UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "T. LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

GREEN GOLDEN RULE: UN PROBLEMA DI MASSIMO VINCOLATO

RELATORE:
CH.MO PROF. BRUNO VISCOLANI

LAUREANDA: COSTANZA DE ACUTIS
MATRICOLA: 1135965

ANNO ACCADEMICO 2018/2019

La candidata, sottoponendo il presente lavoro, dichiara, sotto la propria personale responsabilità, che il lavoro è originale e che non è stato già sottoposto, in tutto in parte, dalla candidata o da altri soggetti, in altre Università italiane o straniere ai fini del conseguimento di un titolo accademico. La candidata dichiara altresì che tutti i materiali utilizzati ai fini della predisposizione dell'elaborato sono stati opportunamente citati nel testo e riportati nella sezione finale "Riferimenti bibliografici" e che le eventuali citazioni testuali sono individuabili attraverso l'esplicito richiamo al documento originale.

Indice

Sommario

Dall'analisi dei testi Beltratti et al. (1993, 1994); Chichilnisky et al. (1995); Chichilnisky (1997), è stato possibile studiare le preferenze sostenibili e il modello che, a partire da esse, gli autori hanno costruito. Si è giunti alla conclusione che questa alternativa, ai criteri di welfare generalmente utilizzati, è interessante dal punto di vista degli obiettivi sottostanti; inoltre, essa individua un target ideale per la società, cioè la cosiddetta *green golden rule.* Tuttavia, non risulta possibile individuare un percorso ottimale che sia soluzione del problema generale.

1 Introduzione

In questa sede, si vuole presentare un'analisi lineare e il più possibile chiara delle questioni presentate nei testi Beltratti et al. (1993, 1994); Chichilnisky et al. (1995); Chichilnisky (1997). Al loro interno, gli autori hanno formulato un modello di crescita dell'economia con una risorsa ambientale rinnovabile, per rispondere al problema della sostenibilità in termini di equità intergenerazionale. È interessante occuparsi di questo tema perché oggi la società si trova a dover discutere di progetti di lungo periodo, che possano contrastare questioni come i cambiamenti climatici e le conseguenze dell'esaurimento delle risorse.
In Chichilnisky (1997)[1], si pongono le basi teoriche per la formulazione del modello. Qui, infatti, l'autrice definisce le preferenze sostenibili, cioè il criterio di welfare attraverso cui confrontare le utilità che saranno ottenute da ciascuna generazione. Chichilnisky mostra che questo criterio rispetta gli assiomi di non dittatorialità del presente e del futuro; pertanto, esso risulta più adatto a valutare politiche di lungo periodo rispetto al modello, generalmente usato, delle utilità attualizzate. Inoltre, Chichilnisky presenta le evidenze empiriche a sostegno di questa struttura delle preferenze e ragiona sulla loro valenza anche in orizzonti temporali finiti, facendo riferimento al problema di *equal treatment.*
All'interno dei testi Beltratti et al. (1993, 1994); Chichilnisky et al. (1995); Chichilnisky (1997), sulla base di queste premesse, gli autori delineano il modello di crescita. La funzione da massimizzare è una combinazione di un integrale improprio dell'utilità attualizzata e di una funzione $\liminf$, cioè una misura dell'andamento dei valori dell'utilità nel lungo periodo. Il problema viene, dapprima, affrontato risolvendo separatamente le due componenti del funzionale obiettivo: la massimizzazione dell'integrale improprio corrisponde

[1]Di questo articolo vi è anche una versione precedente del 1993.

ad un problema di controllo ottimo in orizzonte infinito, da cui si ottiene la soluzione "utilitaria"; il problema di lungo periodo consiste in un problema di programmazione non lineare, dal quale si consegue la cosiddetta *green golden rule*, definita come "il livello massimo di utilità istantanea che è possibile mantenere per un tempo indefinito" (Beltratti et al., 1993, 1994; Chichilnisky et al., 1995). Successivamente, gli autori propongono un modello semplificato per la risoluzione del problema generale, caratterizzato dalle preferenze sostenibili. Tuttavia, anche in questo caso, il problema viene svolto approssimando la massimizzazione dei due termini separatamente ed emerge che non è possibile trovare una soluzione ottima generale (Beltratti et al., 1993, 1994).

Il presente lavoro si articola in 5 sezioni. Nella **Sezione 2** si definiscono gli obiettivi che gli autori si sono prefissati e le motivazioni sottostanti alla loro ricerca. All'interno della **Sezione 3** vengono fornite le definizioni che stanno alla base del criterio delle preferenze sostenibili e si propone un confronto, di queste ultime, con altri criteri di welfare presenti in letteratura. Nella **Sezione 4** viene sviluppato il modello secondo i seguenti passaggi: si risolve il problema dell'utilità attualizzata, prima seguendo l'analisi degli autori, successivamente attraverso la formulazione tipica del modello neoclassico; si considera il problema di programmazione non lineare con $\liminf$ per trovare la *green golden rule*; si presenta il problema generale e si analizzano i risultati. Inoltre, viene discussa la validità del modello in orizzonti finiti e si riportano le evidenze empiriche. Infine, la **Sezione 5** fornisce le conclusioni in merito al lavoro presentato.

2 Obiettivi proposti

Nei testi Beltratti et al. (1993, 1994); Chichilnisky et al. (1995); Chichilnisky (1997), gli autori si propongono di discutere il concetto di crescita sostenibile, con un focus sull'equità intergenerazionale. Si tratta quindi di ricercare un modello di crescita che definisca un percorso ottimale di uso delle risorse, e che abbia l'obiettivo di portare maggior equità tra le generazioni. L'uso dell'aggettivo "sostenibile" deriva dalle domande che oggi ci si pone riguardo ai modelli di crescita delle attività economiche: possono essere portati avanti nel lungo periodo senza conseguenze disastrose per l'ambiente o per l'umanità? Le esistenti istituzioni e criteri decisionali sono in grado di individuare ed evitare conseguenze dannose che si potranno presentare nel lungo periodo? Il tema risulta di grande attualità nel contesto odierno di nuova e crescente sensibilità nei confronti dei temi ambientali: di fronte ai cambiamenti climatici, all'uso vorace di risorse e alla perdita di biodiversità, oggi è necessario predisporre e valutare politiche di crescita che abbiano l'obiettivo di "soddisfare i bisogni del presente senza compromettere quelli del futuro" (Beltratti et al., 1998).

Nella letteratura, per individuare un percorso ottimale di utilizzo delle risorse, viene generalmente utilizzato l'approccio dell'utilità attualizzata, nel quale l'utilità che gli individui otterranno in futuro viene attualizzata con un tasso di attualizzazione (di sconto) positivo $\delta > 0$. Di fronte alla decisione di intraprendere o meno un progetto, oltre al valutare i costi e i benefici futuri ad esso correlati, è necessario affrontare il tema dell'equità intergenerazionale: come si devono considerare gli interessi delle varie generazioni?
Molti autori hanno evidenziato il fatto che il metodo dell'utilità attualizzata non è in grado di considerare tutte le generazioni equamente, perché non fornisce la stessa utilità ad ognuna di esse. Infatti, un tasso di attualizzazione positivo non può che portare ad un'asimmetria tra presente e futuro, soprattutto tra generazioni molto distanti tra loro: più lontana nel futuro è una generazione, minore sarà il valore dato (oggi) alla sua utilità.
Se si attualizza il PIL totale del mondo ad un tasso annuo del 5%, in 200 anni varrà poche centinaia di euro (Beltratti et al., 1993). Da ciò si comprende che l'analisi costi-benefici standard pregiudica politiche, progetti ed eventi che devono essere valutati nel lungo periodo. Ad esempio, risulta poco appropriata per valutare le politiche legate a questioni ambientali, come una politica per la smaltimento sicuro dei rifiuti nucleari: molti degli effetti potranno essere visibili solamente nel lontano futuro e perciò diventa complicato giustificare i costi da sostenere nel presente per ottenere benefici che oggi, dopo essere stati scontati, risultano irrilevanti.

Anche dalle evidenze empiriche (Chichilnisky, 1997), riguardo alle modalità con cui gli individui valutano il futuro, emerge che il modello dell'utilità attualizzata non è totalmente appropriato. Le persone, infatti, valutano il presente e il futuro in maniera più equa rispetto a quanto la teoria predice. Il trade-off tra l'oggi e il domani si attenua con l'avanzare del tempo; pertanto, il peso relativo di due periodi consecutivi è inversamente proporzionale alla loro distanza dal presente. Si conclude, quindi, che il tasso di attualizzazione dovrebbe diminuire con l'aumentare di t, tendendo così asintoticamente a 0.
Nella **Sezione 3.2**, tra gli altri, vengono presentati due criteri, il criterio *overtaking* (sorpasso) e il criterio di Ramsey, attraverso i quali si è cercato di teorizzare il tipo di struttura delle preferenze appena descritta. Tuttavia essi, come si vedrà, non rispondono ai criteri per le preferenze sostenibili. Si rimanda alla **Sezione 4.5** per una digressione sulle evidenze empiriche.

La domanda che a questo punto sorge spontanea è se esiste un modo per descrivere il valore di una risorsa, senza sottostimare gli interessi e le utilità del futuro. In altre parole, è possibile individuare un approccio al benessere economico intertemporale che non annienti gli interessi delle generazioni molto distanti nel futuro? Gli autori (Beltratti et al., 1993, 1994; Chichilnisky et al., 1995; Chichilnisky, 1997) si propongono di produrre una teoria di sviluppo economico che formalizzi questo obiettivo, con la chiarezza e la sostanza ottenute dalla teoria della crescita neoclassica.

3 Preferenze sostenibili fra traiettorie di consumo

3.1 Elementi chiave

Il modello in questione è caratterizzato dalla presenza di una risorsa ambientale rinnovabile e dall'utilizzo delle preferenze sostenibili. Queste ultime sono state così definite da Chichilnisky (1997), per indicare quelle preferenze che sono "sensibili" al welfare di tutte le generazioni: esse presentano simmetria intertemporale, cioè danno uguale peso a presente e futuro.
Includere nel modello una risorsa rinnovabile significa che è possibile teoricamente mantenere, per un tempo indefinito, un livello positivo di stock di questa risorsa. Gli asset considerati potrebbero essere il clima, la biodiversità, la foresta pluviale, etc., e in ogni caso essi sono valutati *in their own rights*: oltre ad essere componenti della funzione di produzione, hanno valore di per sé e perciò competono, come gli altri beni, alla formazione dell'utilità. Da ciò emerge il ruolo importante giocato dalle risorse ambientali per la qualità della vita delle persone.

