



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA BIOMEDICA

**Metodi ottici per la misura dell'indice di rifrazione:  
analisi comparativa e applicabilità ad un esperimento di particle image velocimetry**

*19/11/2024*

**Candidato**

Luppi Riccardo

**Matricola**

2032648

**Relatore**

Prof. Francesca Maria Susin

**Correlatore**

Dott. Andrea Zampiron

**Anno Accademico**

*2023/2024*



# Abstract

Diversi metodi ottici per la misura dell'indice di rifrazione vengono analizzati per risolvere una problematica incontrata durante un esperimento portato avanti dal Laboratorio di Fluidodinamica Cardiovascolare dell'Università di Padova. La tecnica di *particle image velocimetry* utilizzata per effettuare delle misurazioni necessita che alcune componenti dell'apparecchiatura sperimentale abbiano lo stesso indice di rifrazione. Vengono presentati il metodo della deviazione minima, l'interferometro di Michelson, il rifrattometro di Abbe e sensori a fibra ottica come candidati per la misurazione dell'indice di rifrazione delle componenti dell'esperimento. Un capitolo viene dedicato alla scelta del metodo migliore per l'esperimento, evidenziando vantaggi e svantaggi di ogni soluzione in termini di accuratezza e applicabilità all'esperimento. Si conclude che utilizzare il metodo della deviazione minima o il rifrattometro di Abbe è il modo più efficace per misurare l'indice di rifrazione nel contesto sperimentale preso in esame.



# Indice

<b>Abstract</b>	<b>i</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2 Richiami di ottica</b>	<b>5</b>
<b>3 Metodi ottici</b>	<b>15</b>
3.1 Metodo deviazione minima . . . . .	15
3.2 Interferometro di Michelson . . . . .	17
3.3 Rifrattometro di Abbe . . . . .	23
3.4 Sensori a fibra ottica . . . . .	24
3.4.1 Sensori interferometrici: modello Mach-Zehnder . . . . .	25
3.4.2 Sensori interferometrici: modello Fabry-Férot . . . . .	28
3.4.3 Sensori a fibra ottica a reticolo: Fiber Bragg Gratings . . . . .	34
<b>4 Metodi a confronto</b>	<b>37</b>
<b>5 Conclusioni</b>	<b>41</b>
<b>Appendice</b>	
<b>A Commento del codice Matlab</b>	<b>42</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

Nel 2013, il 33.1% delle morti totali nel mondo è attribuibile a malattie cardiovascolari [1]. Tra tutte si distingue la *coronary heart disease* o CHD, che può avvenire in seguito ad un'arterosclerosi di un'arteria coronaria: una condizione in cui un accumulo di sostanze grasse e colesterolo provoca un restringimento del diametro dell'arteria (stenosi) e quindi una riduzione del flusso sanguigno verso il miocardio. La stenosi viene spesso trattata attraverso un'operazione chirurgica chiamata angioplastica. Si tratta di un intervento che mira ad espandere il diametro dell'arteria per permettere al sangue di fluire normalmente nel cuore [2]. L'operazione si conclude con l'applicazione sulle pareti dell'arteria di uno stent, una rete metallica che ha il compito di preservare il diametro riallargato dell'arteria impedendone il restringimento una volta concluso l'intervento, vedi figura 1.1, S4. Tuttavia non sono rari gli episodi di restenosi dopo l'applicazione dello stent. È quindi necessaria una comprensione maggiore dei cambiamenti dell'ambiente emodinamico all'interno dell'arteria quando viene applicato uno stent.

Stent models

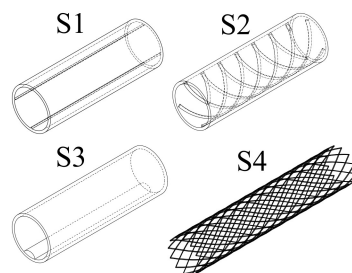


Figura 1.1: S1-S3 geometrie semplificate/idealizzate. S4: riproduzione stent reale (immagine presa da [6]).

Il Laboratorio di Fluidodinamica Cardiovascolare dell'Università di Padova propone di effettuare misurazioni in una struttura che riproduca fedelmente le condizioni di flusso pulsatile del sangue all'interno di un'arteria a cui viene applicato uno stent [6]. Le misurazioni vengono effettuate utilizzando una tecnica chiamata *particle image velocimetry* (PIV).

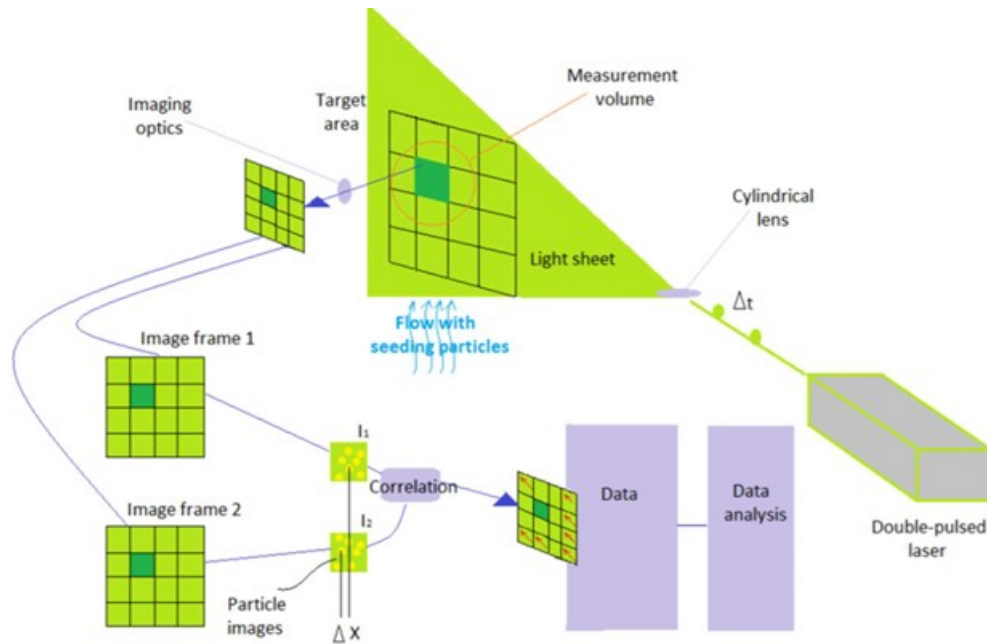


Figura 1.2: Rappresentazione schematica di un sistema di PIV (immagine presa da [4]).

Delle particelle traccianti vengono disseminate all'interno del liquido da analizzare in modo tale da seguirne il flusso. Un laser illumina con brevi impulsi luminosi una zona di interesse appartenente al fluido. In corrispondenza di ogni impulso luminoso, una telecamera cattura la luce dispersa dalle particelle traccianti in un fotogramma, rilevandone così la posizione. Ciascun fotogramma viene diviso in sottoaree quadrate. Con degli algoritmi di correlazione è possibile risalire allo spostamento  $\Delta x$  delle particelle all'interno della griglia, osservandone lo scostamento tra due fotogrammi consecutivi. Dividendo questa quantità per il tempo  $\Delta t$  che intercorre tra due impulsi luminosi, è possibile ricavare la velocità delle particelle. Ripetendo l'algoritmo di correlazione per ogni cella quadrata si ottiene un vettore di scostamento medio. Il risultato, vedi figura 1.3, è quello di una mappa vettoriale del campo di velocità all'interno del fluido.



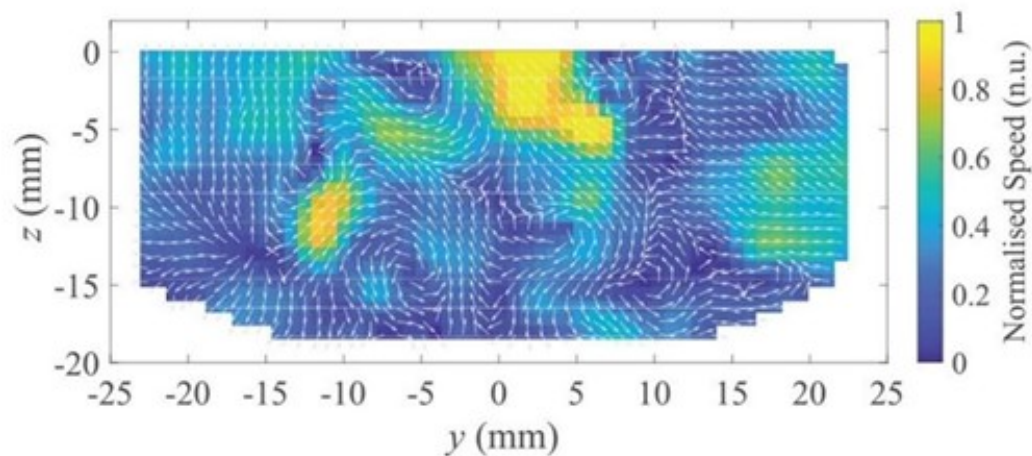


Figura 1.3: Campo di velocità ottenuto tramite PIV (immagine presa da [4]).

L'apparato sperimentale disposto per l'utilizzo di questa tecnica, vedi figura 1.4, presenta due telecamere per l'acquisizione delle immagini e un condotto trasparente all'interno del quale viene fatta scorrere la soluzione liquida da analizzare. Per emulare al meglio l'ambiente emodinamico di un'arteria, la soluzione liquida è prodotta in maniera tale da avere viscosità e densità simili a quelle del sangue e viene fatta fluire all'interno della struttura con un moto pulsatile. Le misurazioni vengono fatte sia per casi in cui la geometria dell'esperimento è più semplice (fig. 1.1, S1 e S3), sia nel caso in cui vengono applicati stent simili a quelli utilizzati nella realtà (fig. 1.1, S2 e S4).

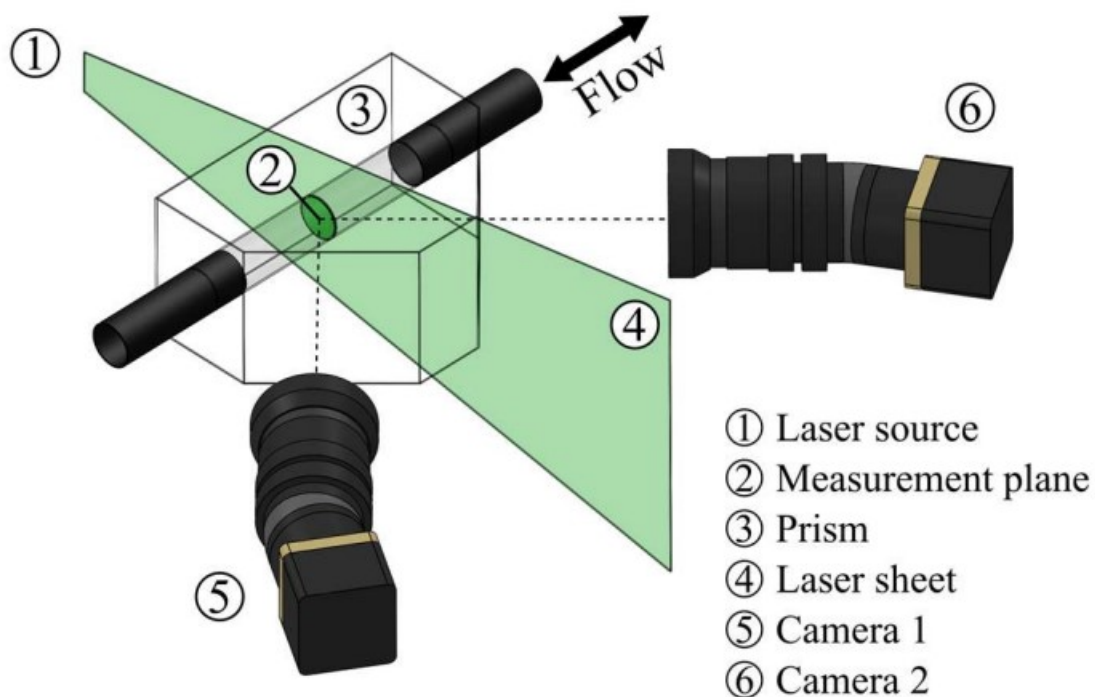


Figura 1.4: Apparato sperimentale utilizzato per le misurazioni (immagine presa da [6]).

Per minimizzare gli effetti indesiderati dovuti alla rifrazione della luce, il condotto viene collocato in un prisma contenente la stessa soluzione che viene fatta scorrere al suo interno. La geometria del prisma è tale per cui due facce sono normali all'obiettivo delle telecamere. Inoltre è fondamentale che tutte le componenti dell'esperimento, cioè il fluido, il condotto e il prisma, abbiano lo stesso indice di rifrazione. Per ovviare a questo problema, il tubo e il prisma vengono realizzati con lo stesso materiale. Rimane però da verificare che la soluzione liquida abbia lo stesso indice di rifrazione. Quindi il seguente lavoro di tesi si pone questi obiettivi:

- analizzare diversi metodi grazie ai quali è possibile misurare l'indice di rifrazione del condotto e della soluzione liquida;
- scegliere il metodo più adatto da utilizzare.

Riguardo al primo punto, tra i molteplici metodi che si possono trovare nella letteratura[3, 5], verranno presi in considerazione il metodo della deviazione minima[10–16] e tecniche interferometriche che utilizzano l'interferometro di Michelson[18, 19]. Verranno anche analizzati il rifrattometro di Abbe[20, 21] e i più recenti sensori a fibra ottica, in particolare quelli prodotti sulla base degli interferometri di Mach-Zehnder[23–25] e di Fabry-Pérot[26–31] e i sensori a reticolo di Bragg (*fiber Bragg gratings*)[32–35]. Per la scelta del metodo bisogna tenere in considerazione l'apparecchiatura sperimentale a disposizione. Il laser utilizzato per le misure lavora alla lunghezza d'onda di 532 nm, quindi tutti i valori di indice di rifrazione devono essere presi a quella specifica lunghezza d'onda. Sia il prisma che il condotto vengono ottenuti con lo stampaggio 3D della resina *Accura*<sup>®</sup> *ClearVue*<sup>TM</sup> tramite stereolitografia (SLA). Il materiale ha un indice di rifrazione dichiarato di 1.508 (non è specificata la lunghezza d'onda). Infine la soluzione liquida è costituita da acqua, glicerina e ioduro di sodio (NaI).

# Capitolo 2

## Richiami di ottica

In questo capitolo vengono richiamati alcuni concetti fondamentali per la comprensione dei capitoli successivi.

### Equazioni di Maxwell e legame materiale

La luce, trattandosi di un'onda elettromagnetica, deve rispettare le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Questa serie di equazioni descrive il comportamento dei vettori campo elettrico  $\vec{E}$ , induzione magnetica  $\vec{B}$ , campo magnetico  $\vec{H}$ , spostamento elettrico  $\vec{D}$  e densità di corrente elettrica  $\vec{J}$ .  $\rho_v$  è la densità di carica volumetrica. Inoltre per il legame materiale, che caratterizza il mezzo all'interno del quale si propagano le onde elettromagnetiche, valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.7)$$

$\epsilon$  è la permittività dielettrica del mezzo di propagazione,  $\epsilon_r$  e  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m sono rispettivamente la permittività dielettrica relativa e del vuoto.  $\mu$  è la permeabilità magnetica del mezzo di propagazione,  $\mu_r$  e  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m sono rispettivamente la permeabilità magnetica relativa e del vuoto.  $\sigma$  è la conducibilità.

