

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

**BEARING RIGIDITY THEORY
APPLICATA ALLE FORMAZIONI MULTI-AGENTE:
ANALISI DEL RUOLO DELLA CONFIGURAZIONE E
INTERAZIONE DEGLI AGENTI**

Laureando:
Riccardo Marcazzan

Relatore:
Prof.ssa Giulia Michieletto

Correlatore:
Prof. Angelo Cenedese

Anno Accademico 2023-2024

SOMMARIO

Il controllo della formazione per un sistema multi agente è stato studiato molto negli ultimi anni grazie alle innumerevoli applicazioni sia civili che militari.

In questa tesi si è trattato una teoria matematica importante per il *formation control*, ovvero la cosiddetta "*bearing rigidity theory*" (o più semplicemente Teoria della Rigidità), che definisce la formazione attraverso diverse misurazioni che riguardano l'orientamento reciproco tra coppie di agenti. Nella "*bearing rigidity theory*" viene introdotto il concetto di rigidità di una formazione, il quale può essere utilizzato per il movimento di un gruppo di agenti.

La Teoria della Rigidità applicata alle formazioni multi-agente da come risultato una proprietà del sistema che è generalmente binaria. L'obiettivo della tesi è quello di cercare di dare un carattere più quantitativo al concetto di rigidità. Per questo si sono studiate varie casistiche, al fine di trovare un minimo comune denominatore, in modo tale da creare delle linee guida per distinguere le formazioni multi-agente più rigide da quelle meno. In particolare, nella tesi si è analizzato come la configurazione e l'interazione tra gli agenti influenzano la rigidità.

INDICE

Sommario	i
Indice	iii
1 Introduzione	1
1.1 Sistemi multi-agente e controllo della formazione	2
1.2 Introduzione alla <i>bearing rigidity</i>	5
1.3 Struttura della tesi	6
2 Preliminari matematici	9
2.1 Teoria dei grafi	10
2.2 Orientamento in 2D e 3D	12
2.2.1 Rotazioni in $SO(2)$	13
2.2.2 Rotazioni in $SO(3)$	14
3 Bearing rigidity theory	17
3.1 <i>Bearing rigidity theory</i> in $SE(2)$	18
3.1.1 Proprietà statiche di rigidità	21
3.1.2 Proprietà dinamiche di rigidità	26
3.2 <i>Bearing rigidity theory</i> in $SE(3)$	36
3.2.1 Proprietà statiche di rigidità	38
3.2.2 Proprietà dinamiche di rigidità	39

3.3	Definizione della matrice simmetrica di rigidità	44
4	Studio della SBRM	45
4.1	Introduzione	46
4.2	Analisi SBRM in $SE(2)$	48
4.2.1	Caso n generico	53
4.3	Analisi SBRM in $SE(3)$	55
4.3.1	Caso n generico	58
4.4	Principali osservazioni sulle dipendenze della IBR	60
5	Analisi autovalori critici	61
5.1	Analisi del ruolo delle distanze inter-agenti	63
5.2	Studio del ruolo di $\mathbf{A}(\mathcal{G})$	68
5.2.1	Formazione in $SE(3)$	68
5.2.2	Formazione in $SE(2)$	74
5.2.3	Studio delle permutazioni di $\mathbf{A}(\mathcal{G})$	76
5.3	Caso di studio: formazione triangolare	84
6	Conclusioni	89
6.1	Spunti per lavori futuri	91
A	Appendice	93
A.1	Elenco dei <i>framework</i> con λ_5 massimo con diversi valori di m e di n	93
A.2	Codice MatLab usato	99
	Bibliografia	101

1

INTRODUZIONE

Come primo passo verso lo studio della rigidità, in questo capitolo si è introdotto il concetto di sistema multi-agente e di controllo della formazione. Si è introdotto il concetto di bearing rigidity. Si sono date le spiegazioni pratiche che fanno capire quali sono le potenzialità del bearing-based formation control e della Teoria della rigidità. All'interno di questo capitolo si trova anche qualche esempio applicativo e riferimenti ad articoli che trattano il controllo della formazione in maniera più approfondita.

1.1 Sistemi multi-agente e controllo della formazione

I sistemi multi-agente hanno ricevuto un'enorme attenzione nella ricerca negli ultimi anni grazie al loro potenziale in numerosi ambiti applicativi. Un sistema multi-agente è un insieme di entità autonome, chiamate agenti, che interagiscono tra loro e con l'ambiente circostante per raggiungere uno o più obiettivi comuni. Ogni agente è caratterizzato dalla capacità di percepire l'ambiente, elaborare informazioni e agire autonomamente o in coordinazione con gli altri agenti.

Il termine *agente* può rappresentare un sensore, un veicolo autonomo (UAV o UGV) o qualsiasi sistema dinamico generale. Un velivolo aereo autonomo viene abbreviato con UAV, un veicolo autonomo terrestre viene abbreviato con UGV. I sistemi multi-agente sono particolarmente interessanti per la loro robustezza contro guasti del sistema, la capacità di adattarsi a ambienti dinamici e incerti, e i vantaggi economici rispetto all'implementazione di sistemi monolitici più costosi.

Il controllo della formazione è un compito fondamentale per i sistemi multi-agente,



(a)



(b)

Figura 1.1: Aircraft Yamaha RMAX a sinistra (UAV), e un DySMAC TURTLE a destra (UGV) [1], usati per la rilevazione di radiazioni a distanza.

che permette loro di eseguire missioni complesse. L'obiettivo fondamentale nel controllo della formazione è che un gruppo di n agenti raggiunga una configurazione spaziale predeterminata, detta *formazione*.

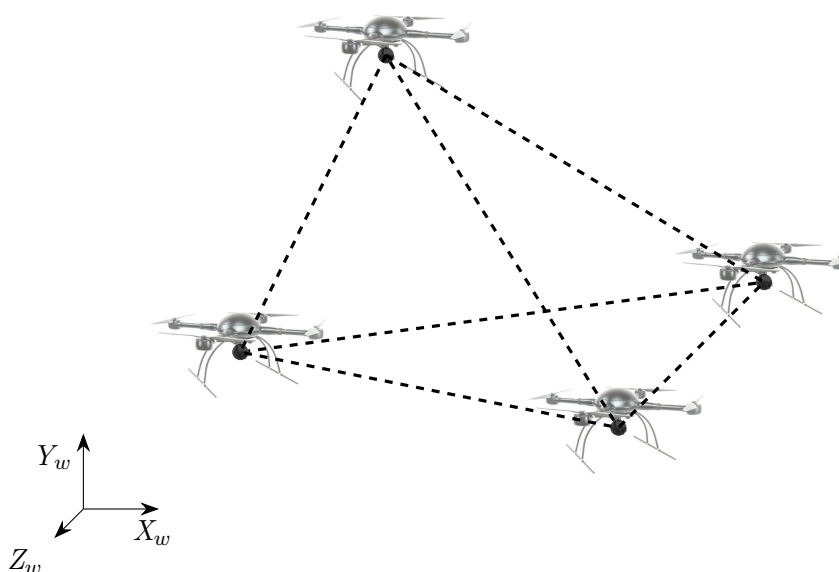


Figura 1.2: Schematizzazione di una formazione di un sistema multi-agente, in cui gli agenti sono degli UAVs e dove i punti neri sono posizionati nel centro di massa dell'agente.

Ci sono molti fattori diversi da considerare per formulare un problema di controllo della formazione. Di seguito verrà fornita una classificazione approssimativa di questi fattori. Il tipo di veicoli coinvolti nella formazione identifica la dinamica degli agenti. Ad esempio, è chiaro che un velivolo aereo senza pilota (UAV) non può avere la stessa dinamica di un veicolo terrestre senza pilota (UGV). La dinamica di un certo veicolo consiste in una serie di equazioni differenziali che descrivono come il veicolo si muove. I sistemi robotici sono dotati di una serie di attuatori in grado di controllare alcune delle variabili coinvolte nella dinamica, e quindi queste variabili sono definite come variabili di controllo.

Un agente visto come un sistema robotico è dotato di una serie di dispositivi in grado di fornire importanti informazioni all'agente. Queste informazioni possono riguardare l'agente stesso o l'ambiente esterno, che include anche altri agenti. Ad esempio, i sistemi *IMU* (Unità di Misura Inerziale) sono dispositivi elettronici che misurano e riportano la velocità lineare e la velocità angolare dell'agente utilizzando accelerometri e giroscopi. Un altro esempio di dispositivo di rilevamento è una telecamera calibrata a bordo, che fornisce immagini che possono essere elaborate per estrarre nozioni come la presenza di ostacoli o le direzioni lungo le quali si trovano altri agenti. Inoltre, un agente può avere un sistema di comunicazione a bordo, che può essere utilizzato per scambiare informazioni con altri agenti o con altri dispositivi esterni alla formazione.

Dopo aver descritto sommariamente un agente attraverso i suoi elementi costitutivi, uno degli aspetti centrali di un problema di controllo delle formazioni è definire i vincoli che un gruppo di n agenti deve rispettare per essere considerato una formazione. Ci sono molti modi possibili per definire una formazione. I casi di interesse per questo lavoro sono quelli in cui una certa formazione può essere definita dalle distanze relative o dalle direzioni relative (*bearing*) tra coppie scelte di agenti.

Il controllo della formazione può avere differenti obiettivi. Una possibile classificazione è la seguente:

- obiettivi di generazione di una formazione, dove lo scopo è quello di portare un certa formazione iniziale ad un'altra arbitraria,
- obiettivi di tracciamento della formazione, in cui l'obiettivo è mantenere una determinata formazione mentre si segue una traiettoria scelta, ad esempio dal centroide della formazione.

Il controllo della formazione si è basato principalmente sulla comunicazione centralizzata in passato. Tuttavia, la comunicazione centralizzata ha una bassa tolleranza ai guasti e affidabilità, mentre la comunicazione distribuita scambia informazioni osservando l'ambiente o altri agenti, senza dipendere dal comportamento futuro degli altri membri. Pertanto, i sistemi distribuiti, sono più competitivi quando la comunicazione centralizzata tra gli agenti non è disponibile o affidabile [2]. Il controllo distribuito, quindi si basa sulle misure relative che ogni agente può eseguire per rilevare distanze, orientamenti (*bearing*) o posizioni relative fra agenti. In particolare risulta cruciale il controllo della formazione basato sul *bearing*. Il problema del controllo della formazione basato sul *bearing* implica che un gruppo di agenti (come robot mobili, UAV, ecc.) debba raggiungere una formazione target specificata tramite informazioni azimutali (vettore di *bearing* e/o angolo sotteso). Un aspetto chiave del controllo basato sul *bearing* è l'uso delle sole informazioni di orientamento reattivo per progettare la legge di controllo della formazione. Uno dei vantaggi della legge di controllo della formazione basata sul *bearing* è che fornisce una soluzione naturale al controllo della scala della formazione. Il controllo della scala della formazione è una tecnica molto utile. Modificando la scala della formazione, gli agenti sono in grado di rispondere dinamicamente agli ambienti, inclusi, ad esempio, l'evitamento degli osta-

coli. Gli approcci basati sulle posizioni relative e sulle distanze sono stati applicati per risolvere il problema del controllo della scala della formazione [3] e [4]. Tuttavia, poiché le posizioni relative o le distanze tra gli agenti non sono invarianti rispetto alla scala della formazione, i due approcci portano a stime e schemi di controllo complessi [3] e [4]. In confronto, l'approccio basato sull'orientamento relativo fra agenti offre una soluzione semplice al controllo della scala della formazione grazie all'invarianza dei bearing tra agenti rispetto alla scala della formazione.

Possiamo assumere quindi che l'orientamento relativo tra agenti possa essere considerato un collegamento virtuale, ovvero un *link* che collega due agenti, questo collegamento virtuale ci permette di ottenere un controllo della formazione basato sul controllo di *strutture virtuali*.

1.2 Introduzione alla *bearing rigidity*

Il concetto di rigidità è stato studiato sin dai tempi di Lagrange (1788) e Maxwell (1864), ma solo negli ultimi quarant'anni è stato formalizzato come argomento di ricerca. L'era moderna inizia con il fondamentale teorema di Laman (1970), che ha reso rigoroso l'argomento in due dimensioni, e prosegue con il lavoro di Asimow e Roth [5], in cui il concetto viene generalizzato per il caso in \mathbb{R}^d . Altri riferimenti più recenti sono [6], [7], e [8]. In questi lavori si considera un framework a barre e giunti, che è una struttura costituita da barre rigide collegate alle loro estremità da giunti che permettono il moto relativo fra le barre. Se tale framework ha solo deformazioni triviali, cioè traslazioni e rotazioni, allora si dice che è rigido. Il concetto di rigidità può essere applicato in diversi ambiti, che vanno dalle applicazioni biochimiche alle applicazioni in ingegneria strutturale [9].

Un framework a barre e giunti può essere visto come un insieme di vertici con alcune coppie di questi vertici collegati da barre rigide, mentre altre coppie rimangono libere. Il concetto di rigidità sopra esposto può essere applicato a una formazione di n agenti, e il suo studio rigoroso prende il nome di Teoria della rigidità delle distanze (*distance rigidity*). In questo caso, i giunti del framework a barre e giunti rappresentano gli agenti, mentre le barre rappresentano i vincoli di distanza reciproca imposti per alcune coppie di

vertici. Un grafo risulta necessario per rappresentare gli agenti come vertici e i vincoli di distanza come archi. È importante notare che qui i vincoli di distanza tra alcune coppie di vertici sono gli elementi che definiscono una certa formazione. I riferimenti per la *distance rigidity* sono in [10], [11], [12], nei quali ci sono anche alcuni esempi su come la *distance rigidity* può essere applicata a determinati problemi di controllo delle formazioni. Come estensione di questi studi, questa tesi riguarda la *bearing rigidity*, che deriva dalla teoria della *distance rigidity* ma è sostanzialmente diversa nelle definizioni di base e nei comportamenti dei sistemi. Infatti, come abbiamo già introdotto, una formazione è definita attraverso le direzioni relative (*bearing*) tra coppie di agenti scelti. Questa definizione diversa della formazione cambia anche il significato di rigidità per tali formazioni, come sarà più chiaro nel seguito. Nelle seguenti pagine verranno graficamente rappresentati i

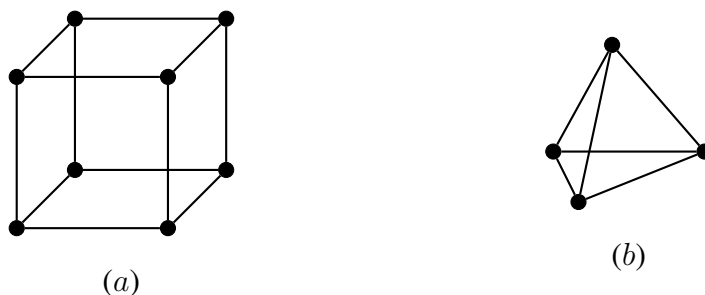


Figura 1.3: Modellazione di una formazione multi-agente con barre e giunti: formazione cubica (a) e tetraedrica (b).

sistemi multi-agente come in Fig. 1.3, dove i punti sono posizionati nel centro di massa dell'agente e gli spigoli (o lati) indicano i vari *links* fra agenti.

1.3 Struttura della tesi

La presente tesi si propone di approfondire il concetto di *bearing rigidity* e di esaminare la relazione tra tale teoria e la configurazione di un sistema multi-agente, nonché l'interazione tra gli agenti. L'obiettivo è, quindi, tramite analisi condotte in MatLab, comprendere in maniera quantitativa come la rigidità possa essere legata alle principali caratteristiche di un sistema multi-agente, ovvero la distribuzione spaziale degli agenti e la struttura delle relazioni tra gli agenti.

Nel Capitolo 2 si affronterà una breve introduzione a quelle che sono le principali nozioni matematiche utili al fine di definire e studiare la rigidità di un sistema.

Nel Capitolo 3 è riportata la Teoria della Rigidità in spazi bidimensionali e tridimensionali.

Nel Capitolo 4 sono state ricavate importanti matrici che consentono di analizzare le dipendenze e le indipendenze della *bearing rigidity* come proprietà quantitativa.

Nel Capitolo 5 sono state analizzate le diverse dipendenze della rigidità, con l'obiettivo di comprendere la natura del legame esistente tra esse.

Nel Capitolo 6 ci sono le conclusioni riguardo il lavoro di analisi della rigidità di una formazione e del ruolo che rivestono configurazione e interazione degli agenti.

2

PRELIMINARI MATEMATICI

La teoria dei grafi è fondamentale per comprendere la teoria della rigidità. In questo capitolo si presenta una breve esposizione di quelle che sono le principali nozioni della teoria dei grafi, utili al fine di strutturare al meglio nei capitoli successivi la definizione e condizione di bearing rigidità. Verranno richiamati i metodi di rappresentazione dell'orientamento di corpi rigidi nello spazio 2D e 3D al fine di modellare gli agenti.

2.1 Teoria dei grafi

Un *grafo orientato* o *digrafo*, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, è una coppia formata dall'insieme dei vertici (o nodi) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_{|\mathcal{V}|}\}$ e un insieme di lati (o archi) e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, dove un arco è una coppia ordinata di nodi distinti. Dato l'arco (v_i, v_j) , il nodo v_i è chiamato *coda* e il nodo v_j è chiamato *testa*. Per un grafo orientato, l'arco (v_i, v_j) è diverso dall'arco (v_j, v_i) : due archi distinti possono collegare gli stessi due nodi, con un arco che punta in una direzione e l'altro nella direzione opposta. Gli archi possono essere etichettati come $e_1, \dots, e_{|\mathcal{E}|}$ e l'insieme degli archi può essere esplicitamente indicato come $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{|\mathcal{E}|}\}$. Come

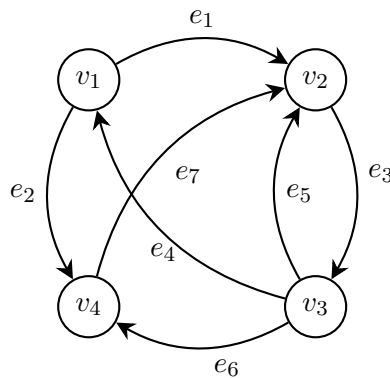


Figura 2.1: Esempio di grafo diretto dove $e_1 = (v_1, v_2), \dots, e_7 = (v_4, v_2)$.

mostrato in Figura 2.1, gli archi di un grafo orientato sono rappresentati con delle frecce. In seguito verranno presentate alcune proprietà dei digrafi.

Due grafi orientati sono uguali se hanno lo stesso insieme di nodi e lo stesso insieme di archi.

Due nodi sono *adiacenti* se sono collegati da un arco. Ogni arco è detto *incidente uscente* al suo nodo coda, e *incidente entrante* al suo nodo testa. A differenza di un grafo non orientato, l'incidenza assume un carattere direzionale. Dato un nodo v_i , il numero di archi che hanno v_i come testa è indicato come il *grado entrante* ($\deg_{in}(v_i)$), mentre il numero di archi che hanno v_i come coda è indicato come il *grado uscente* ($\deg_{out}(v_i)$).

Un grafo orientato è detto *completo* se ogni coppia di nodi distinti nell'insieme \mathcal{V} è connessa da due archi con direzioni opposte.

Ora definiamo alcune matrici che riassumono tutte le proprietà di un grafo orientato \mathcal{G} . La *matrice dei gradi entranti* ($\mathbf{D}_{in}(\mathcal{G})$) (*deg-in matrix*) e la *matrice dei gradi uscenti*

$(\mathbf{D}_{out}(\mathcal{G}))$ (*deg-out matrix*) sono matrici diagonali di dimensione $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|$, i cui elementi sono definiti come:

$$[\mathbf{D}_{in}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} \text{deg}_{in}(v_i) & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$[\mathbf{D}_{out}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} \text{deg}_{out}(v_i) & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.2)$$

La *matrice di adiacenza* $A(\mathcal{G})$ è una matrice di dimensione $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|$. A differenza del grafo non orientato, la matrice di adiacenza per digrafi **non** è simmetrica. Gli elementi sono definiti come:

$$[\mathbf{A}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.3)$$

La *matrice di incidenza* $\mathbf{E}(\mathcal{G})$ è una matrice di dimensione $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|$, che contiene informazioni sui nodi coinvolti in ciascun arco orientato del grafo. Gli elementi sono definiti come:

$$[\mathbf{E}(\mathcal{G})]_{ik} = \begin{cases} -1 & \text{se } e_k = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 1 & \text{se } e_k = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Infine, introduciamo la matrice $\mathbf{E}_{out}(\mathcal{G})$ di dimensione $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|$, definita come:

$$[\mathbf{E}_{out}(\mathcal{G})]_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } e_k = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Possiamo anche definire la *matrice Laplaciana* $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ [13] come:

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \begin{cases} \text{deg}_{out}(v_i) & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.6)$$

Ora, è chiaro che osservando l'Equazione 2.6, possiamo riscrivere la matrice Laplaciana

come

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{D}_{out}(\mathcal{G}) - \mathbf{A}(\mathcal{G}), \quad (2.7)$$

Possiamo pensare adesso di considerare un grafo generico \mathcal{G} dove dato l'insieme dei nodi \mathcal{V} , non conosciamo l'insieme degli archi \mathcal{E} . Possiamo quindi considerare la matrice di adiacenza come

$$[\mathbf{A}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}, \quad (2.8)$$

dove $a_{ij} = 1$ se $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ oppure $a_{ij} = 0$ se $(v_i, v_j) \notin \mathcal{E}$. Detto questo possiamo definire una particolare matrice di incidenza $\mathbf{E}_{full}(\mathcal{G})$ in funzione della matrice di adiacenza $\mathbf{A}(\mathcal{G})$, i.e.

$$[\mathbf{E}_{full}(\mathcal{G})]_{ik} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se } e_k = (v_i, v_j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \\ a_{ji} & \text{se } e_k = (v_j, v_i) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \quad (2.9)$$

La matrice di incidenza $\mathbf{E}(\mathcal{G})$ può essere ottenuta, noto l'insieme degli archi \mathcal{E} , sostituendo i termini a_{ij} con gli opportuni 1 e 0, e facendo poi una riduzione della matrice, togliendo la k -esima colonna contenente tutti 0, ovvero

$$\mathbf{E}_{full}(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V} \times \mathcal{V}|} \xrightarrow{\text{Togliendo le/a } k\text{-esime/a colonne/a contenente tutti 0}} \mathbf{E}(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}. \quad (2.10)$$

Con l'Eq. 2.10 e 2.9 abbiamo ottenuto quindi un metodo per ottenere in modo analitico la matrice di incidenza $\mathbf{E}(\mathcal{G})$ a partire dalla matrice di adiacenza $\mathbf{A}(\mathcal{G})$, dato un qualsiasi grafo \mathcal{G} .

2.2 Orientamento in 2D e 3D

L'orientamento o *attitude* di un oggetto nello spazio, sia bidimensionale (2D) che tridimensionale (3D), rappresenta il modo in cui l'oggetto è orientato rispetto a un sistema di riferimento. Questo implica che, oltre alla posizione, è necessario specificare la rotazione del sistema di riferimento dell'oggetto rispetto a un altro.

Un sistema di riferimento è costituito da:

- In 2D: due assi ortogonali X e Y e un punto di applicazione O , indicato come $\mathcal{F} = \{O, (X, Y)\}$.
- In 3D: tre assi ortogonali X, Y, Z e un punto di applicazione O , indicato come $\mathcal{F} = \{O, (X, Y, Z)\}$.

2.2.1 Rotazioni in $SO(2)$

Nel caso bidimensionale, l'orientamento di un sistema di riferimento $\mathcal{F}_1 = \{O_1, (X_1, Y_1)\}$ rispetto a un altro $\mathcal{F}_0 = \{O_0, (X_0, Y_0)\}$ è descritta dalla matrice di rotazione \mathbf{R} , che appartiene al *gruppo speciale ortogonale*:

$$SO(2) = \{\mathbf{A} \in O(2) \mid \det(\mathbf{A}) = +1\}. \quad (2.11)$$

Il *gruppo ortogonale* $O(d)$ è definito come:

$$O(d) = \{\mathbf{A} \in GL(d, \mathbb{R}) \mid \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I}_d\}, \quad (2.12)$$

dove $GL(d, \mathbb{R})$ rappresenta il gruppo lineare generale:

$$GL(d, \mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid \det(\mathbf{A}) \neq 0\}. \quad (2.13)$$

Il gruppo $SO(2)$ è isomorfo alla circonferenza unitaria $\mathcal{S}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$. La matrice di rotazione \mathbf{R} è definita come:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1^{(0)} & \hat{\mathbf{y}}_1^{(0)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (2.14)$$

dove $\hat{\mathbf{x}}_1^{(0)}$ e $\hat{\mathbf{y}}_1^{(0)}$ sono le coordinate dei vettori unitari $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{y}}_1$ nel sistema di riferimento \mathcal{F}_0 . I vettori $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{y}}_1$ sono ortogonali, e hanno direzione coincidente con quella dell'asse X_1 e Y_1 . In Figura 2.2 è riportato un esempio di orientamento in 2D, con \mathcal{F}_1 ruotato di un angolo α rispetto \mathcal{F}_0 . I vettori $\hat{\mathbf{x}}_1^{(0)}$ e $\hat{\mathbf{y}}_1^{(0)}$ valgono rispettivamente $\hat{\mathbf{x}}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}^\top$ e $\hat{\mathbf{y}}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^\top$. Possiamo riscrivere la matrice \mathbf{R} , quindi, in termini dell'angolo

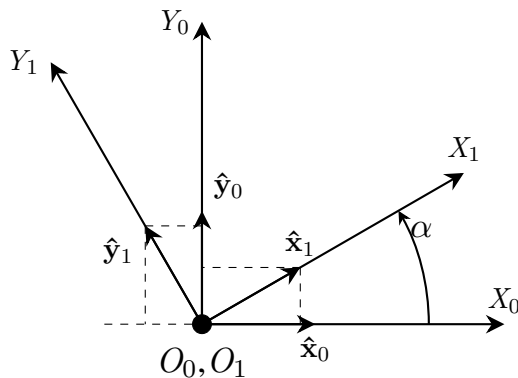


Figura 2.2: Orientamento in 2D

α :

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi[. \quad (2.15)$$

La matrice di rotazione \mathbf{R} può essere utilizzata per trasformare le coordinate di un vettore tra due sistemi di riferimento. Dato un vettore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}^{(2)}, \quad (2.16)$$

dove $\mathbf{p}^{(1)}$ e $\mathbf{p}^{(2)}$ rappresentano le coordinate di \mathbf{p} nei sistemi di riferimento \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 rispettivamente, e \mathbf{R}_{12} è la matrice di rotazione che rappresenta l'orientamento di \mathcal{F}_2 rispetto a \mathcal{F}_1 .

2.2.2 Rotazioni in $SO(3)$

Consideriamo due sistemi di riferimento tridimensionali $\mathcal{F}_0 = \{O_0, (X_0, Y_0, Z_0)\}$ e $\mathcal{F}_1 = \{O_1, (X_1, Y_1, Z_1)\}$. La matrice di rotazione che rappresenta l'orientamento di \mathcal{F}_1 rispetto a \mathcal{F}_0 è data da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1^{(0)} & \hat{\mathbf{y}}_1^{(0)} & \hat{\mathbf{z}}_1^{(0)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (2.17)$$

dove $\hat{\mathbf{x}}_1^{(0)}, \hat{\mathbf{y}}_1^{(0)}, \hat{\mathbf{z}}_1^{(0)}$ rappresentano i vettori unitari di \mathcal{F}_1 proiettati sugli assi X_0, Y_0, Z_0 . La matrice \mathbf{R} è ortogonale e il suo determinante vale 1, i.e. $\in SO(3)$.

Le rotazioni elementari attorno agli assi principali sono date da:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

La matrice di rotazione complessiva per convenzione è data dalla composizione:

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \alpha) = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi), \quad (2.19)$$

che corrisponde alla matrice:

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \alpha) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\theta & c_\alpha s_\theta s_\phi - s_\alpha c_\phi & c_\alpha s_\theta c_\phi + s_\alpha s_\phi \\ s_\alpha c_\theta & s_\alpha s_\theta s_\phi + c_\alpha c_\phi & s_\alpha s_\theta c_\phi - c_\alpha s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

dove $c_x = \cos(x)$ e $s_x = \sin(x)$. Gli angoli ϕ , θ , α vengono chiamati rispettivamente rollio, beccheggio e imbardata.

Dato un vettore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ possiamo esprimerlo in sistemi di riferimento diversi attraverso:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}^{(0)}, \quad (2.21)$$

e

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^{(1)}, \quad (2.22)$$

dove $\mathbf{p}^{(0)}$ e $\mathbf{p}^{(1)}$, sono le espressioni del vettore \mathbf{p} nei sistemi di riferimento \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_1 rispettivamente. Dalle Eq. 2.21 e 2.22 si ricava che $\mathbf{R}_0^1 = (\mathbf{R}_1^0)^{-1} = (\mathbf{R}_1^0)^\top$.

3

BEARING RIGIDITY THEORY

In questo capitolo, viene presentata la bearing rigidity theory per sistemi multi-agente descritti in spazi 2D e 3D. Verranno esposti teoremi e definizioni fondamentali, fino ad arrivare alla condizione fondamentale di rigidità. Nel presente Capitolo le principali nozioni in $SE(2)$ sono state prese da [14] e da [15], per il caso $SE(3)$ da [16].