Di seguito si definiscono gli elementi che questo modello utilizza. Le generazioni considerate g sono di numero infinito, $g = 1, 2, \ldots, \infty$, perché non è possibile conoscere una specifica data di fine del mondo e, quindi, non è possibile individuare un'ultima generazione. Ad ognuna di esse è associata una funzione di utilità u_g, che deriva dal consumo di n beni e dal livello degli stock delle risorse rinnovabili considerate. L'obiettivo è confrontare le utilità ottenute da ciascuna generazione: per una successione di utilità si vuole, quindi, stabilire un criterio di preferenza che sia rappresentato da una funzione W.
Formalmente si suppone quando segue.

Definizione 1. Si definisce traiettoria di consumo ammissibile, cioè la quantità di beni consumati, una successione

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_g, \dots) \qquad\qquad x_g \in \mathbb{R}^n.$$

Definizione 2. Un flusso di utilità ammissibile è rappresentato da

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \dots) \qquad\qquad \alpha_g = u_g(x_g).$$

Inoltre, si indica con Ω l'insieme dei flussi ammissibili di utilità.

Secondo Chichilnisky (1997), non è restrittivo supporre che

$$u_g(x) \in [0, 1] \qquad\quad \forall g \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, \infty)^n.$$

Perciò se α è un flusso di utilità ammissibile, allora $\alpha \in \ell_\infty$, dove ℓ_∞ è l'insieme delle successioni limitate reali.[2]

Definizione 3. Un criterio di welfare è una funzione

$$W : \ell_\infty \to [0, +\infty],$$

e il suo dominio contiene Ω ($\Omega \subset \ell_\infty$).

Se si hanno α, $\beta \in \Omega$, si conclude che

$$W(\alpha) \geq W(\beta)$$

se e solo se il flusso di utilità α è preferibile al flusso di utilità β.

3.2 Preferenze sostenibili

Il criterio di welfare W presentato da Chichilnisky (1997) è caratterizzato da completezza[3] e sensibilità[4]. Inoltre, risponde a due assiomi di *non-dittatorialità del presente* e *non-dittatorialità del futuro*:

- una funzione del welfare W riserva un ruolo dittatoriale al presente se W è sensibile unicamente ai livelli di utilità di un numero finito di generazioni, cioè se è sensibile solamente alle utilità delle generazioni $g < \hat{g}$, dove $\hat{g}$ è il *cutoff* della sequenza di g. W, quindi, non considera i livelli di utilità delle generazioni successive al valore di *cutoff*;

[2] ℓ_∞ è uno spazio metrico completo (spazio di Banach) e questo ha conseguenze matematiche importanti.

[3] Un criterio di benessere W è completo se viene rappresentato da una funzione a valori reali crescenti, definita su tutti i flussi di utilità $W : \ell_\infty \to R^+$.

[4] Dati due flussi di utilità α e β, dove α è ottenuto da β aumentando il welfare di alcune generazioni, allora un criterio di benessere W è sensibile se α viene preferito a β, $\alpha > \beta$.

- una funzione del welfare W fornisce un ruolo dittatoriale al futuro se W è sensibile solamente ai livelli di utilità delle generazioni che si trovano nelle "code", dove $g \geq \hat{g}$. Ciò significa che W è insensibile ai livelli di utilità di un qualsiasi numero finito di generazioni.

Partendo da queste definizioni, Chichilnisky ha introdotto i seguenti assiomi:

Assioma 1. Non dittatorialità del presente.

Assioma 2. Non dittatorialità del futuro.

Definizione 4. Una preferenza sostenibile è una preferenza che soddisfa gli Assiomi 1 e 2.

Per risolvere il problema dell'asimmetria intergenerazionale, non basterebbe semplicemente dare egual peso ad ogni generazione appartenente ad un flusso di utilità infinito? Non risulta possibile agire in questo modo perché, assegnando un peso $\frac{1}{N}$ per infinite generazioni, si ottiene che nel limite ogni generazione ha un peso pari a 0. Questo spiega perché generalmente vengono utilizzati criteri di welfare che provocano asimmetria intergenerazionale.
Allora, è possibile costruire un criterio che effettivamente rispetti i due assiomi sopraccitati? Secondo Chichilninsky, la risposta è affermativa. Per ottemperare agli assiomi nel caso di N generazioni, si possono assegnare pesi che crescono all'aumentare del tempo alle $N-1$ generazioni, e fornire un peso addizionale all'ultima generazione. Questa procedura può essere estesa al caso con infinite generazioni: alla somma delle utilità attualizzate, si aggiungono le *limiting properties* di un flusso di utilità, alle quali viene assegnato un peso positivo (Beltratti et al., 1994; Chichilnisky, 1997). Chichilnisky (1997) ha formulato in questi termini le preferenze sostenibili e ha enunciato due teoremi, che ne provano l'esistenza e ne descrivono le caratteristiche.

Teorema 1 (Esistenza delle preferenze sostenibili)**.** *Esiste una preferenza sostenibile $W : \ell_\infty \to \mathbb{R}$, cioè una preferenza che sia sensibile e non assegni un ruolo dittatoriale né al presente né al futuro. Una preferenza sostenibile è data nella forma di una somma di due termini*

$$W(\alpha) = \sum_{g=1}^{\infty} \lambda_g \alpha_g + \phi(\alpha) \tag{1}$$

dove $\forall g, \quad \lambda_g > 0, \quad \sum_{g=1}^{\infty} \lambda_g < \infty$
e dove $\phi(\alpha)$ è la funzione $\liminf_{g\to\infty}(\alpha_g)$[5] *estesa a tutti gli elementi di ℓ_∞.*

[5] Si veda l' **Appendice A.1** per la definizione di minimo limite.

In Chichilnisky (1997) si dimostra che esiste una preferenza sostenibile e che essa assume la forma appena descritta. Emerge che un criterio W è sostenibile se W è una preferenza ben definita, non negativa, crescente su ℓ_∞ e completa.

Di seguito vengono presentati gli altri criteri e i motivi per cui essi non rispettano gli assiomi precedentemente trattati.

- Criterio di Ramsey
  Secondo questo criterio, un flusso di utilità α è preferito a β se α è più "vicino" rispetto a β ad una traiettoria *bliss*, cioè $\zeta = 1, 1, ..., 1, ...$:

$$\sum_{g=1}^{\infty}(1-\alpha_g) \geq \sum_{g=1}^{\infty}(1-\beta_g). \tag{2}$$

  Il criterio di Ramsey non rispetta gli assiomi perché è incompleto: non si tratta di una funzione reale ben definita su tutti i flussi di utilità di ℓ_∞ e perciò essa non è in grado di definire un ordine completo su ℓ_∞. Lo si verifica considerando una qualsiasi sequenza $\alpha \in \ell_\infty$, da cui emerge che la somma in (2) è uguale a $+\infty$. Ad esempio:

$$\alpha = \{\alpha_g\}_{g=1,2,...} \qquad \text{dove} \quad \forall g, \quad \alpha_g = \frac{(g-1)}{g}$$

  allora $\alpha_g \to 1$, così che la sequenza giunga al percorso di consumo *bliss* $\zeta = (1, 1, ..., 1, ...)$. Il ranking di α si ottiene dalla somma della distanza tra α e ζ. Dato che

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{g=1}^{N}(1-\alpha_g) = \lim_{N\to\infty}\sum_{g=1}^{N}\frac{1}{g}$$

  è uguale a $+\infty$, il criterio di Ramsey non definisce una preferenza completa.

- Criterio overtaking
  In questo caso, un flusso di utilità α viene preferito a β se α porta ad un livello definitivamente più alto di utilità aggregata rispetto a β. Quindi α è preferito a β se $\exists N$:

$$\forall M > N, \qquad \sum_{g=1}^{M}\alpha_g \geq \sum_{g=1}^{M}\beta_g. \tag{3}$$

Il criterio risulta incompleto perché non è in grado di ordinare su ℓ_∞ quelle coppie di flussi di utilità α, $\beta \in \ell_\infty$ dove né α supera β e né β supera α.

- Criterio long-run average e criterio lim inf

1. Nel primo criterio, un flusso di utilità α è preferito a β se in media l'utilità aggregata di lungo periodo ottenuta da α è maggiore di quella raggiunta da β. $\exists N$, $K > 0$:

$$\frac{1}{T}(\sum_{g=M}^{T+M} \alpha_g) \geq \frac{1}{T}(\sum_{g=M}^{T+M} \beta_g), \qquad \forall T > N \text{ e } M > K. \tag{4}$$

2. Nel secondo caso, il criterio è caratterizzato da una *purely finitely additive function* definita sul campo di tutti i sottoinsiemi dei numeri interi; sono lim inf funzioni su ℓ_∞, definite per ogni $\alpha \in \ell_\infty$ da

$$\liminf_{g\to+\infty} \alpha_g = \lim_{K\to+\infty} \inf_{g\geq n} \alpha_g \tag{5}$$

Entrambi i criteri sono *dictatorship* del futuro e non rispettano, quindi, l'**Assioma 2.**. Inoltre il criterio long-run average è anche incompleto.

- Criterio di welfare Rawlsian e criterio di satisfaction of basic needs

1. Il primo criterio considera superiore, tra due flussi di utilità, quello che ha estremo inferiore dell'utilità maggiore per tutte le generazioni. Un flusso di utilità α è preferito a β se

$$\inf\{\alpha_g\}_{g=1,2,\ldots} > \inf\{\beta_g\}_{g=1,2,\ldots} \tag{6}$$

2. Il secondo valuta α superiore a β se il tempo richiesto per raggiungere i *basic needs* risulta inferiore per α rispetto a quanto accade per β:

$$T(\alpha) \leq T(\beta), \tag{7}$$

dove $T(\alpha) = \min\{t : \alpha_g \geq b, \quad \forall_g \geq t\}$, per un dato valore b che rappresenta i *basic needs*.