### Una prima soluzione delle equazioni di Maxwell

Nel caso di mezzi di propagazione senza sorgenti, ad esempio vuoto o materiali in cui non sono presenti cariche libere o correnti elettriche, sia la conducibilità  $\sigma$  che la densità di carica volumetrica libera  $\rho_v$  sono nulle. Inoltre, se si considera il mezzo omogeneo, quindi valgono le espressioni 2.5 e 2.6, le equazioni d'onda per il campo elettrico e magnetico 2.1 e 2.2, con l'utilizzo di identità vettoriali e alcuni passaggi algebrici, diventano:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Le cui soluzioni sono funzioni del tempo  $t$  che si muovono progressivamente o regressivamente lungo la direzione di propagazione, in questo caso supposta coincidente all'asse  $z$  di un generico sistema di riferimento  $xyz$ , con forma:  $\vec{E} = \vec{E}_0 g(t \pm z/v)$  e  $\vec{H} = \vec{H}_0 g(t \pm z/v)$ , dove  $g$  è una qualsiasi funzione e  $v$  è la velocità di propagazione pari a  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , che nel vuoto è pari alla velocità della luce  $c$ . Un caso particolare è quello armonico, in cui le onde oscillano con una pulsazione  $\omega$ . Sotto questa condizione,  $g(t) = \cos(\omega t)$  e l'onda prende la forma di  $g(t \pm z/v) = \cos[\omega(t \pm z/v)] = \cos(\omega t \pm \beta z)$ . La costante di propagazione, definita come  $\beta \equiv \omega/v$  rappresenta lo sfasamento per unità di lunghezza dell'onda sinusoidale lungo l'asse di propagazione e vale anche  $\beta = 2\pi/\lambda$ .

### Fasori complessi e soluzioni delle equazioni di Helmholtz

Un altro modo per descrivere il campo elettrico e magnetico è con l'ausilio dei fasori complessi, che permettono di "liberarsi" dalla dipendenza dal tempo quando ci si trova in regime armonico. I fasori permettono di rappresentare delle grandezze sinusoidali con un numero complesso (l'unità immaginaria è rappresentata da  $j$ ). Di fatto vengono impiegati come strumenti matematici che non aggiungono nessun significato fisico ulteriore, ma semplificano i calcoli e agevolano un'analisi più approfondita del comportamento dei campi elettromagnetici. Per il caso armonico precedente in cui l'onda viaggia lungo  $z$  in un mezzo omogeneo e senza perdite, le relazioni che legano il campo elettrico/magnetico nel dominio del tempo a quello dei fasori complessi sono:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t \pm \beta z + \phi) \rightarrow \mathbf{E} = \vec{E}_0 \exp(\pm j\beta z + j\phi) \quad (2.10)$$

$$\vec{E} = \text{Re}[\mathbf{E} \exp(j\omega t)] \quad (2.11)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t \pm \beta z + \phi) \rightarrow \mathbf{H} = \vec{H}_0 \exp(\pm j\beta z + j\phi) \quad (2.12)$$

$$\vec{H} = \text{Re}[\mathbf{H} \exp(j\omega t)] \quad (2.13)$$

$\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sono i rispettivi fasori complessi di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ . Si noti che nell'espressione dei fasori non compare la dipendenza dal tempo. Tramite l'utilizzo dei fasori è quindi possibile riscrivere le equazioni di Maxwell nel caso di mezzo di propagazione senza sorgenti e isotropo come:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.15)$$

$$\nabla \mathbf{D} = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (2.17)$$

Inoltre le equazioni 2.8 e 2.9 possono essere riscritte come:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2.19)$$

Dette equazioni di Helmholtz, dove  $k \equiv \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ . Dato che l'operatore rotore produce un vettore ortogonale al vettore a cui viene applicato, si può stabilire che  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sono sempre ortogonali tra loro. Si consideri ora un'onda che si propaga lungo  $z$  in un materiale senza perdite, si supponga che sia il campo elettrico che magnetico giacciono sul piano trasverso alla direzione di propagazione ( $xy$ ) e che lungo questo piano non mostrino nessuna variazione. Questo tipo di onda è detta onda piana uniforme. Applicando queste condizioni alla prima equazione di Helmholtz, la 2.18 diventa  $d^2\mathbf{E}/dz^2 + k^2\mathbf{E} = 0$  la cui soluzione è  $\mathbf{E} = \vec{E}_0 \exp(-jkz)$  e in questo caso  $k = \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ .

### Riflessione e trasmissione di onde in un'interfaccia piana

La riflessione di un'onda piana avviene in corrispondenza di una discontinuità nel mezzo di propagazione. In figura 2.1 viene riportato il caso di incidenza in corrispondenza di un'interfaccia piana sia per il caso di polarizzazione trasverso-elettrica TE che trasverso-magnetica TM. La polarizzazione TE indica che il campo elettrico è ortogonale al piano di incidenza. Invece la polarizzazione TM indica che il campo elettrico giace su un piano parallelo al piano di incidenza. In entrambi i casi l'interfaccia tra i due mezzi giace nel piano  $yz$  del sistema di riferimento orientato come in figura 2.1. I due mezzi sono caratterizzati da permeabilità magnetica  $\mu = \mu_0$  e indice di rifrazione  $n_1 \neq n_2$ . L'indice di rifrazione di un materiale è definito come il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce mentre si propaga nel materiale. In questo caso, nel mezzo 1:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_{r,1}} \quad (2.20)$$

Una singola onda piana incide sull'interfaccia con angolo  $\theta_1$  rispetto l'asse  $x$ . La direzione di propagazione e la frequenza dell'onda incidente sono caratterizzate dal vettore d'onda  $\vec{k}_1 = n_1 k_0 [\cos(\theta_1) \hat{a}_x + \sin(\theta_1) \hat{a}_z]$  dove  $k_0 \equiv \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  e  $\hat{a}_i$  è il versore orientato lungo l'asse  $i$  del sistema di riferimento. Per stabilire l'ampiezza del campo elettrico riflesso e trasmesso così come  $\theta'_1$  e  $\theta_2$  si applicano le condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico all'interfaccia dei due mezzi.

$$E_{t1}|_{x=0} + E'_{t1}|_{x=0} = E_{t2}|_{x=0} \quad (2.21)$$

$$H_{t1}|_{x=0} + H'_{t1}|_{x=0} = H_{t2}|_{x=0} \quad (2.22)$$

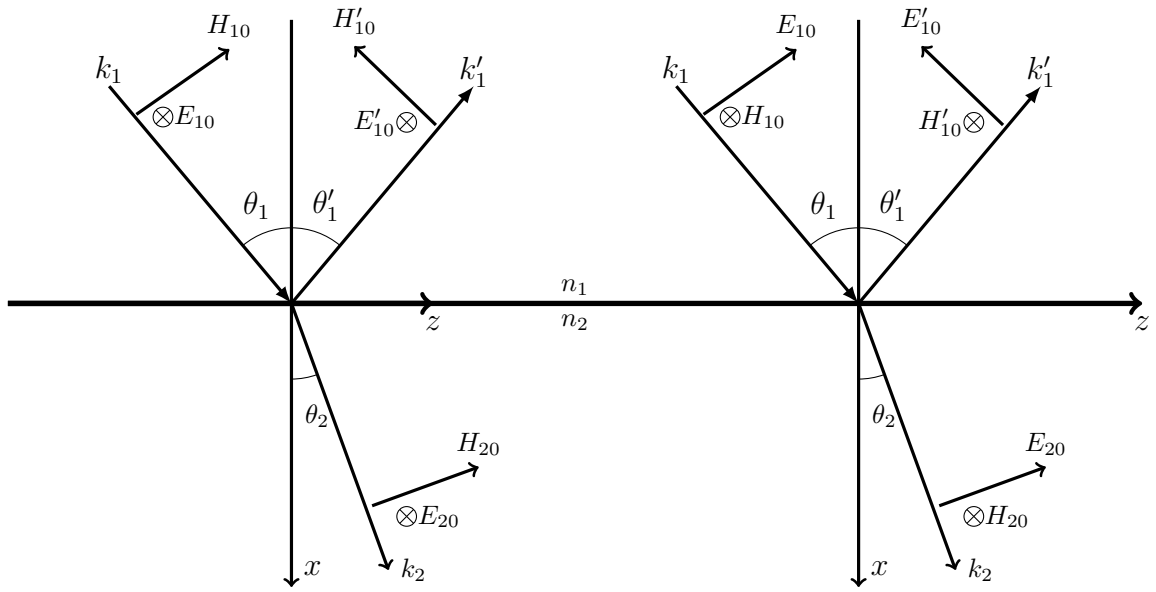


Figura 2.1: Riflessione e trasmissione per onde piane nel caso di polarizzazione TE (a sinistra) e TM (a destra) (immagine presa da [7]).

Considerando la polarizzazione TE, il campo elettrico incidente, riflesso e trasmesso hanno forma:

$$E_{y1} = E_{10} \exp(-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \quad (2.23)$$

$$E'_{y1} = E'_{10} \exp(-j\vec{k}'_1 \cdot \vec{r}) \quad (2.24)$$

$$E_{y2} = E_{20} \exp(-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \quad (2.25)$$

Dove  $\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ . I vettori d'onda per i casi TE e TM sono espressi come:

$$\vec{k}_1 = k_{x1}\hat{a}_x + k_{z1}\hat{a}_z = n_1 k_0 \cos(\theta_1) \hat{a}_x + n_1 k_0 \sin(\theta_1) \hat{a}_z \quad (2.26)$$

$$\vec{k}'_1 = -k'_{x1}\hat{a}_x + k'_{z1}\hat{a}_z = -n_1 k_0 \cos(\theta'_1) \hat{a}_x + n_1 k_0 \sin(\theta'_1) \hat{a}_z \quad (2.27)$$

$$\vec{k}_2 = k_{x2}\hat{a}_x + k_{z2}\hat{a}_z = n_2 k_0 \cos(\theta_2) \hat{a}_x + n_2 k_0 \sin(\theta_2) \hat{a}_z \quad (2.28)$$

Per fare sì che le condizioni di continuità 2.21 e 2.22 siano soddisfatte per tutti i punti dell'interfaccia, tutte e tre le onde devono ricevere lo stesso sfasamento per unità di distanza lungo l'interfaccia. Quindi deve essere vero che  $k_{z1} = k'_{z1} = k_{z2}$ . Con l'aumentare del tempo, questa condizione impone che anche le velocità di fase delle tre onde siano uguali lungo l'interfaccia, dove  $v_{pz} = \omega/k_{z1}$  per l'onda incidente. Di conseguenza dalla 2.26 e dalla 2.27 si ricava che  $\theta_1 = \theta'_1$ , inoltre per la 2.26 e la 2.28:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (2.29)$$

Detta legge di Snell. Sempre per onde TE, la 2.21 e la 2.22 possono essere espresse in termini di ampiezza del campo elettrico e magnetico come:

$$E_{10} + E'_{10} = E_{20} \quad (2.30)$$

$$H_{10} \cos(\theta_1) - H'_{10} \cos(\theta_1) = H_{20} \cos(\theta_2) \quad (2.31)$$

Tenendo conto del rapporto delle ampiezze del campo elettrico e magnetico e risolvendo la 2.30 e la 2.31 si ottengono i coefficienti di riflessione e trasmissione:

$$r_{TE} = \frac{E'_{10}}{E_{10}} = \frac{n_1 \cos(\theta_1) - n_2 \cos(\theta_2)}{n_1 \cos(\theta_1) + n_2 \cos(\theta_2)} \quad (2.32)$$

$$t_{TE} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = 1 + r_{TE} \quad (2.33)$$

$$r_{TM} = \frac{E'_{10}}{E_{10}} = \frac{\cos(\theta_1)/n_1 - \cos(\theta_2)/n_2}{\cos(\theta_1)/n_1 + \cos(\theta_2)/n_2} \quad (2.34)$$

$$t_{TM} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = 1 + r_{TM} \quad (2.35)$$

Dette equazioni di Fresnel. I coefficienti di riflessione e trasmissione delle potenze per ogni polarizzazione sono dati da:

$$R = r \cdot \bar{r} = |r|^2 \quad (2.36)$$

$$T = t \cdot \bar{t} = |t|^2 \quad (2.37)$$

Un caso speciale di riflessione è quello della riflessione totale, che avviene quando:

$$\theta_1 \geq \theta_c = \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (2.38)$$

Dove  $\theta_c$  è l'angolo critico oltre il quale l'onda viene totalmente riflessa. Inoltre può avvenire solo se  $n_1 > n_2$ . Per entrambe le polarizzazioni, quando l'angolo di incidenza supera quello critico, i coefficienti di riflessione delle potenze sono unitari.

### Guida d'onda rettangolare

Le proprietà di una guida d'onda costituita da una lastra rettangolare di un materiale dielettrico sono qualitativamente simili a quelle della fibra ottica, pur rimanendo più semplici da comprendere. La geometria simmetrica della guida, così come la sua orientazione rispetto al sistema di riferimento, sono presentate in figura 2.2. La guida si assume di estensione infinita lungo  $y$  (i. e. non ci sono variazioni di quantità elettromagnetiche lungo quella direzione), con indice di rifrazione  $n_1$  e permeabilità magnetica  $\mu_0$ . I raggi di luce che si propagano lungo la guida rimangono al suo interno se l'angolo di incidenza  $\theta_1$  è superiore a  $\theta_c$ , dato dalla 2.38. Questa condizione è soddisfatta solo se  $n_1 > n_2$ .

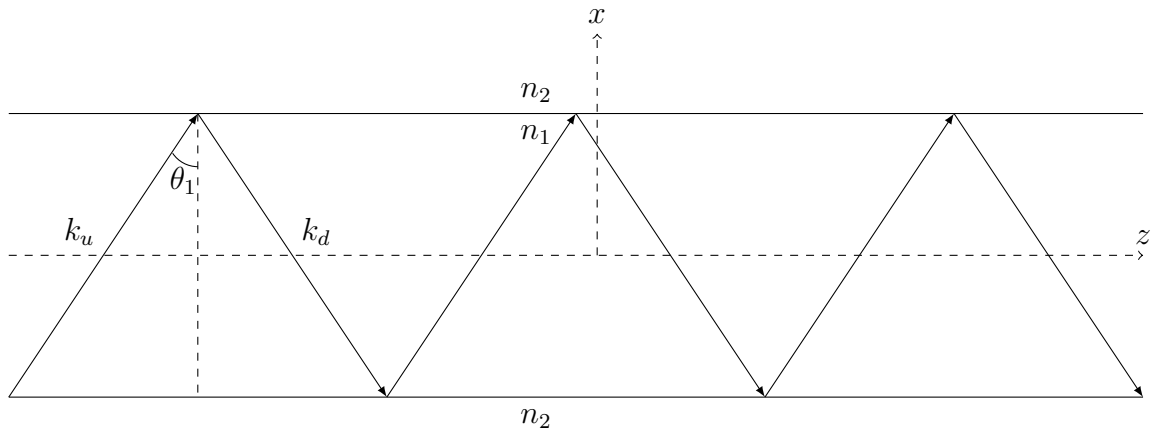


Figura 2.2: Propagazione di un raggio di luce lungo una guida rettangolare (immagine presa da [7]).

