo nella prossima sezione che se W è famiglia di Morse, l'immersione

$$\begin{aligned} j_\Lambda : \Sigma_W &\longrightarrow T^*Q \\ (\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) &\longmapsto \left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) \right) \end{aligned}$$

definisce una sottovarietà Lagrangiana Λ di T^*Q .

⁴questa condizione comporta che le equazioni 2.2 siano, localmente, funzionalmente indipendenti.

Data una funzione generatrice $S(q^i, p_j)$ per Λ è facile costruire una famiglia di Morse definente Λ . È sufficiente porre

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = W(q^1, \dots, q^n; u_1, \dots, u_k) \stackrel{\text{def}}{=} S(q^{i_1}, \dots, q^{i_{n-k}}; p_{j_1}, \dots, p_{j_k}) \Big|_{p_{j_l} = u_l} + \sum_{l=1, \dots, k} q^{j_l} u_l.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q^{i_h}} &= \frac{\partial S}{\partial q^{i_h}}(q^I, u_J) & \frac{\partial W}{\partial q^{j_l}} &= u_l = p_{j_l} \\ \frac{\partial W}{\partial u} &= 0 \Rightarrow & q^{j_l} &= -\frac{\partial S}{\partial p_{j_l}}(q^I, u_J). \end{aligned}$$

Una famiglia di Morse di questo tipo si dirà *minimale*, nel senso che ha un numero minimo (= k) di parametri ausiliari. Tale famiglia si dirà anche *speciale*, perché sussiste anche

Famiglie di Morse Minimali
Famiglie di Morse Speciali

$$u_l = \frac{\partial W}{\partial q^{j_l}}.$$

2.1.3 Supplemento: Esistenza di Piani Lagrangiani diffeomorfi a sottovarietà Lagrangiane arbitrarie

Consideriamo l'immersione Lagrangiana $j_\Lambda : \Lambda \hookrightarrow T^*Q$, per la quale si ha

$$\text{rk } Dj(\lambda_0) = \text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial \lambda^j}(\lambda_0) \\ \dots \\ \frac{\partial p_i}{\partial \lambda^j}(\lambda_0) \end{pmatrix} \equiv \text{rk} \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ B \end{pmatrix} = n.$$

Dimostreremo ora che, con un opportuno cambio di coordinate, si può ridurre la matrice $Dj(\lambda_0)$ alla forma

$$Dj(\lambda_0) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{k \times k} & \vdots & \mathbb{O}_{k \times (n-k)} \\ \dots & & \dots \\ & \vdots & d_{k+1} \\ \mathbb{O}_{(n-k) \times k} & \vdots & \ddots \\ & \vdots & d_n \\ \dots & & \dots \\ M_{k \times k} & \vdots & N_{k \times (n-k)} \\ \dots & & \dots \\ \mathbb{O}_{(n-k) \times k} & \vdots & P_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo a tale scopo una *decomposizione polare* della matrice $A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q}{\partial \lambda}(\lambda_0)$,

$$A = \tilde{R}_1 S, \quad \tilde{R}_1 \in SO(n), \quad S^T = S,$$

dove $SO(n)$ è l'insieme delle matrici ortogonali ($R^T = R^{-1}$) speciali (rappresentano trasformazioni unitarie: è una rotazione). Tale decomposizione non è unica essendo A , nel caso 'interessante', $\det A = 0$. Consideriamo allora una trasformazione ortogonale diagonalizzante S ,

$$\tilde{R}_2^T S \tilde{R}_2 = D, \quad \text{diagonale.}$$

Dunque

$$D = R_1 A R_2, \quad \text{dove} \quad R_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}_2^T \tilde{R}_1, \quad R_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}_2.$$

Consideriamo su T^*Q il diffeomorfismo fibrato indotto dal diffeomorfismo su Q definito da $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}' = R_1(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^5$, dove $\mathbf{q}_0 = (\pi_Q \circ j)(\lambda_0)$,

$$\begin{cases} \mathbf{q}' = R_1(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \\ \mathbf{p}' = R_1^{-T} \mathbf{p} = R_1 \mathbf{p}. \end{cases}$$

D'altra parte, su Λ , trasliamo λ_0 in 0, e quindi operiamo il cambio di coordinate

$$\lambda' = R_2^T \lambda.$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} \lambda' &\xrightarrow{R_2} \lambda \xrightarrow{\pi_Q \circ j} \mathbf{q}(\lambda) \xrightarrow{R_1} \mathbf{q}' + R_1 \mathbf{q}_0, \\ \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \lambda'}(0) &= \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'} = R_1 A R_2 = D : \quad \text{diagonale.} \end{aligned}$$

Abbandoniamo ora per semplicità la notazione con gli apici sottintendendola sempre. Tra gli elementi della matrice diagonale D , solamente k sono non nulli; operiamo una ulteriore trasformazione di carta consistente in una

⁵si tratta della *mappa cotangente*

rinumerazione tale che

$$Dj(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{k \times k} & \vdots & \mathbb{O}_{k \times (n-k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_{(n-k) \times k} & \vdots & d_{k+1} \\ & \vdots & \ddots \\ & \vdots & d_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial p_A}{\partial \lambda^B}\right)_{k \times k} & \vdots & \left(\frac{\partial p_A}{\partial \lambda^B}\right)_{k \times (n-k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda^B}\right)_{(n-k) \times k} & \vdots & \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda^B}\right)_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

dove $A, B \in \{1, \dots, k\}$ mentre $\alpha, \beta \in \{k+1, \dots, n\}$. Vogliamo dimostrare che per la sotto-matrice $k \times k$

$$\det \left(\frac{\partial p_A}{\partial \lambda^B} \right)_{k \times k} \neq 0.$$

Per fare questo basterà dimostrare che la sotto-matrice $(n-k) \times k$

$$\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda^B} \right)_{(n-k) \times k} \equiv 0;$$

in tal caso infatti la matrice dovrà essere di rango massimo, avendosi $\text{rk}(Dj) = n$. Per fare ciò, usiamo il fatto che la 2-forma simplettica ω_Q è *nulla* su Λ , e che rotazioni e rinumerazioni rispettano tale struttura:

$$0 = dp_i \wedge dq^i \Big|_\Lambda = \frac{\partial p_i}{\partial \lambda^l} \frac{\partial q^i}{\partial \lambda^m} d\lambda^l \wedge d\lambda^m.$$

I coefficienti delle $d\lambda^l \wedge d\lambda^m$ devono essere tutti nulli:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \lambda^l} \frac{\partial q^i}{\partial \lambda^m} - \frac{\partial p_i}{\partial \lambda^m} \frac{\partial q^i}{\partial \lambda^l} = 0,$$

in particolare, per ogni $l = A$, $m = \beta$ fissati, e spezzando la somma per $B = 1, \dots, k$, ed $\alpha = k+1, \dots, n$, si ricava:

$$\frac{\partial p_B}{\partial \lambda^A} \frac{\partial q^B}{\partial \lambda^\beta} + \boxed{\frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda^A} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \lambda^\beta}} - \frac{\partial p_B}{\partial \lambda^\beta} \frac{\partial q^B}{\partial \lambda^A} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial \lambda^\beta} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \lambda^A} = 0.$$

Osservando la matrice $Dj(0)$ della 2.3, si vede che

$$\frac{\partial q^B}{\partial \lambda^\beta} = \frac{\partial q^B}{\partial \lambda^A} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \lambda^A} = 0, \quad (2.4)$$

per cui sopravvive solamente il termine in cornice, il quale, essendo $\frac{\partial q^\alpha}{\partial \lambda^\beta}$ la matrice diagonale non nulla $d_\alpha \delta_\beta^\alpha$, si riscrive

$$d_\beta \frac{\partial p_\beta}{\partial \lambda^A},$$

per cui l'equazione 2.4 implica quanto si voleva, cioè che

$$\frac{\partial p_\beta}{\partial \lambda^A} \equiv 0, \quad \forall A = 1, \dots, k, \quad \forall \beta = k + 1, \dots, n.$$

Essendo dunque $\det \left(\frac{\partial p_A}{\partial \lambda^B} \right)_{k \times k} \neq 0$, un opportuno intorno di λ_0 in Λ è diffeomorfo ad un intorno dell'origine del piano Lagrangiano

$$\begin{cases} q^A = 0 & A = 1, \dots, k, \\ p_\alpha = 0 & \alpha = k + 1, \dots, n, \end{cases}$$

in altre parole, Λ è, localmente a λ_0 , parametrizzabile con le variabili $(p_A, q^\alpha) = (p_1, \dots, p_k; q^{k+1}, \dots, q^n)$. Tali coordinate prendono il nome di *coordinate focali di Maslov*. Ora sfruttiamo l'isotropia: la restrizione a Λ della 1-forma di Liouville è *chiusa*, onde localmente *esatta*, cioè esiste $\mathcal{G}(p_A, q^\alpha)$ tale che

$$p_i dq^i \Big|_\Lambda = d\mathcal{G},$$

per cui esisterà $\mathcal{F}(p_A, q^\alpha)$

$$\begin{aligned} d\mathcal{G} &= p_i dq^i \Big|_\Lambda = p_A dq^A + p_\alpha dq^\alpha \Big|_\Lambda = \\ &= d(p_A q^A) - q^A dp_A + p_\alpha dq^\alpha \Big|_\Lambda = d(p_A q^A(p_A, q^\alpha) + \mathcal{F}(p_A, q^\alpha)), \end{aligned}$$

perciò

$$q^A = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_A}(p_A, q^\alpha), \quad p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q^\alpha}(p_A, q^\alpha).$$

2.2 EQUIVALENZA TRA SOTTOVARIETÀ LAGRANGIANE

Introduciamo in questa sezione una generalizzazione di natura geometrica del concetto di famiglia di Morse, al fine di stabilire delle condizioni di equivalenza tra immersioni Lagrangiane. Nella sezione seguente definiremo dunque un concetto di equivalenza tra parametrizzazioni che corrisponderà esattamente a questo concetto di equivalenza tra immersioni.

2.2.1 Preliminari: Fibrazione Ausiliaria e Spazio Misto

L'ambiente naturale su cui definire una famiglia di Morse è la *fibrazione ausiliaria*. Consideriamo

$$\rho : \widehat{Q} \longrightarrow Q \quad (\mathbf{q}, \mathbf{u}) \longmapsto \mathbf{q},$$

Fibrazione Ausiliaria ρ

cui resta associata una *fibrazione tangente*:

$$\begin{array}{ccc} T\widehat{Q} & \xrightarrow{T\rho} & TQ \\ \tau_{\widehat{Q}} \downarrow & & \downarrow \tau_Q \\ \widehat{Q} & \xrightarrow{\rho} & Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\mathbf{q}, \mathbf{u}; Q, U) & \longmapsto & (\mathbf{q}, Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{q}, \mathbf{u}) & \longmapsto & \mathbf{q} \end{array}$$

DEFINIZIONE 2.2.1. *Lo spazio dei vettori tangenti alla fibra di ρ è l'insieme:*

$$V\widehat{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \ker(T\rho) = \{(\mathbf{q}, \mathbf{u}; 0, U)\} \subseteq T\widehat{Q}.$$

DEFINIZIONE 2.2.2. *Si chiama spazio misto la seguente s.v. di $T^*\widehat{Q}$:*

Spazio Misto A

$$\overset{\circ}{V}\widehat{Q} \equiv A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in T^*\widehat{Q} \mid \langle v, f \rangle = 0, \forall v \in V\widehat{Q} \right\} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p}, 0)\}.$$

Sono esattamente quegli elementi di $T^*\widehat{Q}$ che si proiettano in modo naturale sugli elementi di T^*Q . Infatti ponendo

$$\begin{aligned} \epsilon : A &\longrightarrow T^*Q \\ (\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p}) &\longmapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

cioè tale che

$$\begin{array}{ccc} T^*\widehat{Q} & \xleftarrow{i} & A \\ & \searrow T^*\rho & \swarrow \epsilon \\ & & T^*Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p}, 0) & \xleftarrow{\quad} & (\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{array}$$

risulta ben definita la

$$\langle u, \epsilon f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle v, f \rangle,$$

laddove $v \in T\widehat{Q}$ è un elemento qualunque che soddisfi $T\rho v = u$.

L'idea è quella di scrivere Λ come proiezione su T^*Q dell'intersezione con A di una *varietà Lagrangiana* M di $T^*\widehat{Q}$. Questa M dovrà essere trasversale alla fibra di $\pi_{\widehat{Q}}$, dovrà cioè ammettere una funzione generatrice. Affinché $\epsilon(M \cap A)$ sia s.v. Lagrangiana di T^*Q dovrà sussistere anche un'altra condizione per M .

ρ -regolarità per s.v. Lagrangiane di $T^\widehat{Q}$*

DEFINIZIONE 2.2.3. Diremo che M è s.v. ρ -regolare di $T^*\widehat{Q}$, e scriveremo $M \pitchfork A$, quando M è trasversale ad A , nel senso che

$$\forall x \in M \cap A, \quad T_x M + T_x A = T_x T^*\widehat{Q}.$$

PROPOSIZIONE 3. Si avrà che $W : \widehat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ è Famiglia di Morse se $\text{Im}(dW)$ è s.v. ρ -regolare di $T^*\widehat{Q}$, cioè quando $\text{Im}(dW) \pitchfork A$.

Dimostrazione. Vediamo il significato di questa condizione di ρ -regolarità

$$\forall x \in \text{Im}(dW) \cap A, \quad T_x(\text{Im}(dW)) + T_x A = T T^*\widehat{Q}.$$

$$\begin{aligned} f \in A & & f &= (\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p}, 0) \\ f \in dW & & f &= \left(\mathbf{q}, \mathbf{u}; \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \right). \end{aligned}$$

I vettori di $T_x A$ sono allora del tipo $d\mathbf{r} = 0$, mentre quelli di $T_x(\text{Im}dW)$ sono $d\mathbf{r}' = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{u}} d\mathbf{q} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} d\mathbf{u}$. Perciò, affinché i due spazi generati diano tutto $T T^*\widehat{Q}$, le forme $d\mathbf{r}'$ devono essere indipendenti sui punti di $M \cap A$. Allora, condizioni sufficienti sono

$$\text{rk} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{u}}, \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \right) = k \quad (= \max),$$

perciò $M = \text{Im}(dW)$ è ρ -regolare. \square

Dimostriamo il seguente

TEOREMA 4. Se M è ρ -regolare, $\epsilon(M \cap A)$ è una s.v. Lagrangiana di T^*Q .

Dimostrazione. In primo luogo, per l'ipotesi di ρ -regolarità di M , $M \cap A$ deve essere una s.v. di dimensione n di $T^*\widehat{Q}$, infatti:

$$\begin{aligned}\text{codim}(M \cap A) &= \text{codim } M + \text{codim } A = n + k + k = n + 2k, \\ \text{dim}(M \cap A) &= 2(n + k) - (n + 2k) = n.\end{aligned}$$

Affinché $\epsilon(M \cap A)$ abbia ancora dimensione n , è necessario che $M \cap A$ sia trasversale alla fibra di ϵ . A tale scopo basta notare che

$$T_x^{\S}A = \left\{ v \in T_{\rho(x)}T^*\widehat{Q} \mid \forall u \in T_xA, \left\langle T_{\rho}v \wedge u, \omega_{\widehat{Q}} \right\rangle = 0 \right\},$$

il complemento ortogonale a T_xA , è formato dai vettori tali che

$$\omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} + d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{u} \Big|_{r=0} = 0, \quad \text{cioè } P, Q, R \equiv 0.$$

Quindi esso è lo spazio tangente alle fibre di ϵ , cioè ad U . Inoltre $T_xA + T_xM = TT^*\widehat{Q}$, quindi $(T_x^{\S}A) \cap (T_x^{\S}M) = \emptyset$. Poiché M è Lagrangiana, per definizione $T_x^{\S}M = T_xM$, da cui si ottiene che

$$(\text{fibre di } \epsilon) \cap T_xM = \emptyset, \implies (\text{fibre di } \epsilon) \cap T_x(M \cap A) = \emptyset.$$

Perciò $\epsilon \Big|_{M \cap A}$ è un'immersione e dunque anche $\epsilon(M \cap A)$ è varietà n -dimensionale.

Resta da vedere l'isotropia, cioè che vale

$$\omega_Q \Big|_{\epsilon(M \cap A)} = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} \Big|_{\epsilon(M \cap A)} = 0.$$

Su $M \cap A$, dal fatto che M è Lagrangiana, segue che $\omega_{\widehat{Q}} \Big|_M = 0$, segue che

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} + d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{u} = 0,$$

ma essendo $\mathbf{r} = 0$ su A , e quindi $d\mathbf{r} \equiv 0$, si ottiene che

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} \Big|_{\epsilon(M \cap A)} \equiv 0,$$

che è quanto si voleva. □

2.2.2 Equivalenza di Sottovarietà Lagrangiane

Abbiamo visto che, per il Teorema di Maslov-Hörmander, ogni varietà Lagrangiana $L \hookrightarrow T^*Q$ può essere rappresentata mediante delle *famiglie di Morse*. Naturalmente esistono infinite rappresentazioni della stessa varietà, quindi è necessario trovare un criterio per stabilire quando due diverse famiglie di Morse rappresentano in realtà la stessa varietà L . Cominciamo col definire le condizioni di equivalenza tra le sottovarietà Lagrangiane, ovvero nel dichiarare quali sono le immersioni di s.v. Lagrangiane che consideriamo indistinguibili ai nostri fini.

Servono alcune definizioni.

*Equivalenza
Lagrangiana*

DEFINIZIONE 2.2.4. *Una equivalenza Lagrangiana è una mappa*

$$\iota : T^*Q \longrightarrow T^*Q$$

tale che

1. ι è trasformazione canonica
2. manda le fibre di π_Q in sè, cioè induce un diffeomorfismo sulla base

$$\begin{aligned} g : Q &\longrightarrow Q \\ \mathbf{q} &\longmapsto \pi_Q(\iota(\pi_Q^{-1}(\mathbf{q}))). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 2.2.5 (FUNTORE COTANGENTE). *Data un diffeomorfismo tra varietà*

$$f : Q_1 \longrightarrow Q_2,$$

*resta definita una mappa tra i fibrati cotangenti corrispondenti, tramite il Funtole Cotangente T^*f :*

$$\begin{array}{ccc} T^*Q_1 & \xrightarrow{T^*f} & T^*Q_2 \\ \pi_{Q_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{Q_2} \\ Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_2 \end{array}, \quad (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \longmapsto \left(f(\mathbf{q}_1), \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^{-T} \mathbf{p}_1 \right)$$

Questa definizione è del tutto naturale se pensata come duale del funtole tangente T , e tutto funziona in modo che si abbia:

$$\begin{aligned} \forall v \in T_x Q_1, \forall \mathbf{p} \in T_x^* Q_1, \\ \langle Tfv, T^*f\mathbf{p} \rangle_2 \equiv \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} v, \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T} \mathbf{p} \right\rangle_2 = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} v, \mathbf{p} \right\rangle_1 \equiv \langle v, \mathbf{p} \rangle_1. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 4. Per ogni equivalenza Lagrangiana esistono un diffeomorfismo $g : Q \rightarrow Q$ ed una funzione liscia $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\iota = T^*g + dS \circ g,$$

nel senso che

$$\begin{aligned} \iota : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ \xi &\longmapsto T^*g\xi + dS \circ \pi_Q(T^*g\xi). \end{aligned}$$

Dimostrazione. In primo luogo, notiamo che dato $g : Q \rightarrow Q$ diffeomorfismo, esso induce

$$T^*g : T^*Q \rightarrow T^*Q \quad t.c. \quad (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto \left(g(\mathbf{q}), \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T} \mathbf{p} \right)$$

e T^*g è un'equivalenza Lagrangiana perché è evidentemente un diffeomorfismo che manda fibre di T^*Q in fibre di T^*Q ed inoltre conserva la struttura simplettica, perché:

$$\begin{aligned} dp'_i \wedge dq'^i &= \\ &= \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T}_{ij} dp_j + \frac{\partial}{\partial q^h} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T}_{ij} p_j \right) dq^h \right] \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T}_{ij} dq^j = \\ &= dp_j \wedge dq^j. \end{aligned}$$

D'altra parte, $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$ induce $\iota_1 : T^*Q \rightarrow T^*Q$, $(q, p) \mapsto (q, p + \frac{\partial S}{\partial q})$, che è chiaramente diffeomorfismo fibrato e conserva la struttura simplettica, perché:

$$dp'_i \wedge dq'^i = \left[dp_i + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} dq^j \right] \wedge dq^i = dp_i \wedge dq^i.$$

Quindi $\iota\xi = T^*g(\xi) + dS \circ \pi_Q(T^*g(\xi))$, inteso come composizione di questi due, è di certo un'equivalenza Lagrangiana.