3.1 *Bearing rigidity theory in $SE(2)$*

In questa sezione viene proposta la Teoria della Rigidità in uno spazio 2D, dove ogni agente viene assunto come un corpo rigido che può muoversi nello spazio bidimensionale, sia ruotando che traslando. Ogni agente possiede un sensore di orientamento (ad esempio telecamere ottiche), che è fisso rispetto il sistema di riferimento solidale al corpo dell'agente. Possiamo quindi rappresentare l' i -esimo agente come un sistema di riferimento locale \mathcal{F}_i , con origine O_i posizionata nel centro di massa del corpo dell'agente. L'orientamento di \mathcal{F}_i e la posizione di O_i sono espresse secondo un sistema di riferimento che è comune a tutti gli agenti, che chiameremo sistema di riferimento *globale*, e che indicheremo con \mathcal{F}_w . Possiamo quindi modellare matematicamente un agente, come un elemento del *gruppo Euclideo speciale*:

$$SE(2) = \{(\mathbf{p}, \mathbf{R}) : \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{R} \in SO(2)\}, \quad (3.1)$$

dove in generale $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ rappresenta un posizione in 2D, mentre $\mathbf{R} \in SO(2)$ rappresenta un'orientamento in 2D.

In uno scenario reale, le telecamere ottiche montate a bordo di ciascun agente presentano un campo visivo limitato (*field-of-view*), possono quindi insorgere condizioni in cui la rilevazione degli orientamenti reciproci tra agenti risulta non ottenibile. Pertanto, è necessario modellare le rilevazioni degli orientamenti mediante un grafo orientato, che chiameremo *grafo di rilevamento* della formazione.

L'elemento fondamentale che raccoglie tutte le informazioni sulla posizione e l'orientamento di ciascun agente e le interazioni tra ogni coppia di agenti è il *framework* in $SE(2)$.

Definizione 3.1.1. [15] *Un framework $SE(2)$ è una terna $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$, dove:*

- $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ è un grafo orientato,
- $\mathbf{p} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una funzione che associa a ciascun vertice una posizione in \mathbb{R}^2 ,
- $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}^1$ è una funzione che associa a ciascun vertice un orientamento in \mathcal{S}^1 .

Il grafo orientato $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ di Eq. 3.1.1, è il *grafo di rilevamento* della formazione menzionato in precedenza. In tale grafo, i nodi corrispondono agli agenti, mentre gli archi orientati identificano le coppie di agenti tra le quali è possibile effettuare la misura dell'orientamento relativo (denominato anche *bearing*). In particolare, se l'arco orientato (v_i, v_j) appartiene all'insieme \mathcal{E} , l'agente rappresentato dal nodo v_i può ottenere la misura di *bearing* relativa dell'agente rappresentato dal nodo v_j . D'ora in poi, indicheremo il numero di nodi come $n = |\mathcal{V}|$ e il numero di archi come $m = |\mathcal{E}|$.

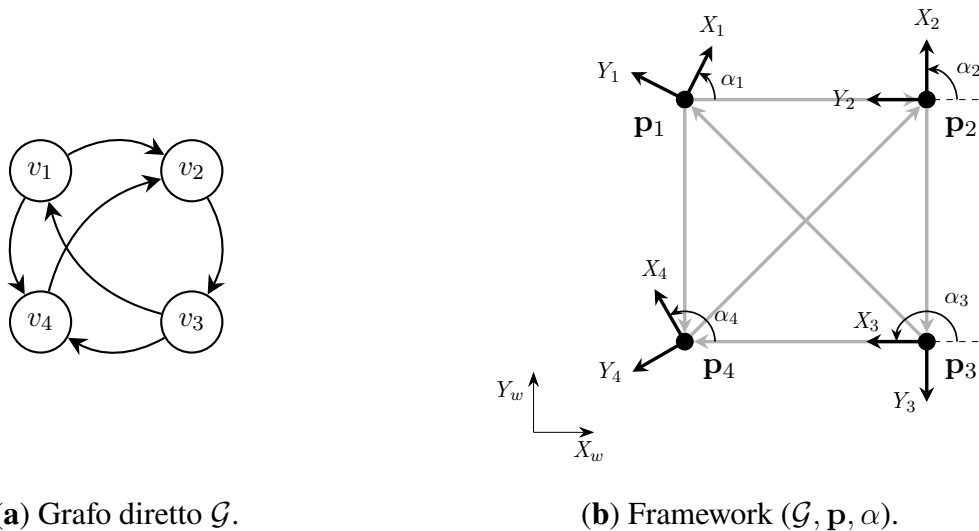
La funzione di posizione $\mathbf{p}(\cdot)$ associa a ciascun nodo un vettore che contiene le coordinate del centro di massa, i.e. O_i , espresse rispetto al sistema di riferimento globale \mathcal{F}_w . La funzione di posizione è chiaramente iniettiva, poiché due agenti non possono fisicamente sovrapporsi. Per comodità di notazione, le posizioni verranno indicate anche come $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(v_i) \in \mathbb{R}^2$ per tutti gli $i \in \{1, \dots, n\}$.

La funzione di orientamento $\alpha(\cdot)$ associa a ciascun nodo, l'orientamento in 2D dell'agente corrispondente. Poiché il cerchio unitario \mathcal{S}^1 è isomorfo all'intervallo $[0, 2\pi)$, questo intervallo può essere utilizzato come insieme di output della funzione di orientamento. Di conseguenza, per un nodo $v_i \in \mathcal{V}$, il termine $\alpha(v_i) \in [0, 2\pi)$ indica l'angolo di rotazione del sistema di riferimento \mathcal{F}_i rispetto al sistema di riferimento globale \mathcal{F}_w . Per comodità, gli orientamenti saranno denotati anche come $\alpha_i = \alpha(v_i) \in [0, 2\pi)$ per tutti gli $i \in \{1, \dots, n\}$. In più il cerchio unitario \mathcal{S}^1 è isomorfo al gruppo $SO(2)$ che include tutte le matrici di rotazione di dimensione 2×2 . Difatti un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ è associato a una e una sola matrice di rotazione $\mathbf{R}(\alpha) \in SO(2)$. In Figura 3.1 viene riportato un esempio di un framework in $SE(2)$, con il grafo associato \mathcal{G} . Nella Figura 3.1b i vettori in grigio rappresentano gli archi diretti di \mathcal{G} e i sistemi di riferimento locali sono arbitrariamente ruotati rispetto a \mathcal{F}_w .

Dato un framework in $SE(2)$ può essere quindi definita la funzione

$$\chi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1 : i \mapsto \chi(i) = (\mathbf{p}_i, \alpha_i),$$

dove $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(v_i)$ indica la posizione e $\alpha_i = \alpha(v_i)$ rappresenta l'orientamento per il vertice v_i . Questa funzione è la funzione di stato di $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$. Il vettore che contiene tutti gli stati per ogni vertice del framework è


Figura 3.1: Esempio di framework in $SE(2)$

$$\chi(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \chi(1) \\ \vdots \\ \chi(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{p}_n, \alpha_n) \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n, \quad (3.2)$$

e rappresenta lo stato dell'intero framework. In più è utile estrarre da $\chi(\mathcal{V})$ due vettori :

$$\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.3)$$

che include le posizioni di ogni agente e

$$\chi_{\alpha}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in [0, 2\pi), \quad (3.4)$$

che include l'orientamento di ogni agente del sistema. Ora possiamo definire la misura di orientamento relativo (*bearing measure*) tra due agenti connessi da un arco del grafo \mathcal{G} . Poiché \mathcal{G} è un grafo orientato, ogni lato $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ corrisponde a una misura di

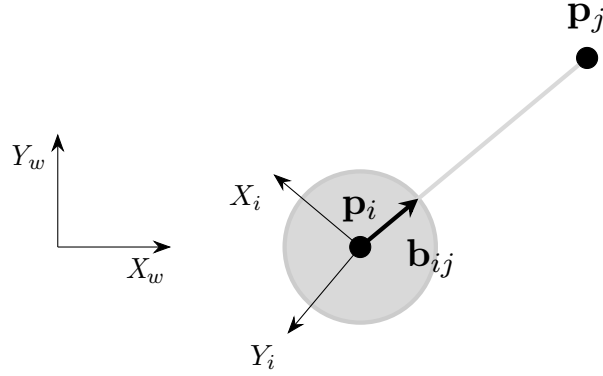


Figura 3.2: Bearing measure relativa in $SE(2)$

orientamento relativo tra gli agenti i e j , espressa come:

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\|} \in \mathcal{S}^1 \quad \forall i, j \text{ t.c. } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \quad (3.5)$$

dove

$$\mathbf{R}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

è la matrice di rotazione del sistema di riferimento \mathcal{F}_i rispetto al sistema di riferimento globale, infatti può essere nota anche come \mathbf{R}_i^w . Come conseguenza di questa formulazione, il vettore \mathbf{b}_{ij} è normalizzato, con norma Euclidea pari a uno, e giace sul cerchio unitario $\mathcal{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Dalla 3.5 possiamo ricavare il vettore

$$\bar{\mathbf{p}}_{ij} = \frac{\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\|}. \quad (3.7)$$

Quindi il vettore \mathbf{b}_{ij} è il vettore $\bar{\mathbf{p}}_{ij}$ espresso secondo il sistema di riferimento locale \mathcal{F}_i del nodo v_i . Nella Figura 3.2 viene raffigurata la *bearing measurement* (\mathbf{b}_{ij}) associata ad un generico arco $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ il quale è confinato all'interno dell'area grigia del cerchio di raggio unitario poichè normalizzato.

3.1.1 Proprietà statiche di rigidità

Di seguito vengono presentate le proprietà di equivalenza (o *bearing equivalence*) e di congruenza (o *bearing congruence*) tra framework in $SE(2)$.

Definizione 3.1.2. (Equivalenza in $SE(2)$). [15] Due framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ e $(\mathcal{G}, \mathbf{p}', \alpha')$ sono detti equivalenti se:

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}'_{ij}, \quad \forall (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \quad (3.8)$$

dove \mathbf{b}_{ij} e \mathbf{b}'_{ij} rappresentano le misure di orientamento relativo nei rispettivi framework.

In altre parole, l'equivalenza implica che le informazioni sull'orientamento relativo siano preservate quando si passa da un framework all'altro.

Definizione 3.1.3. (Congruenza in $SE(2)$). [15] Due framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ e $(\mathcal{G}, \mathbf{p}', \alpha')$ sono congruenti se:

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}'_{ij} \quad e \quad \mathbf{b}_{ji} = \mathbf{b}'_{ji}, \quad \forall v_i, v_j \in \mathcal{V} \text{ con } i \neq j. \quad (3.9)$$

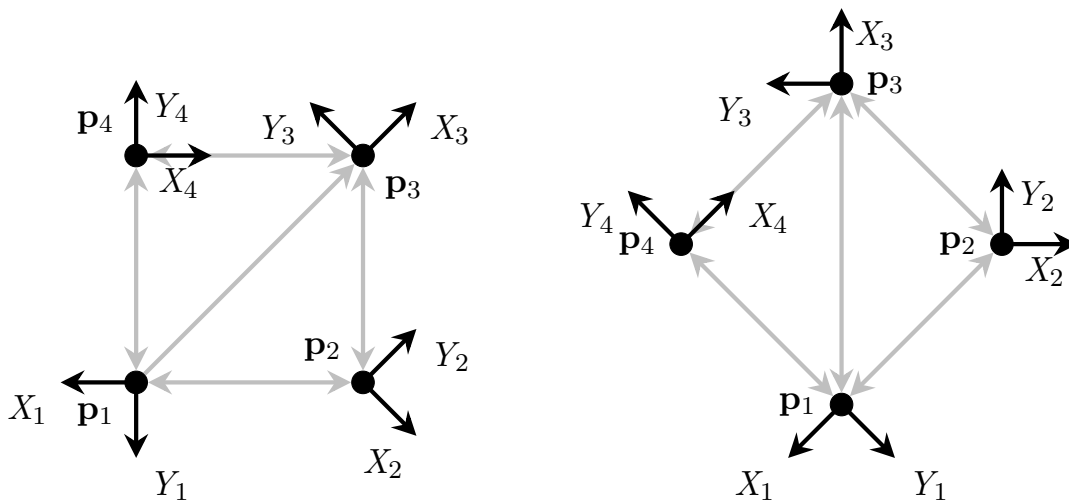


Figura 3.3: Esempio di congruenza bearing in $SE(2)$.

A titolo di esempio, le Figure 3.3, 3.4 e 3.5 mostrano degli esempi di framework congruenti, equivalenti e non equivalenti. I grafi associati in ogni figura sono comuni ai due framework e sono stati scelti in maniera arbitraria. Gli archi del grafo associato dei framework vengono indicati con dei vettori in grigio che partono dal nodo i -esimo fino al j -esimo. I vettori in nero sono invece i versori che indicano la direzione dell'asse X o Y del sistema di riferimento locale \mathcal{F}_i . Nella Figura 3.3 abbiamo l'esempio di due framework congruenti, infatti il framework è stato semplicemente ruotato, mantenendo inalterate le misure del bearing relative del grafo completo \mathcal{K}_4 . Nella Figura 3.4 i due framework sono equivalenti,

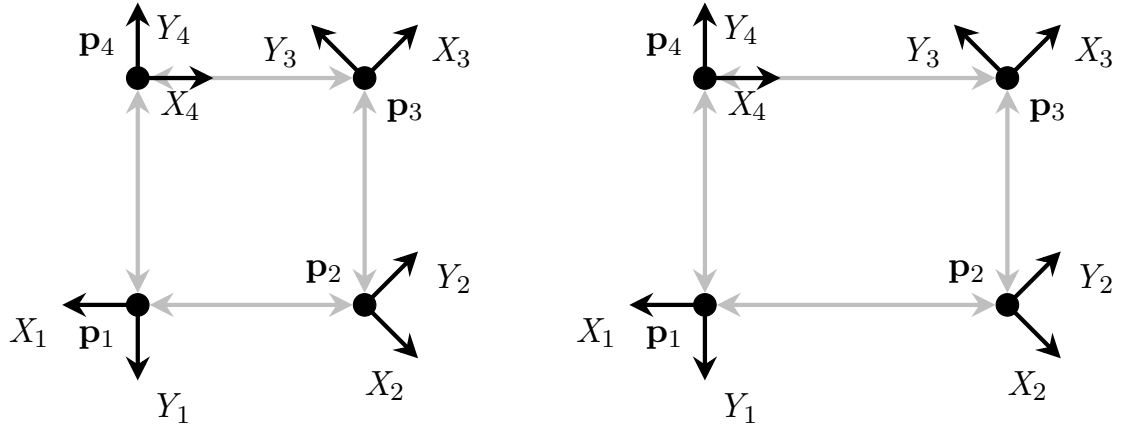


Figura 3.4: Esempio di equivalenza, ma non congruenza *bearing* in $SE(2)$.

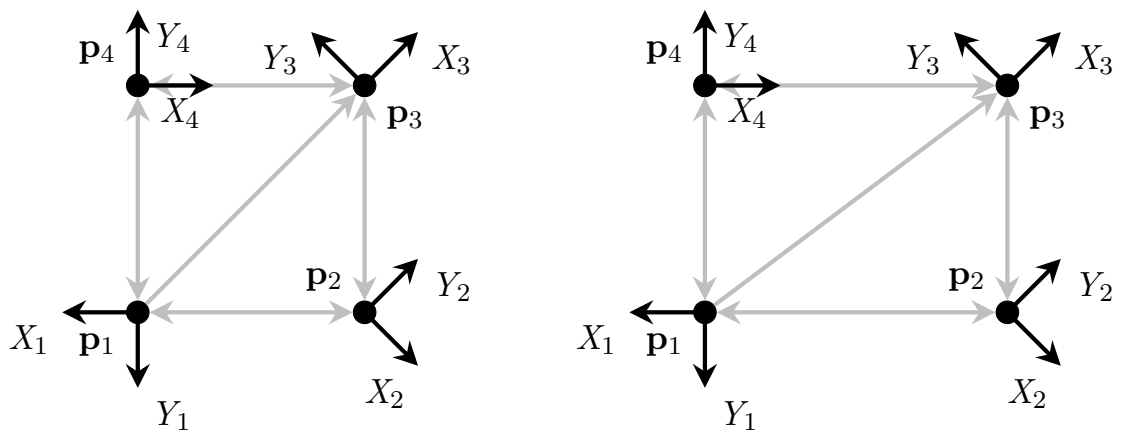


Figura 3.5: Esempio di non equivalenza *bearing* in $SE(2)$.

ma non congruenti: la dilatazione del framework infatti non altera i vettori \mathbf{b}_{ij} del grafo \mathcal{G} . I termini \mathbf{b}_{13} , \mathbf{b}_{31} e \mathbf{b}_{24} , \mathbf{b}_{42} del grafo \mathcal{K}_4 invece non mantengono la stessa direzione cambiando framework, da quello di destra a quella di sinistra. Nell'ultimo esempio ciò che comporta la non equivalenza è dovuto sia a \mathbf{b}_{13} e sia al sistema di riferimento locale \mathcal{F}_2 , il quale è ruotato di $+45^\circ$ rispetto al corrispettivo nodo nel framework di sinistra.

Ora è conveniente ordinare gli archi del grafo diretto \mathcal{G} da 1 a m , in modo tale che il k -esimo arco sia etichettato come e_k . Di conseguenza, le misure del bearing relative a ciascun arco sono denotate come $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{ij}$ per tutti i $k \in \{1, \dots, m\}$ tali che $e_k = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$. In maniera analoga possiamo anche definire $\bar{\mathbf{p}}_k$.

La funzione di *bearing rigidity* (o funzione di rigidità) di un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ raccoglie tutte le misure relative al grafo \mathcal{G} , ed è denotata come $\mathbf{b}_{\mathcal{G}} : (\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n \rightarrow (\mathcal{S}^1)^m$, tale che

$$\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

dove il termine \mathbf{b}_k indica la misura del bearing relativa del k -esimo arco di \mathcal{G} . Si può dimostrare che l'Equazione 3.10 può essere riscritta come

$$\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c} \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \\ \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| \end{array} \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^\top \chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}), \quad (3.11)$$

dove il termine $[\cdot]_k$ indica una matrice composta da termini relativi al k -esimo arco, mentre

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2m}, \quad (3.12)$$

dove $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è la matrice di incidenza del grafo \mathcal{G} .

Un concetto chiave nell'analisi presentata è la (*bearing rigidity*), ovvero la rigidità rispetto agli orientamenti. Nel prosieguo, il termine "rigidità" sarà utilizzato per indicare specifi-

camente la rigidità rispetto agli orientamenti, che rappresenta la proprietà di stabilità delle misure di orientamento relativo in presenza di piccole perturbazioni.

Definizione 3.1.4. (Rigidità in $SE(2)$). [15] *Un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è rigido se esiste un intorno \mathcal{U} di $\chi(\mathcal{V}) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$ tale che:*

$$\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V}))) \cap \mathcal{U} = \mathbf{b}_{\mathcal{G}}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V}))) \cap \mathcal{U}, \quad (3.13)$$

dove $\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V}))) \subset (\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$ indica la pre-immagine di $\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V}))$ rispetto la funzione di rigidità.

Questo significa che un framework in $SE(2)$ è rigido se esiste una piccola variazione delle posizioni e degli orientamenti degli agenti, e che questa variazione mantiene invariate sia le misurazioni di orientamento associate al grafo \mathcal{G} , sia quelle associate al grafo \mathcal{K}_n .

L'insieme $\mathbf{b}_{\mathcal{G}}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})))$ contiene tutti gli elementi di $(\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$ che, se presi come stati del framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$, portano alle stesse misure di orientamento relativo rispetto al grafo \mathcal{G} . L'insieme $\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V})))$ contiene tutti gli elementi di $(\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$ che, se presi come stati del framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$, portano alle stesse misure di orientamento relativo rispetto al grafo \mathcal{K}_n . È chiaro che $\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V}))) \subseteq \mathbf{b}_{\mathcal{G}}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})))$ poiché tutti gli stati che portano alle stesse misure di orientamento relativo per \mathcal{K}_n costituiscono un sottoinsieme di tutti gli stati che portano alle stesse misure di orientamento relativo per \mathcal{G} .

Definizione 3.1.5. (Roto-flessibilità (*roto-flexibility*) in $SE(2)$). [15] *Un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è roto-flessibile se esiste un path analitico $\eta : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$ tale che $\eta(0) = \chi(\mathcal{V})$ e*

$$\eta(s) \in \mathbf{b}_{\mathcal{G}}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V}))) - \mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V}))) \quad \forall s \in (0, 1]. \quad (3.14)$$

Dalla Def 3.1.5 se un framework in $SE(2)$ non è rigido allora è roto-flessibile. Infine, esaminiamo la rigidità bearing globale, che estende il concetto di rigidità a un contesto più ampio.

Definizione 3.1.6. (Rigidità globale in $SE(2)$). [15] *Un framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è detto globalmente rigido se ogni framework equivalente a $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è anche congruente a $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$.*

Dalla Def 3.1.6 è chiaro che la rigidità globale in $SE(2)$ implica la rigidità, ma in generale non è vero il contrario.

3.1.2 Proprietà dinamiche di rigidità

Con il termine *moto* o *variazione* di un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ si intende un insieme di velocità per ciascun nodo, sia lineari che angolari, che sono in grado di modificare le posizioni e gli orientamenti degli agenti. Un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ può muoversi lungo un percorso generico $\xi : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$, che rappresenta i valori successivi assunti dallo stato $\chi(\mathcal{V})$ in un intervallo $[t_i, t_f]$, con $t_i, t_f \in \mathbb{R}$ e $t_i \leq t_f$. Al tempo iniziale t_i lo stato è uguale al punto iniziale del percorso, cioè $\chi(\mathcal{V}) = \xi(0)$, mentre all'istante finale t_f lo stato è uguale al punto finale del percorso, cioè $\chi(\mathcal{V}) = \xi(1)$. L'obiettivo è garantire che la derivata iniziale della funzione di rigidità lungo il percorso ξ sia nulla, assicurando in tal modo la costanza delle misure di orientamento durante l'evoluzione del sistema. Di conseguenza bisogna imporre la seguente condizione

$$\frac{d\mathbf{b}_{ij}}{dt} = 0 \quad \forall i, j \text{ tale che } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \quad (3.15)$$

Essendo \mathbf{b}_{ij} una funzione composta, usando la regola di derivazione per funzioni composte, la 3.15 diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial \mathbf{p}_i} \delta \mathbf{p}_i + \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial \mathbf{p}_j} \delta \mathbf{p}_j = 0 \quad \forall i, j \text{ t.c. } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \quad (3.16)$$

dove $\delta \alpha_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$ è la velocità angolare dell' i -esimo agente, $\delta \mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t}$ e $\delta \mathbf{p}_j = \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial t}$ sono le velocità lineare dell' i -esimo e j -esimo agente rispettivamente, e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial \mathbf{R}(\alpha_i)^\top}{\partial \alpha_i} \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \\
 &= -\mathbf{R}(\pi/2) \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \\
 &= -\mathbf{R}(\pi/2) \mathbf{b}_{ij},
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial \mathbf{p}_i} &= \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \\
 &= -\mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\mathbf{P}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial \mathbf{p}_j} &= \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \\
 &= \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\mathbf{P}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

dove $\mathbf{P}(\cdot)$ prende il nome di *operatore proiezione*, ed è definito come

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_d - \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^\top}{\|\mathbf{x}\|^2}, \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{3.20}$$

Questo operatore, dato un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ restituisce la proiezione di questo sul piano ortogonale a \mathbf{x} tramite $\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{y}$. I passaggi delle Equazioni 3.18 e 3.19 derivano da [17](vedi Eq.(130)). Nell'Equazione 3.17 invece il risultato ottenuto è una conseguenza diretta della derivazione matriciale di $\mathbf{R}(\alpha_i)$. L'insieme delle velocità lineari $\{\delta \mathbf{p}_1, \dots, \delta \mathbf{p}_n\}$ e delle velocità angolari $\{\delta \alpha_1, \dots, \delta \alpha_n\}$ costituisce un *moto infinitesimale* o una *variazione infinitesimale* per il framework in $SE(2)$ se le condizioni riportate nell'Equazione 3.16 sono valide, i.e.

$$-\mathbf{R}(\pi/2) \mathbf{b}_{ij} \delta \alpha_i - \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\mathbf{P}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \delta \mathbf{p}_i + \mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\mathbf{P}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \delta \mathbf{p}_j = 0 \tag{3.21}$$

per tutti gli i, j t.c. $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$.

Per un framework in $SE(2)$ con stato $\chi(\mathcal{V})$, un *moto* è definito da

$$\delta\chi(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_1 \\ \delta\alpha_1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{p}_n \\ \delta\alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3.22)$$

Da $\chi(\mathcal{V})$ è utile ricavare

$$\delta\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.23)$$

che è il vettore contenente le velocità lineari di ogni agente, e

$$\delta\chi_{\alpha}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \delta\alpha_1 \\ \vdots \\ \delta\alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.24)$$

che è il vettore contenente le velocità angolari di ogni agente.

Definizione 3.1.7. *La matrice di rigidità (o bearing rigidity matrix) di un framework in $SE(2)$ è definita come la matrice Jacobiana della funzione di rigidità del framework $\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V}))$, i.e.*

$$\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) = \nabla_{\chi} \mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) \in \mathbb{R}^{2m \times 3n}, \quad (3.25)$$

dove

$$\nabla_{\chi} \mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \chi^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \chi^{(n)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{b}_m}{\partial \chi^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{b}_m}{\partial \chi^{(n)}} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial \chi^{(i)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial \mathbf{p}_i} & \frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial \alpha_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \quad (3.27)$$

Se il k -esimo arco è $e_k = (v_i, v_j)$, allora $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{ij}$ e i termini $\frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial \chi^{(r)}}$ con $r \in \{1, \dots, n\}$ sono tutti nulli eccetto $\frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial \chi^{(i)}}$ e $\frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial \chi^{(j)}}$.

Le equivalenze in 3.16 possono ora essere riscritte in una forma più compatta come

$$\mathbf{B}_G(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))\delta\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}) = 0. \quad (3.28)$$

Permutando le colonne della matrice di rigidità, si ottiene la seguente matrice:

$$\tilde{\mathbf{B}}_G(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) = \left[\nabla_{\boldsymbol{\chi}_p} \mathbf{b}_G(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) \quad \nabla_{\boldsymbol{\chi}_\alpha} \mathbf{b}_G(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) \right] = \left[\mathbf{D}_p \quad \mathbf{D}_\alpha \right] \in \mathbb{R}^{2m \times 3n}, \quad (3.29)$$

La matrice in Equazione 3.29 può essere scritta esplicitamente come

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_G(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) &= \left[\text{diag} \left(\left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij})}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \mathbf{R}(\alpha_j)^\top \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^\top \quad - \text{diag} \left([\mathbf{R}(\pi/2) \mathbf{b}_{ij}]_k \right) \mathbf{E}_{out}^\top \right] \\ &= \left[\text{diag} \left(\left[\mathbf{R}(\alpha_i)^\top \frac{\mathbf{P}(\mathbf{p}_{ij})}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^\top \quad - \text{diag} \left([\mathbf{R}(\pi/2) \mathbf{b}_{ij}]_k \right) \mathbf{E}_{out}^\top \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

dove con il termine $[\cdot]_k$ si indica una matrice composta da termini relativi al k -esimo arco, $\bar{\mathbf{E}}$ è definita in Equazione 3.12, e $\mathbf{E}_{out} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è una matrice definita in Eq. 2.5, la quale è relativa al grafo diretto \mathcal{G} . A partire da qui, la condizione fatta per i *moti infinitesimali* riportata nell'Equazione 3.16 può essere riformulata come segue. Un insieme di velocità istantanee lineari e angolari inserite rispettivamente nei vettori $\delta\boldsymbol{\chi}_p(\mathcal{V})$ e $\delta\boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathcal{V})$ costituisce un *moto infinitesimale* per il framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ se

$$\tilde{\mathbf{B}}_G(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\chi}_p(\mathcal{V}) \\ \delta\boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathcal{V}) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.31)$$

Di seguito vengono presentati alcuni risultati importanti relativi alla rigidità infinitesimale in $SE(2)$.

Definizione 3.1.8. (Rigidità infinitesimale in $SE(2)$). [15] *Un framework $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è infinitesimalmente rigido se*

$$\text{Ker}(\mathbf{B}_G(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))) = \text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{K}_n}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))). \quad (3.32)$$

Altrimenti, è infinitesimalmente roto-flessibile in $SE(2)$.

Usando il linguaggio introdotto nella Definizione 3.1.5, se lo stato $\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})$ si muove lungo

un percorso generico $\eta : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$ attraverso *moti infinitesimali*, allora tale percorso è completamente contenuto nell'insieme $\mathbf{b}_{\mathcal{G}}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})))$.

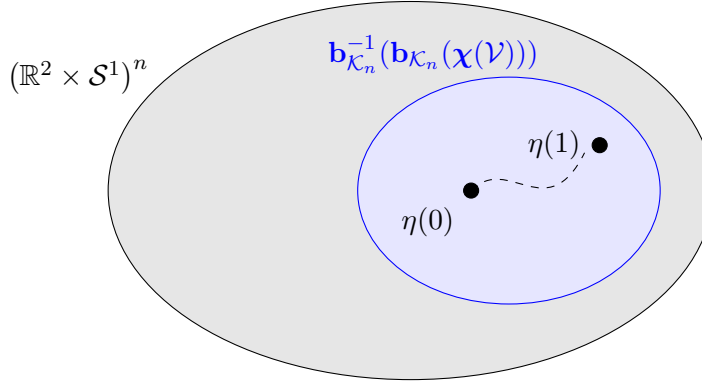


Figura 3.6: Percorso analitico in $(\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1)^n$.

Se, inoltre, si considera l'ipotesi che il framework sia infinitesimalmente rigido, allora il percorso η è completamente contenuto anche nell'insieme $\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}^{-1}(\mathbf{b}_{\mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V})))$, come illustrato in Figura 3.7.