Entrambi provocano asimmetrie intertemporali: non sono sensibili al welfare di molte generazioni ma solamente di quelle meno favorite. Ordinano equivalentemente due percorsi che presentano lo stesso estremo inferiore, anche se uno di questi assegna un'utilità più elevata ad altre generazioni.

- Criterio dell'utilità attualizzata
  Qualsiasi criterio nella forma di *discounted utility*

$$W(\alpha) = \sum_{g=1}^{\infty} \alpha_g \lambda_g \qquad \forall \alpha \in \ell_\infty$$

  dove

$$\forall_g, \lambda_g > 0 \qquad \sum_{g=1}^{\infty} \lambda_g < \infty$$

  e dove λ rappresenta il fattore di attualizzazione, è una dittatura del presente e perciò non rispetta l'**Assioma 1.**.

Il criterio di welfare W, come definito dall'enunciato del **Teorema 1.**, gode anche delle proprietà di continuità e indipendenza (Chichilnisky, 1997):

- W risulta continuo se è definito da una funzione continua $W : \ell_\infty \to \mathbb{R}$.
- W è indipendente quando il tasso di sostituzione tra due generazioni g_1 e g_2 è indipendente dai livelli delle loro utilità.[6]

Si può, quindi, enunciare il secondo teorema (Chichilnisky, 1997):

Teorema 2. *Sia $W : \ell_\infty \to \mathbb{R}^+$ una preferenza sostenibile continua e indipendente, allora W deve essere espressa nella forma della* (1)

$$W(\alpha) = \sum_{g=1}^{\infty} \lambda_g \alpha_g + \phi(\alpha) \qquad \forall \alpha \in \ell_\infty$$

dove $\forall g, \quad \lambda_g > 0, \quad \sum_{g=1}^{\infty} \lambda_g < \infty$
e $\phi \neq 0$ *è una* purely finitely additive measure.

[6] La proprietà di indipendenza consente di rappresentare W come una funzione lineare di flussi di utilità $W(\alpha + \beta) = W(\alpha) + W(\beta)$.

Il teorema scompone il criterio di sostenibilità nella somma di due funzioni: la prima è l'utilità attualizzata con un tasso di sconto variabile (*countably additive measure*); la seconda è una generalizzazione del long-run average o $\liminf$ ed è chiamata *purely finitely additive measure*. Si veda l'**Appendice A.2** per le definizioni.
È evidente che ponendo $\phi \equiv 0$, W risulterebbe una *dictatorship* del presente, contraddicendo l'**Assioma 1.**; se $\lambda \equiv 0$, W sarebbe caratterizzata da *dictatorship* del futuro, in contraddizione con l'**Assioma 2.**. Quindi λ e ϕ non possono essere equivalenti a 0.

4 Sviluppo con una risorsa ambientale rinnovabile

Nella **Sezione 3** sono stati presentati gli assiomi, i teoremi e le definizioni che stanno alla base del criterio di Chichilnisky. Nella **Sezione 4**, invece, si vuole mostrare come questo criterio agisce nella pratica, come si adatta alle evidenze empiriche e se risulta valido anche in un contesto temporale finito.

È necessario precisare che, a partire da questa sezione, si passa a considerare un insieme continuo di generazioni ($g \in [0, +\infty]$), invece di utilizzare un insieme discreto (numerabile) ($g \in N$)[7]. Tuttavia, anche in questo contesto diverso, si applicano le considerazioni emerse precedentemente, con inevitabili adattamenti formali relativamente ovvi.

Vengono, quindi, presentati i presupposti per la costruzione del modello (Beltratti et al., 1993).

Presupposto 1. *L'utilità istantanea è data dalla funzione a valori reali, continua, differenziabile*[8] *e strettamente concava $U(C_t, A_t)$, definita sul consumo di output $C_t \in \mathbb{R}$ ($C_t \geq 0$) e sullo stock variabile ambientale $A_t \in \mathbb{R}$ ($A_t \geq 0$). Si supponga, inoltre, che $U(C_t, A_t)$ sia limitata superiormente e*

[7] La rappresentazione matematica è diversa: se si considera una successione di generazioni, l'utilità attualizzata viene rappresentata come la somma di una serie; se invece si tratta di un insieme continuo, l'utilità attualizzata è descritta da un integrale improprio. Questo passaggio non è specificato all'interno dei testi considerati.

[8] Non viene indicato che la funzione è classe C^2, ipotesi presente, invece, nel modello di crescita economica neoclassica (Buratto et al., 2019).

che $\frac{\partial U}{\partial C} > 0$ *sempre, mentre* $\frac{\partial U}{\partial A}$ *può presentare entrambi i segni*[9].

Presupposto 2. *La produzione di un singolo bene avviene secondo la funzione di produzione* $F(K_t, A_t)$[10]*, linearmente omogenea; si supponga di conoscere* $K_0 > 0$*, dove* K_t *è lo stock variabile di capitale disponibile al tempo* t *(*$K_t \geq 0$*).*

Gli autori (Beltratti et al., 1993) non specificano che si tratta di una funzione di classe C^2 e non danno una giustificazione del perché $F(K, A)$ debba essere linearmente omogenea[11].

La disponibilità di beni può essere vincolata in diversi modi, ad esempio dall'equazione differenziale che descrive l'evoluzione del capitale

$$\dot{K}_t = F(K_t, A_t) - C_t{}^{12}, \tag{8}$$

oppure dall'equazione differenziale che esprime la crescita dello stock di una risorsa rinnovabile

$$\dot{A}_t = -C_t + R(A_t)^{13}. \tag{9}$$

Si definisce quindi $R(A_t)$:

Presupposto 3. *Lo stock ambientale ha la capacità di rigenerarsi ad un tasso di rinnovo* $R(A)$*, che soddisfa* $R(0) = 0$*. Si supponga che la funzione* $R(A)$ *sia limitata superiormente* $[\exists B : R(A) \leq B, \quad \forall A]$*, strettamente concava* $[\forall A \geq H]$*, che sia crescente sotto un certo livello di* A_m $[R'(A) > 0, \quad per\ A < A_m]$ *e che, invece, decresca al di sopra di* A_m $[R'(A) < 0, \quad per\ A > A_m]$*. Inoltre,* R *potrebbe presentare un threshold effect*[14]*, ad esempio* $\exists H : R(A) = 0, \quad \forall A \leq H$*. Infine, si ipotizzi di conoscere* $A_0 > 0$ *e che l'insieme dei valori raggiungibili di* A *sia limitato superiormente: la quantità di risorsa che può essere accumulata è limitata.*

[9] A differenza del consumo, per l'asset ambientale non vale l'assioma di non sazietà, per cui un livello più elevato di stock non porta necessariamente ad un'utilità maggiore. Ad esempio, avere "troppa" acqua non comporterebbe più dei benefici.

[10] In Beltratti et al. (1994) non è presente A come determinante della produzione. Questa semplificazione verrà utilizzata nella **Sezione 4.1.2**.

[11] Gli autori utilizzano questa condizione per trovare le soluzioni al problema utilitario, **Sezione 4.1.1**.

[12] Si tratta dell'equazione del moto, dove il termine di deprezzamento $-\psi K$, con $\psi > 0$, non è considerato per semplicità.

[13] Non ho considerato α, che rappresenta il coefficiente di impatto ambientale del consumo, in quanto esso in alcuni degli articoli da me considerati è implicitamente posto uguale a 1.

[14] Significa che lo stock di A deve superare una certa soglia per "attivare" la capacità di rinnovarsi; perciò, la funzione di rinnovo vale 0 sotto questa soglia.

In questo presupposto, non viene specificato che la funzione $R(A)$ deve essere non negativa e di classe C^1.

Data la (9) e il maggiorante imposto ad $R(A)$, allora l'esaurimento della risorsa può superare la capacità dell'ambiente di rinnovarla: è possibile ottenere livelli di consumo che non sono compatibili con il preservamento, per un tempo indefinito, di un livello positivo di stock del bene ambientale.

Infine vengono imposte alcune condizioni iniziali e vincoli di non negatività:

Presupposto 4.

$$K_0 = \bar{K}, \qquad A_0 = \bar{A}, \qquad K_t \geq 0, \qquad A_t \geq 0, \qquad C_t \geq 0. \tag{10}$$

A questo punto viene formulato il problema tipico di ottimizzazione delle preferenze sostenibili, dove la $W(\alpha)$, precedentemente definita in (1), viene esplicitata come

$$\max \theta \int_0^\infty u(C_t, A_t) e^{-\delta t} dt + (1-\theta) \lim_{T\to\infty} \inf_{t \geq T} U(C_t, A_t) \tag{11}$$

dove $e^{-\delta t}$ è il fattore di attualizzazione (con $\delta > 0$ tasso di attualizzazione). I vincoli sono rappresentati dalle funzioni di accumulazione del capitale, di crescita dello stock della risorsa e dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dot{K}_t = F(K_t, A_t) - C_t \\ \dot{A}_t = -C_t + R(A_t) \\ K_0 = \bar{K}, A_0 = \bar{A}, K_t \geq 0, A_t \geq 0, C_t \geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Prima di risolvere il problema appena formulato, si presentano i due casi specifici dove $\theta = 1$ e dove $\theta = 0$.

4.1 Problema con utilità attualizzata

Ponendo $\theta = 1$ si ottiene il problema di utilità complessiva attualizzata:

$$\max \int_0^\infty U(C_t, A_t) e^{-\delta t} dt \qquad\qquad \delta > 0 \tag{13}$$

soggetta ai vincoli rappresentati in (12).

4.1.1 Condizioni necessarie

Si riporta di seguito l'analisi proposta in Beltratti et al. (1993). La funzione Hamiltoniana che genera le condizioni di primo ordine è

$$H = e^{-\delta t}U(C, A) + pe^{-\delta t}[F(K, A) - C] + qe^{-\delta t}[-C + R(A)]. \tag{14}$$

Le condizioni di ottimalità del principio del massimo sono

$$\begin{cases} U_c = p + q \\ \dot{p} - \delta p = -pF_K \\ \dot{q} - \delta q = -U_A - pF_A - qR'(A) \\ \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}pK = 0 \\ \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}qA = 0 \end{cases} \tag{15}$$

È necessario precisare che le ultime due condizioni sono le condizioni di trasversalità. Tuttavia, esse non dovrebbero essere comprese tra le condizioni necessarie in un problema con orizzonte infinito. Gli autori aggiungono anche queste condizioni perché le ritenevano, a quel tempo, necessarie.