Viceversa, sia $\iota : T^*Q \rightarrow T^*Q$ equivalenza Lagrangiana. Per definizione, esso manda fibre in fibre, quindi induce un diffeomorfismo $g : Q \rightarrow Q$. Poiché questo g induce un'equivalenza Lagrangiana, possiamo considerare $g^{-1*} \circ \iota$,⁶ per cui è sufficiente dimostrare la tesi per

$$\begin{aligned} \iota : T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\longmapsto (\mathbf{q}, P(\mathbf{q}, \mathbf{p})), \end{aligned}$$

⁶la composizione di equivalenze è certamente ancora una equivalenza.

cioè per $g \equiv \text{id}$. Ora, essendo ι trasformazione canonica, deve valere

$$\begin{aligned} \iota^* \omega_Q &= \omega_{Q'} = \omega_Q \text{ sse } d(\iota^* \theta_Q - \theta_Q) = 0, \text{ sse } d(Pd\mathbf{q} - \mathbf{p}d\mathbf{q}) = 0 \text{ sse} \\ \text{sse } \exists S : Q &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad Pd\mathbf{q} - \mathbf{p}d\mathbf{q} = dS = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} \text{ sse} \\ & \text{sse } P - \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

per il Lemma di Poincaré (“ogni forma chiusa è localmente esatta”) e poiché ι^* e d commutano. \square

PROPOSIZIONE 5. *Per come è definita l'equivalenza Lagrangiana ι , essa manda sottovarietà Lagrangiane di T^*Q in sottovarietà Lagrangiane. Inoltre, quando L_1 ha F_1 come funzione generatrice, allora $\iota(L_1) = L_2$ avrà*

$$F_2 = F_1 \circ g^{-1} + S$$

come funzione generatrice, se $\iota = T^*g + dS \circ g$.

Dimostrazione. Per definizione,

$$L_1 = \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} \right\}.$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \iota(L_1) &= \\ &= \left\{ (\mathbf{q}', \mathbf{p}') : \exists (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in L_1, \mathbf{q}' = g(\mathbf{q}), \mathbf{p}' = \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T} \mathbf{p} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(g(\mathbf{q})) \right\} = \\ &= \left\{ (\mathbf{q}', \mathbf{p}') : \exists \mathbf{q} \in Q, \mathbf{q}' = g(\mathbf{q}), \mathbf{p}' = \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T} \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}(g^{-1}(\mathbf{q}')) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}') \right\} = \\ &= \left\{ (\mathbf{q}', \mathbf{p}') : \exists \mathbf{q} \in Q, \mathbf{q}' = g(\mathbf{q}), \mathbf{p}' = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}(g^{-1}(\mathbf{q}')) \left(\frac{\partial g^{-1}}{\partial \mathbf{q}'} \right) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}') \right\} = \\ &= \left\{ (\mathbf{q}', \mathbf{p}') : \mathbf{p}' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'} (F_1 \circ g^{-1} + S) \right\} = \left\{ (\mathbf{q}', \mathbf{p}') : \mathbf{p}' = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}'} \right\}, \end{aligned}$$

essendo

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T} = \frac{\partial g^{-1}}{\partial \mathbf{q}'}.$$

\square

Sia data un'immersione Lagrangiana $j : L \hookrightarrow T^*Q$.

DEFINIZIONE 2.2.6. *La restrizione della proiezione π_Q a L , cioè $\pi_Q \circ j : L \rightarrow Q$, si dice mappa Lagrangiana.*

Una mappa Lagrangiana è una mappa tra varietà della stessa dimensione, ma forma una classe speciale di mappe: le generiche singolarità per la classe di tutte le mappe e le generiche singolarità per la classe delle mappe Lagrangiane sono, in generale, differenti.

DEFINIZIONE 2.2.7. *Due immersioni Lagrangiane, $j_1 : L_1 \rightarrow T^*Q$ e $j_2 : L_2 \rightarrow T^*Q$ (oppure due mappe Lagrangiane $l_1 : \pi_1 \circ j_1 : L_1 \rightarrow Q$ e $l_2 : \pi_2 \circ j_2 : L_2 \rightarrow Q$) si dicono Lagrange-equivalenti se esiste una $\iota : T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$ Lagrangiana equivalenza Lagrangiana tale che*

$$\iota(L_1) = L_2.$$

Sottovarietà Lagrangiane equivalenti dunque coincidono a meno di diffeomorfismi della base (Q) e dell'aggiunta di forme esatte $dS(\mathbf{q})$.

2.3 EQUIVALENZA DI FAMIGLIE DI MORSE

A questo punto, abbiamo definito cosa intendiamo per immersioni o mappe Lagrangiane equivalenti. Rimane da introdurre il concetto di equivalenza tra famiglie di Morse che faccia corrispondere immersioni equivalenti.

2.3.1 Equivalenza di Famiglie di Morse

Diamo allora tre definizioni di crescente generalità. Siano F_1 ed F_2 due famiglie di Morse definite sullo stesso “spazio grande” \widehat{Q} (t.c. $\exists \rho : \widehat{Q} \rightarrow Q$, fibrazione). Diremo che

\mathbb{R} equivalenza

DEFINIZIONE 2.3.1 (\mathbb{R} -EQUIVALENZA). $F_1 \underset{\mathbb{R}}{\sim} F_2$ se $\exists g : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}$ diffeomorfismo fibrato (rispetto a ρ , cioè t.c. esso induca un diffeomorfismo su $Q \rightarrow Q$) ed

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = F_1 \circ g(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = F_1(g_1(\mathbf{q}), g_2(\mathbf{q}, \mathbf{u})).$$

\mathbb{R}^+ equivalenza

DEFINIZIONE 2.3.2 (\mathbb{R}^+ -EQUIVALENZA). $F_1 \underset{\mathbb{R}^+}{\sim} F_2$ se $\exists g : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}$ diffeomorfismo fibrato ed $\exists S : Q \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = F_1(g_1(\mathbf{q}), g_2(\mathbf{q}, \mathbf{u})) + S(\mathbf{q}).$$

Siano $F_1 : \widehat{Q}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ed $F_2 : \widehat{Q}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ due famiglie di Morse (con $\rho_1 : \widehat{Q}_1 \rightarrow Q$ e $\rho_2 : \widehat{Q}_2 \rightarrow Q$ fibrazioni ausiliarie).

$stably\mathbb{R}^+$
equivalenza

DEFINIZIONE 2.3.3 ($stably\mathbb{R}^+$ -EQUIVALENZA). Diciamo che $F_1 \underset{stably\mathbb{R}^+}{\sim} F_2$ se aggiungendo degli argomenti z_1 a \widehat{Q}_1 e z_2 a \widehat{Q}_2 si immergono in un \widehat{Q} comune ed esistono $Q_1(z_1)$ e $Q_2(z_2)$ forme quadratiche non degeneri per cui valga $F_1 + Q_1 \underset{\mathbb{R}^+}{\sim} F_2 + Q_2$.

DEFINIZIONE 2.3.4. Un'equivalenza Lagrangiana sul fibrato cotangente dello “spazio grande” \widehat{Q} , ($\rho : \widehat{Q} \rightarrow Q$), cioè

$$\iota : T^*\widehat{Q} \rightarrow T^*\widehat{Q}, \quad \iota = T^*g + dS \circ g \circ \pi_Q,$$

si dice fibrata se

1. $g : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}$ è diffeomorfismo fibrato, cioè induce un diffeomorfismo $g_1 : Q \rightarrow Q$;
2. $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$, cioè S è indipendente da u (costante lungo le fibre di $\rho : \widehat{Q} \rightarrow Q$).

Osservazione 1. $F_1 \underset{\text{stably}\mathbb{R}^+}{\sim} F_2$ SSE esiste una equivalenza Lagrangiana fibrata $\iota : T^*\widehat{Q} \rightarrow T^*\widehat{Q}$ tale che $F_2 = F_1 \circ \iota_1$ dove $\iota_1 = T^*\rho \circ \iota (T^*\rho)^{-}$ è l'equivalenza Lagrangiana indotta da ι su T^*Q .

PROPOSIZIONE 6. *Un'equivalenza Lagrangiana $\iota : T^*\widehat{Q} \rightarrow T^*\widehat{Q}$ è fibrata SSE $\iota(A) = A$.*

Dimostrazione. Per definizione, se ι è fibrata, essa si scompone in un diffeomorfismo $g : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}$ fibrato, cioè t,c, $g(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = (g_1(\mathbf{q}), g_2(\mathbf{q}, \mathbf{u}))$ e nella traslazione indotta da $\partial S / \partial \mathbf{q}$.

L'equivalenza indotta da g conserva lo spazio misto. Infatti essa opera sui covettori (\mathbf{p}, \mathbf{r}) nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{r}} \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{u})} \right)^{-T} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}.$$

Indaghiamo più a fondo nella struttura di $\left(\frac{\partial g}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{u})} \right)^{-T}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{r}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} & \mathbb{O} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix}^{-T} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} & \mathbb{O} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T & \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \mathbb{O} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{r} = \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \bar{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Essendo g diffeomorfismo e $\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}} = 0$, deve essere $\det \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \right) \neq 0$, per cui $\mathbf{r} = 0 \iff \bar{\mathbf{r}} = 0$.

D'altra parte, $(\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{r}) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}))$, essendo localmente A l'insieme dei covettori $\mathbf{r} = 0$, manda A in sè.

Viceversa, supponiamo che $\iota = (g, T^*g)$ mandi A in sè. ι è canonica, dunque conserva $\omega_{\widehat{Q}} = d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{u} + d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$. Di conseguenza, il complemento emiortogonale ad $\alpha = T_x A$, viene mandato in sè dalla mappa tangente a ι , $T\iota = T(g, T^*g) = (Tg, TT^*g)$. Ma $T_x A = \{(Q, U; P, 0)\} \subseteq TT^*\widehat{Q}$, dunque $T_x^\S A = \{(0, U; 0, 0)\} = \ker TT^*\rho \subseteq TT^*\widehat{Q}$, si tratta cioè dello spazio tangente alla fibra di ρ , dunque g deve mandare la fibra di ρ in sè. Infatti

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U} \end{pmatrix}, \\ \implies \forall U, \quad \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}} \right) U = 0 &\implies \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}} = 0, \end{aligned}$$

per cui $g = (g_1, g_2)$ è ρ -fibrato.

Se invece $\iota = \text{id} + dS$, allora $(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{r}) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{r} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}})$, e se $\iota(A) = A$, con $A = \{(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, 0)\}$, allora $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}}|_A = 0$ solo se $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} = 0$, cioè $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Tutto ciò si può verificare anche con un calcolo diretto. Infatti, se $\iota = T^*g + dS$ manda A in sè,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \exists \bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n, \text{ e anche } \forall \bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \end{array} \right)^{-T} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T & \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}} \right)^T & \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{p}} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \left(\bar{\mathbf{p}} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right) + \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Se questo vale per ogni $\bar{\mathbf{p}}$, evidentemente $\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{u}}$ deve essere $\equiv 0$, perciò $\det \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \neq 0$ (poiché g è diffeomorfismo), e quindi deve aversi $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} = 0$, cioè $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$. \square

PROPOSIZIONE 7. *Sia $\iota_1 : T^*Q \rightarrow T^*Q$ un'equivalenza Lagrangiana ed L_1 una sottovarietà Lagrangiana di T^*Q di famiglia di Morse F_1 . Allora $\iota_1(L_1)$ è una sottovarietà Lagrangiana che ha come germe di famiglia di Morse F_2 , \mathbb{R}^+ -equivalente ad F_1 .*

Dimostrazione. $\iota_1 : T^*Q \rightarrow T^*Q$, $\iota_1 = T^*g_1 + dS|_{\pi_{T^*g}}$ con $g_1 : Q \rightarrow Q$ e $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Essa induce l'equivalenza Lagrangiana fibrata $\iota : T^*\hat{Q} \rightarrow T^*\hat{Q}$, $(\mathbf{q}, \mathbf{u}; \mathbf{p}, \mathbf{r}) \mapsto \left(g_1(\mathbf{q}), \mathbf{u}; \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-T} \mathbf{p} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{r} \right)$. Allora, se poniamo: $F_2(\mathbf{q}', \mathbf{u}') := F_1 \circ g^{-1}(\mathbf{q}', \mathbf{u}') + S(\mathbf{q}')$ per (A) F_2 è famiglia di Morse di L'_2 equivalente ad L_1 e questa $L'_2 = \iota_1(L_1) = L_2$ per come abbiamo definito ι a partire da ι_1 . \square

2.3.2 Dimostrazione del Teorema di Equivalenza

Ciò che vogliamo dimostrare è la seguente formulazione del già introdotto Teorema di Equivalenza:

TEOREMA 5. *Due sottovarietà Lagrangiane sono Lagrange-equivalenti SSE le famiglie di Morse che le definiscono sono stably \mathbb{R}^+ -equivalenti.*

Dimostrazione del Teorema: La dimostrazione è articolata in diversi lemmi.

LEMMA 1. *Due famiglie di Morse \mathbb{R}^+ -equivalenti generano s.v. Lagrangiane equivalenti.*

Dimostrazione. Sia F_1 una famiglia di Morse per $L_1 \subseteq T^*Q$. Sia F_2 una funzione \mathbb{R}^+ -equivalente a F_1 . Per definizione, $\exists g : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}$ diffeomorfismo fibrato, ed $S : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$F_2(\mathbf{q}', \mathbf{u}') = F_1 \circ g^{-1}(\mathbf{q}', \mathbf{u}') + S(\mathbf{q}').$$

Notiamo che g ed S inducono un'equivalenza Lagrangiana fibrata $\iota : T^*\widehat{Q} \rightarrow T^*\widehat{Q}$, $\iota = T^*g + dS \circ g \circ \pi_{\widehat{Q}}$. Allora, sia M_1 la sottovarietà Lagrangiana ρ -regolare di $T^*\widehat{Q}$ avente F_1 come funzione generatrice. F_2 genera allora $M_2 = \iota(M_1)$, che a sua volta è Lagrangiana e ρ -regolare. Infatti non è difficile convincersi che

$$\text{rk} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{u}'} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{u}' \partial \mathbf{u}'} \right) = \text{rk} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{u}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \right),$$

essendo $\frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{u}'} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial(g^{-1})}{\partial \mathbf{u}'}$, ed essendo g diffeomorfismo.

Perciò

$$\iota(L_1) = \iota(M_1 \cap A) \stackrel{*}{=} \iota(M_1) \cap \iota(A) = M_2 \cap A = L_2$$

e dunque $\epsilon(M_2 \cap A)$ è s.v. Lagrangiana di T^*Q ed è uguale a $\iota_1(L_1)$, dove $\iota_1 = T^*g_1 + dS \circ \pi_Q \circ T^*g_1$ è l'equivalenza Lagrangiana su T^*Q indotta dall'equivalenza fibrata ι , con $g = (g_1, g_2)$. \square

LEMMA 2. *Sottovarietà Lagrangiane equivalenti ammettono famiglie di Morse \mathbb{R}^+ -equivalenti.*

Dimostrazione. Supponiamo assegnata una equivalenza Lagrangiana di T^*Q che manda la s.v. Lagrangiana Λ_1 , definita dalla famiglia di Morse F_1 , nella s.v. Lagrangiana Λ_2 .

Allora Λ_2 può essere definita da una famiglia di Morse F_2 , \mathbb{R}^+ -equivalente ad F_1 .

Infatti consideriamo il prodotto diretto della equivalenza Lagrangiana fibrata di T^*Q con la trasformazione identica $(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{r})$. Questa è un'equivalenza Lagrangiana di $T^*\widehat{Q}$. Essa manda la sezione Lagrangiana M_1 , generata da F_1 , nella sezione Lagrangiana M_2 , generata da

$$F_2 = F_1 \circ (g^{-1} \times \text{id}) + S$$

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = F_1(g^{-1}(\mathbf{q}), \mathbf{u}) + S(\mathbf{q}).$$

□

Siamo così legittimati a ragionare su diverse famiglie di Morse definenti la *stessa* varietà Lagrangiana

$$j_\Lambda : \Lambda \hookrightarrow T^*Q$$

Parte Prima (“ \Leftarrow ”). Famiglie di Morse *stably* \mathbb{R}^+ -equivalenti generano varietà Lagrangiane equivalenti.

Dimostrazione. Per quanto detto e dato che Q_1 e Q_2 sono forme quadratiche non degeneri, è sufficiente verificare che $F(\mathbf{q}, \mathbf{u})$ e $F(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \pm z^2$ definiscano la stessa varietà. Infatti:

$$\Lambda_1 = \{(\mathbf{q}, \mathbf{u}) : \mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{u}} = 0\},$$

$$\Lambda_2 = \{(\mathbf{q}, \mathbf{u}) : \mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{u}} = 0, \frac{\partial F_2}{\partial z} = \pm 2z = 0\},$$

come si voleva. □

Parte Seconda (“ \Rightarrow ”). Famiglie di Morse F_0 e F_1 definenti sottovarietà Lagrangiane equivalenti, sono *stably* \mathbb{R}^+ -equivalenti.

Per quanto è già stato detto, è sufficiente limitarci a famiglie di Morse definenti la *stessa* s.v. Lagrangiana Λ .

In primo luogo, verifichiamo che è possibile ridursi a delle famiglie di Morse minimali, e quindi a delle famiglie di Morse speciali. Questa è la parte più sostanziosa del teorema.

LEMMA 3. *Ogni famiglia di Morse F è *stably* \mathbb{R}^+ -equivalente ad una famiglia di Morse minimale (con un numero di parametri ausiliari u minimo, cioè pari a $k = \dim \ker(dl(\lambda_0))$).*

Dimostrazione. Per il Lemma di Morse generalizzato, esiste un diffeomorfismo $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{u}', \mathbf{v})$ per il quale $F(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{u}') + Q(\mathbf{v})$, dove $Q(\mathbf{v})$ è una forma quadratica non degenera e $\frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{u}'^2}(\lambda_0) = 0$.