Proposizione 3.1.1. [14] *Per un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$, ogni moto infinitesimale, composto dai vettori di velocità inseriti ordinatamente all'interno di $\delta\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V})$ e $\delta\chi_{\alpha}(\mathcal{V})$, soddisfa la condizione:*

$$\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}))\delta\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) = -\mathbf{F}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V}))\delta\chi_{\alpha}(\mathcal{V}) \quad (3.33)$$

dove

- $\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V})) = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{c} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij}) \\ \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|_k \end{array} \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^{\top}$, dove $\bar{\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{2n \times 2m}$ è la matrice associata a \mathcal{G} riportata nell'Equazione 3.12,
- $\mathbf{F}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) = -\text{diag} \left([\mathbf{R}(\alpha_i)\mathbf{R}(\pi/2)\mathbf{b}_{ij}]_k \right) \mathbf{E}_{out}^{\top}$, dove $\mathbf{E}_{out} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è la matrice relativa a \mathcal{G} definita nella Sezione 2.1.

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene direttamente dallo sviluppo dell'Equazione 3.31. □

La matrice $\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathcal{V})) \in \mathbb{R}^{2m \times 2n}$ è la matrice di *bearing rigidity* in \mathbb{R}^2 . Infatti questa matrice contiene esclusivamente le derivate parziali di $\bar{\mathbf{p}}_k$, con $k \in \{1, \dots, m\}$, rispetto a $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{p}}(i)$ dell' i -esimo agente

$$\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathcal{V})) = \nabla_{\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{p}}} \text{diag}([\mathbf{R}(\alpha_i)]_k) \mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_1}{\partial \mathbf{p}_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_1}{\partial \mathbf{p}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_m}{\partial \mathbf{p}_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_m}{\partial \mathbf{p}_n} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Per un framework $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$, tutti i *moti infinitesimali* che includono velocità angolari non nulle, cioè $\delta \boldsymbol{\chi}_{\alpha}(\mathcal{V}) \neq 0$, sono definiti come *rotazioni coordinate* del framework, e appartengono al *sottospazio delle rotazioni coordinate*, indicato come $\mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{G})$.

Proposizione 3.1.2. [14] *In generale, il sottospazio delle rotazioni coordinate è non-banale, ovvero: $\dim(\mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{G})) \geq 1$.*

Dimostrazione. Vedi dimostrazione in [14], Proposizione III.8. □

Proposizione 3.1.3. [14] *Per il grafo diretto completo \mathcal{K}_n , vale: $\dim(\mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{K}_n)) = 1$.*

Dimostrazione. Vedi dimostrazione in [14], Proposizione III.9. □

I moti che appartengono allo spazio $\text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{K}_n}(\mathcal{V}))$ sono chiamati *triviali*, si ricorda inoltre che

$$\text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{K}_n}(\mathcal{V})) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\mathcal{V})). \quad (3.35)$$

La Proposizione 3.1.2 afferma che le *rotazioni coordinate* per il grafo \mathcal{G} , in generale, non coincidono con le *rotazioni coordinate* per \mathcal{K}_n . In altre parole il *sottospazio delle rotazioni coordinate* $\mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{G})$ non coincide con il *sottospazio delle rotazioni coordinate* $\mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{K}_n)$.

Dalla Proposizione 3.1.3 e dalla Proposizione 3.1.2, la struttura del *sottospazio delle rotazioni coordinate* per il grafo \mathcal{K}_n può essere indicata come

$$\mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{K}_n) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{R}(\pi/2)) \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \mathbf{1}_n \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.36)$$

Nel seguito, se necessario, verrà scartato il caso particolare in cui tutti gli agenti del framework sono allineati in \mathbb{R}^2 . Sotto questa ipotesi, è facile vedere che i *moti infinitesimali* di un framework $(\mathcal{K}_n, \mathbf{p})$ in \mathbb{R}^2 coincidono con le sole traslazioni e scalature, cioè

$$\text{span} \{ \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_2, \chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \} = \text{Ker} \left(\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{K}_n}(\chi(\mathcal{V})) \right). \quad (3.37)$$

Corollario 3.1.0.1. [14] *Un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è infinitesimalmente bearing rigido (IBR) in $SE(2)$ se e solo se*

1. $\text{rank} \left(\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V})) \right) = 2n - 3$
2. $\dim(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{G})) = 1$.

Dimostrazione. Vedi dimostrazione in [14], Corollario III.10. □

Teorema 3.1.1. [14] *Un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è infinitesimalmente rigido (IBR) se e solo se $\text{rank} \left(\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) \right) = 3n - 4$.*

Dimostrazione. Per dimostrazione dettagliata si veda [14], Teorema III.6. □

Il Teorema 3.1.1 è importante perché fornisce una condizione sul rango della matrice di rigidità da impiegare per verificare se un framework in $SE(2)$ è infinitesimalmente rigido. Nelle Figure 3.7 e 3.8 sono riportati alcuni esempi di framework $SE(2)$ infinitesimalmente rigidi e non infinitesimalmente rigidi.

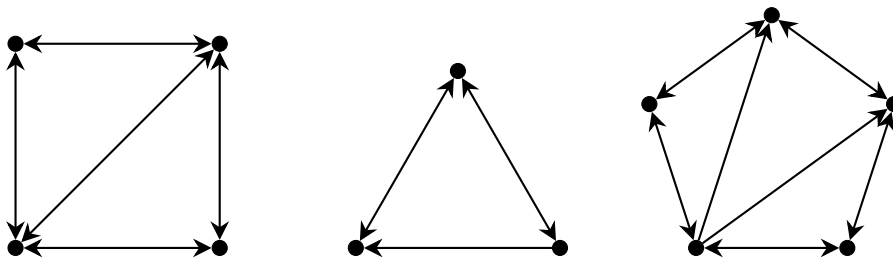


Figura 3.7: Esempio di framework infinitesimalmente rigidi in $SE(2)$.

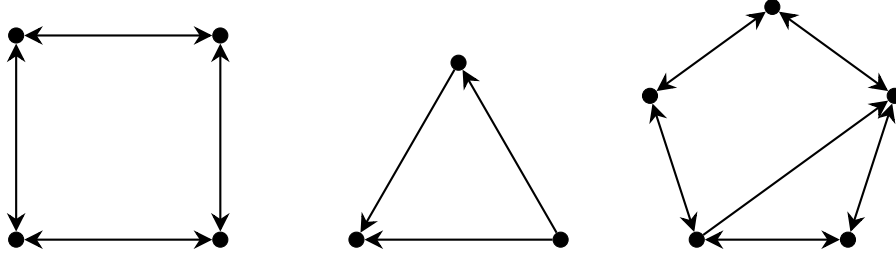


Figura 3.8: Esempio di framework non infinitesimalmente rigidi in $SE(2)$.

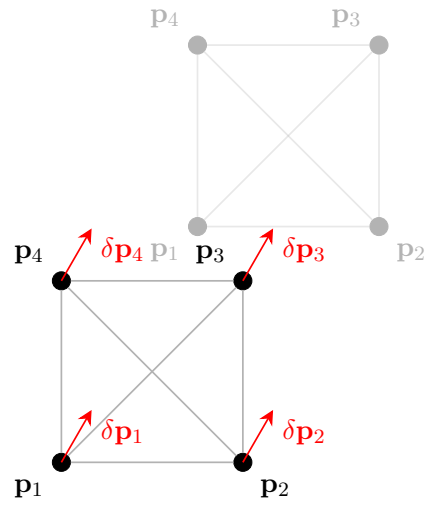
Proposizione 3.1.4. *Per un framework in $SE(2)$ infinitesimalmente rigido, si ha*

$$\text{Ker} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) \right) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{G}) \right\}, \quad (3.38)$$

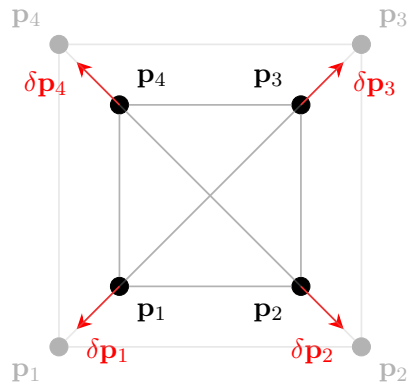
dove $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{G}) = \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{K}_n)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione è semplicemente derivata dai risultati precedenti. \square

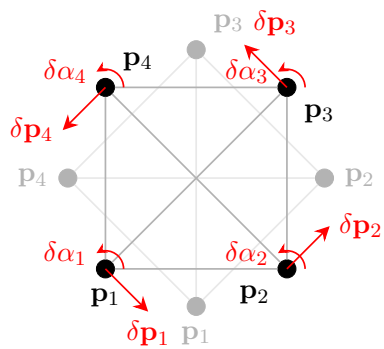
La Proposizione 3.1.4 fornisce esplicitamente la struttura dei *moti infinitesimali* di un framework in $SE(2)$ infinitesimalmente rigido. Nella Figura 3.9 sono riportate le *variazioni infinitesimali* che formano la base di $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{K}_n)$, applicate ad un framework in $SE(2)$ con formazione quadrangolare e grafo di rilevamento pari al grafo completo \mathcal{K}_4 . Le posizioni di partenza sono indicate in nero, mentre le posizioni dopo il movimento sono indicate in grigio. I sistemi di riferimento locali sono stati omessi. Le frecce rosse indicano le velocità lineari istantanee, $\delta \mathbf{p}_i$, e le velocità angolari istantanee, $\delta \alpha_i$. Oltre alle figure esplicative, è importante ricordare che le velocità agiscono in un istante infinitesimale di tempo. Per semplicità, il sistema di riferimento globale coincide con il centroide delle posizioni iniziali. Nella Figura 3.9a, le velocità istantanee sono assunte come $\delta \chi_{\mathbf{p}} \in \text{span}\{\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_2\}$, e $\chi_{\alpha}(\mathcal{V}) = 0$, quindi gli agenti vengono traslati in modo uniforme e i sistemi di riferimento locali rimangono paralleli a quelli di partenza. Nella Figura 3.9b, le velocità istantanee sono assunte come $\delta \chi_{\mathbf{p}} \in \text{span}\{\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V})\}$ e $\chi_{\alpha}(\mathcal{V}) = 0$. Per la particolare scelta di $\delta \mathbf{p}_1, \delta \mathbf{p}_2, \delta \mathbf{p}_3$ e $\delta \mathbf{p}_4$ i quattro agenti divergono equamente lungo le diagonali del quadrato, mentre i sistemi di riferimento locali rimangono paralleli a quelli di partenza. Nella Figura



(a) Traslazione



(b) Scaling



(c) Rotazione

Figura 3.9: Moti infinitesimali e banali, applicati ad un framework in $SE(2)$ con formazione quadrata.

3.9c, le velocità istantanee sono assunte come

$$\begin{bmatrix} \delta\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \delta\chi_{\alpha}(\mathcal{V}) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{K}_n). \quad (3.39)$$

I quattro agenti ruotano attorno al centro di \mathcal{F}_w , grazie all'azione combinata del vettore di moto infinitesimale $\delta\mathbf{p}_i$, perpendicolare al vettore \mathbf{p}_i , e della rotazione dell'agente i -esimo $\delta\alpha_i$.

In sintesi, un movimento generico composto da moti infinitesimali per un framework in $SE(2)$ infinitesimalmente rigido è dato dalla combinazione di traslazioni (2 gradi di libertà), dilatazioni o contrazioni (1 grado di libertà) e rotazioni coordinate (1 grado di libertà) dell'intero framework.

Infine, per completezza, viene riportata la Definizione 3.1.9 poiché sarà utile nei capitoli successivi.

Definizione 3.1.9. (Rigidità *bearing* infinitesimale minima (MIBR)) [15]. *Un framework in $SE(2)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ è minimamente e infinitesimalmente rigido se per ogni grafo diretto \mathcal{G}' ottenuto rimuovendo un qualsiasi arco da \mathcal{G} , il framework risultante $(\mathcal{G}', \mathbf{p}, \alpha)$ è infinitesimalmente roto-flessibile in $SE(2)$.*

3.2 *Bearing rigidity theory in $SE(3)$*

In questa sezione considereremo che un agente può muoversi nello spazio 3D traslando e anche ruotando attorno a se stesso. Se una certa formazione include n agenti, essi sono ben rappresentati attraverso un insieme di sistemi di riferimento in 3D, denotati come $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^n$. Infatti un sistema di riferimento in 3D rappresenta in maniera completa la posizione e l'orientamento di un agente nello spazio 3D.

Poiché la maggior parte dei test e dei calcoli che verranno sviluppati nei capitoli successivi si basano su framework in $SE(2)$, e considerando che in letteratura sono già ampiamente trattati numerosi teoremi e definizioni pertinenti al nostro lavoro (come ad esempio in [16] o [18]), ci limiteremo a presentare un sommario di tali concetti, al fine di mantenere coerenza con quanto sarà trattato in seguito. È opportuno sottolineare che, avendo affrontato la teoria in $SE(2)$ in modo esaustivo, ripetere gli stessi calcoli e le medesime premesse in $SE(3)$ risulta in gran parte superfluo, dato che molte delle considerazioni teoriche sono analoghe. Procederemo ora con una sintesi delle principali definizioni relative alla *bearing rigidity* in $SE(3)$.

La struttura elementare che raccoglie tutte le informazioni sulla posizione e sull'assetto di ciascun agente, nonché le interazioni esistenti tra ogni coppia di agenti, è il framework in $SE(3)$.

Definizione 3.2.1 ([16]). *Un framework $SE(3)$ è una terna $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$, dove $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ è un grafo diretto, mentre la funzione di posizione $\mathbf{p} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e la funzione d'orientamento $\mathbf{a} : \mathcal{V} \rightarrow SO(3)$ associano ciascun vertice di \mathcal{G} con un elemento dell'insieme $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.*

La Definizione 3.2.1 è molto simile alla Definizione 3.1.1, a parte la funzione di orientamento, che in questo caso associa ad ogni nodo una matrice di rotazione \mathbf{R}_i in $SO(3)$, quindi possiamo scrivere che $\mathbf{a}(v_i) = \mathbf{R}_i$.

Il gruppo *Euclideo speciale* è definito come

$$SE(3) = \{(\mathbf{p}, \mathbf{R}) : \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in SO(3)\}, \quad (3.40)$$

dove $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ rappresenta una posizione generica nello spazio 3D, e $\mathbf{R} \in SO(3)$ rappre-

senta un orientamento generico nello spazio 3D. La Figura 3.10 mostra un esempio di framework in $SE(3)$ con il suo grafo associato \mathcal{G} . Nella Figura 3.10b gli archi diretti di \mathcal{G} sono disegnati in grigio, e i sistemi di riferimento locali posizionati sugli agenti sono arbitrariamente ruotati rispetto al sistema di riferimento mondiale \mathcal{F}_w .

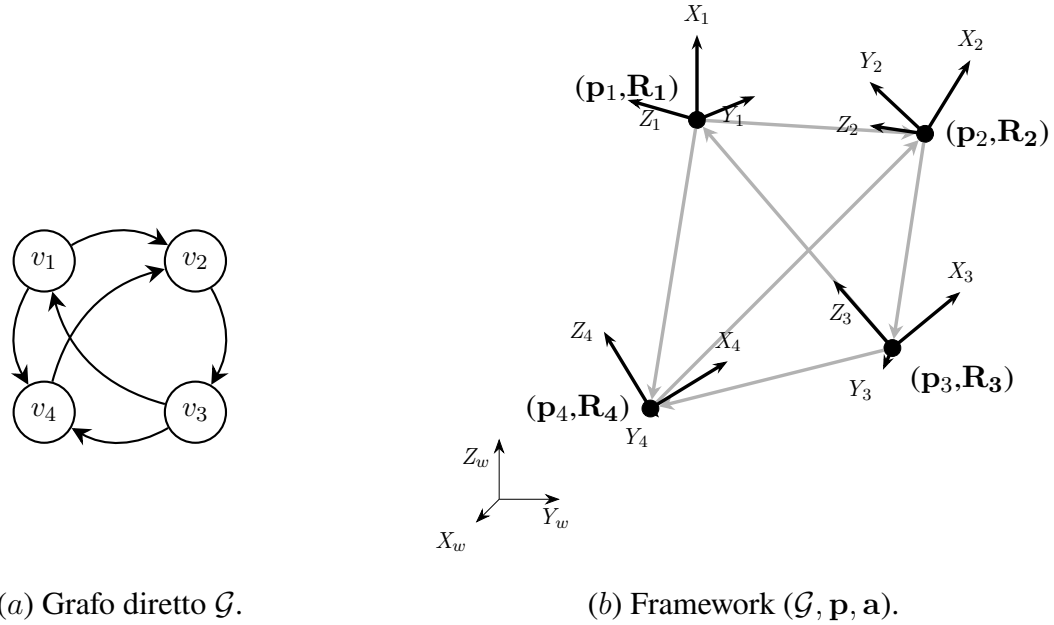


Figura 3.10: Esempio di framework in $SE(3)$.

Dato un framework $SE(3)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$, la funzione definita come

$$\chi : \{1, \dots, n\} \rightarrow SE(3) : i \mapsto \chi(i) = (\mathbf{p}_i, \mathbf{R}_i) \quad (3.41)$$

è la sua funzione di stato. Questa funzione associa ciascun nodo di \mathcal{G} con uno stato, che in questo caso è rappresentato dalla posizione e dall'orientamento dell'agente corrispondente.

Il vettore che include gli stati di tutti gli agenti del framework è

$$\chi(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \chi(1) \\ \vdots \\ \chi(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1, \mathbf{R}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{p}_n, \mathbf{R}_n) \end{bmatrix} \in SE(3)^n, \quad (3.42)$$

e rappresenta lo stato dell'intero framework. Inoltre, è utile estrarre da $\chi(\mathcal{V})$ il vettore

$$\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n}, \quad (3.43)$$

che contiene le posizioni di tutti gli agenti del framework.

Non è possibile inserire gli orientamenti in 3D all'interno di un unico vettore, poiché questi non possono più essere rappresentati da una singola variabile (α), come avviene nel caso di $SE(2)$. In $SE(3)$, infatti, gli orientamenti richiedono tre parametri (α , ϕ e θ) distinti per essere descritti.

3.2.1 Proprietà statiche di rigidità

Per il caso $SE(3)$, la definizione della misura di orientamento relativa tra due agenti connessi da un arco rimane analoga a quella esposta per il caso $SE(2)$. Anche in questo contesto, il grafo diretto associa a ciascun arco una misura di orientamento relativo, definita rispetto al sistema di riferimento locale del nodo considerato. L'unica differenza rilevante risiede nella dimensionalità delle variabili coinvolte, ma il formalismo e l'approccio rimangono invariati rispetto a quanto già discusso per $SE(2)$. Pertanto, si rimanda a quelle definizioni per ulteriori dettagli.

Le proprietà di congruenza e equivalenza sono riportate in [16](Def.5) e non vengono esposte direttamente qui, poiché esprimono lo stesso concetto visto in $SE(2)$.

La funzione di rigidità di un framework in $SE(3)$ (\mathcal{G} , \mathbf{p} , \mathbf{a}) raccoglie tutte le misure relative al grafo \mathcal{G} ed è denotata come $\mathbf{b}_{\mathcal{G}} : SE(3)^n \rightarrow (\mathcal{S}^2)^m$, definita come:

$$\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

dove \mathbf{b}_k indica la misura di orientamento relativo associata al k -esimo arco di \mathcal{G} . Questa espressione può essere riscritta come:

$$\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) = \text{diag} \left(\left[\frac{\mathbf{R}_i^T (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^T \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}), \quad (3.45)$$

dove il termine $[\cdot]_k$ indica una matrice associata al lato k e

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3n \times 3m}, \quad (3.46)$$

con $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrice di incidenza del grafo \mathcal{G} .

La definizione di rigidità, roto-flessibilità e di rigidità globale sono riportate in [16](Def. 7,8 e 6 rispettivamente).

3.2.2 Proprietà dinamiche di rigidità

Verrà esposta nelle prossime righe quella che è la *rigidità infinitesimale* per un framework in $SE(3)$. Prima definiamo le *velocità infinitesimali* o *moti infinitesimali*, come l'insieme delle velocità lineari $\{\delta \mathbf{p}_1, \dots, \delta \mathbf{p}_n\}$ e delle velocità angolari $\{\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n\}$, dove $\delta \mathbf{p}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$ è la velocità lineare di un agente espressa in \mathcal{F}_w , e $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} \in \mathbb{R}^3$ è il vettore della velocità angolare espresso secondo il sistema di riferimento locale \mathcal{F}_i , il quale attraverso il modulo esprime la velocità di rotazione dell' i -agente, e attraverso la direzione l'asse di rotazione.

Definizione 3.2.2 (Matrice di rigidità di un framework in $SE(3)$). *La matrice di rigidità di un framework in $SE(3)$ con stato $\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})$ è definita come*

$$\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{m1} & \cdots & \mathbf{B}_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3m \times 6n}, \quad (3.47)$$

dove, considerando l'arco $e_k = (v_i, v_j)$, i blocchi \mathbf{B}_{kr} con $r \in \{1, \dots, n\}$ sono tutti nulli eccetto:

$$\mathbf{B}_{ki} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij}) & \mathbf{R}_i^T \\ -\frac{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij})}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \mathbf{R}_i^T & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{B}_{kj} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij})}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \mathbf{R}_i^\top & \mathbf{0} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 6}. \quad (3.49)$$

L'operatore $\mathbf{P}(\cdot)$ è stato definito in Eq. 3.20, l'operatore $\mathbf{S}(\cdot)$, associa ad un vettore $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^3$ una matrice anti-simmetrica, pari a

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Questa matrice dato un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, corrisponde a $\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, dove \times indica il prodotto vettoriale.

Visto che l'Equazione 3.47 corrisponde con la matrice Jacobiana calcolata rispetto la funzione di rigidità $\mathbf{b}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))$, possiamo scrivere

$$\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) \delta\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}) = \mathbf{0}, \quad (3.51)$$

dove

$$\delta\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{p}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6n}, \quad (3.52)$$

ed è utile ricavarsi da questa anche i vettori

$$\delta\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n}, \quad (3.53)$$

e

$$\delta\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{a}}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n}. \quad (3.54)$$

Da queste Equazioni possiamo ottenere anche la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))$ che è ottenuta dalla $\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))$

permutando le colonne:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) &= \left[\text{diag} \left(\left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij})}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \mathbf{R}_i^T \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^\top \quad \text{diag}([\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij})]_k) \bar{\mathbf{E}}_{out}^\top \right] \\
 &= \left[\text{diag} \left(\left[\mathbf{R}_i^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij})}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^\top \quad \text{diag}([\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij})]_k) \bar{\mathbf{E}}_{out}^\top \right] \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_a \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Definizione 3.2.3 (Rigidità infinitesimale). *Un framework in $SE(3)$ è infinitesimamente rigido se*

$$\text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))) = \text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{K}_n}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))). \tag{3.56}$$

Altrimenti è detto infinitesimamente roto-flessibile in $SE(3)$.

Anche in $SE(3)$ è soddisfatta la condizione

$$\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}_p(\mathcal{V})) = -\mathbf{F}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))\delta\boldsymbol{\chi}_a(\mathcal{V}), \tag{3.57}$$

dove

- $\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}_p(\mathcal{V})) = \text{diag} \left(\left[\frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij})}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} \right]_k \right) \bar{\mathbf{E}}^\top$
- $\mathbf{F}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))\delta\boldsymbol{\chi}_a(\mathcal{V}) = \text{diag}([\mathbf{R}_i \mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij})]_k) \bar{\mathbf{E}}_{out}^\top$.

Per un framework in $SE(3)$ ($\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a}$), tutti i *moti infinitesimali* che includono velocità angolari non nulle, cioè $\delta\boldsymbol{\chi}_a(\mathcal{V}) \neq 0$, sono definiti come *rotazioni coordinate* del framework, e appartengono al *sottospazio delle rotazioni coordinate*, indicato come $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{G})$. In generale le coordinate di questo sottospazio non sono banali, i.e. $\dim(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{G})) \geq 3$, ma per un grafo completo \mathcal{K}_n risulta invece che $\dim(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{G})) = 3$. Per la dimostrazione si veda Prop. 2 in [16].

I moti appartenenti al sottospazio $\text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{K}_n}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})))$ sono chiamati *triviali*.

Corollario 3.2.0.1. *Un framework in $SE(3)$ ($\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a}$) è infinitesimamente rigido se e solo se:*

1. $\text{rank}(\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}_p(\mathcal{V}))) = 3n - 4;$
2. $\dim(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(\mathcal{G})) = 3.$

Teorema 3.2.1. *Un framework in $SE(3)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$ è infinitesimalmente rigido se e solo se $\text{rank}(\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V}))) = 6n - 7$.*

Quest'ultimo teorema è molto importante perchè ci permette di verificare la rigidità di un framework in $SE(3)$ attraverso il calcolo di un rango di una matrice.

Come in $SE(2)$ il Teorema e Corollario appena enunciato vale solo se vengono scartati i casi in cui gli agenti sono allineati. Sotto queste ipotesi è facile verificare che i moti infinitesimali in \mathbb{R}^3 associati ad un grafo completo \mathcal{K}_n sono esclusivamente moti di traslazione, di espansioni e contrazioni uniformi della formazione:

$$\text{span} \{ \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3, \chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \} = \text{Ker} \left(\mathbf{B}_{\parallel, \mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) \right). \quad (3.58)$$

Vengono riportati per completezza i seguenti enunciati.

Proposizione 3.2.1. *Per un framework in $SE(3)$ infinitesimalmente rigido $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$, si ha che*

$$\text{Ker} \left[\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) \right] = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{G}) \right\}, \quad (3.59)$$

dove $\mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{G}) = \mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{K}_n)$.

La Proposizione 3.2.1 descrive la struttura dei moti infinitesimali per un framework in $SE(3)$ infinitesimalmente rigido. In particolare, i termini che compongono il nucleo della matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V}))$ sono interpretati come segue:

- Il primo termine è caratterizzato da $\delta\chi_{\mathbf{p}} \in \text{span}\{\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_3\}$ e $\delta\chi_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$. Questo moto corrisponde a una traslazione rigida dell'intero framework.
- Il secondo termine è dato da $\delta\chi_{\mathbf{p}} \in \text{span}\{\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V})\}$ e $\delta\chi_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$. Tale termine rappresenta una dilatazione o una contrazione uniforme del framework rispetto all'origine del sistema di riferimento globale O_w .
- Il terzo termine è descritto da

$$\begin{bmatrix} \delta\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \delta\chi_{\mathbf{a}}(\mathcal{V}) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{\circ}(\mathcal{K}_n),$$

dove $\mathcal{R}_\cup(\mathcal{K}_n)$ rappresenta il *sottospazio delle rotazioni coordinate*. Questo termine induce una rotazione rigida dell'intero framework attorno al suo centroide, con una velocità angolare arbitraria ω_f . Tale rotazione preserva le misure di orientamento relativo e coinvolge simultaneamente sia i sistemi di riferimento locali sia il framework nel suo complesso.

Il sottospazio $\mathcal{R}_\cup(\mathcal{K}_n)$ è definito come segue:

$$\mathcal{R}_\cup(\mathcal{K}_n) = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}, \quad (3.60)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{S}(\mathbf{e}_1))\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \text{diag}([\mathbf{R}_i^\top]_i) \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{S}(\mathbf{e}_2))\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \text{diag}([\mathbf{R}_i^\top]_i) \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{S}(\mathbf{e}_3))\chi_{\mathbf{p}}(\mathcal{V}) \\ \text{diag}([\mathbf{R}_i^\top]_i) \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

I vettori $\mathbf{e}_1 = [1\ 0\ 0]^\top$, $\mathbf{e}_2 = [0\ 1\ 0]^\top$ ed $\mathbf{e}_3 = [0\ 0\ 1]^\top$ sono i vettori della base *canonica* di \mathbb{R}^3 , espressi secondo \mathcal{F}_w . I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 , rappresentano un rotazione rigida del framework nello spazio attorno all'asse X_w, Y_w e Z_w . Si ricorda che gli assi di rotazione di agente i sono espressi secondo il sistema di riferimento locale i -esimo.

Definizione 3.2.4 (Rigidità minima infinitesimale). *Un framework $SE(3)$ $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$ è minimamente e infinitesimalmente bearing rigido se, per qualsiasi grafo orientato \mathcal{G}' ottenuto rimuovendo un qualsiasi arco da \mathcal{G} , il framework risultante $(\mathcal{G}', \mathbf{p}, \mathbf{a})$ è infinitesimalmente roto-flessibile in $SE(3)$.*

Un framework $SE(3)$ è rigido, quindi, esclusivamente se i moti infinitesimali sono triviali, ovvero se ogni moto che $\in \text{Ker}(\mathbf{B}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})))$ è la composizione dei moti associati allo scaling, traslazione e rotazione. Questo vuol dire che facendo muovere ogni nodo di un framework secondo questa combinazione di vettori, non viene alterato il suo pattern.

3.3 Definizione della matrice simmetrica di rigidità

È utile introdurre la matrice simmetrica di rigidità (Symmetric Bearing Rigidity Matrix, SBRM), denotata con $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$. Questa è definita come:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}} := \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))^\top \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V})) \in \mathbb{R}^{cn \times cn}, \quad (3.61)$$

dove $\tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}))$ rappresenta la matrice di rigidità e $c = 3$ se siamo in $SE(2)$ oppure $c = 6$ se siamo in $SE(3)$. Questa matrice, per come è stata definita, è una matrice quadrata la cui dimensione dipende solo dal numero di agenti n . Le proprietà di $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ verranno analizzate nel capitolo successivo.