Si prosegue ponendo $z \equiv \frac{K}{A}$ e si ottiene

$$\frac{1}{A}F(K, A) = F(\frac{K}{A}, 1) = F(z, 1),$$

data l'ipotesi di omogeneità lineare. Si definisce la funzione di produzione per unità di risorsa ambientale

$$f(z) = F(z, 1).$$

Nell'ipotesi che la funzione di partenza $F(.)$ sia di classe C^2, si calcolano la deriva prima e la derivata seconda

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial K}(z, 1) = \frac{\partial F}{\partial K}(K, A)^{15}$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(z, 1).$$

Allora, f è una funzione strettamente crescente e strettamente concava.
Per quanto riguarda la derivata prima di $F(K, A)$ rispetto ad A, si vede che

[15] Per il teorema di Eulero, la funzione in questione è omogenea di grado 0 e perciò vale questa relazione (Buratto et al., 2019, p.197).

essa equivale a[16]

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial A}(K,A) &= \frac{1}{A}F(K,A) - \frac{K}{A}\frac{\partial F}{\partial K}(K,A)\\ &= f(z) - z\frac{\partial F}{\partial K}(K,A)\\ &= f(z) - zf'(z).\end{aligned}$$

Si riscrivono allora le prime tre condizioni necessarie della (15) come

$$\frac{\partial U}{\partial C}(C,A) = p + q$$

$$\dot{p} - \delta p = -pf'(z)$$

$$\dot{q} - \delta q = -\frac{\partial U}{\partial A} - pf(z) + pzf'(z) - qR'(A).$$

Si ragiona sul significato delle condizioni per una soluzione stazionaria: essa dovrà soddisfare[17]

$$\frac{\partial U}{\partial C}(C,A) = p + q \tag{16}$$

$$\delta = f'(z) \tag{17}$$

$$\delta q = \frac{\partial U}{\partial A}(C,A) + pf(z) - pzf'(z) + qR'(A) \tag{18}$$

$$C = Af(z) \tag{19}$$

$$C = R(A). \tag{20}$$

Di cui le ultime due equazioni sono ottenute dalle equazioni del moto con $\dot{K} = 0$ e $\dot{A} = 0$.
Dall'equazione (16) si ricava che l'utilità marginale del consumo deve essere uguale alla somma dei prezzi dei due stock: ciò significa che il consumo impedisce l'accumulazione di capitale e porta all'esaurimento della risorsa ambientale. In base all'equazione (17), la produttività marginale del capitale coincide con il tasso di attualizzazione. La (19) indica che la funzione di produzione è uguale al consumo nel punto stazionario. La (20) mostra che nel punto stazionario il consumo deve coincidere con la capacità rigenerativa dell'ambiente.

[16] Buratto et al. (2019, p.204).

[17] Le condizioni (16-20) sono state scritte in maniera differente rispetto a quelle presenti in Beltratti et al. (1993) per dare maggiore chiarezza, sfruttando più pienamente l'ipotesi di omogeneità lineare.

Se valgono le ipotesi neoclassiche per $F(.)$ (Buratto et al., 2019, p.202) esiste un unico z^* tale che

$$f'(z^*) = \delta \qquad\qquad z^* > 0$$

con δ positivo. Infatti, la $f'(z)$ è una funzione strettamente decrescente e assume tutti i valori in $(0, +\infty)$: per ogni δ esiste un unico z^* per cui vale questa relazione.
Conoscendo $\frac{C}{A}$, si ha

$$C = Af(z)$$

e sostituendo a C la relazione (20), si ottiene

$$Af(z^*) = R(A). \tag{21}$$

Se si definisce $g(z) = f'(z)$, z^* è tale che

$$g(z^*) = \delta,$$

dove $g(z)$ è una funzione invertibile per le ipotesi neoclassiche su $f(z)$; allora vale che

$$z^* = g^{-1}(\delta). \tag{22}$$

Infine, sostituendo all'interno della (21) la z^* trovata in (22), si ottiene la relazione

$$Af(g^{-1}(\delta)) = R(A). \tag{23}$$

I passaggi appena presentati non sono presenti all'interno del testo Beltratti et al. (1993). In questa sede si è ritenuto preferibile specificarli e renderli più chiari, con gli appropriati richiami alle ipotesi neoclassiche per $F(K, A)$, in quanto essi sono fondamentali per comprendere quanto dichiarato nella **Proposizione 1.** (Beltratti et al., 1993).

Proposizione 1. *Se $R(A)$ è 0 sotto una determinata soglia ed è strettamente concava al di sopra di questa, allora ci potranno essere zero, una o due soluzioni stazionarie con un livello positivo di A. Queste sono soluzioni di*

$$Af(g^{-1}(\delta)) = R(A)$$[18]

Ci sarà una soluzione stazionaria se lo stock di capitale, determinato dal tasso di attualizzazione δ attraverso la (17), è associato ad un livello di consumo ($C = Af(g^{-1}(\delta))$) che non eccede la massima capacità rigenerativa. Quando $R(A)$ è strettamente concava si possono avere zero o una intersezioni, mentre quando $R(A)$ è 0 sotto una soglia ci potranno essere zero, una o

[18]Presentata in Beltratti et al. (1993) erroneamente come $Af[f^{-1}(\delta)] = R(A)$.

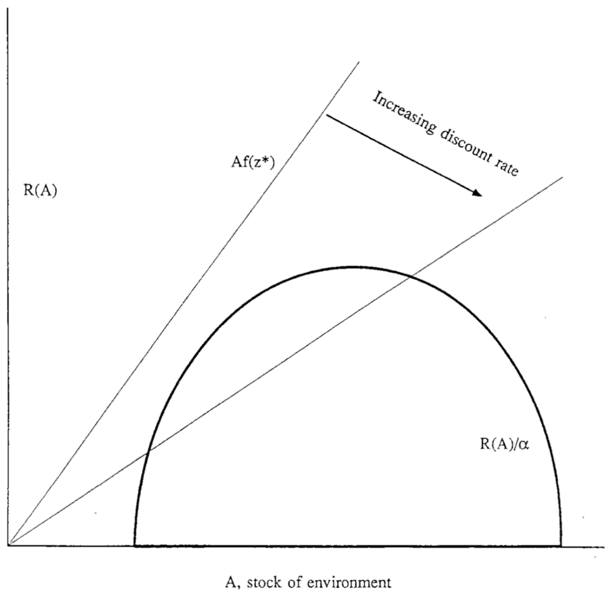

Figura 1: Le soluzioni stazionarie del problema utilitario corrispondono alle intersezioni tra la retta $C = Af(z^*)$ e la curva $C = R(A)$. α è da considerarsi pari a 1.

due soluzioni. Si veda la **Figura 1** (Beltratti et al., 1993).
Se la $f(z)$ è limitata superiormente[19], allora l'inclinazione della funzione $C = Af(z)$ è anch'essa limitata indipendentemente dal valore di δ. Se questo limite è sufficientemente basso, allora ci sarà sempre una soluzione stazionaria con $A > 0$.

Si assuma che $f(z) \leq \bar{f}, \quad \forall z$. È necessario dire che, con l'introduzione di questa ipotesi (Beltratti et al., 1993), non si rientra più nel contesto della teoria neoclassica della crescita.
Posta questa ipotesi, allora

Corollario 1. *1. se $R(A)$ vale 0 sotto una certa soglia, ci sarà almeno una soluzione stazionaria con $A > 0, \quad \forall \delta > 0$, se e solo se*

$$\bar{f} \leq \max_A \frac{R(A)}{A};$$

2. in caso contrario, vi è almeno una soluzione stazionaria con $A > 0, \quad \forall \delta > 0$, se e solo se

$$\bar{f} \leq R'(0);$$

[19] Questo avviene, per esempio, nel caso in cui F è una *CES function* con elasticità di sostituzione uguale a 0 o vicino a 0.

3. se $f(z)$ non ha limite reale oppure il limite non è sufficientemente basso, allora ci sarà una soluzione stazionaria con $A > 0$ se e solo se

$$\delta \geq \beta$$

per qualche $\beta > 0$.[20]

Questo corollario (Beltratti et al., 1993) mostra l'importanza di δ per l'esistenza delle soluzioni stazionarie: se $f(z)$ non ha limite reale oppure il limite non è sufficientemente piccolo, allora δ deve essere sufficientemente elevato. Un elevato tasso di attualizzazione è necessario per avere un alto livello di conservazione ambientale, ed implica un desiderio di consumo immediato e un basso livello di capitale. Dato che A entra nella funzione di produzione e data la relazione tra la capacità rigenerativa dell'ambiente e il livello di consumo ($C = R(A)$), allora è necessario un elevato livello di A per essere in grado di produrre e consumare.

Per comprendere le dinamiche di una traiettoria di utilità ottima, è necessario verificare se le soluzioni stazionarie sono dinamicamente raggiungibili, cioè se, da un qualsiasi punto iniziale, esistono percorsi che portano ai punti stazionari. La soluzione stazionaria alle condizioni di primo ordine è sempre raggiungibile localmente se in quella soluzione $R'(A) < 0$, purché F_A sia sufficientemente piccola. Questo risultato è visibile in **Figura 1** ed implica che si potrà pervenire localmente alla soluzione più a destra tra le due soluzioni stazionarie, sotto appropriate condizioni.
Con queste conclusioni termina l'analisi condotta dagli autori in Beltratti et al. (1993).

Di seguito, si analizza il problema dell'unicità della soluzione stazionaria. Si supponga di avere una coppia (C,A) trovata dalla relazione (23); per il sistema[21]

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial C}(C,A) = p + q \\ \delta q = \frac{\partial U}{\partial A}(C,A) + p\frac{C}{A} - pg^{-1}(\delta)\delta + qR'(A), \end{cases}$$

è necessario capire se esiste o meno una coppia (p, q), che sia soluzione del sistema stesso.
Riscrivendo

$$\begin{cases} p + q = \frac{\partial U}{\partial C}(C,A) \\ \left(-\frac{C}{A} + g^{-1}(\delta)\delta\right) p + (\delta - R'(A))\, q = \frac{\partial U}{\partial A}(C,A), \end{cases} \tag{24}$$

[20]Questo si spiega in quanto z^* decresce con δ.