Se pensiamo a F_1 come famiglia di Morse, essa definisce la stessa immersione Lagrangiana di F . Così ogni famiglia di Morse è *stably* \mathbb{R}^+ -equivalente ad una famiglia di Morse minimale. \square

Abbiamo già osservato che ogni immersione Lagrangiana ammette una funzione generatrice $S(q^I, p_J)$ con un numero minimo di argomenti patologici p_j , $j \in J$, con $\#(J) = k = \dim \ker(dl(\lambda_0))$:

$$p_I = \frac{\partial S}{\partial q^I}, \quad q^J = -\frac{\partial S}{\partial p_J}.$$

Fissiamo allora questo insieme di k argomenti patologici.

LEMMA 4. *Se $F(\mathbf{q}, \mathbf{u})$ è minimale, allora*

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial q^J} \right) \neq 0.$$

Dimostrazione. Se F è famiglia di Morse, per $M = \text{Im}(dF)$ vale $M \pitchfork A$, che è una condizione di indipendenza delle forme

$$dr_A = \frac{\partial^2 F}{\partial q^h \partial u_A} dq^h + \frac{\partial^2 F}{\partial u_B \partial u_A} du_B,$$

ovvero una condizione sul rango della matrice $k \times (n + k)$:

$$\text{rk} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^h \partial u_A} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_B \partial u_A} \right) = \max = k.$$

Esiste uno stretto legame tra le derivate seconde di F ed il nucleo di $dl(\lambda_0)$. Siano $k = \dim \ker dl(\lambda_0) = \dim U$, $n = \dim Q$. Se $\eta \in \ker dl(\lambda_0)$, allora

$$dq^h(\eta) = 0, \quad h = 1, \dots, n,$$

mentre la mappa lineare

$$\ker dl(\lambda_0) \ni \eta \longmapsto du^B(\eta) \in \mathbb{R}^k,$$

è isomorfismo.

Valutiamo le forme $d\mathbf{p}$ sul vettore η :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}(\lambda_0), \\ d\mathbf{p}(\eta) &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} d\mathbf{q}(\eta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{q}} d\mathbf{u}(\eta) = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{q}} d\mathbf{u}(\eta). \end{aligned}$$

Allora

$$d\mathbf{p}(\eta) \in \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{q}} (\mathbb{R}^k).$$

Inoltre possiamo scrivere

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{q}} \right) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial q^I} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial q^J} \right).$$

Dato che per ipotesi la s.v. Λ in esame è definita anche dalla funzione generatrice $S(q^I, p_J)$:

$$(q^I, p_J) \mapsto \left(q^I, -\frac{\partial S}{\partial p_J}; \frac{\partial S}{\partial q^I}, p_J \right).$$

si vede che quando le forme dp_I sono valutate su di un vettore $\eta \in \ker dl(\lambda_0)$,

$$dp_I(\eta) = \frac{\partial^2 S}{\partial q^I \partial q^I} dq^I(\eta) + \frac{\partial^2 S}{\partial p_J \partial q^I} dp_J(\eta) = \frac{\partial^2 S}{\partial p_J \partial q^I} dp_J(\eta),$$

sono combinazioni lineari delle $dp_J(\eta)$, per cui, queste k forme

$$dp_J \Big|_{\ker dl(\lambda_0)} = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial q^J} d\mathbf{u}$$

devono essere indipendenti. □

LEMMA 5. *Ogni famiglia di Morse minimale è \mathbb{R}^+ -equivalente a una famiglia di Morse speciale.* ⁷

Dimostrazione. Se F è minimale, $\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial q^J}\right) \neq 0$. Allora poiché per definizione vale $p_j = \frac{\partial F}{\partial q^J}(q, \mathbf{u})$, qui si può invertire ed ottenere $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, p_J)$. Cioè esiste un diffeomorfismo locale fibrato, $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{q}, p_J(\mathbf{q}, \mathbf{u}))$ di inversa $(\mathbf{q}, p_J) \mapsto (\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, p_J))$.

Per definizione di diffeomorfismo fibrato, la funzione $F_1(\mathbf{q}, p_J) = F(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, p_J))$ è \mathbb{R}^+ -equivalente ad F e genera la stessa varietà Lagrangiana. Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial p_J} &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial p_J} = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial q^J} &= \frac{\partial F}{\partial q^J} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} (= 0) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial q^J} = \frac{\partial F}{\partial q^J} \stackrel{\text{def}}{=} p_J(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, p_J)) = \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Quindi F_1 è una *famiglia di Morse speciale* \mathbb{R}^+ -equivalente a F . □

⁷Si dice *speciale* una famiglia di Morse minimale in cui $\mathbf{u} = \frac{\partial F}{\partial q^J}$

Per concludere è a questo punto sufficiente dimostrare il seguente:

LEMMA 6. *Due famiglie di Morse speciali definenti la stessa varietà Lagrangiana sono \mathbb{R}^+ -equivalenti.*

Dimostrazione. Siano F_0, F_1 famiglie di Morse speciali definenti $\Lambda \subseteq T^*Q$. Consideriamo i sottoinsiemi

$$N_i = \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \widehat{Q} \mid \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = 0 \right\} \quad i = 0, 1.$$

Per quanto già visto, questi insiemi coincidono con

$$N = \left\{ (\mathbf{q}, p_J) \mid (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Lambda \right\},$$

quindi sono indipendenti da F_0, F_1 . Anzi, poiché abbiamo visto che una s.v. Lagrangiana può essere parametrizzata tramite la funzione generatrice $S(q^I, p_J)$, p_J argomenti patologici, sui punti di N valgono:

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^J} = \mathbf{u} = p_J, \quad \frac{\partial F_i}{\partial q^I} = p_I = \frac{\partial S}{\partial q^I}(q^I, p_J),$$

quindi $\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{q}}$ sono indipendenti da $i = 0, 1$ su N . Supponendo allora $F_1 - F_0 = 0$,⁸ abbiamo che $F_1 - F_0$ su N ha uno zero di ordine non inferiore al secondo.

Ora, rimane da dimostrare che $F_0 \underset{\mathbb{R}}{\sim} F_1$. A tale scopo, usiamo il metodo delle omotopie. Poniamo

$$F_t = F_0 + t(F_1 - F_0)$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Certamente, anche F_t è famiglia di Morse speciale definente la stessa Λ . Se dimostriamo che esiste una famiglia di diffeomorfismi G_t di \widehat{Q} , $G_t(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = (q, g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t))$ liscia nella $t \in [0, 1]$, tale che

$$F_t \circ G_t = F_0,$$

⁹ avremo che G_1 stabilisce una \mathbb{R} -equivalenza tra le famiglie F_0 ed F_1 .

Derivando in t la relazione $F_t \circ G_t = F_0$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ [F_0 + t(F_1 - F_0)] \circ (\mathbf{q}, g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)) \} = \\ = (F_1 - F_0)(\mathbf{q}, g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)) + \sum_{l=1}^k \frac{\partial F_t}{\partial u_l} \frac{\partial g_l}{\partial t}(\mathbf{q}, g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)), \end{aligned}$$

⁸ciò è certamente vero a meno di costanti additive

⁹si osservi che ciò comporterà che $G_1|_N \equiv \text{id}$, in particolare che $g_1|_N \equiv \text{id}$.

che possiamo scrivere come equazione per le componenti del campo vettoriale delle velocità

$$\xi = \sum_{l=1}^k \xi_l \frac{\partial}{\partial u_l} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial g_l}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_l},$$

della famiglia di diffeomorfismi G_t applicato ad F_t :

$$(F_1 - F_0) + \langle F_t, \xi \rangle = 0.$$

Ora consideriamo la varietà $N' \stackrel{\text{def}}{=} N \times \{t\}$ nello spazio $\widehat{Q} \times [0, 1]$. Le equazioni

$$\frac{\partial F_t}{\partial u_l} = 0, \quad l = 1, \dots, k,$$

formano un sistema di equazioni linearmente indipendenti su questa varietà. In altre parole, la definiscono. Per il *Lemma di Hadamard*, ogni funzione che si annulla sulla varietà N' è rappresentabile come combinazione lineare (i cui coefficienti sono funzioni) delle $\frac{\partial F_t}{\partial u_l}$. Perciò, per ogni Φ avente, per ogni $t \in [0, 1]$, uno zero del secondo ordine su N , esistono delle funzioni ξ_l tali che

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = \sum_{l=1}^k \xi_l(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \frac{\partial F_t}{\partial u_l}, \quad \text{con in più} \quad \boxed{\xi_l|_{N'} \equiv 0.}$$

Poiché $F_1 - F_0$ è una Φ di questo tipo, esisteranno delle $\xi_l(q, u, t)$ tali che

$$\xi_l(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = \frac{\partial g_l}{\partial t}.$$

Vorremmo che $F_0 \equiv \text{id}$ perciò, integrando le funzioni ξ_l , otterremo

$$g_l(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = u_l + \int_0^t \xi_l(\mathbf{q}, \mathbf{u}, s) ds.$$

Essendo $\xi = 0$ su N , allora $g_l|_{N'} \equiv \text{id}_U$, cioè $\forall t, G_t|_N \equiv \text{id}$, inoltre, per costruzione, G_t è diffeomorfismo fibrato, e infine $F_1 \circ G_1 = F_0$. Di conseguenza, F_1 è \mathbb{R} -equivalente ad F_0 , che è quanto si voleva fosse dimostrato. \square

\square

2.3.3 Supplemento: Il Lemma di Hadamard

LEMMA 7. Sia Γ una varietà $(n - k)$ -dimensionale, definita da

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid G(x) = 0\},$$

dove $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $\text{rk}(dG(x)) = k (= \max)$, cioè Γ è definita dalle:

$$\begin{cases} G_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ G_k(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Allora, ogni $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile almeno due volte, t.c. $g|_{\Gamma} = 0$, deve essere linearmente dipendente dalle G_1, \dots, G_k . Cioè devono esistere $T_1(x), \dots, T_k(x)$ tali che

$$g(x) = \sum_{i=1}^k T_i(x) G_i(x).$$

Dimostrazione. Essendo G_i funzionalmente indipendenti, possiamo scegliere un sistema di coordinate su \mathbb{R}^n in modo che Γ si possa descrivere come

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k = 0, \end{cases}$$

e parametrizzare con le rimanenti $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$.

Qualunque sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vale certamente l'identità:

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i g(\alpha)}{\sum_{r=1}^k \alpha_r \alpha_r} \alpha_i.$$

Potremmo porre

$$T_i(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha_i g(\alpha)}{\sum_{r=1}^k \alpha_r \alpha_r},$$

ma tale espressione non è ben definita per $\alpha_i = 0$, cioè sulla varietà Γ . È necessario verificare l'esistenza del limite

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\alpha_i g(\alpha)}{\sum_{r=1}^k \alpha_r \alpha_r}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.5)$$

Per fare ciò, sviluppiamo g in serie di Taylor, rispetto ad un punto $(0, \bar{\alpha}_l)$ della varietà Γ ,

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= g(0, \bar{\alpha}_l) + \frac{\partial g}{\partial \alpha_i}(0, \bar{\alpha}_l)(\alpha_i - \bar{\alpha}_i) + \frac{\partial g}{\partial \alpha_h}(0, \bar{\alpha}_l)(\alpha_h - \bar{\alpha}_h) + O(|\alpha - \bar{\alpha}|^2) = \\ &= \frac{\partial g}{\partial \alpha_i}(0, \bar{\alpha}_l)\alpha_i + O(|\alpha - \bar{\alpha}|^2). \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella 2.5, si verifica che, localmente a $(0, \bar{\alpha}_l)$,

$$\frac{\alpha_i g(\alpha)}{\sum_{r=1}^k \alpha_r \alpha_r} \leq C \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i \alpha_i}{\sum_{r=1}^k \alpha_r \alpha_r} \leq C,$$

cioè che il limite esiste.

□

2.4 FAMIGLIE DI MORSE GLOBALI PER SOTTOVARIETÀ LAGRANGIANE ISOTOPE ALLA SEZIONE NULLA

Non è difficile, per mezzo del funzionale d'Azione, realizzare una famiglia generatrice di sottovarietà Lagrangiane che siano soluzioni geometriche di problemi di Cauchy.¹⁰ Queste famiglie generatrici però dipendono da infiniti parametri ausiliari, rendendo così la trattazione notevolmente più complicata. In questa sezione consideriamo una particolare classe di sottovarietà Lagrangiane. Per questa classe esibiamo la procedura di costruzione della famiglia generatrice a infiniti parametri, e mostriamo come sia possibile ridurre tali parametri ad un numero finito.

Richiamiamo preliminarmente la seguente

DEFINIZIONE 2.4.1. *Una Isotopia Hamiltoniana è una trasformazione canonica generata da una certa funzione Hamiltoniana H , anche dipendente dal parametro reale di evoluzione $s \in [0, 1]$.*

La seguente costruzione proviene da alcune idee di [VITERBO, 1996], mentre alcune tecniche matematiche provengono da [AMANN & ZEHNDER, 1980] e [CONLEY & ZEHNDER, 1984].

TEOREMA 6. *Sia $\Lambda \subseteq T^*\mathbb{R}^n$ una sottovarietà Lagrangiana corrispondente alla sezione nulla di $T^*\mathbb{R}^n$ tramite una isotopia Hamiltoniana, generata da H . Se le derivate seconde di H sono globalmente ed uniformemente limitate, allora Λ ammette una funzione generatrice globale a finiti parametri.*

2.4.1 Costruzione a infiniti parametri

Consideriamo l'insieme delle curve a derivata prima integrabile

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \gamma(\cdot) = (\mathbf{q}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot)) \in H^{1,2}([0, 1]; \mathbb{R}^{2n}) \mid \mathbf{p}(0) = 0 \right\}.$$

Si osserva che sono curve uscenti dalla sezione nulla, inoltre, per il teorema di immersione di Sobolev¹¹ ogni γ è continua.

LEMMA 8 (STRUTTURA LINEARE DI Γ). *L'insieme Γ ha una naturale struttura di spazio vettoriale. Ne segue che*

$$T_\gamma \Gamma = \Gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

¹⁰cfr. [BERRY & UPSTILL, 1980]

¹¹se $k < \frac{\dim A}{p}$, allora $H^{j,p}(A, B) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(A, B)$ perciò $H^{1,2} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(A, B)$

Consideriamo la seguente rappresentazione biettiva di Γ ,

LEMMA 9 (LA BIEZIONE g).

$$g : \mathbb{R}^n \times L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \Gamma \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{q}_1, \varphi(\cdot)) \longmapsto \gamma(\mathbf{q}_1, \varphi(\cdot))(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathbf{q}_1 - \int_t^1 \varphi_q(s) ds, \int_0^t \varphi_p(s) ds \right). \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Per verificarne la biettività cerchiamone l'inversa: essa è certamente

$$h : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n \times L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2n}) \quad (2.8)$$

$$\gamma \longmapsto h(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma_q(1), \dot{\gamma}(\cdot)), \quad (2.9)$$

infatti,

$$\begin{aligned} (g \circ h)(\gamma)(t) &= \left(\gamma_q(1) - \int_t^1 \dot{\gamma}_q(s) ds, \int_0^t \dot{\gamma}_p(s) ds \right) = \\ &= (\gamma_q(1) - \gamma_q(1) - (-\gamma_q(t)), \gamma_p(t) - \gamma_p(0)) = (\gamma_q(t), \gamma_p(t)). \end{aligned}$$

□

Sia $(\Phi^s)_{s \in [0, 1]}$ una isotopia Hamiltoniana di $T^*\mathbb{R}^n$, cioè una trasformazione canonica 1-valenza, e sia $H = H(s, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, $s \in [0, 1]$ la funzione Hamiltoniana 1-parametrica che la genera:

$$\Phi^s = \Phi_{X_H}^{s, 0}, \quad \Phi_{X_H}^{0, 0} = id_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Ricordiamo che il flusso Φ^s trasforma s.v. Lagrangiane in s.v. Lagrangiane: $\Lambda_s = \Phi^s(\Lambda_0)$. Nelle nostre ipotesi,

$$\Lambda = \Lambda_1 = \Phi(\Lambda_0),$$

dove $\Lambda_0 = \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}^n \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} = 0 \right\}$ è la *sezione nulla* di $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Poniamo

$$\mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix},$$

allora le equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0,$$

possono essere messe nella forma

$$\dot{\gamma} - \mathbb{E}\nabla H = 0, \quad \text{oppure, equivalentemente,} \quad \mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H = 0.$$

Consideriamo in Γ il funzionale d'Azione del Principio Variazionale di Hamilton-Helmholtz per una Hamiltoniana H :

$$A : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma \longmapsto A(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 [\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)] dt.$$

LEMMA 10 (HAMILTON-HELMHOLTZ). *Una curva $\gamma \in \Gamma$ risolve H-J sse*

$$\delta A(\gamma)\delta\gamma = 0, \quad \forall \delta\gamma \in \Gamma \quad \text{tale che} \quad \delta\mathbf{q}(1) = 0,$$

dove δ è la derivata di Gâteaux.