4

STUDIO DELLA SBRM

In questo capitolo andremo a sviluppare e studiare la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$, capire nello specifico da cosa dipenda e trovare una formula generale che mi permetta di esprimerla nel modo più semplice possibile. Lo studio è stato fatto al fine di rendere più agevole l'analisi degli autovalori fatta in seguito. Nella prima parte si è studiato un framework con formazione triangolare in $SE(2)$ e poi estrapolato la struttura generale della $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$. Nella seconda parte si è fatto lo stesso procedimento, ma prendendo come caso di studio un framework $SE(3)$ con formazione tetraedrica.

4.1 Introduzione

Nel Capitolo 3 abbiamo introdotto il concetto di rigidità in $SE(2)$ e in $SE(3)$, definito la matrice di \mathbf{B}_G e le condizioni matematiche affinché un sistema multi-agente sia rigido. Dal Teorema 3.1.1 abbiamo estrapolato una importante condizione di rigidità, ovvero che

$$\text{rank}(\mathbf{B}_G(\chi(\mathcal{V}))) = cn - c - 1, \quad (4.1)$$

dove n è il numero di agenti del sistema e $c = 3$ nel caso $SE(2)$ oppure $c = 6$ nel caso $SE(3)$ rispettivamente. Quindi dall' Equazione 4.1 possiamo intuire che la proprietà di IBR sia di tipo binario.

Proposizione 4.1.1. *Data una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matrice $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ è sempre simmetrica.*

Possiamo ora, al fine di analizzare quantitativamente il ruolo della configurazione e delle interazioni tra gli agenti, introdurre i seguenti concetti associati alla matrice simmetrica di rigidità $\tilde{\mathbf{B}}_{G_{\text{sim}}}$. Dalla matrice simmetrica di rigidità definita in Eq. 3.61, è possibile determinare il vettore $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{cn}$, il quale raccoglie gli autovalori λ_i (con $i = 1, \dots, cn$), ordinati in modo crescente. È dimostrabile infatti che il numero di autovalori nulli della $\tilde{\mathbf{B}}_{G_{\text{sim}}}$, i.e. $\lambda_i = 0$, coincide con $\dim(\text{Ker}(\tilde{\mathbf{B}}_{G_{\text{sim}}}))$, cioè

$$\#\{\lambda_i = 0\} = \dim(\text{Ker}(\tilde{\mathbf{B}}_{G_{\text{sim}}})) = \dim(\text{Ker}(\tilde{\mathbf{B}}_G)) \quad (4.2)$$

Quanto appena detto è una proprietà fondamentale delle matrici *simmetriche*

Proposizione 4.1.2. *Ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile.*

Quindi la $\tilde{\mathbf{B}}_{G_{\text{sim}}}$ è sempre diagonalizzabile. Essendo diagonalizzabile vuol dire che

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \quad \forall i = \{1, \dots, cn\}, \quad (4.3)$$

dove $m_a(\cdot)$ e $m_g(\cdot)$ sono rispettivamente la molteplicità algebrica e geometrica dell'

i -esimo autovalore della matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$. Dall'Equazione 4.2 possiamo affermare che

$$m_a(\lambda_0) = \dim(\text{Ker}(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}})) \quad \text{con } \lambda_0 = \{\lambda \in \sigma(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}) : \lambda = 0\}, \quad (4.4)$$

dove $\sigma(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}})$ è l'insieme degli autovalori di $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$. L'Eq. 4.2 è stata quindi dimostrata. La condizione di rigidità impone che

$$\dim(\text{Ker}(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}})) = \dim(\text{Ker}(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}})) = c + 1, \quad (4.5)$$

dove si ricorda che $c = 3$, se framework in $SE(2)$ oppure $c = 6$, se framework in $SE(3)$. A questo punto si può dedurre che la molteplicità algebrica di λ_0 sia la chiave per lo studio della IBR intesa come proprietà quantificabile. Sapendo che la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ è semi definita positiva, i.e. $\lambda_i \geq 0$ allora se il framework è IBR vuol dire che i primi $c + 1$ elementi del vettore $\boldsymbol{\lambda}$ saranno pari a zero. Se invece il sistema è infinitesimalmente roto-flessibile allora avremo una molteplicità algebrica $> c + 1$ e quindi almeno $\lambda_{c+2} = 0$. È chiaro ora che l'autovalore λ_{c+2} rappresenta un parametro *critico*. Infatti possiamo constatare che il suo valore sia un indicatore dell'infinitesima rigidità di un framework: se esso è uguale a zero, vuol dire che $m_a(\lambda_0) > c + 1$ e quindi il sistema non è più rigido, se invece $\lambda_{c+2} \neq 0$ allora il sistema è IBR. Ma possiamo dire anche che questo autovalore *critico*, ci da un valore quantitativo del *grado* di rigidità di un sistema multi-agente, più questo sarà vicino allo zero e più sapremo che il framework sta tendendo alla roto-flessibilità. Al contrario invece avremmo che più questo valore sarà elevato e più sapremo che il sistema si sta "irrigidendo", allontanandosi dalla non-rigidità. Questo ragionamento risulta cruciale per lo studio della rigidità che faremo in seguito, il quale si riconduce al solo studio dell'autovalore *critico* λ_{c+2} .

$$\text{Studio della rigidità} \Rightarrow \text{Studio di } \lambda_{c+2}. \quad (4.6)$$

Nel nostro caso di studio allora dovremmo concentrarci su λ_5 per il caso di framework in $SE(2)$, e su λ_8 per il caso di framework in $SE(3)$. Questi saranno i nostri indicatori di rigidità. A titolo di esempio nella Figura 4.1, sono riportati tre esempi di framework con stesso grafo di rilevamento \mathcal{G} , ma con posizioni degli agenti diverse. Nel primo

caso abbiamo una disposizione a quadrato con $l = 5$ e $\lambda_5 = 0.0082$, nel secondo invece abbiamo $l = 7$ e $\lambda_5 = 0.0042$, e nel terzo caso abbiamo una disposizione non ordinata in cui $\lambda_5 = 0.0022$. Il framework meno rigido risulta quindi essere $\mathcal{G}, \mathbf{p}'', \alpha''$. Si procederà nelle prossime Sezioni a studiare la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ al fine di capire come gli autovalori *critici* sono influenzati da \mathcal{G}, \mathbf{p} e α (o \mathbf{R}_i).

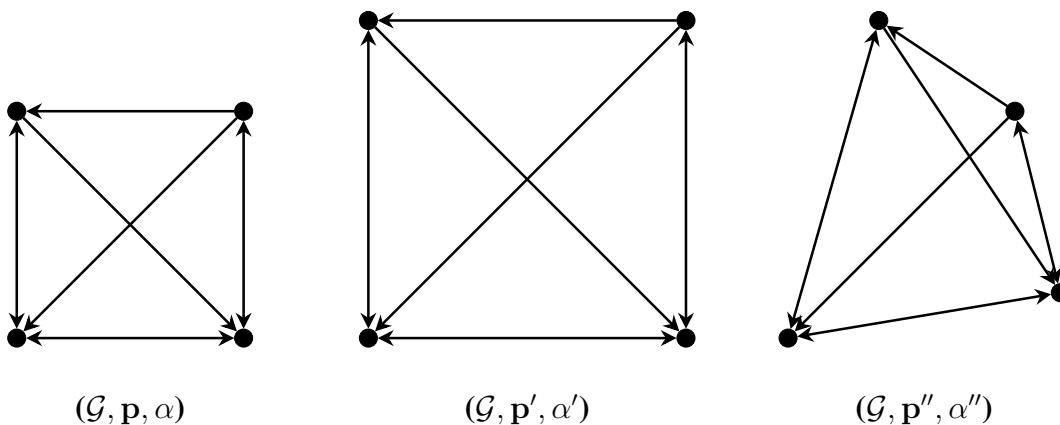


Figura 4.1: Confronto tra 3 framework con stesso grafo di rilevamento \mathcal{G} .

4.2 Analisi SBRM in $SE(2)$

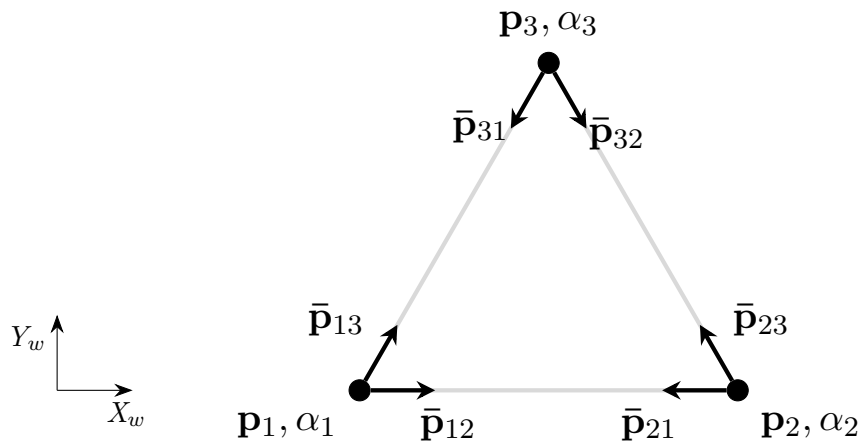


Figura 4.2: Disposizione triangolare di un sistema multi-agente: triangolo equilatero con $l = 5$.

Partiamo dal caso più semplice, in cui abbiamo un sistema multi-agente con disposizione triangolare. Per semplicità abbiamo supposto che la figura sia un triangolo di tipo equilatero (Figura 4.2). Supponiamo poi che ogni agente sia in grado di misurare il *bearing* di ogni altro agente, ovvero che il grafo associato al sistema sia *completo* (\mathcal{K}_3). $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ e

α_1, α_2 e α_3 sono rispettivamente le coordinate e gli orientamenti degli agenti del sistema, rispetto \mathcal{F}_w . In Figura 4.2 si sono riportate anche le misura dell'orientamento relativo espresse rispetto \mathcal{F}_w , i.e. $\bar{\mathbf{p}}_{ij}$. Si considerano poi $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(\alpha_i)$ con $i = 1, 2, 3$ le matrici di rotazione di ogni agente. Fatte queste premesse possiamo espandere le formule viste nell'Equazione 3.29 nel Capitolo 3:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}} = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 9} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})}{\|\mathbf{p}_{12}\|} & +\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})}{\|\mathbf{p}_{12}\|} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})}{\|\mathbf{p}_{13}\|} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & +\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})}{\|\mathbf{p}_{13}\|} \\ +\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{21})}{\|\mathbf{p}_{21}\|} & -\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{21})}{\|\mathbf{p}_{21}\|} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})}{\|\mathbf{p}_{23}\|} & +\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})}{\|\mathbf{p}_{23}\|} \\ +\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{31})}{\|\mathbf{p}_{31}\|} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{31})}{\|\mathbf{p}_{31}\|} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & +\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{32})}{\|\mathbf{p}_{32}\|} & -\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{32})}{\|\mathbf{p}_{32}\|} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 6} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_p \mathbf{R}_1^\top \bar{\mathbf{p}}_{12} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -\mathbf{R}_p \mathbf{R}_1^\top \bar{\mathbf{p}}_{13} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & -\mathbf{R}_p \mathbf{R}_2^\top \bar{\mathbf{p}}_{21} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & -\mathbf{R}_p \mathbf{R}_2^\top \bar{\mathbf{p}}_{23} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & -\mathbf{R}_p \mathbf{R}_3^\top \bar{\mathbf{p}}_{31} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & -\mathbf{R}_p \mathbf{R}_3^\top \bar{\mathbf{p}}_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 3} \quad (4.9)$$

con: $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})$

La SBRM dall'Equazione 3.61 risulta essere

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}} = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}^\top \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_a \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_a \\ \mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n} \quad (4.10)$$

Nel nostro caso specifico, con $n = 3$ la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$. Per semplicità di stesura si porrà d'ora in avanti $\frac{1}{\|\mathbf{p}_{ij}\|} = s_{ij}$. Prima di procedere, si possono ricavare direttamente

dalla definizione di $\mathbf{P}(\cdot)$ e non solo, le seguenti uguaglianze:

1. $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij})\bar{\mathbf{p}}_{ij} = 0$
2. $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij}) = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ji})$
3. $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij})^\top = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij})$
4. $s_{ij} = s_{ji}$
5. $\bar{\mathbf{p}}_{ij} = -\bar{\mathbf{p}}_{ji}$

Consideriamo ora, esclusivamente l'*operatore proiezione* $\mathbf{P}(\cdot)$, la cui definizione si trova in Eq. 3.20, è facile verificare la seguente serie di uguaglianze

$$\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij})^\top \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij}) = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ji})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ji}) = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ji}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (4.11)$$

Considerando anche un ragionamento di natura geometrica, quanto appena descritto risulta coerente: infatti, la proiezione ripetuta di un vettore \mathbf{x} su un piano ortogonale a $\bar{\mathbf{p}}_{ij}$, mi da lo stesso output di una proiezione singola, i.e. come riportato in Equazione 4.11.

Andiamo ora a sviluppare ogni elemento della matrice di Equazione 4.10. L'espressione della $\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p$ è stata ricavata dalle Equazioni 4.8 e 4.11, applicando la proprietà 3:

$$\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 \\ -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 & \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 \\ -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 & \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (4.12)$$

La matrice $\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p$ ha dimensione 6×6 nel caso in esame. Dalla 4.9 si ricava invece una matrice diagonale di dimensioni 3×3 pari a:

$$\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{12}^\top \bar{\mathbf{p}}_{12} + \bar{\mathbf{p}}_{13}^\top \bar{\mathbf{p}}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{p}}_{21}^\top \bar{\mathbf{p}}_{21} + \bar{\mathbf{p}}_{23}^\top \bar{\mathbf{p}}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{p}}_{31}^\top \bar{\mathbf{p}}_{31} + \bar{\mathbf{p}}_{32}^\top \bar{\mathbf{p}}_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.13)$$

Dalla 4.13 si può notare che $\bar{\mathbf{p}}_{ij}^\top \bar{\mathbf{p}}_{ij} = \|\bar{\mathbf{p}}_{ij}\| = 1$. La matrice nel caso specifico che stiamo analizzando noi, quindi, risulta:

$$\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Ora, consideriamo la seguente uguaglianza, facilmente verificabile

$$\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij})^\top \mathbf{R}_p \bar{\mathbf{p}}_{ij} = \mathbf{R}_p \bar{\mathbf{p}}_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}. \quad (4.15)$$

Quindi gli ultimi due termini dell' Equazione 3.61, sfruttando l'Equazione 4.15, diventano

$$\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_a = \bar{\mathbf{R}}_p \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{12} s_{12} + \bar{\mathbf{p}}_{13} s_{13} & \bar{\mathbf{p}}_{12} s_{12} & \bar{\mathbf{p}}_{13} s_{13} \\ -\bar{\mathbf{p}}_{12} s_{12} & -\bar{\mathbf{p}}_{12} s_{12} + \bar{\mathbf{p}}_{23} s_{23} & \bar{\mathbf{p}}_{23} s_{23} \\ -\bar{\mathbf{p}}_{13} s_{13} & -\bar{\mathbf{p}}_{23} s_{23} & -\bar{\mathbf{p}}_{13} s_{13} - \bar{\mathbf{p}}_{23} s_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}, \quad (4.16)$$

e banalmente

$$\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_p = \left(\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_a \right)^\top, \quad (4.17)$$

dove si è definito

$$\bar{\mathbf{R}}_p = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{R}_p \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (4.18)$$

e tenendo conto che $\bar{\mathbf{p}}_{ij} = -\bar{\mathbf{p}}_{ji}$ e $s_{ij} = s_{ji}$. Abbiamo ora la struttura completa della matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ in $SE(2)$ per il caso particolare $n=3$ e grafo completo ($m=6$).

La cosa più importante da notare è che la matrice **non** dipende dalle matrici di rotazione dei singoli agenti. Dai calcoli appena eseguiti, si osserva che le matrici di rotazione \mathbf{R}_i , associate a ciascun agente i e che rappresentano il suo orientamento rispetto al sistema di riferimento \mathcal{F}_w , si semplificano. Di conseguenza, nelle espressioni delle sottomatrici della matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$, tali matrici di rotazione non compaiono più. Questo vuol dire che λ_5 non dipenderà dalle matrici $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$. Di conseguenza la IBR non è influenzata dall'assetto degli agenti. Formalizzando possiamo dire che la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ sia funzione esclusivamente

dell'interazione (\mathcal{G}) e della configurazione (\mathbf{p}) degli agenti, risultando quindi unica per ogni coppia (\mathcal{G}, \mathbf{p}) i.e.

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}\big|_{(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)} = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}\big|_{(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha')} \quad \text{con } \alpha \neq \alpha', \quad (4.19)$$

dove α, α' sono delle qualsiasi funzioni d'orientamento in $SE(2)$ definite come nella Definizione 3.1.1.

Notiamo poi una struttura particolare nelle 4.16 e 4.12: gli elementi matriciali *i-esimi* della diagonale sono la somma negativa della colonna *i-esima*. Ovvero:

$$\mathbf{A}_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{A}_{ij}, \quad (4.20)$$

Questo, ovviamente, vale considerando la riga nel caso di $\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_p$. Nel caso di $\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p$ essendo simmetrica vale sia per righe che colonne.

Viene riportata di seguito (4.21) una matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ ottenuta a partire dalla formazione triangolare equilatera di Figura 4.2, ponendo $l = 5$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}} = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.035 & 0 & 0 & -0.06 & 0.035 & -0.173 & 0 & -0.173 \\ -0.035 & 0.1 & 0 & -0.08 & 0.035 & -0.02 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.06 & 0.035 & -0.06 & -0.035 & 0 & -0.173 & -0.173 \\ 0 & -0.08 & 0.035 & 0.1 & -0.035 & -0.02 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.06 & 0.035 & -0.06 & -0.035 & 0.12 & 0 & 0.173 & 0.173 & 0.346 \\ 0.035 & -0.02 & -0.035 & -0.02 & 0 & 0.04 & -0.1 & 0.1 & 0 \\ -0.173 & 0.3 & 0 & -0.2 & 0.173 & -0.1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.173 & -0.3 & 0.173 & 0.1 & 0 & 2 & 0 \\ -0.173 & 0.1 & -0.173 & -0.1 & 0.346 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

La $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ di Eq. 4.21 è calcolata per un framework con grafo di rilevamento \mathcal{G} corrispondente a \mathcal{K}_3 .

Quello che faremo ora è estendere la formula della $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$, ad un caso più generico in termini di numero di agenti n .

4.2.1 Caso n generico

Per prima cosa, consideriamo un grafo di rilevamento non completo \mathcal{G} con $n = 3$ agenti. È possibile dimostrare che, combinando la definizione di \mathbf{D}_p e \mathbf{D}_a presentata nell'Equazione 3.29, applicando le proprietà del prodotto di Kronecker [19] e sfruttando la connessione tra la matrice di incidenza $\mathbf{E}(\mathcal{G})$ e la matrice di adiacenza $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ (come mostrato nelle Equazioni 2.9 e 2.10), si ottiene una relazione significativa per lo studio della IBR del grafo:

$$\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \boxed{(a_{12} + a_{21})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 + (a_{13} + a_{31})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2} & -(a_{12} + a_{21})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 & -(a_{13} + a_{31})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 \\ -(a_{12} + a_{21})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 & \boxed{(a_{12} + a_{21})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 + (a_{23} + a_{32})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2} & -(a_{23} + a_{32})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 \\ -(a_{13} + a_{31})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 & -(a_{23} + a_{32})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 & \boxed{(a_{13} + a_{31})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 + (a_{23} + a_{32})\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_a = \bar{\mathbf{R}}_p \begin{bmatrix} a_{12}\bar{\mathbf{p}}_{12}s_{12} + a_{13}\bar{\mathbf{p}}_{13}s_{13} & a_{21}\bar{\mathbf{p}}_{12}s_{12} & a_{31}\bar{\mathbf{p}}_{13}s_{13} \\ -a_{12}\bar{\mathbf{p}}_{12}s_{12} & -a_{21}\bar{\mathbf{p}}_{12}s_{12} + a_{23}\bar{\mathbf{p}}_{23}s_{23} & a_{32}\bar{\mathbf{p}}_{23}s_{23} \\ -a_{13}\bar{\mathbf{p}}_{13}s_{13} & -a_{23}\bar{\mathbf{p}}_{23}s_{23} & -a_{31}\bar{\mathbf{p}}_{13}s_{13} - a_{32}\bar{\mathbf{p}}_{23}s_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

dove a_{ij} sono gli elementi della matrice di adiacenza $\mathbf{A}(\mathcal{G})$.

Generalizzando la matrice in Eq. 4.13 si può ricavare attraverso la definizione di \mathbf{D}_a in $SE(2)$ vista nel Capitolo 3, che questa coincida esattamente con la *out-degree matrix* $\mathbf{D}_{out}(\mathcal{G})$, infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a &= \mathbf{E}_{out} \text{diag} \left([\bar{\mathbf{p}}_{ij}^\top \mathbf{R}_i \mathbf{R}(\pi/2)^\top]_k \right) \text{diag} \left([\mathbf{R}(\pi/2) \mathbf{R}_i^\top \bar{\mathbf{p}}_{ij}]_k \right) \mathbf{E}_{out}^\top, \\ &= \mathbf{E}_{out} \text{diag} \left([\bar{\mathbf{p}}_{ij}^\top \mathbf{R}_i \mathbf{R}(\pi/2)^\top \mathbf{R}(\pi/2) \mathbf{R}_i^\top \bar{\mathbf{p}}_{ij}]_k \right) \mathbf{E}_{out}^\top, \end{aligned} \quad (4.24)$$

dove essendo \mathbf{R}_i e $\mathbf{R}(\pi/2)$ ortogonali e $\bar{\mathbf{p}}_{ij}^\top \bar{\mathbf{p}}_{ij} = 1$, risulta essere

$$\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a = \mathbf{E}_{out} \mathbf{I}_m \mathbf{E}_{out}^\top = \mathbf{E}_{out} \mathbf{E}_{out}^\top = \begin{bmatrix} deg_{out}(v_1) & 0 & 0 \\ 0 & deg_{out}(v_2) & 0 \\ 0 & 0 & deg_{out}(v_3) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{out}(\mathcal{G}). \quad (4.25)$$

Quindi la matrice $\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a$ non dipende dalla posa degli agenti, ma esclusivamente dalle proprietà del grafo \mathcal{G} . Le matrici 4.23 e 4.22 invece dipendono sia dalle posizioni degli agenti $\chi_p(\mathcal{V})$ sia dalla matrice di adiacenza $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ e quindi dalla struttura del grafo di rilevamento \mathcal{G} . Delle tre componenti che formano un *framework* la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ dipende esclusivamente da \mathcal{G} e \mathbf{p} , come esposto nell'Equazione 4.19. In tutte queste matrici si è ommesso la dimensione matriciale poichè questa dipende solo dal numero di agenti n e non dal numero di archi m .

Considerando ora n arbitrari agenti otteniamo una formula delle sottomatrici di $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ valida per qualsiasi framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$, i.e.

$$\left[(\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p)_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{cases} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_{ik} + a_{ki}) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ik}) s_{ik}^2 & \text{se } i = j \\ -(a_{ij} + a_{ji}) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij}) s_{ij}^2 & \text{altrimenti} \end{cases} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (4.26)$$

$$\left[(\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_a)_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{cases} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n a_{hj} \mathbf{R}_p \bar{\mathbf{p}}_{hj} s_{hj} & \text{se } i = j \\ a_{ji} \mathbf{R}_p \bar{\mathbf{p}}_{ij} s_{ij} & \text{se } i > j \\ -a_{ji} \mathbf{R}_p \bar{\mathbf{p}}_{ij} s_{ji} & \text{se } i < j \end{cases} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad (4.27)$$

$$\left[(\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_p)_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \in \mathbb{R}, \quad (4.28)$$

ove il termine $(\mathbf{X})_{ij}$ indica la sottomatrice di \mathbf{X} nella i -esima riga e j -esima colonna, con \mathbf{X} matrice a blocchi generica. Le Equazioni 4.26 e 4.27 sono state ottenute partendo dalle Eq. 4.22 e 4.23 generalizzando e applicando la 4.20. , bisogna ricordarsi che $\mathbf{P}(\cdot)$ corrisponde ad una matrice simmetrica, $s_{ij} = s_{ji}$ e $\bar{\mathbf{p}}_{ij} = \bar{\mathbf{p}}_{ji}$. Se provassimo a calcolare la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ con un grafo con sempre meno archi, noteremo che la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ conterrà sempre più zeri per ovvia conseguenza della struttura della matrice vista in precedenza. $(\chi_{\|\cdot\|}(\mathcal{V}))$ e θ verranno definiti formalmente nel prossimo capitolo.

4.3 Analisi SBRM in $SE(3)$

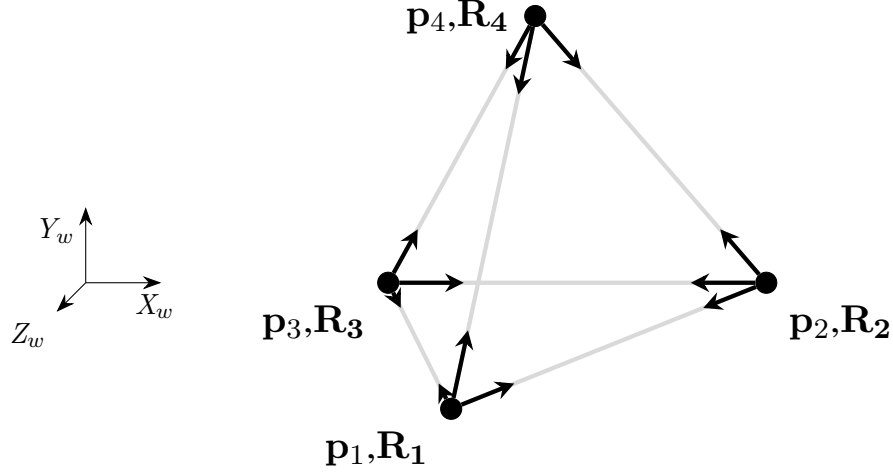


Figura 4.3: Disposizione tetraedrica di un sistema multi-agente: tetraedro regolare con $l = 5$.

Il sistema trattato per lo studio della SBRM ($\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$) in $SE(3)$ è il poliedro più semplice, ovvero il tetraedro regolare ($n = 4$). Una possibile rappresentazione è riportata in figura 4.3. La coppia (p_i, R_i) , sono rispettivamente posizione dell' i -esimo agente rispetto \mathcal{F}_w e la sua matrice di rotazione appartenente ad $SO(3)$. Consideriamo la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}$ vista nel capitolo precedente in Eq. 3.55, e facciamo le stesse considerazioni fatte per il caso $SE(2)$, possiamo allora riscrivere la \mathbf{D}_p e la \mathbf{D}_a per il tetraedro come segue:

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})}{\|\mathbf{p}_{12}\|} & +\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})}{\|\mathbf{p}_{12}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})}{\|\mathbf{p}_{13}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & +\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})}{\|\mathbf{p}_{13}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{14})}{\|\mathbf{p}_{14}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & +\mathbf{R}_1^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{14})}{\|\mathbf{p}_{14}\|} \\ +\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{21})}{\|\mathbf{p}_{21}\|} & -\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{21})}{\|\mathbf{p}_{21}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})}{\|\mathbf{p}_{23}\|} & +\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})}{\|\mathbf{p}_{23}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{24})}{\|\mathbf{p}_{24}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & +\mathbf{R}_2^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{24})}{\|\mathbf{p}_{24}\|} \\ +\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{31})}{\|\mathbf{p}_{31}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{31})}{\|\mathbf{p}_{31}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & +\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{32})}{\|\mathbf{p}_{32}\|} & -\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{32})}{\|\mathbf{p}_{32}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{34})}{\|\mathbf{p}_{34}\|} & +\mathbf{R}_3^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{34})}{\|\mathbf{p}_{34}\|} \\ +\mathbf{R}_4^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{41})}{\|\mathbf{p}_{41}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_4^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{41})}{\|\mathbf{p}_{41}\|} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & +\mathbf{R}_4^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{42})}{\|\mathbf{p}_{42}\|} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_4^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{42})}{\|\mathbf{p}_{42}\|} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & +\mathbf{R}_4^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{43})}{\|\mathbf{p}_{43}\|} & -\mathbf{R}_4^\top \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{43})}{\|\mathbf{p}_{43}\|} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{36 \times 12} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{b}_{12}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}(\mathbf{b}_{13}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}(\mathbf{b}_{14}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{21}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{23}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{24}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{31}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{32}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{34}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{41}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{42}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}(\mathbf{b}_{43}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{36 \times 12} \quad (4.30)$$

La struttura della $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ è quella vista in Equazione 3.61, solo che in $SE(3)$ essa $\in \mathbb{R}^{6n \times 6n}$.