[21]Dove sono stati sostituiti $f(z)$ con $\frac{C}{A}$ e $zf'(z)$ con $g^{-1}(\delta)\delta$.

esiste una soluzione unica a questo sistema se e solo se

$$\delta - R'(A) - \left(\frac{C}{A} - g^{-1}(\delta)\delta \right) \neq 0. \tag{25}$$

4.1.2 Problema secondo il criterio *catching up*

Si riporta di seguito un'analisi compiuta sulla base di un problema di massimizzazione dell'utilità in orizzonte infinito (Buratto et al., 2019, p.214).
Innanzitutto, viene apportata una variazione nella formulazione dell'evoluzione del capitale:

$$\dot{K}(t) = F(K(t)) - C(t) - \psi K(t), \tag{26}$$

dove si omette $A(t)$ all'interno della funzione di produzione, poiché la presenza dell'asset ambientale complica le dinamiche e non risulta essenziale per lo scopo di questa analisi (Beltratti et al., 1994); inoltre, si aggiunge il termine di deprezzamento del capitale $-\psi K(t)$, con $\psi > 0$ costante. Gli altri presupposti rimangono invariati.
Assumendo il criterio di ottimalità *catching up* (Buratto et al., 2019, p.187), il problema dell'utilità attualizzata è il problema di controllo con orizzonte infinito

$$\begin{array}{rrcl}
\text{ottimizza}_{\text{CU}} & J(C) & = & \displaystyle\int_0^{\infty} U(C(t), A(t))e^{-\delta t}\, dt, \\
\text{soggetta a} & \dot{K}(t) & = & F(K(t)) - C(t) - \psi K(t), \\
& \dot{A}(t) & = & R(A(t)) - C(t), \\
& K(0) & = & K_0, \\
& A(0) & = & A_0, \\
& \liminf_{t\to+\infty} K(t) & \geq & 0, \\
& \liminf_{t\to+\infty} A(t) & \geq & 0, \\
& C(t) & \geq & 0,
\end{array} \tag{27}$$

dove $\delta \geq 0$. La funzione di controllo è $C(t)$, mentre le funzioni di stato sono espresse da $K(t)$ e $A(t)$. Per ogni scelta della funzione di controllo $C(t)$, le equazioni del moto rappresentano un diverso sistema dinamico che regola l'evoluzione delle funzioni di stato. Il funzionale obiettivo $J(C)$ è rappresentato da un integrale improprio[22]: questo genera delle limitazioni nel definire un ordine di preferenza tra soluzioni, ma ogni ambiguità è superata con la scelta del criterio *CU* (Buratto et al., 2019).

[22] Un integrale improprio è definito tale in quanto presenta ∞ come termine superiore.

I vincoli su $K(0)$ e $A(0)$ sono le condizioni iniziali, $\liminf_{t\to+\infty} K(t) \geq 0$ e $\liminf_{t\to+\infty} A(t) \geq 0$ sono le condizioni sul comportamento delle variabili di stato per $t \to +\infty$, $C(t) \geq 0$ è la condizione sul controllo.
Il controllo $C : [0, +\infty]$ è detto controllo ammissibile se è una funzione continua a tratti e assume valori in $[0, +\infty]$. Le funzioni di stato si dicono ammissibili se sono determinate dal sistema delle equazioni del moto $\dot{A}(t)$ e $\dot{K}(t)$ e delle condizioni iniziali K_0 e A_0 per un controllo ottimo $C(t)$, e se soddisfano le condizioni finali sullo stato ($\liminf$). Infine si definisce ammissibile una soluzione $\{C(t), K(t), A(t)\}$, in cui $C(t)$ è la funzione di controllo ammissibile e $K(t)$ e $A(t)$ sono le funzioni di stato associate al controllo $C(t)$, anch'esse ammissibili.
Per la definizione di ottimalità di un problema con orizzonte infinito si possono avere diversi e non equivalenti criteri di ottimalità. In questo caso è stato scelto quello di *catching up*.

Per formulare le condizioni necessarie, si introduce la variabile aggiunta $\mu \in \mathbb{R}^2$ e il parametro reale μ_0 e si definisce la funzione Hamiltoniana a valore corrente

$$H(K, A, C, \mu) = \mu_0 U(C, A) + \mu_1[F(K) - \psi K - C] + \mu_2[R(A) - C]. \quad (28)$$

Teorema 3. *Sia* $(C^*(t)$ *un controllo ottimo continuo a tratti definito su* $[0, +\infty)$*, a cui siano associate due funzioni di stato* $K^*(t)$ *e* $A^*(t)$*. Sia* $(C^*(t), K^*(t), A^*(t))$ *una soluzione ottima nel senso del criterio* catching up *e* $C^*(t) \geq 0$*; allora esistono una costante* $\mu_0 \in \mathbb{R}$ *e una funzione di classe* C^1 *a tratti e continua* $\mu(t)$ $(\mu : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^n)$ *tali che, per ogni* $t \in [0, +\infty)$*, valgano le seguenti condizioni:*

1. $(\mu_0, \mu_1(t), \mu_2(t)) \neq (0, 0, 0)$*;*

2. $C^*(t)$ *massimizza* $H(K^*(t), A^*(t), C, \mu(t), t)$ *su* $[0, +\infty]$*, o equivalentemente la funzione*

$$g(t) = \mu_0 U(C, A(t)) - [\mu_1(t) + \mu_2(t)]C, \qquad C \geq 0;$$

3. *tranne che per i tempi* t *in cui* $C^*(t)$ *è discontinua,* $\mu(t)$ *è differenziabile*

e

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu_1}(t) &= -\frac{\partial H(K^*(t), A^*(t), C^*(t), \mu(t), t)}{\partial K} + \delta\mu_1(t) \\
&= -\mu_1(t)[F'(K^*(t)) - \psi - \delta]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu_2}(t) &= -\frac{\partial H(K^*(t), A^*(t), C^*(t), \mu(t), t)}{\partial A} + \delta\mu_2(t) \\
&= -\mu_0\frac{\partial U}{\partial A}(C^*(t), A^*(t)) - \mu_2(t)[R'(A^*(t)) - \delta]
\end{aligned}
$$

4. $\mu_0 \in \{0, 1\}$

Questo teorema afferma che, per una soluzione ottima del problema con orizzonte infinito, devono essere soddisfatte le usuali condizioni del Principio del Massimo di Pontryagin per il problema con orizzonte finito, a meno delle condizioni di trasversalità.

Se $\mu_0 = 0$, allora μ_1 e/o μ_2 deve o devono essere $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Allora, secondo la condizione (2.), $C^*(t)$ dovrebbe massimizzare $-[\mu_1(t) + \mu_2(t)]C, \quad C \geq 0$. Si possono verificare due situazioni:

- quando si ha che $-[\mu_1(t) + \mu_2(t)] < 0$ per ogni t, allora la condizione di massimo per ogni t diventa

  $$C^*(t) \text{ massimizza } -[\mu_1(t) + \mu_2(t)]C, \quad C \geq 0$$

  e la soluzione ottima risulta essere $C^* \equiv 0$, cioè un'intensità di consumo non interessante economicamente.

- quando $-[\mu_1(t) + \mu_2(t)] > 0$ per ogni t, allora per ogni t

  $$C^*(t) \text{ massimizza } -[\mu_1(t) + \mu_2(t)]C, \quad C \geq 0,$$

  ma dato che la funzione obiettivo non è limitata superiormente, non vi è una soluzione ottima.

Dunque, risulta che $\mu_0 = 1$. La condizione (2.) perciò diventa

$$C^*(t) \text{ massimizza } U(C, A(t)) - [\mu_1(t) + \mu_2(t)]C, \quad C \geq 0.$$

e si ottiene la condizione necessaria per il punto di massimo

$$\frac{\partial U}{\partial C}(C^*(t), A^*(t)) = \mu_1(t) + \mu_2(t).$$

Essendo $\frac{\partial U}{\partial C} > 0$, si conclude che anche $\mu_1(t) + \mu_2(t) > 0$.

Teorema 4. *Se (C, K, A) è una soluzione ottima costante e $C > 0$, allora esistono costanti μ_1 e μ_2 tali che*

$$
\begin{gathered}
F(K) - C - \psi K = 0 \\
R(A) - C = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial C}(C, A) - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\
\mu_1[F'(K) - \psi - \delta] = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial A}(C, A) + \mu_2[R'(A) - \delta] = 0.
\end{gathered}
$$

Poiché $\frac{\partial U}{\partial A} \neq 0$, allora anche μ_2 e $R'(A) - \delta$ devono essere diversi da 0. Sostituendo la terza equazione all'interno della quinta, quest'ultima diventa

$$
\frac{\partial U}{\partial A}(C, A) + \left(\frac{\partial U}{\partial C}(C, A) - \mu_1\right)(R'(A) - \delta) = 0
$$

Essendo $\mu_2 \neq 0$, si ha che

$$
\frac{\partial U}{\partial C}(C, A) - \mu_1 = \mu_2 \neq 0,
$$

e quindi si ottiene

$$
\frac{\frac{\partial U}{\partial A}(C, A)}{\frac{\partial U}{\partial C}(C, A) - \mu_1} = -R'(A) + \delta. \tag{29}
$$

L'equazione (29) rappresenta la *dynamic optimality condition.*

Si riformula il **Teorema 4.** come segue.

Teorema 5. *Se (C, K, A) è una soluzione ottima costante e $C > 0$, allora*

1. $$C = F(K) - \psi K$$

2. $$C = R(A)$$

e esistono μ_1, μ_2 costanti, con $\mu_2 \neq 0$, tali che

1. $$\frac{\partial U}{\partial C}(C, A) = \mu_1 + \mu_2$$

2. $$\mu_1(F'(K) - \psi - \delta) = 0$$

3.

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial A}(C,A)}{\frac{\partial U}{\partial C}(C,A)-\mu_1} = -R'(A)+\delta.$$

Si conclude enunciando il **Corollario 2.**: nella ricerca di una soluzione ottima si incontrano due casi, cioè $\mu_1 = 0$ e $\mu_1 \neq 0$.