Ad un singolo raggio che si propaga nella lastra sono associate due onde piane. Una che si propaga verso l'alto con un vettore d'onda  $\vec{k}_u = k_{x1}\hat{a}_x + \beta\hat{a}_z$  e una che si propaga verso il basso con un vettore d'onda  $\vec{k}_d = -k_{x1}\hat{a}_x + \beta\hat{a}_z$ . Per avere questo modo di propagazione è necessario che i fronti d'onda associati con il primo raggio che si propaga verso l'alto siano coincidenti con quelli di tutti i successivi raggi che si propagano verso l'alto. Lo stesso requisito vale anche per i raggi che si propagano verso il basso. Solo certi valori di  $\theta_1$  soddisfano questa condizione, e ad ogni  $\theta_1$  ammesso corrisponde un singolo modo della fibra. In questo caso esistono due modi: TE e TM. I campi sono descritti mediante i fasori, che nel caso di una componente di  $\mathbf{E}$  diventano:

$$E_u = E_0 \exp(-j\vec{k}_u \cdot \vec{r}) = E_0 \exp(-jk_{x1}x) \exp(-j\beta z) \quad (2.39)$$

$$E_d = E_0 \exp(-j\vec{k}_d \cdot \vec{r}) = E_0 \exp(+jk_{x1}x) \exp(-j\beta z) \quad (2.40)$$

E le componenti del vettore di propagazione sono:

$$k_{x1} = k_1 \cos(\theta_1) = n_1 k_0 \cos(\theta_1) \quad (2.41)$$

$$\beta = k_1 \sin(\theta_1) = n_1 k_0 \sin(\theta_1) \quad (2.42)$$



La componente lungo  $z$  del vettore di propagazione è la costante di propagazione  $\beta$ . Questa quantità determina la velocità di fase e la velocità di gruppo. Ogni modo presenta un determinato valore di  $\beta$ . Per comprendere appieno il fenomeno della riflessione è necessario considerare la trasmissione di onde. In corrispondenza di entrambe le interfacce della lastra con l'esterno, l'onda viene in parte trasmessa e presenta un vettore d'onda  $\vec{k}_2$  con componenti  $k_{x2}$  lungo  $x$  e  $\beta$  lungo  $z$ . I vettori d'onda  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  devono essere uguali per soddisfare le condizioni al contorno lungo l'interfaccia. Una componente del campo elettrico nella regione esterna della lastra assume la forma:

$$E_2 = E_{20} = E_{20} \exp(-jk_{x2}x) \exp(-j\beta z) \quad (2.43)$$

Per avere un modo completamente guidato le onde devono essere totalmente riflesse, cioè i coefficienti di riflessione delle equazioni di Fresnel delle potenze devono essere unitari e  $\theta_1 > \theta_c$ . Questo implica che  $k_{x2}$  diventi immaginario e può essere espresso in termini di un coefficiente di attenuazione reale come  $k_{x2} = -j\gamma_2$  e:

$$\gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \quad (2.44)$$

$$k_{x1} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \quad (2.45)$$

Stabilite le condizioni per la riflessione totale, resta da imporre la condizione che tutti i raggi che si propagano verso l'alto siano in fase, più precisamente, lo sfasamento dell'onda in seguito a due riflessioni consecutive deve essere multiplo di  $2\pi$ . Questo requisito prende il nome di condizione di risonanza trasversa. Considerando un valore iniziale  $E_i$  per il campo elettrico e il suo valore in seguito ad un tragitto che comprende due riflessioni  $E_f$ :

$$E_f = E_s \exp(-jk_{x1}d) \exp(j2\phi) \exp(-jk_{x1}d) \exp(j2\phi) \quad (2.46)$$

Dove  $d$  è lo spessore della lastra e  $\phi$  è lo sfasamento in seguito ad una riflessione, che vale:

$$\phi_{TE} = \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_2}{k_{x1}} \right) \quad (2.47)$$

$$\phi_{TM} = \tan^{-1} \left( \frac{n_1^2 \gamma_2}{n_2^2 k_{x1}} \right) \quad (2.48)$$

Dato che lo sfasamento deve essere multiplo di  $2\pi$ , dalla 2.46 si ottiene la condizione di risonanza trasversa:

$$4\phi - 2k_{x1}d = 2\pi m \quad (2.49)$$

Che permette di ottenere l'equazione agli autovalori per onde TE:

$$\frac{\gamma_2}{k_{x1}} = \tan\left(\frac{k_{x1}d}{2} + \frac{m\pi}{2}\right) \quad (2.50)$$

e per onde TM:

$$\frac{\gamma_2}{k_{x1}} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \left(\frac{k_{x1}d}{2} + \frac{m\pi}{2}\right) \quad (2.51)$$

Per ogni valore di  $m$  corrisponde una coppia di modi,  $TE_m$  e  $TM_m$ , con un rispettivo valore di  $\beta$ .

### Propagazione della luce nella fibra ottica a indice a gradino

La fibra ottica a indice a gradino è una guida d'onda cilindrica costituita da una fibra di vetro o plastica chiamata *core* e da un rivestimento che prende il nome di *cladding*. Per la 2.38, affinché la fibra possa guidare la luce, l'indice di rifrazione del *core* ( $n_1$ ) deve essere maggiore di quello del *cladding* ( $n_2$ ). La fibra si definisce a indice a gradino perché il profilo dell'indice di rifrazione lungo la fibra ha la forma di un gradino. Per definire i modi con cui si propagano le onde elettromagnetiche all'interno della fibra si procede con l'analisi dei campi all'interno della fibra, considerando un *cladding* illimitato. Partendo dall'equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche, si impongono le stesse condizioni applicate nel caso di una guida rettangolare: riflessione totale nell'interfaccia tra *core* e *cladding* e la condizione di risonanza trasversa. Così facendo si ricava l'equazione agli autovalori generica per la fibra ottica con indice a gradino come:

$$\left(\frac{J'_q(u)}{uJ_q(u)} + \frac{K'_q(w)}{wK_q(w)}\right) \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{J'_q(u)}{uJ_q(u)} + \frac{K'_q(w)}{wK_q(w)}\right) = q^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \quad (2.52)$$

Dove  $J_q$  è una funzione di Bessel<sup>1</sup> del primo tipo e di ordine  $q$ ,  $K_q$  è una funzione di Bessel modificata e  $q$  è un numero intero. Inoltre:

$$u = a\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \quad (2.53)$$

$$w = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \quad (2.54)$$

Dove  $a$  è il raggio della fibra. Questa equazione permette di ricavare i possibili modi di propagazione. Al caso  $q = 0$  corrisponde la famiglia dei modi  $TE_{0m}$  e  $TM_{0m}$ , dove  $q$  rappresenta l'ordine del modo.  $m$  è il rango del modo ed è sempre maggiore o uguale ad

<sup>1</sup>Le funzioni di Bessel sono una famiglia di soluzioni di equazioni differenziali utili per l'analisi di problemi che coinvolgono simmetrie cilindriche o sferiche.

uno. Ad ogni valore di  $m$  corrisponde un solo valore di  $u$ ,  $w$  e  $\beta$ , così come nella guida rettangolare ad ogni valore di  $m$  corrisponde un valore di  $k_{x1}$ ,  $\gamma_2$  e  $\beta$ . Nel caso  $q \neq 0$  il modo risultante è ibrido ed è del tipo  $HE_{qm}$  o  $EH_{qm}$ . Una grandezza molto utilizzata nell'ambito della fibra ottica è l'indice di rifrazione efficace, definito da:

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} \tag{2.55}$$



# Capitolo 3

## Metodi ottici

### 3.1 Metodo deviazione minima

Il metodo della deviazione minima, vedi figura 3.1, è molto utilizzato in laboratorio per via della sua facilità di esecuzione e accuratezza. Esso consiste nell'illuminare un prisma, realizzato con il materiale da analizzare, con un raggio di luce collimato e misurare l'angolo minimo per cui avviene la deviazione del raggio. Una volta misurato questo angolo, detto di deviazione minima, si può risalire all'indice di rifrazione del materiale che costituisce il prisma. Se si desidera analizzare liquidi o gas, basta riempire un prisma di un materiale otticamente piatto con il fluido di interesse [13, 15]. Grazie a questo metodo è possibile effettuare misurazioni con un'accuratezza che raggiunge la sesta cifra decimale, a seconda della strumentazione utilizzata per la misura dell'angolo di deviazione minima [10]. Procedendo ora con l'analisi del metodo, è importante ricordare che si assume nulla qualsiasi forma di assorbimento. Tuttavia questa approssimazione non porta a grossi errori di misurazione dato che il contributo dovuto all'assorbimento è molto piccolo e viene quasi sempre trascurato [10].

In figura 3.1, un raggio di luce che viaggia attraverso l'aria ( $n \approx 1$ ) colpisce una faccia di un prisma con indice di rifrazione  $n$  e angolo al vertice  $\varphi$ . Siano  $\theta_i^{(in)}$  e  $\theta_t^{(in)}$  rispettivamente l'angolo di incidenza del raggio e il rispettivo angolo di rifrazione. Sia  $\theta_i^{(out)}$  l'angolo di incidenza del raggio trasmesso sulla seconda faccia del prisma e  $\theta_t^{(out)}$  il conseguente angolo di rifrazione e sia  $\psi$  l'angolo di deviazione. Da semplici considerazioni geometriche si ottiene:

$$\varphi = \theta_i^{(out)} + \theta_t^{(in)} \quad (3.1)$$

$$\psi = \theta_i^{(in)} + \theta_t^{(out)} - \varphi \quad (3.2)$$

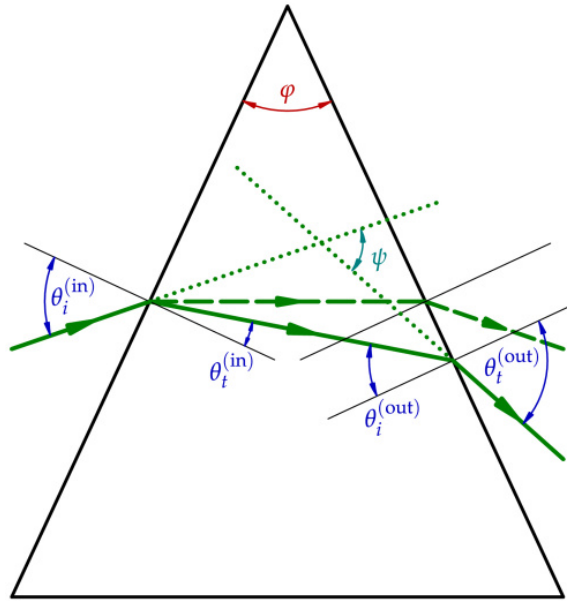


Figura 3.1: Metodo della deviazione minima (immagine presa da [10]).

Per l'equazione 2.29 (legge di Snell):

$$\sin \theta_i^{(in)} = n \sin \theta_t^{(in)} \quad (3.3)$$

$$n \sin \theta_i^{(out)} = \sin \theta_t^{(out)} \quad (3.4)$$

Quando l'angolo di deviazione  $\psi$  è minimo vale [16]:

$$\theta_i^{(in)} = \theta_t^{(out)} \quad (3.5)$$

E di conseguenza per la 3.3 e la 3.4:

$$\theta_i^{(out)} = \theta_t^{(in)} \quad (3.6)$$

Sotto queste ultime due condizioni, ovvero nel caso in cui  $\psi$  è minimo, ricombinando la 3.1 e la 3.2 e sostituendo nella 3.3 si ottiene l'espressione per ricavare l'indice di rifrazione del prisma:

$$n = \frac{\sin[(\varphi + \psi^{min})/2]}{\sin(\varphi/2)} \quad (3.7)$$

La cui unica incognita è l'angolo di deviazione minima, dato che  $\varphi$  è noto. Un modo per trovare  $\psi^{min}$  è quello di cambiare l'angolo di incidenza del raggio, ruotando il prisma o la sorgente luminosa, finché non si trova il punto esatto in cui avviene la riflessione totale interna del raggio. Infine non resta che misurare  $\theta_i^{(in)}$  e ricavare  $\psi^{min}$  con la 3.2.

Solitamente viene impiegato uno spettrometro per prismi quando si utilizza questo metodo. Per trovare gli angoli  $\theta_i^{(in)}$  e  $\psi^{min}$  con questo strumento basta ruotare il prisma fino

a che il raggio cambia direzione [13, 14]. Sono comunque possibili altri arrangiamenti sperimentali, come ad esempio quello proposto da Waldenstrøm *et al.* [11] in cui viene utilizzata una lampada al tungsteno come sorgente di luce, una fenditura regolabile, una lente plano-convessa e una piattaforma sulla quale viene posto il prisma. Inoltre presentano una diversa soluzione analitica per ricavare l'indice di rifrazione del prisma. Da considerazioni geometriche, se si impone l'angolo di incidenza  $\theta_i^{(in)}$  uguale all'angolo al vertice  $\varphi$ , risulta che  $\theta_i^{(out)}$  sia uguale all'angolo di deviazione  $\psi$ . Per la legge di Snell e la 3.1 si può dire che:

$$\sin(\varphi) = n \sin(\varphi - \theta_i^{out}) \quad (3.8)$$

$$n \sin(\theta_i^{out}) = \sin(\psi) \quad (3.9)$$

Da queste due ultime relazioni si ricava l'espressione per l'indice di rifrazione del prisma come:

$$n = \sqrt{\sin^2(\psi) + [1 + \sin(\psi) \cot(\varphi)]^2} \quad (3.10)$$

Questo metodo è stato utilizzato da Chandra *et al.* [12] per misurare l'indice di rifrazione dei liquidi con  $1.2 < n < 1.6$  e presenta una curva indice di rifrazione-angolo di deviazione più lineare rispetto a quella ottenuta nel modo più classico.

## 3.2 Interferometro di Michelson

L'interferometro di Michelson, rappresentato schematicamente in figura 3.2, è uno strumento utilizzato in spettroscopia che si basa sul principio dell'interferenza. Questo fenomeno ha luogo quando due onde si sovrappongono. Quando questo avviene, i contributi di ciascuna onda si sommano e, a seconda della loro fase relativa, possono aumentare l'ampiezza dell'onda risultante (interferenza costruttiva) o diminuirla (interferenza distruttiva). Quindi l'interferometro sfrutta la sovrapposizione tra due raggi di luce per visualizzare dei motivi di interferenza circolari o frange. La sua capacità di produrre frange di interferenza di alto ordine lo rende uno strumento molto sensibile a piccoli spostamenti e, tra le varie applicazioni, può essere impiegato per la misura dell'indice di rifrazione [17].