Andiamo a sviluppare anche in questo ogni sottomatrice:

$$\mathbf{D}_p^T \mathbf{D}_p = 2 \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{14})s_{14}^2 \end{matrix}} & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{14})s_{14}^2 \\ -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{12})s_{12}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{24})s_{24}^2 \end{matrix}} & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{24})s_{24}^2 \\ -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{13})s_{13}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{23})s_{23}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{34})s_{34}^2 \end{matrix}} & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{34})s_{34}^2 \\ -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{14})s_{14}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{24})s_{24}^2 & -\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{34})s_{34}^2 & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{14})s_{14}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{24})s_{24}^2 + \\ +\mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{34})s_{34}^2 \end{matrix}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \quad (4.31)$$

la quale è ottenuta a partire dalla Eq. 4.29 e sfruttando l'Eq. 4.11, valida anche in $SE(3)$, con $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathbb{R}^3$. Dall'Equazione 4.31 si può notare come essa non dipenda dalle matrici di rotazione dei sistemi di riferimento locali \mathbf{R}_i . Le altre sottomatrici si presenteranno in maniera diversa. Infatti

$$\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{12})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{13})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{14})} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boxed{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{12})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{23})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{24})} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boxed{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{13})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{23})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{34})} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boxed{\mathbf{P}(\mathbf{b}_{14})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{24})+} \\ \boxed{+\mathbf{P}(\mathbf{b}_{34})} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \quad (4.32)$$

la quale è ottenuta a partire dalla Eq. 4.30 e considerando che

$$\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij})^\top \mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 - x_{b_{ij}}^2 & -x_{b_{ij}}y_{b_{ij}} & -x_{b_{ij}}z_{b_{ij}} \\ -x_{b_{ij}}y_{b_{ij}} & 1 - y_{b_{ij}}^2 & -y_{b_{ij}}z_{b_{ij}} \\ -x_{b_{ij}}z_{b_{ij}} & -y_{b_{ij}}z_{b_{ij}} & 1 - z_{b_{ij}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (4.33)$$

dove $x_{b_{ij}}$, $y_{b_{ij}}$ e $z_{b_{ij}}$ sono le coordinate cartesiane in \mathbb{R}^3 di \mathbf{b}_{ij} . Per chiarezza espositiva, nella matrice 4.32 si sono già sostituiti i termini $\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ji})$ con i rispettivi $\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij})$ dove $i < j$, poichè $\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij}) = \mathbf{P}(\mathbf{b}_{ji})$. Consideriamo ora le seguenti uguaglianze,

$$-\mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij})\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij}) = \mathbf{P}(\mathbf{b}_{ij})\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij})^\top = \begin{bmatrix} 0 & -z_{b_{ij}} & y_{b_{ij}} \\ z_{b_{ij}} & 0 & -x_{b_{ij}} \\ -y_{b_{ij}} & x_{b_{ij}} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij}) = -\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ji}) \quad (4.34)$$

e le useremo per il calcolo di $\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_a$.

Ora, dall'Eq. 4.30 e 4.29, e con l'importante uguaglianza di Eq. 4.34, possiamo ricavare che

$$\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{S}(\mathbf{b}_{12})s_{12}+ \\ +\mathbf{S}(\mathbf{b}_{13})s_{13}+ \\ +\mathbf{S}(\mathbf{b}_{14})s_{14}) \end{matrix}} & \mathbf{R}_2\mathbf{S}(\mathbf{b}_{12})s_{12} & \mathbf{R}_3\mathbf{S}(\mathbf{b}_{13})s_{13} & \mathbf{R}_4\mathbf{S}(\mathbf{b}_{14})s_{14} \\ -\mathbf{R}_1\mathbf{S}(\mathbf{b}_{12})s_{12} & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{R}_2(-\mathbf{S}(\mathbf{b}_{12})s_{12}+ \\ +\mathbf{S}(\mathbf{b}_{23})s_{23}+ \\ +\mathbf{S}(\mathbf{b}_{24})s_{24}) \end{matrix}} & \mathbf{R}_3\mathbf{S}(\mathbf{b}_{23})s_{23} & \mathbf{R}_4\mathbf{S}(\mathbf{b}_{24})s_{24} \\ -\mathbf{R}_1\mathbf{S}(\mathbf{b}_{13})s_{13} & -\mathbf{R}_2\mathbf{S}(\mathbf{b}_{23})s_{23} & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{R}_3(-\mathbf{S}(\mathbf{b}_{13})s_{13}+ \\ -\mathbf{S}(\mathbf{b}_{23})s_{23}+ \\ +\mathbf{S}(\mathbf{b}_{34})s_{34}) \end{matrix}} & \mathbf{R}_4\mathbf{S}(\mathbf{b}_{34})s_{34} \\ -\mathbf{R}_1\mathbf{S}(\mathbf{b}_{14})s_{14} & -\mathbf{R}_2\mathbf{S}(\mathbf{b}_{24})s_{24} & -\mathbf{R}_3\mathbf{S}(\mathbf{b}_{34})s_{34} & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{R}_4(-\mathbf{S}(\mathbf{b}_{14})s_{14}+ \\ -\mathbf{S}(\mathbf{b}_{24})s_{24}+ \\ -\mathbf{S}(\mathbf{b}_{34})s_{34}) \end{matrix}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \quad (4.35)$$

in cui si sono sostituiti i termini $\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ji})$ con i rispettivi $-\mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij})$ dove $i < j$.

Dalle Equazioni 4.32 e 4.35 notiamo che le matrici risultano ben diverse dalla controparte in $SE(2)$: infatti ogni elemento contiene direttamente la matrice per l'orientamento dell' i -esimo agente oppure indirettamente tramite la misura relativa del *bearing*. Quindi la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ in $SE(3)$ non è uguale per ogni framework con lo stesso grafo associato \mathcal{G} e stessa funzione di posizione \mathbf{p} , formalizzando

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}\big|_{(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})} \neq \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}\big|_{(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a}')} \quad \text{con } \mathbf{a} \neq \mathbf{a}', \quad (4.36)$$

dove \mathbf{a}, \mathbf{a}' sono delle qualsiasi funzioni d'orientamento in $SE(3)$ definite come nella Definizione 3.2.1.

Ora, come fatto nella Sezione precedente andremo a sviluppare le matrici per un numero di agenti n qualsiasi.

4.3.1 Caso n generico

Come per la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ in $SE(2)$, le matrici appena calcolate per un grafo completo \mathcal{K}_4 , le riscriveremo per un qualsiasi grafo orientato generico \mathcal{G} con n qualsiasi e $m \in \{1, \dots, n(n-1)\}$. Non si tratterà specificamente il caso m generico, poichè i procedimenti e le considerazioni fatti in $SE(2)$, sono molto simili anche in $SE(3)$. Passeremo quindi subito all'esposizione delle equazioni generali delle sottomatrici, inserendo i termini a_{ij} della matrice di adiacenza $\mathbf{A}(\mathcal{G})$. Per gli elementi della diagonale si è sfruttato

l'Equazione 4.20 valida anche per $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ in $SE(3)$. Quindi

$$\left[(\mathbf{D}_{\mathbf{p}}^\top \mathbf{D}_{\mathbf{p}})_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{cases} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_{ik} + a_{ki}) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ik}) s_{ik}^2 & \text{se } i = j \\ -(a_{ij} + a_{ji}) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{p}}_{ij}) s_{ij}^2 & \text{altrimenti} \end{cases} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (4.37)$$

$$\left[(\mathbf{D}_{\mathbf{p}}^\top \mathbf{D}_{\mathbf{a}})_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{cases} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n a_{hj} \mathbf{R}_j \mathbf{S}(\mathbf{b}_{hj}) s_{hj} & \text{se } i = j \\ a_{ji} \mathbf{S}(\mathbf{b}_{ij}) s_{ij} & \text{se } i > j \\ -a_{ji} \mathbf{S}(\mathbf{b}_{ji}) s_{ji} & \text{se } i < j \end{cases} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (4.38)$$

$$\left[(\mathbf{D}_{\mathbf{a}}^\top \mathbf{D}_{\mathbf{a}})_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{cases} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} \mathbf{P}(\mathbf{b}_{ik}) & \text{se } i = j \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{altrimenti} \end{cases} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (4.39)$$

dove il termine $(\mathbf{X})_{ij}$ indica la sottomatrice di \mathbf{X} nella i -esima riga e j -esima colonna, con \mathbf{X} matrice a blocchi generica.

Ora anche se la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ di un framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$ non è uguale per ogni funzione d'orientamento \mathbf{a} , si è visto che gli autovalori, cambiando la funzione \mathbf{a} non variano. Questo vuol dire che le matrici non sono uguali fra loro, ma *simili*. Infatti essendo tutte le matrici $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ diagonalizzabili, questo vuol dire che sono simili alla stessa matrice diagonale contenente gli stessi autovalori. Calcolandoci le matrici contenente gli autovettori normalizzati possiamo ricavarci la matrice di cambiamento di base. Consideriamo due framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$ e $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a}')$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$, $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}'_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ sono le matrici simmetriche di rigidità dei due framework, rispettivamente, e le matrici \mathbf{C} e \mathbf{C}' sono le matrici che contengono gli autovettori normalizzati di $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}'_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}} \mathbf{C} = \mathbf{C}'^{-1} \tilde{\mathbf{B}}'_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}} \mathbf{C}' = \text{diag}(\lambda_i), \quad (4.40)$$

da questa possiamo ricavarci la matrice di cambiamento di base \mathbf{M} che mi permette di ottenere la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$, data $\tilde{\mathbf{B}}'_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}}$, cioè

$$\mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}'_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}} \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{Sim}}} \quad \text{con } \mathbf{M} = \mathbf{C}' \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.41)$$

Quindi in sintesi anche se la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ in $SE(3)$ dipende dalle matrici di rotazione \mathbf{R}_i di ogni agente i , l'autovalore *critico*, e di conseguenza la rigidità, invece **non** ne è influenzata.

4.4 Principali osservazioni sulle dipendenze della IBR

Riassumendo quanto esposto fino ad ora, è possibile concludere che la rigidità infinitesima di un framework in $SE(3)$ o in $SE(2)$ risulta indipendente dagli orientamenti degli agenti, rispetto a \mathcal{F}_w . A partire dalle equazioni sviluppate in questo capitolo, possiamo affermare che la rigidità dipende dai seguenti fattori:

- la distanza relativa tra gli agenti, ossia $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|$,
- la misura dell'orientamento relativo, espressa rispetto al sistema di riferimento globale \mathcal{F}_w , ovvero $\mathbf{R}_i \mathbf{b}_{ij} = \bar{\mathbf{p}}_{ij}$,
- I termini a_{ij} della matrice di adiacenza $\mathbf{A}(\mathcal{G})$, che descrivono la struttura delle relazioni tra gli agenti, in termini di abilità o meno di rilevare l'orientamento relativo tra i nodi i e j .

Anche se $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ in $SE(3)$ include le matrici di rotazione \mathbf{R}_i , gli autovalori associati alla rigidità sono indipendenti da queste matrici a causa della *similitudine* tra matrici di rigidità associate a framework con lo stesso grafo di rilevamento \mathcal{G} e la stessa funzione di posizione $\mathbf{p}(\cdot)$. Pertanto, per l'analisi della IBR, possiamo fare riferimento unicamente agli orientamenti relativi rispetto al sistema di riferimento globale \mathcal{F}_w , evitando la dipendenza dall'orientamento assoluto di ciascun agente.

5

ANALISI AUTOVALORI CRITICI

Questo capitolo è il cuore della tesi. Attraverso i concetti definiti fino ad ora, si è cercato di dare un carattere quantitativo alla bearing rigidità di un sistema multi-agente. Lo studio è stato fatto ragionando su come poter estrapolare al meglio dei dati utili a capire come le variazioni di alcune caratteristiche geometriche o di interazione, possono modificare la rigidità del framework. Dal capitolo precedente possiamo dire che la rigidità dipende esclusivamente dalla matrice binaria $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ e dai vettori \mathbf{p}_{ij} con $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Si è quindi cercato in più modi di variare un parametro, cercando di mantenere fermo l'altro, in modo tale da captare che tipo di relazione ci sia tra rigidità e configurazione (\mathbf{p}_{ij}) oppure interazione degli agenti ($\mathbf{A}(\mathcal{G})$).

Abbiamo visto nei precedenti capitoli che la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}$ e di conseguenza l'autovalore *critico* di $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$, dipende dal framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \alpha)$ in $SE(2)$ o $(\mathcal{G}, \mathbf{p}, \mathbf{a})$ in $SE(3)$. Nel Capitolo 4 si è poi analizzata la struttura della $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ in $SE(2)$, e si è capito che essa non dipenda dalle matrici di rotazione associate all'orientamento dell' i -esimo agente. Nel caso $SE(3)$ invece le matrici \mathbf{R}_i erano presenti nella $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$, ma si è scoperto sperimentalmente che, dato un grafo \mathcal{G} e una mappa di posizione $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3n}$, le SBRM con diverse mappe d'orientamento $\mathbf{a} \in SO(3)^n$ sono *simili* fra loro. Quindi sia nel caso $SE(2)$ e nel caso $SE(3)$ l'autovalore *critico* non dipende dagli orientamenti degli agenti. Possiamo quindi dire che la rigidità dipende esclusivamente dalla configurazione degli agenti (\mathbf{p}) e dalla loro interazione (\mathcal{G}). Riformulando il problema dello studio dell'autovalore critico, si può considerare come unico parametro caratteristico del grafo diretto \mathcal{G} la *matrice di adiacenza* $\mathbf{A}(\mathcal{G})$. Infatti questa determina in maniera univoca il grafo associato al sistema multi-agente. D'ora in poi considereremo esclusivamente la *matrice d'adiacenza* come elemento per la descrizione delle interazioni degli agenti. A livello di configurazione possiamo sostituire la funzione di posizione \mathbf{p} con la funzione delle *posizioni relative* \mathbf{p}_{rel} che dato il numero di agenti n mi associa ad ogni arco del grafo \mathcal{K}_n il vettore \mathbf{p}_{ij} , i.e.

$$\mathbf{p}_{rel} : \{1, \dots, n(n-1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : k \mapsto \mathbf{p}_{rel}(k) = [\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j]_k, \quad (5.1)$$

dove l'insieme $\{1, \dots, n(n-1)\}$ rappresenta l'insieme degli archi di un grafo completo associato al sistema, che indicheremo con $\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}$, e $[\cdot]_k$ indica che all'interno ci sono elementi riferiti al k -esimo arco. Di conseguenza possiamo anche definire il seguente vettore

$$\chi_{\mathbf{p}_{rel}} = \chi_{\mathbf{p}_{rel}}(\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}) = \begin{Bmatrix} \chi_{\mathbf{p}_{rel}}(1) \\ \vdots \\ \chi_{\mathbf{p}_{rel}}(n(n-1)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n\ n-1} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{dn(n-1)}, \quad (5.2)$$

dove n è il numero degli agenti del sistema e $d = 2$ se framework $SE(2)$ o $d = 3$ se framework $SE(3)$. Il vettore in Eq.5.2 contiene ogni possibile posizione relativa fra agenti di un sistema. La cardinalità dell'insieme $|\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}|$ risulta essere la *permutazione* di

2 elementi in un insieme di n elementi, i.e.

$$|\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}| = P(n, k) = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1). \quad (5.3)$$

Si può affermare che la $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ dipenda esclusivamente dalla *matrice di adiacenza* e dal vettore $\chi_{\mathbf{p}_{rel}}(\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n})$. Dunque concentrandoci sull'autovalore critico, risulta che il suo valore sia una *funzione* di questi due elementi, ovvero che

$$\lambda_{c+2} = f(\mathbf{A}(\mathcal{G}), \chi_{\mathbf{p}_{rel}}(\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n})) \quad (5.4)$$

dove $c = 3$ nel caso di framework in $SE(2)$, invece $c = 6$ nel caso di framework in $SE(3)$. Ovviamente, l'analisi di tale autovalore risulta estremamente complessa a livello analitico, principalmente a causa delle dimensioni della matrice, che nel caso di $SE(2)$ con $n = 3$ (valore minimo di n) è pari a 9×9 . Inoltre, questa complessità è aggravata dalle particolari dipendenze che caratterizzano la matrice stessa. Infatti $(\mathbf{A}(\mathcal{G}), \chi_{\mathbf{p}_{rel}})$ dell'Equazione 5.4 non sono tra loro *indipendenti*: la modifica della matrice binaria $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ va infatti a cancellare o meno valori appartenenti a $\chi_{\mathbf{p}_{rel}}(\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n})$. Nelle prossime Sezioni si cercherà quindi di trovare che tipo di relazione ci sia tra λ_{c+2} e questi due elementi, attraverso un'analisi qualitativa di vari grafici realizzati in MatLab in cui si cerca di far variare l'autovalore in funzione di un parametro mantenendo fissi gli altri. La parte più difficile è stata sicuramente lo studio del ruolo della *matrice di adiacenza* $\mathbf{A}(\mathcal{G})$, in cui si è cercato il più possibile di trovare una relazione di tipo analitico con λ_{c+2} . Si è optato invece per uno studio su larga scala di tutti i possibili framework (fissata una funzione di posizione relative \mathbf{p}_{rel}), cercando di estrapolare delle informazioni utili al fine di avere un'idea generale su come capire se un framework possa essere più o meno rigidi rispetto ad altri.

5.1 Analisi del ruolo delle distanze inter-agenti

Per lo studio del ruolo delle distanze inter-agenti nella rigidità si è pensato di optare per la realizzazione di uno *scaling* graduale in modo tale da non alterare il pattern geometrico della formazione e ottenere un'analisi rispetto la sola distanza relativa fra agenti $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|$.

Riprendendo quanto visto nel Capitolo 4, ci si aspetta che λ_5 sia inversamente proporzionale ad un aumento in scala della formazione multi-agente. Andremo comunque a vedere nel dettaglio come evolve l'autovalore critico andando ad applicare uno *scaling* al framework.

Si è considerato un framework in $SE(2)$ con una disposizione quadrangolare ($n = 4$) e un grafo completo associato al sistema \mathcal{K}_4 . Successivamente, è stato fatto variare il lato del quadrato (l) da un valore iniziale pari a 1.01 fino a 40, con un incremento costante (inc) di 0.01. Per ogni valore di l , è stato calcolato il valore dell'autovalore λ_5 della matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$. Il valore λ_5 calcolato per $(l - inc)$ è stato rapportato al corrispondente valore calcolato per l , ovvero

$$\frac{\lambda_5(l - inc)}{\lambda_5(l)},$$

e tale rapporto è stato tracciato in funzione di l . Questo confronto è stato effettuato al fine di rendere più efficiente l'analisi e facilitare il confronto con possibili funzioni analitiche. Nel testo seguente, per chiarezza, si utilizzeranno le notazioni $\lambda_5(l - inc)$ e $\lambda_5(l)$ per distinguere i valori dell'autovalore calcolati nei due casi. Una di queste può essere la funzione

$$f(l) = \left(\frac{l}{l - inc} \right)^2, \quad (5.5)$$

la quale viene riportata assieme all'interpolazione dei punti $\left(\frac{\lambda_5(l - inc)}{\lambda_5(l)}, l \right)$ in Figura 5.1. Quello che si evince dalla Figure è che la funzione in Eq.(5.5) sia una buona approssimazione del rapporto degli autovalori. Definiamo ora la funzione $\Delta(l)$ come la differenza delle due funzioni:

$$\Delta(l) := \frac{\lambda_5(l - inc)}{\lambda_5(l)} - f(l) \quad (5.6)$$

La funzione $\Delta(l)$ è riportata in Figura 5.2. Da questa si può notare come anche il Δ abbia un andamento iperbolico. Questo comportamento probabile è dovuto al fatto che la funzione $\frac{\lambda_5(l - inc)}{\lambda_5(l)}$ non abbia al suo interno esclusivamente andamenti iperbolici elevati alla seconda, come la $f(l)$. Infatti se si ricorda lo sviluppo delle submatrici di $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ visto nella Sottosezione 4.2, queste non dipendevano ugualmente da $s_{ij} = \frac{1}{\|\mathbf{p}_{ij}\|}$:

- $\mathbf{D}_{\mathbf{p}}^\top \mathbf{D}_{\mathbf{p}} \sim s_{ij}^2,$

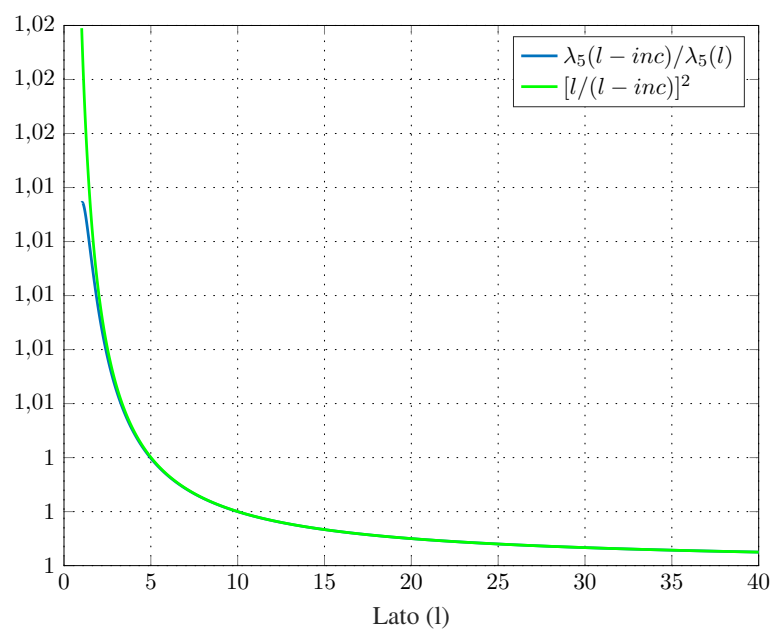


Figura 5.1: Confronto tra la funzione iperbolica quadrata e il plot ottenuto interpolando i punti $\left(\frac{\lambda_5(l-inc)}{\lambda_5(l)}, l\right)$ con $l \in \{1.02, 1.03, \dots, 39.99, 40\}$, valido per una formazione quadrata in $SE(2)$.

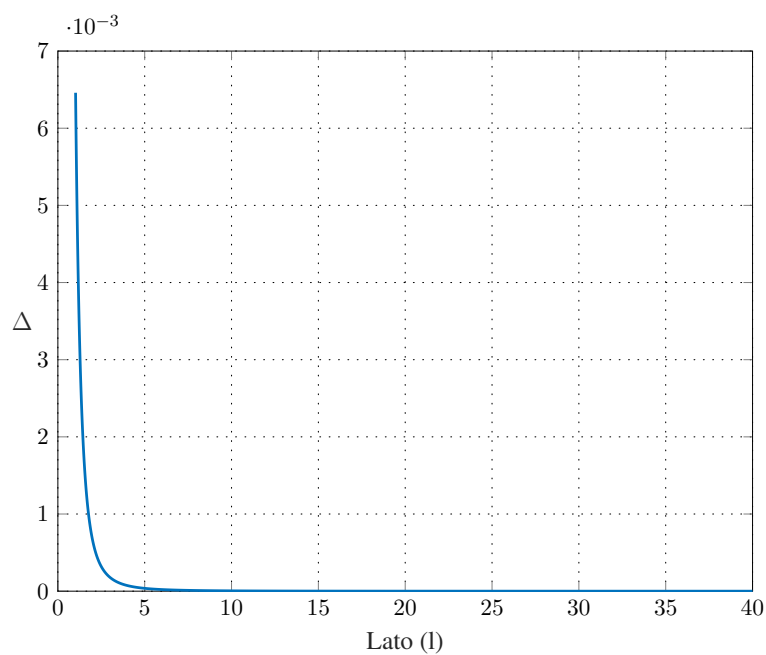


Figura 5.2: Funzione $\Delta(l)$ per una formazione quadrata in $SE(2)$.

- $\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_p \sim s_{ij}$,

la $\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_a$ invece è indipendente dalla distanza internodale. Ponendo ora $l - inc = L$ e $l = kL$, possiamo considerare due configurazioni distinte: una configurazione $(\mathcal{G}, \mathbf{p})$ e una seconda $(\mathcal{G}, \mathbf{p}')$, dove \mathbf{p} e \mathbf{p}' rappresentano le coordinate degli agenti in una formazione quadrangolare con lato L e kL , rispettivamente.

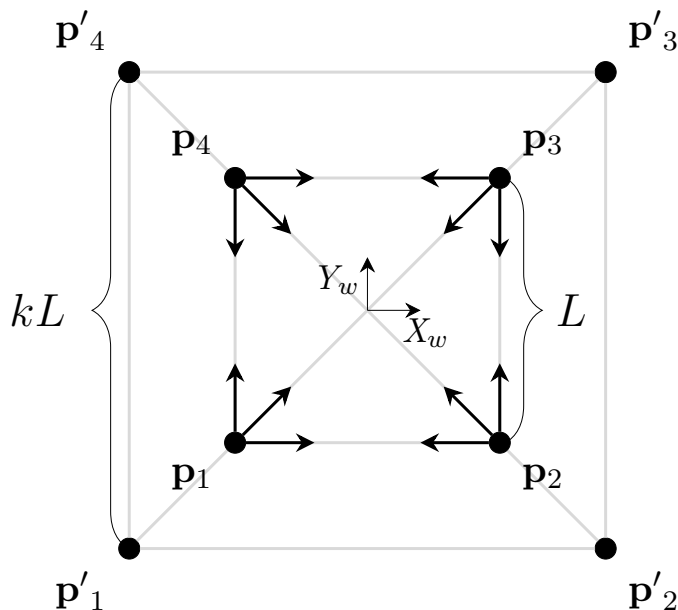


Figura 5.3: Sistema quadrangolare

Una rappresentazione di queste configurazioni è riportata nella Figura 5.3. In sintesi, ciò implica un confronto tra il valore λ_5 ottenuto dalla matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ associata a un framework con formazione quadrangolare di lato L e il valore λ_5 calcolato da una matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ associata a un framework con formazione quadrangolare di lato kL . È ragionevole aspettarsi una lieve differenza tra i due valori, che si discostano da $\left(\frac{l}{l-inc}\right)^2$, in quanto, come precedentemente discusso, all'interno di $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ compaiono termini che dipendono linearmente dall'inverso della distanza internodale. Tale contributo diventa particolarmente evidente per valori di $l \rightarrow 1$.

Gli stessi ragionamenti sono stati applicati anche a un framework in $SE(3)$ con una formazione cubica (vedi Figura 5.4). In questa figura, sono riportate in grigio le distanze internodali, mentre in nero sono rappresentate le misurazioni del *bearing*, riportate rispetto al sistema di riferimento globale \mathcal{F}_W , ossia le misure \bar{p}_{ij} per ogni coppia di vertici $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}_8}$.

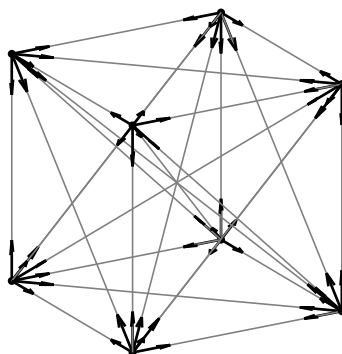


Figura 5.4: Framework in $SE(3)$ a disposizione cubica con grafo completo associato \mathcal{K}_8 , realizzato in MatLab .

Dalle Figure 5.5, si evince che anche in $SE(3)$ si possono trarre le stesse conclusioni fatte in $SE(2)$. Si nota solo una piccola differenza per valori di l tendenti a 1. Questa è con molta probabilità dovuta alla presenza, nella matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$, di molti più termini contenenti s_{ij} in proporzione a quelli contenenti s_{ij}^2 . In particolare, la matrice $\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_p$ in $SE(3)$ è una matrice di dimensione $3n \times 3n$, come la matrice $\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p$. Al contrario, in $SE(2)$, la matrice $\mathbf{D}_a^\top \mathbf{D}_p$ ha dimensione $n \times 2n$, mentre $\mathbf{D}_p^\top \mathbf{D}_p$ è una matrice di dimensione $2n \times 2n$. Questo rappresenta un primo aspetto di come una configurazione di

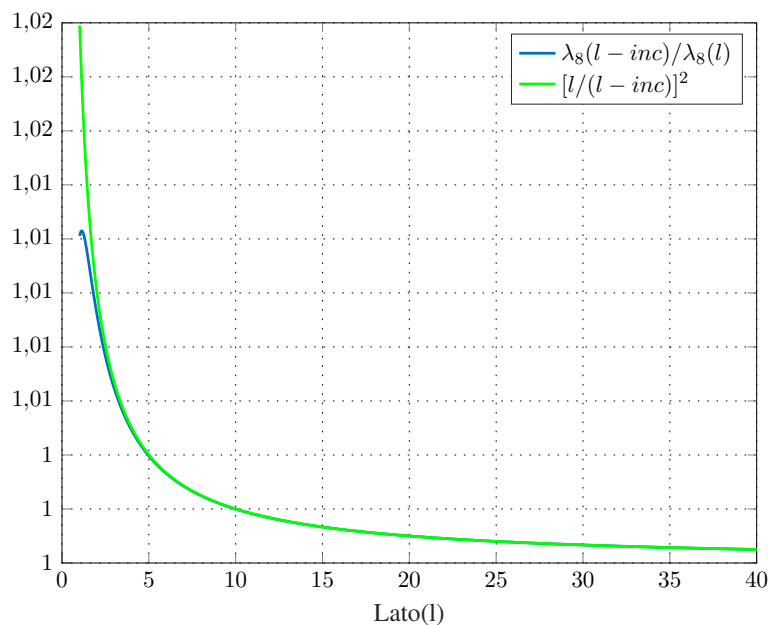


Figura 5.5: Confronto tra la funzione iperbolica e il plot ottenuto interpolando i punti $\left(\frac{\lambda_5(l-inc)}{\lambda_5(l)}, l\right)$ con $l \in \{1.02, 1.03, \dots, 39.99, 40\}$, per una formazione cubica in $SE(3)$

agenti possa evolvere in uno spazio 2D o 3D. Pertanto, a parità di grafo di rilevamento \mathcal{G} ,

le distanze internodali, che variano uniformemente in scala, danno origine a un andamento quasi iperbolico in funzione del parametro di scala k . Nei prossimi capitoli, esamineremo invece come le distanze internodali influenzino la rigidità in un contesto in cui variano le interazioni tra gli agenti.