Corollario 2. *Con (C, K, A) soluzione ottima costante e $C > 0$, siano μ_1 e μ_2 definite come nel **Teorema 5.**, allora si possono verificare due situazioni*

1. $\mu_1 = 0$*, la coppia (C, A) deve risolvere*

$$C = R(A)$$

e la condizione dinamica

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial A}(C,A)}{\frac{\partial U}{\partial C}(C,A)} = -R'(A)+\delta; \tag{30}$$

allora il capitale K risolve

$$F(K) - \psi K = C$$

e la variabile aggiunta sarà

$$\mu_2 = \frac{\partial U}{\partial C}(C,A)$$

2. $\mu_1 \neq 0$*, allora K deve essere la soluzione unica di*

$$F'(K) = \psi + \delta,$$

il consumo è dato da

$$C = F(K) - \psi K,$$

lo stock della risorsa ambientale si ottiene da

$$R(A) = C$$

e le variabili aggiunte μ_1 e μ_2 devono risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = \frac{\partial U}{\partial C}(C,A) \\ (R'(A)-\delta)\mu_2 = -\frac{\partial U}{\partial A}(C,A). \end{cases}$$

Ci sarà una soluzione ottima unica se e solo se è possibile trovare una soluzione a questo sistema, se e solo se $R'(A) \neq \delta$.

4.2 Green Golden Rule

Ora si consideri il caso in cui $\theta = 0$, cioè la situazione in cui la società si focalizza sui livelli di consumo e di stock ambientale del lontano futuro. Si cerca, quindi, un percorso di consumo e accumulazione di capitale che massimizzi

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{t\geq T} U(C_t, A_t).$$

su un insieme di percorsi ammissibili. Allora la soluzione ammette una diretta caratterizzazione data dalla seguente proposizione (Beltratti et al., 1994; Chichilnisky et al., 1995):

Proposizione 2. *Ci sono valori* (A^*, K^*, C^*) *tali per cui*

$$\liminf_{t\to\infty}\{A_t, K_t, C_t\} = \{A^*, K^*, C^*\} \tag{31}$$

è una condizione necessaria e sufficiente per una traiettoria ammissibile $\{A_t, K_t, C_t\}, \forall t$, *per essere una soluzione del problema di* "massimizzare $\liminf_{t\to\infty} U(C_t, A_t)$ su tutti i possibili percorsi". (A^*, K^*, C^*) *è caratterizzata da*

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial A}}{\frac{\partial U}{\partial C}} = -R_A. \tag{32}$$

Dimostrazione. *La funzione da massimizzare è indipendente dai valori di* A_t *e* C_t *per ogni tempo finito. La soluzione al problema richiede quindi che si trovino tutti quei valori mantenibili, per un tempo indefinito, di* C *e* A, *i quali diano il massimo livello di utilità. Poiché i valori di* C *e* A *mantenibili indefinitamente soddisfano* $R(A) = C$, *il problema di massimizzazione*

$$\begin{aligned} &\max \lim\nolimits_{T\to\infty} \inf\nolimits_{t\geq T} U(C_t, A_t) \\ &\textit{su i percorsi percorribili che soddisfano i vincoli in } (12), \end{aligned} \tag{33}$$

si può ridurre a

$$\max U(C, A) \textit{ soggetto a } R(A) = C. \tag{34}$$

In questo caso gli autori non considerano lo stock di capitale, in quanto sostengono che, in un periodo di tempo sufficientemente lungo, è possibile accumulare qualsiasi somma di capitale (Beltratti et al., 1993, 1994; Chichilnisky et al., 1995). L'insieme di tutte le coppie $\{C, A\}$ *che soddisfano il vincolo in* (34) *è compatto, per cui il problema di massimizzare* $U(C, A)$ *risulta ben definito.*

La funzione lagrangiana è

$$\mathcal{L} = U(C, A) + \lambda[R(A) - C]^{23}$$

[23] Si trascurano i vincoli di non negatività.

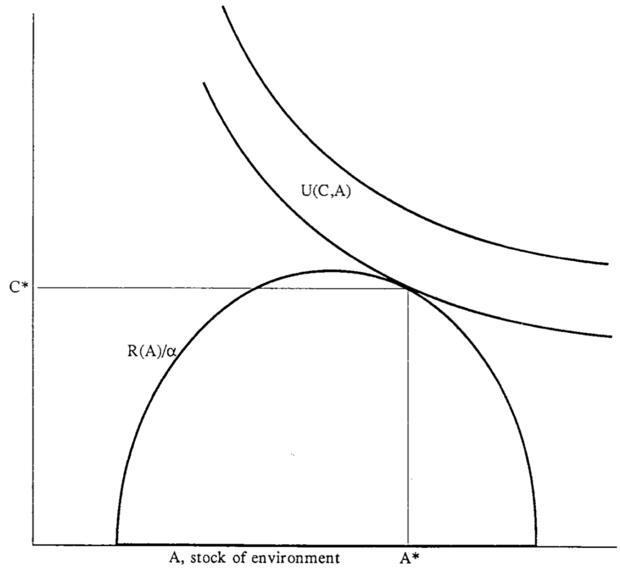

Figura 2: Il percorso che massimizza $\liminf U(C,A)$ porta a (A^*, C^*), cioè il punto che fornisce il livello sostenibile più alto di utilità. α è da considerarsi pari a 1.

Ogni punto ammissibile è regolare perché soddisfa

$$(R'(A), 1) \neq (0, 0).$$

Le condizioni necessarie per una soluzione ottima sono

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial C}(C, A) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial A}(C, A) + \lambda(R'(A)) = 0 \\ R(A) - C = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono $R(A) = C$ *e la* static optimality condition

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial A}}{\frac{\partial U}{\partial C}} = -R'(A).$$

Dalla (32) emerge che il tasso marginale di trasformazione è uguale al tasso marginale di sostituzione tra consumo e ambiente. Essa corrisponde al punto di tangenza tra la curva di indifferenza $(U(C,A))$ e il grafico della funzione di rinnovo dell'asset ambientale $R(A)$, come è possibile vedere in **Figura 2** (Beltratti et al., 1993).

Emerge che la soluzione al problema (33) non definisce un percorso di crescita per l'economia: descrive semplicemente una configurazione di lungo periodo. Esistono numerosi percorsi che portano a questa configurazione, alcuni efficienti e altri inefficienti. Tra quelli efficienti, alcuni forniranno valori più elevati per l'integrale delle utilità attualizzate rispetto ad altri (Beltratti et al., 1993, 1994).
La configurazione presentata in (32) è definita"green golden rule" (GGR); essa caratterizza il livello massimo di utilità mantenibile indefinitamente[24] ed esprime il trade-off ottimale tra consumo e livello di stock della risorsa ambientale (Beltratti et al., 1993, 1994; Chichilnisky, 1997; Chichilnisky et al., 1995).
Se si confrontano la soluzione del problema (13) e quella del problema (33), in generale esse non si eguagliano, salvo il caso in cui il tasso di attualizzazione δ non sia tale da far coincidere l'intersezione descritta nella **Proposizione 1** e il punto di tangenza descritto nella (32) (Beltratti et al., 1993).

4.3 Traiettorie ottime sostenibili

Di seguito si analizza il problema generale caratterizzato dalla presenza delle preferenze sostenibili, per il quale si procede risolvendo la (11) soggetta alle condizioni (12). La soluzione a questo problema è chiamata percorso ottimo sostenibile. Gli autori (Beltratti et al., 1993) affermano che ogni traiettoria, che è soluzione di questo problema, deve soddisfare le condizioni necessarie per l'ottimalità del problema attualizzato, espresse nella (15). Se queste condizioni non venissero rispettate, sarebbe possibile provocare una piccola perturbazione sul percorso considerato in un intervallo di tempo finito, lasciandolo inalterato all'esterno di questo intervallo e aumentando il valore dell'integrale delle utilità attualizzate: rimarrebbe immutato il secondo termine, mentre aumenterebbe il primo. Questo dice come che la soluzione al problema si comporti localmente. Tuttavia, le precedenti affermazioni non sono corrette: se lo fossero, la condizione di ottimizzazione dinamica (29) dovrebbe coincidere con la condizione di ottimizzazione statica (32), ma ciò non risulta possibile. Resterebbe da verificare il comportamento asintotico, obiettivo che tuttavia rimane irrisolto nei testi considerati.

[24]È chiara l'analogia con la *golden rule* descritta in Phelps (1961), dove la *golden rule* è definita come la traiettoria di crescita che fornisce il livello massimo di consumo pro capite mantenibile indefinitamente. Si può dire che la GGR è la generalizzazione del concetto di *golden rule*.

Si rivela matematicamente complesso unire i due casi specifici, con $\theta = 0$ e $\theta = 1$, analizzati in precedenza. Viene invece proposto un modello semplificato, che può essere risolto analiticamente, dove la risorsa ambientale è l'unico bene considerato (Beltratti et al., 1993, 1994). Il capitale non viene incluso in quanto non cambierebbe la soluzione al problema di massimizzazione nel lungo periodo, ma complicherebbe di molto quella del problema utilitario. Il problema diventa quindi

$$\begin{aligned} &\max \theta \textstyle\int_0^\infty u(C_t, A_t)e^{-\delta t}dt + (1-\theta)\lim_{T\to\infty}\inf_{t\geq T} U(C_t, A_t) \\ &\text{soggetto a} \quad \dot{A}_t = -C_t + R(A_t). \end{aligned} \tag{35}$$

Inoltre si consideri il caso particolare

$$U(C_t, A_t) = \ln C + \gamma \ln A \tag{36}$$

$$R(A_t) = rA_t - \left(\frac{r{A^2}_t}{A^s}\right). \tag{37}$$

Nella funzione di rinnovo $R(A)$, A^s è la *carrying capacity*[25] dell'ambiente e r è il tasso intrinseco di crescita della risorsa ambientale. In un istante, il valore massimo di consumo che può essere detratto dall'ambiente (*maximum sustainable yield, MSY*) corrisponde a $\frac{A^s}{2}$ ed è uguale a $\frac{rA^s}{4}$.
Innanzitutto, viene risolto il problema con utilità attualizzata: l'hamiltoniana risulta essere

$$H = [\ln C + \gamma \ln A] + q\left[-C + rA - \frac{r}{A^s}A^2\right] \tag{38}$$

e le condizioni di primo ordine diventano

$$\begin{cases} \frac{1}{C} = q \\ \dot{q} - \delta q = -\frac{\gamma}{A} - qr\left(1 - \frac{2}{A^s}A\right) \\ \dot{A} = -C + rA - \frac{r}{A^s}A^2 \\ \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}qA = 0, \end{cases} \tag{39}$$

dove nuovamente gli autori inseriscono una condizione di trasversalità, che non rientra nelle condizioni necessarie per un problema con orizzonte infinito. Inoltre, la seconda equazione risulta erroneamente scritta in Beltratti et al. (1993), mentre è corretta in Beltratti et al. (1994).