Dimostrazione. Un calcolo diretto mostra che, $\forall \delta\gamma \in T_\gamma\Gamma = \Gamma$,

$$\delta S(\gamma)\delta\gamma = \left. \frac{d}{d\lambda} S(\gamma + \lambda\delta\gamma) \right|_{\lambda=0} = \tag{2.10}$$

$$\int_0^1 \left[\delta\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta\mathbf{p} \right] dt = \tag{2.11}$$

$$\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q} \Big|_0^1 + \int_0^1 \left[\delta\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta\mathbf{p} \right] dt = \tag{2.12}$$

$$\mathbf{p}(1) \cdot \delta\mathbf{q}(1) - \mathbf{p}(0) \cdot \delta\mathbf{q}(0) + \int_0^1 \left\{ \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right] \delta\mathbf{p} - \left[\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right] \delta\mathbf{q} \right\} dt = \tag{2.13}$$

$$\mathbf{p}(1) \cdot \delta\mathbf{q}(1) - \int_0^1 [\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H] \cdot \delta\gamma dt \tag{2.14}$$

□

Questo ci permette di considerare il funzionale d'Azione A come una funzione generatrice di Λ_1 con infiniti parametri (in $L^2([0, 1], \mathbb{R}^{2n})$). Infatti vale il seguente

LEMMA 11 (FUNZIONE GENERATRICE AD INFINITI PARAMETRI). *L'applicazione*

$$W = A \circ g : \mathbb{R}^n \times L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{q}_1, \varphi(\cdot)) \longmapsto W(\mathbf{q}_1, \varphi(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} A(\gamma(\mathbf{q}_1, \varphi(\cdot))),$$

è una funzione generatrice per Λ_1 , cioè

$$\Lambda_1 = \left\{ (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \mid \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^n, \exists \varphi(\cdot)^* \in L^2, \mathbf{p}_1 = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1, \varphi^*), \frac{DW}{Dv}(\mathbf{q}_1, \varphi^*) = 0 \right\}.$$

Dimostrazione. Intanto, per W , si ha per esteso,

$$W(\mathbf{q}_1, \varphi(\cdot)) = \int_0^1 \left[\int_0^t \varphi_p(s) ds \cdot \varphi_q(t) - H \left(q_1 - \int_t^1 \varphi_q(s) ds, \int_0^t v_p(s) da, t \right) \right] dt. \quad (2.15)$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{DW}{Dv} \delta\varphi &= \frac{d}{d\lambda} W(\mathbf{q}_1, \varphi + \lambda \delta\varphi) \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^t \delta\varphi_p(s) ds \cdot \varphi_q(t) + \int_0^t v_p(s) ds \cdot \delta\varphi_q(t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left(- \int_t^1 \delta\varphi_q(s) ds \right) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(- \int_t^1 \delta\varphi_p(s) ds \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Calcoliamo intanto il primo termine. Preliminarmente, si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t \varphi_p(s) ds \int_1^t \delta\varphi_q(s) ds \right) = \varphi_p(t) \int_1^t \delta\varphi_q(s) ds + \delta\varphi_q(t) \int_0^t \delta\varphi_p(s) ds;$$

e per integrazione da $t = 0$ a $t = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\int_0^t \varphi_p(s) ds \int_1^t \delta\varphi_q(s) ds \right) \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 \left(\varphi_p(t) \int_1^t \delta\varphi_q(s) ds + \delta\varphi_q(t) \int_0^t \delta\varphi_p(s) ds \right) dt, \end{aligned}$$

ed infine

$$\int_0^1 \delta\varphi_q(t) \int_0^s \varphi_p(s) ds dt = \int_0^1 \varphi_p(t) \int_s^1 \delta\varphi_q(s) ds dt.$$

Inserendo questo risultato nella espressione di DW/Dv otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{DW}{Dv} \delta\varphi &= \int_0^1 \left[\varphi_p(t) \int_t^1 \delta\varphi_q(s) ds + \varphi_q(t) \int_0^t \delta\varphi_p(s) ds - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left(- \int_t^1 \delta\varphi_q(s) ds \right) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(- \int_0^t \delta\varphi_p(s) ds \right) \right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[- \left(\varphi_p(t) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \left(- \int_t^1 \delta\varphi_q(s) ds \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(-\varphi_q(t) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \int_0^t \delta\varphi_p(s) ds \right] dt = \\ &= - \int_0^1 (\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H) \delta\gamma ds, \end{aligned}$$

dove $\delta\gamma = \left(-\int_t^1 \delta\varphi_q(s)ds, \int_0^t \delta\varphi_p(s)ds\right) \in \Gamma$. Perciò si ottiene

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1} \Big|_{\frac{DW}{Dv}=0} \delta \mathbf{q}_1 = \int_0^1 \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right) \cdot \delta \mathbf{q}_1 dt = \int_0^1 \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \delta \mathbf{q}_1 ds = \mathbf{p}(1) \cdot \delta \mathbf{q}_1.$$

□

2.4.2 Sviluppi di Fourier e Punto Fisso

Per ciascun $\varphi \in L^2$ consideriamo lo sviluppo di Fourier

$$\varphi(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k e^{i2\pi ks}.$$

Per ciascun $N \in \mathbb{N}$ fissato consideriamo le mappe di proiezione sulla base $\{e^{i2\pi ks}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ di L^2 ,

$$\mathbb{P}_N \varphi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|k| \leq N} \varphi_k e^{i2\pi ks}, \quad \mathbb{Q}_N \varphi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|k| > N} \varphi_k e^{i2\pi ks}.$$

Chiaramente,

$$\mathbb{P}_N L^2 \oplus \mathbb{Q}_N L^2 = L^2,$$

e per $\varphi \in L^2$ scriveremo $u \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_N \varphi$ e $v \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}_N \varphi$.

Osservazione 2. L'idea sviluppata qui sotto consiste nel mostrare che, in un senso opportuno e riguardante il Funzionale d'Azione, la coda 'infinita' $\mathbb{Q}_N \dot{\gamma}$ legata ad una curva $\gamma \in \Gamma$ risolvete le equazioni di Hamilton può essere trascurata, o più precisamente, γ è completamente determinata dalla sua parte 'finita' $\mathbb{P}_N \dot{\gamma}$, per un $N \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande.

LEMMA 12 (LIPSCHITZ). *Per un $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ e un $u \in \mathbb{P}_N L^2$, la mappa*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_N L^2 &\longrightarrow (\Gamma, \|\cdot\|_{L^2}) \\ v &\longmapsto g(\mathbf{q}_1, u + v) \end{aligned}$$

è Lipschitziana di costante $\frac{1}{\pi N}$.

Dimostrazione. Più in dettaglio, la mappa qui sopra è

$$v \longmapsto \left(\mathbf{q}_1 - \int_s^1 (u_q + v_q)(r) dr, \int_0^s (u_p + v_p)(r) dr \right).$$

Per ciascun $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}_N L^2$, consideriamo lo sviluppo di Fourier:

$$v \stackrel{\text{def}}{=} v_2 - v_1 = (v_q, v_p), \quad v = \sum_{|k|>N} v_k e^{i2\pi ks}, \quad v_k = (q_k, p_k).$$

Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} & \|g(\mathbf{q}_1, u + v_2) - g(\mathbf{q}_1, u + v_1)\|_{L^2} = \\ & = \left\| \left(-\int_s^1 (v_{q2} - v_{q1})(r) dr, \int_0^s (v_{p2} - v_{p1})(r) dr \right) \right\|_{L^2} = \\ & = \left\| \left(-\int_s^1 \sum_{|k|>N} q_k e^{i2\pi kr} dr, \int_0^s \sum_{|k|>N} p_k e^{i2\pi kr} dr \right) \right\|_{L^2} = \\ & = \left\| \left(\sum_{|k|>N} \frac{q_k e^{i2\pi kr}}{i2\pi k} \Big|_1^s, \sum_{|k|>N} \frac{p_k e^{i2\pi kr}}{i2\pi k} \Big|_0^s \right) \right\|_{L^2} \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi N} \left\| \sum_{|k|>N} (q_k, p_k) e^{i2\pi ks} - \sum_{|k|>N} (q_k, p_k) \right\|_{L^2} \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi N} \left(\left\| \sum_{|k|>N} v_k e^{i2\pi ks} \right\|_{L^2} + \left\| \sum_{|k|>N} v_k \right\|_{L^2} \right) = \frac{\|v\|_{L^2}}{\pi N}. \end{aligned}$$

□

LEMMA 13 (LA CONTRAZIONE). *Supponiamo che*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, s \in [0,1]} |\nabla_{xx}^2 H| = C < +\infty.$$

Allora, per N sufficientemente grande ($N > \frac{C}{\pi}$, e per ogni fissato $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ ed $u \in \mathbb{P}_N L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2n})$, la mappa:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_N L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2n}) & \longrightarrow \mathbb{Q}_N L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2n}) \\ v & \longmapsto \mathbb{Q}_N \mathbb{E} \nabla H(g(\mathbf{q}_1, u + v)), \end{aligned}$$

è una contrazione.

Dimostrazione. Direttamente,

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{Q}_N \mathbb{E} \nabla H(g(\mathbf{q}_1, u + v_2)) - \mathbb{Q}_N \mathbb{E} \nabla H(g(\mathbf{q}_1, u + v_1))\|_{L^2} \leq \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, s \in [0,1]} |\nabla_{xx}^2 H| \|g(\mathbf{q}_1, u + v_2) - g(\mathbf{q}_1, u + v_1)\|_{L^2} \leq \\ & \leq \frac{C}{\pi N} \|v_2 - v_1\|_L^2, \quad \frac{C}{\pi N} < 1. \end{aligned}$$

□

Il Teorema di Cacciopoli-Banach ci assicura che esiste uno ed un solo punto fisso per la contrazione qui sopra. Con argomenti standard si può facilmente vedere che questo punto fisso dipende in modo liscio da \mathbf{q}_1 e da u : indicheremo con $f(\mathbf{q}_1, u)$ questa mappa del punto fisso:

$$f(\mathbf{q}_1, u) = \mathbb{Q}_N \mathbb{E} \nabla H(g(\mathbf{q}_1, u + f(\mathbf{q}_1, u))).$$

È di importanza cruciale osservare che se risolviamo l'equazione 'finita' (vale a dire, algebrica) per u ,

$$u = \mathbb{P}_N \mathbb{E} \nabla H(g(\mathbf{q}_1, u + f(\mathbf{q}_1, u))),$$

allora la curva $\gamma = g(\mathbf{q}_1, u + f(\mathbf{q}_1, u))$ risolve le equazioni differenziali canoniche di Hamilton, ed è uscente dalla sezione nulla. Ulteriormente, puntualizziamo che $\dim(\mathbb{P}_N L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2n})) = 2n(2N + 1) \stackrel{\text{def}}{=} k(n, N)$.

La dimostrazione del Teorema 6 è ultimata dall'asserzione:

LEMMA 14 (FUNZIONE GENERATRICE A FINITI PARAMETRI). *La seguente funzione $S = S(\mathbf{q}_1, u)$ è una funzione generatrice globale per $\Lambda = \Phi^1(\Lambda_0)$:*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k(n, N)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}_1, u) &\longmapsto S(\mathbf{q}_1, u) \stackrel{\text{def}}{=} A \circ g(\mathbf{q}_1, u + f(\mathbf{q}_1, u)) = \\ &= W(\mathbf{q}_1, u + f(\mathbf{q}_1, u)). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Scriviamo

$$\frac{\partial S}{\partial u}(\mathbf{q}_1, u) = \frac{DW}{D\varphi} \left(\frac{D\varphi}{Du} + \frac{D\varphi}{Dv} \frac{Df}{Du} \right),$$

ed osserviamo che $\frac{D\varphi}{Du}$ e $\frac{D\varphi}{Dv}$ lavorano come i proiettori \mathbb{P}_N e \mathbb{Q}_N rispettivamente. Perciò

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u}(\mathbf{q}_1, u) &= - \int_0^1 [\mathbb{P}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))] \Big|_{\gamma=g(\mathbf{q}_1, u+f(\mathbf{q}_1, u))} ds - \\ &\quad - \int_0^1 [\mathbb{Q}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))] \Big|_{\gamma=g(\mathbf{q}_1, u+f(\mathbf{q}_1, u))} \frac{Df}{Du} ds. \end{aligned}$$

Per la stessa costruzione di $f(\mathbf{q}_1, u)$ il secondo integrale si annulla, cosicché

$$\frac{\partial S}{\partial u}(\mathbf{q}_1, u) = - \int_0^1 [\mathbb{P}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))] \Big|_{\gamma=g(\mathbf{q}_1, u+f(\mathbf{q}_1, u))} ds. \quad (2.16)$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_1} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1} + \frac{DW}{D\varphi} \frac{D\varphi}{Dv} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}_1} = \\ &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1} - \int_0^1 [\mathbb{Q}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))] \Big|_{\gamma=g(\mathbf{q}_1, u+f(\mathbf{q}_1, u))} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}_1} ds, \end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1, u) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1, \varphi) \Big|_{\varphi=u+f(\mathbf{q}_1, u)}. \quad (2.17)$$

Ora è facile concludere che, se la coppia $(\mathbf{q}_1, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times L^2$ soddisfa a

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1, \varphi), \quad 0 = \frac{DW}{D\varphi}(\mathbf{q}_1, \varphi), \quad (2.18)$$

allora la coppia $(\mathbf{q}_1, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k(n, N)}$, dove

$$u = \mathbb{P}_N \varphi,$$

soddisfa a

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1, u), \quad 0 = \frac{\partial S}{\partial u}(\mathbf{q}_1, u). \quad (2.19)$$

Viceversa, se la coppia $(\mathbf{q}_1, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k(n, N)}$ soddisfa alle 2.19, allora la coppia $(\mathbf{q}_1, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times L^2$, dove

$$\varphi = u + f(\mathbf{q}_1, u),$$

soddisfa alle 2.18. □

2.4.3 La struttura globalmente finita dei fronti d'onda

Richiamiamo il generico problema di evoluzione, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, t) + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t), t\right) &= 0, \\ S(\mathbf{q}, t) \Big|_{t=0} &= \sigma(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

dove, e.g., possiamo supporre che il dato iniziale $\sigma(\mathbf{q})$ sia una funzione 'bump', cosicché si possa modellare qualche fenomeno di propagazione a partire dal supporto compatto di $\sigma(\mathbf{q})$. La trasformazione canonica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$, generata dalla funzione

$$F(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q} + \sigma(\mathbf{q}),$$

è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) : \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}), \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} : \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}.\end{aligned}$$

La funzione Hamiltoniana trasformata di $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è

$$K(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t) = H\left(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}), t\right),$$

cosicché le caratteristiche di X_K uscenti per $t = 0$ dalla sezione nulla $\{(\tilde{\mathbf{q}}, 0)\}$ di T^*Q sono precisamente le caratteristiche di X_H uscenti dalla s.v. Lagrangiana iniziale $\Lambda_0 = \left\{(\mathbf{q}, \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}))\right\}$. Consideriamo adesso il Funzionale d'Azione del Principio Variazionale di Hamilton-Helmholtz legato alla funzione Hamiltoniana K ,

$$A[\gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 [\tilde{\mathbf{p}}(s) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(s) - K(\tilde{\mathbf{q}}(s), \tilde{\mathbf{p}}(s), s)] ds$$

definito per $\gamma \in \Gamma = \{(\tilde{\mathbf{q}}(\cdot), \tilde{\mathbf{p}}(\cdot)) \in H^{1,2}([0, 1], \mathbb{R}^{2n}) \mid \tilde{\mathbf{p}}(0) = 0\}$. Abbiamo visto sopra che A è una funzione generatrice globale per $\Lambda_1 = \{(\tilde{\mathbf{q}}(1), \tilde{\mathbf{p}}(1))\}$ con infiniti parametri. Se la condizione

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{2n}, t \in [0, 1]} |\nabla_{xx}^2 H(x, t)| < +\infty \quad (x = (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{2n})$$

vale, allora il Teorema 6 ci permette di descrivere il fronte d'onda generalizzato al tempo $t = 1$, i.e. Λ_1 , con una funzione generatrice globale $\tilde{S}(\tilde{\mathbf{q}}, u_1, \dots, u_N)$ a *finiti* parametri $N < +\infty$. Infine, tornando dalle $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ alle variabili iniziali (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , la s.v. Lagrangiana è ora generata da (si verifichi in base alla struttura della trasformazione canonica di cui sopra)

$$S(\mathbf{q}, u) = \tilde{S}(\mathbf{q}, u) + \sigma(\mathbf{q}).$$

Ovviamente, tramite modifiche di secondaria importanza, possiamo riproporre la stessa costruzione non solamente per il tempo $t = 1$, ma per qualsiasi istante $t \in [0, 1]$. Si osservi che la condizione richiesta coinvolge sia H che σ ; ovvero solamente H , se σ è una funzione 'bump' liscia, come supponemmo all'inizio.

2.4.4 La Funzione Generatrice Globale per la Soluzione Spazio-Temporale

Rivolgiamo adesso la nostra attenzione all'insieme di curve

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \gamma(\cdot) = (\mathbf{q}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot)) \in H^{1,2}([0, 1], \mathbb{R}^{2n}) \mid \mathbf{p}(0) = 0 \right\},$$

al nuovo funzionale:

$$\begin{aligned} \hat{A} : [0, 1] \times \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \gamma &\longmapsto \hat{A}[t, \gamma(\cdot)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 [\mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{q}}(s) - H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s), s)] ds, \end{aligned}$$

ed alla nuova biiezione \hat{g} :

$$\begin{aligned} \hat{g} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times L^2([0, 1], \mathbb{R}^{2n}) &\longrightarrow [0, 1] \times \Gamma, \\ (t, \mathbf{q}, \varphi) &\longmapsto \hat{g}(t, \mathbf{q}, \varphi)(\tau) = (t, \mathbf{q}(\tau), \mathbf{p}(\tau)) = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left(t, \mathbf{q} - \int_\tau^t \varphi_q(r) dr, \int_0^\tau \varphi_p(r) dr \right). \end{aligned}$$

Consideriamo la funzione ad infiniti parametri:

$$\begin{aligned} \hat{W} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} \circ \hat{g} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times L^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (t, \mathbf{q}, \varphi) &\longmapsto \hat{W}(t, \mathbf{q}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} \circ \hat{g}(t, \mathbf{q}, \varphi). \end{aligned}$$

Vedremo qui sotto che \hat{W} genera $\hat{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{t \in [0, 1]} \Lambda_t$, dove Λ_t è il fronte d'onda al tempo t , cioè $\Phi^t(\Lambda_0)$. $\hat{\Lambda}$ è la s.v. Lagrangiana di $T^*([0, 1] \times \mathbb{R}^n)$ così definita:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} = \left\{ (t, \mathbf{q}; p_0, \mathbf{p}) \mid t \in [0, 1], \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \exists \varphi^* \in L^2, \right. \\ \left. p_0 = \frac{\partial \hat{W}}{\partial t}(t, \mathbf{q}, \varphi^*), \mathbf{p} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \varphi^*), \frac{D\hat{W}}{D\varphi}(t, \mathbf{q}, \varphi^*) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

che è la soluzione geometrica del problema di Cauchy:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t) = 0, \quad S(0, \mathbf{q}) = 0.$$

Per vedere ciò, scriveremo esplicitamente \hat{W} :

$$\begin{aligned} \hat{W}(t, \mathbf{q}, \varphi) = \int_0^t \left[\int_0^\tau \varphi_p(s) ds \cdot \varphi_q(\tau) - \right. \\ \left. - H \left(\tau, \mathbf{q} - \int_\tau^t \varphi_q(s) ds, \int_0^\tau \varphi_p(s) ds \right) \right] d\tau; \end{aligned}$$

quindi, per $\frac{D\hat{W}}{D\varphi} = 0$, calcoliamo $\frac{\partial\hat{W}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{W}}{\partial t}(t, \mathbf{q}, \varphi) &= \mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial\hat{W}}{\partial t}, t\right) + \\ &+ \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\left(\tau, \mathbf{q} - \int_\tau^t \varphi_q(s) ds, \int_0^\tau \varphi_p(s) ds\right) \dot{\mathbf{q}}(t) d\tau = \\ &= \mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial\hat{W}}{\partial t}, t\right) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} d\tau \dot{\mathbf{q}}(t) = \\ &= \frac{\partial\hat{W}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - H - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\int_0^t [\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H] d\tau \right) \dot{\mathbf{q}}(t) = -H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial\hat{W}}{\partial t}, t\right). \end{aligned}$$

Adesso, la procedura di riduzione trattata in questa sezione funziona ancora per \hat{W} , e per mezzo del trucco della sottosezione precedente, otteniamo funzioni generatrici globali per Problemi di Cauchy ‘generici’ nel senso sopra spiegato.

Capitolo 3

Ottica Geometrica

3.1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI CON SOLUZIONI RAPIDAMENTE OSCILLANTI

Esaminiamo brevemente la classe degli operatori differenziali cui appartiene l'equazione di Helmholtz: le equazioni differenziali alle derivate parziali con soluzioni rapidamente oscillanti.

Esaminiamo l'operatore lineare (di ordine $m \in \mathbb{N}$)

$$h(\mathbf{q}, D_{\mathbf{q}}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(\mathbf{q}) D^{\alpha}, \quad m \geq 2$$

dove $\mathbf{q} \in Q$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $a_{\alpha} \in C^{\infty}(Q, \mathbb{R})$ mentre

$$D_{\mathbf{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q^n} \right),$$
$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q^j}, \quad D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Ad ogni operatore differenziale di questa forma è associata una funzione $H \in C^{\infty}(T^*Q, \mathbb{R})$ che è polinomio di grado $\leq m$ nelle variabili \mathbf{p} . Esso si ottiene rimpiazzando il vettore $D_{\mathbf{q}}$ nell'operatore differenziale $h(\mathbf{q}, D_{\mathbf{q}})$ con il vettore $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. Il polinomio

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(\mathbf{q}) \mathbf{p}^{\alpha},$$

laddove $\mathbf{p}^\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ prende il nome di *simbolo* (oppure *hamiltoniano*) dell'operatore $h(\mathbf{q}, D_{\mathbf{q}})$. Le variabili p_1, \dots, p_n sono le duali (o coniugate) delle variabili q^1, \dots, q^n .