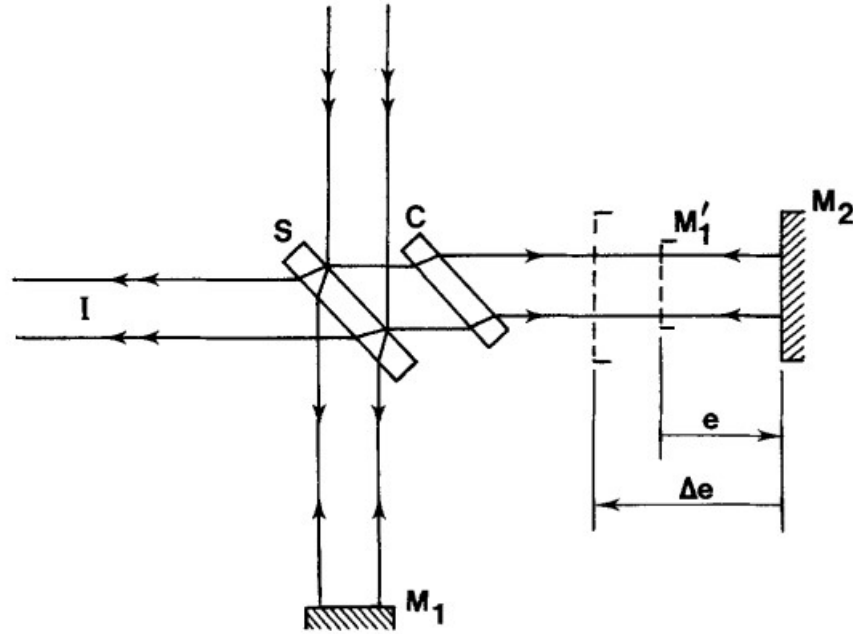


Figura 3.2: Interferometro di Michelson (immagine presa da [17]).

L'interferometro è costituito da due specchi ad alta riflettanza  $M_1$  e  $M_2$ , un *beam splitter* (S) e una lastra di compensazione (C). Inoltre è utile identificare  $M'_1$  come l'immagine virtuale di  $M_1$  nel ramo di  $M_2$  e anche  $e$  come la distanza tra  $M'_1$  e  $M_2$ . Un raggio di luce che incontra il *beam splitter* viene per metà riflesso su  $M_2$  e per metà rifratto su  $M_1$ . I raggi di luce divisi vengono completamente riflessi dai due specchi, poi si ricombinano incontrando per la seconda volta il *beam splitter*, interferendo tra loro e dando forma a delle frange di interferenza circolari. Il passaggio tra due frange di massimo di interferenza costruttiva (chiare) è legato al differente cammino ottico percorso dai due raggi di luce dalla seguente relazione [19]:

$$\Delta N = m\lambda \quad (3.11)$$

Dove il primo termine indica la differenza di percorsi ottici e  $m$  è un numero intero che rappresenta l'ordine delle frange. Se si sposta  $M_2$ , ovvero se varia  $e$  di una quantità  $\Delta e$ , il cammino ottico dei due rami dell'interferometro varia e quindi si osserva un movimento delle frange: ad esempio, se si avvicina  $M_2$  al *beam splitter* di una lunghezza pari ad una lunghezza d'onda, ovvero  $\Delta e = \lambda$ , per la 3.11 le frange chiare si muovono prendendo il posto delle frange chiare subito successive. Viceversa, se si osserva il medesimo movimento di frange, allora  $M_2$  è stato spostato di una quantità pari ad una lunghezza d'onda. Per misurare l'indice di rifrazione di un materiale utilizzando l'interferometro di Michelson è necessario collocare una lastra del materiale di interesse all'interno di uno dei due rami dell'interferometro, ortogonalmente alla direzione di propagazione del rag-



gio di luce. Poi, ruotando la lastra attraverso un piatto girevole, si impone una differenza di cammini ottici tra i due rami che si traduce in un movimento delle frange di interferenza. Contando queste frange è possibile risalire all'indice di rifrazione della lastra. Nello specifico si segue il metodo sperimentale proposto da Fendley *et al.* [18].

Innanzitutto una lastra di spessore  $d$  e indice di rifrazione  $n$  viene collocata in un ramo dell'interferometro, sopra ad un piatto girevole, vedi figura 3.3.

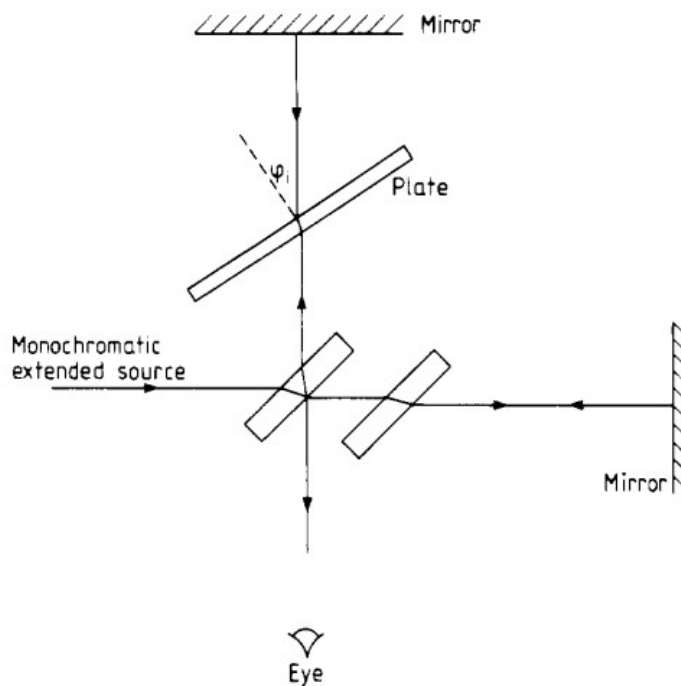


Figura 3.3: Interferometro di Michelson con una lastra inserita in un ramo (immagine presa da [18]).

Il raggio di luce che attraversa quel ramo incide sulla lastra con un angolo  $\varphi_i$ . Lo sfasamento che il raggio subisce attraversando la lastra, vedi figura 3.4, è:

$$\phi_1 = \frac{2\pi n \overline{PQ}}{\lambda} = \frac{2\pi n d}{\lambda \cos(\varphi_r)} \quad (3.12)$$

Dove  $\varphi_r$  è l'angolo di rifrazione, dato dalla legge di Snell 2.29 e  $\overline{PQ}$  è il tratto percorso dal raggio di luce nella lastra. Il raggio che viaggia lungo il ramo senza lastra passa attraverso un tratto d'aria  $\overline{PS}$  e riceve uno sfasamento di:

$$\phi_2 = \frac{2\pi n \overline{PS}}{\lambda} = \frac{2\pi d \cos(\varphi_i - \varphi_r)}{\lambda \cos(\varphi_r)} \quad (3.13)$$

Pertanto la differenza di sfasamento tra i due rami dovuta dalla presenza della lastra è pari a:

$$\Delta\phi = 2 \left( \frac{2\pi nd}{\lambda \cos(\varphi_r)} - \frac{2\pi d \cos(\varphi_i - \varphi_r)}{\lambda \cos(\varphi_r)} \right) \quad (3.14)$$

Il fattore 2 è presente perché il raggio attraversa la lastra due volte.

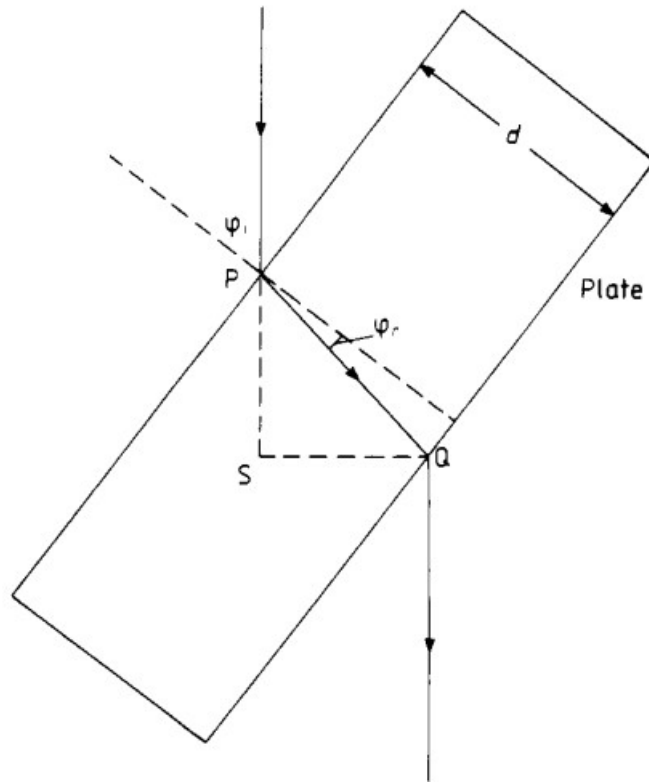


Figura 3.4: Raggio di luce attraverso la lastra (immagine presa da [18]).

Quando il raggio è ortogonale alla lastra  $\varphi_i = \varphi_r = 0$  e quindi:

$$\Delta\phi_0 = 2 \left( \frac{2\pi nd}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda} \right) \quad (3.15)$$

Ruotando la lastra di un angolo  $\varphi_i$  dalla direzione normale, si ottiene un cambiamento di differenza di fase di  $\Delta\phi - \Delta\phi_0$ . Se questo corrisponde a  $m$  frange, allora per la 3.11  $\Delta\phi - \Delta\phi_0 = 2\pi m$  e inoltre:

$$m = \frac{2d}{\lambda} \left[ n \left( \frac{1}{\cos(\varphi_r)} - 1 \right) + 1 - \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_r)}{\cos(\varphi_r)} \right] \quad (3.16)$$

Che permette di ricavare lo spessore  $d$  se si conoscono  $m$ ,  $\varphi_i$  e  $n$ . Tuttavia, essendo  $\varphi_r$  dipendente da  $n$ , non è possibile ricombinare la 3.16 per ottenere un'espressione diretta dell'indice di rifrazione. Con l'utilizzo di un programma di calcolo è possibile ricavare

una soluzione per iterazioni, trovando il valore di  $n$  per cui

$$\left| m - \frac{2d}{\lambda} \left[ n \left( \frac{1}{\cos(\varphi_r)} - 1 \right) + 1 - \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_r)}{\cos(\varphi_r)} \right] \right| \quad (3.17)$$

raggiunge il valore minimo. Ripetendo l'iterazione per diversi  $\varphi_i$  e corrispondenti  $m$  è possibile ottenere un valore medio di  $n$ . In figura 3.5, è riportato lo *script* di una funzione di Matlab che permette di trovare il minimo della 3.17. I parametri iniziali della funzione sono il numero di frange  $m$ , l'angolo di incidenza  $\varphi_i$  (in radianti), la lunghezza d'onda del raggio dell'interferometro, lo spessore della lastra e la cifra decimale di riferimento per il valore restituito della funzione, ovvero l'indice di rifrazione.

```

1 function [n] = refractive_index(m, phii, lambda, d, sig_dig)
2     Modules_vector=[];
3     step = 10^-(sig_dig+1);
4     for i = step/100 : step : 3
5         phir = asin(sin(phii)/i);
6         x = m - 2*d/lambda*( i*(1/cos(phir) -1) +1 -cos(phii-phir)/cos(
7             phir));
8         module = abs(x);
9         Modules_vector = [Modules_vector,module];
10    end
11    [~, n_position] = min(Modules_vector);
12    n = n_position*step;

```

Figura 3.5: Codice Matlab di una funzione che trova il valore minimo della 3.17.

Una spiegazione più completa del codice è riportata in appendice A. Nella tabella 3.1 vengono riportati i valori di  $n$  calcolati attraverso la funzione in figura 3.5 con  $d = 1.025$  mm e  $\lambda = 546.2$  nm. Per trovare la posizione iniziale della lastra ( $\varphi_i = 0$ ) bisogna ruotare la lastra di una piccola quantità, poi ritornare alla posizione precedente e osservare il punto in cui le frange cambiano direzione. Quindi, grazie a questo metodo, conoscendo lo spessore  $d$  e il numero di frange  $m$  che corrisponde ad una rotazione  $\varphi_i$  della lastra, è possibile misurare l'indice di rifrazione della stessa.

Un altro modo per ricavare l'indice di rifrazione è stato dimostrato da McKee *et al.* [19] seguendo una preparazione sperimentale identica a quella del metodo precedente, ma con un approccio analitico diverso. Una lastra del materiale di interesse è posta in un ramo dell'interferometro come in figura 3.3. Ruotando di un angolo  $\varphi_i$  la lastra si induce un movimento delle frange dato dalla 3.11:

$$\Delta N = m\lambda \quad (3.18)$$

Dove il primo termine indica la differenza dei percorsi ottici tra i due rami e  $m$  è il numero di frange che superano il punto di osservazione. La figura 3.6 mostra sia il variare della

distanza tra la lastra e il *beam splitter* ( $x_1$  in figura), sia il variare tra la distanza tra la lastra e lo specchio ( $x_2$  in figura) al variare di  $\varphi_i$ .

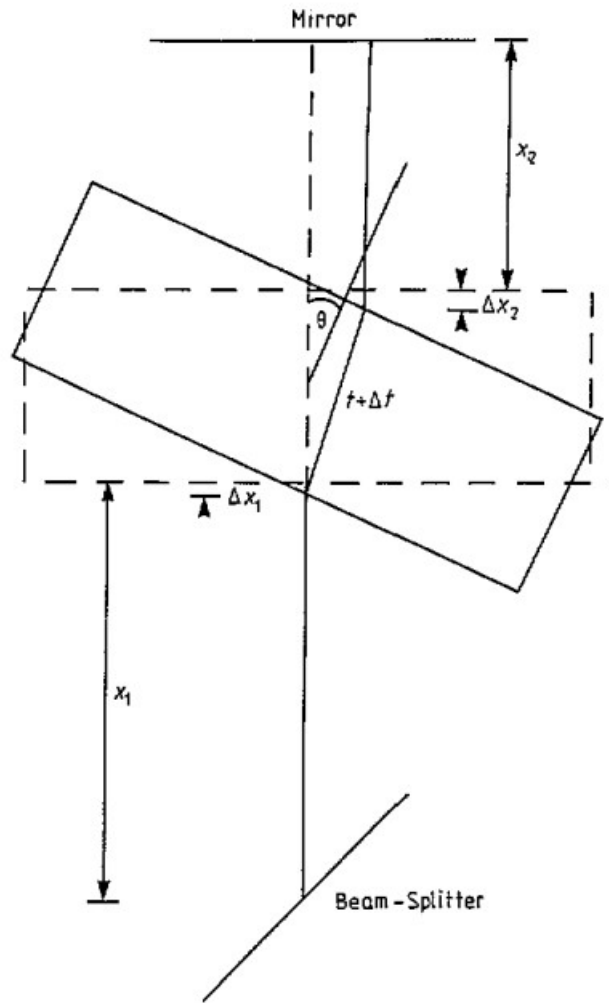


Figura 3.6: Lastra che viene ruotata nell'interferometro (immagine presa da [18]).