[25] La capacità portante dell'ambiente è il livello limite di capacità delle risorse ambientali di sostenere gli individui (Hixon, 2008).

Le due variabili nello stato stazionario, rispettate le condizioni necessarie, sono rappresentate da

$$A^D = \frac{A^s(\gamma r - \delta + r)}{2r + \gamma r} \tag{40}$$

$$C = \left[\frac{A^s(\gamma r - \delta + r)}{r(2+\gamma)}\right]\left[\frac{r+\delta}{2+\gamma}\right]. \tag{41}$$

Si osserva la relazione tra il livello di stock ambientale in stato stazionario e il *MSY*, nel caso in cui $\gamma = 0$, cioè quando non si trae diretta utilità dall'ambiente:

$$A = \frac{A^s}{2}\left(\frac{r-\delta}{r}\right) < \frac{A^s}{2}. \tag{42}$$

Quando invece $\gamma > \frac{2\delta}{r}$, lo stock della risorsa nel punto stazionario risulta maggiore del *MSY* a causa dell'effetto diretto della risorsa sull'utilità.
Le curve lungo cui i valori di A e C si mantengono costanti sono rispettivamente

$$C = R(A)$$
$$R'(A) = \delta - \frac{\gamma C}{A}.$$

La **Figura 3** (Beltratti et al., 1993) descrive la situazione appena mostrata ed emerge che la soluzione utilitaria è un punto di sella.

Per quanto riguarda la *GGR*, massimizzando l'utilità istantanea, dal problema di massimizzazione

$$\max[\ln C + \gamma \ln A] \quad \text{soggetto a} \quad C = rA - \frac{r}{A^s}A^2,$$

si ottengono le seguenti condizioni necessarie

$$\begin{cases} \frac{1}{C} - \lambda = 0 \\ \frac{\gamma}{A} + \lambda r - \frac{2\lambda r}{A^s}A = 0 \\ rA - \frac{r}{A^s}A^2 - C = 0. \end{cases}$$

Dal sistema si consegue il valore A^{GGR} di stato stazionario

$$A^{GGR} = A^s\left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right) = \frac{2(\frac{A^s}{2}) + \gamma A^s}{2+\gamma}. \tag{43}$$

Quest'ultima è generalmente più grande di A^D (40)

$$A^D = A^{GGR} - \frac{\delta A^s}{r(2+\gamma)},$$

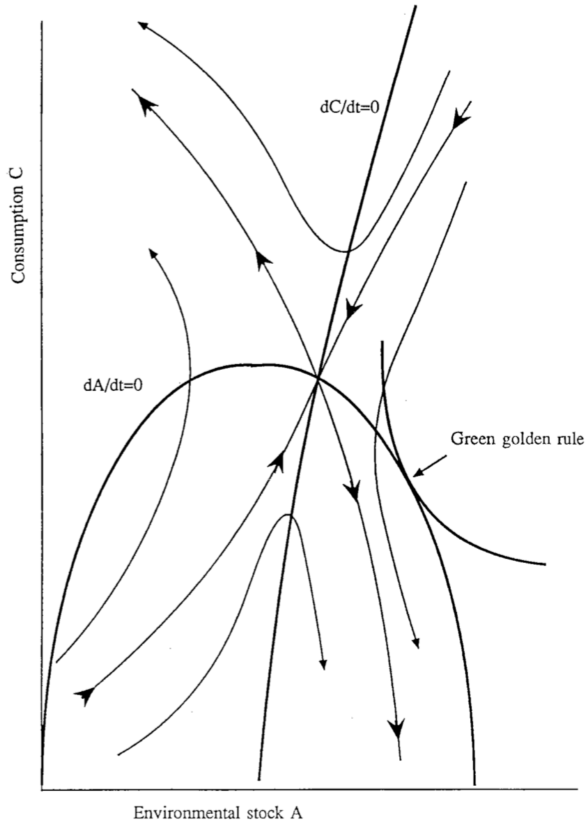

Figura 3: Le dinamiche della soluzione utilitaria per il caso con una sola variabile di stato A.

ma esse convergono quando $\delta = 0$.

La soluzione al problema di ottimizzazione (35) non è ben definita, a meno di avere $\delta = 0$ $[A^D = A^{GGR}]$. Infatti, si supponga che lo stock iniziale della risorsa ambientale sia A_0 e si scelga uno stock iniziale di C inferiore al percorso che porta al punto di sella (soluzione utilitaria). Si segua la traiettoria che soddisfa le condizioni necessarie presenti in (39), fino ad arrivare allo stock di A^{GGR}, e poi si aumenti il consumo, fino al livello corrispondente alla *GGR*. Emerge che qualsiasi percorso di questo tipo soddisferà le condizioni necessarie e porterà alla *GGR* in un tempo finito. Ciò significa che la prima parte della funzione da massimizzare in (35) potrà essere "migliorata" scegliendo un valore leggermente più alto di C_0, raggiungendo così la *GGR* in un tempo maggiore. Quindi, sarà possibile approssimare la massimizzazione indipendente dei due termini: si massimizza l'integrale rimanendo abbastanza

a lungo sulla *stable manifold*[26] che porta alla soluzione utilitaria; si massimizza la *pure finitely additive measure* raggiungendo molto avanti nel futuro la *GGR*.
Nonostante si possa approssimare la massimizzazione dei due termini separatamente, non ci sono percorsi ammissibili che realmente raggiungano il punto di massimo ricercato. Il maggiore tra i valori della funzione da massimizzare sui percorsi percorribili, è approssimato arbitrariamente da traiettorie che raggiungono la *GGR* in istanti t sempre più lontani nel tempo. Tuttavia il limite di queste traiettorie non raggiunge mai la *GGR* (Beltratti et al., 1994).

4.4 Orizzonte finito ed evidenze empiriche

Le preferenze sostenibili risultano valide anche se si considera un orizzonte di tempo finito? Inoltre, posso essere considerate adatte alla reale struttura delle preferenze che emerge dalle evidenze empiriche? In questa sotto-sezione, vengono analizzate le risposte che Chichilnisky (1997) fornisce a questi quesiti.
È importante comprendere se queste preferenze siano adatte anche in un contesto di orizzonte finito, perché la vita sulla terra sarà certamente di lunghezza finita. Dall'analisi condotta da Chichilnisky, emerge che le preferenze sostenibili possono essere viste come una generalizzazione ad orizzonti infiniti del criterio *equal treatment* per orizzonti finiti.

Definizione 5. Il problema di *equal treatment* per un orizzonte finito T è

$$\begin{cases} \max \int_0^T u(C_t, A_t)dt \\ \text{s.v.} \quad \dot{A}_t = -C_t + R(A_t) \end{cases} \tag{44}$$

con A_0 dato. La soluzione a questo problema è definita come *equal treatment optimum* su T generazioni.

Il limite per la soluzione ottima alle preferenze sostenibili ha due interessanti proprietà, cioè

- corrisponde alla *green golden rule*;
- all'aumentare di T (in un orizzonte finito), le soluzioni ottime ottenute dai problemi di *equal treatment* risultano trovarsi sempre più vicine, e per un tempo maggiore, alla traiettoria ottimale individuata dalle preferenze sostenibili.

[26]Ovvero varietà stabile, concetto importante nello studio dei sistemi dinamici.

Questo significa che il punto di ottimo delle preferenze sostenibili disegna una direzione verso cui i punti di ottimo dei problemi di *equal treatment* si muovono all'aumentare di T: questa è la cosiddetta *turnpike property*.
La **Figura 4**[27] (Chichilnisky, 1997) mostra questi risultati.

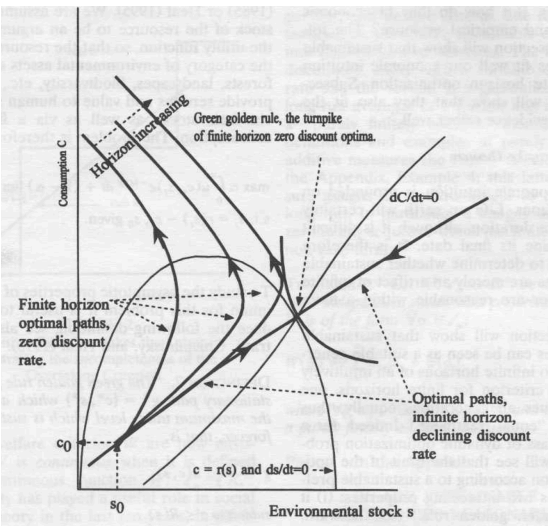

Figura 4: La soluzione al problema generale (11) con $\delta \to 0$ si sposta asintoticamente verso la *Green Golden Rule*, che è anche la *turnpike* delle soluzioni ottime ai problemi di *equal treatment* ad orizzonti finiti.