Tale corrispondenza è realizzata pensando all'isomorfismo che esiste tra il seguente quoziente sullo spazio $\mathcal{F}_{\mathbf{q}}^\infty(Q, \mathbb{R})$ dei *germi* delle funzioni C^∞ in \mathbf{q} :¹

$$[f] \in \mathcal{F}_{\mathbf{q}}^\infty(Q, \mathbb{R}) / \sim,$$

dove

$$f \sim g \quad \text{sse} \quad f(\mathbf{q}) = g(\mathbf{q}), \quad \forall u \in T_{\mathbf{q}}Q, \quad \langle u, D_{\mathbf{q}}f \rangle = \langle u, D_{\mathbf{q}}g \rangle,$$

e lo spazio $T_{\mathbf{q}}^*Q$ così definito:

$$[f] \mapsto \mathbf{p} = D_{\mathbf{q}}f = \frac{1}{i} \nabla_{\mathbf{q}}f.$$

Tramite questo isomorfismo si ha

$$\forall f \in C^\infty(Q, \mathbb{R}), \quad h(\mathbf{q}, D_{\mathbf{q}})(f) \equiv H(\mathbf{q}, D_{\mathbf{q}}f).$$

Ci apprestiamo ad esaminare le seguenti famiglie ad un parametro di equazioni differenziali:

$$h(\mathbf{q}, \lambda^{-1}D_{\mathbf{q}})u(\mathbf{q}) = 0, \quad (3.1)$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro reale grande ($\lambda \rightsquigarrow \infty$). Il polinomio associato $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ viene chiamato λ -*simbolo* dell'operatore $h(\mathbf{q}, \lambda^{-1}D_{\mathbf{q}})$. Citiamo alcuni esempi fondamentali di questo tipo di equazione. Da qui in poi $t \in \mathbb{R}$ e p_0 è duale della variabile t .

Esempio 3.1.1 (Equazione di Helmholtz).

$$\boxed{(\Delta + k^2 n^2(\mathbf{q}))u(\mathbf{q}) = 0,} \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \delta^{rs} \frac{\partial}{\partial q^r} \frac{\partial}{\partial q^s}, \quad (3.2)$$

dove $k = \frac{2\pi}{\epsilon} > 0$ è il parametro grande, con ϵ lunghezza d'onda della luce, mentre Δ è l'operatore Laplaciano Euclideo². Il k -simbolo di questo operatore è $\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{q})$.

¹lo spazio dei germi è un comodo espediente per rappresentare funzioni solo localmente definite, $[f] \in \mathcal{F}_{\mathbf{q}}^\infty(Q, \mathbb{R})$ se $Q \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, e $f \sim_{\text{germ}} g$ sse $\exists U \subseteq U_f \cap U_g$, laddove $f|_U \equiv g|_U$

²nel caso delle varietà Riemanniane il tensore metrico $-g^{rs}$ rimpiazzerà il simbolo di Kronecker δ^{rs}

Esempio 3.1.2 (Equazione di Schrödinger).

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(\mathbf{q}) \psi.$$

Qui $\hbar > 0$ è un parametro piccolo, e l' \hbar^{-1} -simbolo dell'operatore di Schrödinger è uguale a $p_0 + (1/2m)\mathbf{p}^2 + U(\mathbf{q})$.

Esempio 3.1.3 (Equazione delle Onde).

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{q})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

In questa equazione non c'è un parametro grande, ma poiché il simbolo dell'operatore delle onde $-p_0^2 c^{-2}(\mathbf{q}) + \mathbf{p}^2$ è omogeneo nelle variabili p_0, p_1, \dots, p_n , un parametro grande è facilmente introducibile. Dividiamo ambo i membri dell'equazione per λ^2 ed otteniamo una equazione della forma 3.1 avente per λ -simbolo $-p_0^2 c^{-2}(\mathbf{q}) + \mathbf{p}^2$.

3.1.1 Soluzioni Asintotiche Formali. Sviluppo di Debye.

Cercheremo delle soluzioni asintotiche formali (*f.a.s.*)³ per la 3.1 nello stesso modo che per una equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{q}, \lambda) = e^{i\lambda\varphi(\mathbf{q})} A(\mathbf{q}, \lambda) &= e^{i\lambda\varphi(\mathbf{q})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i\lambda)^j} A_j(\mathbf{q}) = \\ &= e^{i\lambda\varphi(\mathbf{q})} \left(A_0 + \frac{1}{i\lambda} A_1 + \frac{1}{(i\lambda)^2} A_2 + \dots \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove φ, A_1, A_2, \dots sono funzioni incognite. φ viene chiamata *funzione fase o fase*, mentre $A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j / (i\lambda)^j$ è detta *ampiezza*. La rappresentazione 3.3 di una *f.a.s* fu proposta per la prima volta da Debye nelle sue note all'articolo di Sommerfeld nel 1911⁴ ed è chiamata *Sviluppo di Debye*.⁵

Applicando l'operatore $h(\mathbf{q}, \lambda^{-1} D_{\mathbf{q}})$ ad una funzione della forma $e^{i\lambda\varphi(\mathbf{q})} A(\mathbf{q})$ otteniamo

$$h(Ae^{i\lambda\varphi}) = e^{i\lambda\varphi} \sum_{j=0}^m \frac{1}{(i\lambda)^j} R_j A, \quad (3.4)$$

³manteniamo l'uniformità con la letteratura ove l'acronimo sta per *formal asymptotic solution*

⁴cfr. [FEDORYUK, 1999]

⁵cfr. anche [BIRKHOFF, 1933]

dove R_j è un operatore differenziale lineare di ordine j . In particolare,

$$(R_0 A)(\mathbf{q}) = H(\mathbf{q}, \nabla \varphi(\mathbf{q})) \cdot A, \quad (3.5)$$

$$(R_1 A)(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial A}{\partial q^j} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1,\dots,n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^j \partial q^k} A, \quad (3.6)$$

dove tutte le derivate di $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ siano valutate nel punto $(\mathbf{q}, \nabla \varphi(\mathbf{q}))$. È possibile scrivere la 3.6 nella forma più compatta

$$R_1 A = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{q}^2} \right) A.$$

Qui $\text{Tr}(M)$ è la traccia della matrice M . A questo punto sostituiamo la serie 3.3 nella 3.1, usiamo la formula 3.4 e dividiamo ambo i membri per $\exp\{i\lambda\varphi(\mathbf{q})\}$. Risolvere asintoticamente la 3.1 significa ora risolvere *ad ogni ordine di grandezza in λ* l'equazione così ottenuta. Otteniamo quindi un sistema ricorsivo di equazioni per le funzioni incognite φ, A_0, A_1, \dots , le prime due delle quali hanno la forma

$$H(\mathbf{q}, \nabla \varphi(\mathbf{q})) = 0, \quad (\text{Hamilton-Jacobi}) \quad (3.7)$$

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial A_0}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{q}^2} \right) A_0 = 0. \quad (\text{trasporto}) \quad (3.8)$$

Tutte le derivate del simbolo H sono valutate nel punto $(\mathbf{q}, \nabla \varphi(\mathbf{q}))$. La 3.8 si può interpretare come derivata di Lie dell'equazione del trasporto (cfr. [WOODHOUSE, 1991],[ARSIE, 1997]).

La prima di queste equazioni è non lineare nella funzione $\varphi(\mathbf{q})$. Nel caso dell'equazione di Helmholtz, otteniamo l'*equazione dell'iconale*

$$(\nabla \varphi(\mathbf{q}))^2 = n^2(\mathbf{q}), \quad (3.9)$$

mentre per l'equazione di Schrödinger si trova l'equazione di Hamilton-Jacobi della meccanica classica:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla_{\mathbf{q}} \varphi)^2 + U(\mathbf{q}) = 0. \quad (3.10)$$

L'equazione 3.7 è chiamata *equazione di Hamilton-Jacobi* o *equazione delle caratteristiche*. L'equazione 3.8 per la funzione $A_0(\mathbf{q})$ è lineare, ed altrettanto si ha per tutte le equazioni successive nelle funzioni A_1, A_2, \dots . Esse sono chiamate *equazioni del trasporto*, ed hanno la forma

$$\begin{aligned} R_1 A_0 &= 0, \\ R_1 A_1 &= -R_0 A_0, \\ R_1 A_j &= -R_0 A_{j-1} - R_1 A_{j-2} - \dots - R_{j-1} A_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

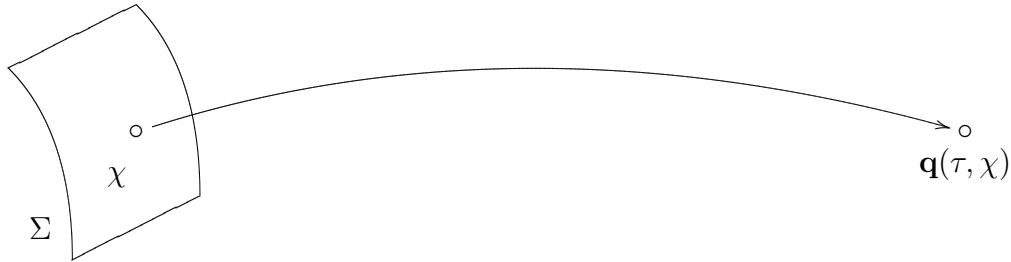
Se tutte queste equazioni sono risolubili, allora la *f.a.s.* della forma 3.3 esiste.

Per quanto visto nel capitolo 1 le soluzioni $\mathbf{q} \mapsto \varphi(\mathbf{q})$ in senso classico per l'equazione di Hamilton-Jacobi esistono solo localmente. L'esistenza di soluzioni asintotiche formali per la 3.1 è subordinata allora a queste condizioni.

3.1.2 Soluzione formale dell'equazione del trasporto

Consideriamo la parametrizzazione globale della varietà Lagrangiana Λ soluzione geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi 3.7 data dalle *coordinate radiali* $(\tau, \chi^1, \dots, \chi^{n-1})$, cioè le coordinate sulla varietà iniziale Σ più il parametro di evoluzione τ .

Per un $\chi \in \Sigma$ fissato, cioè lungo una curva caratteristica $\tau \mapsto \mathbf{q}(\tau)$,



vale la seguente

$$\frac{dA}{d\tau}(\mathbf{q}) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle,$$

e la prima equazione del trasporto 3.8 assume la forma

$$\frac{dA_0}{d\tau} + aA_0 = 0, \quad a(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{q}^2} \right) (\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} \varphi).$$

Specifichiamo il dato iniziale per A_0 su Σ : $A_0(\mathbf{q}_0(\chi)) = A_0(\chi)$, e risolviamo

$$A_0(\mathbf{q}(\tau, \chi)) = A_0(\chi) \exp \left\{ - \int_0^\tau a(\tau', \chi) d\tau' \right\}.$$

Discutiamo la buona definizione di questa soluzione. Per le ipotesi di regolarità fatte, $\partial^2 H / \partial \mathbf{p}^2$ è definita ovunque su T^*Q ed è C^∞ . Non è purtroppo così per $\partial^2 \varphi / \partial \mathbf{q}^2$, che sulla caustica diverge, non è definito. Mettiamo allora in una forma più elegante la soluzione trovata, riscriviamo a tale scopo l'equazione del trasporto 3.8 in termini di $\sqrt{J}A_0$, dove

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \det \left[\frac{\partial(q^1, \dots, q^n)}{\partial(\tau, \chi^1, \dots, \chi^{n-1})} \right].$$

Intanto vale la seguente identità

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{d\tau} (\sqrt{J} A_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tau} \ln J \right) A_0 + \frac{dA_0}{d\tau}. \quad (3.12)$$

Inoltre, per la famiglia $(n-1)$ -parametrica di soluzioni $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau, \chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ del sistema $d\mathbf{q}/d\tau = \partial H / \partial \mathbf{p}(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}))$, dipendente in modo liscio dalle variabili $\tau, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}$, vale la *formula di Liouville*⁶

$$\frac{d}{d\tau} \ln J = \text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \right) = \text{Tr} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{q}^2} \right) + \text{Tr} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}} \right).$$

Sostituendo questa e la prima equazione del trasporto 3.8 nella 3.12 otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{d\tau} (\sqrt{J} A_0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial p_j} A_0,$$

che integrata ci dà infine

$$A_0(\mathbf{q}(\tau, \chi)) = A_0(\chi) \sqrt{\frac{J(0, \chi)}{J(\tau, \chi)}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\tau \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial p_j} d\tau' \right\}. \quad (3.13)$$

Le equazioni del trasporto successive si possono mettere nella forma

$$\left(\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{d\tau} \sqrt{J} - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q^j \partial p_j} \right) A_n = f_n(\varphi, A_0, \dots, A_{n-1})$$

e sono integrabili direttamente, a partire da un dato iniziale liscio $A_n(\tau = 0, \chi) = A_n(\chi)$ prescritto arbitrariamente.

Nella regione $D \subseteq Q$ dove la mappa $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau, \chi)$ è un diffeomorfismo, ossia quando le variabili (q^1, \dots, q^n) e le $(\tau, \chi^1, \dots, \chi^{n-1})$ sono equivalenti al fine di parametrizzare Λ , lo sviluppo di Debye arrestato all'ordine N

$$u_N(\mathbf{q}) = e^{i\lambda\varphi(\mathbf{q})} \sum_{j_0}^N \frac{A_j(\mathbf{q})}{(i\lambda)^j}, \quad (3.14)$$

è una *f.a.s.* dell'equazione 3.1 modulo $O(\lambda^{-N-1})$ nella regione D , cioè

$$h(u_n(\mathbf{q})) = O(\lambda^{-N-1}), \quad \mathbf{q} \in D.$$

⁶la dimostrazione di questo fatto, basata sul *teorema del trasporto*, è riportata nell'appendice a questo capitolo

3.2 CASO DELL'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ

Per l'equazione di Helmholtz 3.2 si ha $h(\mathbf{q}, k^{-1}D_{\mathbf{q}}) = n^2(\mathbf{q}) - \Delta/(ik)^2$ ed $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = n^2(\mathbf{q}) - \mathbf{p}^2$. Di conseguenza gli operatori lineari R_j sono della forma

$$\begin{aligned} R_0 A &= (n^2 - (\nabla\varphi)^2)A, \\ R_1 A &= -2 \left(\nabla\varphi \nabla A + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A \right), \\ R_2 A &= -\Delta A, \\ R_3 &= R_4 = \dots = 0. \end{aligned}$$

cosicch  le equazioni del trasporto 3.11 divengono

$$R_1 A_j = -R_1 A_{j-2} - R_2 A_{j-3},$$

cio , pi  in dettaglio,

$$\begin{aligned} \nabla\varphi \nabla A_0 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_0 &= 0, \\ \nabla\varphi \nabla A_1 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_1 &= 0, \\ \nabla\varphi \nabla A_2 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_2 &= 0, \\ \nabla\varphi \nabla A_3 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_3 &= \Delta A_0, \\ \nabla\varphi \nabla A_4 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_4 &= \Delta A_1, \\ \nabla\varphi \nabla A_5 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_5 &= -\Delta A_0 + \Delta A_2, \\ \nabla\varphi \nabla A_6 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_6 &= -\Delta A_1 + \Delta A_3, \\ \nabla\varphi \nabla A_7 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)A_7 &= +\Delta A_0 - \Delta A_2 + \Delta A_4, \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned}$$

e si possono mettere nella forma

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d}{d\tau} (\ln JA_j) = f_j(\varphi, A_0, \dots, A_{j-1}).$$

La soluzione della prima di queste equazioni è uguale a

$$A_0(\mathbf{q}(\tau, \chi)) = A_0(\chi) \sqrt{\frac{J(0, \chi)}{J(\tau, \chi)}}. \quad (3.15)$$

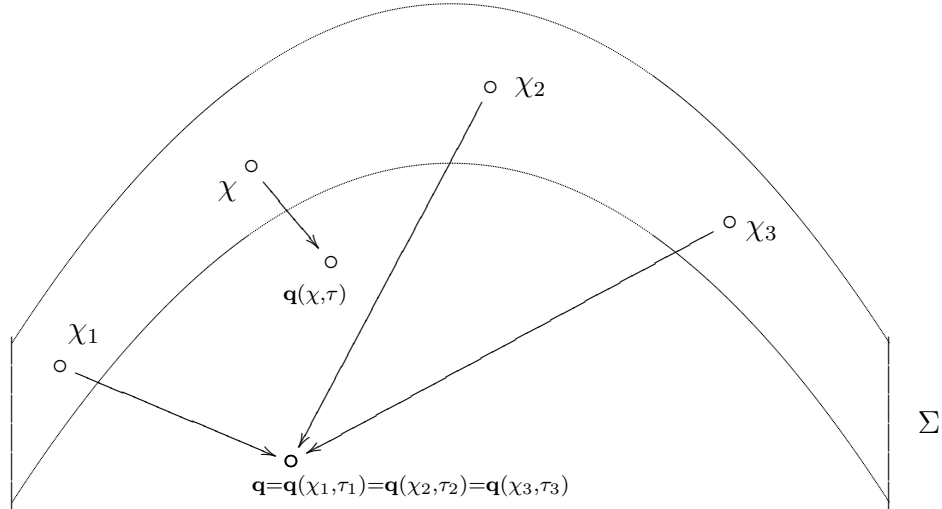
La più semplice formula asintotica per u è allora

$$u(k, \mathbf{q}(\tau, \chi)) = e^{ik\varphi} A_0(\mathbf{q}(\tau, \chi)) = e^{ik\varphi} A_0(\chi) \sqrt{\frac{J(0, \chi)}{J(\tau, \chi)}}, \quad (3.16)$$

che è soluzione di 3.2 modulo $O(k^{-1})$.

3.2.1 Teoria Geometrica della Diffrazione di Keller

Quando il raggio $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau, \chi)$ attraversa una caustica, compaiono oppure annichiscono coppie di altri raggi, $\varphi(\mathbf{q})$ diviene “multivalued”, ovvero una “funzione” a più valori. Inoltre si osserva un fenomeno detto *caustic phase shift*, cioè di uno scatto di un multiplo di $\pi/2$ della fase dell’onda.