5.2 Studio del ruolo di $A(\mathcal{G})$

5.2.1 Formazione in $SE(3)$

Come già sottolineato, la rigidità, intesa come proprietà binaria di un framework, dipende esclusivamente, salvo la condizione di allineamento, dal numero e dal tipo di connessioni esistenti tra gli agenti. Pertanto, è stato inizialmente esplorato come l'autovalore vari in funzione dell'aggiunta sequenziale di archi, seguendo diverse strategie di incremento. In base alla strategia adottata, si è partiti da un framework iniziale $(\mathcal{G}_i, \mathbf{p})$ e, passo dopo passo, sono stati aggiunti archi fino a ottenere un framework finale $(\mathcal{G}_f, \mathbf{p})$, dove $\mathcal{G}_f = \mathcal{K}_8$. Ad ogni passo p , è stato calcolato l'autovalore λ_8 corrispondente. Come primo framework di analisi, si è considerato un framework in $SE(3)$, $(\mathcal{G}, \mathbf{p})$, in cui è stata omessa, per le considerazioni esposte nel Capitolo 4, la funzione di orientamento \mathbf{a} . Da questo momento in avanti, ci riferiremo con il termine "framework" anche alla coppia $(\mathcal{G}, \mathbf{p})$. Il framework è riportato in Figura 5.6, ed è a disposizione cubica ($n = 8$). Nel

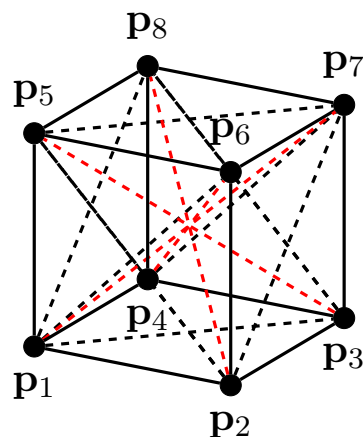


Figura 5.6: Framework $SE(3)$ con disposizione degli agenti sui vertici di un cubo.

caso che abbiamo studiato, abbiamo considerato la disposizione cubica con spigolo $l = 5$,

per ottenere una rappresentazione grafica ottimale in MatLab , e per non avere λ_8 troppo piccoli, tale da avere un buono gap tra i vari λ_8 calcolati, rendendo più leggibili i grafici ottenuti in seguito.

Come abbiamo già detto, in un framework con numero di agenti pari a n , possiamo avere al massimo $n(n - 1)$ archi, i.e. $|\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}| = n(n - 1)$. Nel caso in analisi quindi il grafo completo \mathcal{K}_8 avrà 56 archi associati alle distanze inter-agenti. Possiamo ora considerare una suddivisione degli archi (v_i, v_j) , in base alla distanza inter-agente $\|\mathbf{p}_{ij}\|$:

- l = archi del grafo associati agli spigoli del cubo, $\|\mathbf{p}_{ij}\| = l$ (in totale massimo 24)),
- d_f = archi del grafo associati alle diagonali delle facce, $\|\mathbf{p}_{ij}\| = \sqrt{2}l$ (in totale massimo 24),
- d_c = archi del grafo associati alle diagonali delle cubo, $\|\mathbf{p}_{ij}\| = \sqrt{3}l$ (in totale massimo 8),

in cui, si è elencato dalla distanza minore a quella maggiore. In Figura 5.6 sono rappresentati per semplicità esclusivamente le distanze $\|\mathbf{p}_{ij}\|$ e non i vettori normalizzati $\bar{\mathbf{p}}_{ij}$. Detto questo in Figura 5.7 viene riportata curva realizzata in MatLab in cui si sono interpolati i vari punti in un grafico in cui in ascissa abbiamo l'arco aggiunto sequenzialmente (i, j) , e in ordinata l'autovalore λ_8 ottenuto di conseguenza dalla $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ aggiungendo suddetto arco. La strategia di aggiunta, che chiameremo *strategia 1*, seguita in questo caso è stata quella di partire da 0 archi, e aggiungendo di passo in passo, per primi tutti gli archi di tipo l poi di tipo d_f e infine di tipo d_c . L'aggiunta è stata fatta per facce, quindi come si vede dal plot, i primi 4 archi aggiunti sono relativi alla faccia frontale prendendo come riferimento la Figura 5.7, ovvero gli archi $(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_6, v_1)$ e (v_5, v_2) .

Nella Figura 5.7 si sono riportati esclusivamente i $\lambda_8 \neq 0$. Il framework diventa rigido esclusivamente all'aggiunta del primo arco d_f , ovvero l'arco $(1, 6)$ e questo è in linea con quanto visto nella teoria nel Capitolo 3. Analizzando il grafico di Figura 5.7, si può in prima battuta dire che l'aggiunta di archi in maniera *sequenziale* comporta un aumento della rigidità. Va sottolineato che questo vale solo per l'aggiunta di tipo sequenziale di archi, in generale non è detto che un framework con un numero di archi maggiori rispetto ad un altro, sia più rigido. Formalizzando possiamo dire che dati due framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p})$ e

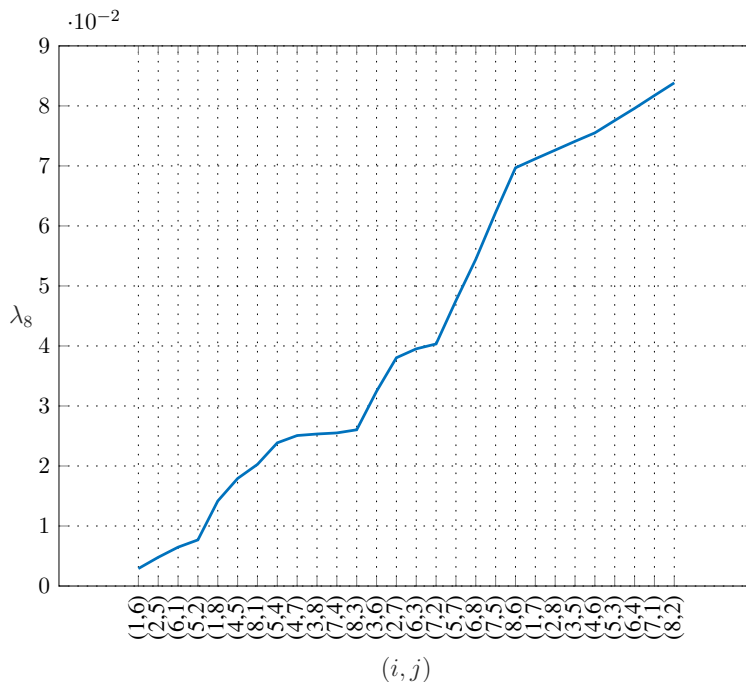


Figura 5.7: Interpolazione punti nel piano $(\lambda_8; (i, j))$, relativi ad un framework SE con formazione cubica, con strategia di aggiunta 1.

$(\mathcal{G}', \mathbf{p})$ con

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{(v_i, v_j)\} \quad \text{con } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}_n} \setminus \mathcal{E}, \quad (5.7)$$

allora possiamo dire che l'ottavo autovalore corrispondente al framework $(\mathcal{G}', \mathbf{p})$ sarà maggiore di quello calcolato per $(\mathcal{G}, \mathbf{p})$, i.e.

$$\lambda_8|_{(\mathcal{G}', \mathbf{p})} > \lambda_8|_{(\mathcal{G}, \mathbf{p})}. \quad (5.8)$$

Nell'Equazione 5.7 \mathcal{E} e \mathcal{E}' sono gli insiemi degli archi del grafo \mathcal{G} e \mathcal{G}' rispettivamente, e l'insieme $\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n} \setminus \mathcal{E}$ è l'insieme che contiene tutti gli archi che "mancano" a \mathcal{G} per diventare completo.

Altra cosa da notare è che a partire dall'aggiunta degli archi corrispondenti all'ultima faccia, ovvero da $(i, j) = (5, 7)$ a $(i, j) = (8, 6)$, l'autovalore cresce in maniera lineare a differenza dei tratti precedenti dove abbiamo molti punti angolosi. In più in questo tratto abbiamo la variazione lineare di λ_8 più elevata, infatti:

$$\frac{\Delta \lambda_8}{\Delta m} = 7.5 \times 10^{-3}. \quad (5.9)$$

Anche l'ultima parte del grafico dove abbiamo aggiunto gli archi d_c è una zona abbastanza lineare, ma l'autovalore non cresce rapidamente come il tratto precedente. Provando a dare un significato, quindi, ai dati di Figura 5.7, possiamo capire che la rigidità di un framework $SE(3)$ sia molto variabile in base agli archi coinvolti nella costruzione del framework. Una cosa importante da ricordare è infatti che ogni tipo di arco (v_i, v_j) di un framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p})$ dà un contributo alla rigidità in 2 modi differenti:

- in base alla distanza inter-agente $\|\mathbf{p}_{ij}\|$ a cui l'arco è associato, (contributo *geometrico*) nel nostro caso possiamo avere tre possibili distanze,
- in base alla struttura in cui è inserito, e quindi alle interazioni in gioco tra gli n nodi, (contributo *strutturale*) ad esempio se l'arco è inserito in un contesto più o meno rigido, esso può dare un contributo differente.

In base a quanto detto, possiamo osservare che il tratto di elevata pendenza nel grafico in Figura 5.7, che corrisponde all'aggiunta di quattro archi d_f relativi all'ultima faccia del cubo, è principalmente attribuibile a un contributo *strutturale*, poiché tutti questi archi hanno la stessa distanza internodale, ossia $\|\mathbf{p}_{ij}\|$ uguale. Tale comportamento è dovuto al completamento del "reticolo" esterno di archi, il quale conferisce una rigidità significativa al framework. Il tratto successivo del grafico, caratterizzato da una minore pendenza, potrebbe essere attribuito alla ridondanza nell'aggiunta degli ultimi archi, poiché la struttura è ormai sufficientemente rigida.

Nella *strategia 1*, si è partiti con un framework iniziale con $m = 0$, e successivamente sono stati aggiunti gradualmente archi l . Dopo aver aggiunto tutti gli archi l , sono stati introdotti gli archi d_f , procedendo faccia per faccia nel cubo, e infine sono stati aggiunti gli archi d_c .

Abbiamo inoltre considerato una seconda strategia di aggiunta, denominata *strategia 2*, che prevede, come nella *strategia 1*, l'aggiunta iniziale degli archi l , seguita dall'inserimento degli archi d_f , e infine degli archi d_c . La differenza principale risiede nel fatto che, anziché partire da un framework privo di archi, come nella *strategia 1*, nella *strategia 2* si parte da un framework *minimamente e infinitesimamente* rigido (MIBR). Il framework MIBR di partenza è riportato in Figura 5.9. Come si evince da Figura 5.8, si è partiti, quindi da un framework MIBR arbitrario con $m = 21$ e $\lambda_8 = 1.6 \times 10^{-4}$ e si sono aggiunti gli

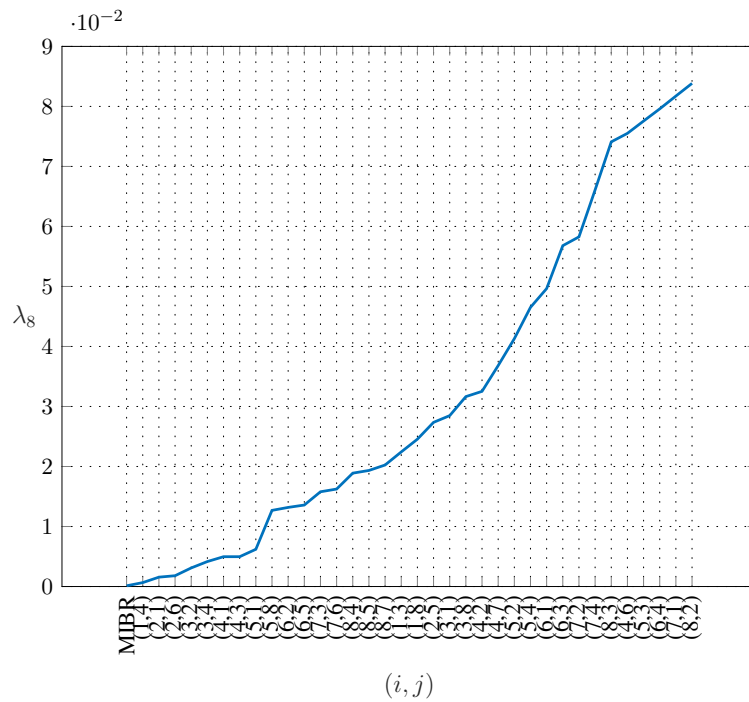


Figura 5.8: Interpolazione punti nel piano $(\lambda_8; (i, j))$, relativi ad un framework in $SE(3)$ con formazione cubica, con strategia di aggiunta 2.

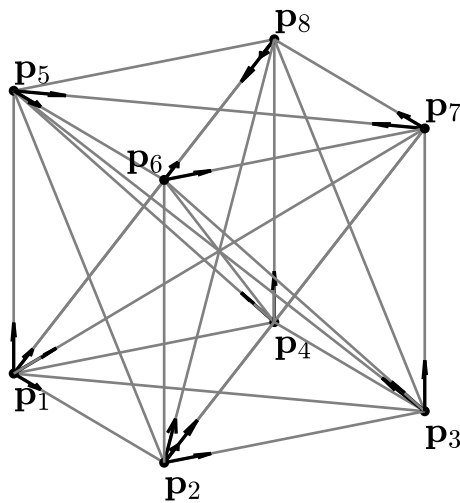


Figura 5.9: Framework MIBR in $SE(3)$ a formazione cubica.

archi mancanti passo per passo. Si nota anche in questo caso che abbiamo lo stesso trend finale, ovvero, il framework quando sta raggiungendo l'aggiunta di tutti gli archi associati alle caratteristiche geometriche delle facce (l e d_f), ha una variazione della rigidità che è massima. Nell'ultimo tratto si tratta di ridondanza nella rigidità, ed infatti la variazione lineare è minima.

È riportata in Figura 5.10 un'ultima strategia di aggiunta (*strategia 3*), dove questa volta partendo da 0 archi, si sono aggiunti non considerando il tipo di arco, ma le caratteristiche geometriche del cubo: cioè si sono aggiunti gli archi associati prima a tutte le facce, e poi alle diagonali del cubo. Si è partiti dalla faccia alla base inferiore, dopo quelle laterali e poi quella superiore. L'aggiunta per facce è stata fatta considerando prima i lati e poi le diagonali di ogni faccia. Bisogna tenere conto che gli spigoli del cubo sono in comune con due facce, quindi ad esempio nella faccia superiore abbiamo aggiunto solo le diagonali, poichè gli spigoli erano già stati aggiunti. Comunque si nota anche in questo caso lo stesso trend finale, rafforzando quindi le supposizioni fatte in precedenza.

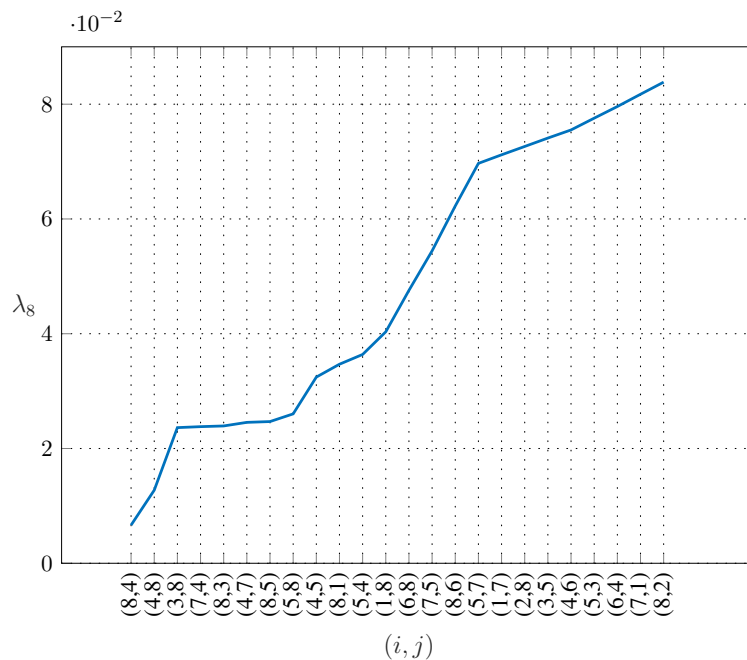


Figura 5.10: Interpolazione punti nel piano $(\lambda_8; (i, j))$, relativi ad un framework $SE(3)$ con formazione cubica, con strategia di aggiunta 3.

5.2.2 Formazione in $SE(2)$

Ora si è provato a fare lo stesso procedimento anche in $SE(2)$, implementando un sistema multi-agente con formazione esagonale in 2D, dove il lato l dell'esagono vale 5. Essendo $n = 6$ avremmo $|\mathcal{E}_{\mathcal{K}_6}| = 30$. In un esagono, a differenza di una formazione quadrata o pentagonale, si hanno tre possibili misure di distanze internodali, quindi in maniera analoga a quanto fatto per il cubo, possiamo classificare gli archi di una formazione esagonale in tre tipi: tipo l per archi associati alla minor distanza, ovvero il lato dell'esagono, tipo d_1 , per archi associati alla distanza media tra agenti, ovvero $\sqrt{3}l$ e tipo d_2 per archi associati alla distanza maggiore, ovvero $2l$. In Figura 5.11 è riportato un esempio di framework con formazione esagonale MIBR. In Figura 5.12 è riportato un plot realizzato con l'ag-

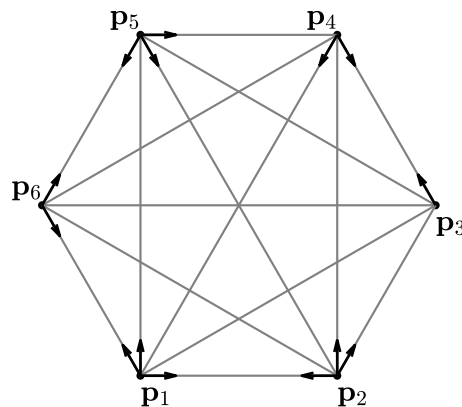


Figura 5.11: Framework MIBR in $SE(2)$ a formazione esagonale.

giunta di archi con *strategia 1* come per il caso $SE(3)$. Inizialmente sono stati aggiunti gli archi associati alle distanze internodali minori, seguiti da quelli con distanza media, e infine sono stati aggiunti gli archi corrispondenti alle distanze maggiori. L'aggiunta è stata eseguita per nodo andando in senso di rotazione antiorario partendo dal nodo 1. Il framework è diventato rigido all'aggiunta del terzo arco di tipo d_1 , cioè l'arco $(2, 4)$. Si nota come è sempre valida l'Equazione 5.8, però non è presente il trend finale visto in $SE(3)$. Anzi addirittura l'ultima aggiunta comporta un aumento notevole della rigidità passando da circa 3.5×10^{-2} a 4.3×10^{-2} . Si nota anche che in $SE(2)$ la curva si avvicina di più ad un andamento lineare rispetto al caso $SE(3)$. In Fig. 5.13 è riportato invece l'andamento dell'autovalore *critico* ponendo come framework iniziale $(\mathcal{G}_i, \mathbf{p})$ di aggiunta, un framework MIBR. Riassumendo, si può affermare che l'aggiunta sequenziale di archi

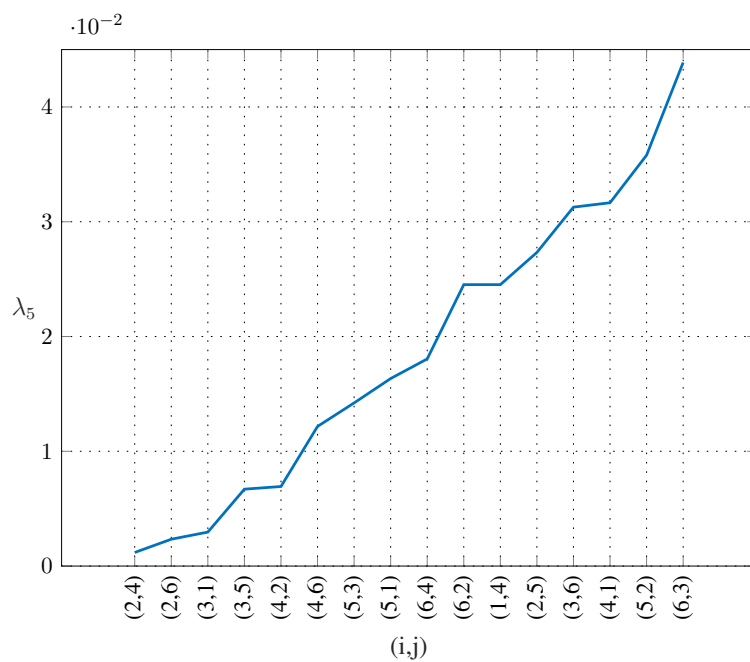


Figura 5.12: Interpolazione punti nel piano $(\lambda_5; (i, j))$, relativi ad un framework $SE(2)$ con formazione esagonale, con strategia di aggiunta 1.

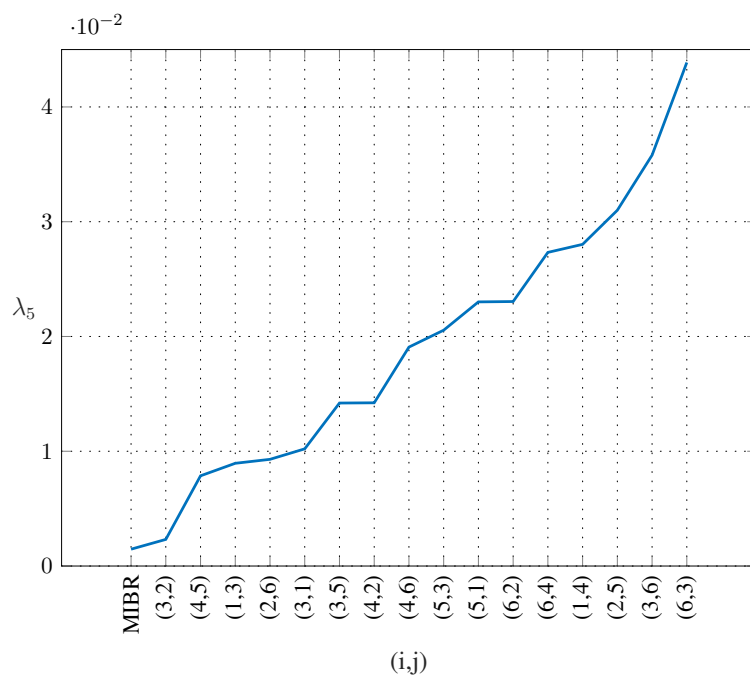


Figura 5.13: Interpolazione punti nel piano $(\lambda_5; (i, j))$, relativi ad un framework $SE(2)$ con formazione esagonale, con strategia di aggiunta 2.

comporta inevitabilmente un incremento infinitesimale della rigidità del framework. Questo aumento di rigidità non dipende strettamente dalle distanze tra gli agenti, ma risulta più influenzato dalla struttura delle interazioni tra di essi. Inoltre, è stato osservato che la struttura tridimensionale di un framework in $SE(3)$ porta a un incremento della rigidità differente rispetto al caso bidimensionale in $SE(2)$. Ciò può essere attribuito, in primo luogo, al numero di archi coinvolti nelle due configurazioni: infatti, in una formazione cubica in $SE(3)$, il numero di archi è significativamente maggiore rispetto a una formazione esagonale in $SE(2)$. In secondo luogo, questa differenza è dovuta al numero di gradi di libertà coinvolti, che è maggiore in $SE(3)$ rispetto a $SE(2)$, conferendo una maggiore complessità nella determinazione della rigidità.

5.2.3 Studio delle permutazioni di $\mathbf{A}(\mathcal{G})$

Nelle sezioni si è capito come la struttura delle interazioni, sia più importante rispetto alle singole distanze internodali. Ora come descritto nell'Equazione 5.8, l'aumento del numero di archi m , mi comporta sempre un aumento della rigidità, qualsiasi sia la strategia di aggiunta. Si è quindi cercato di avere una visione più vasta possibile del problema, e si è scelto di capire ancora più nel dettaglio come la struttura delle interazioni influenzi le rigidità. Nelle prossime pagine si esporranno i risultati ottenuti tramite una analisi delle permutazioni degli elementi della matrice $\mathbf{A}(\mathcal{G})$, traducibile come lo studio di tutti i possibili framework ottenibili dato un numero di agenti n , un numero di archi $m \in \{1, \dots, n(n-1)\}$ e il vettore $\chi_{\text{prel}}(\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n})$. Quindi per ogni possibile framework si è calcolato l'autovalore critico e confrontato con gli altri. Come abbiamo già visto in Equazione 5.3 $n(n-1)$ è la cardinalità dell'insieme degli archi di un grafo completo, con n pari al numero di agenti del sistema. Possiamo quindi scrivere il numero totale di permutazioni che si possono ottenere dato m ed n , come il coefficiente binomiale di $n(n-1)$ su m , i.e.

$$P(n^2 - n, m) = \binom{n^2 - n}{m} = \frac{(n^2 - n)!}{(n^2 - n - m)! m!}. \quad (5.10)$$

Fissato n e con m variabile, possiamo considerare l'Eq. 5.10 come una funzione binomiale in m . Questa funzione ha un'andamento a campana, con il punto di massimo in

corrispondenza di $m = n(n - 1)/2$. Un esempio di questa funzione è riportato in Figura 5.14, dove si è posto $n = 5$. Quindi ad esempio in un framework $SE(2)$ con formazione a pentagono, ed $m = 11$, abbiamo 167960 possibili framework. Quindi si è implementato in

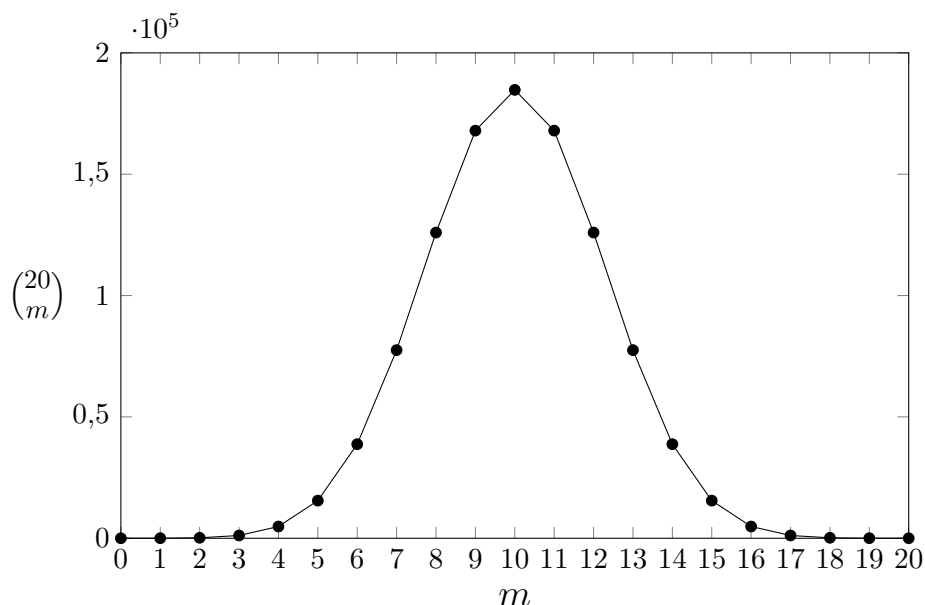


Figura 5.14: Grafico del coefficiente binomiale per $n = 5$ in funzione di m .

MatLab una funzione che mi permettesse di ottenere tutte le $\binom{n^2-n}{m}$ matrici di adiacenza associate ad ogni possibile framework. Il codice realizzato è riportato in Appendice A.2. Ora è facile intuire che per lo studio fatto, la richiesta di memoria per salvare ogni singola matrice è elevata. Si è optato quindi per formazioni con n contenuto. Prenderemo in esame infatti solo le formazioni con $n = 4, 5, 6$. Altro punto fondamentale è quello di dire che il caso di studio è stato fatto solo per formazioni in $SE(2)$, poichè a parità di n , in $SE(3)$ la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}_{\text{sim}}}$ risulta essere più grande, allungando quindi i tempi di calcolo degli autovalori.

Realizzata la funzione che mi calcola tutte le possibili matrici binarie con diagonale nulla, che chiameremo \mathbf{A}_{bin} , abbiamo calcolato per ogni framework $(\mathcal{G}, \mathbf{p})$, con $\mathbf{A}(\mathcal{G}) = \mathbf{A}_{bin}$, il λ_5 . Si è poi cercato il valore massimo ($\lambda_{5_{max}}$) e minimo ($\lambda_{5_{min}}$). In Appendice A.1 viene riportata una lista di framework con rigidità (λ_5) massima per ogni $m \in \{1, \dots, n(n-1)\}$. Nella Tabella 5.2.3 invece è riportata una tabella riassuntiva per una formazione pentagonale. Nella Tabella si è partiti da $m = 11$, poichè per $m = 10$ non esiste un framework rigido. Per il pentagono e per il quadrato, è stato possibile effettuare la ricerca del mas-

m	$\mathbf{A}(\mathcal{G}_{max})$	$\lambda_{5_{max}} (\times 10^{-2})$	$\lambda_{5_{min}} (\times 10^{-2})$
11	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	1,36	0
12	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	1,90	0
13	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	2,23	0
14	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	2,71	0
15	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	3,00	0
16	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	3,36	0
17	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	3,75	1,05
18	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	4,01	2,31
19	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	4,03	3,77

Tabella 5.1: Tabella λ_5 massimi e minimi riepilogati per numero di archi (m) di un sistema multi-agente a pentagono ($n = 5$).

simo autovalore per ogni m , scartando a priori gli m che non presentano $\lambda_{5_{max}} > 0$. Per l'esagono invece si sono cercati i $\lambda_{5_{max}}$ solo per $m = 24, 25, 26, 27, 28, 29$, poichè per $m < 24$ risultava troppo laborioso a livello computazionale. Si può notare dalla Tabella che raggiunto un certo m , che chiameremo m_{rig} non si hanno più configurazioni roto-flessibili, ovvero non esiste un framework con $\lambda_{5_{min}} = 0$. Studiando le varie formazioni si è capito che l' m che mi garantisce una rigidità per ogni framework \mathcal{G} , p ha un valore preciso, i.e.

$$m_{rig} = (n - 1)^2 + 1. \tag{5.11}$$

Questo può essere verificato a livello geometrico, si veda infatti la Figura 5.15 dove sono riportati gli unici framework roto-flessibili con $m_{rig} - 1$ archi: ogni altra formazione con lo stesso numero di archi è infinitesimamente rigida. All'aggiunta di un arco, quindi viene a mancare questa formazione *limite* e per ogni framework con m_{rig} archi risulta $\lambda_{5_{min}} > 0$. Quindi esiste un numero minimo di archi per il quale non può esistere un framework *roto-flessibile*, qualsiasi sia la scelta di m archi. Questo non corrisponde con il concetto di MIBR, infatti se aggiungessimo un arco al framework di Figura 5.15, questi non risulterebbe MIBR, ma infinitesimamente rigido: per di più ogni possibile permutazione non può portare a framework non rigidi.