Come già sottolineato, il modello dell'utilità attualizzata non si adatta correttamente alle evidenze empiriche. Sembrano, invece, adattarsi bene le preferenze sostenibili quando si è in presenza di una risorsa rinnovabile (Chichilnisky, 1997): esiste un punto di ottimo se e solo se il tasso di sconto $\delta(t) \to 0$ con $t \to \infty$, come discusso nel **Teorema 5.**. Infatti, dalle evidenze empiriche emerge che il δ, che le persone applicano ai progetti, dipende e decresce con il crescere di t.
Gli studi mostrano che per periodi di tempo brevi, ad esempio 5 anni, il tasso di attualizzazione è maggiore dei tassi commerciali, aggirandosi attorno al 15% o più; in intervalli di 10 anni, il tasso può essere circa del 10%; per periodi di 50 anni, i tassi di sconto si valutano essere attorno al 5%, al 2% per intervalli di 100 anni. Sono state ottenute risposte simili in settori anche lontani dall'economia. Un esempio è la legge di Weber-Fechner sulla sensibilità al suono: la reazione ad un cambiamento nell'intensità di un suono è inversamente proporzionale al livello iniziale del suono a cui si è stati

[27] s è utilizzato al posto di A, r al posto di R.

sottoposti. Quindi più alto è il suono inizialmente, minore sarà la reazione ad un cambiamento. Formalmente:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{K}{s} \quad \text{o} \quad r = K \log s,$$

dove r è la reazione, s lo stimolo e K una costante positiva. Allo stesso modo, un aumento di t porta ad un calo minore di $\delta(t)$, più lontano è nel tempo l'istante considerato: $\delta(t)$ è inversamente proporzionale alla distanza nel futuro.
Nel problema (11)

$$\max \theta \int_0^\infty u(C_t, A_t)\Delta(t)dt + (1-\theta) \lim_{T\to\infty} \inf_{t\geq T} U(C_t, A_t)$$

$\Delta(t)$ è il fattore di attualizzazione e $q(t) = \frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)}$ è il tasso di attualizzazione. Applicando la formulazione di Weber-Fechner, si ottiene

$$q(t) = \frac{-K}{t} \quad \text{e} \quad \Delta(t) = e^{-K\log t} = t^{-K}.$$

Un tasso di attualizzazione di questo tipo risponde a tutte le condizioni richieste per l'esistenza di soluzioni ottime sostenibili: $\delta \to 0$ quando $t \to \infty$ e il fattore di attualizzazione $e^{-\delta t}$ va a 0. Infine, la scelta di utilizzare il log nel fattore di attualizzazione risulta coerente con le evidenze empiriche nel campo dei suoni: il tempo si misura attraverso incrementi proporzionali e non assoluti (Chichilnisky, 1997).

5 Conclusioni

In questa dissertazione sono state analizzate le preferenze sostenibili, la loro struttura e il modello che le applica. È emerso che le preferenze sostenibili, così come formulate da Chichilnisky (1997), risultano più adatte, rispetto ad altri criteri, a rappresentare l'atteggiamento di un decisore su un orizzonte infinito: esse rispettano gli assiomi di non dittatorialità del presente e del futuro e presentano le caratteristiche di completezza, sensibilità, continuità e indipendenza. Ciò significa che esse si rivelano essere più appropriate nelle valutazioni di progetti di lungo periodo, poiché non comportano asimmetria intergenerazionale. Inoltre, questo tipo di preferenze sembra conforme a quanto affiora dalle evidenze empiriche: gli individui tendono ad applicare tassi di attualizzazione che decrescono con l'avanzare del tempo. Infine, risultano adattarsi bene anche all'idea di valutazioni in termini di orizzonti finiti: la *turnpike property* mostra che le preferenze sostenibili determinano

un percorso lungo cui, all'avanzare del tempo, le soluzioni ottime ai problemi di *equal treatment* si avvicinano alla *GGR*; la stessa soluzione al problema con preferenze sostenibili converge asintoticamente alla *GGR*.
Il modello è caratterizzato da una media pesata tra il problema dell'utilità attualizzata e quello dell'utilità di lungo periodo. Dalla risoluzione del problema di controllo ottimo (Beltratti et al., 1993), emerge l'importanza del tasso di attualizzazione per l'esistenza delle soluzioni stazionarie, e vengono descritti i casi in cui ci possono essere zero, una o due soluzioni. L'analisi sfrutta l'ipotesi di omogeneità lineare della funzione di produzione, benché solo in parte: gli autori, infatti, si fermano ad un'analisi grafica, senza ottenere una condizione di ottimalità sintetica da confrontare con il caso della massimizzazione dell'utilità nel lungo periodo. Invece, si ottiene questa condizione, chiamata condizione di ottimalità dinamica, dall'analisi del problema con il criterio *catching up* che è stata sviluppata in questo elaborato. In questo problema, non si assume l'omogeneità lineare della funzione di produzione, perché la si fa dipendere unicamente dal capitale. Inoltre, si suppone che il capitale sia soggetto a obsolescenza, come accade generalmente in teoria dello sviluppo economico.
Dalla risoluzione del problema di programmazione non lineare, si trova la configurazione di lungo periodo, che rappresenta il livello massimo di utilità mantenibile indefinitamente. La *GGR* rappresenta un target ideale perché descrive il trade-off ottimale tra il livello di consumo e il livello di stock della risorsa ambientale. Il punto di vista sottostante alla *GGR* è prettamente statico e porta ad una condizione di ottimalità (statica), la quale naturalmente differisce da quella dinamica ottenuta per il problema con il criterio *catching up*.
Successivamente, si è tentato di risolvere il modello nel suo insieme, presentando una versione semplificata e massimizzando le due componenti separatamente. È emerso che il livello di stock della risorsa ambientale in stato stazionario per la soluzione utilitaria è maggiore del *maximum sustainable yield*, mentre è inferiore al livello stazionario di stock ambientale per la soluzione al problema dell'utilità di lungo periodo. Infine, non è stato possibile individuare un percorso ottimale che sia soluzione del problema generale.
Le criticità di questo modello possono essere riassunte in questi punti:

- gli autori, formulando un modello di crescita, sono alla ricerca di una traiettoria ottimale sostenibile ma questo obiettivo non viene raggiunto;

- il modello prevede che, in un qualche istante, si passi da uno stato che risponde ad una politica ottima per la componente utilitaria del criterio di welfare, ad un altro stato caratterizzato da una politica ottima per la componente di lungo periodo. Non è chiaro come si debba fissare questo istante e come avvenga questo passaggio.

In conclusione, nonostante siano emerse queste criticità e nonostante i testi, di cui si è parlato, risalgano ad oltre vent'anni fa, i temi di sostenibilità e di *green golden rule* risultano sicuramente interessanti e attuali. Ciò è emerso dall'interesse mostrato nei confronti dei testi Beltratti et al. (1993, 1994); Chichilnisky et al. (1995) da un lavoro molto recente, come l'articolo di Faria and McAdam (2018), che rappresenta un tentativo di prosecuzione e generalizzazione del lavoro analizzato in questa sede.

Riferimenti bibliografici

Beltratti, A., Chichilnisky, G. and Heal, G. (1993), Sustainable growth and the Green Golden Rule, Technical Report 4430, NBER.

Beltratti, A., Chichilnisky, G. and Heal, G. (1994), 'The environment and the long run: a comparison of different criteria', *Ricerche Economiche* **48**, 319–340.

Beltratti, A., Chichilnisky, G. and Heal, G. (1998), Uncertain future preferences and conservation, *in* G. Chichilnisky, G. Heal and A. Vercelli, eds, 'Sustainability: Dynamics and Uncertainty', Kluwer, Dordrecht, pp. 257–275.

Buratto, A., Grosset, L. and Viscolani, B. (2019), *Ottimizzazione Dinamica, modelli economici e gestionali*, Edizioni Libreria Progetto, Padova. quinta edizione.

Chichilnisky, G. (1997), 'What is sustainable development?', *Land Economics* **73**(4), 467–491.

Chichilnisky, G., Heal, G. and Beltratti, A. (1995), 'The Green Golden Rule', *Economics Letters* **49**, 175–179.

Faria, J. R. and McAdam, P. (2018), 'The green golden rule: Habit and anticipation of future consumption', *Economics Letters* **172**, 131–133.

Hixon, M. A. (2008), Carrying capacity, *in* S. E. Jørgensen and B. D. Fath, eds, 'Encyclopedia of Ecology', Elsevier, Amsterdam, pp. 528–530.

Phelps, E. (1961), 'The golden rule of accumulation: a fable for growthmen', *The American Economic Review* **51**(4), 638–643.

Prodi, G. (1970), *Analisi matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.

A Appendice

A.1 Minimo limite

Si riporta la definizione di minimo limite (Prodi, 1970).

Definizione 6. Si dice *minimo limite* di $f(x)$ per x tendente a x_0 il valore

$$l' = \lim_{V \in \Im_{x_0}} m'(V),$$

dove $\Im_{x_0}$ è l'insieme degli intorni di x_0 e $m'(V) = \inf_{x \in V - x_0} f(x)$, funzione monotona non decrescente.
In questo testo si indica il minimo limite con

$$\liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Si aggiunge che per tutte le successioni che abbiano limite, nel senso tradizionale, il $\liminf$ coincide con il limite della successione.

A.2 Additive measures

Definizione 7. Sia μ una funzione definita sull'algebra di insiemi[28] (S, Σ), con valori in $[-\infty, +\infty]$ e operazioni di unione e intersezione di insiemi. Inoltre siano A e B due insiemi disgiunti $\in (S, \Sigma)$. La funzione μ è chiamata additiva o finitamente additiva se

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad\qquad A \cap B = \emptyset$$

cioè se μ assegna un valore reale ad ogni elemento di (S, Σ) e assegna la somma dei valori all'unione di due insiemi disgiunti.

Definizione 8. Si supponga che (S, Σ) sia una σ-algebra[29]. Se, per ogni sequenza $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ di insiemi a coppie disgiunti appartenenti a (S, Σ), si ha

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

[28]Un'algebra di insiemi è un insieme di insiemi. La funzione in questione è quindi di una *set function*, il cui dominio è appunto una collezione di insiemi.

[29]Una σ-algebra su un insieme Ω, è una famiglia di sottoinsiemi di Ω che ha delle proprietà di chiusura rispetto all'unione numerabile e al passaggio complementare.

allora si dice che μ è numerabilmente additiva o σ-*additiva*. Quindi, una misura è numerabilmente additiva se la misura di una collezione numerabile di insiemi disgiunti è la somma delle loro misure.

Definizione 9. Una funzione di insieme μ additiva, limitata e a valori reali, definita su (S, Σ) è chiamata *purely finitely additive* se, ogni qualvolta una funzione numerabile additiva ν soddisfa

$$\nu(A) \leq \mu(A),$$

allora

$$\nu(A) = 0$$

$\forall A \in (S, \Sigma)$.

Questo significa che la sola misura numerabilmente additiva che è assolutamente continua rispetto a una *purely finitely additive measure* è la misura che è identica a 0. La proprietà enunciata per le misure numerabilmente additive vale anche per le finitamente additive solamente nel caso di famiglie di insiemi disgiunti. Una *purely finitely additive function* è una funzione di una sequenza che dipende solamente dalle *limiting properties* di quella sequenza Beltratti et al. (1993, 1994); Chichilnisky (1997).[30]

[30] L'elaborato presenta un numero di parole inferiore a 10.000.