Lo sviluppo di Debye si può estendere anche a queste regioni di Q , (ovunque al di fuori delle caustiche) divenendo una somma di termini in interferenza della forma semplice. Se per un punto $\mathbf{q} \in Q$ passano l raggi, corrispondenti ai punti χ_1, \dots, χ_l della varietà iniziale Λ_0^{n-1} per il raggio μ -esimo $\tau \mapsto (\mathbf{q}(\chi_\mu, \tau), \mathbf{p}(\chi_\mu, \tau))$, si può calcolare la fase integrando la 1-forma di Liouville lungo la curva bicaratteristica

$$\varphi_\mu(\mathbf{q}) = \int_0^{\tau_\mu} \mathbf{p}(\chi_\mu, \tau') \dot{\mathbf{q}}(\chi_\mu, \tau') d\tau', \quad \text{quando } \mathbf{q}(\chi_\mu, \tau_\mu) = \mathbf{q},$$

Ad essa va aggiunto il termine correttivo $-m_\mu \frac{\pi}{2}$, il *caustic phase shift* di cui parlavamo, dove $m_\mu \in \mathbb{Z}$ è l'indice di Morse del raggio μ -esimo.⁷

Per l'ampiezza (ordine zero) si può usare la formula 3.15

$$A_\mu(\mathbf{q}) = A(\chi_\mu) \sqrt{\frac{J(0, \chi)}{J(\tau, \chi)}}.$$

Si arriva dunque alla formula seguente, detta *simple rays approximation*⁸,

$$u(\mathbf{q}) = \sum_{\mu} A_\mu(\mathbf{q}) \exp \left\{ ik\varphi_\mu(\mathbf{q}) - m_\mu(\mathbf{q}) \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (3.17)$$

L'applicazione sistematica di questa formula, che è valida ovunque su Q al di fuori della *caustic zone*, la quale al limite $k \rightarrow \infty$ è un insieme di misura nulla, è la *teoria geometrica della diffrazione di KELLER*⁹

È del tutto evidente che si tratta di un progresso ininfluenza, essendo la formula fallimentare esattamente dove la luce è più brillante. La formula 3.16 infatti predice per u una intensità infinita su

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{q} \in Q \mid \exists (\tau, \chi) \mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau, \chi), J(\tau, \chi) = 0 \right\} \quad (3.18)$$

per ogni valore (finito) di k . Essa non può rappresentare dunque una soluzione di 3.2 che deve essere una funzione liscia di \mathbf{q} per ogni valore finito di k , per quanto grande.

Afferma M.V. BERRY:

Il fatto che la 3.16 fallisca nei luoghi più importanti, laddove la luce è più brillante, suggerisce che il rimedio non stia nell'aggiungere alla 3.16 termini correttivi in potenze decrescenti di k , ma nel rimpiazzarla con una espressione le cui proprietà analitiche per grandi k vicino alle caustiche siano completamente differenti.¹⁰

Nel prossimo capitolo introdurremo la tecnica degli *integrali diffrazionari*, vedremo che il limite ad onde corte ($k \rightarrow \infty$) riconduce alla stessa formula 3.17 con un numero finito di raggi. Discuteremo quindi la possibilità di ulteriori generalizzazioni di questa tecnica.

⁷è un indice che dipende dal tipo di singolarità di proiezione o *catastrofe* corrispondente alla caustica incontrata dal raggio nel tragitto da Σ a \mathbf{q} .

⁸Non ci fermiamo qui a giustificarla, ci accontentiamo di esibirne i limiti; la ritroveremo come caso particolare della forma di soluzione più generale della prossima sezione.

⁹cfr. [KELLER, 1958]

¹⁰cfr. [BERRY & UPSTILL, 1980] pg.72

3.3 SUPPLEMENTO: LA FORMULA DI LIOUVILLE

La formula di Liouville afferma che

$$\frac{d}{d\tau} \ln J = \text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \right) = \text{div}_{\mathbf{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q})) \right).$$

Dimostrazione. Convieni ripensare alle $2n$ equazioni di Hamilton come ad un sistema di n equazioni nelle sole \mathbf{q} , sfruttando la soluzione del sistema completo $\tau \mapsto (\mathbf{q}(\tau), \mathbf{p}(\tau))$ laddove sia possibile, cioè dove esista $\varphi(\mathbf{q})$ *single valued*.

$$\dot{\mathbf{q}} = \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{q})=\nabla_{\mathbf{q}}\varphi(\mathbf{q})} = X(\mathbf{q}).$$

Il flusso di questa equazione differenziale è costituito dalle curve caratteristiche, quindi è la proiezione su Q del flusso del sistema delle equazioni di Hamilton, ovvero delle curve bicaratteristiche.

Il *teorema del trasporto* afferma che, data un'equazione differenziale

$$\dot{x} = X(x), \tag{3.19}$$

sussiste la seguente relazione integrale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_X^t(\Omega)} dx = \int_{\Phi_X^t(\Omega)} \text{div} X(x) dx, \tag{3.20}$$

dove Ω sia un qualunque boreliano di dati iniziali. Il primo membro della 3.20 si può riscrivere cambiando le variabili di integrazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi_X^t(\Omega)} dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} J(x') dx' = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (J(x')) dx' = \\ &= \int_{\Phi_X^t(\Omega)} \frac{d}{dt} (J(x')) J^{-1} dx = \int_{\Phi_X^t(\Omega)} \frac{d}{dt} (\ln J(x)) dx, \end{aligned}$$

dove J è lo jacobiano del cambiamento di variabile,

$$J(x') = \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right), \quad J^{-1} = \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right).$$

Il teorema del trasporto si può dunque mettere nella forma

$$\int_{\Phi_X^t(\Omega)} \frac{d}{dt} (\ln J(x)) dx = \int_{\Phi_X^t(\Omega)} \text{div} X(x) dx,$$

dalla quale, data la continuità della funzione integranda e l'arbitrarietà di Ω , si può dedurre infine

$$\frac{d}{dt} (\ln J(x)) = \text{div} X(x),$$

che è quanto si voleva. □

3.4 SUPPLEMENTO: IL PRINCIPIO DI FERMAT

L'equazione dell'iconale 3.9

$$\boxed{|\nabla_{\mathbf{q}}\varphi(\mathbf{q})|^2 = n^2(\mathbf{q})}$$

rappresenta l'equazione *classica* di Hamilton-Jacobi (H - J) per l'Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H : T^*Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\longrightarrow H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{n^2(\mathbf{q})} \end{aligned}$$

ovvero la seguente equazione alle derivate parziali

$$H \circ d\varphi = \frac{1}{2}, \quad H(\mathbf{q}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}.$$

Le soluzioni si costruiscono con le curve integrali del campo vettoriale Hamiltoniano X_H , ovvero con le soluzioni del sistema di equazioni differenziali di Hamilton, il sistema *canonico*

$$\dot{\mathbf{q}} = X_H^q(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = X_H^p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Ma, come è ben noto, ad un sistema canonico con Hamiltoniana convessa nelle \mathbf{p} , cioè tale che $\nabla_p^2 H$ sia definita positiva¹¹, resta associato, per mezzo della *Trasformazione di Legendre*, un sistema dinamico Lagrangiano equivalente, nel senso che le soluzioni dei due sistemi si corrispondono nella trasformazione. Vediamo in dettaglio tale procedimento (sempre nel caso convesso).

Ponendo

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

per ogni $\mathbf{q} \in Q$ fissato, ed essendo $(\partial \dot{q}^i / \partial p_j)$ definita positiva, possiamo disporre di una funzione inversa *globale* $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ sempre per lo stesso $\mathbf{q} \in Q$ fissato.¹² La funzione Lagrangiana cercata è data da

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \stackrel{\text{def}}{=} [\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}.$$

¹¹ $\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \lambda_i \lambda_j > 0$, per ogni (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ed ogni $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$.

¹² cfr. Teorema di inversione globale in appendice

Nel nostro caso specifico tutto ciò si traduce così

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{n^2(\mathbf{q})} \implies \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = n^2(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}.$$

e dunque

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= [\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} = \\ &= n^2(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - n^2(\mathbf{q}) \frac{\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}}{2} = \\ &= n^2(\mathbf{q}) \frac{\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}}{2}. \end{aligned}$$

Un'altra ben nota costruzione, ovvero il *Principio Variazionale di Hamilton*, afferma che le soluzioni del sistema di equazioni differenziali di Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

rendono stazionario (e localmente $\|\cdot\|_\infty$ -minimo in assenza di punti coniugati¹³) il seguente funzionale, detto *funzionale d'Azione*,

$$\begin{aligned} J : \Gamma_{t_0, t_1}^{q_0, q_1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{q}(\cdot) &\longmapsto J[\mathbf{q}(\cdot)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt \end{aligned}$$

dove per $\Gamma_{t_0, t_1}^{q_0, q_1}$ si intende l'insieme $\left\{ \mathbf{q} \in C^2([t_0, t_1], Q) \mid \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \right\}$.

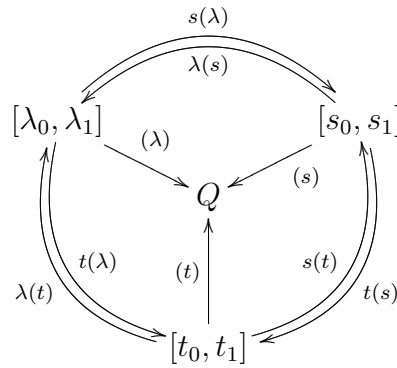
È del tutto evidente che le *stesse* soluzioni vanno bene anche per il funzionale d'Azione di una Lagrangiana proporzionale ad L , ma non è difficile neppure dimostrare che le stesse soluzioni stazionarizzano anche il funzionale d'Azione di $L' = \sqrt{L}$. In particolare, prendendo in considerazione la Lagrangiana $\bar{L} = \sqrt{(2/c^2)L} \stackrel{\text{def}}{=} (n(\mathbf{q})/c)\sqrt{\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}}$ ¹⁴, si scopre che il funzionale d'Azione associato è la *rettificazione* della curva $\mathbf{q}(\cdot)$ tramite la metrica Riemanniana data dal tensore $g_{hk}(\mathbf{q}) = \delta_{hk}n^2(\mathbf{q})/c$. Dimostriamo ora in dettaglio che tale funzionale altri non è che la *lunghezza ottica* di $\mathbf{q}(\cdot)$, ovvero il tempo impiegato da una particella che viaggi lungo la curva alla velocità $c/n(\mathbf{q}(t))$, per ogni $t \in [t_0, t_1]$, cioè da un fotone.

¹³ciò è vero quando la funzione Lagrangiana è convessa nelle $\dot{\mathbf{q}}$, cioè $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}}$ definita positiva.

¹⁴ c è la velocità della luce nel vuoto.

TEOREMA 7. Consideriamo la curva liscia $\gamma : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow Q \subseteq \mathbb{R}^3$ e assumiamo che venga percorsa da una particella la cui velocità in modulo sia $v(\mathbf{q}) = c/n(\mathbf{q})$. Allora il tempo necessario per percorrere la curva è dato dalla rettificazione della stessa tramite la metrica Riemanniana $g_{hk}(\mathbf{q}) = \frac{n^2(\mathbf{q})}{c^2} \delta_{hk}$.

dim: Oltre a quella che definisce la curva, consideriamo due diverse parametrizzazioni senza punti stazionari, indicandole, abusando a fondo del linguaggio, come nel diagramma



La lunghezza euclidea della curva $\gamma(\cdot)$ è data da

$$l(\gamma(\cdot)) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \frac{d\gamma}{d\lambda}(\lambda) \right| d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \gamma^i}{\partial \lambda} \right|^2} d\lambda.$$

Sia quindi $s = s(\lambda)$ il parametro che misura la lunghezza euclidea della curva da $\gamma(\lambda_0)$ al punto $\gamma(\lambda)$.

$$s(\bar{\lambda}) = \int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} \left| \frac{d\gamma}{d\lambda}(\lambda) \right| d\lambda \qquad \frac{ds}{d\lambda}(\bar{\lambda}) = \left| \frac{d\gamma}{d\lambda}(\bar{\lambda}) \right| \qquad \bar{\lambda} \in [\lambda_0, \lambda_1].$$

Allora, se t è invece il parametro che denota il tempo marcato dal fotone lungo la curva, la velocità con cui la curva stessa viene percorsa è

$$v(\gamma(\bar{t})) = \frac{ds}{dt}(\bar{t}).$$

Di conseguenza, per il teorema della funzione inversa,

$$\frac{dt}{ds}(\bar{s}) = [v(\gamma(\bar{s}))]^{-1}$$

perciò

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{dt}{ds} \right| ds = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \frac{dt}{ds} \right| \left| \frac{ds}{d\lambda} \right| d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} [v(\gamma(\lambda))]^{-1} \left| \frac{d\gamma}{d\lambda}(\lambda) \right| d\lambda = \frac{1}{c} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{n^2(\gamma(\lambda)) \sum_{i=1}^3 \left| \frac{d\gamma^i}{d\lambda} \right|^2} d\lambda. \end{aligned}$$

Concludiamo che il funzionale *tempo impiegato per percorrere* $\gamma(\cdot)$ è la rettificazione della curva $\gamma(\cdot)$ tramite la metrica Riemanniana data dal tensore

$$[g_{hk}(\mathbf{q})]_{h,k=1,2,3} = \begin{pmatrix} \frac{n^2(\mathbf{q})}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n^2}{c^2} \end{pmatrix} = \left[\frac{n^2(\mathbf{q})}{c^2} \delta_{hk} \right]_{h,k=1,2,3}.$$

□

3.4.1 Supplemento: Un teorema di inversione globale

TEOREMA 8. *Sia Ω un aperto convesso di \mathbb{R}^N e sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Supponiamo che la (parte simmetrica della) matrice Jacobiana di f sia, per ogni $x \in \Omega$, definita positiva,*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \lambda_i \lambda_j > 0, \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Allora f è iniettiva.

Dimostrazione. Dato che, evidentemente, $\det(\nabla f) \neq 0$, f è sicuramente localmente invertibile: il fatto che sia, inoltre, un diffeomorfismo con l'immagine sarà garantito dalle sopra enunciate ipotesi di convessità. Dobbiamo dunque mostrare che comunque scegliamo $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, allora $f(a) \neq f(b)$. Sia $\Phi : [0, 1] \ni t \mapsto \Phi(t) \in \mathbb{R}$ così definita:

$$\Phi(t) = f(tb + (1-t)a) \cdot (b-a).$$

Osserviamo che Φ è ben definita data la struttura convessa di Ω . Si vede che

$$\Phi(0) = f(a) \cdot (b-a), \quad \Phi(1) = f(b) \cdot (b-a).$$

Per raggiungere la tesi ci basta allora dimostrare che $\Phi(0) \neq \Phi(1)$: in tal caso allora $f(a) \neq f(b)$. Calcoliamo $\dot{\Phi}(t)$:

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tb + (1-t)a)(b_i - a_i)(b_j - a_j);$$

dall'ipotesi sullo Jacobiano di f , $\dot{\Phi}(t) > 0$, $\forall t \in [0, 1]$, ed il teorema segue. □

Capitolo 4

Soluzioni in forma di Integrali Oscillanti

La linearità dell'integrale e dell'equazione di Helmholtz suggerisce di invocare il *principio di sovrapposizione* e di introdurre una nuova classe di soluzioni asintotiche: gli *integrali oscillanti*¹ o gli *integrali diffrazionari* di BERRY², oppure gli *integrali interferenziali* di ORLOV³.

Quando esiste una famiglia generatrice globale $\varphi(\mathbf{q}, \alpha)$ per la soluzione geometrica $\Lambda \subseteq H^{-1}(0)$ di un problema di Cauchy per l'equazione dell'iconale 3.9, prendiamo in considerazione soluzioni asintotiche dell'equazione di Helmholtz 3.2 della forma ($l \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}^l$):

$$u(\mathbf{q}, k) = \int g(\mathbf{q}, \alpha; k) e^{ik\varphi(\mathbf{q}, \alpha)} d\alpha. \quad (4.1)$$

a meno di fattori di normalizzazione.

Gli integrali oscillanti offrono soluzioni lisce per l'equazione di Helmholtz anche all'interno della *caustic zone*. Non presentano dunque i problemi di definizione riscontrati in ottica geometrica. Il metodo della fase stazionaria dimostra che, dove esista la soluzione dell'ottica geometrica, essa coincide asintoticamente con l'integrale oscillante.

Infine offre una giustificazione della formula 3.17, la soluzione *geometrica* per più raggi, che vale al di là delle caustiche, laddove diversi raggi si combinano in interferenza, ed in particolare una interpretazione del *caustic phase shift*. Tali fattori della fase $\exp\{i\beta_j\pi/2\}$ sono associati al cambiamento

¹cfr. [ARNOLD, 1982] e [ARNOLD, 1986]

²cfr. [BERRY & UPSTILL, 1980]

³cfr. [KRAVTSOV & ORLOV, 1999], Cap. VII

dell'indice di inerzia β dell'Hessiano

$$\{\tilde{h}_{rs}\} = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s} \right\}.$$

4.1 PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI OSCILLANTI: IL PRINCIPIO DELLA FASE STAZIONARIA

4.1.1 Stima del contributo di un punto non di fase stazionaria

I contributi significativi all'integrale 4.1 provengono da intorno dei punti di fase stazionaria, ovvero quei punti $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^l$ per i quali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{q}, \mathbf{u}^*) = 0.$$

Se infatti $\partial \varphi / \partial \mathbf{u} \neq 0$, si può vedere che il contributo all'integrale 4.1 di un opportuno intorno di \mathbf{u}^* tende rapidamente a zero al tendere di k all'infinito, con andamento più rapido di qualunque potenza ε^n , $\forall n > 0$ (cfr. Teorema 9). In questa sezione dimostreremo, sotto ipotesi tecniche abbastanza naturali, che tale contributo decade esponenzialmente. Questo lavoro costituisce una stima quantitativa della validità, per lunghezze d'onda $\varepsilon = 2\pi/k$ piccole ma non nulle, del metodo della fase stazionaria, laddove quest'ultimo sia applicabile.

Ricordiamo il contributo del signor *Tasinato* a questo lavoro.

Apprestiamoci dunque a studiare il comportamento asintotico per $\varepsilon \rightarrow 0$ di integrali della forma

$$I(\mathbf{q}, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^k} b(\mathbf{q}, \mathbf{u}; \varepsilon) e^{i\varepsilon \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{u})} d\mathbf{u}$$

quando sussistano le condizioni qui di seguito enumerate.

- i. La funzione fase $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ sia analitica nelle variabili ausiliarie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$. Si abbia $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \neq 0$ per ogni $u \in K$ e $\mathbf{q} \in A$, dove A è un compatto di \mathbb{R}^n , K di \mathbb{R}^k . Non è allora restrittivo supporre non nulla la derivata direzionale secondo il vettore a componenti tutte unitarie $(1, \dots, 1)$

$$\mathbb{D}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \neq 0.$$

- ii. Per la funzione ampiezza b assumiamo⁴ che

$$b \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \quad b(\mathbf{q}, \mathbf{u}; \varepsilon) = 0$$

per $x \in A, \mathbf{u} \notin K$.

⁴cfr. [DUISTERMAAT, 1973] pag. 10

Inoltre, per qualunque multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^k$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)^\beta b = O(\varepsilon^{-m-\delta|\beta|}) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

uniformemente nelle $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in A \times K$, con $m \in \mathbb{N}$, $\delta < 1$.

iii. Si pongano infine

$$\alpha(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\mathbb{D}\varphi(\mathbf{u}) \quad \|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{u} \in K} \{|f(\mathbf{u})|\} \quad \text{per ogni } f \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}).$$

Date le ipotesi di cui sopra, ecco allora i nostri proponimenti.