Da considerazioni geometriche si può stabilire che:

$$\Delta x_1 = \frac{d}{2} \left( \frac{1}{\cos(\varphi_i)} - 1 \right) \quad (3.19)$$

$$\Delta d = d \left( \frac{1}{\cos(\varphi_r)} - 1 \right) \quad (3.20)$$

$$\Delta x_2 = d \sin^2(\varphi_i) \left( 1 - \frac{1}{n \cos(\varphi_r)} \right) - \Delta x_1 \cos(2\varphi_i) \quad (3.21)$$

Inoltre si può dimostrare che la differenza dei percorsi ottici è pari a:

$$\Delta N = 2(-\Delta x_1 + n\Delta d + \Delta x_2) \quad (3.22)$$

Sostituendo le equazioni 3.18, 3.19, 3.20, 3.21 nella 3.22, si ottiene l'espressione dell'indice di rifrazione della lastra:

$$n = 1 + \frac{m^2 \lambda^2 / 4 + m \lambda d \cos(\varphi_i)}{2d^2(1 - \cos(\varphi_i)) - m \lambda d} \quad (3.23)$$

Come per la 3.17, anche per la 3.23 è necessario effettuare più misurazioni per diversi valori di  $\varphi_i$  e quindi  $m$  per ottenere un valore medio di  $n$ . Inoltre la tabella 3.1 mostra che i valori ottenuti con i due metodi sono molto simili.

$m$	$\varphi_i$	Valori di $n$ ottenuti da Fendley <i>et al.</i>	Valori di $n$ ottenuti con la funzione in figura 3.5	Valori di $n$ ottenuti con la 3.23
20	10.4°	1.474	1.4736	1.4735
40	14.7°	1.470	1.4697	1.4696
60	17.9°	1.473	1.4733	1.4732
80	20.6°	1.473	1.4735	1.4734
100	22.9°	1.477	1.4774	1.4773
120	24.8°	1.490	1.4903	1.4902
140	26.7°	1.491	1.4908	1.4907
160	28.6°	1.483	1.4830	1.4829
180	30.2°	1.485	1.4855	1.4854
200	31.6°	1.493	1.4929	1.4928

Tabella 3.1: Diversi valori di  $n$  al variare di  $m$  e  $\varphi_i$  con  $d = 1.025$  mm e  $\lambda = 546.2$  nm.

### 3.3 Rifrattometro di Abbe

Il rifrattometro di Abbe è uno strumento che si può trovare frequentemente all'interno di un laboratorio, per via della sua semplicità di utilizzo ed efficacia nel misurare l'indice di rifrazione di campioni liquidi e solidi. Questo strumento permette di misurare l'indice di rifrazione di solidi e liquidi accuratamente fino alla quarta cifra decimale [20]. Come il metodo della deviazione minima, vedi sezione 3.1, questo strumento sfrutta il fenomeno della riflessione totale per ricavare l'indice di rifrazione del campione posto al suo interno. Il rifrattometro di Abbe è costituito da due prismi di vetro, vedi figura 3.7, uno detto di illuminazione e uno detto di misurazione, tra i quali viene collocato un campione del materiale da analizzare, sia esso solido o liquido.

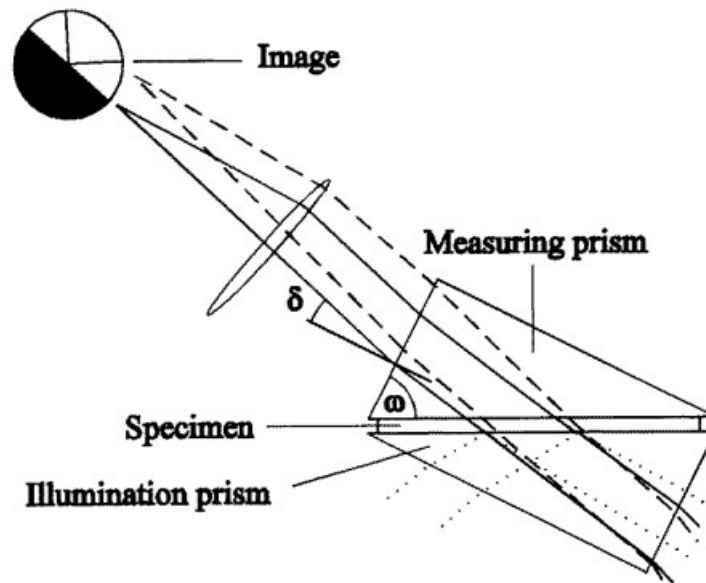


Figura 3.7: Principio di funzionamento del rifrattometro di Abbe (immagine presa da [20]).

La luce incontra l'interfaccia tra il prisma di illuminazione e il campione con diverse angolazioni. Se l'angolo di incidenza è superiore a quello critico, il raggio di luce viene totalmente riflesso e la luce non viene trasmessa al campione (linee punteggiate in figura 3.7). Altrimenti la luce attraversa il prisma di misurazione, una lente di focalizzazione e forma un'immagine visibile tramite l'oculare dello strumento (linee spezzate). Perché questo avvenga, l'indice di rifrazione del campione deve essere minore di quello del prisma, per via dell'equazione 2.38. In corrispondenza dell'angolo  $\delta$  di transizione tra trasmissione e riflessione totale, l'immagine mostra una linea di separazione tra una regione illuminata e una buia (linee piene). Posizionando il reticolo visibile con l'oculare sulla linea di separazione è possibile assegnare un valore all'indice di rifrazione del campione attraverso una scala numerica. Per la natura dello strumento, i valori di indice di rifrazione ottenuti con il rifrattometro si riferiscono sempre alla temperatura di  $20^{\circ}\text{C}$  e alla lunghezza d'onda di  $589.3\text{ nm}$ . La dipendenza dell'indice di rifrazione dalla temperatura, finché la variazione rimane in un intervallo di  $13^{\circ}\text{C}$ , può essere trascurata, dato che per il vetro che costituisce i prismi (SF 13),  $dn/dT = 7.5 \times 10^{-6}\text{C}^{-1}$  [21]. Per quanto riguarda la lunghezza d'onda non si possono trascurare gli effetti della dispersione. In entrambi i casi i fornitori del rifrattometro mettono a disposizione delle tavole di correzione che coprono lo spettro del visibile, grazie alle quali è possibile correggere il valore ottenuto nelle condizioni di  $20^{\circ}\text{C}$  e  $589.3\text{ nm}$  al valore nelle condizioni d'interesse.

### 3.4 Sensori a fibra ottica

I sensori a fibra ottica sono strumenti che permettono di analizzare con altissima sensibilità variazioni di molte quantità fisiche come lunghezza, temperatura e pressione, anche

contemporaneamente [22]. Trattandosi di una tipologia di sensori innovativa e in via di sviluppo, è possibile trovare in letteratura numerosi design della stessa tipologia di sensore, ciascuno con proprietà e quindi applicazioni diverse. Tra i vari tipi di sensori a fibra ottica esistenti vengono presentati i più discussi: i sensori a fibra ottica a reticolo, in particolare quelli a reticolo di Bragg (*fiber Bragg gratings* o FBG) e i sensori a fibra ottica interferometrici, più precisamente quelli prodotti sul modello dell'interferometro di Mach-Zehnder e Fabry-Pérot.

### 3.4.1 Sensori interferometrici: modello Mach-Zehnder

Questa tipologia di sensori a fibra ottica, che si basa sulla struttura dell'interferometro di Mach-Zehnder [23], permette di rilevare variazioni di quantità fisiche con alta sensibilità. L'interferometro di Mach-Zehnder, vedi figura 3.8, è uno strumento sensibile alla differenza di cammini ottici tra due raggi di luce e, come l'interferometro di Michelson, permette di visualizzare frange di interferenza. Un raggio emesso da una sorgente viene diviso da

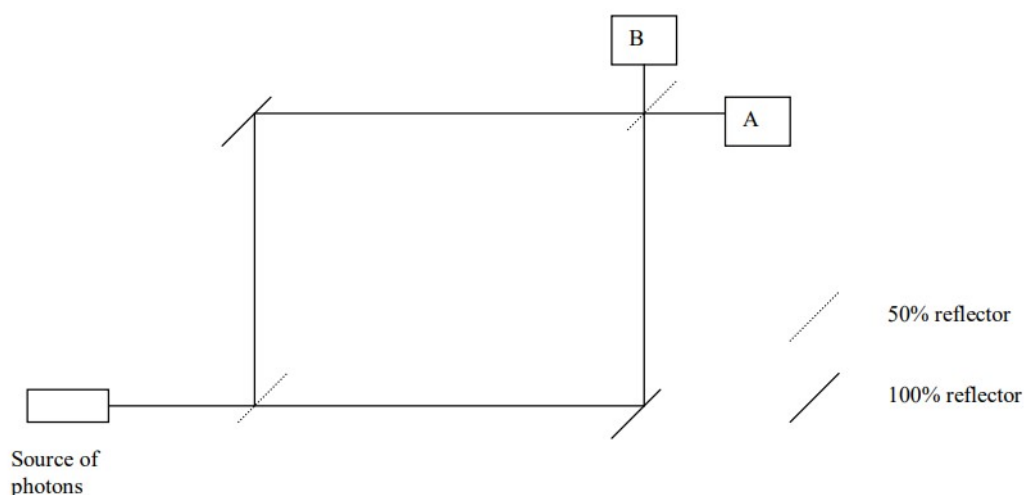


Figura 3.8: Interferometro di Mach-Zehnder (immagine presa da [23]).

un *beam splitter* in due raggi che poi incontrano un secondo *beam splitter*, grazie al quale è possibile rilevare due motivi di interferenza. La differenza sostanziale rispetto all'interferometro di Michelson, con cui condivide molte analogie, è che i raggi divisi dal primo *beam splitter* non vengono riflessi sullo stesso *beam splitter*, ma vengono riflessi verso un altro *beam splitter*. Pertanto l'interferometro di Mach-Zehnder è sensibile allo sfasamento di due raggi di luce i cui cammini ottici sono paralleli, a differenza di quello di Michelson in cui i percorsi ottici sono perpendicolari. Nel caso delle fibre ottiche, è più facile trovare applicazioni per sensori che si basano sull'interferometro di Mach-Zehnder proprio per questa sua caratteristica strutturale. Un sensore prodotto sul modello di questo interferometro è proposto da Jianghai *et al.* [24]. Mostrato in figura 3.9, una sorgente a banda larga (BBS), che nel caso riportato opera a 1550 nm con una banda larga 100

nm, viene lanciata all'interno di una fibra ottica che si biforca in corrispondenza di un accoppiatore 1:1. In seguito, questi due rami si ricombinano nel secondo accoppiatore e mediante un analizzatore di spettro ottico (OSA) è possibile visualizzare l'uscita del sistema. Il ramo superiore è caratterizzato dalla presenza di un ODL (*optical delay line*) che permette di ritardare il segnale ottico variando il cammino ottico della fibra. Il ramo inferiore è posto all'interno di una soluzione liquida da analizzare.

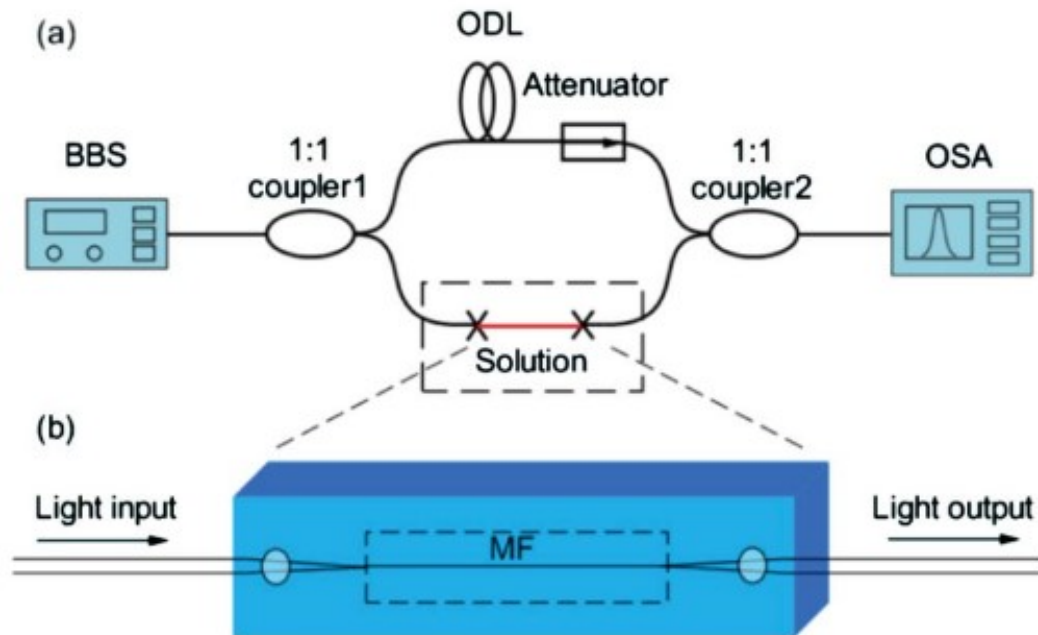


Figura 3.9: (a) apparato sperimentale che riproduce l'interferometro di Mach-Zehnder, (b) ramo di misurazione all'interno della soluzione (immagine presa da [24]).

L'ambiente esterno provoca una variazione di indice di rifrazione efficace nella fibra che corrisponde ad uno sfasamento. Lo sfasamento dovuto al cambiamento di indice di rifrazione dell'ambiente è pari a:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta N_{SA} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_{eff} L \quad (3.24)$$

Dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda emessa dal BBS,  $\Delta N_{SA}$  è la variazione del cammino ottico del ramo di misurazione,  $n_{eff}$  è l'indice di rifrazione efficace della fibra e  $L$  la sua lunghezza. Inoltre l'FSR (*free spectral range*) ottenibile dall'OSA è dato da:

$$FSR = \Delta\lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta N} \quad (3.25)$$

Dove  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono due lunghezze d'onda a cui corrispondono due massimi o minimi adiacenti e  $\Delta N$  è la differenza tra i cammini ottici dei due rami dell'interferometro. La variazione di  $\Delta N$  causata dal cambiamento di indice di rifrazione dell'ambiente si può



ottenere come:

$$d(\Delta N) = \Delta n_{eff}L - n_1\Delta L_1 \quad (3.26)$$

Dove  $n_1$  e  $\Delta L_1$  sono rispettivamente l'indice di rifrazione e il ritardo dell'ODL. Per ricavare  $\Delta n_{eff}$  inizialmente si impone una certa differenza di cammini ottici a cui corrisponde un valore dell'FSR, in seguito viene fatto variare l'indice di rifrazione e si registra un nuovo valore dell'FSR. Infine si riporta l'FSR al valore originale modificando il ritardo dell'ODL e dalla 3.26 si ottiene  $\Delta n_{eff}$ . Per ottenere  $n$  basta ricordare che è legato a  $n_{eff}$  dalla 2.52. Questo sensore è stato sperimentato su soluzioni liquide il cui indice di rifrazione variava tra 1.33 a 1.37 alla temperatura di 20°C. L'accuratezza del sensore raggiunge la quinta cifra decimale.

Un altro sensore, dimostrato da Zhaobing *et al.* [25], si può ottenere con il *tapering* di una fibra monomodale, cioè con un affusolamento del diametro della fibra. Il sensore si presenta come in figura 3.10 ed esibisce un comportamento assimilabile a quello di un interferometro di Mach-Zehnder: quando un raggio di luce che attraversa la fibra incontra il primo restringimento, parte dell'energia viene trasferita nel *cladding* e, se incontra un'altra struttura affusolata entro pochi centimetri, la stessa energia può essere accoppiata di nuovo nel *core*, trascurando le dispersioni. Dato lo sfasamento che il raggio incontra attraversando il *cladding*, i due raggi ricombinandosi danno vita a picchi di interferenza.