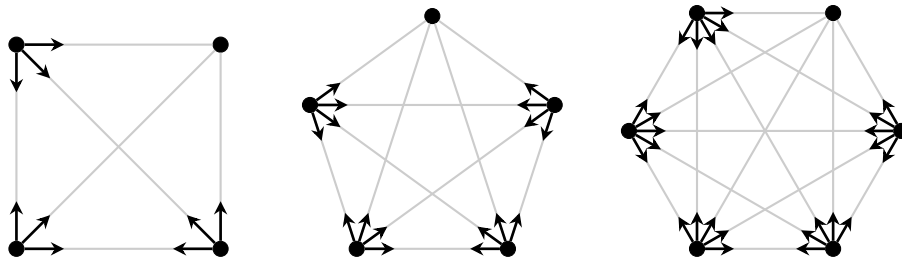


Figura 5.15: Configurazioni con massimo m in cui il sistema è *infinitesimally roto-flexible*.

Per capire come l'autovalore massimo vari in base al numero di archi, si è rappresentato graficamente l'insieme dei punti $(m, \lambda_{5_{max}})$, il quale è riportato in Figura 5.17, per la formazione a pentagono ed esagono studiate. Concentrandoci sulla Figura 5.17a si può notare come fino a $m = 18$ l'autovalore massimo aumenta abbastanza linearmente, da 18 a 19 invece resta praticamente lo stesso valore pari a circa 4×10^{-2} . Nella Figura sono riportati in rosso anche i punti $(m, \lambda_{5_{min}})$, formando così un regione nel piano, dove all'interno sono presenti tutti i possibili autovalori critici di una formazione pentagonale

regolare con $l = 5$.

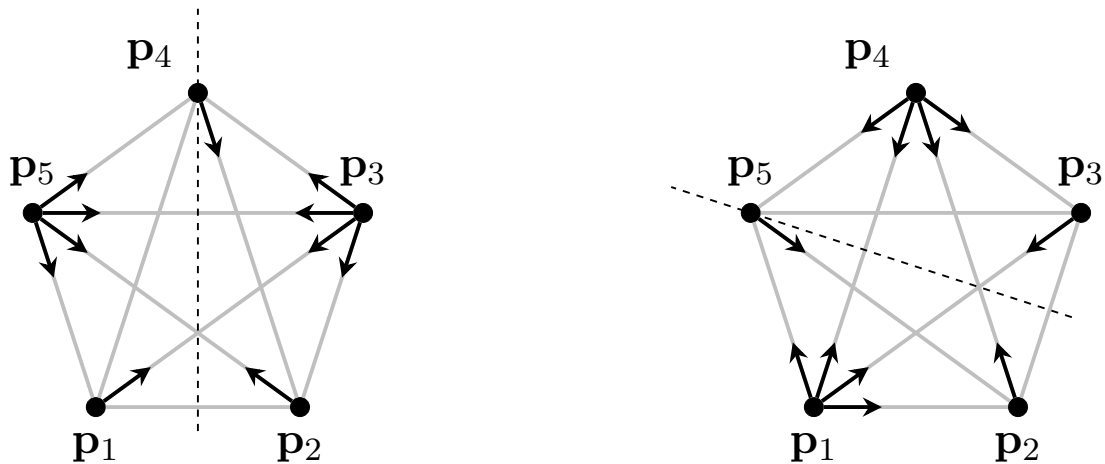


Figura 5.16: Esempio di framework con stesso λ_5 .

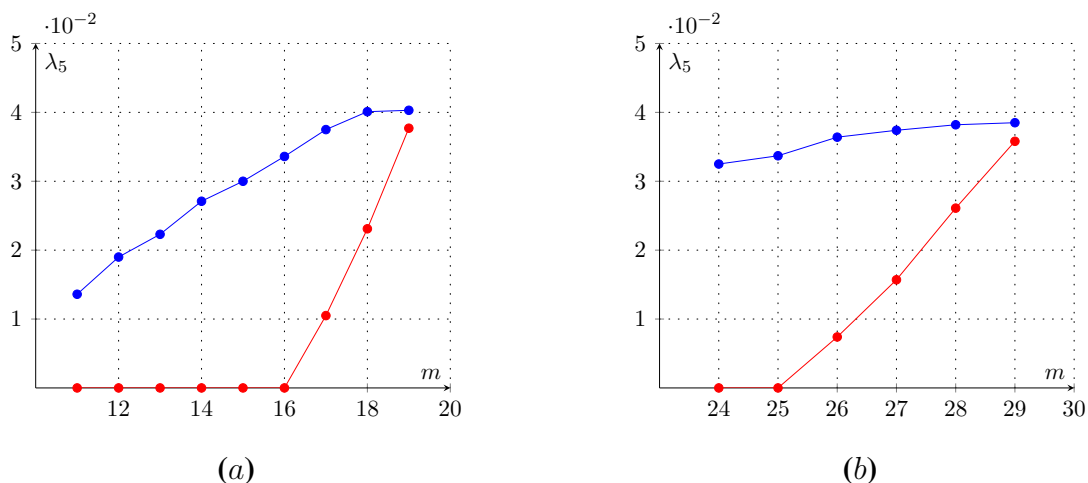


Figura 5.17: Distribuzione nel piano (m, λ_5) dei punti $(m, \lambda_{5_{max}})$ e $(m, \lambda_{5_{min}})$ per una formazione ad pentagono (a) e ad esagono (b).

Ogni autovalore massimo non rappresenta univocamente un framework, ma una classe di framework. Infatti come sappiamo dalla teoria vista nel Capitolo 3, la rotazione del framework non comporta variazioni della rigidità, infatti questa non altera le distanze e le relazioni fra agenti. É facile quindi intuire che se mantenessimo fissi nel piano i vettori \bar{p}_{ij} , e facessimo ruotare i nodi in un senso, in modo tale che il nodo v_1 vada al posto di v_n , v_n al posto di v_{n-1} e così via, otterremo un framework con matrice di adiacenza $A(\mathcal{G})$ diversa, ma con lo stesso λ_5 . Questo concetto possiamo formalizzarlo come una rotazione discreta del framework di angolo θ pari $k\theta_0$, dove $\theta_0 = \frac{2\pi}{n}$ con $k \in \{1, \dots, n\}$. Oltre alla

rotazione discreta, anche la *riflessione* di una formazione non comporta una variazione della rigidità, mantenendo inalterata la struttura delle iterazioni fra agenti. Nella Figura 5.16 sono riportate due formazioni pentagonali equivalenti, dove il framework di destra è ottenuto tramite rotazione discreta con $k = 1$ e riflessione rispetto l'asse tratteggiato. Prendendo come esempio il pentagono regolare, per ogni autovalore potremmo avere al massimo $2 \times 5 = 10$ framework associati ad esso, ovvero 2 configurazioni data dalla simmetria e 5 date dalla rotazione discreta. Si sottolinea che se il framework ha una struttura simmetrica, avremmo solo 5 framework equivalenti per autovalore.

Come ultimo ragionamento fatto sulle permutazioni degli archi, si è pensato di dare più importanza alle distanze internodali $\|\mathbf{p}_{ij}\|$. Si è quindi fissato un numero di agenti n , un numero di archi m e in aggiunta si sono anche fissati il numero di archi associati a distanze internodali diverse, ad esempio potremmo avere archi di tipo d se associato alle diagonali o di tipo l se associato al lato. Il numero del tipo di archi associati verrà indicato con $\#d$ e $\#l$. Inoltre per le assunzioni appena fatte dovrà essere sempre che $\#d + \#l = m$. Per una formazione quadrata si avranno al massimo $\#d = 4$, per un pentagono invece $\#d = 10$. Detto questo si sono cercati i $\lambda_{5_{max}}$ per ogni m variando $\#d$ sia per il quadrato sia per il pentagono. In Figura 5.18 e 5.19 sono riportati gli autovalori massimi per ogni coppia $(m, \#d)$, sia per una formazione quadrata, sia per una formazione pentagonale.

Nella Figura 5.19 si può notare come il numero di archi associati alle diagonali del

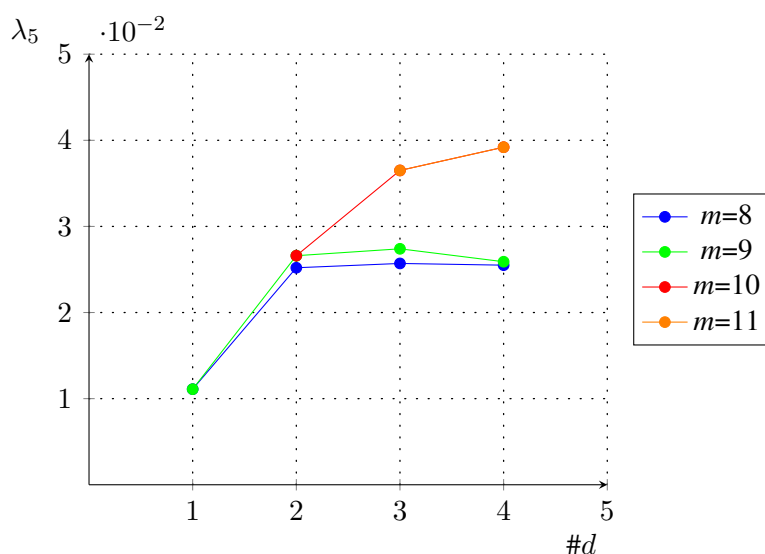


Figura 5.18: λ_5 massimo per ogni combinazione di numero di archi d in una formazione quadrangolare con $m=8,9,10,11$.

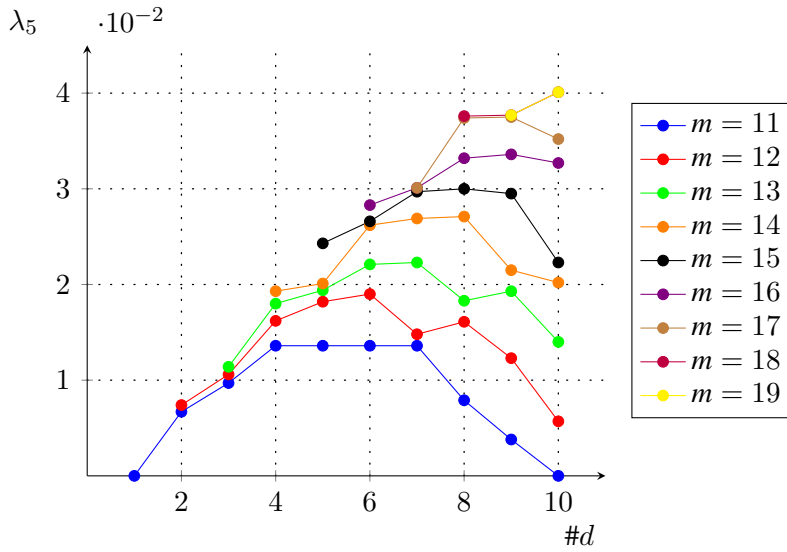


Figura 5.19: λ_5 massimo per ogni combinazione di numero di archi diagonale in una distribuzione pentagonale con $m=11, \dots, 18$.

pentagono influisca sul massimo λ_5 . Infatti si nota che il massimo valore delle curve si sposta verso destra all'aumentare di m . Questo può voler dire che ci deve essere un equilibrio all'interno della struttura affinché ci sia un valore elevato λ_5 . Infatti il picco si posiziona sempre in un intorno della metà di $\#d = m/2$. Si forma quindi un *cluster*, dove gli autovalori massimi si concentrano. Questo può essere utile al fine di scartare a priori un *framework* poco rigido. Ad esempio se avessimo un qualsiasi framework con $\#d = 1, 2, 3, 4$ sapremmo che questo non può essere a priori un framework a massima rigidità. Altra informazione che possiamo estrapolare dal grafico è che quando abbiamo pochi archi d , l'aggiunta di archi lato non fa aumentare la rigidità. Infatti in Figura 5.20 si nota come la variazione media di $\lambda_{5_{max}}$ tende a crescere aumentando il numero di archi d . Questo significa che sono più importanti le caratteristiche strutturali di interazione, rispetto a quelle geometriche. La variazione media $\Delta\lambda_{5_M}$ è ottenuta tramite

$$\lambda_{5_M} = \frac{\lambda_{5_{max\ max}} - \lambda_{5_{max\ min}}}{\Delta m}, \quad (5.12)$$

dove $\lambda_{5_{max\ max}}$ e $\lambda_{5_{max\ min}}$ sono rispettivamente il valore più alto e più basso di $\lambda_{5_{max}} \forall \#d$, con m variabile: questo corrisponde quindi all'autovalore di un framework con un numero di archi diagonali fissato e numero di archi l più alto o più basso possibile, in base al valore di m . Si ricorda inoltre che per $m = 10$ non ci sono configurazioni infinitesimamente

rigide.

Infine sono riportati in Fig. 5.21 in un grafico a tre assi gli autovalori critici ottenuti considerando che in un esagono ci sono due tipi di diagonali: chiameremo d_1 quella minore e d_2 quella maggiore. I risultati ottenuti sono in linea con quello detto in precedenza per una formazione pentagonale. Lo studio relativo alla formazione esagonale è stato condotto a partire da $m=25$ in poi, e quindi con un numero di archi già elevato che mi garantisce elevata rigidità, il grafico $m = 25$ evidenzia come il *cluster* si crea in una zona con $\#d_1$ e $\#d_2$ elevato. In particolare il punto massimo per ogni grafico, ha sempre un numero $\#d_2 = 6$, quindi massimo. È prevedibile che riducendo il numero di archi m , l'autovalore massimo per ogni m sia associato a una riduzione percentuale rispetto al totale degli archi di tipo d_1 e d_2 .

Riassumendo i dati ottenuti in questa sezione, possiamo dire che la rigidità dipende fortemente dalla struttura delle interazioni fra agenti, e che questa struttura dipende dal rapporto che c'è fra le distanze internodali e il numero di archi associati a queste distanze, determinando così una forte analogia fra rigidità *virtuale* in contesti di controllo della formazione, con rigidità di strutture geometriche fisiche.

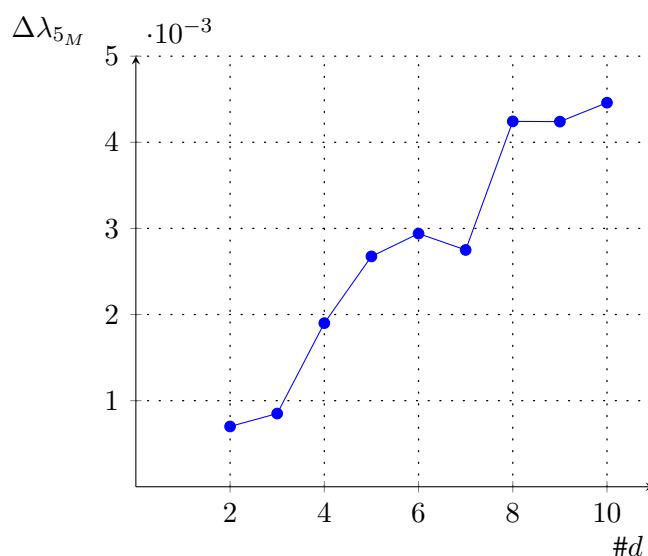


Figura 5.20: Variazione media di $\lambda_{5_{max}}$ per ogni $\#d$.

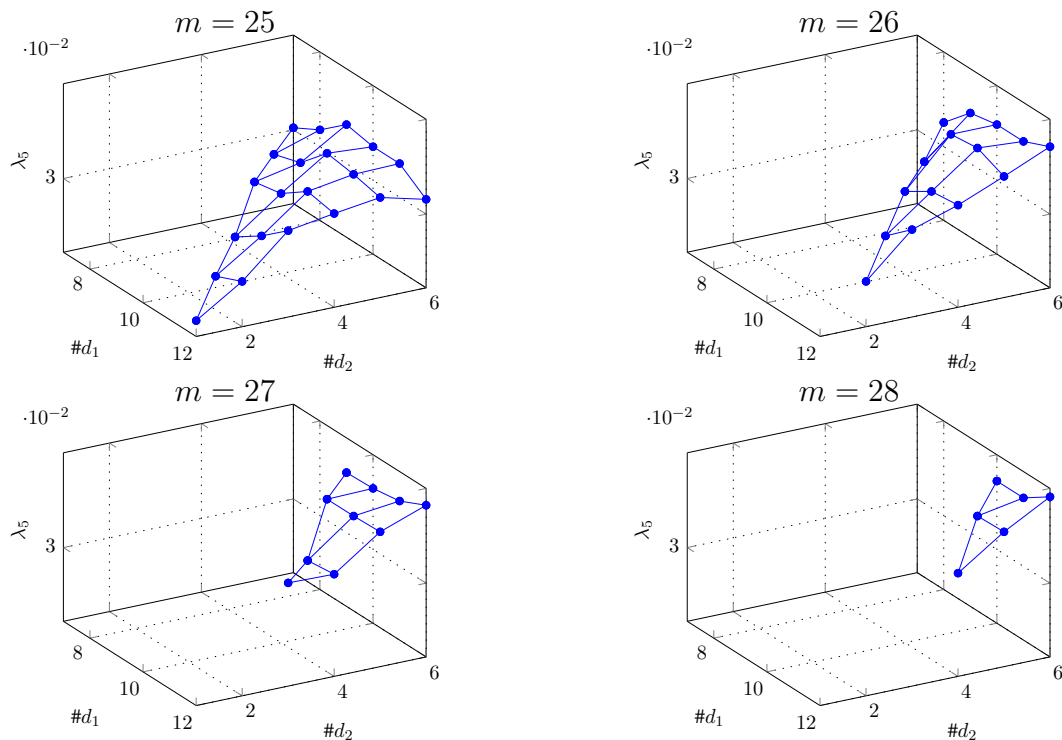


Figura 5.21: λ_5 massimo per ogni combinazione di numero di archi diagonale con $m = 25, 26, 27, 28$.

5.3 Caso di studio: formazione triangolare

In questa ultima sezione, si è provato a studiare una formazione triangolare in $SE(2)$, variandone la posizione di alcuni nodi, in modo tale da capire quale formazione triangolare sia la più rigida. L'analisi fatta quindi non va a studiare le interazioni, ma solo le configurazioni geometriche degli agenti. Si sono analizzati tre possibili casi in cui si è fatto variare \mathbf{p}_3 con percorsi diversi. Le premesse sono che in tutti e tre i casi di studio

- il grafo associato sia completo, i.e. \mathcal{K}_3 ,
- il framework di partenza ha formazione triangolare equilatera con $l = 5$, e con $\lambda_5 = 8,8 \times 10^{-2}$,
- il framework finale ha formazione allineata e quindi $\lambda_5 = 0$.

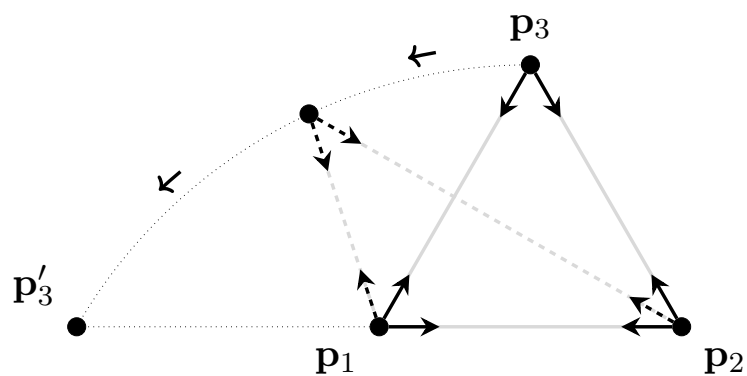
Quindi le condizioni di partenza e finali sono le stesse, quello che cambia l'andamento dell'autovalore è proprio il tragitto fatto dal punto di partenza a quello di arrivo. Si indi-

cheranno con \mathbf{p}_i le coordinate dei nodi di partenza e con \mathbf{p}'_i le coordinate finali dei nodi. Le coordinate sono scelte in modo arbitrario.

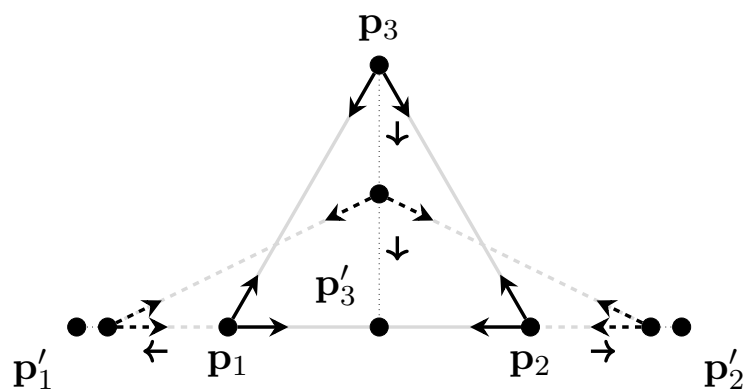
In Figura 5.22a si è fatto ruotare il nodo v_3 attorno ad un centro $\neq \mathbf{p}_1$ in modo tale da avere la distanza $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_3\| = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3\|$ ed un'altezza h dei triangoli ottenuti durante il movimento, inferiore a quella iniziale h_0 . Nella Figura 5.22b invece si è fatto traslare verso il basso il nodo 3, lungo l'altezza h_0 . I punti \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 anch'essi traslano, ma in senso orizzontale con versi opposti, mantenendo il triangolo isoscele con lati obliqui fissi. Nella Figura 5.22c si è fatto traslare il nodo 3 verso il basso in maniera analoga al caso precedente, solo che i punti \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 restano fissi: il triangolo resta isoscele durante il moto di \mathbf{p}_3 , con base fissa e lati obliqui variabili.

In Figura 5.23 sono riportati dei grafici ottenuti calcolando l'autovalore λ_5 di ogni framework ottenuto durante il movimento dei nodi nei tre casi esaminati, rapportato al parametro percentuale $1 - h/h_0$. Si è fatto questo per avere una base delle ascisse comune a tutte e tre le configurazioni di percorso della Figura 5.22. Si può notare come tutte e tre le curve sono decrescenti, e questo è plausibile, poichè diminuendo l'altezza h si tende all'allineamento degli agenti e quindi si tende alla roto-flessibilità. Il tragitto dove il framework si è mantenuto più rigido è quello di Fig.5.22c, poichè è quello che ha mantenuto le distanze internodali più vicine. In ordine decrescente di rigidità troviamo quello in 5.22b, infatti a differenza di prima abbiamo due distanze fisse, ma la base si allarga, è ovvio quindi che i framework ottenuti sono meno rigidi di quelli ottenuti in *c*. Il percorso che dà come risultato framework meno rigidi è quello in 5.22a, infatti è l'unico dei tre che come risultato del movimento di \mathbf{p}_3 produce tutti framework con formazione triangolare *scalena*: una struttura non simmetrica e quindi intuitivamente poco rigida.

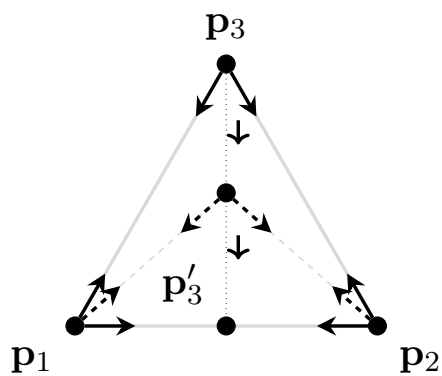
In conclusione, possiamo dire che in una formazione triangolare, vista la semplicità e il numero minimo di agenti ($n = 3$), è abbastanza semplice capire quale sia la struttura più rigida a parità di grafo associato \mathcal{K}_3 : ovvero la formazione equilatera. Come abbiamo visto un triangolo scaleno risulta meno rigido di uno equilatero e di uno isoscele, e quello isoscele risulta essere meno rigido di uno equilatero, sia se riduciamo l'altezza (tendenza ad allineamento) e sia se aumentiamo l'altezza (distanza internodale aumenta e rigidità cala). Il concetto appena espresso vale quando stiamo parlando di formazioni con distanza internodale media simile, e non troppo diversa. Quanto appena detto possiede un forte



(a)



(b)



(c)

Figura 5.22: Studio λ_5 da disposizione triangolare equilatera ad allineata, con tre percorsi di p_3 diversi.

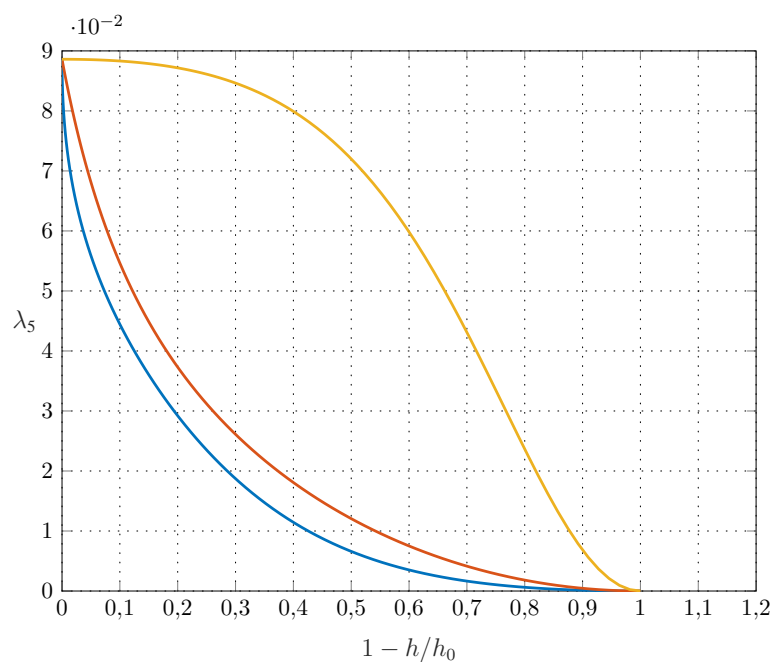


Figura 5.23: Confronto tra i grafici di λ_5 ottenuti dalla Fig.5.22a in (blu), Fig.5.22b in (rosso) e Fig.5.22c in (giallo).

parallelismo con la rigidità di tipo geometrica per un framework. Si veda come esempio [20].

Nella presente sezione non si è affrontato il caso in $SE(3)$ poichè un'analisi simile sarebbe stata molto più complessa, e non avrebbe portato agli stessi risultati, visto che ci sono molte più variabili in gioco rispetto al caso in $SE(2)$.

6

CONCLUSIONI

In questo ultimo capitolo si procede con un breve riassunto dei risultati ottenuti e di conseguenza cosa può comportare l'analisi teorica fatta nella tesi.

L'analisi condotta in questa tesi ha l'obiettivo di capire come la configurazione spaziale degli agenti e la struttura delle iterazioni fra agenti possa dare un contributo quantitativo alla rigidità. In primo momento si è cercato di trovare un parametro matematico che mi potesse dare un valore quantitativo di rigidità, si sono poi studiate le varie dipendenze ottenendo uno schema complessivo del ruolo che hanno configurazione e iterazioni fra gli agenti.

Nel Capitolo 2 si sono elencate le principali basi teoriche riguardo i grafi e le matrici di rotazione in 2D e 3D al fine di dare una solida base per capire quello che è stato esposto nei capitoli successivi. Le nozioni relative alle matrici di rotazione sono state introdotte esclusivamente per supportare la parte teorica del Capitolo 3. Successivamente, si è osservato che tali matrici si rivelano superflue per il calcolo dell'autovalore *critico*.

Nel Capitolo 3 si è visto come la rigidità si riduca a un calcolo numerico relativamente semplice, ovvero il $\text{rank}(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})))$. È stato utile capire anche come un framework rigido si muova nello spazio mantenendo invariate le misure di *bearing*. In MatLab sono state fatte diverse prove per una verifica numerica di quanto riportato nel Capitolo 3, al fine di capire meglio i concetti esposti. Ad esempio muovendo una formazione multi-agente secondo dei vettori arbitrari di velocità lineare e angolare appartenente a $\text{Ker}(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}}(\chi(\mathcal{V})))$, si possono capire subito le differenze tra un framework rigido e uno non rigido. Il framework ottenuto dopo il movimento infatti, rimaneva della stessa "forma" se il framework era rigido, subiva delle deformazioni se invece non era rigido.

Nel Capitolo 4 si sono analizzati diversi risultati matematici che ci hanno permesso di ottenere da che parametri dipende e da che parametri è invariante l'autovalore critico, ottenendo quindi una formula generale della matrice simmetrica di rigidità.