TEOREMA 9. *L'integrale oscillante I uguale ad ε^n -volte un altro integrale oscillante avente la stessa fase, ovvero*

$$I = \int_{\mathbf{u} \in U} b(\mathbf{u}) e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = (i\varepsilon)^n \int_{\mathbf{u} \in U} b_n(\mathbf{u}) e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u}.$$

TEOREMA 10. *A meno di ridefinizioni di ε , il comportamento asintotico di I è descritto da*

$$|I| \leq \mathcal{A} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

Dimostrazione del Teorema 9: Nelle nostre ipotesi $\mathbb{D}\varphi(\mathbf{u}) \neq 0$ per ogni $\mathbf{u} \in K$, dunque esisterà certamente $v \in C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ tale che

$$b(\mathbf{u}) = v(\mathbf{u})\mathbb{D}\varphi(\mathbf{u}) = v(\mathbf{u}) \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^k v^i(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}.$$

Per comodità si può pensare a v come ad una funzione vettoriale v^i , con componenti tutte uguali. Esplicitando

$$v(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b(\mathbf{u})}{\mathbb{D}\varphi(\mathbf{u})} = \alpha(\mathbf{u})b(\mathbf{u}).$$

Veniamo dunque al nostro proponimento:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbf{u} \in U} b(\mathbf{u}) e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = \int_{\mathbf{u} \in U} \sum_h v^h(\mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial u^h} e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = \\ &= -i\varepsilon \int_{\mathbf{u} \in U} \sum_i v^h(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^h} e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = \end{aligned}$$

integrando per parti ed applicando il Teorema di Gauss

$$\begin{aligned}
 &= -(i\varepsilon) \left[\int_{\mathbf{u} \in U} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^h} \left(v^h(\mathbf{u}) e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u})} \right) d\mathbf{u} - \int_{\mathbf{u} \in U} \sum_i \frac{\partial v^h(\mathbf{u})}{\partial u^h} e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} \right] = \\
 &= \int_{\mathbf{u} \in U} (\mathbb{D}v(\mathbf{u})) e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = i\varepsilon \int_{\mathbf{u} \in U} b_1(\mathbf{u}) e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u}
 \end{aligned}$$

dove

$$b_1(\mathbf{u}) = \mathbb{D}v(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\alpha(\mathbf{u})b(\mathbf{u})).$$

A questo punto il ragionamento si può iterare e dunque scrivere

$$I = (i\varepsilon)^n \int_{\mathbf{u} \in U} b_n(\mathbf{u}) e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u}$$

dove $b_n(\mathbf{u})$ è definito induttivamente come

$$b_n(\mathbf{u}) = \mathbb{D}(\alpha(\mathbf{u})b_{n-1}(\mathbf{u})) = \mathbb{D}(\alpha(\mathbf{u})\mathbb{D}(\alpha(\mathbf{u})b_{n-2}(\mathbf{u})))$$

$$b_n = \underbrace{\mathbb{D}\alpha \cdots \mathbb{D}\alpha}_n b.$$

□

Dimostrazione del Teorema 10: Ricordando che per l'operatore \mathbb{D} vale la regola di Leibniz e osservando che il k -esimo \mathbb{D} a partire da destra può operare, in addendi distinti, su b oppure su uno degli $\alpha(\mathbf{u})$ che si trovano alla sua destra, si deduce che lo sviluppo delle derivate è composto da esattamente $(n + 1)!$ addendi:

$$b_n(\mathbf{u}) = \sum_{\substack{i_0, \dots, i_n, j \in \{0, \dots, n\} \\ i_0 + \dots + i_n = n \\ i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n + j = n}} \alpha^{i_0} (\mathbb{D}\alpha)^{i_1} \cdots (\mathbb{D}^n \alpha)^{i_n} (\mathbb{D}^j b).$$

A questo punto procediamo con la stima dell'integrale della sola ampiezza b_n

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{u} \in K} |b_n(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \leq \\
& \leq \int_{\mathbf{u} \in K} \sum |\alpha|^{i_0} |\mathbb{D}\alpha|^{i_1} \cdots |\mathbb{D}^n \alpha|^{i_n} |\mathbb{D}^j b| d\mathbf{u} \leq \\
& \leq \sum \|\alpha\|_{\infty}^{i_0} \|\mathbb{D}\alpha\|_{\infty}^{i_1} \cdots \|\mathbb{D}^n \alpha\|_{\infty}^{i_n} \|\mathbb{D}^j b\|_{\infty} \lambda(K) \leq \\
& \leq R^{i_0 + \cdots + i_n} B\lambda(K) \sigma^{-[(k+1)i_0 + \cdots + (n+k+1)i_n]} \times \\
& \quad \times \varepsilon^{-m - \delta j} k^j (n+1)! (k+1)^{i_0} \cdots (n+k+1)^{i_n} < \\
& < R^n B\lambda(K) \sigma^{-n(k+2)} \varepsilon^{-m - \delta j} k^j (k+1)^n (2n+k+1)! (n+1)! < \\
& < \mathcal{BR}^n \varepsilon^{-m - \delta n} (3n+k+2)!
\end{aligned}$$

Per le maggiorazioni si sono usati i lemmi 16 e 17 in appendice, oltre al fatto che

$$\begin{aligned}
& (k+1)!^{i_0} (k+2)!^{i_1} \cdots (k+n+1)!^{i_n} = \\
& = (k+1)!^{i_0 + i_1 + \cdots + i_n} \times \\
& \times \left\{ (k+2)^{i_1} [(k+2)(k+3)]^{i_2} \cdots [(k+2) \cdots (k+n+1)]^{i_n} \right\} < \\
& < (k+1)^n (k+2)^{i_1} (k+3)^{2i_2} \cdots (n+k+1)^{ni_n} \\
& \leq (k+1)^n (n+k+1)^n < (k+1)^n (2n+k+1)!
\end{aligned}$$

Si trova così una prima stima per I

$$\begin{aligned}
|I| &= \varepsilon^n \left| \int_{\mathbf{u} \in K} b_n(\mathbf{u}) e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u})} d\mathbf{u} \right| \leq \varepsilon^n \int_{\mathbf{u} \in K} |b_n(\mathbf{u})| |e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u})}| d\mathbf{u} \leq \\
& \leq \mathcal{BR}^n \varepsilon^{n(1-\delta) - m} (3n+k+2)! \approx \\
& \approx \mathcal{B}(\mathcal{R}\varepsilon^{1-\delta})^n (3n)! = \mathcal{B}\varepsilon^{*3n} (3n)!
\end{aligned}$$

la quale si lascia riorganizzare più elegantemente per mezzo della *formula di Stirling*

$$n! \approx (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Evidentemente questa formula può essere usata anche per stimare la funzione interpolante $n!$, ovvero sia $\Gamma(n+1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |I| \leq A\varepsilon^n n! \implies \forall s \in \mathbb{R}^{>0} \quad |I| \leq A\varepsilon^s \Gamma(s+1) \approx A\varepsilon^s (2\pi)^{\frac{1}{2}} s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s}$$

Qui fissiamo s in funzione di ε

$$s^* := \frac{1}{\varepsilon}$$

e concludiamo

$$|I| \leq A\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (s^*\varepsilon)^{s^*} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \leq A\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

□

4.1.2 Supplemento: Lemmi Tecnici

LEMMA 15. Sia $f : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ analitica di periodo reale 2π in ciascuna variabile. Sia S_σ la striscia complessa di larghezza σ

$$S_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in \mathbb{C}^k \mid |\text{Im } \varphi_i| < \sigma, i = 1, \dots, k \}$$

Consideriamo i suoi coefficienti di Fourier

$$\forall \beta \in \mathbb{Z}^k \quad \hat{f}_\beta = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-i\beta \cdot \varphi} d\varphi$$

$$\text{Per essi vale} \quad |\hat{f}_\beta| = O(\|f\|_\sigma e^{-|\beta|\sigma})$$

dim:

$$\hat{f}_\beta = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \dots, \varphi_k) e^{-i(\beta_1\varphi_1 + \dots + \beta_k\varphi_k)} d\varphi_1 \dots d\varphi_k$$

Scegliendo come cammini di integrazione

$$\varphi_i = x_i - i\sigma \quad \text{se } k_i > 0$$

$$\varphi_i = x_i + i\sigma \quad \text{se } k_i < 0$$

e osservando che l'integrazione non cambia, poiché gli integrali estesi ai cammini $[0 - i\sigma, 0 + i\sigma]$ e $[2\pi - i\sigma, 2\pi + i\sigma]$ sono uguali per la periodicità, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{f}_\beta &= (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\dots, x_i - i\sigma, \dots) \times \\ &\times e^{-i\beta_1 x_1} \dots e^{-i\beta_k x_k} e^{-\sigma(|\beta_1| + \dots + |\beta_k|)} d\varphi_1 \dots d\varphi_k = \\ &= e^{-\sigma|\beta|} (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f e^{-i\beta \cdot x} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Allora

$$\left| \hat{f}_\beta \right| \leq e^{-\sigma|\beta|} (2\pi)^{-k} \|f\|_\sigma \left| \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} dx_1 \cdots dx_n \right|$$

come si voleva. \square

LEMMA 16.

$$|\mathbb{D}^n \alpha| \leq R \sigma^{-(n+k+1)} (n+k+1)!$$

Dimostrazione. Osserviamo che, se φ è analitica, lo è anche $\mathbb{D}\varphi$, così come $1/\mathbb{D}\varphi = \alpha$. Per il lemma precedente, allora, si osserva la caduta esponenziale dei coefficienti di Fourier di α . Sviluppiamo dunque in serie di Fourier e valutiamo gli effetti della n -esima applicazione dell'operatore \mathbb{D} sullo sviluppo di α .

$$\alpha(\mathbf{u}) = \sum_{\bar{l} \in \mathbb{Z}^k} c_{\bar{l}} e^{i\bar{l} \cdot \bar{\mathbf{u}}}$$

$$\mathbb{D}^n \alpha(\mathbf{u}) = \sum_{\bar{l}} c_{\bar{l}} i^n (l_1 + \cdots + l_k)^n e^{i\bar{l} \cdot \bar{\mathbf{u}}}$$

$$\begin{aligned} |\mathbb{D}^n \alpha(\mathbf{u})| &\leq \sum_{\bar{l} \in \mathbb{Z}^k} |c_{\bar{l}}| (l_1 + \cdots + l_k)^n \leq \sum_{\bar{l} \in \mathbb{Z}^k} \|\alpha\|_\sigma e^{-\sigma|\bar{l}|} |\bar{l}|^n \leq \\ &\leq \|\alpha\|_\sigma \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{|\bar{l}|=m} e^{-\sigma m} m^n \stackrel{(1)}{\leq} R \sum_{m \in \mathbb{N}} m^{k-1} e^{-\sigma m} m^n \leq \\ &\stackrel{(2)}{<} R \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{(n+k+i)!}{\sigma^{n+k+1} m^2} = R \sigma^{-(n+k+1)} (n+k+i)! \end{aligned}$$

Abbiamo sfruttato i seguenti fatti:

$$(1) \#\{\bar{l} \in \mathbb{Z}^k \mid |\bar{l}| = m\} \propto m^{k-1}$$

$$(2) e^{\sigma m} = \sum_{h \in \mathbb{N}} \frac{(\sigma m)^h}{h!} > \frac{(\sigma m)^{n+k+1}}{(n+k+1)!}.$$

\square

LEMMA 17.

$$|\mathbb{D}^j b| \leq \mathcal{B} k^j \varepsilon^{-m-\delta j}$$

Dimostrazione. Si osserva semplicemente che \mathbb{D} è somma di k multiderivate di altezza 1. \square

4.1.3 Contributo di un punto di fase stazionaria

Valutiamo ora il contributo all'integrale oscillante di un intorno di un punto di fase stazionaria isolato $\bar{\alpha}$. Ci mettiamo per semplicità nell'ipotesi di dimensione uno. Supponiamo che la funzione fase φ sia una funzione differenziabile almeno tre volte con continuità.

$$I(k) = \int_a^b \exp \{ik\varphi(\alpha)\} d\alpha, \quad (4.2)$$

$$\bar{\alpha} \in (a, b), \quad \varphi'(\bar{\alpha}) = 0, \quad \text{unico in } [a, b]$$

Per valutare questo integrale operiamo il seguente cambio di variabile:

$$\zeta = k^{\frac{1}{2}}(\alpha - \bar{\alpha}), \quad \Rightarrow \quad \zeta \in [k^{\frac{1}{2}}(a - \bar{\alpha}), k^{\frac{1}{2}}(b - \bar{\alpha})],$$

cosicché $\boxed{\alpha = \bar{\alpha} + k^{-\frac{1}{2}}\zeta}$

Si può ora sviluppare $\varphi(\alpha)$ in serie di potenze attorno ad $\bar{\alpha}$ rispetto a $k^{-\frac{1}{2}}\zeta$

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\bar{\alpha}) + \frac{1}{2k}\varphi''(\bar{\alpha})\zeta^2 + O(k^{-\frac{3}{2}}).$$

Perciò l'integrale 4.2 si può riscrivere come

$$I(k) = k^{-\frac{1}{2}} \exp \{ik\varphi(\bar{\alpha})\} \int_{k^{\frac{1}{2}}(a-\bar{\alpha})}^{k^{\frac{1}{2}}(b-\bar{\alpha})} \exp \left\{ \frac{i}{2}\varphi''(\bar{\alpha})\zeta^2 \right\} \left[1 + O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right) \right] d\zeta. \quad (4.3)$$

Se $k \rightarrow +\infty$, gli estremi di integrazione vanno a $\pm\infty$. L'integrale di una funzione Gaussiana da $-\infty$ a $+\infty$ è noto, cosicché la 4.3 diviene

$$\boxed{\left[\frac{2\pi}{\varphi''(\bar{\alpha})k} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ ik\varphi(\bar{\alpha}) + i\frac{\pi}{4} \right\} + O(k^{-1}).}$$

Il principio della fase stazionaria risale a Stokes e a Kelvin. Esso è applicabile sia agli integrali oscillanti l -dimensionali, con $l > 1$, che agli integrali di Wiener e Feynman infinito dimensionali.

Si veda a tale proposito [ALBEVERIO, 1997] e [COPSON, 1965].

4.2 INTEGRALI OSCILLANTI COME SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI HELMHOLTZ

Nell'esposizione seguiremo soprattutto [KRAVTSOV & ORLOV, 1999]. Rivolgiamo la nostra attenzione verso degli integrali oscillanti ($k \rightarrow +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$) della forma

$$\begin{aligned} u(\mathbf{q}, \alpha) &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{l}{2}} \int g(\mathbf{q}, \alpha; k) \exp\{ik\varphi(\mathbf{q}, \alpha)\} d^l\alpha = \\ &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{l}{2}} \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^m} g_m(\mathbf{q}, \alpha) \exp\{ik\varphi(\mathbf{q}, \alpha)\} d^l\alpha \end{aligned} \quad (4.4)$$

Imponiamogli di soddisfare all'equazione di Helmholtz, o meglio alla sua corrispondente asintotica

$$\Delta u + k^2 n^2 u = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{l}{2}} \int \exp(ik\varphi) \times \quad (4.5)$$

$$\times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^{m-2}} [(\nabla_{\mathbf{q}}\varphi)^2 - n^2] g_m + \right. \quad (4.6)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^{m-1}} [2\nabla_{\mathbf{q}}g_m \cdot \nabla_{\mathbf{q}}\varphi + g_m \Delta\varphi] + \quad (4.7)$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^m} \Delta g_m \right\} d^l\alpha = 0. \quad (4.8)$$

4.2.1 Procedura dell'ottica geometrica

Si può riproporre la procedura piuttosto "naive" seguita con l'ottica geometrica, uguagliando a zero i coefficienti delle stesse potenze di k . Per i primi termini troviamo intanto l'equazione dell'iconale (a meno di considerare nulla g_0 e ritrovare la stessa equazione per g_1), e l'equazione del trasporto per il

termine dominante g_0 dell'ampiezza:

$$\begin{aligned}
& [(\nabla_{\mathbf{q}}\varphi)^2 - n^2] g_0 = 0, \\
& 2\nabla_{\mathbf{q}}g_0\nabla_{\mathbf{q}}\varphi + g_0\Delta\varphi = 0 \\
& 2\nabla_{\mathbf{q}}g_1\nabla_{\mathbf{q}}\varphi + g_1\Delta\varphi + \Delta g_0 = 0 \\
& 2\nabla_{\mathbf{q}}g_2\nabla_{\mathbf{q}}\varphi + g_2\Delta\varphi + \Delta g_1 = 0 \\
& \vdots \\
& 2\nabla_{\mathbf{q}}g_m\nabla_{\mathbf{q}}\varphi + g_m\Delta\varphi + \Delta g_{m-1} = 0 \\
& \vdots
\end{aligned}$$

La richiesta che queste equazioni vengano soddisfatte per ogni ordine e per qualsiasi valore dei parametri ausiliari α è troppo forte e non mette in evidenza il carattere asintotico del tipo di studio che vogliamo affrontare.

Potremmo invece limitarci a soluzioni adeguate al solo primo ordine, cioè alle prime due equazioni, ed imporre alla forma di soluzione così ottenuta di soddisfare alle condizioni al contorno del problema in esame:

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{\mathbf{q}}\varphi)^2 - n^2(\mathbf{q}) = 0, & \text{equazione dell'iconale} \\
& u(\mathbf{q}, \alpha, k) \Big|_{\Sigma} = a_{\Sigma}(\mathbf{q}) \exp(ik\varphi_{\Sigma}(\mathbf{q})), & \text{condizioni al contorno.}
\end{aligned}$$

Una procedura asintotica analoga è suggerita da ORLOV in [KRAVTSOV & ORLOV, 1999] Cap. 7. Egli suggerisce come soluzione dell'equazione di Helmholtz una sovrapposizione continua di onde parziali (o *wavelets*)

$$I(\mathbf{q}, k) = \int r_{\alpha}(\mathbf{q}, k) d\alpha.$$

Se

$$r_{\alpha} = g(\mathbf{q}, \alpha) \exp\{ik\varphi(\mathbf{q}, \alpha)\}$$

soddisfa approssimativamente all'equazione di Helmholtz per ogni valore del parametro α , ciò resta vero per una sovrapposizione continua di tali funzioni.

4.2.2 Metodo di Ludwig

La procedura che sembra essere più adeguata, consiste nel raggruppare gli addendi in potenze uguali di k , ma, diversamente che in ottica geometrica, i coefficienti delle stesse potenze di k verranno posti uguali alle combinazioni

lineari delle derivate di φ rispetto alle $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, piuttosto che uguagliati a zero.

Essa appare come il primo naturale “rilassamento” delle condizioni “naive” dell’ottica geometrica in vista del principio della fase stazionaria. Se infatti i contributi significativi all’integrale derivano dagli intorno dei punti stazionari della fase, la prima richiesta da fare nel porre una equazione asintotica sarà l’annullarsi dei contributi di tali punti. Per il Lemma di Hadamard, le funzioni che si annullano sui punti stazionari sono tutte e sole le combinazioni lineari delle derivate prime rispetto alle variabili α_s .

Questa procedura, suggerita da [LUDWIG, 1966] permette di ridurre di una unità l’ordine di grandezza in k e restituisce in ultima analisi equazioni per tutte le incognite.

Applicandola al coefficiente di $(ik)^2$ richiediamo che la relazione

$$\boxed{((\nabla_{\mathbf{q}}\varphi)^2 - n^2) = \sum_{s=1}^l T_s(\mathbf{q}, \alpha) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}} \quad (4.9)$$

sia identicamente soddisfatta.

Sarebbe naturale cercare la funzione $T_s(\mathbf{q}, \alpha)$ nella forma di polinomi nei parametri α . Fatto ciò, i termini coinvolgenti le derivate $\partial\varphi/\partial\alpha$ possono essere integrati per parti, riducendo così l’ordine nel parametro k .