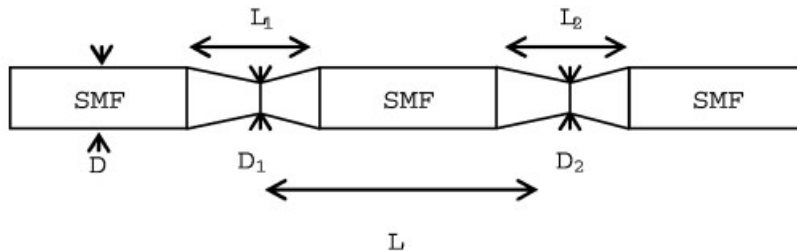


Figura 3.10: Struttura del sensore (immagine presa da [25]).

La differenza di fase tra i due raggi è:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta n_{eff}L \quad (3.27)$$

Dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda emessa dalla sorgente, in questo caso un BBS (1520–1610 nm),  $\delta n_{eff}$  è la differenza dell'indice di rifrazione efficace del *core* e del *cladding* e  $L$  la lunghezza del sensore. Lo spettro di interferenza viene interpretato da un OSA e le lunghezze d'onda a cui corrispondono i massimi di attenuazione  $\lambda_m$  sono caratterizzate da:

$$\Delta\phi = (2m + 1)\pi \quad (3.28)$$

Con  $m$  numero intero. Se ad esempio l'indice di rifrazione all'esterno della fibra aumenta,  $\delta n_{eff}$  varierà di una quantità  $\Delta n_{eff}$  e, per la 3.27 e la 3.28,  $\lambda_m$  diminuirà di:

$$\Delta \lambda_m \approx 2\pi L \Delta n_{eff} \quad (3.29)$$

Dalla variazione  $\Delta \lambda_m$  è possibile risalire con la 3.29 all'indice di rifrazione dell'ambiente in cui è immerso il sensore. Con la configurazione di figura 3.10, sono stati prodotti tre sensori con:  $L_1 = 707 \mu\text{m}$ ,  $D_1 = 40 \mu\text{m}$  e  $L = 24 \text{ mm}$ ,  $36 \text{ mm}$  e  $55 \text{ mm}$  con sensibilità alla variazione di indice di rifrazione che arriva alla quarta cifra decimale.

### 3.4.2 Sensori interferometrici: modello Fabry-Férot

Questa tipologia di sensori fa riferimento all'interferometro di Fabry-Perot, vedi figura 3.11, uno strumento che grazie all'interferenza di raggi multipli permette di visualizzare frange di interferenza.

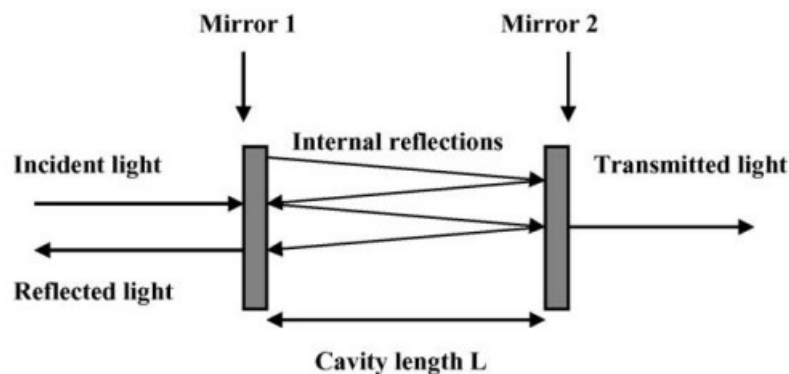


Figura 3.11: Interferometro di Fabry-Pérot (immagine presa da [28]).

L'interferometro è composto da due specchi, entrambi semi-riflettenti oppure uno totalmente riflettente e l'altro semi-riflettente, posti ad una certa distanza per formare una regione di spazio detta cavità. La luce che incide sul primo specchio attraversa la prima superficie e, all'interno della cavità dell'interferometro, viene riflessa in parte dal secondo specchio verso il primo. La luce riflessa in questo modo viene di nuovo riflessa dal primo specchio verso il secondo e così via. Parte della luce incidente sul secondo specchio esce dalla cavità e, focalizzando i vari raggi uscenti in un punto, è possibile visualizzare delle frange di interferenza. Le frange formate da questo interferometro sono le più nitide tra quelle visualizzabili con gli interferometri trattati precedentemente [8] e quindi permettono una maggiore risoluzione in campo di misurazione. Diversi sensori a fibra ottica vengono prodotti sullo stampo dell'interferometro di Fabry-Pérot perché offrono alta sensibilità a molte grandezze fisiche, come temperatura e deformazione, e sono facili da produrre. Grazie a queste qualità, questi dispositivi sono tra i sensori a fibra ottica

più commercializzati [26]. Esistono diversi modelli di sensori ad interferometro di Fabry-Pérot [27–31] e tra questi uno dei più semplici è quello proposto da Gao *et al.* [28], vedi figura 3.13, utilizzato per la misura dell'indice di rifrazione dei gas. La cavità dell'interferometro è ottenuta posizionando due cavi di fibra monomodale, che fungono da specchi, ad una distanza  $L$ . In questo caso, la fibra è privata del rivestimento e ha un diametro di  $125 \mu\text{m}$ . Poi le estremità della fibra vengono lucidate e fissate con dei *ferrules* ad una distanza di  $84.859 \mu\text{m}$ . Infine attraverso una manica porosa è possibile riempire la cavità con aria o altri gas.

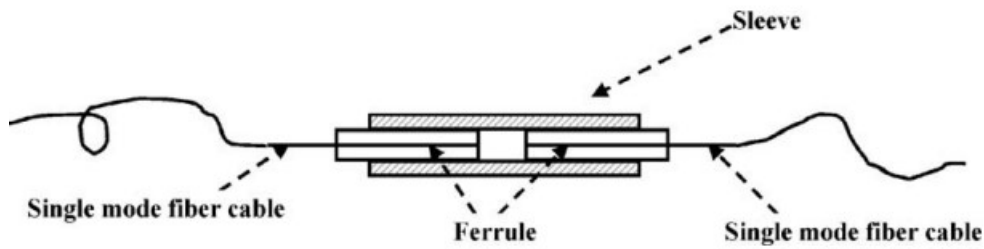


Figura 3.12: Struttura del sensore (immagine presa da [28]).

La cavità del sensore è la stessa di figura 3.11 e presenta una riflettanza  $R_{FP}$  e una trasmittanza  $T_{FP}$  pari a:

$$R_{FP} = \frac{R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(\phi)}{1 + R_1 R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(\phi)} \quad (3.30)$$

$$T_{FP} = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(\phi)} \quad (3.31)$$

Dove  $R_{FP}$  e  $T_{FP}$  sono rispettivamente il rateo della potenza riflessa e trasmessa dall'interferometro rispetto alla potenza incidente.  $R_1$  e  $R_2$  sono le riflettanze dei due specchi dell'interferometro, costituiti dalla fibra,  $T_1$  e  $T_2$  sono le trasmittanze degli specchi e  $\phi$  è lo sfasamento dovuto ad un viaggio di andata e ritorno su una parete della cavità, che vale:

$$\phi = \frac{4\pi n L}{\lambda} \quad (3.32)$$

Dove  $n$  è l'indice di rifrazione della cavità di lunghezza  $L$  e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda di input. La riflettanza degli specchi si può calcolare utilizzando l'equazione di Fresnel delle potenze 2.36:

$$R = \left( \frac{n_{fibra} - n}{n_{fibra} + n} \right)^2 \quad (3.33)$$

Dove  $n_{fibra}$  è l'indice di rifrazione della fibra, in questo caso specifico 1.4493 a 1550 nm trattandosi di una fibra di Corning SMF-28. Alla stessa lunghezza d'onda, l'indice

di rifrazione della cavità riempita di aria è pari a 1.0003. Con questi valori per la 3.33,  $R \approx 0.0336$  e, essendo  $R = R_1 = R_2 \ll 1$ , è possibile approssimare la 3.30 e la 3.31 come:

$$R_{FP} \cong 2R(1 + \cos(\phi)) \quad (3.34)$$

$$T_{FP} \cong 1 - 2R(1 + \cos(\phi)) \quad (3.35)$$

Dall'equazione 3.34 si può concludere che la riflettanza  $R_{FP}$  raggiunge il massimo quando  $\phi = 2\pi m$  con  $m$  intero e per la 3.32:

$$\phi = \frac{4\pi nL}{\lambda_m} = 2m\pi \quad (3.36)$$

Dove  $\lambda_m$  è la lunghezza d'onda corrispondente all' $m$ -esimo picco di riflessione. Riarrangiando l'equazione 3.36 si ottiene l'indice di rifrazione della cavità come:

$$n = \frac{m\lambda_m}{2L} \quad (3.37)$$

Dato che nella 3.37  $m$  e  $L$  sono costanti, misurando la variazione di  $\lambda_m$ , dovuta ad un cambiamento del gas all'interno della cavità, è possibile risalire alla variazione di indice di rifrazione della cavità:

$$\Delta n = \frac{\Delta\lambda_m}{\lambda_{m0}} n_0 \quad (3.38)$$

Dove  $\lambda_{m0}$  e  $n_0$  sono rispettivamente la lunghezza d'onda corrispondente ad un picco di riflessione e l'indice di rifrazione della cavità nel caso iniziale (*i. e.* cavità riempita d'aria). Per ricavare l'indice di rifrazione della cavità basta aggiungere  $\Delta n$  a  $n_0$ . Quindi con questo sensore è possibile ricavare l'indice di rifrazione di un gas, sostituendolo all'aria nella cavità, con risoluzione pari a  $6.45 \times 10^{-6}$ . Inoltre è possibile ricavare l'indice di rifrazione della cavità utilizzando l'FSR:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{2nL} \quad (3.39)$$

Dove  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono le lunghezze d'onda corrispondenti a due picchi di riflessione adiacenti. La 3.39 è utilizzata per calcolare l'indice di rifrazione  $n$  della cavità conoscendo  $L$  o viceversa. Seguendo questo ragionamento il sensore può essere applicato come rilevatore di tensioni meccaniche semplicemente lasciando aria nella cavità e osservando il valore dell'FSR che dipende solo da  $L$ . Se invece si desidera calcolare l'indice di rifrazione con

la 3.39 bisogna tenere a mente che la risoluzione è pari a:

$$\delta n \approx \frac{\delta \lambda \lambda_1 \lambda_2}{L(\lambda_2 - \lambda_1 + 2\delta \lambda)(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

che, nel caso di una risoluzione per le misurazioni di lunghezza d'onda  $\delta \lambda$  pari a 0.01 nm e  $L = 84.859 \mu\text{m}$ , vale  $1.4 \times 10^{-3}$ , quindi risulta più efficace utilizzare la 3.38.

Un altro sensore è stato dimostrato da Ji-Huan *et al.* [31] ed è stato utilizzato per la misura dell'indice di rifrazione del vetro ottico. Secondo la configurazione in figura 3.13, la cavità dell'interferometro è delimitata da una parte terminale di fibra ottica, che gioca il ruolo del primo specchio, e dal campione da analizzare che funge da secondo specchio.

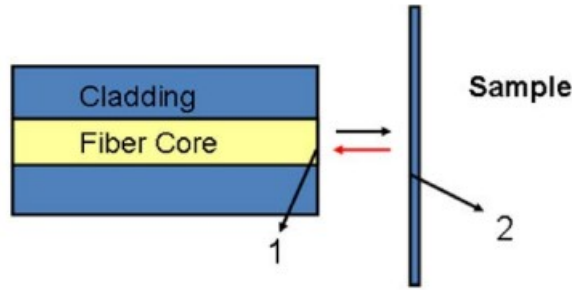


Figura 3.13: Cavità dell'interferometro (immagine presa da [29]).

I coefficienti di riflessione  $R_1$  e  $R_2$  del primo specchio (fibra) e del secondo specchio (campione) sono dati dall'equazione di Fresnel 2.36:

$$R_1 = \left( \frac{n_{fibra} - n_{aria}}{n_f + n_{aria}} \right)^2 \quad (3.40)$$

$$R_2 = \left( \frac{n_{aria} - n}{n_{aria} + n} \right)^2 \quad (3.41)$$

Il campo elettrico riflesso totale  $E_r$  è dato da:

$$E_r \approx \sqrt{R_1} E_i + (1 - A_1)(1 - R_1)(1 - \alpha) \sqrt{R_2} E_i e^{-j2\beta L + \pi} \quad (3.42)$$

Dove  $E_i$  è il campo elettrico in ingresso,  $A_1$  è il fattore di perdita di trasmissione sul primo specchio, dovuta ad imperfezioni della superficie,  $\beta$  è la costante di propagazione dell'aria e  $\alpha$  è il fattore di perdita della cavità. Inoltre è presente uno sfasamento di  $\pi$  per via della riflessione in corrispondenza di un materiale otticamente più denso. Dalle equazioni 3.40,

3.41 e 3.42 si ottiene lo spettro di riflessione come:

$$I_{FP} = \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2 = R_1 + (1 - A_1)^2(1 - R_1)^2(1 - \alpha)^2 R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2}(1 - A_1)(1 - R_1)(1 - \alpha) \cos \left( \frac{4\pi n_{aria} L}{\lambda} - \pi \right) \quad (3.43)$$

Secondo la 3.43  $I_{FP}$  raggiunge valore massimo e minimo quando:

$$\left( \frac{4\pi n_{aria} L}{\lambda_{max}} - \pi \right) = 2\pi m \quad (3.44)$$

$$\left( \frac{4\pi n_{aria} L}{\lambda_{min}} - \pi \right) = (2m + 1)\pi$$

Dove  $m$ , numero intero, rappresenta l'ordine dell' $m$ -esima frangia di interferenza e  $I_{FP}$  vale:

$$I_{FP}(\lambda_{max}) = \left[ \sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} K(1 - R_1) \right]^2 \quad (3.45)$$

$$I_{FP}(\lambda_{min}) = \left[ \sqrt{R_1} - \sqrt{R_2} K(1 - R_1) \right]^2 \quad (3.46)$$

Dove  $K = (1 - A_1)(1 - \alpha)$  è un fattore che contiene tutte le perdite del sensore. Dalla 3.45 e dalla 3.46 si ottiene il contrasto delle frange  $C$  in scala decibel come:

$$C = 10 \log_{10} \left[ \frac{I_{FP}(\lambda_{max})}{I_{FP}(\lambda_{min})} \right] = 20 \log_{10} \left[ \frac{\sqrt{R_1} + K(1 - R_1)(n - n_{aria})/(n + n_{aria})}{\sqrt{R_1} - K(1 - R_1)(n - n_{aria})/(n + n_{aria})} \right] \quad (3.47)$$

Dato che  $K$ ,  $R_1$  e  $n_{aria}$  sono costanti. Per ottenere  $K$  è sufficiente una semplice calibrazione misurando il contrasto delle frange d'interferenza  $C_0$  di un campione noto. Con la 3.47 è possibile ricavare l'indice di rifrazione di un campione conoscendo il contrasto delle frange  $C$ . Per quanto riguarda l'apparato di misurazione, la fibra viene fissata tra due lastre metalliche per formare la testa del sensore, che poi viene appoggiata sul campione da analizzare per formare la cavità dell'interferometro, vedi figura 3.14. Secondo la 3.44, per poter visualizzare almeno due picchi di interferenza, la distanza tra le due lastre deve essere maggiore di un certo valore minimo. Nel caso riportato, dove la fibra in utilizzo (Corning SMF-28) presenta un diametro di  $8.1 \mu\text{m}$  e con un BBS con una banda di 1525-1565 nm, le lastre devono essere poste ad una distanza maggiore di 0.03 mm e viene quindi scelta una distanza di 0.075 mm. La luce lanciata dal BBS entra nella cavità dell'interferometro e viene riflessa all'interfaccia aria-campione. Poi i diversi raggi di luce che si sono formati nella cavità formano un segnale di interferenza che può essere trasportato verso un OSA dalla stessa fibra ottica.