Nel Capitolo 5 in base alle dipendenze ottenute dal Capitolo 4 si è cercato di capire il ruolo che può avere la configurazione degli agenti nello studio della rigidità intesa come scalabilità di una precisa formazione. Si è visto che il rapporto è di tipo inversamente proporzionale. Come passo successivo, studiando il numero di interazioni fra agenti, abbiamo ottenuto come risultato dei valori di rigidità che aumentano all'aumentare di m e riscontrato dei trend lineari nel caso di framework in $SE(3)$. Abbiamo poi considerato delle particolari formazioni e studiato le varie permutazioni degli archi del grafo \mathcal{G} , mantenendo fissi il numero di interazioni. Abbiamo analizzato quindi il ruolo che hanno

i tipi di archi associati a distanze inter-nodali diverse: da questo studio abbiamo ottenuto dei grafici che possono servirci come linee guida per capire quali framework possano essere più o meno rigidi rispetto ad altri. Il numero di interazioni presenti può influire o meno a seconda di quanti archi associati a distanze corte o lunghe si possono avere. Il tipo di iterazioni, invece, si è visto che deve essere equilibrato al fine di garantire un'elevata rigidità.

L'interazione fra agenti quindi influenzano la rigidità in due possibili maniere:

- in base al suo numero
- in base alla relazione con le altre interazioni

Si ricorda che per struttura si riferisce matematicamente parlando alla matrice di adiacenza $A(\mathcal{G})$. In termini geometrici con struttura si riferisce invece alle possibili combinazioni numeriche e spaziali del tipo di arco associato a distanze internodali diverse. Concentrandosi sulla struttura, è emerso che, a parità di numero di iterazioni, la rigidità del framework varia in funzione del numero di archi associati alle distanze internodali maggiori. In particolare, si è osservato che i valori più elevati di rigidità si ottengono incrementando il numero di iterazioni "distanti", evidenziando una relazione inversa rispetto alla dipendenza di ciascun collegamento dalla distanza internodale.

6.1 Spunti per lavori futuri

Concludendo, come spunto per lavori futuri, si potrebbe pensare di condurre uno studio più approfondito analizzando un numero maggiore di framework, includendo un numero indefinito di agenti e implementando casistiche più complesse. L'obiettivo sarebbe quello di ottenere una visione più ampia e sviluppare rappresentazioni numeriche precise che, data una configurazione spaziale descritta dal vettore $\chi_{p_{rel}}$ e dal numero e tipo di interazioni descritte dalla matrice di adiacenza $A(\mathcal{G})$, consentano di determinare direttamente il valore dell'autovalore *critico*, senza doverlo calcolare esplicitamente dalla matrice simmetrica.

Un ulteriore possibile sviluppo potrebbe riguardare lo studio combinato della *bearing rigidity* con la rigidità geometrica dei framework, approfondendo il ruolo delle configurazioni

spaziali e delle interazioni fra gli agenti. Inoltre, considerando che il presente lavoro ha un carattere prevalentemente teorico, sarebbe interessante implementare nella realtà dei sistemi multi-agente analoghi a quelli descritti nella tesi, al fine di validare sperimentalmente i risultati ottenuti. In tale contesto, sarebbe utile analizzare anche l'influenza del rumore delle misurazioni effettuate dai sensori sulle proprietà di rigidità e il relativo impatto sulle configurazioni e interazioni fra gli agenti.

A

APPENDICE

A.1 Elenco dei *framework* con λ_5 massimo con diversi valori di m e di n

$$\mathbf{A}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

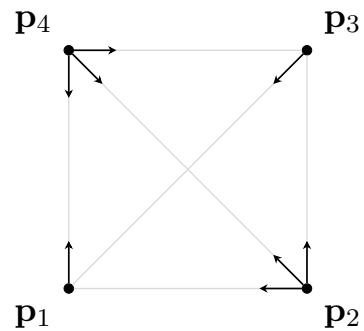


Figura A.1: Configurazione con $m = 8$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0257$.

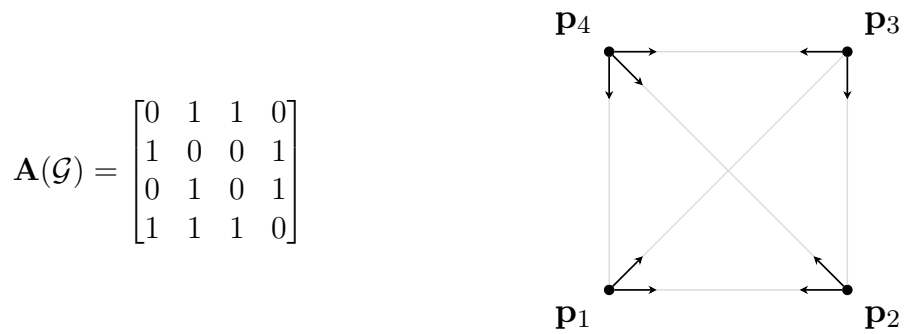


Figura A.2: Configurazione con $m = 9$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0274$.

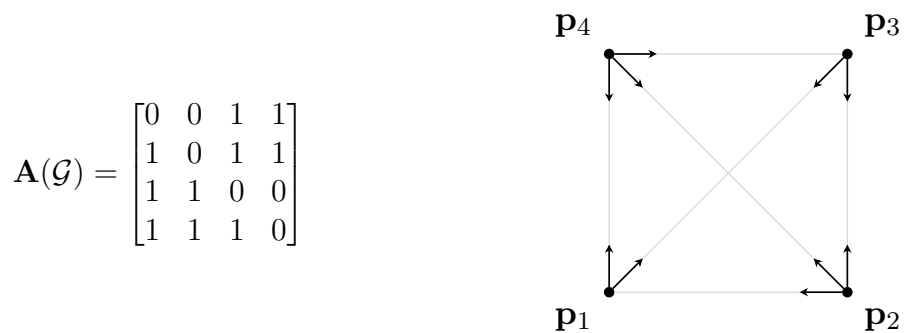


Figura A.3: Configurazione con $m = 10$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,039200$.

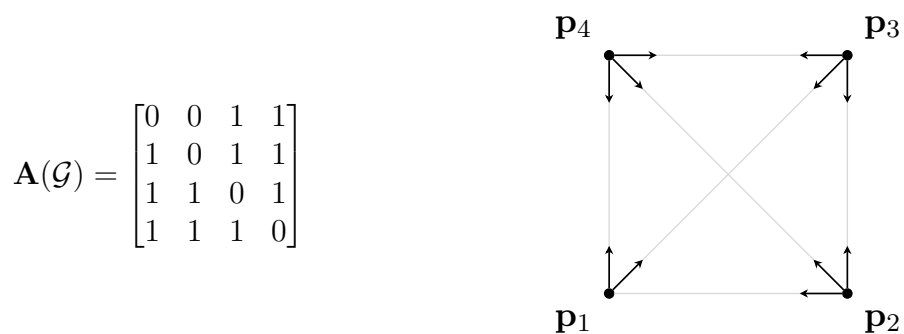


Figura A.4: Configurazione con $m = 11$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,039205$.

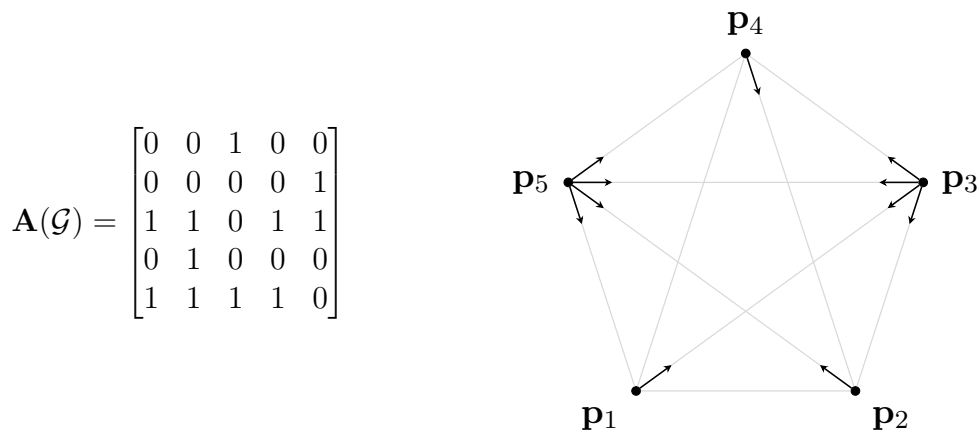


Figura A.5: Configurazione con $m = 11$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0136$

$$A(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

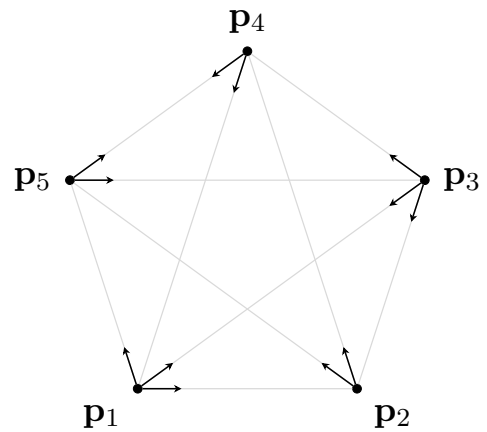


Figura A.6: Configurazione con $m = 12$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0190$

$$A(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

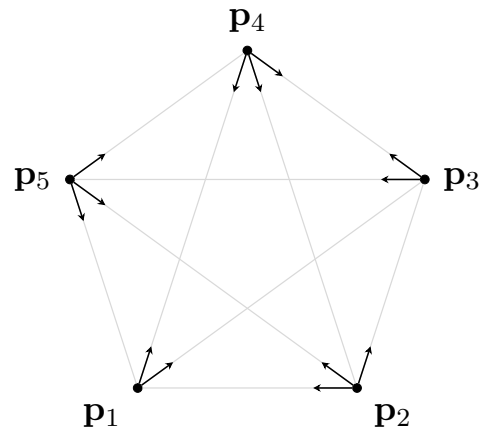


Figura A.7: Configurazione con $m = 13$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0223$

$$A(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

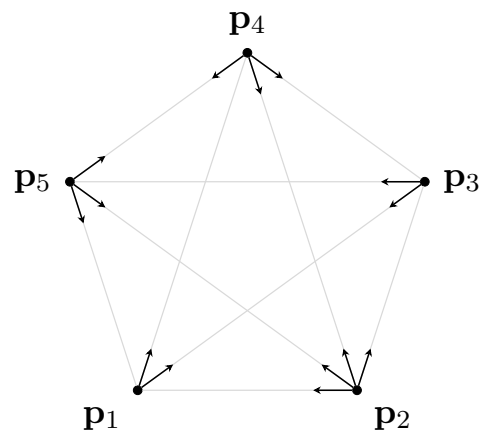


Figura A.8: Configurazione con $m = 14$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0271$

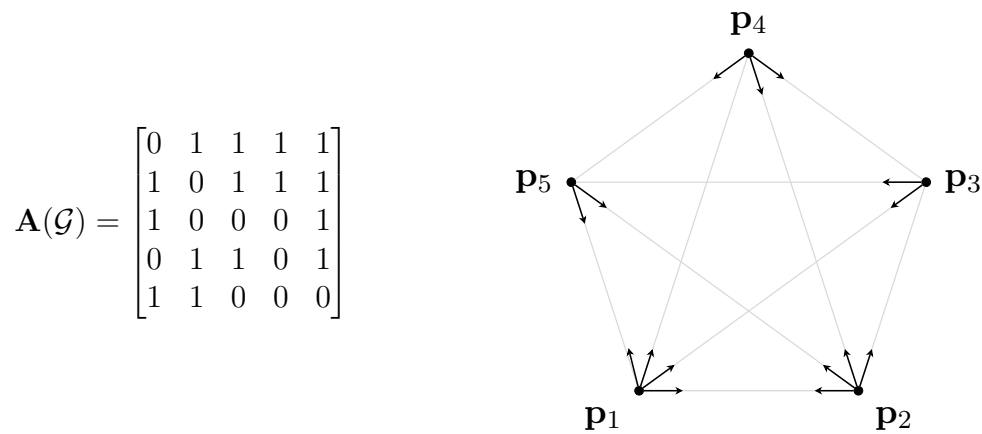


Figura A.9: Configurazione con $m = 15$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0300$

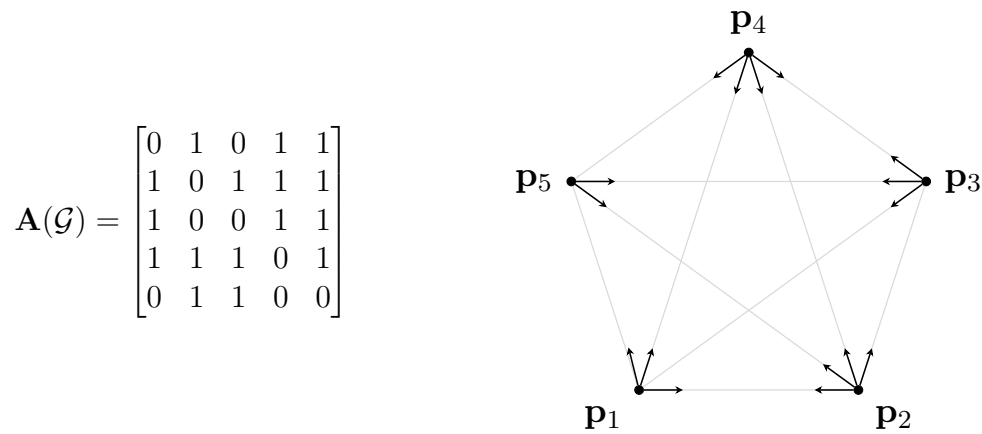


Figura A.10: Configurazione con $m = 16$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0336$

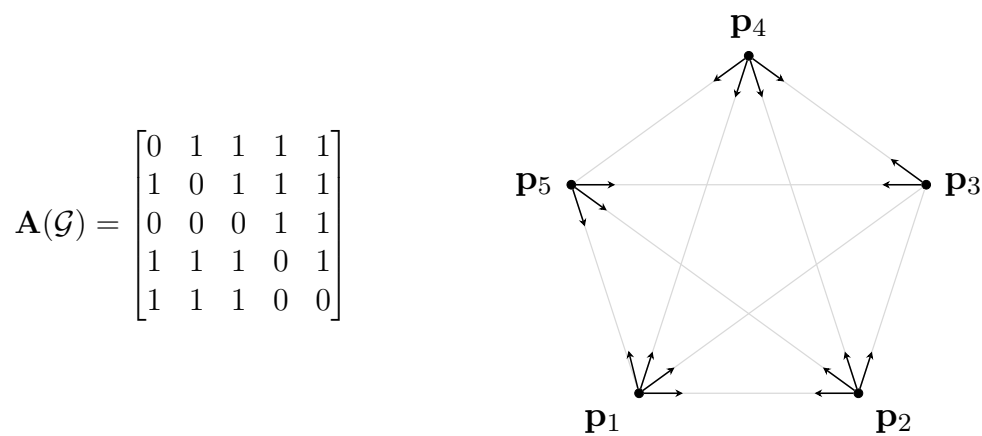


Figura A.11: Configurazione con $m = 17$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0375$

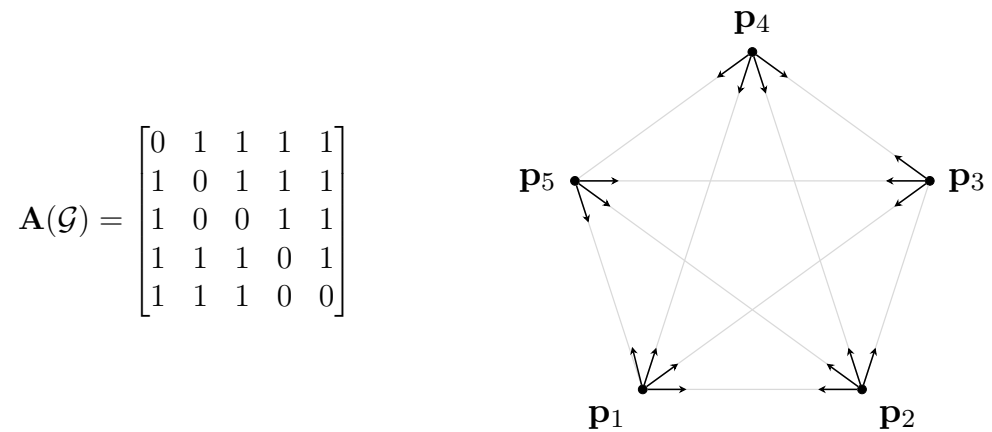


Figura A.12: Configurazione con $m = 18$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0401$

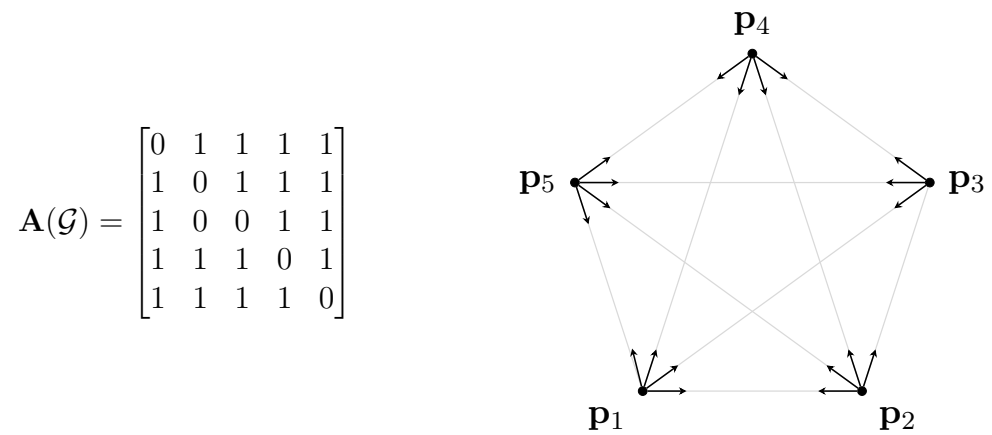


Figura A.13: Configurazione con $m = 19$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0403$

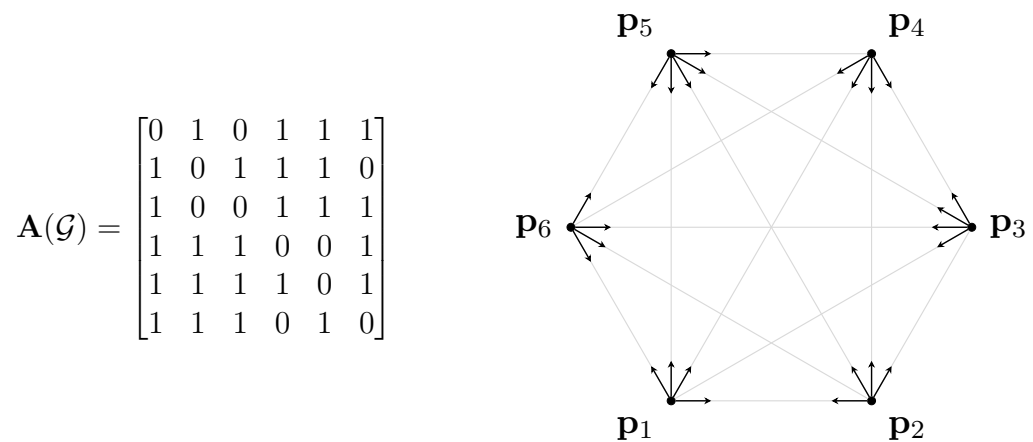


Figura A.14: Configurazione con $m = 25$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0337$

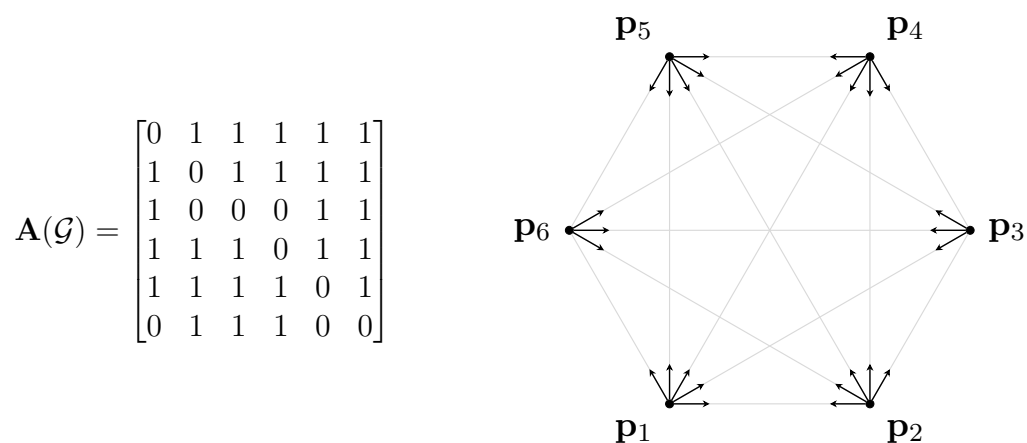


Figura A.15: Configurazione con $m = 26$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0364$

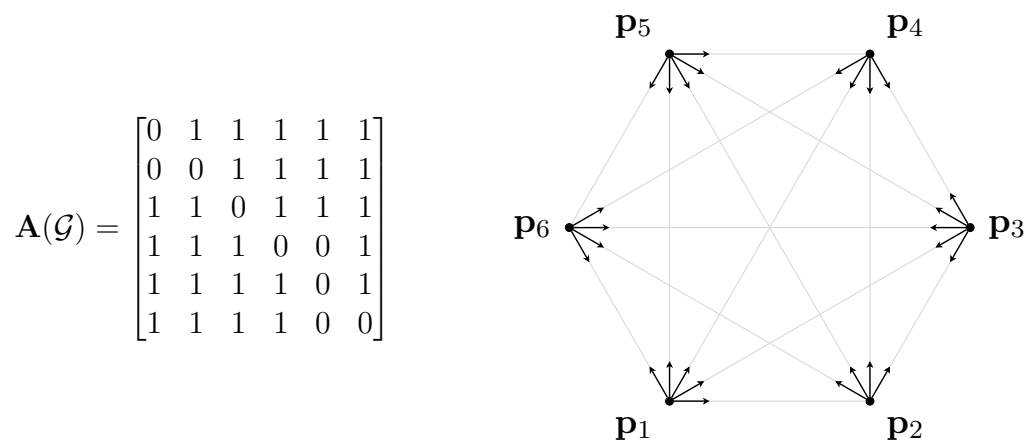


Figura A.16: Configurazione con $m = 27$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0374$

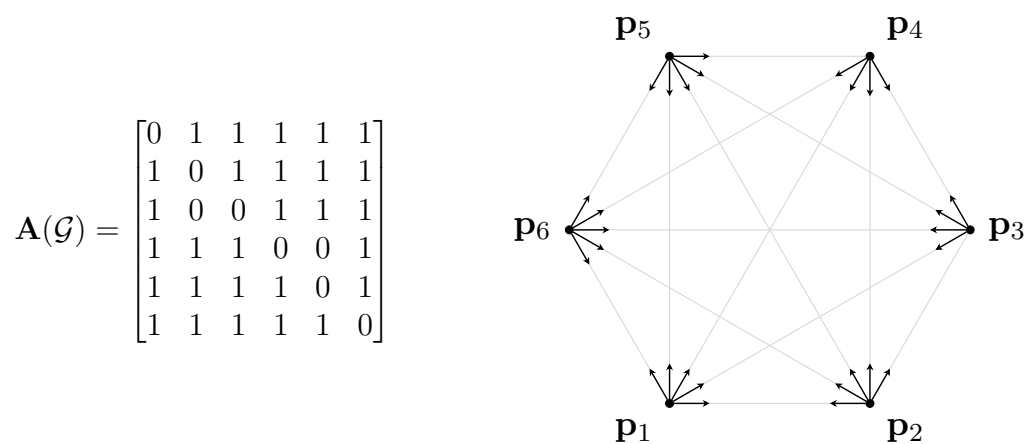


Figura A.17: Configurazione con $m = 28$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0382$

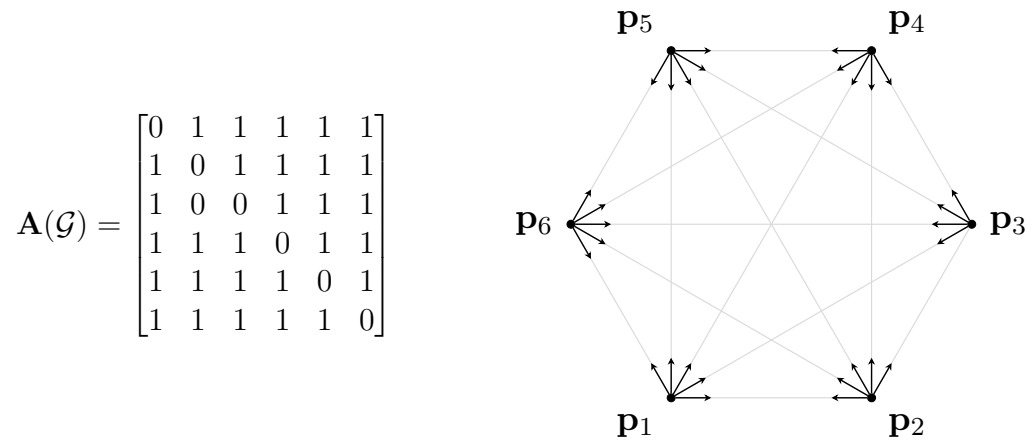


Figura A.18: Configurazione con $m = 29$ con $\lambda_{5_{max}} = 0,0385$

A.2 Codice MatLab usato

```

1 function matrices = so(n, M)
2
3 % Genera tutte le combinazioni di posizioni per M "1"
4 indices = 1:(n * (n-1));
5 combs = nchoosek(indices, M);
6 numCombinations = size(combs, 1);
7
8 % Inizializza la cella per immagazzinare le matrici
9 matrices = cell(nchoosek(n*(n-1),M), 1);
10
11 for h = 1:numCombinations
12     array = zeros(1, n* (n-1));
13     array(combs(h, :)) = 1;
14     Matr = reshape(array, n-1, n);
15     MatrSup=Matr;
16     MatrInf=Matr;
17     for i=1:(n-1)
18         for j=1:n
19             if j <= i
20                 MatrSup(i, j)=0;
21             else

```

```
22         MatrInf(i,j)=0;
23     end
24 end
25 end
26 MatrSup1=[MatrSup;zeros(1,n)];
27 MatrInf1=[zeros(1,n);MatrInf];
28 matrices{h}=zeros(n,n)+MatrSup1+MatrInf1;
29
30 end
31 end
```

BIBLIOGRAFIA

- [1] Gordon Christie, Adam Shoemaker, Kevin Kochersberger, Pratap Tokekar, Lance McLean, and Alexander Leonessa. "Radiation search operations using scene understanding with autonomous UAV and UGV". *Wiley Periodicals, Inc.*, 2017.
- [2] Yefeng Liu, Jingjing Liu, Zengpeng He, Zhenhong Li, Qichun Zhang, and Zhengtao Ding. "A Survey of Multi-Agent Systems on Distributed Formation Control". *Unmanned Systems*, 2024.
- [3] Samuel Coogan and Murat Arcak. "Scaling the size of a formation using relative position feedback". *Automatica*, 2012.
- [4] Myoung-Chul Park, Kyungmin Jeong, and Hyo-Sung Ahn. "Formation stabilization and resizing based on the control of inter-agent distances". *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014.
- [5] L Asimow and B Roth. "The rigidity of graphs, II". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1979.
- [6] R. Connelly. "Generic global rigidity," *Discrete and Computational geometry*. *Discrete and Computational geometry*, vol. 33, no. 4, pp. 549–563, 2005.
- [7] Ivan Izmestiev. "Infinitesimal rigidity of frameworks and surfaces". *Lectures on Infinitesimal Rigidity*, 2009.
- [8] Bill Jackson. "Notes on the rigidity of graphs". In *Levico Conference Notes*, volume 4, 2007.
- [9] Michael F Thorpe and Phillip M Duxbury. *"Rigidity theory and applications"*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [10] Daniel Zelazo, Antonio Franchi, Frank Allgöwer, Heinrich H Bühlhoff, and Paolo Robuffo Giordano. "Rigidity Maintenance Control for Multi-Robot Systems.". In *Robotics: science and systems*, volume 2012. Sydney, Australia, 2012.
- [11] Daniel Zelazo, Antonio Franchi, Heinrich H Bühlhoff, and Paolo Robuffo Giordano. "Decentralized rigidity maintenance control with range measurements for multi-

- robot systems". *The International Journal of Robotics Research*, 34(1):105–128, 2015.
- [12] Xiaoyu Cai and Marcio De Queiroz. "Adaptive rigidity-based formation control for multirobotic vehicles with dynamics". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(1):389–396, 2014.
- [13] Russell Merris. "Laplacian Matrices of Graphs: A Survey". *Elsevier Science Inc.*, 1994.
- [14] D. Zelazo, A. Franchi, and P.R. Giordano. "Rigidity theory in $SE(2)$ for unslaved relative position estimation using only bearing measurements". *IEEE European Control Conference*, 2014.
- [15] D. Zelazo, A. Franchi, and P.R. Giordano. "Bearing-only formation control using an $SE(2)$ rigidity theory". *IEEE Conference on Decision and Control*, 2015.
- [16] G. Michieletto, A. Cenedese, and A. Franchi. "Bearing Rigidity Theory in $SE(3)$ ". *IEEE Conference on Decision and Control*, 2016.
- [17] K. B. Petersen and M. S. Pedersen. "The Matrix Cookbook. Version: November 15, 2012". 2012.
- [18] Giulia Michieletto, Angelo Cenedese, and Daniel Zelazo. "A Unified Dissertation on Bearing Rigidity Theory". *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021.
- [19] Charles F. Van Loan. "The ubiquitous Kronecker product". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1999.
- [20] Bernd Schulze and Shin Ichi Tanigawa. "Infinitesimal rigidity of symmetric bar and joint frameworks". *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2015.