Vediamo come ciò possa essere realizzato:

$$\begin{aligned} & \int g_m \{[\nabla_{\mathbf{q}}\varphi]^2 - n^2\} \exp(ik\varphi) d^l \alpha = \\ &= \int g_m \sum_{s=1}^l T_s \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s} \exp(ik\varphi) d^l \alpha = \\ &= \frac{1}{ik} \int \sum_{s=1}^l g_m T_s \frac{\partial \exp(ik\varphi)}{\partial \alpha_s} d^l \alpha = \\ &= \boxed{\frac{1}{ik} \int \sum_{s=1}^l \frac{\partial}{\partial \alpha_s} (g_m T_s \exp(ik\varphi)) d^l \alpha} - \\ & - \frac{1}{ik} \int \left[\sum_{s=1}^l \frac{\partial}{\partial \alpha_s} (g_m T_s) \right] \exp(ik\varphi) d^l \alpha \end{aligned}$$

La formula in cornice può essere uguagliata a zero ponendo g_m a suppor-

to compatto K cosicché, applicando il teorema della divergenza⁵ al campo vettoriale

$$V_s \stackrel{\text{def}}{=} g_m T_s \exp(ik\varphi),$$

si trova che

$$\int_K \operatorname{div}_{\mathbb{R}^l}(V_s) d^l \alpha = \int_{\partial K} (V_s \cdot \mathbf{n}_e) d^{l-1} \alpha' \equiv 0 \quad \text{essendo} \quad V \Big|_{\partial K} = 0.$$

Di conseguenza, al posto della equazione 4.5, otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n^2 u &= \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{\frac{l}{2}} \int \exp(ik\varphi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^{m-1}} \times \\ &\times \left\{ 2\nabla_{\mathbf{q}} g_m \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \varphi + g_m \Delta \varphi - \sum_{s=1}^l \frac{\partial}{\partial \alpha_s} (g_m T_s) + \Delta g_{m-1} \right\} d^l \alpha = 0. \end{aligned}$$

Per il termine principale ($m = 0$) dello sviluppo, estraiamo anche qui la *valutazione della parte intera* rispetto alle $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}$:

$$2\nabla_{\mathbf{q}} g_0 \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \varphi + g_0 \Delta \varphi - \sum_{s=1}^l \frac{\partial}{\partial \alpha_s} (g_0 T_s) = \sum_{s=1}^l R_{s(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}. \quad (4.10)$$

In altre parole: {4.9e4.10} sono un sistema di equazioni differenziali per φ e g_0 .

Se richiediamo che questa equazione debba essere soddisfatta identicamente nelle α , otteniamo equazioni per le incognite e per le funzioni polinomiali $R_{s(0)}$. Iterare questa procedura fino all'ordine m conduce alle relazioni ricorsive:

$$\begin{aligned} 2\nabla_{\mathbf{q}} g_m \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \varphi + g_m \Delta \varphi - \sum_{s=1}^l \frac{\partial}{\partial \alpha_s} (g_m T_s) + \Delta g_{m-1} - \\ - \sum_{s=1}^l \frac{\partial R_{s(m-1)}}{\partial \alpha_s} = \sum_{s=1}^l R_{s(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dimostreremo ora che le soluzioni di questa forma costituiscono una generalizzazione delle soluzioni trovate con i metodi dell'ottica geometrica.

⁵ricordiamo la sua più elegante e generale formulazione per le forme differenziali, ovvero il *Teorema di Stokes*

$$\int_{K^l} d\omega^{l-1} = \int_{\partial K^l} \omega^{l-1}.$$

4.2.3 Relazioni con l'Ottica Geometrica

Al di fuori della *caustic zone*, possiamo sostituire l'integrale oscillante 4.4 con l'espressione asintotica ottenuta con il metodo della fase stazionaria:

$$u(\mathbf{q}, k) = \sum_{\mu=1}^M A_{(\mu)}(\mathbf{q}) \exp(ik\varphi_{(\mu)}(\mathbf{q})), \quad (4.12)$$

dove

$$A^{(\mu)}(\mathbf{q}) = g(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}) h_j^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i\beta_j \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varphi(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}).$$

I valori $\alpha^{(\mu)}$ sono le M radici delle equazioni

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{q}, \alpha)}{\partial \alpha_s} = 0, \quad s = 1, \dots, l. \quad (4.13)$$

mentre

$$\tilde{h}_\mu = |\det [H_{(r,s)}]| = \det \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s} \right| (\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}),$$

$$\beta_j = \operatorname{sgn} H(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}) = \left(\# \{ \text{autovalori positivi} \} - \right. \\ \left. - \# \{ \text{autovalori negativi} \} \right) (H(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)})).$$

La tentazione di identificare lo sviluppo 4.12 con la soluzione dell'ottica geometrica 3.17 ponendo

$$A^{(\mu)}(\mathbf{q}) = A(\mathbf{q}) \quad \text{e} \quad \varphi^{(\mu)}(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}),$$

è del tutto legittima. Ma $\varphi(\mathbf{q})$ e A soddisfano rispettivamente all'equazione dell'iconale 3.9 e all'equazione del trasporto 3.8. Ciò significa che vale altrettanto per $\varphi^{(\mu)}$ e $A^{(\mu)}$?

Dimostriamo, per calcolo diretto, che in un punto stazionario $\alpha^{(\mu)} = \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q})$, l'equazione 4.9 si riduce all'equazione dell'iconale per $\varphi^{(\mu)}(\mathbf{q})$, e l'equazione 4.10 all'equazione del trasporto per $A^{(\mu)}(\mathbf{q})$. Ponendo $\alpha = \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q})$ provoca l'annullarsi del membro di destra della 4.9 in vista della condizione di stazionarietà 4.13. Il membro di sinistra sarà trasformato secondo la regola della catena. Scriviamo $\nabla_{\mathbf{q}}$ intendendo la derivata totale rispetto a \mathbf{q} .

Per la funzione $\varphi^{(\mu)}(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))$, la derivata totale è

$$\nabla_{\mathbf{q}}\varphi^{(\mu)}(\mathbf{q}) = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_s}\nabla_{\mathbf{q}}\alpha_s^{(\mu)}.$$

In vista della condizione di stazionarietà il secondo termine si annulla, e perciò dalla 4.9 otteniamo l'equazione dell'iconale

$$(\nabla_{\mathbf{q}}\varphi^{(\mu)})^2 - n^2(\mathbf{q}) = 0. \quad (4.14)$$

Verifichiamo ora che 4.10, nei punti stazionari, si riduce alla 3.8. Essa prende la forma, sempre per la stazionarietà,

$$\left(2\nabla_{\mathbf{q}}\varphi\nabla_{\mathbf{q}}g + g\Delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\varphi - g\frac{\partial T_s}{\partial\alpha_s} - T_s\frac{\partial g}{\partial\alpha_s}\right)\Big|_{(\mathbf{q},\alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0.$$

Prima di tutto, usiamo ancora la regola della catena per rappresentare $\nabla_{\mathbf{q}}g^{(\mu)}$ e $\Delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\varphi^{(\mu)}$ in termini di $\nabla_{\mathbf{q}}g$ e di $\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}}g^{(\mu)}(\mathbf{q}) &= \left(\frac{\partial g}{\partial\mathbf{q}} + \frac{\partial g}{\partial\alpha_s}\nabla_{\mathbf{q}}\alpha_s^{(\mu)}\right)\Big|_{(\mathbf{q},\alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} \\ \Delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\varphi^{(\mu)}(\mathbf{q}) &= \nabla_{\mathbf{q}}(\nabla_{\mathbf{q}}\varphi^{(\mu)}(\mathbf{q})) = \Delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\varphi + \frac{\partial\nabla_{\mathbf{q}}\varphi}{\partial\alpha_s}\nabla_{\mathbf{q}}\alpha_s^{(\mu)}. \end{aligned}$$

Con riferimento a 4.12 esprimiamo $g^{(\mu)}$ attraverso $A^{(\mu)}$ come

$$g^{(\mu)}(\mathbf{q}) = A^{(\mu)}(\mathbf{q})h_{\mu}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))$$

per ottenere l'equazione

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{\frac{1}{2}} \left[(2\nabla_{\mathbf{q}}A\nabla_{\mathbf{q}}\varphi + A\Delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\varphi) - \frac{\partial A}{\partial\alpha_s} (T_s + 2\nabla_{\mathbf{q}}\varphi\nabla_{\mathbf{q}}\alpha_s^{(\mu)}) - \right. \\ \left. - A \left(\frac{\partial T_s}{\partial\alpha_s} + \frac{\partial\nabla_{\mathbf{q}}\varphi}{\partial\alpha_s}\nabla_{\mathbf{q}}\alpha_s^{(\mu)} \right) - A\nabla_{\mathbf{q}}\varphi\nabla_{\mathbf{q}}\ln\tilde{h}_{\mu} \right] \Big|_{(\mathbf{q},\alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0 \end{aligned}$$

che assume la forma desiderata di una equazione del trasporto

$$(2\nabla_{\mathbf{q}}A\nabla_{\mathbf{q}}\varphi + A\Delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\varphi)\Big|_{(\mathbf{q},\alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0 \quad (4.15)$$

ammesso che

$$(T_s + 2\Delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\varphi\nabla_{\mathbf{q}}\alpha_s^{(\mu)})\Big|_{(\mathbf{q},\alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0 \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{\partial T_s}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha_s} \nabla_{\mathbf{q}} \alpha_s + \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \nabla_{\mathbf{q}} \ln h_{\mu} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0. \quad (4.17)$$

Per ottenere 4.16 differenziamo la 4.9 rispetto α_r (vale identicamente nelle α)

$$2 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha_r} = T_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s} + \frac{\partial T_s}{\partial \alpha_r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s}. \quad (4.18)$$

La sostituzione $\alpha = \alpha^{(\mu)}$ annulla il secondo termine a destra, perciò possiamo scrivere

$$\left(2 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha_r} - T_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0. \quad (4.19)$$

Se invece prendiamo il gradiente di 4.13, la quale, determinando le radici $\alpha^{(\mu)}(\mathbf{q})$, è un'identità in \mathbf{q} :

$$\left(\frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha_r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s} \nabla_{\mathbf{q}} \alpha_s^{(\mu)} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0. \quad (4.20)$$

Moltiplicando questa relazione per $2 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi^{(\mu)}$ otteniamo

$$\left(2 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha_r} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s} \nabla_{\mathbf{q}} \alpha_s^{(\mu)} \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0, \quad (4.21)$$

la quale differisce dalla 4.19 esattamente per la 4.16, la quale resta così dimostrata.

Limitiamoci a delineare la deduzione di 4.17 nel caso generale. Esibiremo calcoli dettagliati solo per il caso $l = 1$. Differenziando 4.18 rispetto a α_t , i.e., prendendo la derivata seconda della 4.9, otteniamo il sistema di l^2 relazioni ($r, t = 1, \dots, l$):

$$\begin{aligned} & \left(2 \frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha_r} \frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha_t} + 2 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_t} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = \\ & = \left(\frac{\partial T_s}{\partial \alpha_t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s} + \frac{\partial T_s}{\partial \alpha_r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_s \partial \alpha_t} + T_s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha_r \partial \alpha_s \partial \alpha_t} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

La parte più noiosa consiste ora nel determinare il sistema delle l^2 derivate $\partial T_s / \partial \alpha_r$. Nel caso $l = 1$, ciò si riduce ad un'unica equazione per $\partial T / \partial \alpha$:

$$\begin{aligned} & \left[2 \left(\frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + 2 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right] \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = \\ & = \left(2 \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + T \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))}. \end{aligned}$$

Sostituendo in questa espressione la 4.16 si trova

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = \\ & = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \left(\frac{\partial^2 \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3} \nabla_{\mathbf{q}} \alpha^{(\mu)} \right) \right] \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))}. \end{aligned}$$

Si può riconoscere nel coefficiente di $\nabla_{\mathbf{q}} \varphi$ il gradiente di $\partial^2 \varphi^{(\mu)} / \partial \alpha^2$, e se poniamo $l = 1$ in 4.20 otteniamo che $\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi / \partial \alpha^2$ è uguale a $\nabla_{\mathbf{q}} \alpha^{(\mu)} \partial^2 \varphi / \partial \alpha^2$. Riconoscendo che nel caso 1-dimensionale $\tilde{h} = \partial^2 \varphi / \partial \alpha^2$ arriviamo all'espressione

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} + \nabla_{\mathbf{q}} \alpha^{(\mu)} \frac{\partial \nabla_{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \alpha} - \nabla_{\mathbf{q}} \varphi \nabla_{\mathbf{q}} \ln \tilde{h} \right) \Big|_{(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))} = 0,$$

che è la prova di 4.17 per il caso in cui $l = 1$.

Perciò abbiamo verificato che la quantità $A^{(\mu)} = A(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))$ soddisfa (almeno per $l = 1$) all'equazione del trasporto 4.15, e che la quantità $\varphi^{(\mu)} = \varphi(\mathbf{q}, \alpha^{(\mu)}(\mathbf{q}))$ obbedisce all'equazione dell'iconale 4.14.

Lo sviluppo asintotico dell'integrale oscillante ottenuto con il metodo della fase stazionaria è allora una somma finita di raggi. Esso si può quindi identificare con la formula 3.17 della teoria geometrica della diffrazione di Keller, ed il fatto che l'integrale sia soluzione asintotica dell'equazione di Helmholtz, è una dimostrazione che tale formula è valida.

Bibliografia

- [AIRY, 1838] AIRY, G.B. *On the Intensity of Light in a Neighborhood of a Caustic* Trans. Camb. Phil. Soc. **6**, 379-403 **1838**
- [ALBEVERIO, 1997] ALBEVERIO, SERGIO *Wiener and Feynman Path Integrals and Their Applications* Proc. Symp. Appl. Math. **52** **1997**
- [AMANN & ZEHNDER, 1980] AMANN, H. & ZEHNDER, E. *Periodic solutions of asymptotically linear hamiltonian systems*, Manus. Math. **32** **1980**
- [ARNOLD, 1972] ARNOL'D, V.I. *Integrals of Rapidly Oscillating Functions and Singularities of the projections of Lagrange Manifolds* Funct. Anal. and its Appl. **6**, 3, pg. 3-25 **1977**
- [ARNOLD, 1975] ARNOL'D, V.I. *Critical Points of Smooth Funcions and Their Normal Forms* Russian Math. Surveys **30**, pg. 1-75 **1975**
- [ARNOLD, 1982] ARNOLD, J.M. *RA*dio Sci. **81181** 81 **1982**
- [ARNOLD, 1986] ARNOLD, J.M. *IEE* Proc. **133165** 81 **1986**
- [ARNOLD-ZADE-VARCHENKO, 1985] ARNOL'D, V.I., GUSEIN-ZADE, S.M., VARCHENKO, A.N. *Singularities of Differentiable Maps, Vol. I* Birkhäuser **1985**
- [ARSIE, 1997] ARSIE, ALESSANDRO *Sulla Globalizzazione dei procedure asintotiche e semiclassiche in Meccanica Quantistica* Università di Padova **1997**
- [BENENTI & TULCZYJEW, 1979] BENENTI, SERGIO & TULCZYJEW, W.M. *The Geometrical Meaning and Globalization of the Hamilton-Jacobi Method* Proceedings "Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics", Aix-en-Provence, Salamanca, in Lecture Notes in Math. **836** 9-21, Springer **1979**

- [BERRY & UPSTILL, 1980] BERRY, MICHAEL VEYNON AND UPSTILL, C. *Catastrophe Optics: Morfologies of Caustics and their diffraction patterns* Progress in Optics, xvii, E.Wolf ed., North-Holland, pp. 257-346
1974
- [BIRKHOFF, 1933] BIRKHOFF *BAMS*, 39 1933 pp.681 – 700
- [BORN & WOLF, 1959] BORN, MAX & WOLF, EMIL *Principles of Optics* Pergamon Press, London 1959
- [CARDIN, 1997] CARDIN, FRANCO *Appunti per il corso di Topologia* A.A. 1997-1998 1997
- [CARDIN, 2000] CARDIN, FRANCO *The Global Finite Structure of Generic Envelope Loci for Hamilton-Jacobi Equations* Preprint 2000
- [CARIÑENA & NASARRE, 1996] CARIÑENA, JOSÉ F. & NASARRE, JAVIER *On the Symplectic Structures Arising in Geometric Optics* Fortschritte der Physik 44 3, 181-198 1996
- [CONLEY & ZEHNDER, 1984] CONLEY, C. & ZEHNDER, E. *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamilton equations*, Comm. Pure Appl. Math. 37 1984
- [COPSON, 1965] COPSON, E.T. *Asymptotic Expansions* Cambridge Tracts in Math. and Math. Thys. 55 Cambridge University Press 1965
- [DELL'ANTONIO, 1995] DELL'ANTONIO, GIANFAUSTO *Argomenti scelti di Meccanica* Preprint SISSA 1995
- [DUISTERMAAT, 1973] DUISTERMAAT, JOHANNES JISSE *Fourier Integral Operators* Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University 1973
- [DUISTERMAAT, 1974] DUISTERMAAT, JOHANNES JISSE *Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities* Commun. Pure Appl. Math. 27, 207-281 1974
- [FEDORYUK, 1999] FEDORYUK, M.V. *Equations with Rapidly Oscillating Solutions* Partial Differential Equations V, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1999
- [GILMORE, 1981] GILMORE, ROBERT *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers* Wiley, New York 1981

- [GUILLEMIN-STERNBERG, 1984] GUILLEMIN, VICTOR & STERNBERG, SHLOMO *Symplectic Techniques in Physics* 1984
- [HÖRMANDER, 1971] HÖRMANDER, LARS *Fourier Integral Operators I* Acta Math. **127**, 79-183 1997
- [KELLER, 1958] KELLER, JOSEPH B. *A Geometrical Theory of Diffraction* Proc. Symp. Appl. Math. **8**, 1958
- [KELLER & MCLAUGHLING, 1975] KELLER, J.B. & MCLAUGHLING, D.W. *The Feynman Integral* Mathematical Association of America 1975
- [KRAVTSOV & ORLOV, 1999] KRAVTSOV, YUA & ORLOV, YUI *Caustics, Catastrophes and Wave Fields* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1999
- [KRAVTSOV & ORLOV, 1990] KRAVTSOV, YUA & ORLOV, YUI *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990
- [LUDWIG, 1966] LUDWIG, DONALD *Uniform Asymptotic Expansion at a Caustic* Comm.on Pure and Appl. Math., vol. xix, 215-250 1966
- [HAMILTON] HAMILTON, WILLIAM R. *theory of system of rays* Transactions of the Royal Irish Academy, Dublino 1828
- [MASLOV, 1971] MASLOV, V.P. *théorie des perturbations et méthodes asymptotiques* Editions de l'Université de Moscou, 1965 (in russo), Dunod-Gauthier-Villars, (in francese) Paris 1971
- [POSTON & STEWART, 1978] POSTON, T. & STEWART, N. *Cathastrophe Theory and its Applications* Pitman, London 1978
- [TULCZYJEW, 1975] TULCZYJEW, W.M. *Relations symplectiques et les équations de Hamilton-Jacobi relativistes* C.R. Acad. Sci. Paris **281A**, 545-547 1975
- [VINOGRADOV, 1973] VINOGRADOV, A.M. *Multivalued Solutions and a Principle of Classification of non-linear differential equations* Soviet. Math. Dokl. **14** n.3, pg.661 1973
- [VITERBO, 1996] VITERBO, CLAUDE *Solutions of Hamilton-Jacobi equations and Symplectic Geometry* Addendum to Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, École Polytech., Palaiseau, 1996
- [WEINSTEIN, 1977] WEINSTEIN, ALAN 1977

- [WOODHOUSE, 1991] WOODHOUSE, N.M.J. *Geometric Quantization* Clarendon Press, Oxford 1991