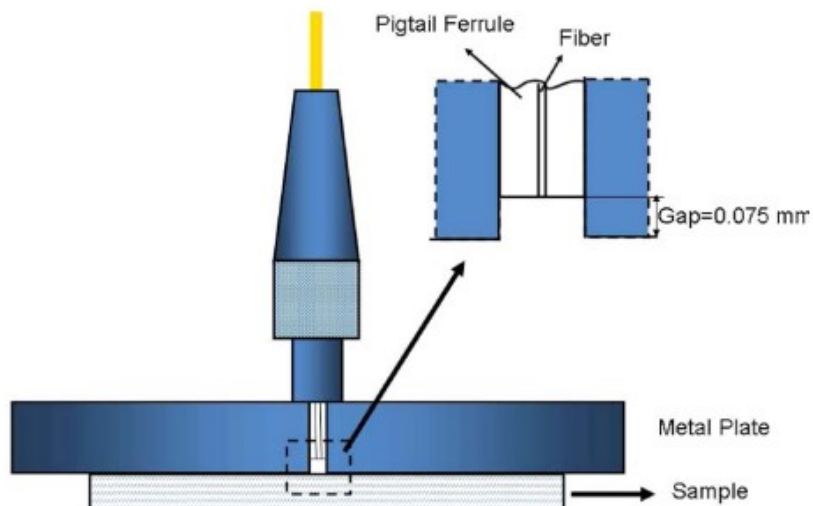


Figura 3.14: Testa del sensore (immagine presa da [29]).

Per la calibrazione iniziale viene utilizzato un campione di  $SiO_2$ , vedi figura 3.15, con una purezza del 99.999%, che ha un indice di rifrazione pari a 1.4443 alla lunghezza d'onda di 1529.52 nm. Dalla 3.47 si ottiene un valore di  $K$  pari a 0.5868. Ottenuto  $K$ , vengono analizzati tre diversi vetri ottici, BK7, SF10 e SF11, alla lunghezza d'onda di 1539.6 nm e alla temperatura di  $20^\circ C$  e si ottengono valori di indici di rifrazione molto simili a quelli già presenti in letteratura. La risoluzione di questo sensore è di circa  $3 \times 10^{-4}$ .

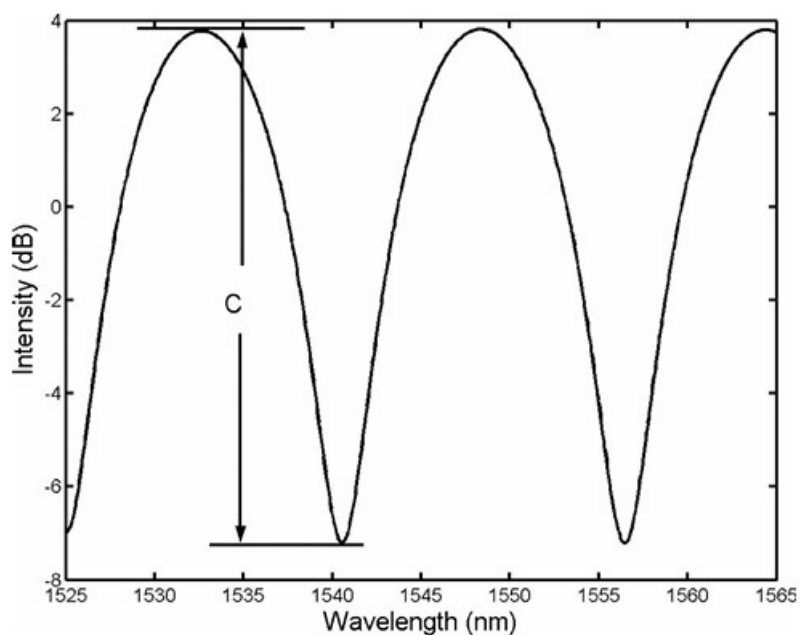


Figura 3.15: Spettro di interferenza con un campione di  $SiO_2$  e contrasto delle frange  $C$  (immagine presa da [29]).

### 3.4.3 Sensori a fibra ottica a reticolo: Fiber Bragg Gratings

I sensori a fibra ottica a reticolo sono un tipo di sensori che sfruttano una griglia per indurre una modulazione locale dell'indice di rifrazione all'interno del *core* della fibra ottica per riflettere determinate lunghezze d'onda. A questa famiglia di sensori appartengono i *fiber Bragg gratings* o FBG, i *long – period fiber grating*, i *chirped fiber grating* e i *sampled fiber grating*. Verranno analizzati solo i FBG.

Un FBG nel caso più semplice, vedi figura 3.16, è costituito da una fibra ottica monomodale all'interno della quale viene inserita una griglia di piani con periodo spaziale  $\Lambda$  e indice di rifrazione diverso da quello del *core*.

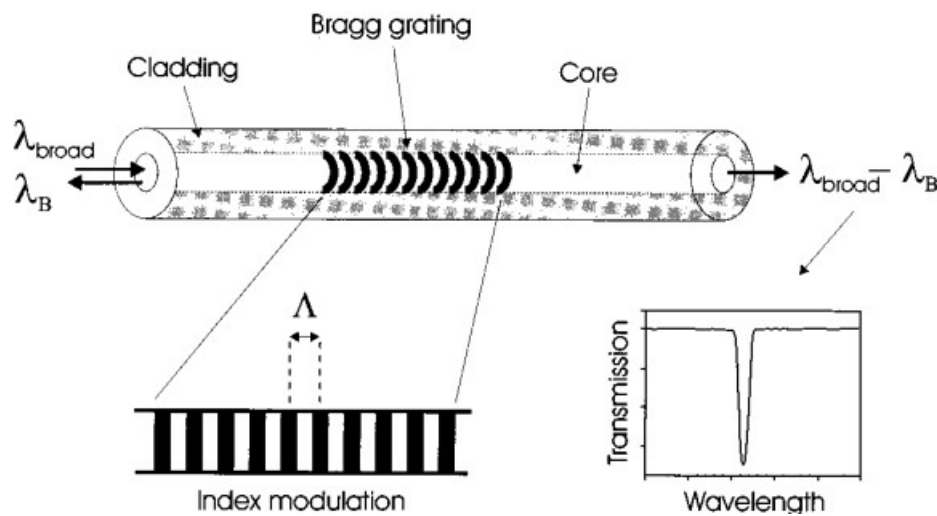


Figura 3.16: Esempio di sensore FBG, griglia per la modulazione dell'indice di rifrazione e grafico di trasmissione in funzione di  $\lambda$  (immagine presa da [32]).

La luce che viene guidata lungo la fibra interagisce con ogni piano della griglia e viene in parte riflessa. Se la luce si propaga ad una certa lunghezza d'onda  $\lambda_B$ , i vari contributi dovuti alla riflessione della luce si sommano costruttivamente nella direzione opposta a quella di propagazione. Il risultato, illustrato in figura 3.16 e 3.17, è quello di una fibra selettiva per una certa lunghezza d'onda. Imponendo la conservazione del momento e dell'energia all'interno della fibra ottica si ricava  $\lambda_B$  come [32]:

$$\lambda_B = 2n_{ef}\Lambda \quad (3.48)$$

Detta condizione di Bragg, che definisce la lunghezza d'onda che viene riflessa a causa della griglia di Bragg. Per misurare  $\lambda_B$  è necessaria un'analisi spettrale che permetta di individuare il picco di riflettività. Tipicamente questo sensore non è impiegato per la misura dell'indice di rifrazione dato che è poco sensibile all'ambiente esterno. Se però vengono ridotte le dimensioni del *cladding* è possibile rilevare variazioni di indice di rifrazione di liquidi immergendo il sensore nel liquido da analizzare.



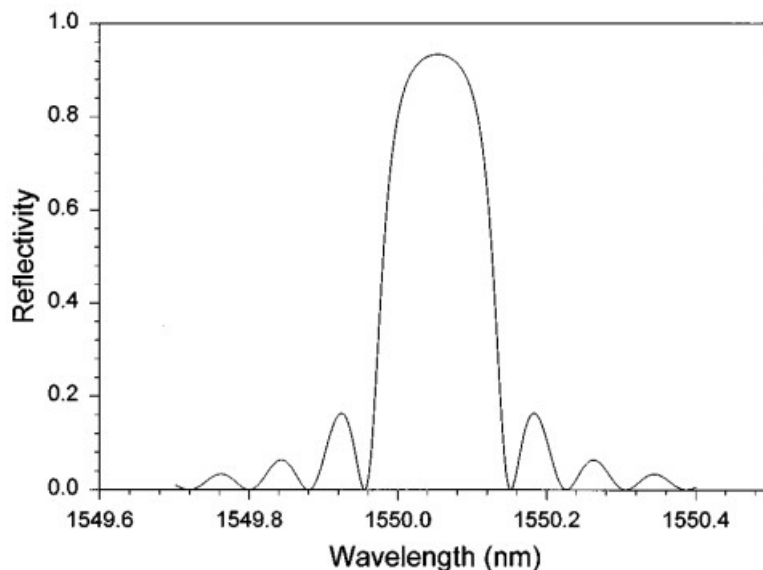


Figura 3.17: Spettro di riflessione di un FBG, si noti l'alta riflettività ad una certa lunghezza d'onda, che corrisponde a  $\lambda_B$  (immagine presa da [32]).

La struttura del sensore modificato si presenta come in figura 3.18 (b), ed è ottenibile mediante trattamenti *etching* con acido fluoridrico [33]. L'ambiente circostante ora provoca una variazione di  $\lambda_B$  dovuta alla variazione di  $n_{eff}$ .

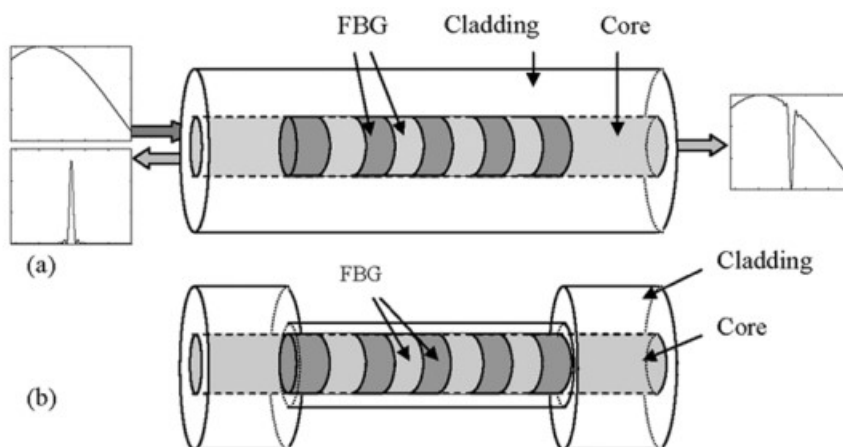


Figura 3.18: (a) sensore prima del trattamento di *etching*; (b) sensore dopo la riduzione del cladding (immagine presa da [34]).

Iadicco *et al.* [34, 35] propongono dei sensori prodotti con diverse riduzioni del *cladding* tramite *etching*. I risultati mostrano che la sensibilità del sensore all'ambiente esterno ( $d\lambda_B/n$ ), alla lunghezza d'onda di 1550 nm, aumenta con il diminuire delle dimensioni del *cladding* e la risoluzione dei sensori va tra  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$ . La dipendenza dell'indice di rifrazione efficace dal diametro del *cladding* e dall'ambiente esterno è data da [36]:

Per  $\beta < k_0 n_2$

$$\frac{[\hat{J}_m(u) - \hat{Y}_m(u'c)] [\hat{K}_m(v) - \hat{J}_m(u')]}{[\hat{J}_m(u) - \hat{J}_m(u'c)] [\hat{K}_m(v) - \hat{Y}_m(u')]} = \frac{J_{m+1}(u'c)Y_{m+1}(u')}{J_{m+1}(u')Y_{m+1}(u'c)} \quad (3.49)$$

Per  $\beta > k_0 n_2$

$$\frac{[\hat{J}_m(u) - \hat{K}_m(v'c)] [\hat{K}_m(v) + \hat{I}_m(v')]}{[\hat{J}_m(u) - \hat{I}_m(v'c)] [\hat{K}_m(v) - \hat{K}_m(v')]} = \frac{I_{m+1}(v'c)K_{m+1}(v')}{I_{m+1}(v')K_{m+1}(v'c)} \quad (3.50)$$

Con

$$u = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad (3.51)$$

$$u' = b\sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} \quad (3.52)$$

$$v = b\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} \quad (3.53)$$

$$v' = b\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \quad (3.54)$$

Dove  $c = a/b$  è il rapporto tra il raggio del *core* e del *cladding* e

$$\hat{Z}_m(x) = \frac{Z_m(x)}{xZ_{m+1}(x)} \quad (3.55)$$

$Z$  rappresenta le funzioni di Bessel  $J$ ,  $Y$ ,  $I$ , e  $K$ . Le equazioni di dispersione 3.49 e 3.50 sono ottenute considerando un modello di fibra a tre strati con indice di rifrazione  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n$  e richiedono una risoluzione numerica.

# Capitolo 4

## Metodi a confronto

In questo capitolo vengono elencati i vantaggi e gli svantaggi dei metodi per la misura dell'indice di rifrazione descritti nel capitolo precedente. Inoltre viene discussa l'applicabilità di questi all'esperimento di PIV affrontato nel capitolo 1.

### Sul metodo della deviazione minima

Il metodo della deviazione minima è un metodo molto utilizzato in laboratorio per via della sua versatilità. Infatti è sufficiente munirsi di un prisma, una sorgente ottica adeguata e un goniometro per poter misurare autonomamente l'indice di rifrazione di solidi, liquidi e anche gas. Tuttavia la precisione del metodo risente molto della strumentazione utilizzata per la misura dell'angolo di deviazione. Ad esempio, se si vuole ottenere un'incertezza sulla misura dell'indice di rifrazione di  $\pm 10^{-4}$  con un prisma con angolo al vertice  $\varphi = 40^\circ$ , è necessario conoscere l'angolo di deviazione  $\psi$  ad almeno  $12''$  [14]. Per questo motivo viene preferito l'utilizzo di uno spettrometro per prismi, anche se il metodo può essere comunque adoperato con approcci sperimentali diversi [11, 12]. Inoltre, se si desidera analizzare materiali difficili da lavorare, possono nascere problemi sulla manifattura del prisma. Detto questo, il metodo della deviazione minima risulta molto compatibile con l'esperimento di PIV: il prisma per la misurazione dell'indice di rifrazione del condotto è ottenibile tramite stampaggio 3D [6] e per misurare l'indice di rifrazione della soluzione liquida è sufficiente munirsi di un prisma cavo e otticamente piatto [15].

### Sulle tecniche interferometriche

Anche per le tecniche interferometriche discusse in sezione 3.2, l'accuratezza delle misurazioni dipende in gran parte dalla strumentazione utilizzata per la misura dell'angolo di incidenza sulla lastra. Data l'elevatissima sensibilità agli spostamenti dello strumento (nell'ordine dei nanometri, per via dell'equazione 3.11), lo strumento deve essere mantenuto stabile per evitare errori di misurazione. Visto che è necessario contare fino a centinaia di frange, calcolare il numero esatto di frange ad occhio nudo, senza l'ausilio di computer,

è un compito laborioso e potrebbe essere soggetto ad errori umani durante il conteggio. Questi due metodi non sono indicati per l'esperimento in questione: nonostante la lastra da inserire in un ramo dell'interferometro sia facile da ottenere, comunque non vengono presentate soluzioni per la misura dell'indice di rifrazione della soluzione liquida.

### **Sul rifrattometro di Abbe**

Trattandosi di uno strumento progettato apposta per la misura dell'indice di rifrazione, sicuramente è la soluzione più facile da utilizzare e affidabile tra quelle presentate, garantendo inoltre una risoluzione di almeno  $10^{-4}$ . Grazie alle tabelle di correzione è possibile compensare il limite della temperatura, che è fissata a  $20^{\circ}\text{C}$ , e anche quello della lunghezza d'onda, fissata a 589.2 nm. Tuttavia queste tabelle coprono solamente lo spettro del visibile, quindi non è possibile utilizzare questo strumento se si desidera effettuare analisi a lunghezze d'onda al di fuori di questa banda. Rheims *et al.* [21] propongono degli adattamenti allo strumento per estendere il campo di misurazione a lunghezze d'onda comprese tra 500 nm e 1600 nm. Queste modifiche non sono necessarie per misurare l'indice di rifrazione delle componenti dell'esperimento in quanto la lunghezza d'onda a cui vengono fatte le misurazioni (532 nm) è nello spettro del visibile. Inoltre, per poter effettuare misure su un determinato campione, è necessario che il suo indice di rifrazione sia minore di quello del prisma d'illuminazione dello strumento, per via dell'equazione 2.38 [20]. Tuttavia l'indice di rifrazione dichiarato del campione è di 1.508, che è minore di quello del prisma di illuminazione del rifrattometro (1.74054, ma può variare a seconda del modello) [21]. Quindi lo strumento può essere utilizzato per la misura dell'indice di rifrazione delle componenti dell'esperimento. Per l'analisi della parte solida è necessario produrre, sempre tramite stampaggio 3D, dei campioni con dimensioni adatte per lo strumento.

### **Sui sensori a fibra ottica**

I sensori a fibra ottica offrono ottime prestazioni grazie alla loro elevata sensibilità e piccole dimensioni. Tuttavia sono dispositivi difficili da fabbricare e richiedono un'apparecchiatura avanzata per l'analisi delle quantità che si desidera misurare, come ad esempio un BBS e un OSA. Per quanto riguarda l'esperimento di PIV, i sensori a fibra ottica possono essere impiegati per la misura dell'indice di rifrazione delle componenti dell'esperimento ma ad un costo nettamente superiore a confronto di quello di un rifrattometro di Abbe o di uno spettrometro per prismi.

## Considerazioni finali

Quindi, utilizzare il rifrattometro di Abbe o il metodo della deviazione minima sembrerebbe il modo più efficace per misurare l'indice di rifrazione delle componenti dell'esperimento. Il rifrattometro di Abbe ha un'accuratezza superiore a quella delle tecniche interferometriche affrontate nella sezione 3.2 (che comunque non risultano applicabili all'esperimento) ed è anche più facile da utilizzare: per misurare l'indice di rifrazione di una lastra con l'interferometro di Michelson è necessario sia effettuare una calibrazione iniziale per trovare la direzione di incidenza normale, sia contare numerose frange di interferenza. Invece con il rifrattometro di Abbe è sufficiente allineare il reticolo in corrispondenza della linea di separazione tra luce e buio per ottenere il valore dell'indice di rifrazione. Inoltre il costo dello strumento è minore di quello dei sensori a fibra ottica per i motivi discussi in precedenza. Un ragionamento analogo si può fare con il metodo della deviazione minima. Infatti, utilizzare questa tecnica con uno spettrometro per prismi risulta meno laborioso dell'impiego di un interferometro di Michelson, con un costo inferiore rispetto ai sensori a fibra ottica. Sebbene in termini di accuratezza e semplicità di utilizzo il rifrattometro di Abbe e il metodo della deviazione minima siano simili, una differenza tra questi riguarda i campioni da misurare, in particolare la soluzione liquida. Se si utilizza il rifrattometro di Abbe è sufficiente depositare la soluzione all'interno dello strumento, altrimenti, per utilizzare il metodo della deviazione minima sui liquidi, è necessario avere un prisma adeguato da riempire. Infine è bene ricordare che, per le decisioni prese nella parte finale di questo capitolo, si è tenuto conto dell'applicabilità all'esperimento di PIV del capitolo 1, così come il costo di ogni soluzione. Quindi, il rifrattometro di Abbe e il metodo della deviazione minima non sono le migliori tecniche per la misura dell'indice di rifrazione in termini assoluti, ma, più correttamente, sono le due soluzioni tra quelle presentate che meglio soddisfano le richieste dell'esperimento in questione.



# Capitolo 5

## Conclusioni

Diversi metodi sono stati investigati per misurare l'indice di rifrazione di una componente solida e di una componente liquida di un esperimento di PIV. Partendo dal metodo della deviazione minima, esso prevede di illuminare con un raggio di luce un prisma e, misurando l'angolo di deviazione minima, è possibile risalire all'indice di rifrazione del materiale che costituisce il prisma. Questo metodo è molto compatibile con l'esperimento. Le tecniche che utilizzano l'interferometro di Michelson permettono di ricavare l'indice di rifrazione di una lastra, contando il numero di frange di interferenza in seguito all'inserimento della lastra in un ramo dell'interferometro. Nessuna delle due tecniche propone soluzioni per misurare l'indice di rifrazione dei liquidi. Il rifrattometro di Abbe, uno strumento che permette di misurare ad occhio nudo l'indice di rifrazione di campioni posti al suo interno, si presta molto bene per misurare l'indice di rifrazione di solidi e liquidi. I sensori a fibra ottica, dispositivi che sfruttano le proprietà della fibra ottica per rilevare variazioni di indice di rifrazione, risultano adatti ma costosi. In conclusione, si ritiene che utilizzare un rifrattometro di Abbe o il metodo della deviazione minima sia il modo più efficace per misurare l'indice di rifrazione delle componenti dell'esperimento.

# Appendice A

## Commento del codice Matlab

In questa appendice viene mostrato il codice in figura 3.5 con commenti.

```
1 function [n] = refractive_index(m, phii, lambda, d, sig_dig)
2 % i parametri di ingresso sono il numero di frange m, l'angolo di
   incidenza phii in radianti, la lunghezza d'onda, lo spessore della
   lastra e la cifra significativa di riferimento
3   Modules_vector=[]; %vettore, al momento vuoto, che contiene i
   valori della 3.17 al variare di n
4   step = 10^-(sig_dig+1); %passo di campionamento
5   for i = step/100 : step : 3
6       phir = asin(sin(phii)/i);
7       x = m - 2*d/lambda*( i*(1/cos(phir) -1) +1 -cos(phii-phir)/cos(
   phir)); %x rappresenta il valore dell'equazione 3.17 con
   segno. Il parametro i coincide con n nella 3.17
8       module = abs(x); %valore della 3.17
9       Modules_vector = [Modules_vector,module]; %il ciclo costruisce
   un vettore che contiene tutti i valori di module al variare
   di n
10  end
11  [~, n_position] = min(Modules_vector); %trova la posizione del
   minimo all'interno di Modules_vector
12  n = n_position*step; %la funzione restituisce il valore di n
```



# Bibliografia

- [1] Emelia J Benjamin et al. “Heart disease and stroke statistics—2017 update: a report from the American Heart Association”. In: *circulation* 135.10 (2017), e146–e603.
- [2] Giuseppe Lanzino et al. “Angioplasty and stenting for carotid artery stenosis: indications, techniques, results, and complications”. In: *Neurosurgical Focus* 5.6 (1998), E5.
- [3] Shyam Singh. “Refractive index measurement and its applications”. In: *Physica Scripta* 65.2 (2002), p. 167.
- [4] Elena Zarantonello. *Applicazione della Particle Image Velocimetry nei modelli cardiovascolari: studio della dissezione aortica di tipo B*. Tesi di laurea triennale, Università degli Studi di Padova. 2023. URL: <https://hdl.handle.net/20.500.12608/44072>.
- [5] Chandra Shakher e Anil Kumar Nirala. “A review on refractive index and temperature profile measurements using laser-based interferometric techniques”. In: *Optics and Lasers in Engineering* 31.6 (1999), pp. 455–491.
- [6] Elena Zarantonello, Francesca Maria Susin e Andrea Zampiron. “Experimental setup for particle image velocimetry measurements in pulsatile flow”. In: *IDRA24*. 2024, p. 2.
- [7] John A. Buck e John A. Buck. *Fundamentals of optical fibers / John A. Buck*. eng. Wiley series in pure and applied optics. New York: John Wiley e Sons, c1995. ISBN: 0471308188.
- [8] Francis Graham-Smith e J. H. Thomson. *Optics / Francis Graham Smith, J.H. Thomson*. eng. 2.ed. «The» Manchester physics series. Chichester [etc: John Wiley e sons, c1988. ISBN: 0471915343.
- [9] Francis T. S. Yu, Iam-Choon Khoo e Francis T. S. Yu. *Principles of optical engineering / Francis T. S. Yu, Iam-Choon Khoo*. eng. New York [etc: John Wiley e Sons, c1990. ISBN: 0471527513.
- [10] Victor G Plotnichenko e Vyacheslav O Sokolov. “Influence of absorption on the refractive index determination accuracy by the minimum deviation method”. In: *Applied Optics* 57.4 (2018), pp. 639–647.

- [11] S Waldenstrøm e K Razi Naqvi. “A simple, accurate alternative to the minimum-deviation method for the determination of the refractive index of a prism”. In: *American Journal of Physics* 46.10 (1978), pp. 1009–1011.
- [12] BP Chandra e SC Bhaiya. “A simple, accurate alternative to the minimum deviation method of determining the refractive index of liquids”. In: *American Journal of Physics* 51.2 (1983), pp. 160–161.
- [13] W Mahmood bin Mat Yunus e Azizan bin Abdul Rahman. “Refractive index of solutions at high concentrations”. In: *Applied optics* 27.16 (1988), pp. 3341–3343.
- [14] WL Bond. “Measurement of the refractive indices of several crystals”. In: *Journal of Applied Physics* 36.5 (1965), pp. 1674–1677.
- [15] BW Grange, Warren H Stevenson e Raymond Viskanta. “Refractive index of liquid solutions at low temperatures: an accurate measurement”. In: *Applied Optics* 15.4 (1976), pp. 858–859.
- [16] Qiuzhang Zhang e Tianshu Luo. “The influence of absorption on the refractive index determination by the minimum deviation method”. In: *Optik* 223 (2020), p. 165439.
- [17] Pierre Giacomo. “The michelson interferometer”. In: *Microchimica Acta* 93 (1987), pp. 19–31.
- [18] JJ Fendley. “Measurement of refractive index using a Michelson interferometer”. In: *Physics Education* 17.5 (1982), p. 209.
- [19] DJ McKee, JFH Nicholls e IS Ruddock. “Interferometric measurement of refractive index”. In: *European Journal of Physics* 16.3 (1995), p. 127.
- [20] Stefan Kedenburg et al. “Linear refractive index and absorption measurements of nonlinear optical liquids in the visible and near-infrared spectral region”. In: *Optical Materials Express* 2.11 (2012), pp. 1588–1611.
- [21] Jörg Rheims, Jan Köser e Thomas Wriedt. “Refractive-index measurements in the near-IR using an Abbe refractometer”. In: *Measurement Science and Technology* 8.6 (1997), p. 601.
- [22] Byoungho Lee. “Review of the present status of optical fiber sensors”. In: *Optical fiber technology* 9.2 (2003), pp. 57–79.
- [23] KP Zetie, SF Adams e RM Tocknell. “How does a Mach-Zehnder interferometer work?” In: *Physics Education* 35.1 (2000), p. 46.
- [24] Jianghai Wo et al. “Refractive index sensor using microfiber-based Mach–Zehnder interferometer”. In: *Optics letters* 37.1 (2012), pp. 67–69.

- [25] Zhaobing Tian et al. “Refractive index sensing with Mach–Zehnder interferometer based on concatenating two single-mode fiber tapers”. In: *IEEE Photonics Technology Letters* 20.8 (2008), pp. 626–628.
- [26] Md Rajibul Islam et al. “Chronology of Fabry-Perot interferometer fiber-optic sensors and their applications: a review”. In: *Sensors* 14.4 (2014), pp. 7451–7488.
- [27] Ming Deng et al. “Refractive index measurement using photonic crystal fiber-based Fabry-Perot interferometer”. In: *Applied optics* 49.9 (2010), pp. 1593–1598.
- [28] Gao Zhi Xiao et al. “Monitoring changes in the refractive index of gases by means of a fiber optic Fabry-Perot interferometer sensor”. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 118.2 (2005), pp. 177–182.
- [29] Jiajun Tian et al. “Microfluidic refractive index sensor based on an all-silica in-line Fabry–Perot interferometer fabricated with microstructured fibers”. In: *Optics express* 21.5 (2013), pp. 6633–6639.
- [30] O Frazão et al. “Refractive index tip sensor based on Fabry-Perot cavities formed by a suspended core fibre”. In: *Journal of the European Optical Society-Rapid publications* 4 (2009).
- [31] Ji-Huan Chen et al. “Extrinsic fiber-optic Fabry–Perot interferometer sensor for refractive index measurement of optical glass”. In: *Applied Optics* 49.29 (2010), pp. 5592–5596.
- [32] Andreas Othonos. “Fiber bragg gratings”. In: *Review of scientific instruments* 68.12 (1997), pp. 4309–4341.
- [33] Wei Liang et al. “Highly sensitive fiber Bragg grating refractive index sensors”. In: *Applied physics letters* 86.15 (2005).
- [34] A. Iadicicco et al. “Thinned fiber Bragg gratings as refractive index sensors”. In: *IEEE Sensors Journal* 5.6 (2005), pp. 1288–1295. DOI: 10.1109/JSEN.2005.859288.
- [35] Agostino Iadicicco et al. “Refractive index sensor based on microstructured fiber Bragg grating”. In: *IEEE Photonics Technology Letters* 17.6 (2005), pp. 1250–1252.
- [36] Michel Monerie. “Propagation in doubly clad single-mode fibers”. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 30.4 (1982), pp. 381–388.